

ECG-1

Colles de mathématiques approfondies

385 EXERCICES CORRIGÉS

- ▶ Exercices de calcul
- ▶ Exercices de raisonnement
- ▶ Exercices avec questions ouvertes
- ▶ Rappel de cours

NOUVEAUX
PROGRAMMES !

Samuel Baumard
Christophe Fiszka
Jean-François Husson

ellipses

ECG-1

NOUVEAUX
PROGRAMMES

Colles de mathématiques approfondies

Samuel Baumard

Professeur agrégé en ECE2 au lycée Claude Fauriel (Saint-Étienne)

Christophe Fiszka

Professeur agrégé en ECG1 au lycée Jacques Decour (Paris)

Jean-François Husson

Professeur chaire supérieure ayant enseigné
aux lycées Pierre de Fermat (Toulouse) et Jacques Decour (Paris)



Avant-propos

Bienvenue en ECG !

En arrivant en classe préparatoire, on peut avoir quelques appréhensions concernant les interrogations orales de mathématiques. Rapidement, elles deviendront moins impressionnantes et vous comprendrez que cette spécificité du système des « prépas » est extrêmement efficace pour assimiler les notions et progresser. Néanmoins, le cours étant conséquent, l'étudiant ne se sent pas toujours au point lorsqu'arrive l'interrogation. Nous lui proposons une gamme d'exercices accompagnée de rappels de cours pour lui permettre de s'entraîner davantage.

Dans l'objectif d'une préparation efficace, les exercices de ce livre sont classés en trois catégories :

- Les « exercices axés sur le calcul ». Ils ont pour objectif, via la pratique calculatoire, de vérifier la connaissance et la compréhension des notions du cours.
- Les « exercices axés sur le raisonnement ». Ces exercices demandant plus de recul, leur objectif est de renforcer l'assimilation des concepts.
- Les « exercices avec questions ouvertes ». Ces exercices amènent l'étudiant à avoir sa propre réflexion, à construire sa démonstration ou son contre-exemple selon les cas.

Ce livre complet vous propose une grande variété d'exercices : du classique de concours à l'exercice original, de l'exercice d'application directe du cours à l'exercice abstrait. Les corrections figurent après la liste des énoncés. Elles sont accompagnées de nombreux graphes et schémas afin de faciliter la compréhension.

L'ouvrage est complété par des rappels de cours qui comprennent les principaux théorèmes et définitions à connaître. Organisés sur une ou deux doubles pages, ces rappels vous permettront d'avoir accès en un coup d'œil à l'essentiel du chapitre.

Enfin permettons-nous un conseil. Parmi vos camarades de classe, les membres de votre « trinôme » seront ceux que vous côtoierez le plus. N'hésitez pas à en faire de véritables partenaires en partageant les exercices de ce livre. Vous pourrez soit travailler le même exercice et confronter vos solutions, soit travailler chacun un exercice différent, lire le corrigé proposé et exposer oralement une solution à vos camarades.

Nous vous souhaitons tous nos vœux de réussite.

Bonne lecture !

Sommaire

Semestre I

1	Raisonnements	3
2	Calculs et ordres sur l'ensemble des réels	21
3	Ensembles, cardinaux	39
4	Sommes et produits	51
5	Fonctions usuelles	69
6	Applications	87
7	Polynômes	101
8	Calcul matriciel	115
9	Systèmes linéaires	147
10	Introduction aux espaces vectoriels	157
11	Exemples de suites récurrentes	171
12	Étude globale des suites	191
13	Limites	217
14	Continuité	225
15	Dérivation	245
16	Intégration sur un segment	265
17	Probabilités sur un univers fini	285
18	Variables aléatoires finies	295
19	Lois usuelles	313

Semestre II

20	Espaces vectoriels de dimension finie	325
21	Compléments sur les espaces vectoriels	337
22	Applications linéaires	349
23	Applications linéaires en dimension finie	365
24	Comparaison des suites	381
25	Comparaison de fonctions	397
26	Séries numériques	407
27	Intégrales généralisées	429
28	Dérivées successives	455
29	Formules de Taylor	467
30	Développements limités	475
31	Extrema, convexité	487
32	Généralités sur les espaces probabilisés	499
33	Variables aléatoires discrètes	513
34	Couples de variables aléatoires	523
35	Convergences et approximations	541
	Rappels de cours	551

Raisonnements

1

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Disjonction des cas (parité)*

1) Montrer que pour tout entier naturel n , l'entier $n^3 - 3n$ est pair.

2) Simplifier l'expression suivante :
$$-\frac{(-1)^{n^3-1} \cdot (-1)^{3n+2}}{-(-1)^{8n-1}}$$

Exercice 2 *Disjonction des cas (min et max)*

Le maximum de deux nombres x et y est noté $\max(x,y)$.

De même, $\min(x,y)$ désigne le minimum des deux nombres x et y .

1) Démontrer que

$$\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x,y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

2) Trouver une formule similaire pour $\max(x,y,z)$, le maximum des trois nombres x , y et z .

Exercice 3 * *Sommes, produits et récurrence*

1) Soient a_1, \dots, a_n des réels positifs. Montrer que
$$\prod_{i=1}^n (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

2) Soient a_1, \dots, a_n , des réels supérieurs à 1. Montrer que
$$\prod_{i=1}^n a_i \geq 1 - n + \sum_{i=1}^n a_i.$$

Exercice 4 ** Suite de Wallis

On définit la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par les conditions

$$W_0 = 0, \quad W_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

- 1) Donner la valeur de W_{2p} pour tout $p \in \mathbb{N}$.
- 2) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$W_{2p+1} = \frac{4^p \cdot (p!)^2}{(2p+1)!}$$

 **Exercices axés sur le raisonnement****Exercice 5**

En utilisant les quantificateurs \forall et \exists , traduire par une proposition mathématique chacune des affirmations suivantes :

- 1) aucun réel n'a pour carré -1 ;
- 2) si le produit de deux réels est strictement négatif, alors l'un des deux est strictement négatif;
- 3) l'ensemble A contient un nombre entier strictement positif pair;
- 4) les carrés des nombres de A sont aussi des carrés de nombres appartenant à l'ensemble B .

Exercice 6 Considérons les quatre énoncés suivants :

- 1) $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0.$
- 2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0.$
- 3) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad x + y > 0.$
- 4) $\exists x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad y^2 > x.$

Donner la négation de ces énoncés. Préciser lesquels de ces énoncés sont vrais.

Exercice 7 * Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} .

On considère les quatre énoncés mathématiques suivants :

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$.
- 2) $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$.
- 3) $\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$ et $g(x) = 0$.
- 4) $(\exists x \in \mathbb{R} : f(x) = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} : g(x) = 0)$.

Montrer que les énoncés 1 et 2 ne sont pas équivalents, puis que les énoncés 3 et 4 ne sont pas équivalents.

Indication. On pourra utiliser les fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur \mathbb{R} par

$$f_1(x) = x + |x|, \quad f_2(x) = x, \quad f_3(x) = x - |x| \quad \text{et} \quad f_4(x) = x + 1.$$

Exercice 8 ★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On définit deux nouvelles fonctions p et i par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

- 1) Justifier que p et i sont respectivement paire et impaire.
- 2) En déduire que toute fonction se décompose comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- 3) Est-ce que cette décomposition est unique?

Exercice 9 ** Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et u la suite définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrer que si la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante, alors la suite u est monotone.

Indication. On pourra faire une disjonction des cas : $f(0) \leq 0$ ou $f(0) > 0$.

Exercice 10 ** *Raisonnement par l'absurde et limite*

Soit u une suite de réels telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n^2 = u_n^n + 3u_n - 2$.

On suppose que la suite converge. Montrer que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.

Exercice 11 ** *Analyse-synthèse pour une équation fonctionnelle*

L'objectif est ici de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x - f(y)) = 2 - x - y.$$

- 1) On suppose que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie cette propriété.
 - a) Prouver que $f(0) = 1$.
 - b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x - 1) = 2 - x$.
 - c) En déduire une expression de $f(x)$ pour tout réel x .
- 2) Conclure.

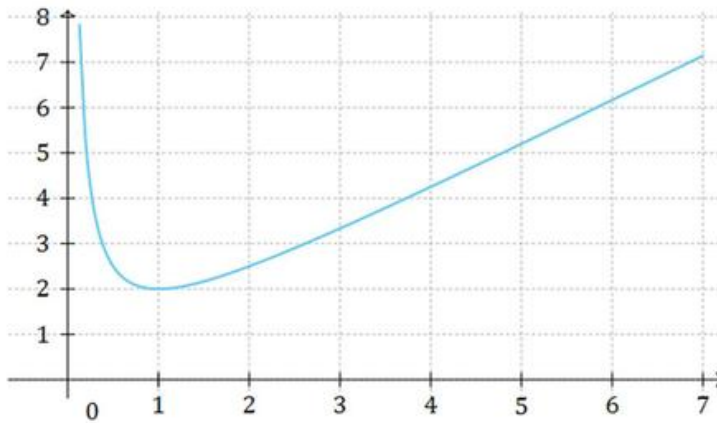
Exercice 12 **

- 1) a) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}, x(1 - x) \leq 1/4$.
- b) Soient a, b et c trois réels dans $[0, 1]$. Prouver que l'un au moins des nombres suivants est inférieur à $1/4$:

$$a(1 - b), \quad b(1 - c) \quad \text{et} \quad c(1 - a).$$

- 2) Soient a, b et c trois réels strictement positifs.
En adaptant le raisonnement précédent, justifier que, parmi les trois nombres $a + 1/b$, $b + 1/c$ et $c + 1/a$, il existe au moins un nombre supérieur à 2.

Exercice 13 ** On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x + 1/x$. Voici le graphe de f .



- 1) Discuter, en fonction de la valeur de $k \in \mathbb{Z}$, du nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- 2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(\alpha) \in \mathbb{Z}$.
 - a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha)f(\alpha^{n+1}) = f(\alpha^n) + f(\alpha^{n+2})$.
 - b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha^n) \in \mathbb{Z}$.
 - c) Que dire si $n \in \mathbb{Z}$?

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 14 Soient $A =]0,1[$ et $B =]0,2[$.

Parmi les énoncés suivants, lesquels sont vrais ?

- 1) $\forall x \in A, \exists y \in B : y < x$.
- 2) $\exists y \in B : \forall x \in A, y < x$.
- 3) $\exists y \in B : \forall x \in A, x < y$.

Exercice 15 * Trouver la meilleure valeur de a pour laquelle le raisonnement par récurrence suivant soit correct. Justifiez votre réponse :

Affirmation. Pour tout $x \geq a$, et tout entier $n \geq 2$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Preuve. Soit $x \geq a$. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $\mathcal{P}(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$.

- **Initialisation.** $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \geq 1+2x$. Donc $\mathcal{P}(2)$ est vérifiée.
- **Hérédité.** Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}
 (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
 &\geq (1+nx)(1+x) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{par hypothèse de récurrence} \\
 &\geq 1+(n+1)x+nx^2 \\
 &\geq 1+(n+1)x
 \end{aligned}$$

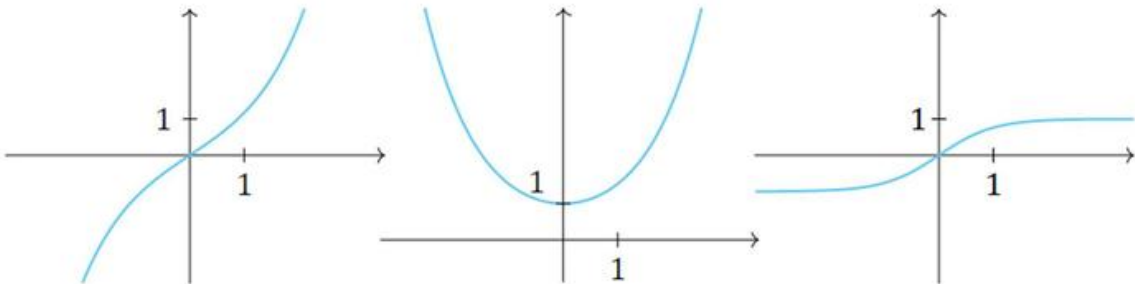
Ainsi, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout entier $n \geq 2$, $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Exercice 16 ★ On définit trois fonctions $c, s, t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad c(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad s(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad t(x) = \frac{s(x)}{c(x)}.$$

Voici le graphe de ces trois fonctions :



1) Associer à chaque graphe une expression.

2) Préciser si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

- | | |
|--|---|
| a) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad c(x) = c(-x).$ | f) $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad c(x) = y.$ |
| b) $\exists x \in \mathbb{R} : \quad t(x) = t(-x).$ | g) $\forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists ! x \in \mathbb{R} : \quad s(x) = y.$ |
| c) $\forall A \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R} : \quad t(x) \geq A.$ | h) $\exists \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in [\alpha, +\infty[,$
$1/2 \leq t(x) < 1.$ |
| d) $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,$
$(c(x) = c(x') \Rightarrow x = x').$ | i) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},$
$(x \geq \alpha \Rightarrow t(x) - 1 \leq \varepsilon).$ |
| e) $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,$
$(s(x) = s(x') \Rightarrow x = x').$ | j) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad t'(x) > 0.$ |

Exercice 17 ★ Que dire d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = u_1 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2u_{n+1} - 3u_n + 4u_{n-1} = 0?$$

Exercice 18 ★★★ *Un exemple de récurrence dite « forte »*

Soient c un réel et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = c \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}.$$

Calculer u_1 et u_2 . Quelle conjecture simple en déduit-on sur la valeur de u_n ? La prouver.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Disjonction des cas (parité)

1) On remarque que $n^3 - 3n = n(n^2 - 3)$.

- Si $n = 2p$ est pair, alors $n^3 - 3n = 2p(n^2 - 3)$ est pair.
- Si $n = 2p + 1$ est impair, alors $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2(2p^2 + 2p) + 1$ est impair. Donc $n^2 - 3$ est pair. Donc $n^3 - 3n$ est pair aussi dans ce cas.

En conclusion, pour tout entier naturel n , l'entier $n^3 - n$ est pair.

2) Comme $n^3 - 3n$ est pair,

$$-\frac{(-1)^{n^3-1} \cdot (-1)^{3n+2}}{-(-1)^{8n-1}} = (-1)^{n^3-1}(-1)^{3n+2}(-1)^{-8n+1} = (-1)^{n^3-3n}(-1)^{-2n+2} = \boxed{1.}$$

Exercice 2 Disjonction des cas (min et max)

1) Soient x et y deux réels. Procédons par disjonction des cas.

- Si $x \leq y$ alors $\max(x, y) = y$ et $|x - y| = -(x - y)$. D'où

$$\frac{x + y + |x - y|}{2} = \frac{x + y - (x - y)}{2} = y.$$

On a bien $\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$.

- On procède de même pour vérifier l'égalité dans le cas $y \leq x$. Dans tous les cas, la première relation est vérifiée.

On peut procéder de la même manière pour le minimum, ou utiliser le résultat précédent en écrivant

$$\min(x, y) = -\max(-x, -y) = -\frac{-x - y + |-x + y|}{2} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

2) Soient x, y et z trois réels.

$$\begin{aligned} \max(x, y, z) &= \max(x, \max(y, z)) \\ &= \frac{x + \max(y, z) + |x - \max(y, z)|}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{question précédente} \\ \text{de nouveau, la question} \\ \text{précédente} \end{array} \right\} \\ &= \frac{x + \frac{y+z+|y-z|}{2} + \left| x - \frac{y+z+|y-z|}{2} \right|}{2}. \end{aligned}$$

Après simplifications, $\max(x, y, z) = \frac{2x + y + z + |y - z| + |2x - y - z - |y - z||}{4}$

Exercice 3 Sommes, produits et récurrence

1) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ avec la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^+)^n, \quad \prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i.$$

• **Initialisation.** Par convention, un produit et une somme sur l'ensemble vide valent respectivement 1 et 0. Ainsi, puisque $1 \geq 1 + 0$, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soient a_1, a_2, \dots, a_{n+1} des réels positifs. Alors

$$\prod_{i=1}^{n+1} (1 + a_i) = (1 + a_{n+1}) \prod_{i=1}^n (1 + a_i) = \prod_{i=1}^n (1 + a_i) + a_{n+1} \prod_{i=1}^n (1 + a_i).$$

Or par hypothèse de récurrence, $\prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i \geq 1$.

Par hypothèse $a_{n+1} \geq 0$, donc $a_{n+1} \prod_{i=1}^n (1 + a_i) \geq a_{n+1}$.

Alors, il vient $\prod_{i=1}^{n+1} (1 + a_i) \geq \left(1 + \sum_{i=1}^n a_i\right) + a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i$.

Donc si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2) On applique l'inégalité précédente aux réels positifs $a_1 - 1, a_2 - 1, \dots, a_n - 1$.

Exercice 4 Suite de Wallis

1) Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} = 0$.

2) Démontrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}(p) : W_{2p+1} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!}$ est vraie pour tout entier positif p .

• **Initialisation.** Par convention, $0! = 1$. Donc $\frac{4^0 (0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} = 1 = W_0$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie.

$$\begin{aligned}
 W_{2(p+1)+1} &= W_{(2p+1)+2} \\
 &= \frac{(2p+1)+1}{(2p+1)+2} W_{2p+1} && \left. \begin{array}{l} \text{par hypothèse sur } W \\ \text{par hypothèse de récurrence} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{2(p+1)}{2p+3} \cdot \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} \\
 &= \frac{2(p+1)}{2p+3} \cdot \frac{2(p+1)}{2p+2} \cdot \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} && \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \times \frac{2(p+1)}{2p+2} = 1 \\
 &= \frac{4 \cdot 4^p ((p+1) \cdot p!)^2}{(2p+3)(2p+2) \cdot (2p+1)!}
 \end{aligned}$$

Par conséquent
$$W_{2(p+1)+1} = \frac{4^{p+1} ((p+1)!)^2}{(2(p+1)+1)!}$$

et la proposition $\mathcal{P}(p+1)$ est prouvée.

- **Conclusion.** La proposition $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

On commence par reformuler en utilisant « tout » et « il existe ».

- 1) Tout réel a un carré différent de -1 . D'où la formule mathématique

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \neq -1.$$

- 2) Pour tout couple (x, y) de réels, si le produit est strictement négatif, alors x est strictement négatif ou y est strictement négatif. C'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (xy < 0) \Rightarrow (x < 0 \text{ ou } y < 0).$$

- 3) Il existe un élément n de A tel que $n/2$ soit un entier strictement positif.

$$\exists n \in A : \quad n/2 \in \mathbb{N}^*.$$

- 4) Si x est un élément de A , alors son carré est le carré d'un élément de B , c'est-à-dire qu'il existe y dans B tel que $x^2 = y^2$:

$$\forall x \in A, \quad \exists y \in B, \quad x^2 = y^2.$$

Exercice 6

Les négations associées sont les suivantes :

$$1') \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y < 0. \quad 2') \quad \exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y < 0.$$

$$3') \quad \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y < 0. \quad 4') \quad \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y^2 < x.$$

- L'assertion 1 est fausse. Prouvons sa négation.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Prenons $y = -x - 1$. Alors $x + y < 0$. La négation de 1 est prouvée.
 - Montrons l'assertion 2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Prenons $y = -x + 1$. Alors $x + y > 0$.
L'assertion 2 est prouvée.
 - L'assertion 3 est fausse. Montrons sa négation.
Prenons $x = y = 0$. Alors $x + y < 0$. La négation de l'assertion 3 est prouvée.
 - Montrons l'assertion 4. Prenons $x = -1$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y^2 \geq 0 > x$.
L'assertion 4 est prouvée.
- Conclusion : Les assertions 2 et 4 sont vraies. Les autres sont fausses.

Exercice 7

Pour montrer que les énoncés 1 et 2 ne sont pas équivalents, prenons $f = f_1$ et $g = f_3$. Utilisons le fait que pour tout réel x ,

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Donc
$$f_1(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 2x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

- Si $x > 0$, $f_1(x) = 0$, et si $x \leq 0$, $f_3(x) = 0$. Donc, pour tout x réel $f_1(x) = 0$ ou $f_3(x) = 0$.
L'énoncé 1 est donc vrai.
 - Par contre, $f_1(1) \neq 0$, donc $(\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = 0)$ est faux.
De même $(\forall x \in \mathbb{R}, f_3(x) = 0)$ est faux. Donc l'énoncé 2 est faux.
- Conclusion : Les énoncés 1 et 2 ne sont pas équivalents.

Pour montrer que les énoncés 3 et 4 ne sont pas équivalents, on prend $f = f_2$ et $g = f_4$.

La fonction f_2 s'annule en 0; la fonction f_4 s'annule en -1 donc l'énoncé 4 est vrai.

Par contre, il n'existe pas de réel x pour lequel les deux fonctions s'annulent en même temps. L'énoncé 3 est donc faux.

Conclusion : Les énoncés 3 et 4 ne sont pas équivalents.

Remarque

L'énoncé 2 affirme que f est la fonction nulle ou que g est la fonction nulle. On a $2 \Rightarrow 1$.

L'énoncé 3 affirme que f et g s'annulent pour une même valeur de x , alors que l'assertion 4 affirme que f et g s'annulent au moins une fois (mais pas nécessairement en un même point). On a $3 \Rightarrow 4$.

Cependant, les énoncés suivants sont équivalents :

I) $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ et } g(x) = 0)$;

II) $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ et $(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$.

Ils affirment tous deux que f et g sont chacune la fonction nulle.

De même, les énoncés suivants sont équivalents :

III) $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0)$;

IV) $(\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0)$ ou $(\exists x \in \mathbb{R}, g(x) = 0)$.

Ils affirment que l'une au moins des deux fonctions s'annule au moins une fois.

Exercice 8

1) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$p(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = p(x).$$

La fonction p est donc paire. Le même raisonnement montre que i est impaire.

2) Il suffit de remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = p(x) + i(x).$$

Autrement dit,

$$f = p + i.$$

Toute fonction se décompose comme somme d'une fonction paire et d'une impaire.

3) Montrons que cette décomposition est unique. Supposons qu'il existe deux fonctions \tilde{p} et \tilde{i} telles que \tilde{p} soit paire, \tilde{i} impaire et que

$$f = \tilde{p} + \tilde{i}.$$

Par différence avec la question 2), $p - \tilde{p} = \tilde{i} - i$.

Cette fonction est alors paire (comme différence de fonctions paires) et impaire (comme différence de fonctions impaires). Seule la fonction nulle vérifie cette propriété, donc

$$p - \tilde{p} = \tilde{i} - i = 0, \text{ donc } \tilde{p} = p \text{ et } \tilde{i} = i.$$

La décomposition est donc unique.

Exercice 9

- **Cas I.** Supposons $f(0) \leq 0$. Justifions par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : u_{n+1} \leq u_n$$

est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** Par hypothèse du cas I,

$$u_1 = f(u_0) = f(0) \leq 0 = u_0.$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} \leq u_n \xrightarrow{f \text{ croissante}} f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} \leq u_{n+1}.$$

Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$.

Donc : la suite u est décroissante.

- **Cas II.** Supposons $f(0) > 0$.

On peut adapter le raisonnement précédent pour justifier que u est croissante.

On peut aussi introduire la fonction g avec $g(x) = -f(-x)$ et la suite v de terme général $v_n = -u_n$ de sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow v_{n+1} = g(v_n).$$

g est croissante avec $g(0) < 0$, d'après le résultat précédent, v est décroissante.

Donc : u est croissante.

- Dans chacun des deux cas, la suite u est monotone.

Exercice 10 *Raisonnement par l'absurde et limite*

Raisonnons par l'absurde. Notons ℓ la limite de la suite et supposons $\ell \neq 1$. Les quatre cas suivants sont possibles.

- **Premier cas :** $\ell = 0$. Alors $|u_n^n| = e^{n \ln |u_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $\ln |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$).

Par passage à la limite, l'égalité $u_n^2 = u_n^n + 3u_n - 2$ donne $\ell^2 = 3\ell - 2$.

Cette dernière équation a pour solutions $\ell = 1$ (exclue) et $\ell = 2$ (impossible car $\ell = 0$).

- **Deuxième cas :** $0 < |\ell| < 1$. Alors $|u_n^n| = e^{n \ln |u_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (car $\ln |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln |\ell| < 0$).

Comme pour le premier cas, on obtient $\ell = 1$ (exclu) ou $\ell = 2$, impossible car $|\ell| < 1$.

- **Troisième cas :** $|\ell| > 1$. Alors $|u_n^n| = e^{n \ln |u_n|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (car $\ln |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln |\ell| > 0$).

Or $u_n^n = u_n^2 - 3u_n + 2$. Par passage à la limite $u_n^2 - 3u_n + 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^2 - 3\ell + 2 \in \mathbb{R}$, en contradiction avec la limite de $(u_n^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et l'unicité de la limite.

- **Quatrième cas :** $\ell = -1$. Alors $(u_n^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de limite, mais $u_n^2 - 3u_n + 2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 6$.

Contradiction.

Conclusion : la suite u tend vers 1.

Exercice 11 Analyse-synthèse pour une équation fonctionnelle

Cet exercice propose un exemple détaillé d'une analyse-synthèse.

1) a) On teste la relation avec $x = f(0)$ et $y = 0$. Il vient

$$f(0) = f(f(0) - f(0)) = 2 - f(0) - 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{f(0) = 1.}$$

b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x - 1) = f(x - f(0)) = 2 - x - 0 = \boxed{2 - x.}$

c) D'où $f(x) = f((x + 1) - 1) = 2 - (x + 1) = 1 - x$ pour tout réel x .

On vient de prouver que si une telle fonction existe alors elle peut s'écrire $x \mapsto 1 - x$.

2) Procédons à la synthèse. On vérifie que le candidat trouvé convient. Posons

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 - x. \end{cases}$$

Soient deux réels x et y :

$$f(x - f(y)) = f(x - (1 - y)) = f(x + y - 1) = 1 - (x + y - 1) = 2 - x - y.$$

La fonction f est donc bien solution du problème. Conclusion :

$$\boxed{\text{Il existe une unique fonction solution donnée par } x \in \mathbb{R} \mapsto 1 - x.}$$

Exercice 12

1) a) Donnons deux méthodes.

Méthode 1. Passage par la forme canonique.

Comme le carré de tout nombre réel est positif, on peut écrire, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x(1 - x) = -(x - 1/2)^2 + 1/4 \leq 1/4.$$

Méthode 2. Étude de fonction.

Considérons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x(1 - x)$. La fonction est polynomiale, donc dérivable sur \mathbb{R} avec, pour tout réel x , $f'(x) = 1 - 2x$. Comme $f'(x)$ est positif pour x inférieur à $1/2$ et négatif pour x supérieur à $1/2$, f est croissante sur $]-\infty, 1/2]$, décroissante sur $[1/2, +\infty[$. Elle est donc maximale en $x = 1/2$. Ainsi, pour tout réel x ,

$$f(x) \leq f(1/2), \quad \text{donc} \quad \boxed{x(1 - x) \leq 1/4.}$$

b) Raisonnons par l'absurde en supposant que *tous* les nombres

$$a(1 - b), \quad b(1 - c) \quad \text{et} \quad c(1 - a)$$

sont strictement supérieurs à $1/4$. Alors

$$a(1 - a) \cdot b(1 - b) \cdot c(1 - c) = a(1 - b) \cdot b(1 - c) \cdot c(1 - a) > \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

Or, par produit d'inégalités portant sur des nombres positifs, la question précédente impose

$$a(1-a) \cdot b(1-b) \cdot c(1-c) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3.$$

D'où une contradiction.

En conclusion, l'un au moins des nombres est inférieur à $1/4$.

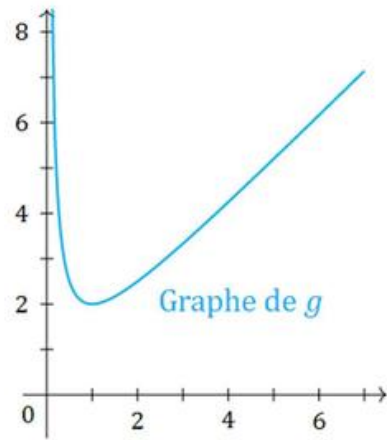
2) On étudie la fonction $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x + x^{-1} \in \mathbb{R}$.

Comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* , la fonction g est dérivable, avec, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(1+x)}{x^2}.$$

La quantité $g'(x)$ est du même signe que $x-1$, c'est-à-dire positive sur $[1, +\infty[$ et négative sur $]0,1[$.

La valeur minimale de g est donc $g(1) = 2$.



Remarque

On aurait pu aussi écrire, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0 \quad (\text{car } x > 0).$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que tous les nombres

$$a + \frac{1}{b}, \quad b + \frac{1}{c} \quad \text{et} \quad c + \frac{1}{a}$$

sont strictement inférieurs à 2. En en prenant la somme, on a par hypothèse

$$a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} < 3 \cdot 2 = 6.$$

Or d'après ce qui précède, on a aussi

$$a + \frac{1}{b} + b + \frac{1}{c} + c + \frac{1}{a} = a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \geq 3 \cdot 2 = 6.$$

D'où une contradiction. L'un au moins des nombres est supérieur à 2.

Exercice 13

- 1) Graphiquement, si $k \leq 1$, il n'y a aucune solution. Si $k = 2$, il y a une seule solution. Si $k \geq 3$, il y a exactement deux solutions.

Remarque

L'étude des variations de f et le théorème des valeurs intermédiaires permettent de justifier rigoureusement ces affirmations.

2) a)

$$\begin{aligned}
 f(\alpha)f(\alpha^{n+1}) &= \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}}\right) \\
 &= \alpha \cdot \alpha^{n+1} + \alpha \cdot \frac{1}{\alpha^{n+1}} + \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha^{n+1}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{on développe} \\ \end{array} \right\} \\
 &= \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} + \alpha^{n+2} + \frac{1}{\alpha^{n+2}} \\
 &= f(\alpha^n) + f(\alpha^{n+2}).
 \end{aligned}$$

- b) Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : f(\alpha^n) \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad f(\alpha^{n+1}) \in \mathbb{Z}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque

Noter l'utilisation d'une « récurrence à deux pas » puisque la relation de récurrence précédente relie le terme d'ordre n aux deux termes précédents.

• **Initialisation.**

On écrit $f(\alpha^0) = f(1) = 2 \in \mathbb{Z}$ et, par hypothèse sur α , $f(\alpha) \in \mathbb{Z}$. $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

• **Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Comme on suppose $f(\alpha^{n+1}) \in \mathbb{Z}$ vraie, il suffit de démontrer que $f(\alpha^{n+2}) \in \mathbb{Z}$. Or, d'après la question précédente,

$$f(\alpha^{n+2}) = \underbrace{f(\alpha)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot \underbrace{f(\alpha^{n+1})}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{f(\alpha^n)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}.$$

Donc si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\alpha^n) \in \mathbb{Z}$.

- c) Il suffit de remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x^{-1}) = f(1/x) = f(x)$. Ainsi, pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, alors $-n \in \mathbb{N}$ et d'après la question précédente

$$f(\alpha^n) = f(\alpha^{-n}) \in \mathbb{Z}.$$

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 14

1) **Vrai.**

Soit $x \in A$. Alors $0 < x < 1$. Prenons $y = x/2$. On a $0 < y < x < 1$. Donc $y \in B$ et $y < x$.

2) **Faux.**

Montrons sa négation : $\forall y \in B, \exists x \in A, y \geq x$.

Soit $y \in B$. Prenons $x = y/2$. On a $0 < x = y/2 < 1 < y$. Donc $x \in A$ et $y \geq x$.

3) **Vrai.**

Prenons $y = 3/2$. Pour tout $x \in A, x < 1 < y$.

Exercice 15

• **Initialisation.** La justification est vraie pour tout x réel.

• **Hérédité.** Le passage de la première ligne à la deuxième se fait en multipliant l'inégalité de $\mathcal{P}(n)$ par $(1+x)$. Le sens de l'inégalité est préservé si $1+x \geq 0$; donc si $x \geq -1$.

Conclusion : La meilleure valeur de a pour cette démonstration est -1 .

Remarque

La propriété est vraie pour $-2 \leq x < -1$.

Pour le prouver, il faut un raisonnement d'analyse. Soient $x \in [-2, -1[$ et n un entier supérieur ou égal à 2. Alors $-1 \leq 1+x \leq 0$.

$$\left. \begin{array}{l} (1+x)^n \geq -|1+x|^n \geq -1 \\ 1+nx \leq 1-n \leq -1 \end{array} \right\} \text{Donc } (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Pour $x < -2$, l'inégalité est fautive pour n impair assez grand.

Pour le voir, on pourra poser $x = -2 - \alpha$ avec $\alpha > 0$.

Exercice 16

1) La fonction c est paire, les fonctions s et t sont impaires. De plus,

$$s(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad t(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1.$$

Nécessairement, $c \leftrightarrow$ graphe 2, $s \leftrightarrow$ graphe 1, et $t \leftrightarrow$ graphe 3.

2) a) **Vrai.**

La fonction c est une fonction paire.

b) **Vrai.**

Le réel $x = 0$ vérifie $t(x) = t(-x)$.

c) **Faux.**

Par exemple, pour $A = 2$, il n'existe aucun réel x tel que $t(x) > 2$ car la fonction t est majorée par 1.

d) **Faux.**

Par exemple, on peut prendre $x = 1$ et $x' = -1$; par parité de c , $c(x) = c(x')$, pourtant $x \neq x'$.

e) **Vrai.**

Comme s est strictement croissante, chaque image a au plus un antécédent.

f) **Faux.**

Par exemple, -1 n'a pas d'antécédent par c .

g) **Vrai.**

Chaque réel y a un unique antécédent par s .

h) **Vrai.**

C'est une conséquence du fait que $t(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ et la croissance de t .

i) **Vrai.**

C'est la définition de $t(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

j) **Vrai.**

On constate que toutes les tangentes à la courbe ont une pente strictement positive.

Remarque

On ne peut évoquer la stricte monotonie de t puisque nous disposons seulement de l'implication

si, pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante,

dont la réciproque est contredite par la fonction cube.

Exercice 17

La relation est équivalente à $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - 2u_n$.

On constate alors que $u_2 = 0$, $u_3 = 0$, et ainsi de suite. On peut alors conjecturer que la suite u est la suite nulle.

Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : u_n = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = 0$$

est vraie pour tout entier positif n .

• **Initialisation.** $\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse sur la suite u .

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Pour prouver $\mathcal{P}(n+1)$, il suffit de justifier que $u_{n+2} = 0$. Or

$$u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - 2u_n \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{3}{2} \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0.$$

La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie sous réserve de $\mathcal{P}(n)$.

- **Conclusion.** La proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n .

La suite u est la suite nulle.

Exercice 18 Un exemple de récurrence dite « forte »

On trouve $u_1 = \frac{1}{1}(u_0 u_0) = c^2$, $u_2 = \frac{1}{2}(u_0 u_1 + u_1 u_0) = \frac{1}{2}(c^3 + c^3) = c^3$.

On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = c^{n+1}$.

Montrons-le par récurrence en posant, pour $n \in \mathbb{N}$,

$\mathcal{P}(n)$: pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $u_k = c^k$.

- **Initialisation.** Par hypothèse, $u_0 = c = c^1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence, pour $0 \leq k \leq n$, $u_k = c^{k+1}$. Il reste à montrer $u_{n+1} = c^{n+2}$.

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}.$$

Pour k tel que $0 \leq k \leq n$, on a $0 \leq n-k \leq n$. D'où, par hypothèse de récurrence,

$$u_k = c^{k+1} \quad \text{et} \quad u_{n-k} = c^{n-k+1}.$$

Donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n c^{k+1} c^{n-k+1} = \frac{1}{n+1} \underbrace{\sum_{k=0}^n c^{n+2}}_{n+1 \text{ termes}} = c^{n+2}.$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = c^{n+1}$.

Calculs et ordres sur l'ensemble des réels

2

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$.
Préciser les cas d'égalité.

Exercice 2 * Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x = \sqrt{x} + 2; \quad \ln(x-1) + \ln(9x) = \ln(2) + 2 \ln(3); \quad 8^{x^9} = 9^{x^8}.$$

Exercice 3 *

Soit b un réel positif ou nul. À l'aide de la formule du binôme de Newton, justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (1+b)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{(nb)^k}{k!}.$$

Exercice 4 ** Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 \quad \text{et} \quad 2^{3x+6} + 3^{2x+2} = 2^{3x+4} + 3^{2x+4}.$$

Exercice 5 ** Résoudre l'équation $\lfloor 3x - \sqrt{2x-1} \rfloor = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Rappel. $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x .

Exercice 6 ** Rappelons que pour tous réels a et b ,

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \text{et} \quad \frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2 \quad (\text{si } a \neq b).$$

À l'aide de ces deux relations, prouver que

$$(1 + \sqrt[3]{2})^3 = \frac{3}{\sqrt[3]{2} - 1}, \quad \text{puis que} \quad \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}.$$

Exercice 7 *** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x^2 - 3x + 1)^{x^2 - 4} = 1.$$

Dans un premier temps, on pourra préciser pour quelles valeurs de X et Y l'expression X^Y a un sens, puis résoudre $X^Y = 1$.

Exercice 8 * *Bornes supérieure et inférieure*

Pour chacun des ensembles suivants, préciser, s'ils existent, le maximum, le minimum, la borne inférieure et supérieure.

$$A = \{t \in \mathbb{R}^+ \mid \ln(t) \leq 1\}; \quad B = \{t \in \mathbb{R} \mid -1 \leq t^3 < 27\}; \quad C = \{x^2 + 2; x \in \mathbb{R}^+\};$$

$$D = \left\{ \frac{2n}{2n+1}; n \in \mathbb{N} \right\}; \quad \text{et} \quad E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 9 ** Résoudre le système suivant d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{cases} xy + xz + yz = 1 \\ x^2y - x - xy + x^2 = 0 \\ xyz - xz + yz - z = 0. \end{cases}$$

Exercice 10 **

- Soient a et b deux réels strictement positifs; montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
- Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs; montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \geq n^2.$$

Exercice 11 **

- 1) Soient x, y, z, t quatre réels strictement positifs tels que $\frac{x}{y} < \frac{z}{t}$. Montrer que

$$\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+t} < \frac{z}{t}.$$

- 2) Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.$$

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\frac{a_1}{b_1} < \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} < \frac{a_n}{b_n}$.

Exercice 12 ** Moyennes

Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ des réels tels que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ et $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$.

- 1) Justifier que la somme $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j)$ est négative.

- 2) En déduire que $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i\right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

- 3) *Application.*

Soient x_1, \dots, x_n des réels strictement positifs. On définit leur moyenne arithmétique et leur moyenne harmonique par

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{et} \quad H_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.$$

Justifier que la moyenne harmonique est inférieure à la moyenne arithmétique.

Exercice 13 *** Inégalité arithmético-géométrique et surface minimale

- 1) Soient a_1, a_2 et a_3 des réels strictement positifs.

- a) Justifier que $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2$.

- b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\frac{a_1 + a_2}{3} + \frac{4x^3}{3(a_1 + a_2)^2} \geq x$.

- c) En déduire que $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$,
avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2 = a_3$.

Indication. On pourra déterminer x tel que $\frac{a_1 + a_2}{3} + \frac{4x^3}{3(a_1 + a_2)^2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$.

- 2) *Application.* Considérons un parallélépipède rectangle de volume 1 et notons a, b et c les longueurs de ses côtés.
- a) Démontrer que la surface du parallélépipède est donnée par $S = 2ab + \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$.
- b) En déduire que le parallélépipède rectangle de volume 1 qui a la surface la plus petite est le cube.

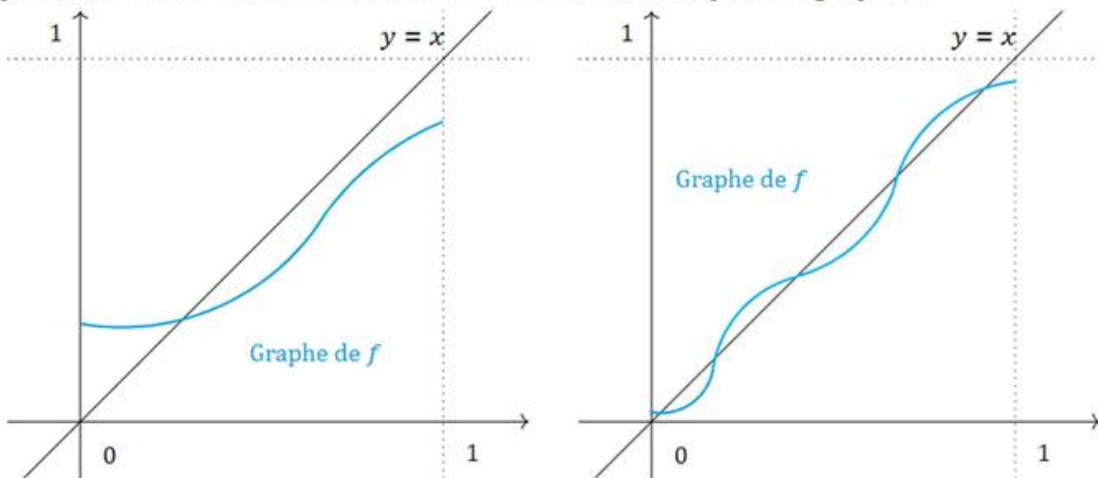
Exercice 14 ★★★ *Existence d'un point fixe et borne supérieure.*

Soit $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ une fonction croissante. On souhaite prouver qu'il existe nécessairement un réel a tel que

$$f(a) = a \quad (\text{point fixe}).$$

On introduit à cette fin l'ensemble $E = \{x \in [0,1] \mid f(x) \geq x\}$.

- 1) Vérifier que E n'est pas l'ensemble vide.
- 2) Soit $\alpha = \sup(E)$.
Pourquoi α est-elle bien définie?
- 3) Représenter E sur l'axe des abscisses de ces deux exemples de graphes.



Dans ces deux cas, vérifier graphiquement que $f(\alpha) = \alpha$.

- 4) Revenons au cas général. Montrer que $f(\alpha)$ est un majorant de E .
- 5) Conclure.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 15 * Que représente le nombre $[10^{100}\pi] - 10[10^{99}\pi]$?

Exercice 16 * *Vrai ou faux ?*

Préciser si les énoncés suivants sont vrais ou faux et corriger si besoin.

- 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = x$.
- 2) Pour tous réels x et y , $[x + y] = [x] + [y]$.
- 3) a) La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x - [x]$ est croissante.
 b) La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x - [x]$ est périodique.
 c) La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x - [x]$ est paire.

Corrections

☰ Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

On étudie le signe de $A = \sqrt{2(a+b)} - (\sqrt{a} + \sqrt{b})$. En utilisant la quantité conjuguée,

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{2(a+b) - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{\sqrt{2(a+b)} + (\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\
 &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{\sqrt{2(a+b)} + (\sqrt{a} + \sqrt{b})} \\
 &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{\sqrt{2(a+b)} + (\sqrt{a} + \sqrt{b})} \geq 0.
 \end{aligned}$$

) on développe
) identité remarquable

Donc

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}.$$

L'égalité a lieu si et seulement si $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 0$, ce qui revient à dire que $\sqrt{a} = \sqrt{b}$, et donc que $a = b$. Finalement,

$$\text{l'égalité a lieu si et seulement si } a = b.$$

Exercice 2

- Pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$x - 2 = \sqrt{x} \Rightarrow (x - 2)^2 = x \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x \in \{1, 4\}.$$

Il reste à vérifier si ces deux candidats sont solutions. On voit que 1 ne l'est pas, et que la seule solution est donc $\boxed{4}$.

- Notons que l'expression n'a de sens que pour $x \in]1, +\infty[$. Soit $x > 1$; alors x est solution si et seulement si

$$\ln(9x(x - 1)) = \ln(2 \cdot 3^2) = \ln(18).$$

La fonction \ln étant strictement croissante, c'est équivalent à

$$9x(x - 1) = 18 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0.$$

Il y a deux solutions à cette équation polynomiale de degré 2 dans \mathbb{R} , à savoir 2 et -1 .

La seconde solution n'appartient pas à $]1, +\infty[$, il n'y a finalement que $\boxed{2}$ comme solution au problème.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. En composant par la fonction \ln , qui admet la fonction \exp pour réciproque, x est solution de $8^{x^9} = 9^{x^8}$ si et seulement si $x^9 \ln(8) = x^8 \ln(9)$. Or

$$x^9 \ln(8) = x^8 \ln(9) \Leftrightarrow x^8(x \ln(8) - \ln(9)) = 0 \Leftrightarrow x^8 = 0 \text{ ou } x \ln(8) - \ln(9) = 0.$$

Conclusion : Il y a deux solutions : $x = 0$ et $x = \frac{\ln(9)}{\ln(8)} = \frac{2 \ln(3)}{3 \ln(2)}$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la *formule du binôme de Newton*,

$$(1 + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b^k.$$

Or
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ facteurs}}}{k!} < \frac{n^k}{k!}.$$

Le réel b étant positif, on en déduit que

$$(1 + b)^n \leq \sum_{k=0}^n \frac{(nb)^k}{k!}.$$

Exercice 4

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$, de sorte que x est solution de l'équation initiale si et seulement si

$$X^2 - 3X + 2 = 0, \quad \text{ce qui revient à} \quad X \in \{1, 2\}.$$

Ainsi, $3^x = 1$ ou $3^x = 2$.

Finalement, il y a deux solutions : 0 et $\ln(2)/\ln(3)$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation est équivalente à

$$\begin{aligned} 2^{3x+6} - 2^{3x+4} = 3^{2x+4} - 3^{2x+2} &\Leftrightarrow (2^2 - 1)2^{3x+4} = (3^2 - 1)3^{2x+2} \\ &\Leftrightarrow 3 \cdot 2^{3x+4} = 2^3 \cdot 3^{2x+2} \\ &\Leftrightarrow 2^{3x+1} = 3^{2x+1}. \end{aligned}$$

La fonction \ln étant strictement croissante, c'est équivalent à

$$(3x + 1)\ln(2) = (2x + 1)\ln(3) \Leftrightarrow (3\ln(2) - 2\ln(3))x = \ln(3) - \ln(2).$$

On trouve une unique solution :

$$\frac{\ln(3/2)}{\ln(8/9)}.$$

Exercice 5

Notons que l'expression n'a de sens que pour $x \in [1/2, +\infty[$.

Soit x un élément de cet intervalle; on commence par écrire l'équivalence

$$\left| 3x - \sqrt{2x - 1} \right| = 1 \Leftrightarrow 1 \leq 3x - \sqrt{2x - 1} < 2.$$

Introduisons l'inconnue auxiliaire $X = \sqrt{2x - 1}$, de sorte que $x = (X^2 + 1)/2$.

Ainsi, x est solution de l'équation initiale si et seulement si

$$1 \leq \frac{3}{2}X^2 + \frac{3}{2} - X < 2 \Leftrightarrow 2 \leq 3X^2 - 2X + 3 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq 3X^2 - 2X + 1 \\ 3X^2 - 2X - 1 < 0. \end{cases}$$

Or le discriminant de $3X^2 - 2X + 1$ est strictement négatif.

Comme le coefficient dominant est positif, cette expression est toujours positive.

De plus, $3X^2 - 2X - 1 = 3(X - 1)(X + 1/3)$.

Cette quantité est strictement négative si et seulement si $X \in]-1/3, 1[$.

En résumé, x est solution si et seulement si $-1/3 < X < 1$.

Comme X est positif, x est solution si et seulement si

$$0 \leq X < 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2x - 1 < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1.$$

Exercice 6

- Appliquons les relations avec $a = \sqrt[3]{2}$ et $b = 1$:

$$\begin{aligned}(1 + \sqrt[3]{2})^3 &= 1^3 + 3\sqrt[3]{2} + 3(\sqrt[3]{2})^2 + (\sqrt[3]{2})^3 \\ &= 3(1 + \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1} &= \frac{(\sqrt[3]{2})^3 - 1}{\sqrt[3]{2} - 1} \\ &= (\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1.\end{aligned}$$

D'où

$$(1 + \sqrt[3]{2})^3 = \frac{3}{\sqrt[3]{2} - 1}$$

- Appliquons la seconde relation avec $a = \sqrt[3]{2}$ et $b = -1$:

$$(\sqrt[3]{2})^2 - \sqrt[3]{2} + 1 = \frac{(\sqrt[3]{2})^3 - (-1)^3}{\sqrt[3]{2} - (-1)} = \frac{3}{\sqrt[3]{2} + 1}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{\frac{4}{9}} &= \sqrt[3]{\frac{1}{9}}(1 - \sqrt[3]{2} + (\sqrt[3]{2})^2) = \sqrt[3]{\frac{1}{9}} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{2} + 1} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{9} \cdot \frac{27}{(\sqrt[3]{2} + 1)^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{(\sqrt[3]{2} + 1)^3}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{2} - 1}.\end{aligned}$$

Exercice 7Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = x^2 - 3x + 1$ et $Y = x^2 - 4$.L'expression X^Y a un sens dans les deux cas suivants :

- **Cas I.** X est un réel et Y est un entier relatif, avec la convention $X^0 = 1$.

Dans ce cas, l'égalité $X^Y = 1$ est vérifiée dans les sous-cas suivants :

- $X \in \mathbb{R}, Y = 0$. Ce cas correspond à $x = \pm 2$;
- $X = 1, Y \in \mathbb{Z}$. Dès lors,

$$x^2 - 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 3.$$

Précisons que pour ces valeurs de x , Y est bien un entier.

- $X = -1, Y$ est un entier pair. Or

$$x^2 - 3x + 1 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2.$$

Ce n'est que pour $x = 2$ que Y est un entier pair.

- **Cas II.** X est un réel strictement positif et Y est un réel. Dans ce cas, $X^Y = \exp(Y \ln(X))$. L'égalité $X^Y = 1$ équivaut à $Y \ln(X) = 0$, c'est-à-dire
- d) $X = 1, Y \in \mathbb{R}$. On retrouve $x = 0$ ou $x = 3$.
- e) $Y = 0, X \in \mathbb{R}_+^*$. Seul $x = -2$ convient.

En conclusion, l'ensemble des solutions est $X = \{-2, 0, 2, 3\}$.

Exercice 8 Bornes supérieure et inférieure

- Vérifier que $A =]0, e]$.

L'ensemble A n'a pas de minimum, mais une borne inférieure : 0.

Le nombre e est le maximum de A , il coïncide donc avec sa borne supérieure.

- Comme la fonction $t \mapsto t^3$ est strictement croissante, $B = [-1, 3[$.

L'ensemble B n'a pas de maximum mais une borne supérieure : 3.

Le nombre -1 est le minimum de B , il coïncide donc avec sa borne inférieure.

- Vérifier que $C = [2, +\infty[$.

L'ensemble C n'a pas de maximum ni de borne supérieure.

Le nombre 2 est le minimum de C , il coïncide donc avec sa borne inférieure.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \frac{2n}{2n+1} \leq 1$: 0 est un minorant de D et 1 est un majorant de D .

La valeur 0 appartient à D , donc 0 est le minimum de D et donc sa borne inférieure.

Si M est un majorant de D , alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n}{2n+1} \leq M$. Par passage des inégalités à la limite, $1 \leq M$. Donc 1 est le plus petit majorant de D : c'est la borne supérieure. 1 n'appartient pas à D , donc D n'a pas de maximum.

- On décompose E en deux sous-ensembles :

$$E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} ; n \in \mathbb{N}^*, n \text{ pair} \right\} \cup \left\{ \frac{(-1)^n}{n} ; n \in \mathbb{N}^*, n \text{ impair} \right\} = \underbrace{\left\{ \frac{1}{2k} ; k \in \mathbb{N}^* \right\}}_{E_1} \cup \underbrace{\left\{ \frac{-1}{2k+1} ; k \in \mathbb{N} \right\}}_{E_2}.$$

On a $E_1 \subset [0, 1/2]$ et $E_2 \subset [-1, 0]$, d'où $E \subset [-1, 1/2]$.

Ainsi -1 est un minorant de E et $1/2$ un majorant de E . Ces deux valeurs appartiennent à E . Donc -1 et $1/2$ sont respectivement le minimum et le maximum de E .

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 9

On peut factoriser les deux dernières équations :

$$\begin{cases} xy + xz + yz = 1 \\ x^2y - x - xy + x^2 = 0 \\ xyz - xz + yz - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + xz + yz = 1 \\ x(x-1)(y+1) = 0 \\ (x+1)z(y-1) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} xy + xz + yz = 1 \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } y = -1 \\ x = -1 \text{ ou } z = 0 \text{ ou } y = 1. \end{cases}$$

La deuxième équation conduit à considérer trois cas.

Premier cas : $x = 0$. Le système devient $\begin{cases} yz = 1 \\ z = 0 \text{ ou } y = 1. \end{cases}$

Le cas $z = 0$ est impossible. Si $y = 1$, alors $z = 1$.

On vérifie que $(x, y, z) = (0, 1, 1)$ est bien solution du système.

Deuxième cas : $x = 1$. Le système devient $\begin{cases} y + z + yz = 1 \\ z = 0 \text{ ou } y = 1. \end{cases}$

D'après la première équation, si $z = 0$, alors $y = 1$; si $y = 1$, alors $z = 0$.

On vérifie que $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ est bien solution du système.

Troisième cas : $y = -1$. Le système devient $\begin{cases} -x - z + xz = 1 \\ x = -1 \text{ ou } z = 0. \end{cases}$

D'après la première équation, si $x = -1$, alors $z = 0$; si $z = 0$, alors $x = -1$.

On vérifie que $(x, y, z) = (-1, -1, 0)$ est bien solution du système.

Bilan

Les triplets (x, y, z) solutions du système sont $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$.

Exercice 10

1) Pour $(a, b) \in \mathbb{R}_*^{+2}$, le résultat est une conséquence de la réécriture

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} = \frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $A_n = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)$.

Première solution : par récurrence

Montrons, par récurrence, que

$$\mathcal{P}(n) : A_n \geq n^2$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• **Initialisation.** On a $A_1 = \left(\sum_{i=1}^1 \frac{1}{a_i} \right) \left(\sum_{i=1}^1 a_i \right) = \frac{1}{a_1} a_1 = 1$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned}
 A_{n+1} &= \left(\frac{1}{a_{n+1}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \left(a_{n+1} + \sum_{i=1}^n a_i \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{a_{n+1}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) + a_{n+1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \sum_{i=1}^n a_i \right) \\
 &\leq 1 + \left(\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_i} \right) + n^2 \\
 &\leq 1 + \left(\sum_{i=1}^n 2 \right) + n^2 = 1 + 2n + n^2 = (n+1)^2.
 \end{aligned}$$

d'après $\mathcal{P}(n)$
 $\frac{a_i}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_i} < 2$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \geq n^2.$

Seconde solution : par développement du produit

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On renomme le second indice pour pouvoir développer, puis on partage en trois sommes correspondant respectivement à $i = j$, $i < j$ et $j < i$.

La première somme contient n termes.

Les deux dernières sommes contiennent le même nombre de termes : $\frac{n^2-n}{2}$.

$$A_n = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) = \underbrace{\sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{a_j}{a_i}}_{n^2 \text{ termes}} = \underbrace{\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{a_i}{a_i}}_{n \text{ termes}} + \underbrace{\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_j}{a_i}}_{\frac{n^2-n}{2} \text{ termes}} + \underbrace{\sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{a_j}{a_i}}_{\frac{n^2-n}{2} \text{ termes}}.$$

Les indices sont des variables muettes, on peut échanger leurs noms dans la dernière somme :

$$\sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{a_j}{a_i} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{a_i}{a_j}.$$

On obtient, en regroupant les deux dernières sommes :

$$\begin{aligned}
 A_n &= \sum_{1 \leq i \leq n} 1 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \underbrace{\left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right)}_{< 2 \text{ d'après 1)} \\
 &\leq n + 2 \frac{n^2-n}{2} \\
 &\leq n^2.
 \end{aligned}$$

Exercice 11

1) Simplifions une différence : $\frac{x+z}{y+t} - \frac{x}{y} = \frac{(x+z)y - x(y+t)}{y(y+t)} = \frac{zy - xt}{y(y+t)} \geq 0$

car x, y, z, t sont quatre réels strictement positifs et que $\frac{x}{y} \leq \frac{z}{t}$, donc $xt \leq zy$.

Par un calcul similaire, $\frac{z}{t} - \frac{x+z}{y+t} \geq 0$.

Conclusion :

$$\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+t} < \frac{z}{t}$$

2) Montrons par récurrence que

$$\mathcal{P}(n) : \frac{a_1}{b_1} < \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} < \frac{a_n}{b_n}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• **Initialisation.** Comme $\frac{\sum_{i=1}^1 a_i}{\sum_{i=1}^1 b_i} = \frac{a_1}{b_1}$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Notons

$$x = \sum_{i=1}^n a_i, \quad y = \sum_{i=1}^n b_i, \quad z = a_{n+1} \quad \text{et} \quad t = b_{n+1}.$$

Alors

$$\mathcal{P}(n+1) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} < \frac{x+z}{y+t} < \frac{z}{t}$$

D'après $\mathcal{P}(n)$, $\frac{x}{y} < \frac{a_n}{b_n}$. Par hypothèse $\frac{a_n}{b_n} < \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, ou encore, $\frac{a_n}{b_n} < \frac{z}{t}$. Donc $\frac{x}{y} < \frac{z}{t}$.

L'hypothèse de la question 1) est vérifiée. On en déduit que $\frac{x}{y} < \frac{x+z}{y+t} < \frac{z}{t}$.

Comme, d'après $\mathcal{P}(n)$, on a $\frac{a_1}{b_1} < \frac{x}{y}$, on obtient $\mathcal{P}(n+1)$.

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{a_1}{b_1} < \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n b_i} < \frac{a_n}{b_n}$$

Exercice 12 Moyennes

1) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. On procède par disjonction des cas :

- Si $i \leq j$, alors $x_i - x_j \leq 0$ et $y_i - y_j \geq 0$, donc $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \leq 0$.
- Si $i \geq j$, alors $x_i - x_j \geq 0$ et $y_i - y_j \leq 0$, donc $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \leq 0$.

Dans tous les cas, le produit est négatif. En tant que somme de termes négatifs,

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j) \leq 0.$$

2) Développons la somme précédente :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j) &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i y_i - x_i y_j - x_j y_i + x_j y_j) \\ &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_i - \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j - \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_j y_i + \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_j y_j. \end{aligned}$$

Or $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n y_j \right)$ et $\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i y_i = n \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Les indices i et j sont des variables muettes, donc

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} x_j y_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_i \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_j y_i = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i y_j.$$

Ainsi, $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (x_i - x_j)(y_i - y_j) = 2 \left(n \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)$.

Comme cette somme est négative, il vient $\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \geq n \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Puis en divisant par n^2 , $\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

3) Soient x_1, \dots, x_n des réels strictement positifs.

Quitte à les renommer, on peut supposer que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Appliquons l'inégalité précédente avec $y_i = 1/x_i \in \mathbb{R}_+^*$ avec $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$,

$$A_n \cdot \frac{1}{H_n} \geq \frac{1}{n} \cdot n = 1 \quad \text{et donc} \quad \boxed{A_n \geq H_n} \quad \text{car} \quad H_n > 0.$$

Exercice 13 Inégalité arithmético-géométrique et surface minimale

1) a) Étudions le signe de la différence : on écrit

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + 2\sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2} + a_2}{2} - \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geq 0.$$

Donc $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$.

Étudions le cas d'égalité :

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \sqrt{a_1 a_2} \Leftrightarrow (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a_1} = \sqrt{a_2} \Leftrightarrow \boxed{a_1 = a_2}.$$

b) Introduisons la fonction f définie sur \mathbb{R}^+ par

$$f(x) = \frac{a_1 + a_2}{3} + \frac{4x^3}{3(a_1 + a_2)^2} - x.$$

Cette fonction est polynomiale, donc dérivable sur \mathbb{R} , avec pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{4x^2}{(a_1 + a_2)^2} - 1 = \frac{x^2}{a^2} - 1 \quad \text{où} \quad a = \frac{a_1 + a_2}{2}.$$

Autrement dit,
$$f'(x) = \frac{x^2 - a^2}{a^2} = \frac{(x - a)(x + a)}{a^2}.$$

La fonction f' est positive sur l'intervalle $[a, +\infty[$ et négative sur $[0, a]$, donc la fonction f est croissante sur $[a, +\infty[$ et décroissante sur $[0, a]$. On en déduit que f atteint en a un minimum sur \mathbb{R}^+ , observations que l'on peut résumer en le tableau de variations suivant :

x	0	a	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f(x) \geq f(a) = \frac{2}{3}a + \frac{a^3}{3a^2} - a = 0.$$

Finalement, pour $x \in \mathbb{R}^+$,
$$\frac{a_1 + a_2}{3} + \frac{4x^3}{3(a_1 + a_2)^2} \geq x.$$

c) Cherchons un réel x tel que $\frac{a_1 + a_2}{3} + \frac{4x^3}{3(a_1 + a_2)^2} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}$.

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2}{3} + \frac{4x^3}{3(a_1 + a_2)^2} &= \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \Leftrightarrow \frac{4x^3}{3(a_1 + a_2)^2} = \frac{a_3}{3} \\ \Leftrightarrow x^3 &= \frac{a_3(a_1 + a_2)^2}{4} \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt[3]{\frac{a_3(a_1 + a_2)^2}{4}}. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente entraîne alors

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a_3(a_1 + a_2)^2}{4}}.$$

En remarquant que $(a_1 + a_2)^2 \geq 2a_1a_2$, on obtient finalement

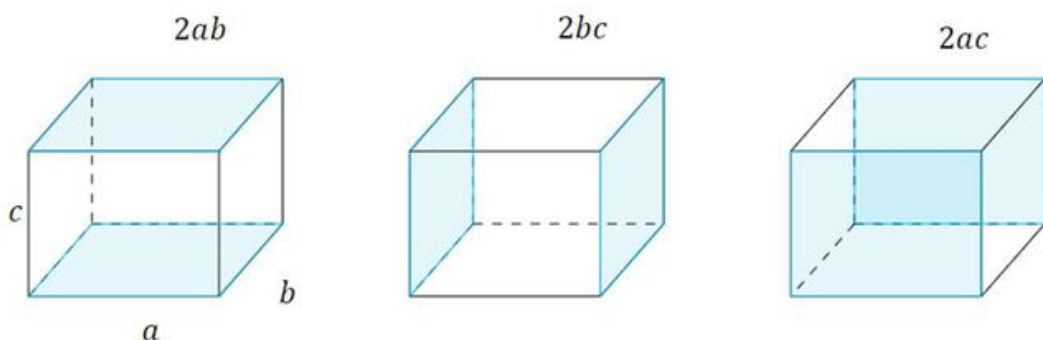
$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}.$$

• Précisons le cas d'égalité. En reprenant le développement de la preuve, le cas d'égalité impose

$$(a_1 + a_2)^2 = 2a_1a_2 \quad \text{et} \quad x = a.$$

On trouve alors $a_1 = a_2 = a_3$.

- 2) a) Il suffit de sommer les aires des six faces. On peut les regrouper par paires de faces opposées :



Ainsi,

$$S = 2ab + 2bc + 2ac.$$

Comme le volume vaut 1, $abc = 1$ et

$$S = 2ab + \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$$

- b) Appliquons l'inégalité de la question 1c avec $a_1 = 2ab$, $a_2 = 2/a$ et $a_3 = 2/b$ (tous strictement positifs).

$$\frac{2ab + 2/a + 2/b}{3} \geq \sqrt[3]{2ab \cdot 2/a \cdot 2/b} = 2, \quad \text{donc} \quad S \geq 6.$$

La surface du parallélépipède est donc au minimum de 6 avec égalité si et seulement si

$$2ab = 2/a = 2/b, \quad \text{d'où} \quad a = b = 1.$$

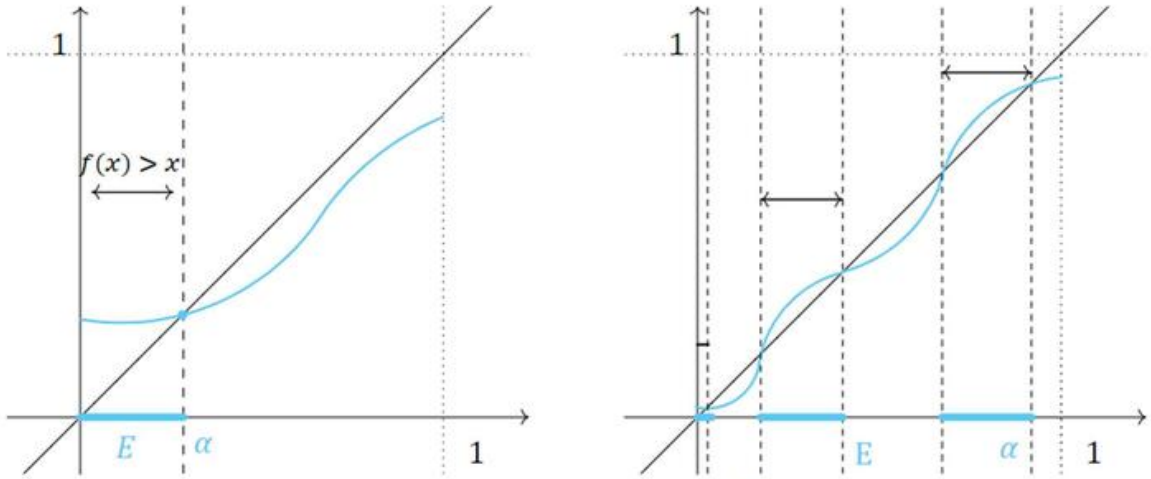
Comme $abc = 1$, on a aussi $c = 1$, c'est un cube!

Exercice 14 Existence d'un point fixe et borne supérieure.

- 1) L'ensemble E contient 0 car f est une fonction à valeurs dans $[0,1]$, et donc $f(0) \geq 0$.
- 2) L'ensemble E est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée (par 1).
D'après le théorème de la borne supérieure,

$$\alpha = \sup(E) \text{ est bien définie.}$$

- 3) Dans les deux cas, on vérifie que la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$ se coupent au point d'abscisse α . Autrement dit, $f(\alpha) = \alpha$.



- 4) Soit $x \in E$. Comme α est un majorant de E , $x \leq \alpha$. Par la définition de E et la croissance de la fonction f ,

$$x \leq f(x) \leq f(\alpha).$$

$f(\alpha)$ est un majorant de E .

- 5) Par définition de la borne supérieure comme étant le plus petit des majorants, et $f(\alpha)$ étant un majorant, on en déduit que $f(\alpha) \geq \alpha$.

Par croissance de la fonction f , $f(f(\alpha)) \geq f(\alpha)$. Donc $f(\alpha) \in E$.

Or α est un majorant de E . Donc $f(\alpha) \leq \alpha$. Ainsi $f(\alpha) = \alpha$.

f admet au moins un point fixe.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 15

C'est la centième décimale de π !

On peut s'en convaincre en testant $[10^n \pi] - 10[10^{n-1} \pi]$ pour $n = 1$, puis $n = 2$, etc.

Exercice 16 *Vrai ou faux?*

- 1) **Faux.**

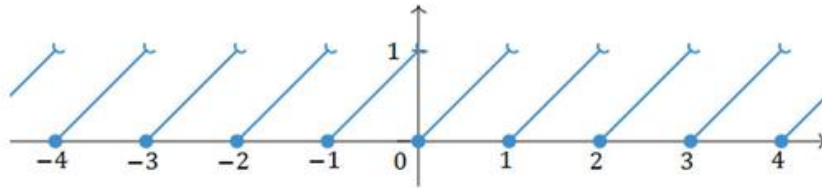
Le nombre $x = -1$ est un contre-exemple. Un énoncé correct est par exemple $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

- 2) **Faux.**

Par exemple, $x = y = 1/2$ est un contre-exemple. Par contre, cela devient vrai si x ou y est un entier.

3) Posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x - [x]$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si $x \in [n, n + 1[$, alors $f(x) = x - n$. D'où le graphe de f :



a) **Faux.**

Posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x - [x]$. Par exemple, $f(1/2) = 1/2$ et $f(1) = 0$, pourtant $1/2 \leq 1$.

b) **Vrai.**

Soit $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) = (x + 1) - [x + 1] = x + 1 - ([x] + 1) = f(x)$. Donc f est 1-périodique.

c) **Faux.**

Par exemple $f(1/4) = 1/4$ et $f(-1/4) = -1/4 - (-1) = 3/4$.

Ensembles, cardinaux

3

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Soient A, B et C des parties d'un ensemble E . Montrer que

1) $A \setminus (A \cap B) = A \setminus B$;

2) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

3) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$;

4) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Rappel. $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

Exercice 2 * *Formule du crible*

Une boulangerie vient d'accueillir 76 clients. Parmi ceux-ci,

- 62 clients ont pris un croissant;
- 34, un chausson aux pommes;
- 48 clients ont choisi un pain au chocolat;
- 18, un pain au chocolat et un chausson;
- 24 clients ont choisi un croissant et un chausson;
- 8 clients ont pris les trois produits.

Sachant qu'aucun client n'est reparti les mains vides, donner le nombre de clients ayant acheté un croissant et un pain au chocolat. Est-ce qu'un client peut n'avoir pris qu'un chausson aux pommes?

Exercice 3 ** *Inégalités sur des coefficients binomiaux*

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 Expliciter l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\}))$.

Exercice 5 Soient A et B des parties d'un ensemble E . Montrer que

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \cup B = A \cap B).$$

Exercice 6 ★ Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E . Montrer que

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

Exercice 7 ** On définit l'ensemble

$$E = \left\{ (a, b, c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 \mid a + b + c \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right\}.$$

- 1) Déterminer les réels $x \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $(x, 1, 1) \in E$.
- 2) Soit $(a, b, c) \in E$. Justifier que l'un au moins des trois réels a, b et c est inférieur à 1.
- 3) Démontrer que $]0, 1]^3 \subset E$. Y a-t-il égalité?

Exercice 8 ** Soient E un ensemble et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, on définit la partie $A \bullet B$ par

$$A \bullet B = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

- 1) Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$.
 - a) Calculer $A \bullet \emptyset, A \bullet E, A \bullet A$ puis $A \bullet \overline{A}$.
 - b) Préciser une condition simple sur A et B pour avoir égalité entre

$$(A \bullet A) \bullet (B \bullet B) = (A \bullet B) \bullet (A \bullet B).$$

- c) Établir l'équivalence $(A \bullet B) \bullet C = A \bullet (B \bullet C) \Leftrightarrow A = C$.

- 2) Reprendre les questions précédentes avec l'opération \otimes définie de la façon suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, \quad A \otimes B = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Exercice 9 ★ Une égalité entre sommes obtenue par dénombrement

Soient p et n deux entiers naturels tels que $1 < p < n$. Notons

$$E_n = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad X = \{A \subset E_n \mid \text{card}(A) \geq p\}.$$

- 1) Exprimer $\text{card}(X)$ sous forme d'une somme faisant intervenir les coefficients du binôme de Newton.
- 2) Soit $A \subset E_n$ un sous-ensemble de cardinal k . Notons a_1, a_2, \dots, a_k les éléments de A classés par ordre croissant. Pour tout $i \in E_n$, on introduit l'ensemble

$$U_i = \{A \subset E_n \mid \text{card}(A) \geq p \text{ et } a_p = i\}.$$

Déterminer $\text{card}(U_i)$.

- 3) En déduire que $\sum_{i=p}^n \binom{n}{p} = \sum_{i=p}^n \binom{i-1}{p-1} 2^{n-i}$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 10 ★ On définit

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \leq 2\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \text{ et } |y| \leq 1\}$$

$$\text{et } C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq 1\}.$$

Préciser et justifier les différentes inclusions possibles entre ces trois ensembles.

Exercice 11 ★ Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$. L'équivalence suivante est-elle vraie ?

$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}.$$

Exercice 12 ★★ Soit E un ensemble non vide, et soient A et B deux éléments non vides de $\mathcal{P}(E)$.

- 1) A-t-on $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$?
- 2) A-t-on $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$? Justifiez vos réponses.

Exercice 13 ★★★ On pose $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x + y| \leq 1\}$.
Peut-on trouver deux parties de \mathbb{R} telles que $E = A \times B$?

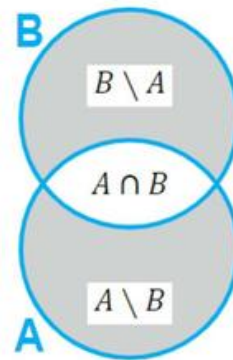
Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

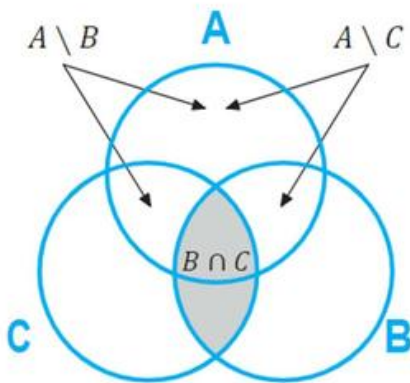
1) Écrivons :

$$\begin{aligned}
 A \setminus (A \cap B) &= A \cap \overline{(A \cap B)} \\
 &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) && \text{lois de Morgan} \\
 &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{B}) && \text{distributivité} \\
 &= \emptyset \cup (A \cap \overline{B}) \\
 &= A \cap \overline{B} \\
 &= \boxed{A \setminus B.}
 \end{aligned}$$



2) De même,

$$\begin{aligned}
 A \setminus (A \setminus B) &= A \cap \overline{(A \setminus B)} = A \cap \overline{(A \cap \overline{B})} \\
 &= A \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}}) = A \cap (\overline{A} \cup B) \\
 &= (A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B) = \emptyset \cup (A \cap B) \\
 &= \boxed{A \cap B.}
 \end{aligned}$$



3) On écrit

$$\begin{aligned}
 (A \cup B) \setminus B &= (A \cup B) \cap \overline{B} \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset \\
 &= A \cap \overline{B}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{(A \cup B) \setminus B = A \setminus B.}$$

4) Il vient

$$\begin{aligned}
 A \setminus (B \cap C) &= A \cap \overline{(B \cap C)} \\
 &= A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) \\
 &= (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C})
 \end{aligned}$$

$$\boxed{A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).}$$

Exercice 2 Formule du crible

On note

- A l'ensemble des clients avec un croissant;
- B l'ensemble des clients avec un chausson aux pommes;
- C l'ensemble des clients avec une chocolatine.

D'après la *formule du crible* avec trois parties,

$$\underbrace{\text{card}(A \cup B \cup C)}_{=76} = \underbrace{\text{card}(A)}_{=62} + \underbrace{\text{card}(B)}_{=34} + \underbrace{\text{card}(C)}_{=48} - \underbrace{\text{card}(A \cap B)}_{=24} - \underbrace{\text{card}(B \cap C)}_{=18} - \underbrace{\text{card}(A \cap C)}_{?} + \underbrace{\text{card}(A \cap B \cap C)}_{=8}.$$

D'où

$$\boxed{\text{card}(A \cap C) = 34.}$$

Puis, en utilisant à nouveau la *formule du crible* avec deux parties, on aussi

$$\boxed{\text{card}(A \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap C) = 76.}$$

Aucun client n'a pris qu'un chausson aux pommes.

Exercice 3 Inégalités sur des coefficients binomiaux

Proposons deux démonstrations.

Méthode 1. Par récurrence.

Démontrons que la proposition $\mathcal{P}(n) : 2^n < \binom{2n}{n} < 4^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** $\binom{2 \cdot 0}{0} = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1) \cdot (2n)!}{(n+1)^2(n!)^2} = 2 \cdot \frac{2n+1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n}.$$

$$\text{Comme } 1 < \frac{2n+1}{n+1} < 2, \quad 2 \cdot \binom{2n}{n} < \binom{2(n+1)}{n+1} < 4 \cdot \binom{2n}{n}.$$

D'après $\mathcal{P}(n)$, il vient $2^{n+1} < \binom{2(n+1)}{n+1} < 4^{n+1}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n < \binom{2n}{n} < 4^n$.

Méthode 2. Par dénombrement.

Dans un ensemble E à $2n$ éléments, il y a $\binom{2n}{n}$ parties à n éléments et $(2)^{2n} = 4^n$ parties. Nécessairement, $\binom{2n}{n} < 4^n$.

Séparons E en deux ensembles de cardinal n : $E = E_1 \cup E_2$. Pour choisir une partie de E avec n éléments, il faut choisir une partie de E_1 (il y a 2^n choix possibles), puis compléter avec des éléments de E_2 . Il y a donc plus de choix possibles de parties à n éléments parmi $2n$ que de choix possibles de parties de E_1 . Donc $2^n < \binom{2n}{n}$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4

L'ensemble $\mathcal{P}(\{a\})$ est un ensemble à deux éléments : plus précisément, $\mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\}$. Or, l'ensemble des parties d'un ensemble à deux éléments $E = \{A, B\}$ est un ensemble à 4 éléments : plus précisément,

$$\mathcal{P}(\{A, B\}) = \{\emptyset, \{A\}, \{B\}, \{A, B\}\}.$$

Finalement,

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{a\})) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}\}.$$

Exercice 5

Raisonnons par double implication.

⇒ On suppose $A = B$. Alors $A \cup B = A$ et $A \cap B = A$. Donc $A \cup B = A \cap B$.

⇐ On suppose $A \cup B = A \cap B$. On a toujours $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$.
Par double inclusion, $A = A \cup B (= A \cap B)$. De même, $B = A \cup B (= A \cap B)$.
Ainsi, $A = B$.

Conclusion :

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \cup B = A \cap B).$$

Exercice 6

Raisonnons par double inclusion.

⊂ Soit $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.
Alors $x \in A \cup B$ et $x \in B \cup C$ et $x \in C \cup A$. Donc x appartient à l'une au moins des trois parties A, B ou C . Effectuons une disjonction des cas.

Cas $x \in A$. Par hypothèse, $x \in B \cup C$. Si $x \in B$, alors $x \in (A \cap B)$, sinon $x \in C$. Donc $x \in (A \cap C)$. Dans les deux cas, on obtient

$$x \in (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

Les cas $x \in B$ et $x \in C$ se traitent de façon similaire (A, B et C jouent des rôles symétriques).

⊃ Soit $x \in (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in B \cap C$ ou $x \in C \cap A$.
Si $x \in A \cap B$, alors $x \in A$, donc $x \in A \cup B$ et $x \in C \cup A$. Mais aussi $x \in B$, donc $x \in B \cup C$.
Ainsi

$$x \in (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A).$$

Les cas $x \in B \cap C, x \in C \cap A$ se traitent de façon similaire.

Conclusion :

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A).$$

Exercice 7

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^+$. Raisonnons par équivalence.

$$(x, 1, 1) \in E \Leftrightarrow x + 1 + 1 \leq \frac{1}{x} + 1 + 1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{x} \Leftrightarrow \boxed{x \in]0, 1]}.$$

2) Soit $(a, b, c) \in E$. Raisonnons par l'absurde en supposant que tous les nombres sont strictement supérieurs à 1. On a alors

$$a > 1, b > 1, c > 1 \Rightarrow a + b + c > 3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{a} < 1, \frac{1}{b} < 1, \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 3.$$

C'est en contradiction avec $a + b + c \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Finalement,

$$\boxed{\text{au moins un des trois réels } a, b \text{ ou } c \text{ est inférieur à } 1.}$$

3) Soit $(a, b, c) \in]0, 1]^3$. On a alors $a \leq \frac{1}{a}, b \leq \frac{1}{b}, c \leq \frac{1}{c}$ puis

$$a + b + c \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \quad \text{donc} \quad (a, b, c) \in E.$$

Ainsi

$$\boxed{]0, 1]^3 \subset E.}$$

Il n'y a pas égalité. Par exemple,

$$\left(1, 2, \frac{1}{10}\right) \in E, \quad \text{mais} \quad \left(1, 2, \frac{1}{10}\right) \notin]0, 1]^3.$$

Exercice 8

1) a) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{aligned} A \cdot \emptyset &= \bar{A} \cap \bar{\emptyset} = \bar{A} \cap E = \bar{A}; & A \cdot E &= \bar{A} \cap \bar{E} = \bar{A} \cap \emptyset = \emptyset; \\ A \cdot A &= \bar{A} \cap \bar{A} = \bar{A}; & A \cdot \bar{A} &= \bar{A} \cap \bar{\bar{A}} = \bar{A} \cap A = \emptyset. \end{aligned}$$

b) D'après a), $A \cdot A = \bar{A}$. De même, $B \cdot B = \bar{B}$. D'où

$$(A \cdot A) \cdot (B \cdot B) = \bar{A} \cdot \bar{B} = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cap B.$$

De plus, à l'aide du calcul précédent

$$(A \cdot B) \cdot (A \cdot B) = \overline{A \cdot B} = \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = A \cup B,$$

Ainsi $((A \cdot A) \cdot (B \cdot B) = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)) \Leftrightarrow (A \cup B = A \cap B)$.

Si $A = B$, alors $(A \cup B = A \cap B)$. Justifions la réciproque par double inclusion.

$$A \subset A \cup B = A \cap B \subset B.$$

Par symétrie, $B \subset A$. D'où l'égalité.

Conclusion : $\boxed{((A \cdot A) \cdot (B \cdot B) = (A \cdot B) \cdot (A \cdot B)) \Leftrightarrow A = B}$

c) Calculons à l'aide des lois de Morgan :

$$(A \cdot B) \cdot C = \overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}} = (A \cup B) \cap \overline{C};$$

$$A \cdot (B \cdot C) = \overline{\overline{A} \cap \overline{B \cup C}} = \overline{A} \cap (B \cup C).$$

Raisonnons par double implication.

\Rightarrow Supposons que $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
Autrement dit, $(A \cup B) \cap \overline{C} = \overline{A} \cap (B \cup C)$.
Justifions que $A = C$ par double inclusion.
Soit $x \in A$, montrons que $x \in C$ en raisonnant par l'absurde.
Si $x \notin C$, alors $x \in \overline{C}$ et

$$x \in (A \cup B) \cap \overline{C} = \overline{A} \cap (B \cup C), \text{ puis, } x \in \overline{A}.$$

On aboutit à une contradiction.

Par conséquent, $x \in C$, et donc $A \subset C$.

De manière symétrique, il vient $C \subset A$ et finalement $A = C$.

\Leftarrow Supposons que $A = C$. À l'aide du premier calcul,
 $(A \cdot B) \cdot C = (A \cup B) \cap \overline{C} = (A \cup B) \cap \overline{A} = \overline{A} \cap (B \cup A) = \overline{A} \cap (B \cup C) = A \cdot (B \cdot C)$.

On a bien prouvé l'équivalence.

2) a) Par définition,

$$A \otimes \emptyset = \overline{A} \cup \overline{\emptyset} = \overline{A} \cup E = E;$$

$$A \otimes E = \overline{A} \cup \overline{E} = \overline{A} \cup \emptyset = \overline{A};$$

$$A \otimes \overline{A} = \overline{A} \cup \overline{\overline{A}} = \overline{A} \cup A = E.$$

b) Vérifier que

$$A \otimes A = \overline{A}, \quad B \otimes B = \overline{B},$$

$$(A \otimes A) \otimes (B \otimes B) = \overline{A} \otimes \overline{B} = A \cup B, \quad (A \otimes B) \otimes (A \otimes B) = \overline{\overline{A} \otimes \overline{B}} = A \cap B.$$

En reprenant le raisonnement précédent, cela équivaut à $A = B$.

c) Notons que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$,

$$A \otimes B = \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B} = \overline{\overline{A \cdot B}}.$$

Puis

$$\overline{A \otimes B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{P}(E)^3$; on dispose des équivalences

$$\begin{aligned} (A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) &\Leftrightarrow \overline{(A \otimes B) \otimes C} = \overline{A \otimes (B \otimes C)} \\ &\Leftrightarrow (\overline{A \otimes B}) \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot (\overline{B \otimes C}) \\ &\Leftrightarrow (\overline{A} \cdot \overline{B}) \cdot \overline{C} = \overline{A} \cdot (\overline{B} \cdot \overline{C}). \end{aligned}$$

D'après le résultat de la question 1 b), cela équivaut à

$$\overline{A} = \overline{C} \Leftrightarrow A = C.$$

Exercice 9 Une égalité entre sommes obtenue par dénombrement

1) Rappelons que $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de E_n avec k éléments. Ainsi,

$$\text{card}(X) = \sum_{k=p}^n \binom{n}{k}.$$

2) Une partie A de U_i est constituée

- de $p - 1$ éléments appartenant à E_{i-1} , ce qui fait $\binom{i-1}{p-1}$ possibilités;
- de l'élément i (qui sera alors a_p);
- d'éléments de $\llbracket i + 1, n \rrbracket$ (2^{n-i} possibilités).

D'où
$$\text{card}(U_i) = \binom{i-1}{p-1} 2^{n-i}.$$

Les ensembles U_i sont disjoints et $X = \bigcup_{i=p}^n U_i$. Donc

$$\text{card}(X) = \sum_{i=p}^n \binom{i-1}{p-1} 2^{n-i}.$$

3) L'égalité découle des questions précédentes.

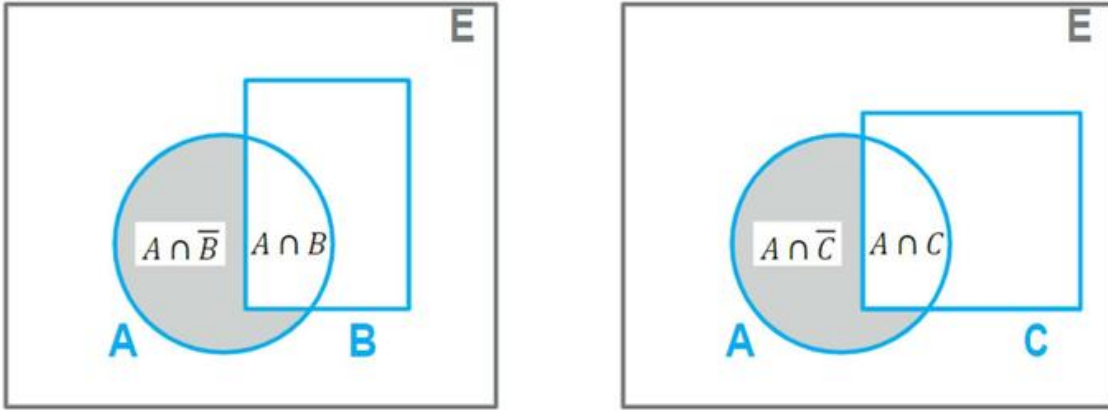
Exercices avec questions ouvertes

Exercice 10

- Comme $(-2, 2) \in A$ mais $(-2, 2) \notin B$, on conclut que $A \not\subset B$.
- Soit $(x, y) \in B$. D'après l'inégalité triangulaire, $|x + y| \leq |x| + |y| \leq 2$.
Donc $(x, y) \in A$. On a donc $B \subset A$.
- Comme $(-2, 2) \in A$ mais $(-2, 2) \notin C$, on conclut que $A \not\subset C$.
- Comme $(3, 0) \in C$ mais $(3, 0) \notin A$, on conclut que $C \not\subset A$.
- Soit $(x, y) \in B$. Alors $|y| \leq 1$. D'où $(x, y) \in C$. Donc $B \subset C$.
- De façon immédiate, $C \not\subset B$, avec $(2, 0)$ comme contre-exemple.

Exercice 11

Un dessin permet de conjecturer que l'équivalence est **vraie**.



Solution 1

Montrons que, pour tous sous-ensembles F et G de E ,

$$A \cap F \subset A \cap G \Rightarrow A \cap \bar{G} \subset A \cap \bar{F}. \quad (\bullet)$$

On suppose $A \cap F \subset A \cap G$.

Soit $x \in A \cap \bar{G}$. Alors $x \in A$ et $x \notin G$. Montrons que $x \in \bar{F}$ en raisonnant par l'absurde. Si $x \in F$, alors $x \in A \cap F$. Donc, par hypothèse, $x \in A \cap G$. Contradiction avec $x \notin G$. La propriété (\bullet) est prouvée.

En appliquant (\bullet) avec $F = B$ et $G = C$; puis avec $F = C$ et $G = B$, on obtient :

$$A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}.$$

Pour la réciproque, on applique (\bullet) avec $F = \bar{B}$ et $G = \bar{A}$; puis avec $F = \bar{A}$ et $G = \bar{B}$.

Solution 2

Montrons que, pour tous sous-ensembles F et G de E :

$$A \cap F = A \cap G \Rightarrow A \cap \bar{G} = A \cap \bar{F}. \quad (\bullet\bullet)$$

$$\begin{aligned} A \cap F = A \cap G &\Rightarrow \overline{A \cap G} = \overline{A \cap F} \\ &\Rightarrow \bar{A} \cup \bar{G} = \bar{A} \cup \bar{F} \\ &\Rightarrow A \cap (\bar{A} \cup \bar{G}) = A \cap (\bar{A} \cup \bar{F}) \\ &\Rightarrow \underbrace{(A \cap \bar{A})}_{\emptyset} \cup (A \cap \bar{G}) = \underbrace{(A \cap \bar{A})}_{\emptyset} \cup (A \cap \bar{F}) \\ &\Rightarrow A \cap \bar{G} = A \cap \bar{F}. \end{aligned}$$

En appliquant $(\bullet\bullet)$ avec $F = B$ et $G = C$, on obtient :

$$A \cap B = A \cap C \Rightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}.$$

Pour la réciproque, on applique $(\bullet\bullet)$ avec $F = \bar{B}$ et $G = \bar{A}$.

Conclusion :

$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}.$$

Exercice 12

1) **Vrai.** Montrons que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Soit X une partie de $A \cup B$:

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A \cap B) &\Leftrightarrow X \subset (A \cap B) \\ &\Leftrightarrow (X \subset A) \text{ et } (X \subset B) \\ &\Leftrightarrow (X \in \mathcal{P}(A)) \text{ et } (X \in \mathcal{P}(B)) \\ &\Leftrightarrow X \in (\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)). \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).}$$

2) **Faux.** La suite d'équivalences précédentes n'est plus vraie si on remplace \cap par \cup .

Plus précisément : $(X \subset A)$ ou $(X \subset B)$ n'est pas équivalent à $X \subset (A \cup B)$.

Par exemple, si $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ et $X = \{2,3,4\}$ alors $X \subset (A \cup B)$, donc $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Pour autant, $X \notin \mathcal{P}(A)$ et $X \notin \mathcal{P}(B)$.

Exercice 13

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe deux parties A et B de \mathbb{R} telles que $E = A \times B$. Comme $|0 + 1| \leq 1$, on en déduit que $(0,1) \in E$ et $(1,0) \in E$. En particulier, $1 \in A$ et $1 \in B$. Dès lors, $(1,1) \in A \times B$. C'est absurde puisque $(1,1) \notin E$. Finalement,

$$\boxed{E \text{ ne peut s'écrire à l'aide d'un produit cartésien.}}$$

Sommes et produits

4

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 On définit la suite de Fibonacci par

$$F_0 = F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} F_k$ uniquement en fonction de F_{n+1} .

Exercice 2 Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $A_p = \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k}$ et $B_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k}$.
Après avoir calculé $A_p + B_p$ et $A_p - B_p$, simplifier les expressions de A_p et B_p .

D'après Edhec 2008

Exercice 3 ** *Calcul d'une somme sous forme de fraction rationnelle*

1) Trouver trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$\frac{1+5x}{(x^2-1)x} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}$$

2) En déduire une expression simple de

$$\sum_{k=2}^n \frac{1+5k}{(k^2-1)k} \quad \text{en fonction de } n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}.$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1,2\}$. Calculer les produits suivants :

$$1) A_n = \prod_{k=2}^n (-1),$$

$$2) B_n = \prod_{k=1}^n k^2,$$

$$3) C_n = \prod_{k=2}^n \frac{k+2}{k},$$

$$4) D_n = \prod_{k=1}^n (3 \cdot 4^k)$$

$$5) E_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right),$$

$$6) F_n = \prod_{k=1}^n (k^k \cdot k!).$$

Exercice 5 ** Sommes et coefficients binomiaux Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$1) A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k},$$

$$2) B_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1},$$

$$3) C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k},$$

$$4) D_n = \sum_{k=0}^n 2^k k \binom{n}{k},$$

$$5) E_n = \sum_{0 \leq k < p < n} 2^k \binom{p}{k},$$

$$6) F_n = \sum_{0 \leq i, j < n} \frac{j^i}{(j+1)^{n-1}} \binom{n}{i}.$$

Exercice 6 ** Sommes doubles Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$1) A_n = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket} (i+j),$$

$$2) B_n = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket} \frac{2^i}{2^i + 2^j},$$

$$3) C_n = \sum_{0 \leq i < j < n} \frac{i}{j+1},$$

$$4) D_n = \sum_{0 \leq i < j < n} 2^{i+j},$$

$$5) E_n = \sum_{\substack{1 \leq i < n \\ 1 \leq j < i}} \frac{(i+1)7^i}{ij(j+1)}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 7 * Calcul d'une somme par dérivation

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,
$$C_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} k e^{kx}.$$

Exercice 8 * Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{11 \dots 11}_{n \text{ chiffres}}$.

- 1) Exprimer S_n à l'aide d'une somme double.
- 2) Calculer S_n .

Exercice 9 *** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Exercice 10 *** Formule du trinôme de Newton

Soit $(n, i, j) \in \mathbb{N}^3$. On pose

$$\begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} = \begin{cases} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} & \text{si } i+j \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1) Préciser $\begin{bmatrix} n \\ 1, 1 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} n \\ n-1, 0 \end{bmatrix}$.

2) a) Vérifier l'égalité $\begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{j}$.

b) Démontrer la formule du trinôme de Newton : pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$(a+b+c)^n = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} a^i b^j c^{n-i-j}.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Calculer les sommes

$$S_1 = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix}, \quad S_2 = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} (-1)^{i+j} \quad \text{et} \quad S_3 = \sum_{i=0}^{n-2} \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix}.$$

4) a) Pour $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, établir l'égalité $ij \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} = n(n-1) \begin{bmatrix} n-2 \\ i-1, j-1 \end{bmatrix}$.

b) En déduire la somme $S_4 = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} ij \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix}$.

Exercice 11 *** On considère une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $a_1 + \sum_{k=2}^n \left(a_k \times \prod_{i=1}^{k-1} (1-a_i) \right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1-a_i)$.

2) a) Justifier que si $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, alors $\prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n} \right) = \frac{1}{n^k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!}$.

b) Déduire des questions précédentes que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot k!}{n^k} \binom{n}{k} = n$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 12 *** Voici le triangle de Pascal.

Le coefficient à la ligne numéro n et à la colonne numéro p est $\binom{n}{p}$.

- 1) a) Que pouvez-vous dire de la somme des coefficients de chaque ligne? Prouvez le résultat.
- b) En déduire la somme de tous les coefficients sur les $n + 1$ premières lignes.
- 2) a) Vérifier que pour $(p, n) \in \mathbb{N}^2$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

- b) Comment traduire cette relation sur le triangle de Pascal?

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	0	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	0	...
5	1	5	10	10	5	1	0	...
6	1	6	15	20	15	6	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	0	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	0	...
5	1	5	10	10	5	1	0	...
6	1	6	15	20	15	6	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k}.$$

L'expression u_n représente donc la somme des coefficients de la diagonale numéro n .

- a) Conjecturer une relation simple entre u_{n+2} , u_{n+1} et u_n .
- b) Prouver cette conjecture.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut par exemple utiliser un télescopage.

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, F_k = F_{k+2} - F_{k+1}, \text{ donc } \sum_{k=0}^{n-1} F_k = \sum_{k=0}^{n-1} (F_{k+2} - F_{k+1}) = F_{n+1} - F_1 = \boxed{F_{n+1} - 1}.$$

Exercice 2Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 A_p + B_p &= \sum_{k=0}^p \binom{2p+1}{k} + \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} && \text{relation de Chasles} \\
 &= \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} \\
 &= \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} 1^k 1^{2p+1-k} && \text{formule du binôme de Newton} \\
 &= (1+1)^{2p+1} \\
 &= 2^{2p+1}.
 \end{aligned}$$

Pour calculer $A_p - B_p$, utilisons la *propriété de symétrie des coefficients binomiaux*.

$$B_p = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} = \sum_{k=p+1}^{2p+1} \binom{2p+1}{2p+1-k}.$$

Ainsi, à l'aide du changement d'indice $i = 2p + 1 - k$,

$$B_p = \sum_{i=0}^p \binom{2p+1}{i} = A_p, \quad \text{donc} \quad A_p - B_p = 0.$$

On en déduit $2A_p = A_p + B_p = 2^{2p+1}$ et $A_p = B_p = 2^{2p}$.

Exercice 3 Calcul d'une somme sous forme de fraction rationnelle

1) Soit $x \in]1, +\infty[$. On réduit au même dénominateur :

$$\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1} = \frac{ax(x+1) + b(x^2-1) + cx(x-1)}{(x^2-1)x} = \frac{x^2(a+b+c) + x(a-c) - b}{(x^2-1)x}.$$

Par identification, il suffit que a, b et c soient solutions du système linéaire

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ a-c=5 \\ -b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=1 \\ a-c=5 \\ b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ c=-2 \\ b=-1. \end{cases}$$

2) En utilisant la décomposition précédente, on obtient

$$S = \sum_{k=2}^n \frac{1+5k}{(k^2-1)k} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{3}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} \right) = 3 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1}.$$

Or, en effectuant respectivement les changements d'indice $p = k - 1$ et $q = k + 1$,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{q=3}^{n+1} \frac{1}{q}$$

Comme les indices k, p et q sont muets, la somme vaut

$$S = 3 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=3}^{n+1} \frac{1}{k}$$

Pour $n \geq 3$, on peut sortir deux termes des sommes :

$$\begin{aligned} S &= 3 \left(\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} + 1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) - 2 \left(\sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 3 \left(1 + \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) - 2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 4 - \frac{2}{n+1} - \frac{3}{n} \end{aligned}$$

On vérifie que, pour $n = 2$, l'expression est juste.

En conclusion, pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^n \frac{1+5k}{(k^2-1)k} = 4 - \frac{5n+3}{n(n+1)}$$

Exercice 4

1) Il y a $n - 2 + 1 = n - 1$ facteurs dans le produit, ainsi

$$A_n = \prod_{k=2}^n (-1) = (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est un entier impair,} \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2) De plus,

$$B_n = \prod_{k=1}^n k^2 = \left(\prod_{k=1}^n k \right)^2 = (n!)^2$$

3) Comme $n \geq 3$, en explicitant, puis en simplifiant :

$$C_n = \prod_{k=2}^n \frac{k+2}{k} = \frac{4 \times \dots \times \cancel{n} \times (n+1) \times (n+2)}{2 \times 3 \times \cancel{4} \times \dots \times \cancel{n}} = \frac{(n+1)(n+2)}{6}$$

4) Ensuite

$$D_n = \prod_{k=1}^n (3 \cdot 4^k) = 3^n \prod_{k=1}^n 4^k = 3^n 4^{1+2+\dots+n} = 3^n \cdot 4^{n(n+1)/2} = 3^n \cdot 2^{n(n+1)}$$

$$5) E_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = \frac{\prod_{k=2}^n (k-1) \prod_{k=2}^n (k+1)}{\prod_{k=2}^n k^2}.$$

Or

$$\left\{ \begin{array}{l} \prod_{k=2}^n (k-1) = 1 \times 2 \times \dots \times (n-1) = (n-1)!, \\ \prod_{k=2}^n (k+1) = 3 \times 4 \times \dots \times (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} \cdot (n-1)!, \\ \prod_{k=2}^n k^2 = 2^2 \times 3^2 \times \dots \times n^2 = (2 \times \dots \times n)^2 = (n!)^2 = ((n-1)!)^2 n^2. \end{array} \right.$$

Après simplification,

$$E_n = \frac{n+1}{2n}.$$

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Précisons dans un premier temps le second facteur :

$$\left. \begin{array}{l} \prod_{k=1}^n k! = 1 \\ \quad \times 1 \times 2 \\ \quad \times 1 \times 2 \times 3 \\ \quad \quad \dots \\ \quad \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \end{array} \right\} \text{ donc } \prod_{k=1}^n k! = \prod_{k=1}^n k^{n+1-k}.$$

En effet, on constate que 1 apparaît n fois, 2 apparaît $n-1$, ..., n n'apparaît qu'une fois. D'où

$$F_n = \prod_{k=1}^n k^k \cdot k! = \prod_{k=1}^n k^k \cdot \prod_{k=1}^n k! = \prod_{k=1}^n k^k \cdot \prod_{k=1}^n k^{n+1-k} = \prod_{k=1}^n k^{n+1} = \left(\prod_{k=1}^n k \right)^{n+1}.$$

En conclusion

$$F_n = (n!)^{n+1}.$$

Exercice 5 Sommes et coefficients binomiaux

1) D'après la formule du binôme de Newton,

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

2) Effectuons le changement d'indice $i = k + 1$:

$$B_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} = - \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{i} = \binom{n}{0} - \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i}.$$

De nouveau, la *formule du binôme de Newton* impose $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = (1 - 1)^n = 0$.

Donc

$$B_n = 1.$$

3) On utilise la relation $\frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$. Donc

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \binom{n+1}{k+1} \stackrel{i=k+1}{=} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n+1}{i}.$$

Or :

$$-B_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} = (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} + \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n+1}{i} = -(-1)^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n+1}{i}.$$

Donc

$$C_n = \frac{-B_{n+1} + (-1)^n}{n+1} = \frac{-1 + (-1)^n}{n+1}.$$

4) On transforme $D_n = \sum_{k=0}^n 2^k k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n 2^k k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n 2^k n \binom{n-1}{k-1}$.

Le changement d'indice $i = k - 1$, puis la *formule du binôme de Newton* donnent :

$$D_n = n \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i+1} \binom{n-1}{i} = 2n(2+1)^{n-1} = 2n \cdot 3^{n-1}.$$

5) La *formule du binôme de Newton* donne

$$E_n = \sum_{p=0}^n \left(\sum_{k=0}^p 2^k \binom{p}{k} \right) = \sum_{p=0}^n 3^p.$$

D'après la *formule des sommes géométriques*

$$E_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

6) On écrit F_n de sorte à appliquer la *formule du binôme de Newton*.

$$F_n = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \frac{j^i}{(j+1)^{n-1}} \binom{n}{i} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{(j+1)^{n-1}} \sum_{i=0}^n j^i \binom{n}{i} = \sum_{j=0}^n \frac{1}{(j+1)^{n-1}} (1+j)^n.$$

Après simplification, on reconnaît une *somme arithmétique*,

$$F_n = \sum_{j=0}^n (j+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Exercice 6 Sommes doubles

1) On écrit

$$A_n = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^n (i+j) \right).$$

Traitons tout d'abord le terme entre parenthèses. Pour cela, fixons $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\sum_{j=0}^n (i+j) = \sum_{j=0}^n i + \sum_{j=0}^n j = (n+1) \cdot i + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ainsi,

$$A_n = \sum_{i=0}^n \left((n+1)i + \frac{n(n+1)}{2} \right) = (n+1) \sum_{i=0}^n i + (n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{n(n+1)^2}.$$

Remarque

On peut aussi écrire $A_n = \underbrace{\sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket} i}_{A'_n} + \underbrace{\sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket} j}_{A''_n}$.

On remarque que $A'_n = A''_n$. Donc on calcule simplement A'_n .

2) Comme les variables i et j sont muettes,

$$B_n = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket} \frac{2^i}{2^i + 2^j} = \sum_{(j,i) \in \llbracket 0, n \rrbracket} \frac{2^j}{2^j + 2^i}$$

Ainsi,

$$2B_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{2^i}{2^i + 2^j} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{2^j}{2^i + 2^j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{2^j + 2^i}{2^i + 2^j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n 1 = (n+1)^2.$$

Finalement,

$$\boxed{B_n = \frac{(n+1)^2}{2}}.$$

3) On écrit

$$C_n = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^j \frac{i}{j+1} \right).$$

Pour $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ fixé, on est en présence d'une *somme arithmétique* :

$$\sum_{i=0}^j \frac{i}{j+1} = \frac{1}{j+1} \sum_{i=0}^j i = \frac{j(j+1)}{2(j+1)} = \frac{j}{2}.$$

Finalement,

$$\boxed{C_n = \sum_{j=0}^n \frac{j}{2} = \frac{n(n+1)}{4}}.$$

4) On écrit
$$D_n = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=0}^{j-1} 2^{i+j} \right) = \sum_{j=1}^n 2^j \left(\sum_{i=0}^{j-1} 2^i \right).$$

On reconnaît une *somme géométrique* de raison $2 \neq 1$,

$$D_n = \sum_{j=1}^n 2^j \frac{2^j - 1}{2 - 1} = \sum_{j=1}^n 2^j (2^j - 1) = \sum_{j=0}^n \underbrace{2^j (2^j - 1)}_{\text{terme nul si } j=0} = \sum_{j=0}^n 4^j - \sum_{j=0}^n 2^j$$

Concluons

$$D_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3} - 2^{n+1} + 1.$$

5) On écrit
$$E_n = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^i \frac{(i+1)7^i}{ij(j+1)} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{(i+1)7^i}{i} \left(\sum_{j=1}^i \frac{1}{j(j+1)} \right).$$

Calculons la somme entre parenthèses par *télescopage* :

$$\sum_{j=1}^i \frac{1}{j(j+1)} = \sum_{j=1}^i \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} \right) = 1 - \frac{1}{i+1} = \frac{i}{i+1}.$$

On aboutit donc à une *somme géométrique* :

$$E_n = \sum_{i=1}^n \frac{(i+1)7^i}{i} \cdot \frac{i}{i+1} = \sum_{i=1}^n 7^i = \boxed{7 \cdot \frac{7^n - 1}{6}}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 7 Calcul d'une somme par dérivation

Introduisons la fonction c définie sur \mathbb{R} par $c_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{kx}$.

En tant que somme de fonctions dérivables, c est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$c_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k e^{kx} = \sum_{k=1}^{n-1} k e^{kx} = C_n(x).$$

Or, on reconnaît dans $c_n(x)$ une somme géométrique de raison e^x . Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $e^x \neq 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^x)^k = \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1}.$$

On obtient une deuxième expression de la dérivée sur \mathbb{R}^* :

$$c_n'(x) = \frac{ne^{nx}(e^x - 1) - e^x(e^{nx} - 1)}{(e^x - 1)^2}$$

On conclut en simplifiant l'expression précédente et en traitant le cas $x = 0$ à part :

$$C_n(x) = \begin{cases} n(n-1)/2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{(n-1)e^{(n+1)x} - ne^{nx} + e^x}{(e^x - 1)^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 8

1)

$$\begin{aligned} \underbrace{111 \cdots 11}_{k \text{ chiffres}} &= 1 \underbrace{00 \cdots 00}_{(k-1) \text{ fois } 0} + 1 \underbrace{00 \cdots 00}_{(k-2) \text{ fois } 0} + \cdots + 10 + 1 \\ &= 10^{k-1} + 10^{k-2} + \cdots + 10^1 + 10^0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\underbrace{111 \cdots 11}_{k \text{ chiffres}} = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{k-1} 10^i$.

2) Calculons cette somme double à l'aide de *sommes géométriques*. Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{k-1} 10^i = \frac{10^k - 1}{10 - 1} = \frac{10^k - 1}{9}.$$

Remarque

Effectivement $9 \times \underbrace{111 \cdots 11}_{k \text{ chiffres}} = \underbrace{999 \cdots 99}_{k \text{ chiffres}} = 10^k - 1$

$$\text{Puis, } S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{9} (10^k - 1) = \frac{10}{9} \sum_{\ell=0}^{n-1} 10^\ell - \frac{1}{9} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{10}{9} \times \frac{10^n - 1}{10 - 1} - \frac{1}{9} n.$$

Après simplification,

$$S_n = \frac{10}{81} (10^n - 1) - \frac{n}{9}$$

Exercice 9

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k}$

Par définition des coefficients du binôme, $\binom{n}{n+1} = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 A_{n+1} - A_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n+1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \binom{n}{n+1} = 0 \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n+1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{formule du triangle de Pascal} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k-1} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \binom{n+1}{k} = \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1} \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{n+1} \binom{n+1}{k} \\
 &= \frac{1}{n+1} + (-1) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k}{n+1} \binom{n+1}{k} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{formule du binôme de Newton} \\
 &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} (1-1)^{n+1} \\
 &= \frac{1}{n+1}.
 \end{aligned}$$

Par *télescopage*, pour $n \geq 2$ $\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=2}^n (A_k - A_{k-1}) = A_n - A_1 = A_n - 1$.

Pour $n = 1$, l'égalité est vérifiée avec la convention qu'une somme vide vaut 0 (l'indice du haut est 1 de moins que l'indice du bas).

Conclusion :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$$

Remarque

À l'aide du calcul intégral et de dérivées, les exercices 5 du chapitre 16 et 3 du chapitre 28 donnent deux autres preuves de cette égalité.

Exercice 10 Formule du trinôme de Newton

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq 2$, $\left[\begin{matrix} n \\ 1,1 \end{matrix} \right] = \frac{n!}{1!1!(n-2)!} = \boxed{n(n-1)}$.

Notons que la formule demeure valable pour $n \in \{0,1\}$. Puis,

$$\left[\begin{matrix} n \\ n-1,0 \end{matrix} \right] = \frac{n!}{0!(n-1)!(n-(n-1)-0)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \boxed{n}.$$

2) a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

- Si $i + j < n$, alors

$$\begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{(n-i)!}{j!((n-i)-j)!} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{j}.$$

- Sinon, $i + j > n$, $n - i < j$ et $\binom{n-i}{j} = 0$. La formule reste valable.

b) Soient a, b et c trois réels. Appliquons la *formule du binôme de Newton* :

$$(a + b + c)^n = (a + (b + c))^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i (b + c)^{n-i}.$$

Appliquons une nouvelle fois la *formule du binôme de Newton* :

$$(b + c)^{n-i} = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} b^j c^{(n-i)-j}.$$

D'où

$$(a + b + c)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} b^j c^{(n-i)-j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} a^i b^j c^{n-i-j}.$$

Puis, à l'aide de la question précédente, $(a + b + c)^n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} a^i b^j c^{n-i-j}$.

De plus, $\sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} a^i b^j c^{n-i-j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} a^i b^j c^{n-i-j}$.

Or, $\sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} a^i b^j c^{n-i-j} = \sum_{j=0}^{n-i} \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} a^i b^j c^{n-i-j} + \underbrace{\sum_{j=n-i+1}^n \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} a^i b^j c^{n-i-j}}_{=0}$

car, si $j \geq n - i + 1$, alors $j + i \geq n + 1 > n$ et dans ce cas $\begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} = 0$. Finalement,

$$(a + b + c)^n = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} a^i b^j c^{n-i-j}.$$

3) • Appliquons la *formule du trinôme* avec $a = b = c = 1$:

$$S_1 = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} \begin{bmatrix} n \\ i, j \end{bmatrix} 1^i 1^j 1^{n-i-j} = (1 + 1 + 1)^n = \boxed{3^n}.$$

- Avec $a = b = -1$ et $c = 1$,

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2} \binom{n}{i,j} (-1)^{i+j} = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2} \binom{n}{i,j} (-1)^i (-1)^j 1^{n-i-j} = (-1 - 1 + 1)^n \\ &= \boxed{(-1)^n}. \end{aligned}$$

- Utilisons S_1 pour calculer S_3 .

$$S_1 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{i,j} = \sum_{i=0}^{n-2} \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{i,j} \right) + \underbrace{\sum_{j=0}^n \binom{n}{n-1,j}}_{\text{pour } i=n-1} + \underbrace{\sum_{j=0}^n \binom{n}{n,j}}_{\text{pour } i=n}.$$

Calculons la seconde somme. Pour $j > 1$, on a $(n-1) + j > n$ et $\binom{n}{n-1,j} = 0$.

Et à l'aide de la question 1),

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{n-1,j} = \sum_{j=0}^1 \binom{n}{n-1,j} = \binom{n}{n-1,0} + \binom{n}{n-1,1} = 2n.$$

De même, pour $j > 0$, $\binom{n}{n,j} = 0$ et $\sum_{j=0}^n \binom{n}{n,j} = \sum_{j=0}^0 \binom{n}{n,j} = \binom{n}{n,0} = 1$.

On obtient $S_1 = S_3 + 2n + 1$ donc $\boxed{S_3 = 3^n - 2n - 1}$.

4) a) Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^{*2}$.

- L'inégalité $i + j > n$ équivaut à $(i-1) + (j-1) > n-2$ et l'égalité de l'énoncé est vérifiée dans ce cas ($0 = 0$).
- Supposons maintenant $i + j \leq n$. Alors

$$\begin{aligned} ij \binom{n}{i,j} &= ij \frac{n!}{i!j!(n-j-i)!} \\ &= \frac{i}{i!} \cdot \frac{j}{j!} \cdot \frac{n!}{(n-i-j)!} \\ &= \frac{1}{(i-1)!} \cdot \frac{1}{(j-1)!} \cdot n(n-1) \frac{(n-2)!}{((n-2) - (i-1) - (j-1))!} \\ &= n(n-1) \binom{n-2}{i-1, j-1}. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, l'égalité est vérifiée.

b) À l'aide de la relation précédente,

$$\begin{aligned}
 S_4 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n ij \binom{n}{i,j} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij \binom{n}{i,j} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n n(n-1) \binom{n-2}{i-1, j-1} \\
 &= n(n-1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \binom{n-2}{i-1, j-1} \\
 &= n(n-1) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-2}{i-1, j-1}.
 \end{aligned}$$

On effectue ensuite les changements d'indice $k = i - 1$ et $p = j - 1$:

$$S_4 = n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{p=0}^{n-2} \binom{n-2}{k,p}.$$

On retrouve l'expression de S_1 avec $n - 2$ au lieu de n , soit

$$S_4 = n(n-1)3^{n-2}.$$

Exercice 11

1) On montre la propriété par récurrence. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose

$$\mathcal{P}(n) : a_1 + \sum_{k=2}^n \left(a_k \times \prod_{i=1}^{k-1} (1 - a_i) \right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - a_i).$$

• **Initialisation.** Montrons $\mathcal{P}(2)$. On a

$$a_1 + \sum_{k=2}^2 \left(a_k \times \prod_{i=1}^{k-1} (1 - a_i) \right) = a_1 + a_2(1 - a_1) = a_1 + a_2 - a_1 a_2.$$

$$\text{Or} \quad 1 - \prod_{i=1}^2 (1 - a_i) = 1 - (1 - a_1)(1 - a_2) = a_1 + a_2 - a_1 a_2.$$

Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \geq 2$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned}
 & a_1 + \left(\sum_{k=2}^{n+1} \left(a_k \times \prod_{i=1}^{k-1} (1 - a_i) \right) \right) \\
 &= a_1 + \left(\sum_{k=2}^n \left(a_k \times \prod_{i=1}^{k-1} (1 - a_i) \right) \right) + \underbrace{a_{n+1} \times \prod_{i=1}^n (1 - a_i)}_{\text{terme } k=n+1} \quad \left. \vphantom{\sum_{k=2}^n} \right\} \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\
 &= 1 - \prod_{i=1}^n (1 - a_i) + a_{n+1} \times \prod_{i=1}^n (1 - a_i) \\
 &= 1 - (1 - a_{n+1}) \prod_{i=1}^n (1 - a_i) = 1 - \prod_{i=1}^{n+1} (1 - a_i).
 \end{aligned}$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Pour tout entier $n \geq 2$,

$$a_1 + \sum_{k=2}^n \left(a_k \times \prod_{i=1}^{k-1} (1 - a_i) \right) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - a_i).$$

- 2) a) Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n} \right) &= \prod_{i=1}^{k-1} \frac{n-i}{n} = \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{n^{k-1}} \\
 &= \frac{(n-1)!}{n^{k-1}(n-k)!} = \frac{1}{n^k} \cdot \frac{n!}{(n-k)!}.
 \end{aligned}$$

- b) Pour $n = 1$, la relation est vérifiée. Soit $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \frac{k \cdot k!}{n^k} \binom{n}{k} &= \underbrace{\frac{1 \cdot 1!}{n} \binom{n}{1}}_{k=1} + \sum_{k=2}^n \frac{k \cdot k!}{n^k} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
 &= 1 + \sum_{k=2}^n k \frac{n!}{n^k(n-k)!} \quad \left. \vphantom{\sum_{k=2}^n} \right\} \text{d'après la question 2a} \\
 &= 1 + \sum_{k=2}^n \left(k \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Pour tout entier $i \geq 1$, notons $a_i = \frac{i}{n}$. Le résultat du 1) devient

$$\frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{k}{n} \times \prod_{i=1}^{k-1} \left(1 - \frac{i}{n} \right) \right) = 1 - \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{i}{n} \right) = 1 \quad \text{car } 1 - \frac{n}{n} = 0.$$

En multipliant par n et en utilisant l'égalité précédente, il vient

$$\sum_{k=1}^n \frac{k \cdot k!}{n^k} \binom{n}{k} = n.$$

Remarque

Une démonstration utilisant le calcul des probabilités sera proposée à l'exercice 7 du chapitre 17.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 12

- 1) a) On constate que les premières valeurs sont 1, 2, 4, 8, 16, 32...
On reconnaît la suite des puissances de 2. On peut donc émettre la conjecture suivante :

La somme sur la ligne numéro n vaut 2^n .

Preuve. Cette somme s'écrit $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$. Or, d'après la *formule du binôme de Newton*,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

- b) On souhaite calculer la somme double $S_n = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0,n \rrbracket^2} \binom{i}{j}$.

D'après le résultat précédent,

$$S_n = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^n 2^i.$$

On est en présence d'une somme géométrique de raison $2 \neq 1$, et donc

$$S_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = \boxed{2^{n+1} - 1}.$$

- 2) a) Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^*$. D'après la *formule du triangle de Pascal*, $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$. On reconnaît une somme télescopique

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \sum_{k=0}^n \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - \binom{0}{p+1}.$$

D'où le résultat car $\binom{0}{p+1} = 0$.

Remarque

On aurait aussi pu procéder par récurrence avec $\mathcal{P}(p) : \sum_{k=0}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

b)

La somme précédente donne la somme des $n + 1$ premiers coefficients situés sur la p -ième colonne. On retrouve le premier coefficient situé dans la diagonale du dernier terme.

Ci-contre, un exemple avec

$$n = 5 \quad \text{et} \quad p = 2.$$

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	...
0	1	0	0	0	0	0	0	...
1	1	1	0	0	0	0	0	...
2	1	2	1	0	0	0	0	...
3	1	3	3	1	0	0	0	...
4	1	4	6	4	1	0	0	...
5	1	5	10	10	5	1	0	...
6	1	6	15	20	15	6	1	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

3) a) Les premiers termes sont 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ...

On reconnaît une suite de Fibonacci. On conjecture donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} + u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n+1-p}{p-1} \\
 &= \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1-k}{k-1} \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left(\binom{n+1-k}{k} + \binom{n+1-k}{k-1} \right) \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+2-k}{k}.
 \end{aligned}$$

changement d'indice $p = k + 1$
 p est une variable muette
 formule du triangle de Pascal

Comme $\binom{n+2-(n+2)}{n+2} = 0$ et $\binom{n+2-0}{0} = 1$, il vient

$$u_{n+1} + u_n = \sum_{k=0}^{n+2} \binom{n+2-k}{k} = u_{n+2}.$$

Fonctions usuelles

5

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Donner le graphe de la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x^x$.

Exercice 2 * Résoudre l'équation $|x - 3| + |x - 1| = (x - 2)^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 * *Équations et inéquations trigonométriques*

- a) Déterminer tous les réels x tels que $\sin(x) = \frac{1}{2}$.
b) Même question pour $\tan(x) = -1$.
- Déterminer tous les réels x tels que $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 4 * Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

- Donner une relation simple entre $\cos(2\theta)$ et $\cos(\theta)$.
- En déduire la valeur de $\cos(\pi/12)$ et de $\sin(\pi/12)$.
- Vérifier que $\tan(\pi/12) = 2 - \sqrt{3}$.

Exercice 5 * Posons $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 3x^3 + \frac{1}{x}$.

- Étudier les variations de f . Vérifier l'existence d'un minimum dont on précisera la valeur.
- En déduire que pour tous réels a, b et c strictement positifs,

$$ab + ac + bc + 3abc(a^3 + b^3 + c^3) \geq 4\sqrt{3}abc.$$

Exercice 6 * *Inégalités sur des fonctions trigonométriques*

- 1) a) Vérifier que la fonction tangente est dérivable sur $] -\pi/2, \pi/2[$ avec $\tan' = 1 + \tan^2$.
 b) En déduire que pour tout $x \in [0, \pi/2[$,

$$\tan(x) \geq x, \quad \text{puis} \quad \tan(x) \geq x + \frac{x^3}{3}.$$

- 2) Justifier que pour tout $x \in [0, \pi/2[$,

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$$

Interpréter graphiquement cette dernière inégalité.

Exercice 7 ** L'objectif est de simplifier les expressions suivantes :

$$a = \sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} \quad \text{et} \quad b = -\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}.$$

- 1) a) Calculer ab et $a^3 + b^3$.
 b) En déduire que $(a + b)^3 = 14 - 3(a + b)$.
 2) Dans la suite, on considère la fonction polynomiale

$$P : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + 3x - 14. \end{cases}$$

- a) Tracer le graphe de P et vérifier que P n'a qu'une unique racine réelle.
 b) Que vaut $P(a + b)$? En déduire la valeur de $a + b$.
 3) On considère maintenant la fonction $Q : x \mapsto (x - a)(x - b)$.
 a) Vérifier que $Q(x) = x^2 - 2x - 1$.
 b) Conclure en donnant des expressions simples de a et b en termes de $\sqrt{2}$.

Exercice 8 ** *Sommes trigonométriques*

- 1) a) Justifier que pour tous réels a et b ,

$$\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b)).$$

- b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sin(\theta) \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) = \sin((n + 1)\theta) \cos(n\theta).$$

- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$C_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)^2.$$

Exercice 9 ** Inégalité de Huygens

$$1) \text{ On pose } f : \begin{cases} [0, \pi/2[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 2 \sin(x) + \tan(x) - 3x. \end{cases}$$

a) Justifier la dérivabilité de f et l'existence d'un polynôme P de degré 3 tel que

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad f'(x) = \frac{P(\cos(x))}{\cos^2(x)}.$$

b) Vérifier que $P(1) = 0$. Puis déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(t) = (t-1)(at^2+bt+c)$.

2) En déduire que l'inégalité suivante a lieu pour tout $x \in [0, \pi/2[$:

$$\frac{2}{3} \sin(x) + \frac{1}{3} \tan(x) \geq x.$$

 **Exercices axés sur le raisonnement****Exercice 10** ** Preuve des croissances comparées

1) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \right).$$

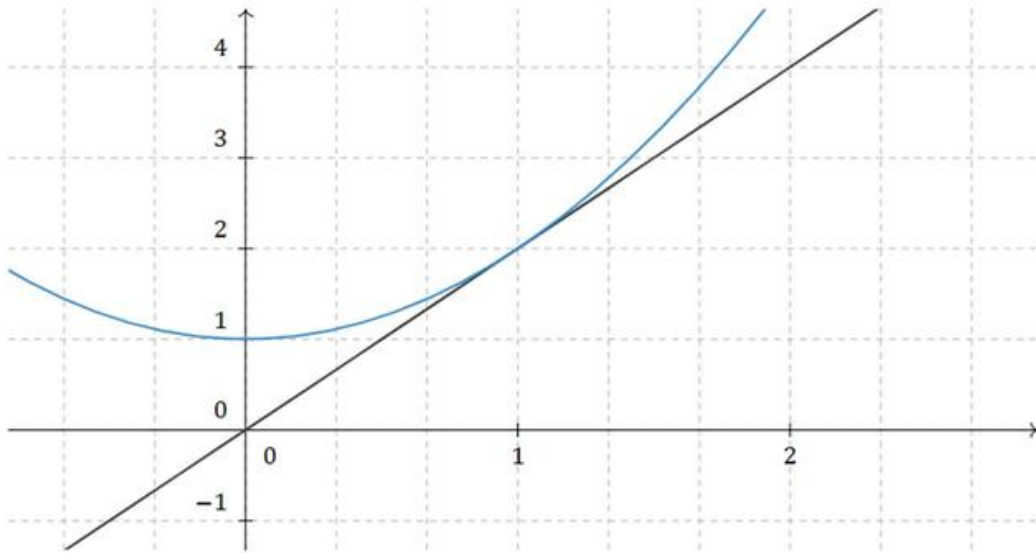
a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}' = f_n$.

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

2) Conclure : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $\frac{e^x}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 11 ** Résoudre l'équation $[2x] = [x^2 + 1]$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra répondre à partir des graphes de $x \mapsto x^2 + 1$ et $x \mapsto 2x$.



Exercice 12 ** Une somme non périodique de fonctions périodiques

Pour tout réel x , on pose

$$f(x) = \sin(\pi x) \quad \text{et} \quad g(x) = \sin(\sqrt{2}\pi x).$$

- 1) Justifier que f et g sont périodiques.
- 2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $h(x) = f(x) + g(x)$. Démontrons par l'absurde que h n'est pas une fonction périodique. On suppose donc qu'il existe $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que h est T -périodique.

a) Justifier que h' et h'' sont aussi T -périodiques.

La fonction h'' est la dérivée seconde de h , définie comme étant la dérivée de la dérivée de h (c'est-à-dire $h'' = (h')'$).

b) Vérifier que

$$h(T) = 0 \quad \text{et} \quad h''(T) = 0.$$

c) En déduire

$$\sin(\pi T) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(\sqrt{2}\pi T) = 0.$$

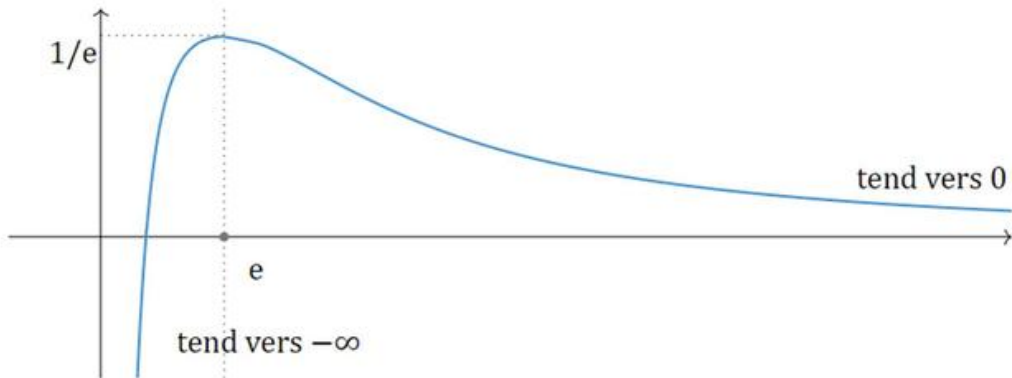
- 3) Aboutir à une contradiction avec l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Conclure.
Dire que $\sqrt{2}$ est irrationnel signifie qu'on ne peut l'écrire sous la forme d'un quotient de deux entiers.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13 Est-il possible de trouver une tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme qui passe par l'origine ?

Exercice 14 **

1) Justifier que le graphe suivant est bien celui de $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.



2) En déduire la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Notons f cette application. Alors

$$f(x) = x^x = e^{x \ln(x)}.$$

Le domaine de définition est donc \mathbb{R}_+^* . La fonction f est dérivable en tant que composée de produits de fonctions dérivables avec, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = (1 + \ln(x)) e^{x \ln(x)}.$$

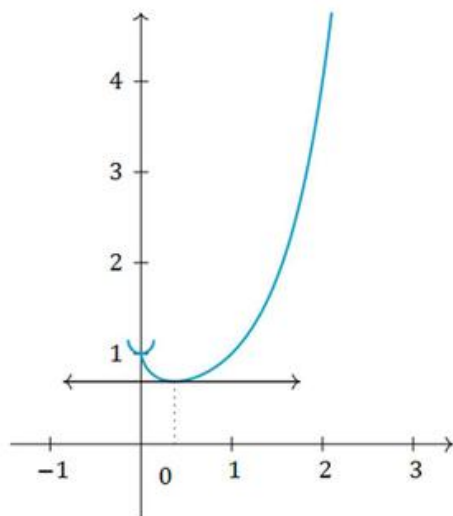
En particulier, $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^{-1}$.

La fonction f est donc

- croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$;
- décroissante sur $]0, e^{-1}[$.

À l'aide des *croissances comparées* et de la continuité de la fonction exponentielle en 0,

$$x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \quad \text{donc} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} e^0 = 1;$$



par produit et composition,

$$x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{donc} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

D'où le graphe.

Exercice 2

On raisonne par disjonction des cas.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$ x - 3 $	$3 - x$	$3 - x$	0	$x - 3$
$ x - 1 $	$1 - x$	0	$x - 1$	$x - 1$
$ x - 3 + x - 1 $	$4 - 2x$	2	$2x - 4$	
$ x - 3 + x - 1 - (x - 2)^2$	$2x - x^2$	$-2 + 4x - x^2$	$-8 + 6x - x^2$	

- Si $x < 1$, on résout $x(x - 2) = 0$.
Comme $x < 1$, seul $x = 0$ est solution.
- Si $x \in [1, 3]$, on résout $-2 + 4x - x^2 = 0$.
Les racines du trinôme sont $x_1 = 2 + \sqrt{2} > 3$ et $x_2 = 2 - \sqrt{2} < 1$.
On constate qu'il n'y a pas de solution dans $[1, 3]$.
- Si $x > 3$, on résout $-8 + 6x - x^2 = 0$.

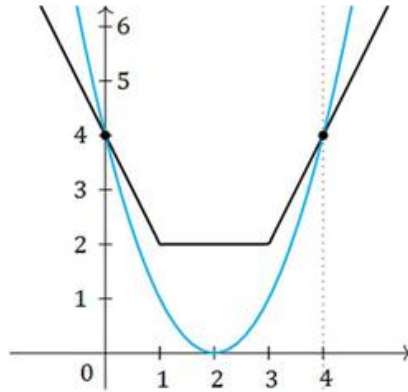
On constate alors qu'il existe une solution donnée par $x = 4$.

En conclusion, cette équation admet deux solutions, qui sont 0 et 4.

On peut vérifier notre calcul en traçant les graphes de

$$x \in \mathbb{R} \mapsto |x - 3| + |x - 1|$$

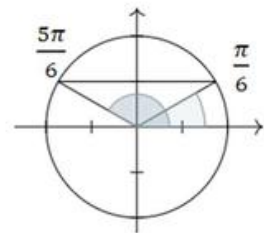
et $x \in \mathbb{R} \mapsto (x - 2)^2$.



Exercice 3 Équations et inéquations trigonométriques

1) a) À l'aide du cercle trigonométrique, on sait que les solutions de l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ s'écrivent sous la forme

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z}.$$



b) Résolvons $\tan(x) = -1$. Soit x un réel distinct de $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour k entier.

On écrit les équivalences

$$\begin{aligned}
 \tan(x) = -1 &\Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -1 \\
 &\Leftrightarrow \cos(x) = -\sin(x) \\
 &\Leftrightarrow \cos(x) + \sin(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + p\pi.
 \end{aligned}$$

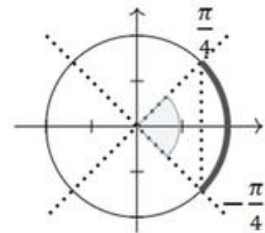
} formules d'addition

Finalement

$$\tan(x) = -1 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : x = \frac{3\pi}{4} + p\pi.$$

2) De nouveau, le cercle trigonométrique donne l'ensemble des solutions :

$$\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{Z} : x \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2p\pi, \frac{\pi}{4} + 2p\pi\right].$$



Exercice 4

1) Pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1.$$

2) Appliquons la relation précédente avec $\theta = \pi/12 \in \mathbb{R}$. Comme $\cos(\pi/12)$ est positif et $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) - 1 \quad \text{donc} \quad \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Avec $\sin(\pi/12) > 0$,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 \quad \text{donc} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

3) Finalement, puisque $\tan = \sin / \cos$,

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(2 - \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Exercice 5

- 1) La fonction f est une fraction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 9x^2 - \frac{1}{x^2} = \frac{9x^4 - 1}{x^2} = \frac{(3x^2 + 1)(3x^2 - 1)}{x^2} = \frac{(3x^2 + 1)(\sqrt{3}x - 1)(\sqrt{3}x + 1)}{x^2}.$$

La quantité $f'(x)$ est donc strictement négative si et seulement si $x \in]0, 1/\sqrt{3}[$.

Par conséquent, f est décroissante sur l'intervalle $]0, 1/\sqrt{3}[$ et croissante sur l'intervalle $[1/\sqrt{3}, +\infty[$. Elle atteint donc un minimum en $\alpha = 1/\sqrt{3}$ et

$$m = f(\alpha) = 3\alpha^3 + \frac{1}{\alpha} = \frac{3\alpha^4 + 1}{\alpha} = \frac{3/9 + 1}{1/\sqrt{3}} = \boxed{4\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

- 2) Soient a, b et c des réels strictement positifs. D'après ce qui précède,

$$f(a) \geq m, \quad f(b) \geq m \quad \text{et} \quad f(c) \geq m.$$

Par somme, $f(a) + f(b) + f(c) \geq 3m = 4\sqrt{3}$.

En multipliant par $abc > 0$, on obtient le résultat demandé :

$$\boxed{ab + ac + bc + 3abc(a^3 + b^3 + c^3) \geq 4\sqrt{3}abc.}$$

Exercice 6 *Inégalités sur des fonctions trigonométriques*

- 1) a) Par définition, $\tan = \sin / \cos$. Par quotient de deux fonctions dérivables sur l'intervalle $I =]-\pi/2, \pi/2[$, la fonction tangente est dérivable sur I avec

$$\tan' = \frac{\cos \sin' - \cos' \sin}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\tan' = 1 + \tan^2.}$$

- b) On définit la fonction f sur $[0, \pi/2[$ par

$$f(x) = \tan(x) - x.$$

Cette fonction est dérivable sur $[0, \pi/2[$ par différence de deux fonctions dérivables et

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad f'(x) = \tan'(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0.$$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[0, \pi/2[$.

$$x \geq 0 \quad \text{donc} \quad f(x) \geq f(0) \quad \text{donc} \quad \tan(x) - x \geq 0.$$

D'où

$$\boxed{\forall x \in [0, \pi/2[, \quad \tan(x) \geq x.}$$

- Posons, sur $[0, \pi/2[$, $g(x) = \tan(x) - (x + x^3/3)$. De nouveau, g est dérivable sur $[0, \pi/2[$ par différence de fonctions dérivables avec

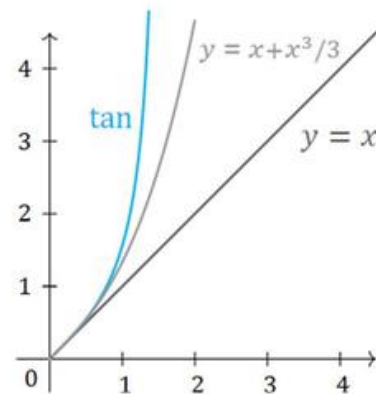
$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad g'(x) = \tan'(x) - 1 - x^2 = \tan^2(x) - x^2.$$

On reconnaît une identité remarquable et, à l'aide de l'inégalité précédente,

$$g'(x) = (\tan(x) - x)(\tan(x) + x) \geq 0.$$

La fonction g est donc croissante. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que, pour $x \in [0, \pi/2[$,

$$g(x) \geq 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\tan(x) \geq x + \frac{x^3}{3}}$$



Remarque

Les fonctions tangente et $x \mapsto x + \frac{x^3}{3}$ sont impaires, donc pour tout $x \in]-\pi/2, 0]$,

$$\tan(x) \leq x + \frac{x^3}{3}.$$

2) Pour $x \in I = [0, \pi/2]$, introduisons

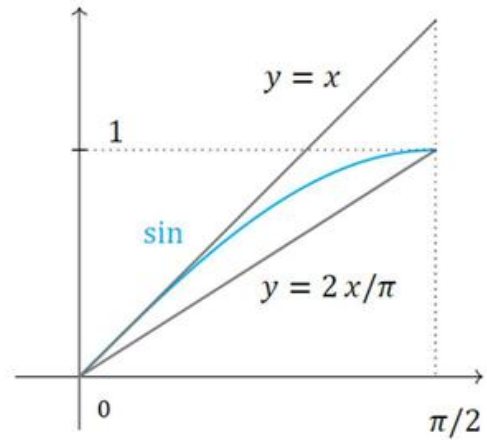
$$f(x) = x - \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2}{\pi}x - \sin(x).$$

Les deux fonctions f et g sont deux fois dérivables sur I par différence de fonctions deux fois dérivables sur I avec, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 1 - \cos(x) \quad \text{et} \quad \begin{cases} g'(x) = \frac{2}{\pi} - \cos(x) \\ g''(x) = \sin(x). \end{cases}$$

Sur $I \setminus \{0\}$, $f'(x) > 0$. La fonction f est donc strictement croissante sur l'intervalle I . Comme $f(0) = 0$, la fonction est positive sur I et l'inégalité de droite est donc établie.

Sur $I \setminus \{0\}$, $g''(x) > 0$. La fonction g' est donc strictement croissante sur l'intervalle I . De plus, $g'(0) < 0$ et $g'(\pi/2) > 0$. D'après le *théorème des valeurs intermédiaires*, g' s'annule sur I . Soit $\alpha \in I$ tel que $g'(\alpha) = 0$. La fonction g' est croissante sur I , donc g' est négative sur $[0, \alpha]$ et positive sur $[\alpha, \pi/2]$. La fonction g est décroissante sur $[0, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, \pi/2]$. Comme $g(0) = 0 = g(\pi/2)$, la fonction g est négative et l'inégalité de gauche est donc établie.



Graphiquement, la fonction sinus est *concave* sur $[0, \pi/2]$. Il est donc compris entre le graphe de la tangente en 0 et la corde qui passe par les points d'abscisses 0 et $\pi/2$.

Exercice 7

1) a)
$$ab = \left(-\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7}\right)\left(\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}\right) = -\left(5\sqrt{2} + 7\right)^{1/3} \left(5\sqrt{2} - 7\right)^{1/3}$$

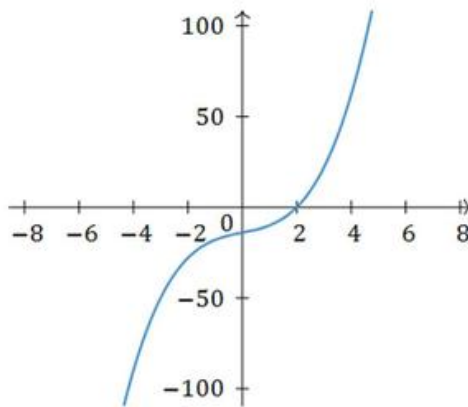
$$= -\left((5\sqrt{2} + 7)(5\sqrt{2} - 7)\right)^{1/3} = -\left((5\sqrt{2})^2 - 7^2\right)^{1/3} = \boxed{-1}$$
 et
$$a^3 + b^3 = \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}\right)^3 = 5\sqrt{2} + 7 - (5\sqrt{2} - 7) = \boxed{14}.$$

b) On développe :

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a^3 + b^3) + 3ab(a + b)$$

$$= \boxed{14 - 3(a + b)}.$$

2) a)



Le nombre $\boxed{2}$ est une racine évidente. De plus, P est dérivable car polynomiale avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P'(x) = 3(x^2 + 1) > 0.$$

La fonction P est strictement croissante sur l'intervalle \mathbb{R} . En particulier, P ne peut s'annuler strictement plus d'une fois. Le nombre 2 est donc bien l'unique racine.

b) D'après 1 b), $P(a + b) = (a + b)^3 + 3(a + b) - 14 = 0$. Le nombre $a + b$ est l'unique racine réelle de P . Autrement dit, $\boxed{a + b = 2}$.

3) a) Pour tout réel x ,

$$Q(x) = (x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = \boxed{x^2 - 2x - 1.}$$

b) Les nombres a et b sont les racines de Q . Précisons que a est la racine positive et b la racine négative. Par un calcul de discriminant, il vient

$$\boxed{a = 1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad b = 1 - \sqrt{2}.}$$

Exercice 8 Sommes trigonométriques

1) a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On écrit

$$\begin{cases} \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b) = \sin(a + b) & L_1 \\ \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b) = \sin(a - b) & L_2. \end{cases}$$

En calculant $(L_1 + L_2)/2$, on a directement

$$\boxed{\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b)).}$$

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \sin(\theta) \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) = \sin((n+1)\theta) \cos(n\theta)$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** D'une part, $\sin(\theta) \sum_{k=0}^0 \cos(2k\theta) = \sin(\theta) \cos(0) = \sin(\theta)$, d'autre part, $\sin((0+1)\theta) \cos(0 \cdot \theta) = \sin(\theta)$. On a bien égalité, et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Utilisons la relation précédente avec des valeurs a , b différentes.

$$\begin{aligned}
 & \sin(\theta) \sum_{k=0}^{n+1} \cos(2k\theta) \\
 &= \sin(\theta) \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta) + \sin(\theta) \cos(2(n+1)\theta) && \left. \begin{array}{l} \text{relation de Chasles} \\ \text{d'après } \mathcal{P}(n) \end{array} \right\} \\
 &= \sin((n+1)\theta) \cos(n\theta) + \sin(\theta) \cos(2(n+1)\theta) && \left. \begin{array}{l} \text{question 1a} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (\sin((2n+1)\theta) + \sin(\theta)) \\
 &\quad + \frac{1}{2} (\sin((2n+3)\theta) + \sin(-(2n+1)\theta)) && \left. \begin{array}{l} \sin(-t) = -\sin(t) \\ \text{question 1a avec} \\ a=(n+2)\theta, b=(n+1)\theta \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} (\sin((2n+3)\theta) + \sin(\theta)) \\
 &= \sin((n+2)\theta) \cos((n+1)\theta).
 \end{aligned}$$

Donc si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2) • Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si θ est un multiple de 2π , alors $C_n(\theta) = \sum_{k=0}^n 1 = \boxed{n+1}$.

- Sinon, $\sin(\theta) \neq 0$ et la question précédente avec $\theta/2$ au lieu de θ donne

$$C_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta/2) \cos(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

• Utilisons les relations trigonométriques

$$\cos(2\theta) = \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 = 2 \cos(\theta)^2 - 1.$$

Ainsi, $\cos(\theta)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$.

$$S_n(\theta) = \sum_{k=0}^n \cos(k\theta)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (1 + \cos(2k\theta)) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos(2k\theta).$$

Avec les résultats précédents,

$$S_n(\theta) = \begin{cases} n+1 & \text{si } \theta \text{ est un multiple de } \pi \\ \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+1)\theta) \cos(n\theta)}{2 \sin(\theta)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 9 Inégalité de Huygens

- 1) a) En tant que somme de fonctions trigonométriques et d'une fonction linéaire, la fonction f est dérivable sur $[0, \pi/2[$; puisque $\tan' = 1 + \tan^2 = 1/\cos^2$, on obtient, pour $x \in [0, \pi/2[$,

$$f'(x) = 2 \cos(x) + \frac{1}{\cos^2(x)} - 3 = \frac{2 \cos^3(x) - 3 \cos^2(x) + 1}{\cos^2(x)}.$$

On convient de poser $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1.$

- b) On a bien $P(1) = 2 - 3 + 1 = 0$. On peut donc factoriser par $t - 1$. Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$(t - 1)(at^2 + bt + c) = at^3 + bt^2 + ct - at^2 - bt - c = at^3 + (b - a)t^2 + (c - b)t - c.$$

Deux fonctions polynomiales étant égales partout si et seulement si elles ont les mêmes coefficients,

$$a = 2, \quad b - a = -3, \quad c - b = 0, \quad -c = 1.$$

On trouve $a = 2, \quad b = -1, \quad c = -1.$

Autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = (t - 1)(2t^2 - t - 1).$

- 2) Étudions $Q : t \mapsto 2t^2 - t - 1$. Un calcul de discriminant ou une étude des racines évidentes donne

$$Q(t) = 2(t - 1)(t + 1/2).$$

Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = 2(t - 1)^2(t + 1/2).$

En particulier, $P(t)$ est positif pour tout $t \in [0, 1]$.

Soit $x \in [0, \pi/2[$; en appliquant le résultat précédent à $t = \cos(x) \in [0, 1]$, on obtient que $P(\cos(x))$ est positif. On en déduit que

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \quad f'(x) \geq 0.$$

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[0, \pi/2[$. Pour $x \in [0, \pi/2[$,

$$x \geq 0 \quad \text{donc} \quad f(x) \geq f(0) \quad \text{donc} \quad f(x) \geq 0.$$

La fonction f est donc positive : $\forall x \in [0, \pi/2[, \quad 2 \sin(x) + \tan(x) - 3x \geq 0,$

c'est-à-dire

$$\frac{2}{3} \sin(x) + \frac{1}{3} \tan(x) \geq x.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 10 Preuve des croissances comparées

- 1) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_{n+1} est dérivable sur l'intervalle \mathbb{R}^+ comme différence de la fonction exponentielle et d'une fonction polynomiale. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}'(x) &= e^x - \left(0 + 1 + 2 \cdot \frac{x}{2} + \dots + (n-1) \cdot \frac{x^{n-2}}{(n-1)!} + n \cdot \frac{x^{n-1}}{n!} + (n+1) \cdot \frac{x^n}{(n+1)!} \right) \\ &= e^x - \left(1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} \right). \end{aligned}$$

D'où

$$f_{n+1}' = f_n.$$

- b) Raisonnons par récurrence sur la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R}^+, 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \leq \exp(x).$$

• **Initialisation.** Soit $x \in \mathbb{R}^+$. La somme devient simplement 1. Or on sait que pour tout réel x positif, $e^x \geq 1$. Par conséquent, $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. D'après la question précédente $f_{n+1}' = f_n$. Or, par hypothèse de récurrence, $f_n \geq 0$. Par suite, f_{n+1} est une fonction croissante. Il vient : pour $x \geq 0$, $f_{n+1}(x) \geq f_{n+1}(0) = 0$,

c'est-à-dire
$$e^x \geq 1 + x + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Remarque

Notons l'importance de bien préciser la proposition $\mathcal{P}(n)$. Il faut bien inclure le « Pour tout x positif », si on veut justifier la croissance de l'application f_{n+1} .

- 2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Soit n un entier strictement supérieur à α . En ne gardant que le dernier terme de la somme dans l'inégalité de la question 14, il vient

$$e^x \geq \frac{x^n}{n!} \quad \text{donc} \quad \frac{e^x}{x^\alpha} \geq \frac{1}{n!} \frac{x^n}{x^\alpha} = \frac{x^{n-\alpha}}{n!}.$$

Comme $n - \alpha > 0$, $\frac{x^{n-\alpha}}{n!}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Par minoration,

$$\frac{e^x}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Exercice 11

Notons dans un premier temps que pour $x \in \mathbb{R}$,

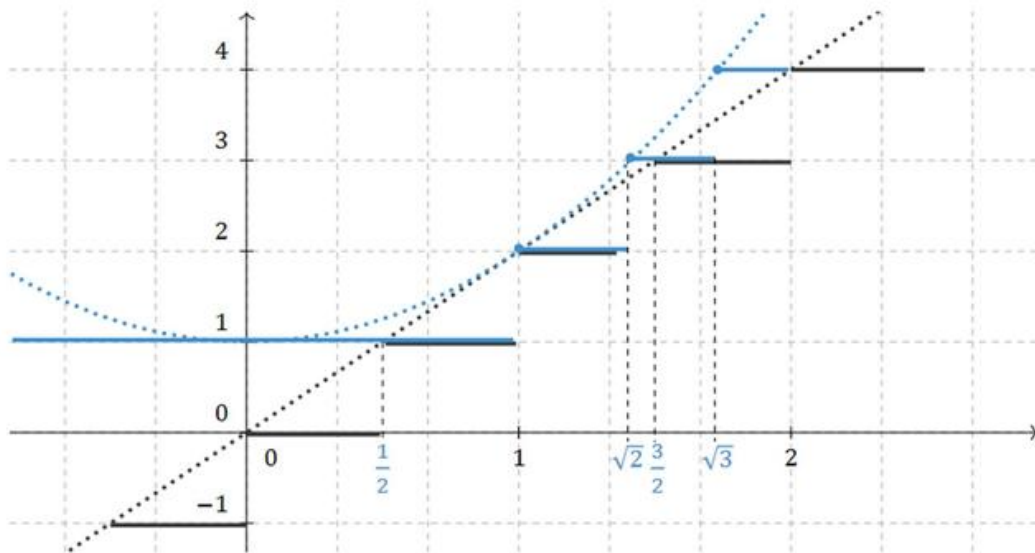
$$\lfloor x^2 + 1 \rfloor \geq x^2 \quad \text{et} \quad 2x \geq \lfloor 2x \rfloor.$$

Si $x^2 > 2x$ alors l'égalité $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x^2 + 1 \rfloor$ est donc impossible. Or,

$$x^2 > 2x \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2) = x^2 - 2x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[.$$

On peut donc limiter l'étude à l'intervalle $[0, 2]$.

Traçons les graphes de $x \mapsto \lfloor 2x \rfloor$ et $x \mapsto \lfloor x^2 + 1 \rfloor$. Il y a égalité lorsque les graphes se superposent.



Par lecture graphique, l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left[\frac{1}{2}, \sqrt{2} \right[\cup \left[\frac{3}{2}, \sqrt{3} \right[.$$

Exercice 12 Une somme non périodique de fonctions périodiques

- 1) En utilisant le fait que la fonction sinus est 2π -périodique, vérifier que f et g sont respectivement 2- et $\sqrt{2}$ -périodiques.
- 2) a) Définissons $\tilde{h} : x \mapsto h(x + T)$. Comme h est dérivable sur \mathbb{R} en tant que somme de fonctions dérivables, \tilde{h} l'est aussi avec pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{h}'(x) = h'(x + T)$. Dans le cas où h est T -périodique, on a $h = \tilde{h}$, puis $h' = \tilde{h}'$. De même, $h'' = \tilde{h}''$. C'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = h'(x + T) \quad \text{et} \quad h''(x) = h''(x + T).$$

$$h' \text{ et } h'' \text{ sont } T\text{-périodiques.}$$

b) D'après ce qui précède,

$$h(T) = h(0) = 0 \quad \text{et} \quad h''(T) = h''(0) = 0$$

car $f(0) = g(0) = 0$ et $h''(x) = f''(x) + g''(x) = -\pi^2 \sin(\pi x) - (\sqrt{2}\pi)^2 \sin(\sqrt{2}\pi x)$
 donc $f''(0) = g''(0) = 0$.

c) Traduisons les deux relations sous forme d'un système :

$$\begin{cases} h(T) = 0 \\ h''(T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\pi T) + \sin(\sqrt{2}\pi T) = 0 & (L_1) \\ -\pi^2 \sin(\pi T) - 2\pi^2 \sin(\sqrt{2}\pi T) = 0 & (L_2) \end{cases}$$

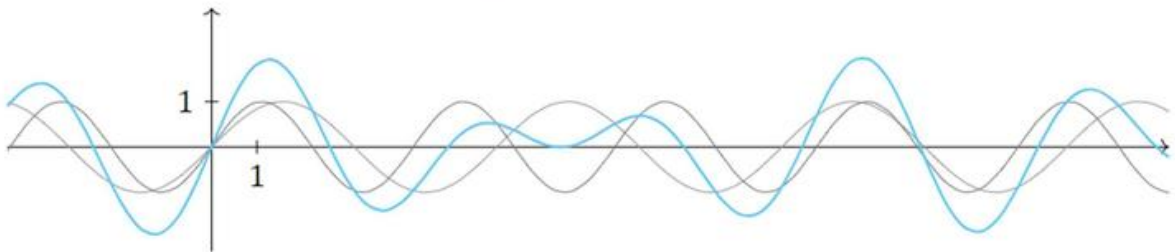
En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 + \pi^2 L_1$, on obtient $-\pi^2 \sin(\sqrt{2}\pi T) = 0$. On en déduit que

$$\sin(\sqrt{2}\pi T) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(\pi T) = 0.$$

- 3) Si $\sin(\pi T) = 0$ alors il existe $p \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\pi T = p\pi$.
 Si $\sin(\sqrt{2}\pi T) = 0$ alors il existe $q \in \mathbb{Z}^*$ tel que $\sqrt{2}\pi T = q\pi$. Comme $T > 0$, on en déduit que $\sqrt{2}p = q$, puis $\sqrt{2} = p/q$. C'est absurde, car $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. En conclusion,

la fonction h n'est pas périodique.

Ci-dessous, les graphes de f et g , et (en bleu) celui de h .



✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13

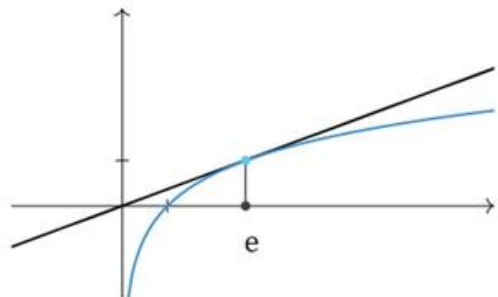
Vrai. Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme passant par le point d'abscisse $a \in \mathbb{R}_+^*$ est

$$y = \ln'(a)(x - a) + \ln(a) = \frac{1}{a}(x - a) + \ln(a).$$

La tangente passe par l'origine (0,0) si

$$0 = \frac{1}{a}(0 - a) + \ln(a).$$

Il existe une unique solution donnée par $a = e$.



Exercice 14

1) Introduisons la fonction

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{\ln(x)}{x}. \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que quotient de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_+^* dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq e.$$

La fonction φ est donc croissante sur l'intervalle $]0, e]$ et décroissante sur $[e, +\infty[$. De plus,

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} -\infty \quad (\text{par produit}), \text{ et } \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0 \quad (\text{par croissances comparées}).$$

Une dernière vérification : $\varphi(e) = \frac{1}{e}$. On retrouve bien le graphe.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt[n]{n} = n^{1/n} = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = \exp(\varphi(n)).$$

Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, pour obtenir la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$, il suffit de regarder la plus grande valeur de $\varphi(n)$. D'après le graphe, cette valeur est atteinte pour l'un des deux entiers qui encadrent e , soit $n = 2$ ou $n = 3$. Or $(\sqrt[2]{2})^6 = 2^3 = 8$ et $(\sqrt[3]{3})^6 = 3^2 = 9$. Comme la fonction $x \mapsto x^{1/6}$ est strictement croissante,

$$(\sqrt[2]{2})^6 < (\sqrt[3]{3})^6 \quad \text{donc} \quad \sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3}.$$

Finalement, la plus grande valeur est $\boxed{\sqrt[3]{3}}$.

Applications

6

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *** Bijections et sommes, principe de réordonnement

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute bijection $\sigma : \llbracket 0, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$S(\sigma) = \sum_{k=0}^n k \sigma(k)$$

et on introduit la bijection $\rho : \begin{cases} \llbracket 0, n \rrbracket & \rightarrow & \llbracket 0, n \rrbracket \\ k & \mapsto & n - k. \end{cases}$

On désigne par id l'application identité de $\llbracket 0, n \rrbracket$.

1) Vérifier que

$$S(\text{id}) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2) a) Justifier que pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$. Préciser le cas d'égalité.

b) En déduire que $S(\sigma) \leq S(\text{id})$ pour toute bijection σ .
Préciser les applications où il y a égalité.

3) a) Montrer que pour toute bijection σ de $\llbracket 0, n \rrbracket$,

$$S(\sigma \circ \rho) = \frac{n^2(n+1)}{2} - S(\sigma).$$

b) Préciser la bijection σ qui donne la valeur de $S(\sigma)$ la plus petite possible.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 2 *

On considère les applications

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto 2n \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{N} \\ n & \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ n & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{cases}$$

- 1) Les applications f et g sont-elles injectives? bijectives?
- 2) Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$. Les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ sont-elles injectives? surjectives?

Exercice 3 ** Une analyse-synthèse

On détermine ici toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) + f(y, z) + f(z, x) = 0. \quad (\bullet)$$

- 1) Supposons qu'une telle application f existe.
 - a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = -f(y, x)$.
 - b) En déduire l'existence d'une application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = g(x) - g(y).$$

2) Conclure.

Exercice 4 ** Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application telle que $f = f \circ f \circ f$.

Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 5 *** Involutions monotones de $[0, 1]$

On appelle ici *involution* de $[0, 1]$ toute application bijective de $[0, 1]$ dans lui-même qui soit sa propre application réciproque. Autrement dit, c'est une application f telle que

$$f \circ f = \text{id}_{[0,1]}.$$

- 1) Soit f une involution de $[0, 1]$. Montrer que si f est croissante sur $[0, 1]$, alors $f(x) = x$ pour tout x de $[0, 1]$.

Indication. On pourra raisonner par l'absurde.

- 2) Donner un exemple d'involution de $[0, 1]$ qui soit décroissante.
- 3) Soit g une bijection croissante de $[0, 1]$ dans lui-même. Montrer que l'application

$$f : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto g^{-1}(1 - g(x)) \end{cases}$$

est une involution décroissante de $[0, 1]$.

- 4) Soient f et g des involutions décroissantes de $[0, 1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f = g$.

Exercice 6 *** Autant de parties paires que de parties impaires

Soit E un ensemble fini non vide.

On veut montrer qu'il y a autant de parties de E de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

- 1) **Première méthode.** Soit $a \in E$. Construire une bijection de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(E)$, en considérant, pour chaque sous-ensemble A de E l'appartenance ou la non-appartenance de a à E . Cette bijection devra induire une bijection entre les parties de cardinal pair et les parties de cardinal impair.
- 2) **Seconde méthode.** Utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 7 *** Précomposition

Soient E, F et G trois ensembles et $g \in \mathcal{A}(E, F)$ une application. On définit l'application

$$\Phi_g : \begin{cases} \mathcal{A}(F, G) & \rightarrow & \mathcal{A}(E, G) \\ f & \mapsto & f \circ g. \end{cases}$$

- 1) Justifier que si g est bijective, alors Φ_g l'est aussi. Préciser la bijection réciproque de Φ_g .
- 2) Démontrer que si g est surjective, alors Φ_g est injective.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8 * Pour tout $a \in \mathbb{R}$, posons $E_a = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(a) = 0\}$.

- 1) Préciser si les énoncés suivants sont vrais ou faux?
 - a) $\forall (f, g) \in E_0^2, g \circ f \in E_0$;
 - b) $\forall f \in E_0, \forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ compositions}} \in E_0$;
 - c) $\forall (f, g) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2, (g \circ f \in E_0 \Rightarrow f \in E_0 \text{ ou } g \in E_0)$;
 - d) $\forall (f, g) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2, (g \circ f \in E_a \Leftrightarrow g \in E_{f(a)})$.
- 2) Que dire de l'application f si

$$f \in \bigcap_{a \in \mathbb{R}} E_a? \quad \text{si} \quad f \in \bigcup_{a \in \mathbb{R}} E_a?$$

Exercice 9 **

- 1) Déterminer l'unique application $p : E \rightarrow E$ injective telle que $p \circ p = p$.
- 2) Même question avec p surjective.

Exercice 10 ** Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}^+$ l'application

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto ax + |x| \end{cases} \quad \text{est-elle bijective?}$$

Exercice 11 *** Soient E un ensemble et $f : E \rightarrow E$ une application. On note

$$\text{Im}(f) = \{y \in E \mid (\exists x \in E, f(x) = y)\} = \{f(x) ; x \in E\} \quad \text{et} \quad \text{Fix}(f) = \{x \in E \mid f(x) = x\}.$$

- Justifier l'inclusion $\text{Fix}(f) \subset \text{Im}(f)$.
- Caractériser les applications f telles que $\text{Im}(f) = \text{Fix}(f)$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Bijections et sommes, principe de réordonnement*

1) Par définition, $S(\text{id}) = \sum_{k=0}^n k^2$.

Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

• **Initialisation.** Puisque $\sum_{k=0}^1 k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, la relation est vraie pour $n = 1$.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Alors

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 && \left. \begin{array}{l} \text{hypothèse de récurrence} \\ \text{factorisation par } n+1 \end{array} \right\} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(2(n+1)+1)((n+1)+2)}{6}. \end{aligned}$$

Donc si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2) a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

Il y a égalité si et seulement si $(a - b)^2 = 0$, c'est-à-dire si $a = b$.

b) Soit σ une bijection de $\llbracket 0, n \rrbracket$. D'après ce qui précède, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$k \sigma(k) \leq \frac{k^2 + \sigma(k)^2}{2}.$$

Par somme,
$$\sum_{k=0}^n k \sigma(k) \leq \sum_{k=0}^n \frac{k^2 + \sigma(k)^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \sigma(k)^2.$$

L'application σ est une bijection de $\llbracket 0, n \rrbracket$ sur lui-même. La somme $\sum_{k=0}^n \sigma(k)^2$ est la somme des carrés de tous les entiers de $\llbracket 0, n \rrbracket$. L'ordre dans une somme n'a pas d'importance, donc $\sum_{k=0}^n \sigma(k)^2 = \sum_{k=0}^n k^2$. Puis,

$$\sum_{k=0}^n k \sigma(k) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n k^2 = \sum_{k=0}^n k^2, \quad \text{donc } S(\sigma) \leq S(\text{id}).$$

D'après le cas d'égalité de la question précédente, $S(\sigma) = S(\text{id})$ si et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sigma(k) = k$. Finalement,

seule l'application id donne le maximum.

3) a) Soit σ une bijection de $\llbracket 0, n \rrbracket$;

$$S(\sigma \circ \rho) = \sum_{k=0}^n k \cdot (\sigma \circ \rho(k)) = \sum_{k=0}^n k \cdot \sigma(n - k).$$

Effectuons le changement d'indice $i = n - k$; lorsque k prend toutes les valeurs entières comprises entre 0 et n , i prend toutes les valeurs entières entre n et 0. Donc

$$\sum_{k=0}^n k \cdot \sigma(n - k) = \sum_{i=0}^n (n - i) \sigma(i) = n \sum_{i=0}^n \sigma(i) - \sum_{i=0}^n i \sigma(i) = n \sum_{i=0}^n i - \sum_{i=0}^n i \sigma(i).$$

Conclusion,

$$S(\sigma \circ \rho) = \frac{n^2(n+1)}{2} - S(\sigma).$$

b) D'après la question précédente, la valeur de $S(\sigma)$ la plus petite est obtenue lorsque la somme $S(\sigma \circ \rho)$ est la plus grande possible. En utilisant le résultat de la question 2, cela équivaut à ce que $\sigma \circ \rho = \text{id}$, c'est-à-dire que $\sigma = \rho^{-1}$. Or, on constate que $\rho^2 = \text{id}$, donc $\rho = \rho^{-1}$.

La plus petite valeur est obtenue pour ρ .

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 2

- 1) • L'application f est injective.
 En effet, soient n et m deux entiers tels que $f(n) = f(m)$; alors $2n = 2m$, donc $n = m$.
- L'application f n'est pas surjective.
 Les nombres impairs n'ont pas d'antécédent par f .
- L'application g n'est pas injective.
 Par exemple, $g(6) = g(3) = 3$. L'entier 3 possède donc au moins deux antécédents.
- L'application g est surjective, car si $m \in \mathbb{N}$, alors $m = g(2m)$. Donc tout entier positif possède au moins un antécédent.
- 2) • Déterminons $g \circ f$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $(g \circ f)(n) = g(2n) = n$.
 Donc $\boxed{g \circ f = \text{id}_{\mathbb{N}}}$. En particulier, $g \circ f$ est bijective.
- Déterminons $f \circ g$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$(f \circ g)(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair (car } g(n) = n/2) \\ 2n & \text{si } n \text{ impair (car } g(n) = n). \end{cases}$$

- L'application $f \circ g$ n'est pas injective car $(f \circ g)(6) = (f \circ g)(3) = 6$.
- L'application $f \circ g$ n'est pas surjective car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)(n)$ est pair.
 Donc les entiers impairs n'ont pas d'antécédent par $f \circ g$.

Exercice 3 Une analyse-synthèse

- 1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Avec $y = z = x$, on trouve

$$f(x,x) + f(x,x) + f(x,x) = 0, \quad \text{donc} \quad f(x,x) = 0.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Avec $z = x$ dans la relation,

$$f(x,y) + f(y,x) + f(x,x) = 0, \quad \text{d'où} \quad f(x,y) + f(y,x) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{f(x,y) = -f(y,x)}.$$

- b) Introduisons la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(t,0)$.
 Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Reprenons la relation (•) avec $z = 0$. On trouve

$$f(x,y) + f(y,0) + f(0,x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x,y) + g(y) - g(x) = 0$$

car $f(0,x) = -f(x,0) = -g(x)$. Il vient alors

$$\boxed{f(x,y) = g(x) - g(y)}.$$

- 2) D'après la question précédente, si f est solution de (\bullet) , alors il existe une application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = g(x) - g(y).$$

Réciproquement, soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, posons

$$f(x,y) = g(x) - g(y).$$

Vérifions que f est solution de (\bullet) . Si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$f(x,y) + f(y,z) + f(z,x) = (g(x) - g(y)) + (g(y) - g(z)) + (g(z) - g(x)) = 0.$$

En conclusion, les solutions de (\bullet) sont exactement les fonctions de la forme

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = g(x) - g(y).$$

Remarque

On vient de raisonner par analyse-synthèse. La question 1 présente la partie analyse avec la recherche de conditions nécessaires, et la question 2, la partie synthèse avec la recherche de conditions suffisantes.

Exercice 4

Raisonnons par double implication.

- \Rightarrow On suppose f injective. Soit $y \in E$. Par hypothèse $f(y) = f((f \circ f)(y))$. Or f est injective, donc $y = (f \circ f)(y) = f(x)$ (en posant $x = f(y) \in E$). On a donc montré que f est surjective, à savoir : $\forall y \in E, \exists x \in E : y = f(x)$.

- \Leftarrow On suppose f surjective. Soit $(x,x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. Par surjectivité de f , il existe $(y,y') \in E^2$ tel que $x = f(y)$ et $x' = f(y')$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x') \\ \Rightarrow f(f(y)) &= f(f(y')) \\ \Rightarrow (f \circ f \circ f)(y) &= (f \circ f \circ f)(y') \\ \Rightarrow f(y) = f(y') &\Rightarrow x = x'. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{on applique } f \\ \text{par hypothèse sur } f \end{array} \right\}$$

On a donc montré que f est injective.

Bilan :

f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 5 *Involutions monotones de $[0, 1]$*

1) Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) \neq x$.

Deux cas sont possibles : $f(x) > x$ ou $f(x) < x$. Or :

$$\begin{aligned} & f(x) > x \\ \Rightarrow & f(f(x)) \geq f(x) \\ \Rightarrow & x \geq f(x). \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow f \text{ est croissante} \\ \downarrow \text{car } f \circ f = \text{id}_{[0,1]} \end{array} \right\}$$

Ou

$$\begin{aligned} & f(x) < x \\ \Rightarrow & f(f(x)) \leq f(x) \\ \Rightarrow & x \leq f(x). \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow f \text{ est croissante} \\ \downarrow \text{car } f \circ f = \text{id}_{[0,1]} \end{array} \right\}$$

Dans les deux cas, on aboutit à une contradiction.

Conclusion : pour tout x de $[0, 1]$, $f(x) = x$.

2) La fonction h définie sur $[0, 1]$ par $h(x) = 1 - x$ convient.

3) Comme g est croissante, g^{-1} aussi. De plus, $x \in [0, 1] \mapsto 1 - g(x)$ est décroissante. Par composition, f est décroissante. Montrons que f est une involution.

• **Méthode 1.** Soit $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) \\ &= g^{-1}(1 - g(f(x))) \\ &= g^{-1}(1 - g(g^{-1}(1 - g(x)))) \\ &= g^{-1}(1 - (1 - g(x))) \\ &= g^{-1}(g(x)) = x, \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right\} g \circ g^{-1} = \text{id}_{[0,1]}$$

d'où $f \circ f = \text{id}_{[0,1]}$. D'après la *caractérisation des applications bijectives*, l'application f est bijective et admet f comme bijection réciproque.

• **Méthode 2.** En utilisant la fonction h introduite comme exemple à la question précédente, l'hypothèse se réécrit $f = g^{-1} \circ h \circ g$.

En tant que composée de trois bijections, f est une bijection. Et

$$f^{-1} = (g^{-1} \circ h \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1} \circ (g^{-1})^{-1} = g^{-1} \circ h^{-1} \circ g = f.$$

Conclusion : f est une involution de $[0, 1]$.

❖ **Remarque**

❖ Par exemple, avec $g(x) = x^2$, nous obtenons f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

- 4) Par hypothèse, f et g sont décroissantes. Comme elles sont bijectives, f et g sont *strictement* décroissantes.

Raisonnons par l'absurde.

On suppose qu'il existe $x \in [0, 1]$ tel que $f(x) \neq g(x)$. Donc $f(x) < g(x)$ ou $g(x) < f(x)$.

$$\begin{aligned} & f(x) < g(x) \\ \Rightarrow & f(f(x)) < f(g(x)) \\ \Rightarrow & x < f(g(x)). \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{)} f \text{ est strictement croissante} \\ \text{)} f \circ f = \text{id}_{[0,1]} \end{array} \right\}$$

Et

$$\begin{aligned} & f(x) < g(x) \\ \Rightarrow & g(f(x)) < g(g(x)) \\ \Rightarrow & g(f(x)) < x. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{)} g \text{ est strictement croissante} \\ \text{)} g \circ g = \text{id}_{[0,1]} \end{array} \right\}$$

On a donc une contradiction car $f(g(x)) = g(f(x))$.

Conclusion :

$$\boxed{f = g.}$$

Exercice 6 Autant de parties paires que de parties impaires

- 1) On définit $f_a : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ de la façon suivante. Si une partie contient a , on le lui retire; si elle ne contient pas a , on le lui ajoute. Autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$,

- si $a \notin A$, alors $f_a(A) = A \cup \{a\}$, et
- si $a \in A$, alors $f_a(A) = A \setminus \{a\}$.

Soit A une partie E ; alors $\text{card}(f_a(A)) = \text{card}(A) + 1$ ou $\text{card}(f_a(A)) = \text{card}(A) - 1$.
Donc

$$\left(\text{card}(A) \text{ pair} \right) \Leftrightarrow \left(\text{card}(f_a(A)) \text{ impair} \right).$$

De plus, $f_a \circ f_a = \text{id}_{\mathcal{P}(E)}$. En effet, soit $A \in \mathcal{P}(E)$;

- si $a \in A$, alors $f_a(A) = A \setminus \{a\}$ et $(f_a \circ f_a)(A) = f_a(A \setminus \{a\}) = (A \setminus \{a\}) \cup \{a\} = A$, et
- si $a \notin A$, alors $f_a(A) = A \cup \{a\}$ et $(f_a \circ f_a)(A) = f_a(A \cup \{a\}) = (A \cup \{a\}) \setminus \{a\} = A$.

D'après la caractérisation des applications bijectives, f_a est bijective et admet une application réciproque : elle-même. La restriction de f_a aux parties de cardinal pair est une bijection entre cet ensemble et l'ensemble des parties de cardinal impair. En particulier, il y a autant de parties de cardinal pair que de partie de cardinal impair.

Remarque

Lorsque $n = \text{card}(E)$ est impair, on peut aussi établir une autre bijection en remarquant que $A \in \mathcal{P}(E)$ est de cardinal pair si et seulement si \bar{A} est de cardinal impair. À toute partie de A de cardinal pair, on peut associer une partie de cardinal impair et inversement. Il y a donc autant de parties de E de cardinal pair que de parties de cardinal impair. Mais cet argument ne fonctionne plus lorsque n est pair.

2) Soit n le nombre d'éléments de E . Notons a_n (resp. b_n) le nombre de parties de E de cardinal impair (resp. pair).

Rappelons que $\binom{n}{k}$ donne le nombre de parties de E avec k éléments. Ainsi,

$$a_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad b_n = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} (-1)^k \binom{n}{k} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \\ &= (1 - 1)^n = 0 \quad \text{car } n \neq 0. \quad \left. \right\} \text{formule du binôme} \end{aligned}$$

Ainsi, $a_n = b_n$, et il y a autant de parties de E de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

Exercice 7 Précomposition

1) Soit $g : E \rightarrow F$ bijective. Alors $g^{-1} : F \rightarrow E$ existe, et on peut donc poser

$$\Theta_g : \begin{cases} \mathcal{A}(E, G) & \rightarrow \mathcal{A}(F, G) \\ f & \mapsto f \circ g^{-1}, \end{cases}$$

de sorte que pour tout $f \in \mathcal{A}(F, G)$,

$$\Theta_g \circ \Phi_g(f) = \Theta_g(\Phi_g(f)) = \Theta_g(f \circ g) = f \circ g \circ g^{-1} = f \circ \text{id}_F = f.$$

De même, pour tout $f \in \mathcal{A}(E, G)$

$$\Phi_g \circ \Theta(f) = \Phi_g(\Theta_g(f)) = \Phi_g(f \circ g^{-1}) = f \circ g^{-1} \circ g = f \circ \text{id}_E = f.$$

Par la caractérisation des applications bijectives,

$$\Phi_g \text{ est bijective et } \Theta_g \text{ est son application réciproque.}$$

2) Supposons g surjective. Prouvons que Φ_g est injective. Soient f_1 et f_2 dans $\mathcal{A}(F, G)$. Montrons que $(\Phi_g(f_1) = \Phi_g(f_2)) \Rightarrow f_1 = f_2$.

$$\begin{aligned} \Phi_g(f_1) = \Phi_g(f_2) &\Rightarrow f_1 \circ g = f_2 \circ g \\ &\Rightarrow \forall x \in E, (f_1 \circ g)(x) = (f_2 \circ g)(x) \\ &\Rightarrow \forall x \in E, f_1(g(x)) = f_2(g(x)). \end{aligned}$$

Or g est surjective. Donc, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$.

Alors $f_1(y) = f_1(g(x)) = f_2(g(x)) = f_2(y)$.

On vient donc de prouver que : $\forall y \in F, f_1(y) = f_2(y)$.

Donc, par définition de l'égalité de deux applications, $f_1 = f_2$.

Conclusion :

Φ_g est injective si g est surjective.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8

1) a) **Vrai.**

Soit $(f, g) \in E_0^2$. On a donc $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$. Donc

$$g \circ f(0) = g(f(0)) = g(0) = 0 \Rightarrow g \circ f \in E_0.$$

b) **Vrai.**

Il suffit d'utiliser le résultat précédent avec une récurrence sur la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ compositions}} \in E_0.$$

c) **Faux.**

Donnons un contre-exemple avec $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + 1$ et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x - 1$.

Dans ce cas, $f(0) \neq 0$, $g(0) \neq 0$ et $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(1) = 0$. Ainsi,

$$f \notin E_0 \text{ et } g \notin E_0, \text{ pourtant } g \circ f \in E_0.$$

d) **Vrai.**

Soit $(f, g) \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$.

$$g \circ f \in E_a \Leftrightarrow (g \circ f)(a) = 0 \Leftrightarrow g(f(a)) = 0 \Leftrightarrow g \in E_{f(a)}.$$

2) Dans le premier cas, f est l'application nulle. Dans le second, f s'annule au moins une fois.

Exercice 9

1) Soit $x \in E$. Posons $y = p(x)$. La condition $p \circ p = p$ impose $p(y) = p(p(x)) = p(x)$. Par injectivité, $y = x$. C'est-à-dire $p(x) = x$. Ce raisonnement étant valable pour tout $x \in E$,

l'application identité id_E est la seule solution.

2) Soit $x \in E$. Par surjectivité de p , il existe $t \in E$ tel que $p(t) = x$. Ainsi,

$$x = p(t) = p(p(t)) = p(x).$$

De nouveau,

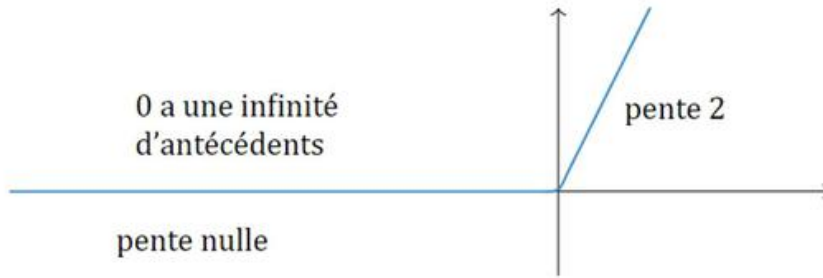
l'application identité id_E est la seule solution.

Exercice 10

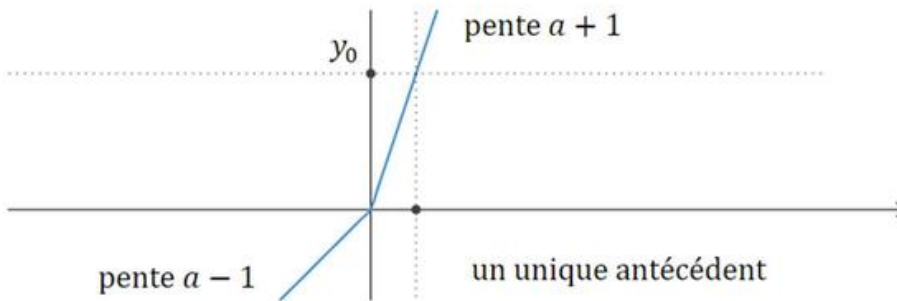
Notons que pour $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_a(x) = \begin{cases} (a+1)x & \text{si } x \geq 0 \\ (a-1)x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

Procédons par disjonction des cas.

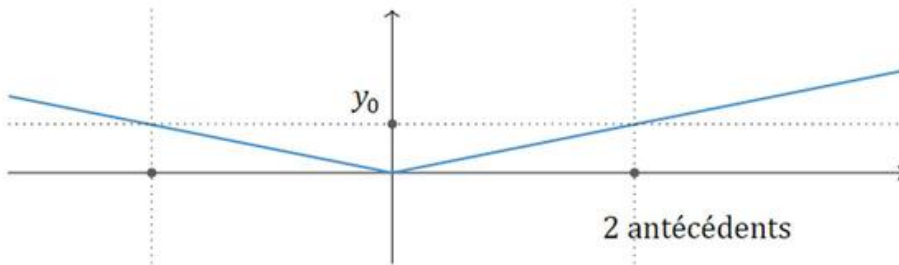
- Si $a = 1$, on constate que pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, $\varphi_a(x) = 0$. φ_a n'est donc pas injective et en particulier pas bijective.



- Si $a > 1$, le graphe de l'application est composé de deux demi-droites dont les pentes sont strictement positives. On constate que chaque réel y_0 admet un unique antécédent par φ_a . L'application φ_a est donc bijective.



- Si $a \in [0, 1[$, le graphe est la réunion de deux demi-droites avec des pentes opposées. On constate que φ_a n'est ni injective ($y_0 \in \mathbb{R}_+^+$ a deux antécédents), ni surjective ($y_0 \in \mathbb{R}_-^-$ n'a pas d'antécédent).



En résumé :

φ_a est bijective si et seulement si $a > 1$.

Remarque

Si on considère $a \in \mathbb{R}^-$, on peut noter que $\varphi_a(x) = \varphi_{-a}(-x)$. On en déduit qu'il y a bijectivité si et seulement si $a \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Exercice 11

- 1) Soit $x \in \text{Fix}(f)$. On a donc $f(x) = x$ et x admet au moins un antécédent par f .
Ainsi, $x \in \text{Im}(f)$. Il vient

$$\text{Fix}(f) \subset \text{Im}(f).$$

- 2) • On suppose $\text{Fix}(f) = \text{Im}(f)$. Soit $x \in E$, alors $f(x) \in \text{Im}(f)$. Donc $f(x) \in \text{Fix}(f)$.
D'où $f(f(x)) = f(x)$. Ainsi

$$\forall x \in E, (f \circ f)(x) = f(x).$$

Autrement dit

$$f \circ f = f.$$

- Montrons la réciproque. On suppose $f \circ f = f$. D'après la question 1, $\text{Fix}(f) \subset \text{Im}(f)$.
Il reste à montrer que $\text{Im}(f) \subset \text{Fix}(f)$.
Soit $y \in \text{Im}(f)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Alors $f(y) = (f \circ f)(x) = f(x) = y$.
Donc $y \in \text{Fix}(f)$.

Finalement,

$$\text{Im}(f) = \text{Fix}(f) \Leftrightarrow f \circ f = f.$$

Polynômes

7

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Soient n un entier supérieur à 3 et P le polynôme de $\mathbb{R}[x]$ défini par

$$P(x) = x^{n+2} + x^{n+1} - x^n - x^{n-1}.$$

Montrer que -1 est racine de P . Déterminer l'ordre de multiplicité de cette racine.

Exercice 2 * Exemples de calculs de sommes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En s'aidant du polynôme défini par $P(x) = (x+1)^n$, déterminer les sommes

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Exercice 3 *

Soit $n \in \mathbb{N}$. Effectuer les divisions euclidiennes suivantes :

- 1) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ par $x^2 + 1$; 2) $x^4 + 2x^2 + 1$ par $x^2 + 2x + 1$.

Donner le reste des divisions euclidiennes suivantes :

- 3) $x^n + x^2 + x + 1$ par $x^2 - 1$; 4) $x^n + x^2 + x + 1$ par $(x-1)^2$.

Exercice 4 * Utilisation de la formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que $\exists \alpha \in \mathbb{R} : \forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(i)}(\alpha) > 0$.

Justifier que P ne peut admettre de racine réelle supérieure à α .

Exercice 5 ** Factoriser en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[x]$ le polynôme

$$P(x) = (x^4 - 1)(x^4 + 1).$$

Exercice 6 **

Pour tout n entier strictement positif, on note $P_n = (x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$.

1) Montrer que P_n est divisible par $(x - 1)(x - 2)$.

Dans la suite de cet exercice, on détermine le quotient de P_n par $(x - 1)(x - 2)$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Vérifier que $x^n - 1$ est divisible par $x - 1$ et déterminer la quotient de cette division euclidienne.

Indication. Penser à $\sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

b) En déduire le quotient de la division euclidienne de $(x - 1)^n - 1$ par $x - 2$ ainsi que le quotient de la division euclidienne de $(x - 2)^{2n} - 1$ par $x - 1$.

On remarquera que $(x - 2)^{2n} = (2 - x)^{2n}$.

3) Utiliser le résultat précédent pour déterminer le quotient T_n de la division euclidienne de P_n par $x - 1$, ainsi que le quotient S_n de la division euclidienne de P_n par $x - 2$.

4) Montrer que le quotient de la division euclidienne de P_n par $(x - 1)(x - 2)$ est $S_n - T_n$.
On pourra considérer $(x - 1)(x - 2)(S_n - T_n)$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 7 *

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier le polynôme $P_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (x - 1)^p$.

2) Soit entier q tel que $0 \leq q < n$.

Déduire une expression simplifiée de $\sum_{p=q}^n (-1)^{p-q} \binom{n}{p} \binom{p}{q}$.

Exercice 8 *

1) Soient a, b et c trois réels. On note $s_1 = a + b + c$, $s_2 = ab + ac + bc$ et $s_3 = abc$.

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$ défini par $P(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$.

Exprimer $P(x)$ à l'aide de s_1, s_2 et s_3 .

2) Soient a, b et c tels que
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ ab + ac + bc = -5 \\ abc = -6. \end{cases}$$

Trouver les valeurs possibles pour (a, b, c) en considérant le polynôme $P(x) = x^3 - 5x + 6$.

Exercice 9 **

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1$$

est strictement croissante.

2) En déduire que si P est un polynôme tel que

$$P(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x^2 + 1) = (P(x))^2 + 1,$$

alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x.$$

Exercice 10 **

On cherche les racines du polynôme $P(x) = x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1$.

- 1) On considère le polynôme $A(x) = x^2 - 2$. Calculer, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $A\left(x + \frac{1}{x}\right)$.
- 2) Trouver un polynôme Q de degré 2 tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x^2}P(x) = Q\left(x + \frac{1}{x}\right)$.
- 3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que x est racine de P si et seulement si $x + \frac{1}{x}$ est racine de Q .
- 4) Déterminer les deux racines z_0 et z_1 de Q . En déduire les quatre racines de P .

**Exercices avec questions ouvertes**

Exercice 11 * Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{R}[x]$ tels que

$$(x - a)P'(x) = P(x) - P(a). \quad (\bullet)$$

Exercice 12 ** Factoriser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme

$$P_n = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x(x-1)\cdots(x-n)}{(n+1)!}.$$

Exercice 13 ** Soit $Q \in \mathbb{R}[x]$. Déterminer l'unique polynôme P tel que

$$P - P' = Q.$$

Indication. On pourra commencer par calculer Q' , Q'' ...

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Le réel -1 est racine de P car

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^{n+2} + (-1)^{n+1} - (-1)^n - (-1)^{n-1} \\ &= (-1)^n - (-1)^n - (-1)^n + (-1)^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

De plus

$$P'(x) = (n+2)x^{n+1} + (n+1)x^n - nx^{n-1} - (n-1)x^{n-2}$$

donc

$$\begin{aligned} P'(-1) &= (n+2)(-1)^{n+1} + (n+1)(-1)^n - n(-1)^{n-1} - (n-1)(-1)^{n-2} \\ &= -(n+2)(-1)^n + (n+1)(-1)^n + n(-1)^n - (n-1)(-1)^n \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ensuite

$$P''(x) = (n+2)(n+1)x^n + (n+1)nx^{n-1} - n(n-1)x^{n-2} - (n-1)(n-2)x^{n-3}$$

donc

$$\begin{aligned} P''(-1) &= (n+2)(n+1)(-1)^n + (n+1)n(-1)^{n-1} - n(n-1)(-1)^{n-2} \\ &\quad - (n-1)(n-2)(-1)^{n-3} \\ &= (n+2)(n+1)(-1)^n - (n+1)n(-1)^n - n(n-1)(-1)^n + (n-1)(n-2)(-1)^n \\ &= 4(-1)^n \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

D'après la *caractérisation de la multiplicité d'une racine*, -1 est donc racine d'ordre 2 de P .

Exercice 2 Exemples de calculs de sommes

Par la *formule du binôme de Newton*,
$$P(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

En dérivant,
$$P'(x) = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

On peut aussi calculer la primitive de P qui s'annule en 0 :

$$Q(x) = \frac{1}{n+1} ((1+x)^{n+1} - 1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

En évaluant ces relations en 1 et -1 , on trouve

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = P(1) = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = P(-1) = 0,$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = P'(1) = n2^{n-1}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = Q(1) = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Remarque

La formule du binôme de Newton permet de prouver de nombreuses formules utilisant les coefficients binomiaux.

Exercice 3

1) Posons la division euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2x^2 - x - 2 & x^2 + 1 \\ - x^3 & \\ \hline & 2x^2 - 2x - 2 \\ - 2x^2 & \\ \hline & - 2x - 4 \end{array}$$

Vérifions : $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x^2 + 1)(x + 2) - 2x - 4$.

2) De nouveau, posons la division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} x^4 & + 2x^2 & + 1 \\ - x^4 - 2x^3 - x^2 & & \\ \hline & - 2x^3 + x^2 & + 1 \\ & 2x^3 + 4x^2 + 2x & \\ \hline & 5x^2 + 2x + 1 & \\ & - 5x^2 - 10x - 5 & \\ \hline & - 8x - 4 & \end{array}$$

Et vérifions : $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x + 5) - 8x - 4$.

3) Posons $P = x^2 - 1$. On effectue la division euclidienne de $x^n + x^2 + x + 1$ par P . Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[x]^2$ tel que

$$x^n + x^2 + x + 1 = PQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(P) = 2.$$

On évalue cette égalité en les racines de P :

$$\begin{cases} 1^n + 1^2 + 1 + 1 = P(1)Q(1) + R(1), \\ (-1)^n + (-1)^2 - 1 + 1 = P(-1)Q(-1) + R(-1) \end{cases}$$

d'où
$$\begin{cases} R(1)=4, \\ R(-1)=1+(-1)^n. \end{cases}$$

De plus, comme R est de degré au plus 1, il existe deux réels a et b tels que $R = ax + b$. On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} R(1) = 4, \\ R(-1) = 1 + (-1)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 4, \\ -a + b = 1 + (-1)^n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3+(-1)^{n+1}}{2}, \\ b = \frac{5+(-1)^n}{2}. \end{cases}$$

Concluons : le reste est $\frac{3+(-1)^{n+1}}{2}x + \frac{5+(-1)^n}{2}$.

4) Posons $P = (x-1)^2$. La division euclidienne donne l'existence de $(Q, R) \in \mathbb{R}[x]^2$ tel que

$$T = x^n + x^2 + x + 1 = PQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(P) = 2.$$

Dans ce cas, il existe deux réels a et b tels que $R = ax + b$. On évalue en 1 :

$$1^n + 1^2 + 1 + 1 = P(1)Q(1) + R(1) \quad \text{donc} \quad a + b = R(1) = 4.$$

Afin d'obtenir une seconde équation pour déterminer a et b , on peut par exemple dériver :

$$T' = P'Q + PQ' + R' \quad \text{donc} \quad T'(1) = P'(1)Q(1) + P(1)Q'(1) + R'(1) = R'(1).$$

Il vient $a = n + 3$, puis $b = 4 - a = 1 - n$. Ainsi, le reste est $(n+3)x + 1 - n$.

Exercice 4) Utilisation de la formule de Taylor pour les polynômes

On applique la formule de Taylor au point α (le polynôme P étant de degré au plus n) :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k.$$

En particulier, on peut évaluer en $x \in \mathbb{R}$ avec $x > \alpha$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}}_{>0} \underbrace{(x - \alpha)^k}_{>0 \text{ car } x > \alpha} > 0.$$

En particulier, $P(x) \neq 0$, et P ne peut admettre de racine réelle supérieure à α .

Exercice 5

Factorisons $x^4 - 1$. On écrit $x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$.

Le polynôme $(x^2 + 1)$ n'a pas de racine dans \mathbb{R} , et comme c'est un polynôme du second degré, il est irréductible.

Le polynôme $(x^4 + 1)$ — qui n'est pas du second degré — n'a pas non plus de racine réelle. Factorisons-le.

Première méthode.

Le polynôme $(x^4 + 1)$ peut se factoriser en produit de deux polynômes du second degré irréductibles et unitaires (le coefficient de x^2 étant 1). On cherche donc quatre réels a, b, c et d tels que

$$x^4 + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d).$$

Or $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (d + ac + b)x^2 + (ad + bc)x + bd$.

Par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\begin{aligned} (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ d + ac + b = 0 \\ ad + bc = 0 \\ bd = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = -a \\ d + ac + b = 0 \\ a(d - b) = 0 \\ bd = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Raisonnons alors par analyse-synthèse.

• Analyse**(recherche des conditions nécessaires)**

Pour commencer, $a(d - b) = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = d)$.

→ Si $a = 0$, alors $c = 0$ et les deux équations restantes donnent $\begin{cases} d = -b \\ -b^2 = 1, \end{cases}$
ce qui est impossible.

→ Si $b = d$, alors, en tenant compte de $c = -a$, le système devient $\begin{cases} 2b - a^2 = 0 \\ b^2 = 1 \end{cases}$

Le cas $b = -1$ est impossible, car il donne $a^2 = -2$.

Le cas $b = 1$ donne $a^2 = 2$, donc $a = \sqrt{2}$ et $c = -\sqrt{2}$, ou $a = -\sqrt{2}$ et $c = \sqrt{2}$.

Ainsi, on obtient seulement deux solutions potentielles :

$$(a = \sqrt{2}, b = d = 1, c = -\sqrt{2}) \quad \text{ou} \quad (a = -\sqrt{2}, b = d = 1, c = \sqrt{2}).$$

On peut remarquer que la seconde solution est aussi celle obtenue en changeant l'ordre des trinômes du second degré dans la factorisation.

• Synthèse**(recherche des conditions suffisantes)**

On vérifie par un simple calcul que $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) = x^4 + 1$.

Seconde méthode.

On peut écrire $x^4 + 1$ comme une différence de deux carrés :

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x).$$

La factorisation de P en polynômes irréductibles est donc

$$P(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Exercice 6

1) On a $P_n(1) = (-1)^{2n} - 1 = 0$ et $P_n(2) = 1^n - 1 = 0$.

Donc P_n est divisible par $(x - 1)(x - 2)$.

2) a) Notons $Q_n = x^n - 1$. Alors $Q_n(1) = 0$. Donc Q_n est divisible par $x - 1$.

On peut préciser le quotient en remarquant que, par télescopage,

$$x^n - 1 = (x - 1) \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k \right).$$

Remarque

Rappelons que pour tous nombres réels a et b

$$a^n - b^n = (a - b) \left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \right).$$

On peut considérer ici $a = x$ et $b = 1$.

b) En substituant $x - 1$ à x , on obtient $(x - 1)^n - 1 = (x - 2) \left(\sum_{k=0}^{n-1} (x - 1)^k \right)$.

Le quotient de la division euclidienne de $(x - 1)^n - 1$ par $x - 2$ est $\sum_{k=0}^{n-1} (x - 1)^k$.

En substituant $2 - x$ à x et $2n$ à n , on trouve $(2 - x)^{2n} - 1 = (-x + 1) \left(\sum_{k=0}^{2n-1} (2 - x)^k \right)$.

Donc $(x - 2)^{2n} - 1 = (x - 1) \left(- \sum_{k=0}^{2n-1} (2 - x)^k \right)$.

Le quotient de la division euclidienne de $(x - 2)^{2n} - 1$ par $x - 1$ est $\sum_{k=0}^{2n-1} -(2 - x)^k$.

3) $P_n = (x - 2)^{2n} + ((x - 1)^n - 1) = (x - 2) \left((x - 2)^{2n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (x - 1)^k \right)$.

Le quotient de la division euclidienne de P_n par $x - 2$ est $S_n = (x - 2)^{2n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} (x - 1)^k$.

$P_n = (x - 1)^n + ((x - 2)^{2n} - 1) = (x - 1) \left((x - 1)^{n-1} - \sum_{k=0}^{2n-1} (2 - x)^k \right)$.

Le quotient de la division euclidienne de P_n par $x - 1$ est $T_n = (x - 1)^{n-1} - \sum_{k=0}^{2n-1} (2 - x)^k$.

$$4) (x-1)(x-2)(S_n - T_n) = (x-1)(x-2)S_n - (x-1)(x-2)T_n = (x-1)P_n - (x-2)P_n = P_n.$$

Finalement, le quotient de la division euclidienne de P_n par $(x-1)(x-2)$ est $S_n - T_n$.
Après simplification, on trouve

$$S_n - T_n = \sum_{k=0}^{n-2} (x-1)^k + \sum_{k=0}^{2n-2} (2-x)^k.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 7

1) D'après la formule du binôme de Newton,

$$P_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (x-1)^p = ((x-1) + 1)^n = x^n.$$

2) Partons de P_n , puis développons la puissance et manipulons la somme double ainsi obtenue pour écrire d'une autre manière les coefficients de P_n :

$$\begin{aligned} P_n &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (x-1)^p \\ &= \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \left(\sum_{q=0}^p \binom{p}{q} x^q (-1)^{p-q} \right) \\ &= \sum_{0 \leq q \leq p \leq n} (-1)^{p-q} \binom{n}{p} \binom{p}{q} x^q \\ &= \sum_{q=0}^n \left(\sum_{p=q}^n (-1)^{p-q} \binom{n}{p} \binom{p}{q} \right) x^q. \end{aligned}$$

formule du binôme de Newton

échange de l'ordre des indices

Or $P_n = x^n$, donc, pour $0 \leq q < n$, le coefficient de x^q de P_n est nul. Ainsi,

$$\text{pour } q \text{ entier naturel tel que } 0 \leq q < n, \sum_{p=q}^n (-1)^{p-q} \binom{n}{p} \binom{p}{q} = 0.$$

Exercice 8

1) Développons :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-a)(x^2 - (a+b)x + bc) \\ &= x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x - abc \\ &= x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3. \end{aligned}$$

2) D'après la question précédente, a , b et c sont les racines du polynôme $P(x) = x^3 - 5x + 6$. Le réel 1 est racine de P . On met $(x-1)$ en facteur, écrivant ainsi $P(x) = (x-1)(x^2 - x - 6)$. Déterminons les racines de $x^2 - x - 6$.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 1 + 24 = 5^2$. Les racines sont

$$r_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1-5}{2} = -2.$$

Finalement, la factorisation de P est $P(x) = (x-1)(x-3)(x+2)$.

Les triplets (a,b,c) possibles sont

$$(1,3,-2), (1,-2,3), (3,1,-2), (3,-2,1), (-2,1,3), (-2,3,1).$$

Exercice 9

1) Soit $n \in \mathbb{N}$; alors $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 - u_n > 0$, car le trinôme $x^2 - x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, donc il est de signe constant, strictement positif.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

2) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n) : P(u_n) = u_n$.

• **Initialisation.** $P(0) = 0$, donc $\mathcal{H}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{H}(n)$ vraie. Alors

$$P(u_{n+1}) = P(u_n^2 + 1) = (P(u_n))^2 + 1 \stackrel{\mathcal{H}(n)}{=} u_n^2 + 1 = u_{n+1}.$$

Donc, si $\mathcal{H}(n)$ est vraie, alors si $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, P(u_n) = u_n$.

Soit Q le polynôme défini par $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = P(x) - x$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, Q(u_n) = P(u_n) - u_n = 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant strictement croissante, le polynôme Q admet donc une infinité de racines, puisque les termes de la suite sont distincts deux à deux. Or, un polynôme non nul ne peut admettre qu'un nombre fini de racines. Donc Q est le polynôme nul.

• Conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x.$$

Exercice 10

$$1) \text{ Écrivons : } A\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2 = \boxed{x^2 + \frac{1}{x^2}}.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2}P(x) &= x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12. \end{aligned}$$

Si $\boxed{Q(z) = z^2 - 7z + 12}$, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x^2}P(x) = Q\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors

$$\begin{aligned} x \text{ est racine de } P &\Leftrightarrow P(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{x^2}P(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow Q\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \text{ est racine de } Q. \end{aligned}$$

4) Déterminons les deux racines du trinôme du second degré $z^2 - 7z + 12$.

Son discriminant vaut $\Delta = 49 - 48 = 1$.

Les racines de Q sont alors $z_1 = 3$ et $z_2 = 4$.

Les racines de P sont les solutions des équations $x + \frac{1}{x} = z_1$ et $x + \frac{1}{x} = z_2$, c'est-à-dire les solutions des équations $x^2 - z_1x + 1 = 0$ et $x^2 - z_2x + 1 = 0$.

Pour la première : $\Delta = z_1^2 - 4 = 3^2 - 4 = 5$. Les racines sont $x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Pour la seconde : $\Delta = z_2^2 - 4 = 12$. Les racines sont $x_3 = 2 + \sqrt{3}$ et $x_4 = 2 - \sqrt{3}$.

Conclusion :

$$\boxed{\text{les racines de } P \text{ sont } \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, 2 + \sqrt{3} \text{ et } 2 - \sqrt{3}.$$

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 11

Raisonnons par analyse-synthèse.

- **Analyse** (recherche des conditions nécessaires)
- Soit P une solution non nulle, que l'on suppose de degré n . D'après la *formule de Taylor*,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad \text{et} \quad P'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Alors

$$(x-a)P'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P^{(k+1)}(a)}{k!} (x-a)^{k+1} = \sum_{k'=1}^n \frac{P^{(k')}(a)}{(k'-1)!} (x-a)^{k'}.$$

Par unicité des coefficients de la formule de Taylor, l'égalité $(x-a)P'(x) = P(x) - P(a)$ donne

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \frac{P^{(k)}(a)}{k!} = \frac{P^{(k)}(a)}{(k-1)!}.$$

Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Comme $k! = k \cdot (k-1)! \neq (k-1)!$, on a $P^{(k)}(a) = 0$.

En réinjectant dans la formule de Taylor, on en déduit que $P(x) = (x-a)P'(a) + P(a)$. Autrement dit, P est un polynôme de $\mathbb{R}_1[x]$.

- **Synthèse** (recherche des conditions suffisantes)
- Soit $P(x) = \lambda x + \mu$, alors $P'(x) = \lambda$. Donc $(x-a)P'(x) = P(x) - P(a)$.

Conclusion. Les polynômes P vérifiant (•) sont les polynômes de $\mathbb{R}_1[x]$.

Exercice 12

Remarque

Commençons par essayer des exemples pour n petit afin de conjecturer un résultat.

$$P_0 = 1 - \frac{x}{1!} = \frac{1-x}{1!}, \quad P_1 = \frac{1-x}{1!} + \frac{x(x-1)}{2!} = \frac{(x-1)(x-2)}{2!},$$

$$P_2 = P_1 - \frac{x(x-1)(x-2)}{3!} = \frac{3(x-1)(x-2) - x(x-1)(x-2)}{3!} = -\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{3!}.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q(n) : P_n = (-1)^{n+1} \frac{(x-1) \cdots (x-(n+1))}{(n+1)!}$.

Montrons par récurrence que l'assertion $Q(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** $P_0 = 1 - x = \frac{1-x}{1!}$. Donc $Q(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $Q(n) : P_n = (-1)^{n+1} \frac{(x-1)\cdots(x-(n+1))}{(n+1)!}$. Alors

$$\begin{aligned}
 P_{n+1} &= (-1)^{n+2} \frac{x(x-1)\cdots(x-(n+1))}{(n+2)!} + P_n \\
 &= (-1)^{n+2} \frac{x(x-1)\cdots(x-(n+1))}{(n+2)!} + (-1)^{n+1} \frac{(x-1)\cdots(x-(n+1))}{(n+1)!} \quad \left. \vphantom{P_{n+1}} \right\} \text{par } Q(n) \\
 &= (-1)^{n+2} \frac{x(x-1)\cdots(x-(n+1)) - (n+2)(x-1)\cdots(x-(n+1))}{(n+2)!} \\
 &= (-1)^{n+2} \frac{(x-1)\cdots(x-(n+1))(x-(n+2))}{(n+2)!}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, si $Q(n)$ est vraie, $Q(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = (-1)^{n+1} \frac{(x-1)\cdots(x-(n+1))}{(n+1)!}$.

Exercice 13

Précisons que si Q est le polynôme nul alors il est clair que $P = 0_{\mathbb{R}[x]}$ est bien l'unique solution. Dans la suite, on suppose Q non nul et on note $n \in \mathbb{N}$ son degré.

Raisonnons par analyse-synthèse.

- **Analyse** (recherche des conditions nécessaires)
Soit n le degré de Q . Supposons qu'il existe $P \in \mathbb{R}[x]$ tel que $Q = P - P'$.
Comme $\deg(P') < \deg(P)$, P et Q sont de même degré n .
On a par dérivation successive

$$P - P' = Q, \quad P' - P'' = Q'$$

et de façon générale, pour tout entier k , $P^{(k)} - P^{(k+1)} = Q^{(k)}$. Par télescopage,

$$\sum_{k=0}^n Q^{(k)} = \sum_{k=0}^n (P^{(k)} - P^{(k+1)}) = \sum_{k=0}^n P^{(k)} - \sum_{k=0}^n P^{(k+1)} = P^{(0)} - P^{(n+1)} = P.$$

Sous réserve d'existence, il y a unicité de la solution.

- **Synthèse** (recherche des conditions suffisantes)
Posons $P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)} \in \mathbb{R}[x]$ de sorte que par linéarité de la dérivation

$$P - P' = \sum_{k=0}^n Q^{(k)} - \sum_{k=0}^n Q^{(k+1)} = Q^{(0)} - Q^{(n+1)}.$$

Le polynôme P est donc une solution du problème.

- **Conclusion.** Il y a un unique polynôme solution, donné par $P = \sum_{k=0}^n Q^{(k)}$.

Calcul matriciel

8

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 On pose

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 1) Vérifier que $AB = AC$.
- 2) En déduire que la matrice A ne peut être inversible.

Exercice 2 Vérifier que $A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3$ où

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

En déduire l'inversibilité de A et la valeur de son inverse.

Exercice 3 Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$. Montrer que $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Exercice 4 On considère la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

- 1) Calculer A^2, A^3 . Conjecturer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de A^n . Justifier.
- 2) Montrer que la conjecture précédente s'étend à $n \in \mathbb{Z}$.

Rappel : Sous réserve d'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^{-n} = (A^n)^{-1}$.

Exercice 5 * *Calcul de puissances à l'aide de la formule du binôme de Newton*

On pose

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- 1) Calculer P^2 , Q^2 , PQ et QP .
- 2) a) Déterminer deux réels α et β de sorte que $A = \alpha P + \beta Q$.
b) En déduire une expression de A^p valable pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 ** *Calcul de puissances à l'aide de la formule du binôme de Newton*

On définit

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 1) a) Calculer B^2 , B^3 . Conjecturer une expression de B^p pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.
b) Justifier ce résultat. Reste-t-il valable pour $p = 0$?
- 2) En déduire, pour tout entier positif p non nul, une expression de A^p .

Exercice 7 ** *Calcul de puissances par « diagonalisation »*

On considère la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ 2 & -6 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

En examinant les instructions en Python suivantes, calculer les puissances de A .

```
>>> import numpy as np
>>> A = np.array([[1, -6, 0], [2, -6, 2], [2, -4, 3]])
>>> P = np.array([[6, 2, -1], [2, 1, 0], [-1, 0, 1]])
>>> P_inv = np.linalg.inv(P) # calcule l'inverse de la matrice P
>>> P_inv
array([[ 1., -2.,  1.],
       [-2.,  5., -2.],
       [ 1., -2.,  2.]])
>>> P_inv @ A @ P
array([[ -1.00000000e+00,  0.00000000e+00,  0.00000000e+00],
       [ 6.66133815e-16, -2.00000000e+00,  0.00000000e+00],
       [ 4.44089210e-16,  0.00000000e+00,  1.00000000e+00]])
```

Exercice 8 ** Décomposition LU, calcul de l'inverse

On considère

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- 1) Trouver deux matrices L et U , carrées d'ordre 3, telles que
 - L soit triangulaire inférieure avec tous les éléments de la diagonale égaux à 1;
 - U soit une matrice triangulaire supérieure;
 - $LU = A$.
- 2) Justifier simplement que L et U sont inversibles.
- 3) On admet que L^{-1} est triangulaire inférieure et U^{-1} triangulaire supérieure. Calculer L^{-1} et U^{-1} .
- 4) En déduire A^{-1} .

Exercices axés sur le raisonnement**Exercice 9** * Somme et produit de matrices nilpotentes

Une matrice carrée A est dite *nilpotente* s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

Dans la suite, on considère deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que ces deux matrices sont nilpotentes et qu'elles commutent entre elles.

- 1) Justifier que le produit AB est une matrice nilpotente.
- 2) a) Justifier qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait simultanément $A^p = 0_n$ et $B^p = 0_n$.
b) Écrire la formule du binôme de Newton pour $(A+B)^{2p}$. En déduire que la somme $A+B$ est une matrice nilpotente.
- 3) Avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = {}^t A$, étudier la somme et le produit de deux matrices nilpotentes lorsqu'elles ne commutent pas entre elles.

Exercice 10 ** Application aux suites récurrentes

On définit les suites u , v et w par

$$u_0 = 1, \quad v_0 = w_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n \end{cases}$$

On pose de plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = [u_n \quad v_n \quad w_n]$.

- 1) Déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n A$.
- 2) Par un calcul des puissances de la matrice A , donner une expression explicite de u_n , v_n et w_n en fonction de n .
On pourra s'aider de l'exercice 6.

Exercice 11 ** Sommes d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique

- 1) Montrer que toute matrice carrée s'écrit, de manière unique, comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
- 2) Donner la décomposition de la matrice $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 12 ** Exponentielle d'une matrice nilpotente

On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *nilpotente d'ordre p* (pour un entier $p \geq 2$) si

$$A^{p-1} \neq 0_n \text{ et } A^p = 0_n.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente d'ordre 3; pour $t \in \mathbb{R}$, notons

$$E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2} A^2.$$

- 1) Dans cette question uniquement, on prend $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
 - a) Vérifier que A est nilpotente d'ordre 3.
 - b) Soit $t \in \mathbb{R}$, calculer $E(t)$.
 - c) Vérifier que l'application $E : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & E(t) \end{cases}$ est injective.
- 2) On suppose pour la suite de l'exercice que $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice nilpotente d'ordre 3.
 - a) Montrer par le calcul que pour tout couple $(s, t) \in \mathbb{R}^2$,

$$E(s) \cdot E(t) = E(s + t).$$

- b) Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant la question précédente, montrer que la matrice $E(t)$ est inversible et donner son inverse.
 - c) En déduire, pour tout entier positif n et pour tout réel t , l'égalité $E(t)^n = E(nt)$.
- 3) a) Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$. Établir la proposition suivante :

$$\lambda I_3 + \mu A + \nu A^2 = 0_3 \quad \Rightarrow \quad (\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0).$$

- b) En déduire que l'application $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est injective. Est-elle surjective ?

Exercice 13 ** Matrices de rotation et sommes

Notons

$$K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R_\theta = \cos(\theta)I_2 + \sin(\theta)K \quad (\text{avec } \theta \in \mathbb{R}).$$

- 1) a) Pour tous réels θ et θ' , établir l'égalité $R_{\theta+\theta'} = R_\theta \cdot R_{\theta'}$.
 b) En déduire que R_θ est inversible d'inverse $R_{-\theta}$.
 c) Donner une expression simple des puissances de R_θ .
- 2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A - I_n$ soit inversible. Justifier que pour tout entier positif p ,

$$\sum_{k=0}^p A^k = (A - I_n)^{-1}(A^{p+1} - I_n).$$

- 3) Dans la suite, on considère $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

a) Montrer que

$$R_\theta - I_2 = 2 \sin(\theta/2)KR_{\theta/2} \quad \text{et} \quad (R_\theta - I_2)^{-1} = -\frac{1}{2 \sin(\theta/2)}R_{-\theta/2}K.$$

b) À l'aide de la question 2, prouver que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^p R_{k\theta} = \frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin(\theta/2)}R_{p\theta/2}.$$

- 4) En déduire directement une expression simple des sommes

$$\sum_{k=0}^p \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^p \sin(k\theta).$$

Exercice 14 ** Commutant d'une matriceSoient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Notons

$$\mathcal{E}_A = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}.$$

$$\text{Soient} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

On admet — et on peut vérifier facilement par le calcul — que P est inversible et

$$A = P^{-1}DP \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 1) Calculer \mathcal{E}_D .
- 2) Vérifier $X \in \mathcal{E}_A$ si et seulement si $PXP^{-1} \in \mathcal{E}_D$. En déduire \mathcal{E}_A .

Exercice 15 *** Une équation de Pell-Fermat

Considérons les ensembles

$$\mathcal{E} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid a^2 - 2b^2 = 1\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 - 2b^2 = 1\}.$$

L'objectif du problème est de montrer que les éléments de \mathcal{E} sont exactement les couples (a_n, b_n) où $n \in \mathbb{N}$ et

$$a_n = \frac{1}{2} \left((3 + 2\sqrt{2})^n + (3 - 2\sqrt{2})^n \right) \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((3 + 2\sqrt{2})^n - (3 - 2\sqrt{2})^n \right).$$

- 1) Simplifier $a_n + \sqrt{2}b_n$ et $a_n - \sqrt{2}b_n$, puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_n, b_n) \in \mathcal{E}$.
- 2) Pour tout $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, on note

$$S(a,b) = \begin{bmatrix} a & \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}b & a \end{bmatrix}.$$

On définit aussi E comme étant l'ensemble des matrices carrées $S(a,b)$ où $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, de déterminant 1. Autrement dit,

$$E = \{S(a,b) \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2, \det(S(a,b)) = 1\}.$$

a) Montrer que

$$(a,b) \in \mathcal{E}' \Leftrightarrow S(a,b) \in E.$$

- b) Justifier que E est un ensemble stable par produit, au sens où si $(A,A') \in E^2$, alors $AA' \in E$. On pourra utiliser le résultat de l'exercice 3.
- c) Justifier que E est un ensemble stable par passage à l'inverse, au sens où si $A \in E$, alors A est inversible et $A^{-1} \in E$.

- 3) Soit $(x,y) \in \mathcal{E}$. L'objectif de cette question est de montrer qu'il existe un entier positif n tel que

$$(x,y) = (a_n, b_n).$$

a) Justifier qu'il existe un unique entier positif n tel que

$$(3 + 2\sqrt{2})^n \leq x + \sqrt{2}y < (3 + 2\sqrt{2})^{n+1}.$$

Dans la suite, n désigne cet unique entier. Montrer que

$$a_n + \sqrt{2}b_n \leq x + \sqrt{2}y < (3 + 2\sqrt{2})(a_n + \sqrt{2}b_n).$$

- b) Justifier l'existence de $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}'$ tel que $S(x,y)S(a_n, b_n)^{-1} = S(x_0, y_0)$.

c) On pose $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

i. Pour $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, vérifier que $S(a,b)X = (a + \sqrt{2}b)X$.

ii. En déduire que

$$(x + \sqrt{2}y) = (a_n + \sqrt{2}b_n)(x_0 + \sqrt{2}y_0),$$

puis que

$$1 < x_0 + \sqrt{2}y_0 < 3 + 2\sqrt{2}.$$

iii. En se rappelant que $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}'$, montrer que

$$-1 < \sqrt{2}y_0 - x_0 \leq 3 - 2\sqrt{2}.$$

iv. En déduire que $y_0 = 0, x_0 = 1$, puis que $S(x,y) = S(a_n, b_n)$. Conclure.

Exercice 16 ** Pseudo-inverse

Dans la suite, on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où n est un entier positif fixé tel que $n \geq 2$. Soit $A \in E$. On appelle *pseudo-inverse* de A toute matrice $M \in E$ satisfaisant les trois propriétés suivantes :

$$AMA = A; \quad MAM = M; \quad AM = MA.$$

- 1) On suppose A inversible. Déterminer une pseudo-inverse de A .
- 2) Deux exemples.
 - a) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calculer A^2 et A^3 . En déduire une pseudo-inverse de A .
 - b) Soit $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Montrer que A ne possède pas de pseudo-inverse.
- 3) On suppose que B est une pseudo-inverse de A . Montrer que A^2 admet une pseudo-inverse que l'on précisera.
- 4) On suppose que A est une matrice diagonale, de la forme $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ avec, pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$, $\lambda_i \neq 0$.
Montrer que A admet une pseudo-inverse que l'on exprimera en fonction de $\lambda_1, \dots, \lambda_r$.
- 5) On veut montrer que toute matrice A de E possède au plus une pseudo-inverse.
 - a) On suppose que M et N sont deux pseudo-inverses de A .
 - Justifier l'égalité $AMAN = MANA$.
 - En déduire successivement que $AN = MA$, puis que $M = N$.
 - b) Conclure.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 17 ★ Donner les puissances de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Exercice 18 ★ *Vrai ou faux?*

Soient A, B, C et D quatre matrices carrées non nulles, de même taille (n, n) avec $n \geq 2$. Les affirmations suivantes sont-elles (toujours) vraies ou (parfois) fausses?

- 1) $(AB)^2 = A^2B^2$.
- 2) Si A commute avec B inversible, alors A commute avec B^{-1} .
- 3) Si A commute avec B , alors A^p commute avec B .
- 4) Si A^p commute avec B , alors A commute avec B .
- 5) Si AB est inversible, alors A et B le sont.
- 6) Si $ABC = 0_n$, alors il existe au moins deux matrices parmi A, B et C qui ne soient pas inversibles.
- 7) Si $ABCD = 0_n$, alors il existe au moins trois matrices parmi A, B, C et D qui ne soient pas inversibles.

Exercice 19 **

Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$ est-elle inversible?

Exercice 20 *** *Retour sur le commutant d'une matrice*

Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

- 1) On trouve

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -10 & -6 \\ 2 & -5 & -3 \\ 6 & -15 & -9 \end{bmatrix} = AC.$$

- 2) Raisonnons par l'absurde en supposant A inversible. En multipliant (à gauche) par A^{-1} ,

$$AB = AC, \text{ donc } A^{-1}AB = A^{-1}AC, \text{ donc } I_3B = I_3C, \text{ donc } B = C.$$

Absurde. Conclusion.

La matrice A n'est pas inversible.

Exercice 2

On calcule $A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -6 \\ 6 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $-3A = \begin{bmatrix} -9 & 0 & 6 \\ -6 & -3 & 6 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $2I_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Par somme,

$$A^2 - 3A + 2I_3 = 0_3.$$

Il vient

$$A^2 - 3A = -2I_3, \text{ donc } -\frac{1}{2}A(A - 3I_3) = I_3 \text{ et } A\left(-\frac{1}{2}(A - 3I_3)\right) = I_3.$$

Par définition de l'inverse,

$$A \text{ est inversible, d'inverse } A^{-1} = \frac{1}{2}(3I_3 - A).$$

Si l'on pose le calcul, on trouve $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Exercice 3

Explicitons les deux matrices : $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$.

La définition $AB = \begin{bmatrix} \alpha a + \gamma b & \beta a + \delta b \\ \alpha c + \gamma d & \beta c + \delta d \end{bmatrix}$ conduit à

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (\alpha a + \gamma b)(\beta c + \delta d) - (\beta a + \delta b)(\alpha c + \gamma d) \\ &= \alpha a \beta c + \alpha a \delta d + \gamma b \beta c + \gamma b \delta d - \alpha a \beta c - \beta a \gamma d - \delta b \alpha c - \delta b \gamma d \\ &= \alpha a \delta d + \gamma b \beta c - \beta a \gamma d - \delta b \alpha c. \end{aligned}$$

En parallèle, $\det(A) \det(B) = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) = ad\alpha\delta - ad\beta\gamma - bca\delta + bc\beta\gamma$.

On conclut

$$\det(A) \det(B) = \det(AB).$$

Exercice 4

1) On obtient $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ et $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

• **Initialisation.** $A^0 = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^0 \end{bmatrix}$. Le résultat est vrai au rang 0.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$. Alors

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (n+1) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Donc si la proposition est vraie au rang n , alors elle est vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

2) La matrice A^n est une matrice triangulaire dont aucun coefficient diagonal n'est nul, elle est donc inversible.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = \begin{bmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{-n} \end{bmatrix}$.

Un calcul matriciel donne $B_n \cdot A^n = A^n \cdot B_n = I_3$.

Donc $B_n = (A^{-n})$. Ainsi la conjecture s'étend aux entiers négatifs.

Conclusion.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}$.

Exercice 5 Calcul de puissances à l'aide de la formule du binôme de Newton

1) On trouve $P^2 = P$, $Q^2 = Q$ et $PQ = QP = 0_3$.

2) a) Soient α et β deux réels, alors

$$\alpha P + \beta Q = \begin{bmatrix} -\alpha + 2\beta & 0 & -2\alpha + 2\beta \\ 0 & \alpha & 0 \\ \alpha - \beta & 0 & 2\alpha - \beta \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $\alpha P + \beta Q = A$ si et seulement si

$$\begin{cases} -\alpha + 2\beta = 5 \\ -2\alpha + 2\beta = 6 \\ \alpha = -1 \\ \alpha - \beta = -3 \\ 2\alpha - \beta = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2. \end{cases}$$

En conclusion,

$A = 2Q - P$.

- b) Appliquons la formule du binôme de Newton sachant que les matrices $2Q$ et P commutent d'après la question 1). Pour $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = (2Q - P)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (2Q)^k (-P)^{p-k} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} 2^k (-1)^{p-k} Q^k P^{p-k}.$$

Or, pour $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$,

$$Q^k P^{p-k} = Q^{k-1} \cdot (QP) \cdot P^{p-k-1} = 0_3 \quad \text{car} \quad QP = 0_3.$$

La somme précédente se réduit à 2 termes (obtenus pour $k = 0$ et $k = p$).

Comme $P^p = P$ et $Q^p = Q$, il vient

$$A^p = 2^p Q + (-1)^p P.$$

Remarque

On teste le résultat final dans des cas particuliers afin de détecter des éventuelles erreurs de calcul.

Pour $p = 0$: $A^0 = I_3 = Q + P = 2^0 Q + (-1)^0 P.$

Pour $p = 1$: $A^1 = A = 2Q - P = 2^1 Q + (-1)^1 P.$

Exercice 6) Calcul de puissances à l'aide de la formule du binôme de Newton

- 1) a) Un calcul de produit matriciel donne $B^2 = 3B$ et $B^3 = B^2 B = 3B^2 = 9B$. On conjecture que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$B^p = 3^{p-1} B.$$

- b) Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $B^p = 3^{p-1} B$.

• **Initialisation.** $3^{1-1} B = B$. Le résultat est vrai au rang 1.

• **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons $B^p = 3^{p-1} B$. Alors $B^{p+1} = B^p B = 3^{p-1} B^2 = 3^p B$.

Donc, si la proposition est vraie au rang p , alors elle l'est aussi au rang $p + 1$.

• **Conclusion.**

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad B^p = 3^{p-1} B.$$

La proposition n'est pas vérifiée pour $p = 0$ car

$$B^0 = I_3 \quad \text{et} \quad 3^{-1} B = \frac{1}{3} B.$$

2) On a $A = 2I + B$. Comme $(2I)B = 2B = B(2I)$, on peut appliquer la formule du binôme de Newton pour les matrices. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 A^n &= (2I + B)^n \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B^k (2I)^{n-k} \\
 &= \binom{n}{0} B^0 (2I)^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1} B \quad \left. \begin{array}{l} \text{pour } k \geq 1 : B^k = 3^{k-1} B \end{array} \right\} \\
 &= 2^n I + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1} \right) B \\
 &= 2^n I + \frac{1}{3} \left(\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k \right) - 2^n \right) B \quad \left. \begin{array}{l} \text{on fait apparaître la formule} \\ \text{du binôme dans } \mathbb{R} \end{array} \right\} \\
 &= 2^n I + \frac{1}{3} \left((3+2)^n - 2^n \right) B \\
 &= 2^n I + \frac{1}{3} (5^n - 2^n) B.
 \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = 2^n I + \frac{1}{3} (5^n - 2^n) B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Exercice 7 Calcul de puissances par « diagonalisation »

Interprétons dans un premier temps les instructions en Python. Si l'on pose

$$P = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

alors P est inversible,
$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

et $D = P^{-1}AP$, les flottants de l'ordre de 10^{-16} étant à considérer comme de simples erreurs d'arrondi par la machine.

Calculons maintenant les puissances de A en remarquant que la relation précédente peut être réécrite $A = PDP^{-1}$.

Remarque

Commençons par regarder ce qu'il se passe pour quelques petites puissances :

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD \underbrace{P^{-1}P}_{I_3} DP^{-1} = PD^2P^{-1},$$

$$A^3 = (PDP^{-1})(PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD \underbrace{P^{-1}P}_{I_3} D \underbrace{P^{-1}P}_{I_3} DP^{-1} = PD^3P^{-1}.$$

Ces premiers calculs permettent de conjecturer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = PD^pP^{-1}$. C'est ce que l'on va prouver par récurrence.

Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(p) : A^p = PD^pP^{-1}$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.**

D'une part, $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$ et, d'autre part, $A^0 = I_3$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} A^{p+1} &= A^p A \\ &= PD^pP^{-1} \cdot PDP^{-1} && \left. \begin{array}{l} \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ \text{simplification avec } PP^{-1} = I_3 \end{array} \right\} \\ &= PD^p \cdot DP^{-1} \\ &= PD^{p+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

$\mathcal{P}(p+1)$ est donc prouvée.

- **Conclusion.**

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = PD^pP^{-1}$. On pose le calcul, et après simplifications,

$$A^p = \begin{bmatrix} 6(-1)^p + 2(-2)^{p+1} - 1 & -12(-1)^p + 10(-2)^p + 2 & 6(-1)^p - 4(-2)^p - 2 \\ 2(-1)^p + (-2)^{p+1} & -4(-1)^p + 5(-2)^p & 2(-1)^p + (-2)^{p+1} \\ (-1)^{p+1} + 1 & 2(-1)^p - 2 & (-1)^{p+1} + 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 8 Décomposition LU, calcul de l'inverse

1) On pose $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{bmatrix}$ et $U = \begin{bmatrix} d & d' & d'' \\ 0 & e' & e'' \\ 0 & 0 & z'' \end{bmatrix}$.

Alors
$$LU = \begin{bmatrix} d & d' & d'' \\ ad & ad' + e' & ad'' + e'' \\ bd & bd' + ce' & bd'' + ce'' + z'' \end{bmatrix}.$$

Le système $A = LU$ donne pour unique solution

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 2) Les matrices L et U sont des matrices triangulaires avec des coefficients diagonaux non nuls. On sait alors que

L et U sont inversibles.

- 3) D'après l'énoncé, les inverses sont aussi triangulaires. Posons

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ \beta & \gamma & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U^{-1} = \begin{bmatrix} \delta & \delta' & \delta'' \\ 0 & \varepsilon' & \varepsilon'' \\ 0 & 0 & \zeta'' \end{bmatrix}.$$

Les systèmes linéaires $L^{-1}L = I_3$ et $U^{-1}U = I_3$ donnent

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- 4) On a directement

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercices axés sur le raisonnement


Exercice 9 Somme et produit de matrices nilpotentes

- 1) D'après la définition, il existe un entier p tel que $A^p = 0_n$. De plus, les matrices A et B commutent donc

$$(AB)^p = A^p B^p = 0_n \cdot B^p = 0_n.$$

La matrice AB est donc nilpotente.

Remarque

 Noter qu'ici, l'hypothèse de nilpotence de B est superflue !

2) a) Il existe par hypothèse deux entiers — éventuellement différents — p_A et p_B tels que

$$A^{p_A} = 0_n \quad \text{et} \quad B^{p_B} = 0_n.$$

On constate alors que pour tout $k \geq p_A$, $A^k = A^{k-p_A} A^{p_A} = 0_n$ et pour tout $k \geq p_B$, $B^k = 0_n$. Si l'on définit p comme étant le maximum entre p_A et p_B , on obtient alors

$$A^p = 0_n \quad \text{et} \quad B^p = 0_n.$$

b) Les matrices A et B commutent, donc d'après la formule du binôme de Newton

$$(A + B)^{2p} = \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} A^k B^{2p-k}.$$

Remarquons que pour $k \in \llbracket 0, 2p \rrbracket$, $A^k B^{2p-k} = 0_n$. En effet,

- si $k \in \llbracket p, 2p \rrbracket$, alors $A^k B^{2p-k} = 0_n \cdot B^{2p-k} = 0_n$,
- et si $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, alors $2p - k \geq p$ et $A^k B^{2p-k} = A^k \cdot 0_n = 0_n$.

Finalement, $(A + B)^{2p} = 0_n$.

La matrice $A + B$ est nilpotente.

3) Avec ce choix de matrices,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

La matrice AB est diagonale, et, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(AB)^p = \begin{bmatrix} 1^p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0_2.$$

De plus, on a aussi

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc, par récurrence immédiate,

$$(A + B)^p = A + B \text{ si } p \text{ est impair, et } (A + B)^p = I_2 \text{ sinon.}$$

La matrice n'est pas nilpotente. En conclusion,

ni AB ni $A + B$ n'est une matrice nilpotente.

Exercice 10 Application aux suites récurrentes

1) Posons $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, de sorte que, pour $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} X_n A &= [u_n \quad v_n \quad w_n] \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= [3u_n + v_n + w_n \quad u_n + 3v_n + w_n \quad u_n + v_n + 3w_n] = [u_{n+1} \quad v_{n+1} \quad w_{n+1}]. \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n A = X_{n+1}.$$

2) Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : X_n = X_0 A^n$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.**

On a $X_0 A^0 = X_0 I_3 = X_0$. La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après la question précédente,

$$X_{n+1} = X_n A = (X_0 A^n) A = X_0 A^{n+1}.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

• **Conclusion.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = X_0 A^n.$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on démontre à l'exercice 6 que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Puis, à partir de $X_n = X_0 A^n$ et de $X_0 = [u_0 \quad v_0 \quad w_0] = [1 \ 0 \ 0]$,

$$[u_n \quad v_n \quad w_n] = [1 \ 0 \ 0] \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 5^n + 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Bilan :

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{3}(5^n + 2^{n+1}) \\ v_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n) \\ w_n = \frac{1}{3}(5^n - 2^n). \end{cases}$$

Exercice 11 Sommes d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique

1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse**

(recherche des conditions nécessaires)

Supposons qu'il existe deux matrices carrées A et S , respectivement antisymétrique et symétrique, telles que $M = A + S$. En transposant, il vient

$${}^tM = {}^tA + {}^tS = -A + S.$$

On en déduit par somme et différence que $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ et $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$.

En particulier, si la décomposition existe, alors A et S sont uniques.

• **Synthèse**

(recherche des conditions suffisantes)

On pose $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$ et $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$.

On vérifie ${}^tA = \frac{1}{2} \cdot {}^t(M - {}^tM) = \frac{1}{2}({}^tM - {}^t({}^tM)) = -\frac{1}{2}(M - {}^tM) = -A$.

De même, on prouve que ${}^tS = S$. Autrement dit, A et S sont respectivement antisymétrique et symétrique avec

$$A + S = \frac{1}{2}(M - {}^tM) + \frac{1}{2}(M + {}^tM) = M.$$

• **Conclusion.** On a prouvé que M s'écrit, de manière unique, comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

2) Dans l'exemple, on a

$$A = \frac{1}{2}(M - {}^tM) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}},$$

et
$$S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}.$$

Exercice 12 Exponentielle d'une matrice nilpotente

1) a) Calculons :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0_3;$$

donc
$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_3.$$

Enfin, la matrice A est bien nilpotente d'ordre 3 car A^2 n'est pas nulle.

b) Pour tout réel t ,

$$\begin{aligned} E(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+t-t^2/2 & -t & t-t^2/2 \\ t & 1 & t \\ -t+t^2/2 & t & 1-t+t^2/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

c) Soient $t_1 \neq t_2$ tels que $E(t_1) = E(t_2)$. Autrement dit, on a égalité des coefficients entre les matrices $E(t_1)$ et $E(t_2)$. D'après ce qui précède, le coefficient en position (1,2) fournit directement $t_1 = t_2$.

L'application $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est injective.

2) a) Notons que pour $k \geq 3$, on dispose de l'égalité $A^k = A^{k-3}A^3 = 0_3$ (car $k-3 \geq 0$). Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$; puisque A est nilpotente d'ordre 3, on obtient

$$\begin{aligned} E(s) \cdot E(t) &= \left(I_3 + sA + \frac{s^2}{2}A^2 \right) \cdot \left(I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 \right) \\ &= I_3 + (s+t)A + \frac{s^2+2st+t^2}{2}A^2 \\ &= E(s+t). \end{aligned}$$

b) Il est clair que $E(t) \cdot E(-t) = E(0) = I_3$ et $E(-t) \cdot E(t) = E(0) = I_3$. Par définition, on en déduit donc que

$E(t)$ est inversible et son inverse est donnée par $E(-t)$.

c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : E(t)^n = E(nt)$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.**

Pour $n = 0$, on a, par convention, $E(t)^0 = I_3$. Comme $E(0) = I_3$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. En considérant la relation de la première question avec $s = nt$, on obtient

$$E((n+1)t) = E(nt+t) = E(nt)E(t) \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} E(t)^n E(t) = E(t)^{n+1}.$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** La proposition est vérifiée pour tout entier positif n .

$$\text{Pour tout réel } t \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \in \mathbb{N}, \quad E(t)^n = E(nt).$$

3) a) Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\lambda I_3 + \mu A + \nu A^2 = 0_3$. On multiplie la relation précédente par A^2 , ce qui fournit $\lambda A^2 = 0_3$. Comme $A^2 \neq 0_3$, on a bien $\lambda = 0$. En multipliant par A , on obtient de même $\mu = 0$. Puis $\nu = 0$.

En conclusion,

$$(\lambda, \mu, \nu) = (0, 0, 0).$$

b) Soient t_1 et t_2 , deux réels distincts tels que $E(t_1) = E(t_2)$. Il vient :

$$I_3 + t_1 A + \frac{t_1^2}{2} A^2 = I_3 + t_2 A + \frac{t_2^2}{2} A^2, \quad \text{donc} \quad (t_1 - t_2)A + \frac{t_1^2 - t_2^2}{2} A^2 = 0_3.$$

D'après la question précédente, on a $t_1 - t_2 = 0$, c'est-à-dire $t_1 = t_2$.

$$\text{L'application } t \in \mathbb{R} \mapsto E(t) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ est injective.}$$

• Cependant, l'application n'est pas surjective puisque son image est incluse dans l'ensemble des matrices inversibles.

Par exemple, on ne peut pas trouver de réel t tel que $E(t) = 0_3$.

Exercice 13 Matrices de rotation et sommes

1) a) Soient θ et θ' deux réels. Par définition du produit matriciel,

$$\begin{aligned} R_\theta \cdot R_{\theta'} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') & -\cos(\theta)\sin(\theta') - \sin(\theta)\cos(\theta') \\ \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') & -\sin(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta)\cos(\theta') \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En utilisant les relations trigonométriques, il vient

$$R_\theta \cdot R_{\theta'} = \begin{bmatrix} \cos(\theta + \theta') & -\sin(\theta + \theta') \\ \sin(\theta + \theta') & \cos(\theta + \theta') \end{bmatrix} = R_{\theta + \theta'}.$$

b) Soit $\theta \in \mathbb{R}$; alors $R_\theta R_{-\theta} = R_{\theta - \theta} = R_0 = I_2$ et $R_{-\theta} R_\theta = R_0 = I_2$.

En conclusion,

$$R_\theta \text{ est inversible avec } R_\theta^{-1} = R_{-\theta}.$$

Remarque

On peut aussi utiliser la formule d'inversion des matrices carrées d'ordre 2. La matrice R_θ est inversible car son déterminant est non nul :

$$\det(R_\theta) = \cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = 1 \neq 0 \text{ et } R_\theta^{-1} = \frac{1}{\det(R_\theta)} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Comme \cos est paire et \sin impaire, on retrouve bien $R_{-\theta}$.

c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \quad R_\theta^n = R_{n\theta}.$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.**

La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque par convention $R_\theta^0 = I_2 = R_{0 \cdot \theta}$.

• **Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n + 1)$. On écrit

$$R_\theta^{n+1} = R_\theta^n R_\theta \underset{\mathcal{P}(n)}{=} R_{n\theta} R_\theta \underset{\text{d'après 1a}}{=} R_{n\theta + \theta} = R_{(n+1)\theta}.$$

La proposition $\mathcal{P}(n + 1)$ est prouvée.

• **Conclusion.** Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $R_\theta^n = R_{n\theta}$.

2) Par télescopage,

$$(A - I_n) \sum_{k=0}^p A^k = \sum_{k=0}^p (A - I_n) A^k = \sum_{k=0}^p (A^{k+1} - A^k) = A^{p+1} - A^0.$$

Or, par convention, $A^0 = I_n$. On conclut en multipliant à gauche par $(A - I_n)^{-1}$:

$$\sum_{k=0}^p A^k = (A - I_n)^{-1} (A^{p+1} - I_n).$$

3) a) Notons que $K^2 = -I_2$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} 2 \sin(\theta/2) K R_{\theta/2} &= 2 \sin(\theta/2) K (\cos(\theta/2) I_2 + \sin(\theta/2) K) \\ &= 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) K - 2 \sin(\theta/2)^2 I_2. \end{aligned}$$

Or les formules de sommation pour les fonctions trigonométriques donnent

$$\sin(\theta) = \sin(\theta/2 + \theta/2) = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2),$$

et

$$\cos(\theta) - 1 = \cos(\theta/2 + \theta/2) - 1 = \cos(\theta/2)^2 - \sin(\theta/2)^2 - 1 = -2 \sin(\theta/2)^2.$$

On simplifie $2 \sin(\theta/2) K R_{\theta/2} = \sin(\theta)K + (\cos(\theta) - 1)I_2 = R_\theta - I_2$.

Avec la condition $\theta \neq 2\pi k$ où $k \in \mathbb{Z}$, $\sin(\theta/2) \neq 0$. Or la matrice K est inversible (d'inverse $-K$) et d'après la question 1b, $R_{\theta/2}$ est inversible, d'inverse $R_{-\theta/2}$. Par conséquent, $I_2 - R_\theta$ est inversible en tant que produit de matrices inversibles et

$$(R_\theta - I_2)^{-1} = \frac{1}{2 \sin(\theta/2)} R_{\theta/2}^{-1} K^{-1} = -\frac{1}{2 \sin(\theta/2)} R_{-\theta/2} K.$$

b) Appliquons le résultat de la question 2) à la matrice R_θ .

$$\sum_{k=0}^p R_{k\theta} = \sum_{k=0}^p R_\theta^k = (R_\theta - I_2)^{-1} (R_\theta^{p+1} - I_2).$$

Puis avec les résultats de la question 3 a),

$$(R_\theta - I_2)^{-1} = -\frac{1}{2 \sin(\theta/2)} R_{-\theta/2} K,$$

et $R_\theta^{p+1} - I_2 = R_{(p+1)\theta} - I_2 = 2 \sin((p+1)\theta/2) K R_{(p+1)\theta/2}$.

Par produit,

$$(R_\theta - I_2)^{-1} (R_\theta^{p+1} - I_2) = -\frac{2 \sin((p+1)\theta/2)}{2 \sin(\theta/2)} R_{-\theta/2} K K R_{(p+1)\theta/2}.$$

Sachant que $K^2 = -I_2$ et $R_{-\theta/2} R_{(p+1)\theta/2} = R_{p\theta/2}$, on trouve

$$\boxed{\sum_{k=0}^p R_{k\theta} = \frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin(\theta/2)} R_{\frac{p}{2}\theta}.$$

4) En explicitant les coefficients des matrices dans la relation précédente,

$$\sum_{k=0}^p \begin{bmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{bmatrix} = \frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin(\theta/2)} \begin{bmatrix} \cos(\theta p/2) & -\sin(\theta p/2) \\ \sin(\theta p/2) & \cos(\theta p/2) \end{bmatrix}.$$

En isolant les termes en position (1,1) et (2,1), on trouve directement

$$\boxed{\sum_{k=0}^p \cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin(\theta/2)} \cos(\theta p/2), \quad \sum_{k=0}^p \sin(k\theta) = \frac{\sin\left(\frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin(\theta/2)} \sin(\theta p/2).}$$

Exercice 14 Commutant d'une matrice

Cet exercice explique, par l'exemple, comment déterminer toutes les matrices qui commutent avec une matrice A fixée. Notons l'emploi du « principe de diagonalisation », également exploité dans l'exercice 7.

1) Soit $X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & i & h \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On calcule

$$XD = \begin{bmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2i & 3h \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad DX = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3i & 3h \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $X \in \mathcal{E}_D$ si et seulement si ces deux matrices sont égales. Deux matrices étant égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux deux à deux, on obtient le système

$$\begin{cases} a = a \\ 2b = b \\ 3c = c \\ d = 2d \\ 2e = 2e \\ 3f = 2f \\ g = 3g \\ 2i = 3i \\ 3h = 3h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ i = 0. \end{cases}$$

Autrement dit, les coefficients en dehors de la diagonale de X sont nuls, et cette condition est nécessaire et suffisante pour que X et D commutent entre elles.

L'ensemble \mathcal{E}_D est l'ensemble des matrices diagonales de taille (3,3).

2) Raisonnons par équivalences successives :

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{E}_A &\Leftrightarrow AX = XA \\ &\Leftrightarrow P^{-1}DPX = XP^{-1}DP && \left. \begin{array}{l} A = P^{-1}DP \\ \downarrow P \times \\ \downarrow \times P^{-1} \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow DPX = PXP^{-1}DP \\ &\Leftrightarrow DPXP^{-1} = PXP^{-1}D \\ &\Leftrightarrow D(PXP^{-1}) = (PXP^{-1})D && \left. \right\} \text{définition de } \mathcal{E}_D \\ &\Leftrightarrow PXP^{-1} \in \mathcal{E}_D. \end{aligned}$$

Or toute matrice de \mathcal{E}_D est une matrice diagonale. Ainsi, $X \in \mathcal{E}_A$ si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$PXP^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \Leftrightarrow X = P^{-1} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} P.$$

Après simplification, X commute avec A si et seulement si il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$X = \begin{bmatrix} 2\alpha - \gamma & 0 & 2\gamma - 2\alpha \\ 0 & \beta & 0 \\ \alpha - \gamma & 0 & 2\gamma - \alpha \end{bmatrix}.$$

Exercice 15 Une équation de Pell-Fermat

1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n + \sqrt{2} b_n = (3 + 2\sqrt{2})^n \quad \text{et} \quad a_n - \sqrt{2} b_n = (3 - 2\sqrt{2})^n.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} a_n^2 - 2b_n^2 &= (a_n + \sqrt{2} b_n) \cdot (a_n - \sqrt{2} b_n) \\ &= (3 + 2\sqrt{2})^n (3 - 2\sqrt{2})^n \\ &= ((3 + 2\sqrt{2}) \cdot (3 - 2\sqrt{2}))^n \\ &= (3^2 - 2^2 \sqrt{2}^2)^n = 1. \end{aligned}$$

De plus, d'après la formule du binôme de Newton,

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} 2^k \sqrt{2}^k \quad \text{et} \quad (3 - 2\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} 2^k (-\sqrt{2})^k.$$

Ainsi,

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^{n-k} 2^k \left(\frac{1 + (-1)^k}{2} \right) \sqrt{2}^k.$$

De plus,

- si k est un entier impair, alors $1 + (-1)^k$ est nul et

$$\binom{n}{k} 3^{n-k} 2^k \left(\frac{1 + (-1)^k}{2} \right) \sqrt{2}^k = 0;$$

- si à l'inverse k est pair, alors il existe un entier p tel que $k = 2p$, et

$$\frac{1 + (-1)^k}{2} = 1, \quad \sqrt{2}^k = \sqrt{2}^{2p} = 2^p \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \binom{n}{k} 3^{n-k} 2^k \left(\frac{1 + (-1)^k}{2} \right) \sqrt{2}^k \in \mathbb{N}.$$

En tant que somme d'entiers naturels, a_n est un entier naturel. On montre de même que b_n est un entier naturel.

En résumé, $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ et $a_n^2 - 2b_n^2 = 1$. Autrement dit,

$$(a_n, b_n) \in \mathcal{E}.$$

2) a) Il suffit de remarquer que, pour $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$,

$$\det(S(a,b)) = \det \begin{bmatrix} a & \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}b & a \end{bmatrix} = a^2 - 2b^2.$$

Ainsi

$$(a,b) \in \mathcal{E}' \Leftrightarrow a^2 - 2b^2 = 1 \Leftrightarrow \det(S(a,b)) = 1 \Leftrightarrow S(a,b) \in E.$$

b) Soit $(A,A') \in E^2$.

Il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ et $(a',b') \in \mathbb{N}^2$ tels que $A = S(a,b)$ et $A' = S(a',b')$. Alors

$$\begin{aligned} A \times A' &= S(a,b) \times S(a',b') \\ &= \begin{bmatrix} a & \sqrt{2}b \\ \sqrt{2}b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a' & \sqrt{2}b' \\ \sqrt{2}b' & a' \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} aa' + 2bb' & \sqrt{2}(ab' + a'b) \\ \sqrt{2}(ab' + a'b) & aa' + 2bb' \end{bmatrix} \\ &= S(aa' + 2bb', ab' + a'b). \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le résultat de l'exercice 3,

$$\det(AA') = \det(A) \cdot \det(A') = 1 \cdot 1 = 1.$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall (A,A') \in E^2, \quad A \cdot A' \in E.}$$

c) Précisons que A est bien inversible puisque $\det(A) = 1 \neq 0$. La formule de l'inverse d'une matrice de taille 2 donne

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} a & -\sqrt{2}b \\ -\sqrt{2}b & a \end{bmatrix} = S(a, -b).$$

et $AA^{-1} = I_2$ implique $\det(A) \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_2) = 1$. D'où

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1.$$

Bilan :

$$A \text{ est inversible et } \boxed{A^{-1} \in E.}$$

3) a) La suite de terme général $u_k = (3 + 2\sqrt{2})^k$ est strictement croissante avec $u_0 = 1$ et $u_k \rightarrow +\infty$.

De plus, $x + \sqrt{2}y \geq 1$: en effet, x et y sont deux entiers positifs, et ils ne peuvent pas être tous les deux nuls, car dans ce cas on aurait $x^2 - 2y^2 = 0$ ce qui contredirait le fait que $(x,y) \in \mathcal{E}$.

Il existe donc un unique entier n tel que

$$(3 + 2\sqrt{2})^n \leq x + \sqrt{2}y < (3 + 2\sqrt{2})^{n+1}.$$

Or on a vu à la question 1 que

$$a_n + \sqrt{2} b_n = (3 + 2\sqrt{2})^n.$$

D'où

$$a_n + \sqrt{2} b_n \leq x + \sqrt{2} y < (3 + 2\sqrt{2})(a_n + \sqrt{2} b_n).$$

b) Par stabilité par passage à l'inverse, $S(a_n, b_n)^{-1} \in E$ et, par stabilité par produit,

$$S(x, y) S(a_n, b_n)^{-1} \in E.$$

Il existe donc un couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$$S(x, y) S(a_n, b_n)^{-1} = S(x_0, y_0).$$

c) i. On écrit

$$S(a, b) X = \begin{bmatrix} a & \sqrt{2} b \\ \sqrt{2} b & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + \sqrt{2} b \\ a + \sqrt{2} b \end{bmatrix} = (a + \sqrt{2} b) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Autrement dit,

$$S(a, b) X = (a + \sqrt{2} b) X.$$

ii. Reprenons le résultat de la question 2 b) :

$$S(x, y) = S(x_0, y_0) S(a, b), \quad \text{donc} \quad S(x, y) X = S(x_0, y_0) S(a, b) X.$$

Or, $S(x, y) X = (x + \sqrt{2} y) X$ et

$$\begin{aligned} S(x_0, y_0) S(a, b) X &= S(x_0, y_0) ((a_n + \sqrt{2} b_n) X) \\ &= (a_n + \sqrt{2} b_n) S(x_0, y_0) X \\ &= (a_n + \sqrt{2} b_n) (x_0 + \sqrt{2} y_0) X. \end{aligned}$$

Comme $X \neq 0_{2,1}$, on a bien

$$(x + \sqrt{2} y) = (a_n + \sqrt{2} b_n) (x_0 + \sqrt{2} y_0).$$

De plus, on a vu à la question 3 a) que

$$a_n + \sqrt{2} b_n \leq x + \sqrt{2} y < (3 + 2\sqrt{2})(a_n + \sqrt{2} b_n),$$

$$\text{donc} 1 \leq \frac{x + \sqrt{2} y}{a_n + \sqrt{2} b_n} < 3 + 2\sqrt{2}$$

puis

$$1 \leq x_0 + \sqrt{2} y_0 < 3 + 2\sqrt{2}.$$

iii. Notons que

$$x_0 - \sqrt{2}y_0 = \frac{(x_0 - \sqrt{2}y_0)(x_0 + \sqrt{2}y_0)}{x_0 + \sqrt{2}y_0} = \frac{x_0^2 - 2y_0^2}{x_0 + \sqrt{2}y_0} = \frac{1}{x_0 + \sqrt{2}y_0}.$$

Par passage à l'inverse dans la relation de la question précédente,

$$\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} < x_0 - \sqrt{2}y_0 \leq 1, \quad \text{donc} \quad -1 \leq \sqrt{2}y_0 - x_0 < -\frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}.$$

iv. En sommant avec la relation précédente,

$$0 \leq 2\sqrt{2}y_0 < 3 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}} = 3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}.$$

Ainsi, $0 \leq y_0 < 2$. Comme y_0 est un entier, $y_0 = 0$ ou $y_0 = 1$.

Si $y_0 = 1$, alors $x_0^2 = 3$, impossible car $x_0 \in \mathbb{Z}$. Donc $y_0 = 0$ et $x_0 = 1$.

On en déduit que

$$\begin{aligned} S(x,y) = S(x_0,y_0)S(a_n,b_n) &\Rightarrow S(x,y) = S(1,0)S(a_n,b_n) \\ &\Rightarrow S(x,y) = S(a_n,b_n) \\ &\Rightarrow (x,y) = (a_n,b_n). \end{aligned}$$

En conclusion,

tous les éléments de \mathcal{E} sont donnés par les couples (a_n, b_n) .

Exercice 16 Pseudo-inverse

1) Posons $M = A^{-1}$. Alors

$$AMA = AA^{-1}A = IA = A, \quad MAM = A^{-1}AA^{-1} = IA^{-1} = A^{-1} = M.$$

$$\text{Enfin } AM = AA^{-1} = I = A^{-1}A = MA.$$

Finalement

A^{-1} est une pseudo-inverse de A .

2) a) On trouve $A^2 = A^3 = A$. Ainsi, en posant $M = A$, M vérifie les trois conditions pour être une pseudo-inverse.

Finalement,

A est une pseudo-inverse de A .

b) Supposons que A possède une pseudo-inverse $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$\text{Alors } AM = MA. \text{ Ce qui donne } \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix}.$$

$$\text{D'où } c = 0 \text{ et } d = a. \text{ Donc } M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = aI. \text{ On a alors } AMA = 0_{2,2} \neq A.$$

Conclusion.

A n'admet pas de pseudo-inverse.

3) Montrons que B^2 est une pseudo-inverse de A^2 . Par hypothèse, $AB = BA$. Donc

$$A^2B^2 = A(AB)B = A(BA)B = (AB)(AB) = (BA)(BA) = B(AB)A = B(BA)A = B^2A^2.$$

Par hypothèse, $ABA = A$. Donc

$$A^2B^2A^2 = A(AB)BA^2 = A(BA)BA^2 = (ABA)BA^2 = ABA^2 = (ABA)A = A^2.$$

De même, $BAB = B$ permet de montrer que $B^2A^2B^2 = B^2$.

Conclusion.

B^2 est une pseudo-inverse de A^2 .

4) L'inverse d'une matrice diagonale dont la diagonale ne contient pas de 0 nous amène à penser que $M = \text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_r, 0, \dots, 0)$ est une pseudo-inverse de A . Vérifions-le.

On écrit
$$AM = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{r \text{ termes}}, 0, \dots, 0) = MA.$$

De plus,

$$MAM = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0) \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0) = M.$$

Enfin un dernier calcul montre que $AMA = A$.

Conclusion.

une pseudo-inverse de A est $\text{diag}(1/\lambda_1, \dots, 1/\lambda_r, 0, \dots, 0)$.

5) a) Par hypothèse $AM = MA$ et $AN = NA$. Donc $AMAN = MANA$

Par hypothèse, $AMA = A$ et $ANA = A$. Donc

$$AN = (AMA)N = (AM)(AN) = (MA)(NA) = M(ANA) = MA.$$

Enfin

$$M = MAM = (MA)M = (AN)M = (NA)M = N(AM) = N(MA) = N(AN) = NAN = N.$$

b) On vient de montrer que deux pseudo-inverses d'une matrice A sont nécessairement égales.

Conclusion.

Une matrice A possède au plus une pseudo-inverse.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 17

Remarque

Il est possible de faire une conjecture à l'aide de Python.

Le code :

```
import numpy as np

A = np.array([[3, 0, 2],
              [0, 2, 0],
              [-4, 0, -3]])

for i in range(1, 5):
    print(np.linalg.matrix_power(A, i))
```

Réponse :

(A) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$	(A^3) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$
(A^2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	(A^4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

On constate qu'il faut distinguer la parité de n et le terme central.

Par récurrence, on vérifie que :

• Pour n pair :

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

• Pour n impair :

$$A^n = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2^n & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exercice 18 *Vrai ou faux?*

1) **Faux.**

En général, $(AB)^2 = ABAB$. En revanche, le résultat annoncé est vrai si les matrices A et B commutent. On pourra chercher un contre-exemple en explorant des couples de matrices ne commutant pas entre elles.

2) **Vrai.**

En effet, en multipliant à gauche et à droite par B^{-1} dans la relation $AB = BA$, on obtient directement $B^{-1}A = AB^{-1}$.

3) **Vrai.**

Il suffit de procéder par récurrence sur p .

4) **Faux.**

On peut construire un contre-exemple à partir de matrices nilpotentes. Par exemple, soient

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que B ne commute pas avec A alors que B commute avec A^2 puisque $A^2 = 0_2$.

5) **Vrai.**

Supposons le produit AB inversible, il existe donc une matrice C telle que

$$(AB)C = I_n \quad \text{et} \quad C(AB) = I_n.$$

On peut réécrire ces relations sous la forme

$$A(BC) = I_n \quad \text{et} \quad (CA)B = I_n.$$

La matrice A est donc inversible à droite et B , inversible à gauche. Or, les notions d'inversibilité à gauche et à droite pour des matrices carrées sont équivalentes à l'inversibilité. Donc A et B sont inversibles.

6) **Vrai.**

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il y ait au moins deux matrices inversibles. Supposons A et C inversibles, les autres cas sont similaires. Dans ce cas,

$$\begin{array}{l} ABC = 0_n \\ \text{donc } BC = 0_n \\ \text{d'où } B = 0_n. \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{multiplication à gauche par } A^{-1} \\ \text{multiplication à droite par } C^{-1} \end{array} \right\}$$

C'est une contradiction, puisqu'on a supposé les matrices A , B et C non nulles.

7) **Faux.**

Donnons un contre-exemple. Considérons deux matrices A et B telles que $AB = 0_n$. Par exemple,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Et prenons deux autres matrices, C et D , inversibles (par exemple $C = D = I_n$). Dans ce cas, on a seulement deux matrices non inversibles avec $ABCD = 0_2$.

Exercice 19

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Donnons deux méthodes.

• **Méthode 1.**

Procédons par un pivot de Gauss. Soient $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Procédons par équivalences successives :

$$\begin{aligned}
 A_\lambda X = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = y_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = y_3 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = y_2 \\ \lambda x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = y_3 \\ (\lambda - 1)x_2 + (1 - \lambda)x_3 = y_2 - y_3 \\ (1 - \lambda)x_2 + (1 - \lambda^2)x_3 = y_1 - \lambda y_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = y_3 \\ (\lambda - 1)x_2 + (1 - \lambda)x_3 = y_2 - y_3 \\ ((1 - \lambda) + (1 - \lambda^2))x_3 = y_1 - \lambda y_3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \lambda x_3 = y_3 \\ (\lambda - 1)x_2 + (1 - \lambda)x_3 = y_2 - y_3 \\ ((1 - \lambda)(2 + \lambda))x_3 = y_1 - \lambda y_3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$L_1 \leftrightarrow L_3$
 $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_1$
 $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

car $(1 - \lambda) + (1 - \lambda^2) = (1 - \lambda)(2 + \lambda)$. On constate que

- Si $\lambda \notin \{-2, 1\}$, alors le système est toujours résoluble. La matrice A_λ est donc inversible.
- Si $\lambda \in \{-2, 1\}$, alors il existe des matrices Y pour lesquelles le système n'est pas résoluble. La matrice A_λ n'est donc pas inversible.

En résumé,

$A_\lambda \text{ est inversible si et seulement si } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}.$

- **Méthode 2.** Vérifier par un calcul direct que

$$A_\lambda^2 - (2\lambda + 1)A_\lambda + (\lambda - 1)(\lambda + 2)I_3 = 0_3.$$

Ainsi :

- Si $\lambda \notin \{-2, 1\}$, alors $A_\lambda(A_\lambda - (2\lambda + 1)I_3) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)I_3$,

donc
$$A_\lambda \left(\frac{1}{(1 - \lambda)(\lambda + 2)} (A_\lambda - (2\lambda + 1)I_3) \right) = I_3.$$

De même,
$$\left(\frac{1}{(1 - \lambda)(\lambda + 2)} (A_\lambda - (2\lambda + 1)I_3) \right) A_\lambda = I_3.$$

Par définition, la matrice A_λ est inversible.

- Si $\lambda \in \{-2, 1\}$, on obtient

$$A_\lambda^2 - (2\lambda + 1)A_\lambda = 0_3, \quad \text{donc} \quad A_\lambda(A_\lambda - (2\lambda + 1)I_3) = 0_3.$$

Raisonnons par l'absurde en supposant la matrice A_λ inversible. En multipliant à gauche par A_λ^{-1} , on obtient $A_\lambda - (2\lambda + 1)I_3 = 0_3$, c'est-à-dire $A_\lambda = (2\lambda + 1)I_3$. Absurde, A_λ possède des coefficients non nuls en dehors de la diagonale principale. A_λ ne peut être proportionnelle à la matrice identité.

En conclusion, si $\lambda \in \{-2, 1\}$, A_λ n'est pas inversible.

Exercice 20 Retour sur le commutant d'une matrice

Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse**

(recherche des conditions nécessaires)

Supposons qu'il existe une matrice A commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notons-la

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

En particulier, A commute avec les matrices élémentaires, c'est-à-dire les neuf matrices

$$\begin{aligned} E_{11} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{13} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{23} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ E_{31} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, & E_{32} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, & E_{33} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

• Par exemple, $AE_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $E_{11}A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

L'égalité $AE_{11} = E_{11}A$ impose $a_{12} = a_{21} = a_{13} = a_{31} = 0$.

• De même, l'égalité $AE_{22} = E_{22}A$ impose $a_{21} = a_{12} = a_{23} = a_{32} = 0$.

• De plus, $AE_{12} = \begin{bmatrix} 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & a_{31} & 0 \end{bmatrix}$ et $E_{12}A = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

On obtient $a_{11} = a_{22}$. Avec E_{13} , on obtient également $a_{11} = a_{33}$.

En résumé, si une telle matrice A existe, alors ses coefficients diagonaux sont identiques et les coefficients hors diagonale sont nuls. Autrement dit, il existe un réel λ tel que $A = \lambda I_3$.

• **Synthèse**

(recherche des conditions suffisantes)

Comme la matrice I_3 commute avec toute matrice de taille $(3,3)$, toute matrice de type λI_3 avec $\lambda \in \mathbb{R}$ est solution du problème.

• **Conclusion.**

Toutes les matrices solutions sont du type λI_3 avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Systemes linéaires

9

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$1) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = 2 \\ 2z = 8; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + 5y - 3z = 1 \\ 3x + 4y + 4z = 1 \\ x - 2y + 4z = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 4y - 6z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \\ -x - 3y + 5z = 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4. \end{cases}$$

Résoudre les systèmes linéaires suivants, d'inconnue $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$:

$$5) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 4z + 2t = 2 \\ x + 2y - t = -1 \\ 2x + 3y + z - t = -1 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 2z - t = \frac{1}{2} \\ x + y + 3z - t = \frac{2}{3} \\ x + 2z - 3t = -1 \\ 4x + 2y + 8z - 3t = 0. \end{cases}$$

Exercice 2 ** Systèmes à paramètre

Résoudre les systèmes linéaires suivants en fonction des valeurs du réel λ .

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 2 \\ 2x + \lambda y = \lambda \end{cases} ; \begin{cases} 3x + 3y + 3z = \lambda x \\ 3x + y + z = \lambda y + 3 \\ 3x + 2y + 2z = 3 - \lambda z. \end{cases}$$

Exercice 3 * Application au calcul d'une somme

On considère une fonction polynomiale P définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \quad \text{où } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

- 1) Déterminer $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x+1) - P(x) = 4x^3.$$

- 2) En déduire la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^*.$$

Exercice 4 * Application au calcul d'une primitive

- 1) Trouver $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que pour tout réel $x \notin \{-2, -1, 1, 0\}$,

$$\frac{x^3 + 2}{(x^2 - 1)(x^2 + 2x)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x-1}.$$

- 2) En déduire une primitive de $x \mapsto \frac{x^3 + 2}{(x^2 - 1)(x^2 + 2x)}$ sur $]1, +\infty[$.

**Exercices axés sur le raisonnement****Exercice 5** * Application au calcul de l'inverse d'une matrice

Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6 * Système non linéaire

Résoudre le système suivant, d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$S_1 : \begin{cases} \frac{3}{2x+y} + \frac{4}{x-2y} = 2 \\ \frac{4}{2x+y} - \frac{3}{x-2y} = 1 \end{cases}$$

Exercice 7 ** Résolution d'une équation fonctionnelle

1) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Résoudre le système suivant d'inconnue (x_1, x_2, x_3) .

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 - x_3 = b \\ -x_1 + x_2 + x_3 = c. \end{cases}$$

2) On définit la fonction $g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \\ x \mapsto 1/(1-x). \end{cases}$

a) Vérifier que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad g(g(x)) = \frac{x-1}{x} \quad \text{et} \quad g(g(g(x))) = x.$$

b) Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad f(x) - f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = x. \quad (\bullet)$$

Montrer que le triplet $(f(x), f(g(x)), f(g(g(x))))$ est solution du système

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = x \\ x_1 + x_2 - x_3 = g(x) \\ -x_1 + x_2 + x_3 = g(g(x)). \end{cases}$$

c) Conclure en explicitant l'unique fonction vérifiant (\bullet) .

 **Exercices avec questions ouvertes**
Exercice 8 * *Énigme*

J'ai trois fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Quand vous aurez l'âge que j'ai, ensemble nous aurons 98 ans. Quels sont nos âges respectifs ?

On pourra noter x_- , x et x_+ mon âge passé, présent et futur et y_- , y et y_+ votre âge passé, présent et futur. En déduire un système linéaire à 6 équations avec x_- , x , x_+ , y_- , y et y_+ comme inconnues.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Le premier système est un système triangulaire :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 2z = 2 \\ 2z = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y + z \\ y = -2 + 2z \\ z = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \\ z = 4. \end{cases}}$$

2) On procède par un pivot de Gauss pour les autres systèmes :

$$\begin{cases} x + 4y - 6z = 1 \\ x + y - 2z = 2 \\ -x - 3y + 5z = 0 \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow -L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 4y - 6z = 1 \\ 3y - 4z = -1 \\ y - z = 1 \end{cases} \\ \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_2]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 4y - 6z = 1 \\ y - z = 1 \\ 3y - 4z = -1 \end{cases} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 4y - 6z = 1 \\ y - z = 1 \\ -z = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \\ z = 4. \end{cases}$$

3) On vérifie que le système est incompatible. Il n'existe aucune solution.

4) On écrit

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_1]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \\ \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ -y - 7z = -5 \\ -2y - 14z = -10 \end{cases} \xrightarrow[L_3 = 2L_2]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x = 2 - 2y - 3z \\ y = 5 - 7z \\ y = 5 - 7z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 + 11z \\ y = 5 - 7z. \end{cases}$$

On obtient une infinité de solutions données par $\{(-8 + 11z, 5 - 7z, z); z \in \mathbb{R}\}$.

5) Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 4z + 2t = 2 \\ x + 2y - t = -1 \\ 2x + 3y + z - t = -1 \end{cases} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y + 2z + 2t = 2 \\ y - z - t = -1 \\ y - z - t = -1 \end{cases} \\ \xrightarrow[\substack{L_2 = -2L_3 \\ L_4 = L_3}]{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + y + z = 0 \\ y - z - t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2z - t \\ y = -1 + z + t. \end{cases}$$

Donc l'ensemble des solutions est $\{(1 - 2z - t, -1 + z + t, z, t); (z, t) \in \mathbb{R}^2\}$.

6) Pour $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a les équivalences suivantes

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 2z - t = \frac{1}{2} \\ x + y + 3z - t = 3 \\ x + 2z - 3t = -1 \\ 4x + 2y + 8z - 3t = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow 2L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{matrix}} \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 2z - t = \frac{1}{2} \\ y + 2z = 5 \\ -y - 4t = -3 \\ t = -2. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x + \frac{1}{2}y + 2z - t = \frac{1}{2} \\ y + 2z = 5 \\ + 2z - 4t = 2 \\ t = -2. \end{cases}$$

Le système est triangulaire en prenant les inconnues dans l'ordre x, z, y et t .

Le système admet une unique solution : le quadruplet $(-1, 11, -3, -2)$.

Exercice 2 Systèmes à paramètre

• On écrit

$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 2 \\ 2x + \lambda y = \lambda \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{cases} 2x + \lambda y = \lambda \\ \lambda x + 2y = 2 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow 2L_2 - \lambda L_1} \begin{cases} 2x + \lambda y = \lambda \\ (4 - \lambda^2)y = (4 - \lambda^2). \end{cases}$$

Si $(4 - \lambda^2) \neq 0$, c'est-à-dire $\lambda \neq \pm 2$, on peut diviser la seconde ligne par $4 - \lambda^2$, il vient $y = 1$ et $x = (\lambda - \lambda y)/2 = 0$.

Par conséquent, si $\lambda \neq \pm 2$, il y a un unique couple solution donné par $(0, 1)$.

Si, pour $\lambda = \pm 2$, la seconde ligne devient $0 = 0$, le système se réduit à une seule équation et admet une infinité de solutions.

Pour $\lambda = 2$, les solutions sont les couples : $\{(1 - y, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Pour $\lambda = -2$, les solutions sont les couples : $\{(y - 1, y) : y \in \mathbb{R}\}$.

• On a les équivalences $S_\lambda \begin{cases} 3x + 3y + 3z = \lambda x \\ 3x + y + z = \lambda y + 3 \\ 3x + 2y + 2z = 3 - \lambda z \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3}$

$$\begin{cases} 3x + 2y + (2 + \lambda)z = 3 \\ 3x + (1 - \lambda)y + z = 3 \\ (3 - \lambda)x + 3y + 3z = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} 3x + 2y + (2 + \lambda)z = 3 \\ (1 + \lambda)y + (1 + \lambda)z = 0 \\ (3 - \lambda)x + 3y + 3z = 0. \end{cases}$$

On a appliqué partiellement le pivot de Gauss en prenant comme inconnue principale x à la première équation, car une discussion apparaît. On constate que la ligne L_2 se résume à $(1 + \lambda)(x + z) = 0$. Distinguons suivant les valeurs de λ . Si $\lambda \neq -1$, le système équivaut à

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ (3 - \lambda)x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + (2 + \lambda)z = 3 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{matrix}} \begin{cases} y + z = 0 \\ (3 - \lambda)x = 0 \\ 3x - \lambda y = 3. \end{cases}$$

Si, de plus, $\lambda \neq 3$, on a $x = 0$, $\lambda y = -3$ et $y = -3/\lambda$. On constate que :

• si $\lambda \notin \{-1, 3\}$, on a une unique solution $(0, -3/\lambda, 3/\lambda)$;

- si $\lambda = 0$, le système est incompatible.

De plus, si $\lambda = 3$, le système devient $\mathcal{S}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ y = -z. \end{cases}$

- Si $\lambda = 3$, l'ensemble des solutions est infini : c'est $\{(1 - z, -z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Si $\lambda = -1$, le système devient

$$\begin{cases} 4x + 3y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + z = 3 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftarrow 3L_2 - L_1} \begin{cases} 5x + 3y = 9 \\ 3x + 2y + z = 3. \end{cases}$$

On décrit l'ensemble des solutions avec x comme paramètre. Ainsi

- Si $\lambda = -1$, l'ensemble des solutions est $\left\{ \left(x, 3 - \frac{5}{3}x, \frac{1}{3}x - 3 \right) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 3 Application au calcul d'une somme

1) En utilisant la formule du binôme de Newton, on a pour tout réel x

$$\begin{aligned} (x+1)^4 - x^4 &= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 \\ \text{et } (x+1)^3 - x^3 &= 1 + 3x + 3x^2 \\ \text{et } (x+1)^2 - x^2 &= 1 + 2x \\ \text{et } (x+1) - x &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(x+1) - P(x) = 4x^3 + (6 + 3a)x^2 + (4 + 3a + 2b)x + 1 + a + b + c$.

Afin d'avoir l'égalité entre cette quantité et $4x^3$, il suffit de prendre a, b et c de sorte que

$$6 + 3a = 0, \quad 4 + 3a + 2b = 0 \quad \text{et} \quad 1 + a + b + c = 0.$$

La première équation donne $a = -2$, puis la seconde donne $2b = -4 - 3a$, c'est-à-dire $b = 1$ et la dernière donne $c = -1 - a - b = 0$. En résumé,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x^2 - 2x + 1) = x^2(x-1)^2.$$

2) On a maintenant une somme télescopique :

$$4 \sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{k=0}^n 4k^3 = \sum_{k=0}^n (P(k+1) - P(k)) = P(n+1) - P(0).$$

Comme $P(0) = 0$, on retrouve $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Exercice 4 Application au calcul d'une primitive

1) Soit $x \notin \{-2, \pm 1, 0\}$. Par réduction au même dénominateur,

$$\frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x} + \frac{d}{x-1} = \frac{N(x)}{(x+2)(x+1)x(x-1)} \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned} N(x) &= a(x+1)(x-1)x + b(x+2)(x-1)x + c(x+2)(x+1)(x-1) + d(x+2)x(x+1) \\ &= (a+b+c+d)x^3 + (b+2c+3d)x^2 + (-a-2b-c+2d)x - 2c \end{aligned}$$

Il suffit donc que $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ soit solution du système (S) suivant, que l'on résout :

$$(S) \begin{cases} a+b+c+d = 1 \\ b+2c+3d = 0 \\ -a-2b-c+2d = 0 \\ -2c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+d = 2 \\ b+3d = 2 \\ a+2b-2d = 1 \\ c = -1 \end{cases} \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}$$

$$\begin{cases} a+b+d = 2 \\ b+3d = 2 \\ b-3d = -1 \\ c = -1 \end{cases} \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} a+b+d = 2 \\ b+3d = 2 \\ 2b = 1 \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} a = 1 \\ b = 1/2 \\ d = 1/2 \\ c = -1. \end{cases}}$$

2) Sachant qu'une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur \mathbb{R}_+^* est la fonction logarithme népérien, et que pour $x \in]1, +\infty[$, on a $x+1 > 0$, $x-1 > 0$, $x > 0$ et $x+2 > 0$,

une primitive sur $]1, +\infty[$ est $x \mapsto \ln(x+2) + \frac{1}{2}(\ln(x+1) + \ln(x-1)) - \ln(x)$,

c'est-à-dire

$$x \in]1, +\infty[\mapsto \ln\left(\frac{(x+2)\sqrt{x^2-1}}{x}\right).$$

Exercices axés sur le raisonnement**Exercice 5** Application au calcul de l'inverse d'une matrice

• Pour justifier l'inversibilité de A et calculer son inverse, on effectue un pivot de Gauss.

Soient $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On écrit les équivalences

$$\begin{aligned} AX = Y &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 = y_1 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 = y_2 \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 = y_3 \end{cases} \xleftrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 = y_1 \\ 3x_2 - 4x_3 = y_1 + y_2 \\ x_2 - x_3 = y_1 + y_3 \end{cases} \\ &\xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_2} \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_1 + y_3 \\ 3x_2 - 4x_3 = y_1 + y_2 \end{cases} \xleftrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{cases} x_1 + 4x_2 - 6x_3 = y_1 \\ x_2 - x_3 = y_1 + y_3 \\ -x_3 = -2y_1 + y_2 - 3y_3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 + 2y_3 \\ x_2 = 3y_1 - y_2 + 4y_3 \\ x_3 = 2y_1 - y_2 + 3y_3 \end{cases}$$

En conclusion, A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Remarque

Il ne faut pas hésiter à vérifier son calcul en calculant au moins un des coefficients du produit et comparer avec le coefficient correspondant de la matrice identité. Par exemple,

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -6 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}.$$

• De la même manière

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & -6 & -10 \end{bmatrix}.$$

Exercice 6 *Système non linéaire*

• Posons $X = 1/(2x + y)$ et $Y = 1/(x - 2y)$ de sorte que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ soit solution de S_1 si et seulement si (X, Y) est solution du système *linéaire*

$$\begin{cases} 3X + 4Y = 2 \\ 4X - 3Y = 1 \end{cases} \xleftrightarrow{L_2 \leftrightarrow 4L_1 - 3L_2} \begin{cases} 3X + 4Y = 2 \\ 25Y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 2/5 \\ Y = 1/5 \end{cases}$$

En revenant à x et y :

$$S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 2x + y = 5/2 \end{cases} \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{cases} x - 2y = 5 \\ 5y = -15/2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3/2 \end{cases}.$$

Exercice 7 *Résolution d'une équation fonctionnelle*

1) Vérifier que le système est un système de Cramer. Il y a un unique triplet (x_1, x_2, x_3) solution, avec

$$x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = \frac{b+c}{2} \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{a+c}{2}.$$

2) a) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

$$g(g(x)) = g\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = \frac{1-x}{(1-x)-1} = \frac{x-1}{x}.$$

De plus,
$$g(g(g(x))) = g\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x - (x-1)} = x.$$

b) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Par hypothèse, f vérifie la relation

$$\forall X \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad f(X) - f\left(\frac{1}{1-X}\right) + f\left(\frac{X-1}{X}\right) = X.$$

C'est-à-dire, $\forall X \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \quad f(X) - f(g(X)) + f(g(g(X))) = X.$

• Comme $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, on a bien

$$f(x) - f(g(x)) + f(g(g(x))) = x \quad (L_1).$$

• De même, $g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ et

$$f(g(x)) - f(g(g(x))) + f(g(g(g(x)))) = g(x).$$

$$\text{Or, } g(g(g(x))) = x \text{ et } f(g(x)) - f(g(g(x))) + f(x) = g(x).$$

En réorganisant les termes,

$$f(x) + f(g(x)) - f(g(g(x))) = g(x) \quad (L_2).$$

• Puis, $g(g(x)) \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ et

$$f(g(g(x))) - f(g(g(g(x)))) + f(g(g(g(g(x)))) = g(g(x)).$$

$$\text{On simplifie, } f(g(g(x))) - f(x) + f(g(x)) = g(g(x)),$$

et on réorganise

$$-f(x) + f(g(x)) + f(g(g(x))) = g(g(x)) \quad (L_3).$$

En reprenant les lignes L_1, L_2, L_3 , le triplet $(f(x), f(g(x)), f(g(g(x))))$ est bien solution du système.

c) D'après le calcul de la première question, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$,

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{2} = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{1-x} \right).$$

Remarque

On peut vérifier que f est solution en calculant directement sur les applications. En effet, si id désigne l'application identité sur $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, f est solution si et seulement si

$$f - f \circ g + f \circ g^2 = \text{id} \quad \text{où} \quad g^2 = g \circ g.$$

Ainsi, pour $f = \frac{1}{2}(\text{id} + g)$,

$$\begin{aligned} f - f \circ g + f \circ g^2 &= \frac{1}{2}(\text{id} + g) - \frac{1}{2}(\text{id} + g) \circ g + \frac{1}{2}(\text{id} + g) \circ g^2 \\ &= \frac{1}{2}(\text{id} + g) - \frac{1}{2}(g + g^2) + \frac{1}{2}(g^2 + g^3). \end{aligned}$$

Or, $g^3 = g \circ g \circ g = \text{id}$ et après simplification, on a bien $f - f \circ g + f \circ g^2 = \text{id}$, et donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, f(x) - f(g(x)) + f(g(g(x))) = x$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8 *Énigme*

Il y a trois temps : passé, présent et futur. Notons x_-, x et x_+ mon âge dans le passé, présent et futur. De même, notons y_-, y et y_+ votre âge passé, présent et futur. Traduisons l'énoncé :

- « J'ai trois fois l'âge que vous aviez » $x = 3y_-$,
- « quand j'avais l'âge que vous avez » $x_- = y$,
- « Quand vous aurez l'âge que j'ai » $y_+ = x$,
- « ensemble nous aurons 98 ans » $x_+ + y_+ = 98$.

Notons, de plus, qu'il s'écoule un même laps de temps pour chacun entre le passé et le présent, et entre le présent et le futur :

$$x - x_- = y - y_- \quad \text{et} \quad x_+ - x = y_+ - y.$$

Au final, on obtient un système linéaire à 6 inconnues

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} x = 3y_- \\ x_- = y \\ y_+ = x \\ x_+ + y_+ = 98 \\ x - x_- = y - y_- \\ x_+ - x = y_+ - y \end{array} \right. &\xrightarrow[\text{on élimine } x_- \text{ et } y_+]{=} \left\{ \begin{array}{l} x = 3y_- \\ x_+ + x = 98 \\ x - y = y - y_- \\ x_+ - x = x - y \end{array} \right. &\xrightarrow[\text{on élimine } x_+]{=} \left\{ \begin{array}{l} x = 3y_- \\ 2x = 98 - x + y \\ x - y = y - y_- \end{array} \right. \\ & & \xrightarrow[\text{on élimine } y_-]{=} \left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 98 \\ 3x - 3y = 3y - x \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 98 \\ 4x - 6y = 0. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Finalement, on résout : j'ai 42 ans et vous, 28.

Introduction aux espaces vectoriels

10

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel, et soient x_1, x_2 et x_3 trois vecteurs de E . Montrer que la famille $(x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$ est liée.

Exercice 2 * Extraire une base d'une famille génératrice

On se place dans \mathbb{R}^3 . On considère les vecteurs

$$a_1 = (1,1,2), a_2 = (2,1,-1), a_3 = (4,3,3), \text{ et } a_4 = (-1,1,8).$$

Déterminer une base de $F = \text{Vect}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ qui soit extraite de la famille (a_1, a_2, a_3, a_4) .

Exercice 3 * Liberté dans le cas matriciel

Posons
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- 1) Justifier que la famille (A, B, AB, BA) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 2) La famille (A, B, AB, BA, I) est-elle libre?

Exercice 4 **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on définit $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_i(x) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \sin\left(x - \frac{k\pi}{2n}\right)$$

où le produit porte sur les entiers $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i\}$. Montrer que $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Indication. Considérer les valeurs $x_j = \frac{j\pi}{2n}$ ($1 \leq j \leq n$).

Exercice 5 **

Soit E un espace vectoriel et $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) une base de E . Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note

$$f_{2j-1} = e_{2j-1} + e_{2j} \quad \text{et} \quad f_{2j} = e_{2j-1} - e_{2j}.$$

Montrer que $(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ est une base de E .

Exercice 6 ***

- 1) a) Vérifier que pour tous réels a et b , $2 \cos(a) \cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.
 b) Pour $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, calculer

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(\ell x) \, dx.$$

On distinguera les cas $k = \ell$ et $k \neq \ell$.

- c) En déduire que la famille $(x \mapsto \cos(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est libre.
 2) Justifier que la famille $(x \mapsto \sin(kx))_{1 \leq k \leq n}$ est aussi libre.
Indication. On pourra utiliser la dérivation.

 **Exercices axés sur le raisonnement****Exercice 7**

On pose $e_1 = (1, 2, 3)$, $e_2 = (4, 5, 6)$, $e_3 = (1, 1, 1)$ et $e_4 = (0, 1, 2)$.
 Prouver que $\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(e_3, e_4)$.

Exercice 8 * *Un sous-espace vectoriel défini paramétriquement*

On pose $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & c & a \\ c & b & c \\ a & c & a \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

Montrer que F est un espace vectoriel et en préciser une base.

Exercice 9 * *Exemples de sous-espaces vectoriels dans \mathbb{R}^n*

Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels?

- 1) $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq y\}$; 2) $E_2 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid b = 2a + c\}$;
 3) $E_3 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a - b = 2\}$; 4) $E_4 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a^2 + c^2 = b\}$;
 5) $E_5 = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid abc = 0\}$.

Exercice 10 ** Exemples de sous-espaces vectoriels dans les espaces fonctionnels

Notons $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels?

- 1) $E_1 = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = 3\}$;
- 2) $E_2 = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(3) = 0\}$;
- 3) $E_3 = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists M_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M_0\}$;
- 4) $E_4 = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq M_1\}$ où $M_1 \in \mathbb{R}$ est fixé;
- 5) $E_5 = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est paire}\}$.

Exercice 11 * Exemples avec des suites

Notons $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles.

Les ensembles suivants, munis des lois usuelles, sont-ils des espaces vectoriels?

- 1) $E_1 = \{u \in \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid u \text{ converge vers } 0\}$;
- 2) $E_2 = \{u \in \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid u \text{ est décroissante}\}$;
- 3) $E_3 = \{u \in \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_{3n}\}$;
- 4) $E_4 = \{u \in \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \mid u \text{ est arithmétique}\}$.

Exercice 12 **

Dans \mathbb{R}^4 , on pose $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + 2z - t = 0\}$
 et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z + t = 0\}$.

- 1) Vérifier que E , F et $E \cap F$ sont trois sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 .
- 2) Déterminer une famille génératrice de $E \cap F$.
- 3) Déterminer une famille génératrice de E , et une famille génératrice de F .
- 4) Préciser une base dans chacun des cas.

Exercice 13 **

Soit $E = \mathbb{R}_4[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 et

$$F = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \{P \in E \mid P(2) = 0\}.$$

- 1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
- 2) Déterminer une base de F , de G et de $F \cap G$.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 14 Considérons les trois parties suivantes de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

- 1) $E_1 = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est croissante}\}$;
- 2) $E_2 = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f \text{ est monotone}\}$;
- 3) $E_3 = \{f - g \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f, g \in E_1\}$.

Parmi ces trois ensembles, préciser lesquels sont des sous-espaces vectoriels de E .

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Par négation de la définition de *famille libre*, il s'agit de trouver $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \neq (0, 0, 0, 0) \text{ et } \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3(x_1 + x_2 + x_3) + \lambda_4(x_1 + x_2 - x_3) = 0_E.$$

Or

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3(x_1 + x_2 + x_3) + \lambda_4(x_1 + x_2 - x_3) &= 0_E \\ \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4)x_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)x_2 + (\lambda_3 - \lambda_4)x_3 &= 0_E. \end{aligned}$$

Une solution non nulle possible est $(-2, -2, 1, 1)$.

Donc la famille $(x_1, x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3)$ est liée.

Exercice 2 Extraire une base d'une famille génératrice

Déterminons les relations linéaires entre les vecteurs de la famille à l'aide du pivot de Gauss.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 quatre réels tels que $\sum_{i=1}^4 \lambda_i a_i = 0_{\mathbb{R}^3}$. Cela équivaut au système linéaire

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 + 8\lambda_4 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{smallmatrix}]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \\ -5\lambda_2 - 5\lambda_3 + 10\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 = 5L_2 \end{smallmatrix}]{L_3 = 5L_2} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0. \end{cases}$$

On écrit λ_1 et λ_2 en fonction de λ_3 et λ_4 vus comme paramètres : $\begin{cases} \lambda_1 = -2\lambda_3 - 3\lambda_4 \\ \lambda_2 = -\lambda_3 + 2\lambda_4. \end{cases}$

Si l'on choisit $\lambda_3 = 1$ et $\lambda_4 = 0$, on trouve $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = -1$, ce qui donne

$$-2a_1 - a_2 + a_3 + 0a_4 = 0_{\mathbb{R}^3} \text{ donc } a_3 = 2a_1 + a_2.$$

De même, si on choisit $\lambda_3 = 0$ et $\lambda_4 = 1$, on obtient $a_4 = 3a_1 - 2a_2$.

De plus, $\text{Vect}(a_1, a_2) \subset \text{Vect}(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $x \in \text{Vect}(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4.$$

Alors

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3(2a_1 + a_2) + \lambda_4(3a_1 - 2a_2) \\ &= (\lambda_1 + 2\lambda_3 + 3\lambda_4)a_1 + (\lambda_2 + \lambda_3 - 2\lambda_4)a_2 \\ x &\in \text{Vect}(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Donc : $\text{Vect}(a_1, a_2, a_3, a_4) \subset \text{Vect}(a_1, a_2)$.

Ainsi $\text{Vect}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \text{Vect}(a_1, a_2)$.

De plus, en considérant $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, on trouve $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. C'est-à-dire

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \text{donc} \quad (\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0).$$

La famille (a_1, a_2) est libre et génératrice de $\text{Vect}(a_1, a_2)$. C'en est donc une base.

Exercice 3 Liberté dans le cas matriciel

1) Le calcul donne $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ et $BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 quatre réels. Alors

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 AB + \lambda_4 BA = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \end{bmatrix}.$$

Par unicité des coefficients d'une matrice,

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C + \lambda_4 D = 0_4, \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + 2\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ -\lambda_3 + \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

D'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Finalement

(A, B, AB, BA) est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2) On remarque que $AB + BA = 2(A + B) - I_2$. Donc $2A + 2B - AB - BA - I_2 = 0_2$, et

la famille (A, B, AB, BA, I) est liée.

Exercice 4

Notons θ l'application nulle de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = \theta$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = 0$. (1)

En particulier, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x_j) = 0$.

Or $f_i(x_j) = \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \sin\left(\frac{(j-k)\pi}{2n}\right)$.

Si $j \neq i$, alors j est une valeur prise par k . On constate alors que $\sin(0) = 0$ apparaît dans le produit et $f_j(x_i) = 0$. La relation (1) devient alors $\lambda_j f_j(x_j) = 0$.

Montrons que $f_j(x_j) \neq 0$. Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $k \neq j$, on a $\frac{(j-k)\pi}{2n} \neq 0$ et

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\overbrace{(j-n)\pi}^{>-n}}{2n} < \frac{\underbrace{(j-k)\pi}_{<n}}{2n} < \frac{\pi}{2}$$

donc $\sin\left(\frac{(j-k)\pi}{2n} \neq 0\right) \neq 0$. D'où $f_j(x_j) \neq 0$. Par conséquent,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = 0.$$

$(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre de l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exercice 5

Par définition $(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ est une base si et seulement si $(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ est une famille libre et génératrice de E .

• Montrons que $(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ est une famille libre. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ tel que $\sum_{i=1}^{2n} \lambda_i f_i = 0_E$. Alors

$$\lambda_1 \underbrace{(e_1 + e_2)}_{f_1} + \lambda_2 \underbrace{(e_1 - e_2)}_{f_2} + \lambda_3 \underbrace{(e_3 + e_4)}_{f_3} + \lambda_4 \underbrace{(e_3 - e_4)}_{f_4} + \dots + \lambda_{2n-1} \underbrace{(e_{2n-1} + e_{2n})}_{f_{2n-1}} + \lambda_{2n} \underbrace{(e_{2n-1} - e_{2n})}_{f_{2n}} = 0_E.$$

D'où $(\lambda_1 + \lambda_2)e_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)e_2 + (\lambda_3 + \lambda_4)e_3 + (\lambda_3 - \lambda_4)e_4 + \dots + (\lambda_{2n-1} + \lambda_{2n})e_{2n-1} + (\lambda_{2n-1} - \lambda_{2n})e_{2n} = 0_E$.

Or $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ est une base de E , donc $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ est une famille libre. Donc

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 & \lambda_3 + \lambda_4 = 0 & \dots & \lambda_{2j-1} + \lambda_{2j} = 0 & \dots & \lambda_{2n-1} + \lambda_{2n} = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0, & \lambda_3 - \lambda_4 = 0, & \dots & \lambda_{2j-1} - \lambda_{2j} = 0, & \dots & \lambda_{2n-1} - \lambda_{2n} = 0. \end{cases}$$

On en déduit que, pour tout $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. La famille $(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ est libre.

• Montrons que $(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ est une famille génératrice de E .

On remarque que chaque vecteur de la base $(e_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ s'exprime en fonction des vecteurs de la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$:

→ si i est pair, $i = 2j$ et $e_{2j} = \frac{1}{2}(f_{2j-1} - f_{2j})$;

→ si i est impair, $i = 2j - 1$ et $e_{2j-1} = \frac{1}{2}(f_{2j-1} + f_{2j})$.

Donc $E = \text{Vect}(e_i)_{1 \leq i \leq 2n} \subset \text{Vect}(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$.

Les vecteurs f_i sont des vecteurs de E , donc on a l'inclusion réciproque et $E = \text{Vect}(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$.

Enfin

la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ est génératrice de E .

• On a donc montré que

la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ est une base de E .

Remarque

La notion de dimension, introduite au second semestre, permettra de montrer que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq 2n}$ est une base de E en constatant que $\dim(E) = 2n = \text{card}(e_1, \dots, e_{2n})$ et en montrant uniquement qu'elle est libre (ou en montrant uniquement qu'elle est génératrice de E).

Exercice 6

1) a) Soient a et b deux réels. D'après les identités trigonométriques,

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \hline \text{donc } \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2 \cos a \cos b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(\ell x) dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos((k+\ell)x) + \cos((k-\ell)x)) dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((k+\ell)x) dx + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos((k-\ell)x) dx. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$.

- Si $n \neq 0$, $\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \left[\frac{1}{n} \sin(nx) \right]_0^{2\pi} = 0$.
- Si $n = 0$, $\int_0^{2\pi} \cos(nx) dx = \int_0^{2\pi} 1 dx = 2\pi$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(\ell x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

c) Notons $f_k : x \mapsto \cos(kx)$ et notons θ l'application nulle de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k f_k = \theta$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kx) = 0$.

Soit $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En multipliant par $\cos(\ell x)$, puis en intégrant sur $[0, 2\pi]$, il vient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^n \lambda_k \cos(kx) \cos(\ell x) dx &= 0 \\ \text{donc } \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(\ell x) dx}_{\pi \text{ si } k=\ell, 0 \text{ si } k \neq \ell} &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{par linéarité}$$

$$\text{donc } 2\pi \lambda_\ell = 0.$$

Donc, pour tout $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_\ell = 0$. Par définition,

$$(x \mapsto \cos(kx))_{1 \leq k \leq n} \text{ est donc libre.}$$

2) Notons $g_k : x \mapsto \sin(kx)$.

Soit $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k g_k = \theta$.

Par linéarité de la dérivation $\sum_{k=1}^n \lambda_k g'_k = \theta' = \theta$.

Donc $\sum_{k=1}^n k \lambda_k f_k = \theta$.

D'après la question précédente, la famille $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre. Donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k \lambda_k = 0$. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k = 0$. Par définition,

$$(x \mapsto \sin(kx))_{1 \leq k \leq n} \text{ est donc libre.}$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 7

En cherchant des relations de dépendance linéaire, on trouve par exemple $e_2 - e_1 = 3e_3$ et $e_3 + e_4 = e_1$.

Raisonnons alors par double inclusion. On a

$$e_3 = \frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_1 \quad \text{et} \quad e_4 = e_1 - e_3 = \frac{4}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2.$$

Autrement dit, e_3 et e_4 sont des combinaisons linéaires des éléments de la famille (e_1, e_2) . D'où

$$(e_3, e_4) \in \text{Vect}(e_1, e_2)^2.$$

Soit $x \in \text{Vect}(e_3, e_4)$, il existe λ, μ tels que

$$x = \lambda e_3 + \mu e_4 = \lambda \left(\frac{1}{3}e_2 - \frac{1}{3}e_1 \right) + \mu \left(\frac{4}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 \right) = \frac{4\mu - \lambda}{3}e_1 + \frac{\lambda - \mu}{3}e_2.$$

Par conséquent, $x \in \text{Vect}(e_1, e_2)$. D'où l'inclusion $\text{Vect}(e_3, e_4) \subset \text{Vect}(e_1, e_2)$.

En utilisant $e_1 = e_3 + e_4$ et $e_2 = 4e_3 + e_4$, on prouve l'inclusion $\text{Vect}(e_1, e_2) \subset \text{Vect}(e_3, e_4)$.

En conclusion,

$$\boxed{\text{Vect}(e_1, e_2) = \text{Vect}(e_3, e_4).}$$

Exercice 8 *Un sous-espace vectoriel défini paramétriquement*

Remarque

On aurait pu démontrer que E est un espace vectoriel en prouvant que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est-à-dire, qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire.

Ici, on prouve directement que c'est un espace vectoriel en prouvant que c'est un sous-espace engendré par trois vecteurs.

On pose
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ainsi $F = \{aA_1 + bA_2 + cA_3 \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{Vect}(A_1, A_2, A_3)$.

De plus, il est clair que la famille (A_1, A_2, A_3) est libre (les coefficients des trois matrices étant situés à des positions différentes, toute combinaison linéaire nulle doit avoir ses trois coefficients nuls). Résumons :

$$\boxed{E \text{ est un espace vectoriel dont } (A_1, A_2, A_3) \text{ est une base.}}$$

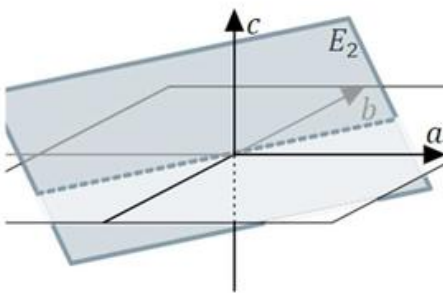
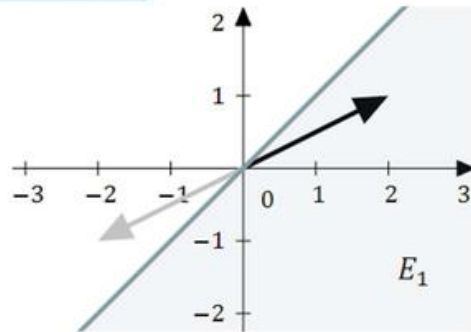
Exercice 9 Exemples de sous-espaces vectoriels dans \mathbb{R}^n

1) Non, E_1 n'est pas un espace vectoriel.

Par exemple, E_1 n'est pas stable par multiplication par un réel. Par exemple,

$$(2,1) \in E_1,$$

mais $-1 \cdot (2,1) = (-2, -1) \notin E_1$.
Graphiquement, E_1 est un demi-plan.



2) Afin de prouver que E_2 est un espace vectoriel, on peut prouver que c'est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . Pour cela, on vérifie que E_2 est non vide et stable par combinaisons linéaires.

- E_2 est non vide car $(0,0,0) \in E_2$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soient X, X' dans E_2 .

On écrit $X = (x,y,z) \in E_2$ et $X' = (x',y',z')$.

Par définition de E_2 , $2x + z = y$ et $2x' + z' = y'$.

Il vient $X + \lambda X' = (x,y,z) + \lambda(x',y',z') = (x + \lambda x', y + \lambda y', z + \lambda z')$

puis, $2(x + \lambda x') + (z + \lambda z') = (2x + z) + \lambda(2x' + z') = y + \lambda y'$.

Autrement dit, $X + \lambda X' \in E_2$.

En conclusion, E_2 est sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 . E_2 est un espace vectoriel.

3) E_3 n'est pas un espace vectoriel. Le vecteur nul n'appartient pas à E_3 :

$$(0,0,0) \notin E_3 \quad \text{car} \quad 0 - 0 \neq 2.$$

4) E_4 n'est pas un espace vectoriel. Il n'est pas stable par somme :

$$X = (1,1,0) \in E_4 \quad \text{car} \quad 1^2 + 0^2 = 1 \quad \text{et} \quad X' = (-1,1,0) \in E_4 \quad \text{car} \quad (-1)^2 + 0^2 = 1.$$

Cependant, $X + X' = (0,2,0) \notin E_3 \quad \text{car} \quad 0^2 + 0^2 \neq 4$.

5) E_5 n'est pas un espace vectoriel. Il n'est pas stable par somme.

Par exemple $(1,1,0) \in E_5$, $(0,0,1) \in E_5$ mais $(1,1,1) \notin E_5$.

Exercice 10 Exemples de sous-espaces vectoriels dans les espaces fonctionnels

1) E_1 n'est pas un espace vectoriel : l'application nulle $x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ n'est pas dans E_1 .

2) Prouvons que E_2 est un sous-espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- L'application nulle $x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ est clairement un élément de E_2 qui n'est donc pas vide.

- Soient f et g dans E_2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a par définition de $f + \lambda g$,
 $(f + \lambda g)(3) = f(3) + \lambda g(3) = 0 + \lambda \cdot 0 = 0$, donc $f + \lambda g \in E_2$.
 E_2 est stable par combinaisons linéaires, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

En particulier, E_2 est un espace vectoriel.

- 3) Justifions que E_3 , l'ensemble des applications bornées, est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- L'application nulle $x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ est clairement bornée, c'est un élément de E_3 .
- Soient $f, g \in E_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par définition, il existe deux réels M_f et M_g tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq M_f \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq M_g.$$

Posons $M = M_f + |\lambda|M_g$. Soit $x \in \mathbb{R}$; en utilisant l'inégalité triangulaire,

$$|(f + \lambda g)(x)| = |f(x) + \lambda g(x)| \leq |f(x)| + |\lambda| \cdot |g(x)| \leq M_f + |\lambda| \cdot M_g = M.$$

Ainsi, l'application $(f + \lambda g)$ est bornée, c'est un élément de E_3 .

E_3 est un espace vectoriel.

- 4) • Si $M_1 < 0$, alors $E_4 = \emptyset$ qui n'est pas un espace vectoriel.
 • Si $M_1 = 0$, on constate que E_4 ne contient que l'application nulle comme élément. C'est bien un espace vectoriel (quoique bien pauvre).
 • Si $M_1 > 0$, E_4 n'est pas un espace vectoriel. Par exemple, il n'est pas stable par multiplication par un réel. Posons f l'application constante sur \mathbb{R} égale à M_1 . On a bien $f \in E_4$ alors que $2 \cdot f \notin E_4$ (car $2M_1 > M_1$).

Résumons :

E_4 est un espace vectoriel si et seulement si $M_1 = 0$.

- 5) Prouvons que E_5 est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Il contient l'application nulle et pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et f et $g \in E_5$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f + \lambda g)(-x) = f(-x) + \lambda g(-x) = f(x) + \lambda g(x) = (f + \lambda g)(x).$$

Autrement dit, $f + \lambda g$ est paire. L'ensemble E_5 est non vide et stable par combinaisons linéaires.

En particulier,

E_5 est un espace vectoriel.

Exercice 11 Exemples avec des suites

- 1) E_1 est un espace vectoriel. En effet, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$:

- la suite nulle converge vers 0, donc E_1 est non vide.
- Soient u et v deux suites convergentes vers 0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après la linéarité du passage à la limite, $u + \lambda v$ est aussi convergente (et sa limite est $0 + \lambda \cdot 0 = 0$). Ainsi, E_1 est stable par combinaisons linéaires.

- 2) E_2 n'est pas un espace vectoriel. Par exemple, cet ensemble n'est pas stable par multiplication par un réel.

En effet, la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = -n$ est décroissante alors que $-u$ est strictement croissante. $u \in E_2$, mais $-u \notin E_2$.

3) Prouvons que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

- La suite nulle vérifie bien la relation définissant E_3 , donc cet ensemble est non vide.
- Soient $u, v \in E_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a par définition

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_{3n} \quad \text{et} \quad v_n = v_{3n}.$$

$$\text{Donc, pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad (u + \lambda v)_n = u_n + \lambda v_n = u_{3n} + \lambda v_{3n} = (u + \lambda v)_{3n}.$$

Ainsi, $u + \lambda v \in E_3$.

En conclusion,

E_3 est un espace vectoriel.

4) Montrons que E_4 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

- La suite nulle est un cas (très) particulier d'une suite arithmétique (le premier terme et la raison valent 0). L'ensemble E_4 est non vide.
- Soient u et v deux suites arithmétiques (notons r_u et r_v les raisons respectives), et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $r = r_u + \lambda r_v$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u + \lambda v)_{n+1} = u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = (u_n + r_u) + \lambda(v_n + r_v) = (u_n + \lambda v_n) + (r_u + \lambda r_v)$$

$$\text{donc} \quad (u + \lambda v)_{n+1} = (u + \lambda v)_n + r.$$

Autrement dit, la suite $(u + \lambda v)$ est arithmétique (de raison r). E_4 est stable par combinaisons linéaires.

Finalement,

E_4 est un espace vectoriel.

Exercice 12

Remarque

Dans cet exercice, on passe d'une représentation par des équations à une représentation par famille génératrice.

1) On vérifie que les ensembles E et F sont non vides et stables par combinaisons linéaires. Ce sont donc des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 (voir l'exercice 9 pour les détails de la rédaction).

Comme une intersection de sous-espaces vectoriels reste un espace vectoriel, $E \cap F$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 .

2) Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On écrit les équivalences suivantes :

$$X \in E \cap F \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 2x + y + z + t = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ 3x + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = x - y + 2z = -x - y \\ z = -x \end{cases} \Leftrightarrow X = (x, y, -x, -x - y).$$

Si on introduit $e_1 = (1, 0, -1, -1)$ et $e_2 = (0, 1, 0, -1)$, on obtient

$$\begin{aligned} E \cap F &= \{(x, y, -x, -x - y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{xe_1 + ye_2 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}(e_1, e_2). \end{aligned}$$

Par conséquent, (e_1, e_2) est une famille génératrice de $E \cap F$.

3) On procède de même pour E et F . Soit $X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$X \in E \Leftrightarrow X = (x, y, z, x - y + 2z) = x(1, 0, 0, 1) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, 2).$$

Une famille génératrice de E est $((1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 2))$.

$$X \in F \Leftrightarrow X = (x, y, z, -2x - y - z) = x(1, 0, 0, -2) + y(0, 1, 0, -1) + z(0, 0, 1, -1).$$

Une famille génératrice de F est $((1, 0, 0, -2), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, -1))$.

4) On vérifie que chaque famille est libre. Il s'agit donc à chaque fois d'une base de l'espace qu'elle engendre.

Exercice 13

1) Notons 0_E le polynôme nul.

- $0_E \in F$, donc F n'est pas vide.
- Montrons que F est stable par combinaisons linéaires. Soient P et Q deux éléments de F et λ et μ deux scalaires.
Alors $\lambda P + \mu Q \in E$ et par définition $(\lambda P + \mu Q)(1) = \lambda P(1) + \mu Q(1) = 0$.
Par linéarité de la dérivation : $(\lambda P + \mu Q)'(1) = \lambda P'(1) + \mu Q'(1) = 0$.
Donc $\lambda P + \mu Q \in F$.
L'ensemble F est non vide et stable par combinaisons linéaires.
Donc F est un sous-espace vectoriel de E .

- On montre de même que G est un sous-espace vectoriel de E .

2) • Caractérisons les éléments de F . Soit $P \in E$.

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow P(1) = P'(1) = 0 && \left. \begin{array}{l} \text{caractérisation des racines doubles} \\ \text{d'un polynôme} \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_2[x], P(x) = (x-1)^2 Q(x) \quad (\text{car } P \in \mathbb{R}_5[x]) \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, P(x) = (x-1)^2(ax^2 + bx + c) \\ &\Leftrightarrow P \in \text{Vect}((x-1)^2 x^2, (x-1)^2 x, (x-1)^2). \end{aligned}$$

De plus, par unicité du quotient de la division euclidienne et par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\begin{aligned} (x-1)^2(ax^2 + bx + c) = 0_E &\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0_E \\ &\Leftrightarrow (a, b, c) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Donc $((x-1)^2 x^2, (x-1)^2 x, (x-1)^2)$ est une famille libre et génératrice de F :

$$((x-1)^2 x^2, (x-1)^2 x, (x-1)^2) \text{ est une base de } F.$$

- De façon similaire, on obtient que

$$\boxed{((x-2)x^3, (x-2)x^2, (x-2)x, (x-2)) \text{ est une base de } G.}$$

- Déterminons une base de $F \cap G$. Soit $P \in E$,

$$\begin{aligned} P \in F \cap G &\Leftrightarrow \overbrace{\exists Q \in \mathbb{R}_3[x], P(x) = (x-1)^2 Q(x) \text{ et } P(2) = 0}^{P \in F} \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_2[x], P(x) = (x-1)^2 Q(x) \text{ et } Q(2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists R \in \mathbb{R}_1[x], P(x) = (x-1)^2 (x-2) R(x) \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, P(x) = (x-1)^2 (x-2) (ax + b). \end{aligned}$$

La famille $((x-1)^2(x-2)x, (x-1)^2(x-2))$ est libre.

Donc $\boxed{((x-1)^2(x-2)x, (x-1)^2(x-2)) \text{ est une base de } F \cap G.}$

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 14

- 1) Si f est une application croissante (et non constante) alors $-f$ n'est pas croissante. L'ensemble E_1 n'est donc pas stable par multiplication par un réel.

$$\boxed{E_1 \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

- 2) En général, la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante n'est pas monotone. Considérons par exemple les applications f_1 et f_2 définies pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f_1(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les fonctions f_1 et f_2 sont respectivement croissante et décroissante.

Pourtant, $f_1(x) + f_2(x) = |x|$.

L'ensemble E_2 n'est donc pas stable par somme.

$$\boxed{E_2 \text{ n'est pas un espace vectoriel.}}$$

- 3) Justifions que E_3 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

- L'ensemble E_3 n'est pas vide. Par exemple, l'application nulle $\theta : x \in \mathbb{R} \mapsto 0 \in \mathbb{R}$ appartient à E .

La fonction θ est constante (donc croissante) et vérifie $\theta = \theta - \theta$. $\theta \in E_3$.

- Soit $(\varphi, \psi) \in E_3^2$. Il existe donc f_1, g_1, f_2 et g_2 quatre applications croissantes sur \mathbb{R} avec

$$\varphi = f_1 - g_1 \quad \text{et} \quad \psi = f_2 - g_2.$$

Ainsi,

$$\varphi + \psi = (f_1 + f_2) - (g_1 + g_2).$$

Comme $f_1 + f_2$ et $g_1 + g_2$ restent croissantes, $\varphi + \psi \in E_3$. E_3 est stable par somme.

- Soient $\varphi \in E_3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe donc f et g deux applications croissantes sur \mathbb{R} telles que $\varphi = f - g$. Distinguons deux cas.
Si $\lambda \geq 0$, λf et λg sont croissantes. $\lambda\varphi = (\lambda f) - (\lambda g)$ appartient donc à E_3 .
Si $\lambda \leq 0$, λf et λg sont décroissantes. $-\lambda f$ et $-\lambda g$ deviennent croissantes et

$$\lambda\varphi = (-\lambda g) - (-\lambda f) \in E_3.$$

E_3 est stable par multiplication par un réel.

E_3 est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, E_3 est un espace vectoriel.

Exemples de suites récurrentes

11

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Donner une expression explicite du terme de rang n de la suite u définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^3.$$

Exercice 2 Considérons la suite u définie par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}.$$

En étudiant la somme $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2)$, donner une expression explicite de u_n .

Exercice 3 * On définit une suite u par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n - n + 2.$$

- 1) Déterminer la valeur de $\lambda \in \mathbb{R}$ afin que la suite v de terme général $v_n = u_n - \lambda n$ soit une suite arithmético-géométrique.
- 2) En déduire une expression explicite de v_n , puis de u_n .

Exercice 4 * On considère la suite u définie par

$$u_0 \in [0,1] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4u_n(1 - u_n).$$

- 1) À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, démontrer l'existence d'un réel θ tel que $u_0 = \sin^2(\theta)$.
- 2) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sin^2(2^n \theta)$.

Exercice 5 Une suite homographique

Considérons la suite u définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4}.$$

- 1) Vérifier que u_n est bien défini pour toute valeur entière positive de n .
- 2) a) Déterminer les deux solutions α et β de l'équation $x = \frac{2x + 3}{x + 4}$. On impose $\alpha > \beta$.
 b) Vérifier que la suite v de terme général $v_n = \frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}$ est géométrique.
- 3) En déduire une expression simple de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 * Puissances d'une matrice et suite arithmético-géométrique

Pour tout réel λ , on définit la matrice

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 - 2\lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1 - 2\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1 - 2\lambda \end{bmatrix}.$$

- 1) Prouver que $A(\lambda)A(\mu) = A(\lambda + \mu - 3\lambda\mu)$ pour tous réels λ et μ .
- 2) Soit λ un réel fixé. On définit la suite u par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \lambda + (1 - 3\lambda)u_n.$$

- a) Justifier que $A(\lambda)^n = A(u_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
- b) Donner une expression explicite du terme de rang n de u .
- c) En déduire une expression des puissances de $A(\lambda)$.

Exercice 7 ** Suites récurrentes d'ordre 2

- 1) Déterminer une expression explicite du terme de rang n de la suite u définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n.$$

- 2) À l'aide du résultat obtenu, en faire de même pour la suite v définie par

$$v_0 = v_1 = e \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{v_{n+1}^4}{v_n}.$$

Exercice 8 *** Suite de Fibonacci, formule de Binet

Considérons la suite définie par

$$F_0 = F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1) Déterminer deux réels φ et ψ tels que

$$\varphi \geq \psi \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}).$$

2) a) Préciser $\varphi \cdot \psi$ et $\varphi + \psi$.

b) En déduire que $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Exprimer $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} F_k$ en termes de F_{2n+2} .

 **Exercices axés sur le raisonnement**

Exercice 9 Soit u une suite à termes strictement positifs.

1) Montrer que si u est géométrique, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{u_{n+1}u_{n-1}}$.

2) Étudier la réciproque.

Exercice 10 * Étude d'une équation de type Pell-Fermat

Considérons l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid a^2 - 8b^2 = 1\}.$$

On définit ensuite les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 8b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases}$$

1) À l'aide d'une récurrence, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n + \sqrt{8}b_n = (3 + \sqrt{8})^n \quad \text{et} \quad a_n - \sqrt{8}b_n = (3 - \sqrt{8})^n.$$

2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a_n, b_n) \in \mathcal{E}$.

3) Justifier que

$$a_n = \frac{1}{2} \left((3 + \sqrt{8})^n + (3 - \sqrt{8})^n \right).$$

En déduire que l'ensemble \mathcal{E} est un ensemble infini.

4) a) En revenant à la définition de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = 6a_{n+1} - a_n.$$

b) En utilisant la relation précédente, écrire en Python une fonction qui prenne en argument un entier n et qui calcule a_n .

c) Retrouver l'expression de a_n obtenue à la question 2 en utilisant les résultats du cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Exercice 11 ** Étude d'un crédit

Un crédit (immobilier, à la consommation...) est caractérisé par :

- un montant emprunté, le *capital* (noté C_0);
- une *durée* d'emprunt décomposée en plusieurs périodes (dans la suite, on considère un crédit dont le remboursement s'étale sur n mois);
- un *taux d'intérêt* mensuel (noté q , supposé fixe);
- une *mensualité* (notée m), c'est-à-dire une somme dont l'emprunteur doit s'acquitter tous les mois.

En général, la banque fournit un tableau d'amortissement, c'est-à-dire un échéancier qui indique, pour chaque mois, le montant restant à rembourser et la mensualité. Notamment, il précise la répartition de la mensualité entre le remboursement du capital et les intérêts payés à la banque.

Voici un exemple pour $C_0 = 20\,000$ euros, $n = 24$ (2 ans) et $q = 0,5\%$.

Nous verrons que ces conditions imposent des mensualités fixes de $m = 886,41$ euros par mois.

Chaque mois, l'emprunteur s'acquitte de sa mensualité composée de deux parties :

- La première partie paye les intérêts. Elle correspond à q fois le montant restant. Par exemple, le premier mois, les intérêts s'élèvent à $0,5\%$ de $20\,000$ euros, soit 100 euros.
- Le reste de la mensualité est utilisé pour rembourser le capital.

Pour le premier mois, cela correspond à $786,41 = 886,41 - 100$ euros. Il reste alors un montant de $20\,000 - 786,41 = 19\,213,59$ euros à rembourser.

Mois i	Capital restant à rembourser à l'issue du mois i	Mensualité de 886,41 euros	
		Intérêt	Capital
0	20 000,00	0,00	0,00
1	19 213,59	100,00	786,41
2	18 423,24	96,07	790,34
3	17 628,95	88,14	798,27
⋮	⋮	⋮	⋮
22	1759,62	13,16	873,25
23	882,00	8,80	877,61
24	0	4,41	882,00

A. Calcul des mensualités

L'objectif de cette partie est de calculer les mensualités qui devront être payées par l'emprunteur en fonction de la durée du crédit (n mois), du capital emprunté C_0 et du taux mensuel q .

Dans la suite, on note C_i le montant restant à rembourser au i -ème mois.

1) Préciser C_n .

2) Justifier que $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $C_{i+1} = (1+q)C_i - m$.

3) On pose, pour tout indice i , $V_i = C_i - \frac{m}{q}$.

a) Justifier que $(V_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ suit une progression géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire une expression de C_i pour tout indice i .

c) Conclure en prouvant l'identité
$$m = \frac{q C_0}{1 - \frac{1}{(1+q)^n}}$$
.

B. Calcul du tableau d'amortissement à l'aide de Python

Compléter la fonction Python suivante qui prend en entrée le capital initial C_0 , la durée n (en mois) et le taux q (en %) et renvoie le tableau d'amortissement. La première colonne affiche le mois, la deuxième le montant restant, la troisième les intérêts et la quatrième (et dernière colonne) le reste destiné au remboursement du capital.

```
import numpy as np

def T(C_0, n, q):
    res = np.empty([n+1, 4])

    mensualité = ...
    capital, intérêt = ...

    for i in range(...):
        res[i, 0] = ...
        ...
        capital, intérêt = ...

    return tableau
```

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 12 ** On définit la suite u par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n.$$

- 1) a) Calculer $u_k + k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- b) Conjecturer une formule simple pour u_n .
- 2) Prouver cette conjecture.

Exercice 13 *** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_*^{+2}$ et soient u et v deux suites définies par

$$u_0 = a, \quad v_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{v_n u_n}.$$

Donner des expressions simples de u_n et v_n .

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Méthode 1. Conjecture et preuve par récurrence.

On observe les premières valeurs de la suite :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = u_0^3 = 2^3, \quad u_2 = u_1^3 = (2^3)^3 = 2^{3^2}, \quad u_3 = u_2^3 = (2^{3^2})^3 = 2^{3^2 \cdot 3} = 2^{3^3} \dots$$

On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^{3^n}$.

On démontre cette formule par récurrence.

Méthode 2. Usage d'une suite auxiliaire.

Par récurrence immédiate, la suite u est strictement positive. On peut donc introduire la suite v définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \ln(u_n).$$

De cette façon, $v_0 = \ln(2)$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n^3) = 3 \ln(u_n) = 3 v_n.$$

La suite v est donc une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $\ln(2)$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \ln(2)3^n.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \exp(v_n) = \exp(\ln(2)3^n), \quad \text{donc} \quad \boxed{u_n = 2^{3^n}}.$$

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons la somme proposée de deux manières différentes.

- D'une part, on reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_n^2 - u_0^2 = u_n^2 - 1.$$

- D'autre part, on utilise la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_{k+1}^2 = 1 + u_k^2, \quad \text{donc} \quad u_{k+1}^2 - u_k^2 = 1.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

D'où $u_n^2 - 1 = n$, donc $u_n^2 = n + 1$.

Cette dernière égalité est vérifiée pour $n = 0$.

Comme la suite est à termes positifs, on en conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sqrt{n + 1}.$$

Exercice 3

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \lambda(n+1) \\ &= (2u_n - n + 2) - \lambda(n+1) && \left. \begin{array}{l} \text{relation de récurrence de } u \\ \text{on réorganise les termes} \end{array} \right\} \\ &= 2u_n - n(\lambda+1) + (2-\lambda) \\ &= 2(v_n + \lambda n) - n(\lambda+1) + (2-\lambda) && \left. \begin{array}{l} \text{par définition, } v_n = u_n - \lambda n \end{array} \right\} \\ &= 2v_n - n(1-\lambda) + (2-\lambda). \end{aligned}$$

Avec $\lambda = 1$, on obtient donc que pour tout entier positif n , $v_{n+1} = 2v_n + 1$. La suite v est donc arithmético-géométrique. Précisons que dans ce cas, $v_0 = u_0 = 0$.

2) Déterminons le « point fixe » associé à la suite v :

$$\ell = 2\ell + 1 \Leftrightarrow \ell = -1.$$

On considère alors la suite w définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = v_n - \ell = v_n + 1.$$

Vérifions que w est une suite géométrique de raison 2. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$w_{n+1} = v_{n+1} + 1 = (2v_n + 1) + 1 = 2(v_n + 1) = 2w_n.$$

Ainsi, $w_n = w_0 2^n$, donc $v_n + 1 = (v_0 + 1) \cdot 2^n$, donc $v_n = 2^n - 1$.

Finalement, pour $n \in \mathbb{N}$, comme $u_n = v_n + n$, $u_n = 2^n + n - 1$.

Exercice 4

1) La fonction \sin^2 est continue sur \mathbb{R} avec $\sin^2(0) = 0$ et $\sin^2(\pi/2) = 1$.

Rappelons que $u_0 \in [0, 1]$. D'après le [théorème des valeurs intermédiaires](#), il existe un point $\theta \in [0, \pi/2] \subset \mathbb{R}$ tel que

$$u_0 = \sin^2(\theta).$$

2) Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : u_n = \sin^2(2^n \theta)$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** D'après la question précédente, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par les *formules de sommation* des fonctions trigonométriques,

$$\sin(2^{n+1}\theta) = \sin(2^n\theta + 2^n\theta) = 2 \sin(2^n\theta) \cos(2^n\theta).$$

On en déduit par l'hypothèse de récurrence que

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 4 u_n (1 - u_n) \\ &= 4 \sin^2(2^n\theta) (1 - \sin^2(2^n\theta)) && \left. \begin{array}{l} \text{par hypothèse de récurrence} \\ \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \end{array} \right\} \\ &= 4 \sin^2(2^n\theta) \cos^2(2^n\theta) \\ &= (2 \sin(2^n\theta) \cos(2^n\theta))^2 \\ &= \sin^2(2^{n+1}\theta). \quad \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

• **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, soit

$$u_n = \sin^2(2^n \theta).$$

Exercice 5 Une suite homographique

Remarque

Il s'agit d'un exemple de résolution d'une récurrence dite homographique. La résolution est similaire à celle utilisée classiquement pour les suites arithmético-géométriques, avec l'introduction d'une seconde suite géométrique.

1) Il y a potentiellement un problème de définition de la suite u s'il existe un entier n tel que $u_n = -4$. Dans ce cas, on ne peut calculer u_{n+1} . Or, ce cas n'est pas possible. Par exemple, on démontre par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : u_n \text{ est bien défini et } u_n \geq 0,$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) L'équation est équivalente à une équation polynomiale du second degré (car $x = -4$ n'en est pas solution) :

$$x = \frac{2x+3}{x+4} \Leftrightarrow x(x+4) = 2x+3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0.$$

On trouve les deux solutions $\alpha = 1$ et $\beta = -3$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$;

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} \\
 &= \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3} \\
 &= \frac{(2u_n+3)-(u_n+4)}{(2u_n+3)+3(u_n+4)} \\
 &= \frac{u_n-1}{5u_n+15} = \frac{1}{5} \cdot \frac{u_n-1}{u_n+3} = \frac{1}{5} v_n.
 \end{aligned}$$

relation de récurrence sur u
 on multiplie par $(u_n + 4)$ le dénominateur et le numérateur

La suite v est géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

Remarque

Avez-vous pensé à vérifier que la suite v est bien définie?

Comme pour la première question, il y a un problème de définition s'il existe un entier n tel que $u_n = \beta = -3$. De nouveau, u est positive, un tel cas ne peut se produire.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$;

$$\begin{aligned}
 v_n &= \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \\
 \Leftrightarrow (u_n + 3)v_n &= u_n - 1 \\
 \Leftrightarrow u_n v_n - u_n &= -1 - 3v_n \\
 \Leftrightarrow u_n(v_n - 1) &= -(1 + 3v_n) \\
 \Leftrightarrow u_n &= \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}.
 \end{aligned}$$

multiplication par $u_n + 3$
 on «isole» le terme u_n
 division par $v_n - 1$

Comme $u_0 = 0$, $v_0 = -1/3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^n}$.

De ce fait

$$u_n = \frac{1 + 3 \cdot \frac{-1}{3} \cdot 5^{-n}}{1 - \frac{-1}{3} \cdot 5^{-n}}.$$

Après simplifications,

$$u_n = \frac{3(5^n - 1)}{3 \cdot 5^n + 1}.$$

Exercice 6 Puissances d'une matrice et suite arithmético-géométrique

1) Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Écrivons :

$$A(\lambda) A(\mu) = \begin{bmatrix} 1-2\lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & 1-2\lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & 1-2\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-2\mu & \mu & \mu \\ \mu & 1-2\mu & \mu \\ \mu & \mu & 1-2\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix},$$

en posant

$$a = (1 - 2\lambda)(1 - 2\mu) + 2\lambda\mu = 1 - 2(\lambda + \mu - 3\lambda\mu)$$

$$\text{et } b = (1 - 2\lambda)\mu + (1 - 2\mu)\lambda + \mu\lambda = \lambda + \mu - 3\lambda\mu.$$

Ceci prouve

$$A(\lambda)A(\mu) = A(\lambda + \mu - 3\lambda\mu).$$

2) a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé. De nouveau, procédons par récurrence sur la proposition

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) : (A(\lambda))^n = A(u_n).$$

• **Initialisation.** Comme $u_0 = 0$, $(A(\lambda))^0 = I_3 = A(0) = A(u_0)$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n + 1)$.

$$(A(\lambda))^{n+1} = (A(\lambda))^n A(\lambda) \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} A(u_n) A(\lambda) \stackrel{q.1}{=} A(u_n + \lambda - 3\lambda u_n) = A(u_{n+1}).$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

• **Conclusion.** On a prouvé que $\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, (A(\lambda))^n = A(u_n).$

b) La suite est arithmético-géométrique. On trouve pour point fixe associé $1/3$.

Vérifions que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 1/3$, est géométrique de raison $1 - 3\lambda$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{3} = \lambda + (1 - 3\lambda)u_n - \frac{1}{3} = (1 - 3\lambda)\left(u_n - \frac{1}{3}\right) = (1 - 3\lambda)v_n.$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien géométrique. On en déduit que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + \frac{1}{3} = (1 - 3\lambda)^n v_0 + \frac{1}{3} = (1 - 3\lambda)^n \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(1 - (1 - 3\lambda)^n).$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $1 - 2u_n = 1 - \frac{2}{3}(1 - (1 - 3\lambda)^n) = \frac{1}{3}(2(1 - 3\lambda)^n + 1)$. D'où

$$(A(\lambda))^n = A(u_n) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(1 - 3\lambda)^n + 1 & 1 - (1 - 3\lambda)^n & 1 - (1 - 3\lambda)^n \\ 1 - (1 - 3\lambda)^n & 2(1 - 3\lambda)^n + 1 & 1 - (1 - 3\lambda)^n \\ 1 - (1 - 3\lambda)^n & 1 - (1 - 3\lambda)^n & 2(1 - 3\lambda)^n + 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 7 Suites récurrentes d'ordre 2

- 1) L'équation caractéristique associée est $x^2 = 4x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 12 = 3 \cdot 2^2 > 0$. Il existe donc deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = 2 - \sqrt{3}.$$

D'après le *théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2*, il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

Déterminons ces deux réels grâce aux conditions initiales $u_0 = u_1 = 1$.

$$\begin{cases} u_0 = \lambda x_1^0 + \mu x_2^0 \\ u_1 = \lambda x_1^1 + \mu x_2^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda x_1 + \mu x_2. \end{cases}$$

En effectuant $L_1 \leftarrow x_1 L_1 - L_2$, on obtient

$$x_1 - 1 = \mu(x_1 - x_2) \quad \Leftrightarrow \quad \mu = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{6}.$$

Puis, avec $L_1 \leftarrow x_2 L_1 - L_2$, on trouve

$$x_2 - 1 = \lambda(x_2 - x_1), \quad \text{donc} \quad \lambda = \frac{1 - \sqrt{3}}{-2\sqrt{3}} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6}.$$

Concluons : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} (2 + \sqrt{3})^n + \frac{3 + \sqrt{3}}{6} (2 - \sqrt{3})^n.$$

- 2) On démontre que la suite v est bien définie et strictement positive à l'aide d'une récurrence sur la proposition

$$\text{pour } n \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(n) : v_n > 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} > 0.$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \ln(v_n)$. Ainsi,

$$u_0 = \ln(v_0) = \ln(e) = 1 \quad \text{et} \quad u_1 = 1.$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, $\ln(v_{n+2}) = \ln \frac{v_{n+1}^4}{v_n} = 4 \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n)$.

Autrement dit,

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - u_n.$$

On retrouve la suite u de la question précédente. En conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \exp(u_n).$$

Exercice 8 Suite de Fibonacci, formule de Binet

1) La suite F est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est

$$x^2 = x + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5 > 0$. Il existe deux racines réelles distinctes :

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Il existe alors deux réels λ et μ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \lambda\varphi^n + \mu\psi^n$.

À l'aide des conditions initiales $F_0 = F_1 = 1$,

$$\begin{cases} F_0 = \lambda\varphi^0 + \mu\psi^0 \\ F_1 = \lambda\varphi^1 + \mu\psi^1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 1 = \lambda\varphi + \mu\psi \end{cases}.$$

En effectuant $L_1 \leftarrow \varphi L_1 - L_2$, on obtient $\varphi - 1 = \mu(\varphi - \psi)$, donc $\mu = \frac{\varphi - 1}{\varphi - \psi}$.

Or $\varphi - \psi = \sqrt{5}$ et $\varphi - 1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = -\psi$.

On obtient $\mu = -\frac{\psi}{\sqrt{5}}$, puis, $\lambda = 1 - \mu = \frac{\sqrt{5} + \psi}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi}{\sqrt{5}}$.

En résumé, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{\varphi}{\sqrt{5}} \cdot \varphi^n - \frac{\psi}{\sqrt{5}} \cdot \psi^n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}).$$

2) a) Vérifier que $\varphi \cdot \psi = -1$ et $\varphi + \psi = 1$.

Remarque

Si x_1 et x_2 sont les deux racines d'une équation polynomiale de degré 2 de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

alors $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ et $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ car $a \neq 0$.

Dans notre cas, φ et ψ sont les deux racines de $x^2 - x - 1 = 0$. On retrouve bien le résultat annoncé.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$5F_n^2 = (\varphi^{n+1} - \psi^{n+1})^2 = \varphi^{2n+2} + \psi^{2n+2} - 2\varphi^{n+1}\psi^{n+1}$$

et $5F_{n-1}F_{n+1} = (\varphi^n - \psi^n)(\varphi^{n+2} - \psi^{n+2})$
 $= \varphi^{2n+2} + \psi^{2n+2} - \varphi^n\psi^{n+2} - \varphi^{n+2}\psi^n.$

Par différence,

$$\begin{aligned} 5(F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1}) &= \varphi^n \psi^{n+2} + \varphi^{n+2} \psi^n - 2\varphi^{n+1} \psi^{n+1} \\ &= \varphi^n \psi^n (\psi^2 + \varphi^2 - 2\varphi\psi) \\ &= (\varphi\psi)^n (\varphi - \psi)^2 = (-1)^n \cdot 5. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n.$$

3) Dans un premier temps,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varphi^{k+1} &= \varphi \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varphi^k 1^{n+1-k} \\ &= \varphi (1 + \varphi)^{n+1} \\ &= \varphi \cdot \varphi^{2n+2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{formule du binôme de Newton} \\ \varphi^2 = \varphi + 1 \end{array} \right\}$$

et de même avec ψ . Par linéarité de la somme,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} F_k &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \varphi^{k+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \psi^{k+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \varphi^{(2n+2)+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \psi^{(2n+2)+1}. \end{aligned}$$

En reprenant l'expression de la question 1,

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} F_k = F_{2n+2}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 9

- 1) Soit q la raison de u . Comme u est une suite strictement positive $u_0 > 0$ et $q > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$; alors

$$\sqrt{u_{n+1}u_{n-1}} = \sqrt{(u_0 q^{n+1}) \cdot (u_0 q^{n-1})} = \sqrt{u_0^2 (q^n)^2} = u_0 q^n = u_n.$$

- 2) La réciproque est vraie. Posons $q = u_1/u_0 > 0$. Justifions par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : u_n = u_0 q^n \quad \text{et} \quad u_{n-1} = q^{n-1} u_0$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• **Initialisation.** Comme $u_0 = u_0 q^0$ et $u_1 = q u_0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n + 1)$.
L'hypothèse sur la suite u se réécrit par

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_{n-1}} = \frac{(u_0 q^n)^2}{u_0 q^{n-1}} = u_0 q^{n+1}.$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

• **Conclusion.** La suite u est géométrique.

Exercice 10 Étude d'une équation de type Pell-Fermat

1) Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : a_n + \sqrt{8}b_n = (3 + \sqrt{8})^n.$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** D'une part, $a_0 + \sqrt{8}b_0 = 1$. D'autre part, $(3 + \sqrt{8})^0 = 1$. Il y a donc égalité et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} (3 + \sqrt{8})^{n+1} &= (3 + \sqrt{8})^n (3 + \sqrt{8}) \\ &= (a_n + \sqrt{8}b_n)(3 + \sqrt{8}) && \left. \begin{array}{l} \mathcal{P}(n) \\ \text{on développe} \end{array} \right\} \\ &= 3a_n + \sqrt{8}a_n + 3\sqrt{8}b_n + 8b_n && \left. \begin{array}{l} \text{on réorganise les termes} \\ \text{par définition des suites } a \text{ et } b \end{array} \right\} \\ &= (3a_n + 8b_n) + \sqrt{8}(a_n + 3b_n) \\ &= a_{n+1} + \sqrt{8}b_{n+1}. \end{aligned}$$

• **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

On procède de même pour établir $a_n - \sqrt{8}b_n = (3 - \sqrt{8})^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Vérifier par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n appartiennent à \mathbb{N} .

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_n^2 - 8b_n^2 &= (a_n - \sqrt{8}b_n)(a_n + \sqrt{8}b_n) && \left. \begin{array}{l} \text{d'après la question précédente} \\ (3 - \sqrt{8})(3 + \sqrt{8}) = 3^2 - 8 = 1 \end{array} \right\} \\ &= (3 - \sqrt{8})^n (3 + \sqrt{8})^n \\ &= \left((3 - \sqrt{8})(3 + \sqrt{8}) \right)^n \\ &= 1. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$(a_n, b_n) \in \mathcal{E}.$$

3) On a vu que

$$a_n - \sqrt{8}b_n = (3 - \sqrt{8})^n \quad \text{et} \quad a_n + \sqrt{8}b_n = (3 + \sqrt{8})^n$$

En sommant ces deux relations, $2a_n = (3 - \sqrt{8})^n + (3 + \sqrt{8})^n$.

D'où le résultat.

- La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Ainsi,

l'ensemble \mathcal{E} est un ensemble infini.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 3a_{n+1} + 8b_{n+1} \\ &= 3a_{n+1} + 8(a_n + 3b_n) && \left. \begin{array}{l} \text{définition des suites } (a_n)_n \text{ et } (b_n)_n \\ \text{car } 8b_n = a_{n+1} - 3a_n \end{array} \right\} \\ &= 6a_{n+1} - a_n. \end{aligned}$$

b) On peut par exemple partir du couple (a_0, a_1) et le mettre à jour n fois de suite jusqu'à aboutir au couple (a_n, a_{n+1}) , pour finalement renvoyer a_n .

```
def a(n):
    u, v = 1, 3 # a(0) et a(1)
    for _ in range(n):
        u, v = v, 6 * v - u
    return u
```

c) L'équation caractéristique est $x^2 = 6x - 1$. Le discriminant est strictement positif. On trouve les deux racines

$$x_1 = 3 + \sqrt{8} \quad \text{et} \quad x_2 = 3 - \sqrt{8}.$$

D'après le *théorème sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2*, il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

De plus, $a_0 = 1$ et $a_1 = 3a_0 + 8b_0 = 3$. Ces deux équations permettent de préciser λ et μ :

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda x_1 + \mu x_2 = 3 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \lambda = \mu = \frac{1}{2}.$$

Finalement, pour tout entier positif n ,

$$a_n = \frac{1}{2} \left((3 + \sqrt{8})^n + (3 - \sqrt{8})^n \right).$$

Exercice 11 Étude d'un crédit

• Partie A

1) À la fin du crédit, il ne reste plus rien à payer : $C_n = 0$.

2) Au mois i , il reste C_i euros à rembourser.

- Les intérêts s'élèvent à qC_i .
- À cette étape, le capital est donc remboursé à hauteur de $m - qC_i$.

Par conséquent, au mois suivant, il reste à rembourser

$$C_{i+1} = C_i - (m - qC_i) = (1 + q)C_i - m.$$

3) a) Pour tout indice $i \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$,

$$V_{i+1} = C_{i+1} - \frac{m}{q} = (1 + q)C_i - m - \frac{m}{q} = (1 + q)\left(C_i - \frac{m}{q}\right) = (1 + q)V_i.$$

D'où une progression géométrique de raison $1 + q$.

b) Par récurrence immédiate, on a pour tout indice $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$V_i = (1 + q)^i V_0 \quad \text{i.e.} \quad C_i = (1 + q)^i \left(C_0 - \frac{m}{q}\right) + \frac{m}{q}.$$

c) En utilisant C_n , il vient $0 = C_n = (1 + q)^n \left(C_0 - \frac{m}{q}\right) + \frac{m}{q}$.

En isolant le terme m , on obtient

$$(1 + q)^n C_0 - \frac{m}{q} \left((1 + q)^n - 1 \right) = 0 \quad \text{donc} \quad m = \frac{q(1 + q)^n C_0}{(1 + q)^n - 1} = \frac{q C_0}{1 - \frac{1}{(1 + q)^n}}.$$

Résumons par un tableau.

Mois i	Capital restant à rembourser à l'issue du mois i	Mensualité de 886,41 euros	
		Intérêt	Capital
0	C_0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	
$i - 1$	C_{i-1}	*	*
i	C_i	qC_{i-1}	$m - qC_{i-1}$
\vdots	\vdots	\vdots	
n	0	*	*

Remarque

Pour être complet, le taux affiché par les banques est le taux nominal annuel. Il est proportionnel au taux mensuel via $t = 12q$.

- **Partie B** Voici un programme possible.

```
import numpy as np

def T(C_0, n, q):
    res = np.empty([n+1, 4])

    mensualité = (q * C_0) / (1 - 1 / (1 + q)**n)
    capital, intérêt = C_0, 0

    for i in range(n+1):
        res[i, 0] = i
        res[i, 1] = capital
        res[i, 2] = intérêt
        res[i, 3] = mensualité - intérêt

        capital, intérêt = (1 + q) * capital - mensualité, q * capital

    return res
```

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 12

- 1) a) Vérifier que

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ u_3 = 6 \\ u_4 = 12 \end{cases}, \text{ donc } \begin{cases} u_0 + 0 = 0 \\ u_1 + 1 = 1 \\ u_2 + 2 = 4 \\ u_3 + 3 = 9 \\ u_4 + 4 = 16. \end{cases}$$

- b) On reconnaît les premiers carrés d'entiers, on conjecture que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n + n = n^2 \quad \text{et donc} \quad u_n = n^2 - n.$$

C'est-à-dire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n - 1)$.

- 2) Démontrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : u_n = n(n - 1), \quad u_{n+1} = (n + 1)n \quad \text{et} \quad u_{n+2} = (n + 2)(n + 1)$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** On a

$$u_0 = 0 = 0 \cdot (0 - 1), \quad u_1 = 0 = (0 + 1) \cdot 0 \quad \text{et} \quad u_2 = 2 = (0 + 2) \cdot (0 + 1).$$

Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n + 1)$. Notons qu'il suffit de justifier que $u_{n+3} = (n + 3)(n + 2)$. D'après la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned} u_{n+3} &= 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n \\ &= 3(n+2)(n+1) - 3(n+1)n + n(n-1) && \left. \begin{array}{l} \text{d'après } \mathcal{P}(n) \\ \text{on développe} \end{array} \right\} \\ &= (3n^2 + 9n + 6) - (3n^2 + 3n) + (n^2 - n) \\ &= n^2 + 5n + 6 \\ &= (n+3)(n+2). \end{aligned}$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

• **Conclusion.**

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n(n-1).}$$

Exercice 13

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = (u_n)^{1/2} \cdot (v_n)^{1/4} \\ v_{n+1} = (v_n)^{1/2} \cdot (u_n)^{1/4}. \end{cases}$$

Introduisons les suites a et b définies par les termes généraux

$$a_n = \ln(u_n) \quad \text{et} \quad b_n = \ln(v_n).$$

Précisons que ces suites sont bien définies car les suites u et v sont strictement positives. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left((u_n)^{1/2} \cdot (v_n)^{1/4}\right) = \frac{1}{2} \ln(u_n) + \frac{1}{4} \ln(v_n) \\ b_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln\left((v_n)^{1/2} \cdot (u_n)^{1/4}\right) = \frac{1}{2} \ln(v_n) + \frac{1}{4} \ln(u_n). \end{cases}$$

On obtient

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + \frac{1}{4} b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{4} a_n.$$

En reprenant le raisonnement de l'exercice 10, la suite a est une suite récurrente linéaire d'ordre 2,

$$a_{n+2} = a_{n+1} - \frac{3}{16} a_n.$$

L'équation caractéristique ($x^2 = x - 3/16$) a deux solutions ($1/4$ et $3/4$). On trouve avec les conditions initiales $a_0 = \ln(a)$ et $a_1 = \ln(a)/2 + \ln(b)/4$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) \ln(a) + \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) \ln(b).$$

Pour b_n , il suffit d'échanger a et b . Donc

$$b_n = \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) \ln(a) + \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) \ln(b).$$

Alors,

$$u_n = a^{1/2 \cdot (3/4)^n + 1/2 \cdot (1/4)^n} \cdot b^{1/2 \cdot (3/4)^n - 1/2 \cdot (1/4)^n}$$

puis

$$v_n = a^{1/2 \cdot (3/4)^n - 1/2 \cdot (1/4)^n} \cdot b^{1/2 \cdot (3/4)^n + 1/2 \cdot (1/4)^n}.$$

Étude globale des suites

12

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Étudier les variations des suites définies par les relations ci-dessous :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{n^2 + 1}{2n^2}; \quad v_n = n!e^{-n}; \quad \left\{ \begin{array}{l} w_0 = -5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = w_n^2 - w_n + 1. \end{array} \right.$$

Exercice 2 *Limite pour des suites et sommes géométriques*

- 1) Préciser à quelle condition sur $q \in \mathbb{R}$ la suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- 2) Pour quelles valeurs de q la suite de terme général $\sum_{k=0}^n q^k$ converge-t-elle vers une limite finie ?

On précisera la valeur de la limite.

Exercice 3 * *Exemple de suites adjacentes*

Justifier que les suites u et v définies par les relations ci-dessous sont adjacentes :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

Exercice 4 *Calculs de limites*

Les suites dont le terme général est donné ci-dessous (avec $n \in \mathbb{N}$ ou \mathbb{N}^* , ou encore $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ suivant les cas) sont-elles convergentes ?

Dans le cas où elles convergent, préciser leur limite.

$$(*) \quad 1) \quad \frac{n^2 + 7}{n^2 + n + 1}$$

$$2) \quad \frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$$

$$3) \quad \sum_{k=0}^n \sqrt{k}$$

$$4) \quad \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$5) \quad \frac{(-1)^n + 3^n - 2^n}{3^{n+2}}$$

$$6) \quad e^{5n} - e^{7n}$$

$$7) \quad \frac{n^3}{3^n}$$

$$8) \quad \frac{e^{n-7}}{n^4 + 2n^3 + 2}$$

$$9) \quad \binom{n}{2} e^{-n}$$

$$(**) \quad 10) \quad \frac{\cos(n^2 + 2021)}{\sqrt{n}}$$

$$11) \quad 1 + \frac{(-1)^n \cos(12n^4)}{n^3}$$

$$12) \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$13) \quad \frac{2^n}{\sqrt{n!}}$$

$$14) \quad \frac{3^{\ln(n)}}{n}$$

$$15) \quad \left(\sum_{k=1}^n k \right) e^{-n^2}$$

(***) Pour tout x réel, on note $[x]$ la partie entière de x .

$$16) \quad \ln(n^n) e^{-\sqrt{n}}$$

$$17) \quad \frac{[\pi n]}{n}$$

$$18) \quad \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) / \left(\sum_{k=0}^n k^2 \right)$$

$$19) \quad \frac{n!}{n^n}$$

$$20) \quad \frac{\binom{2n}{n}}{8^n}$$

 **Exercices axés sur le raisonnement**

Exercice 5 * On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{2p-1}.$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < \frac{n}{2n+1}$.

2) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 6 ** Moyennes de Cesàro

Soit u une suite réelle. Pour tout entier strictement positif n , on pose

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}.$$

- 1) On suppose la suite u croissante et convergente vers une limite finie.
 - a) Justifier la croissance de la suite v , puis la convergence vers une limite finie.
 - b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \geq v_n \quad \text{et} \quad v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

- c) En déduire que u et v convergent vers une limite commune.
 - d) Réciproquement, si u est croissante et v convergente, montrer que u converge.
- 2) *Application.*
Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $(a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n \geq 0.$$

Montrer que $(a_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 7 ** Suites adjacentes et approximations

On considère la suite S de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{où } n \in \mathbb{N}.$$

On pose de plus $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

- 1) Justifier que les suites u et v sont adjacentes.
- 2) En déduire la convergence de la suite S vers une limite finie ℓ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}.$$

On admet que la limite ℓ vaut $\pi/4$.

- 3) a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{2n}.$$

- b) En déduire un programme Python qui affiche une approximation de π à 10^{-5} près.

Exercice 8 ** Suites croisées

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 1$. On définit les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$x_0 = a, \quad y_0 = b \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{y_n}) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \sqrt{x_n}).$$

- 1) Justifier que $x_n > y_n > 1$ pour tout entier positif n
- 2) En déduire la décroissance de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 3) Montrer en exhibant un contre-exemple que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas nécessairement décroissante.
- 4) Montrer que les deux suites convergent vers une limite commune.

Exercice 9 ** Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on définit la suite $(u(\alpha)_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(\alpha)_n = \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^k).$$

- 1) Justifier que si $\alpha \geq 1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(\alpha)_n \geq 2^{n+1}.$$

En déduire le comportement de $u(\alpha)_n$ lorsque n tend vers l'infini.

- 2) On suppose dorénavant que $\alpha \in [0, 1[$.
 - a) En utilisant l'inégalité $1 + x \leq e^x$, valable pour $x \in \mathbb{R}$, majorer $(u(\alpha)_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
 - b) En déduire la convergence vers une limite finie de la suite. Notons ℓ_α la limite.
- 3) Vérifier que l'application $\alpha \in [0, 1[\mapsto \ell_\alpha$ est croissante.

Exercice 10 *** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = 1, u_1 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \frac{u_n^2 + u_{n+1}^2}{u_n + u_{n+1}}.$$

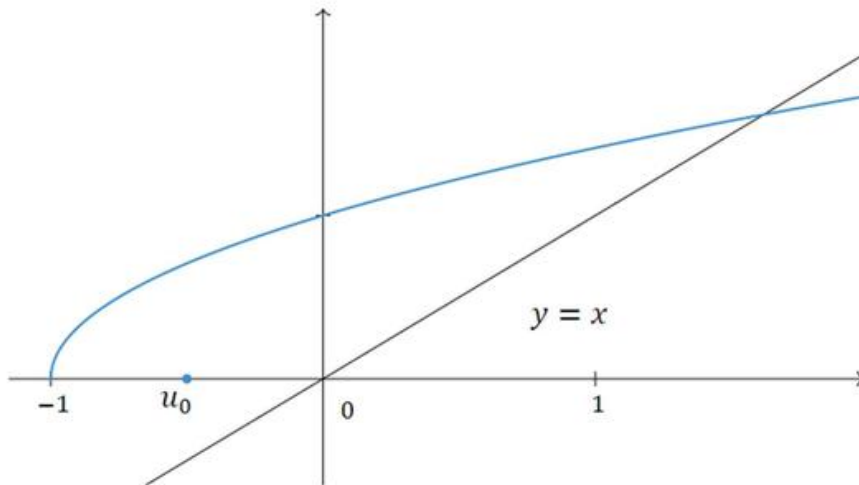
- 1) Montrer que tous les termes u_n sont bien définis, minorés par 1, et majorés par 2.
- 2) Écrire une fonction Python qui prenne en argument n et qui renvoie u_n .
- 3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le signe de $u_{n+2} - u_{n+1}$ en fonction de celui de $u_{n+1} - u_n$.
b) En déduire le signe de $u_{n+1} - u_n$ en fonction de la parité de n .
- 4) On veut montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
Pour tout entier positif n , on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
 - a) Montrer que les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et convergent vers une même limite.
 - b) Conclure.

Exercice 11 * $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante

Pour $x \in]-1, +\infty[$, posons $f(x) = \sqrt{1+x}$. On définit la suite u par

$$u_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- 1) Sur le graphique suivant, placer u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.



Conjecturer les variations et la convergence de la suite u .

- 2) a) Vérifier que l'équation $f(x) = x$ n'a qu'une solution. On note ω cette unique solution.
 b) Vérifier que ω est un majorant de la suite u et préciser les variations de u .
 c) En déduire la convergence et la limite de la suite u .
- 3) a) Vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

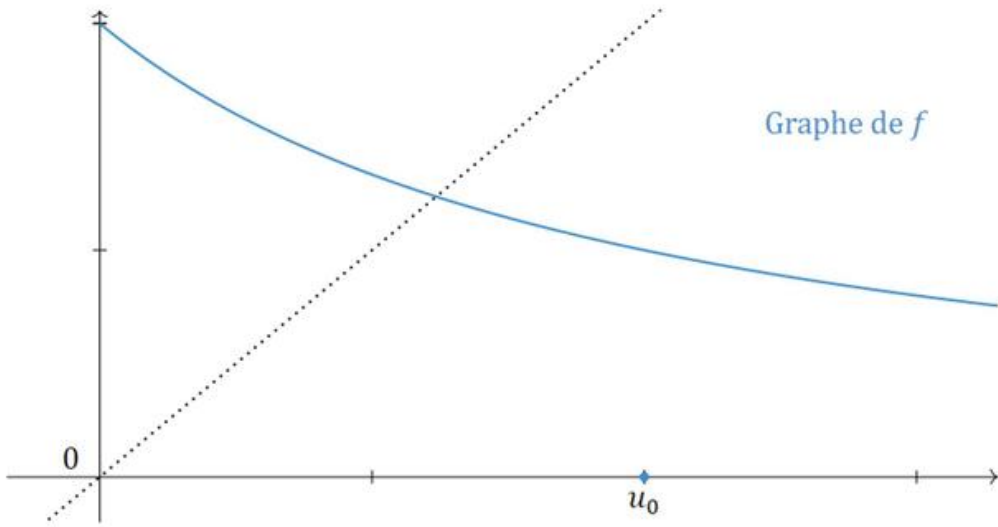
- b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \omega| \leq \frac{|u_0 - \omega|}{2^n}$.
 Retrouver le résultat de la question 2 c).

Exercice 12 ** $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, posons $f(x) = \frac{1}{1+x}$. On définit la suite u par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- 1) Sur le graphe suivant, placer u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.



Conjecturer les variations et la convergence de la suite u .

- 2) Posons de plus $h = f \circ f$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
- a) Préciser les variations de la fonction h et vérifier que, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = h(v_n) \quad \text{et} \quad w_{n+1} = h(w_n).$$

- b) En déduire les variations des suites v et w , puis la convergence de ces deux suites.
- c) En remarquant que l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$ n'admet qu'une solution, vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n.$$

- d) En déduire la convergence de la suite u .

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13 ** Vrai ou faux?

Soit u une suite.

- 1) Si u converge vers une limite finie, alors la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.
- 2) Si $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie, alors la suite u est convergente.
- 3) La suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si la suite u converge vers 0.
- 4) Si u converge vers une limite finie, alors la suite $([u_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

Rappel. $[x]$ désigne la partie entière de x .

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$;

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)^2 + 1}{2(n+1)^2} - \frac{n^2 + 1}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)^2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n^2} \right) = \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2n^2} \leq 0.$$

La suite u est décroissante.

- Comme v_n s'exprime sous forme de produits strictement positifs, on étudie plutôt le quotient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n+1)!e^{-(n+1)}}{n!e^{-n}} = (n+1)e^{-1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} > 1$.

La suite v est croissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}$; $w_{n+1} - w_n = w_n^2 - 2w_n + 1 = (w_n - 1)^2 \geq 0$.

La suite w est croissante.

Exercice 2) Limite pour des suites et sommes géométriques

- 1) • Si $|q| < 1$, alors la limite existe et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0.$$

- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

- Si $q = 1$, la suite est constante et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1.$$

- Si $q \leq -1$, la suite ne converge pas.

- 2) • Si $q = 1$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n 1^k = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

- Si $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on est en présence d'une somme géométrique. En utilisant les disjonctions de la première question, il vient

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- converge si $|q| < 1$, vers $1/(1 - q)$;
- tend vers $+\infty$ si $q > 1$;
- ne converge pas pour $q \leq -1$.

Exercice 3

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide du changement d'indice $p = k + 1$, écrivons

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \\
 &= \sum_{p=2}^{n+2} \frac{1}{p+n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{changement d'indice} \\
 &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{(2n+1) + 2(n+1) - 2(2n+1)}{2(n+1)(2n+1)} \\
 &= \frac{1}{2(n+1)(2n+1)} \geq 0.
 \end{aligned}$$

La suite u est croissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \\
 &= \frac{n(2n+1) + n(2n+2) - (2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} \\
 &= \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} \leq 0.
 \end{aligned}$$

La suite v est donc croissante.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue le changement d'indice $p = k - n$ dans la première somme.

$$v_n - u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p+n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- En conclusion, les deux suites sont adjacentes.

Remarque

À l'aide d'un encadrement de la fonction logarithme, on peut montrer que la limite commune est $\ln(2)$.

Exercice 4 *Calculs de limites*

- 1) On factorise le dénominateur et le numérateur par le terme de plus haut degré :

$$\frac{n^2 + 7}{n^2 + n + 1} = \frac{n^2 (1 + 7/n^2)}{n^2 (1 + 1/n + 1/n^2)} = \frac{1 + 7/n^2}{1 + 1/n + 1/n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{1}.$$

2) De même, $\frac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n} = \frac{1 - (-1)^n/n}{1 + (-1)^n/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{1.}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^n \sqrt{k} \geq \sqrt{n}$, donc par minoration $\boxed{\sum_{k=0}^n \sqrt{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.}$

4) On sait que $\frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{1}{2}.}$

5) On factorise le numérateur par 3^n

$$\frac{(-1)^n + 3^n - 2^n}{3^{n+2}} = \frac{3^n \left(\left(\frac{-1}{3}\right)^n + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right)}{3^{n+2}} = \frac{1 + \left(\frac{-1}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{1}{9}.}$$

6) Il vient $e^{5n} - e^{7n} = e^{7n}(e^{-2n} - 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{-\infty.}$

7) Grâce aux *croissances comparées*, on peut affirmer que $\boxed{\frac{n^3}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$

8) On applique les *croissances comparées*

$$\frac{e^{n-7}}{n^4 + 2n^3 + 2} = \frac{e^n}{n^4} \cdot \frac{e^{-7}}{1 + 2/n + 2/n^4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{+\infty.}$$

9) Les *croissances comparées* justifient $\binom{n}{2} e^{-n} = \frac{n(n-1)}{2} e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boxed{0.}$

10) Comme la fonction cosinus est minorée et majorée respectivement par -1 et 1 , on va pouvoir appliquer le *théorème d'encadrement* (car $1/\sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$).

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{-1}{\sqrt{n}} \leq \frac{\cos(n^2 + 2021)}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\cos(n^2 + 2021)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

11) De même que précédemment,

$$\left| \left(1 + \frac{(-1)^n \cos(12n^4)}{n^3} \right) - 1 \right| < \frac{1}{n^3} \quad \text{donc} \quad \boxed{1 + \frac{(-1)^n \cos(12n^4)}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.}$$

12) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

13) Par les croissances comparées, $\frac{4^n}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Puis par composition avec la racine carrée $\frac{2^n}{\sqrt{n!}} = \left(\frac{4^n}{n!}\right)^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

14) On a par définition de la puissance $\frac{3^{\ln(n)}}{n} = \frac{e^{\ln(3)\ln(n)}}{n} = \frac{n^{\ln(3)}}{n} = n^{\ln(3)-1}$.

Or, on sait que $3 > e$. Par stricte croissance du logarithme, $\ln(3) > \ln(e) = 1$. On peut donc conclure que

$$\frac{3^{\ln(n)}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

15) Comme $n^2 \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $e^{-n^2} \leq e^{-n}$, d'où

$$0 < \left(\sum_{k=1}^n k\right) e^{-n^2} = \frac{n(n+1)}{2} e^{-n^2} \leq \frac{n(n+1)}{2} e^{-n}.$$

Par les croissances comparées, $\frac{n(n+1)}{2} e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, d'après le théorème d'encadrement, $\left(\sum_{k=1}^n k\right) e^{-n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

16) On arrange l'expression afin d'utiliser les croissances comparées (c.c.). Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(n^n) e^{-\sqrt{n}} = n \ln(n) e^{-\sqrt{n}} = \underbrace{\frac{\ln(n)}{n}}_{\rightarrow 0 \text{ (c.c.)}} \underbrace{(\sqrt{n})^4 e^{-\sqrt{n}}}_{\rightarrow 0 \text{ (c.c.)}}.$$

Par produit,

$$\ln(n^n) e^{-\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

17) Par définition de la partie entière, $[\pi n] \leq \pi n \leq [\pi n] + 1$.

Donc : $\pi n - 1 \leq [\pi n] \leq \pi n$. D'où : $\pi - 1/n \leq \frac{[\pi n]}{n} \leq \pi$.

Ainsi, d'après le théorème d'encadrement,

$$\frac{[\pi n]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi.$$

18) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on est en présence d'une somme géométrique de raison $2 \neq 1$, donc

$$\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

De plus, on dispose aussi de la majoration $\sum_{k=0}^n k^2 \leq \sum_{k=1}^n n^2 \leq n^3$.

Puis,

$$\left(\sum_{k=0}^n 2^k\right) / \left(\sum_{k=0}^n k^2\right) \geq (2^{n+1} - 1) / n^3$$

À l'aide des *croissances comparées et par minoration*, $\left(\sum_{k=0}^n 2^k\right) / \left(\sum_{k=0}^n k^2\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

19) Pour $n \geq 2$, encadrons :

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\frac{2}{n} \cdots \frac{n-1}{n}}_{< 1} \cdot \frac{n}{n} < \frac{1}{n} \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{n!}{n^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

20) Soit $n \in \mathbb{N}$. Majorons $\binom{2n}{n}$ à l'aide de la *formule du binôme de Newton* :

$$0 < \binom{2n}{n} \leq \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 4^n \quad \text{donc} \quad 0 < \frac{\binom{2n}{n}}{8^n} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Comme $\frac{1}{2} \in [0,1[$, on prouve par *encadrement* que

$$\boxed{\frac{\binom{2n}{n}}{8^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$



Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout entier $p \geq n+1$, $\frac{1}{2p-1} \leq \frac{1}{2(n+1)-1} = \frac{1}{2n+1}$.

Par croissance de la sommation,

$$\sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{2p-1} \leq \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{2n+1} = \frac{((2n) - (n+1) + 1)}{2n+1}.$$

Donc

$$\boxed{u_n \leq \frac{n}{2n+1}.}$$

2) Étudions les variations de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \sum_{p=n+2}^{2(n+1)} \frac{1}{2p-1} - \sum_{p=n+1}^{2n} \frac{1}{2p-1} \\
 &= \left(\sum_{p=n+2}^{2n} \frac{1}{2p-1} + \frac{1}{2(2n+1)-1} + \frac{1}{2(2n+2)-1} \right) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2(n+1)-1} + \sum_{p=n+2}^{2n} \frac{1}{2p-1} \right) \\
 &= \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+1} \\
 &= \frac{1}{(4n+1)(4n+3)(2n+1)} \geq 0. \quad \boxed{\text{La suite } u \text{ est croissante.}}
 \end{aligned}$$

De plus, en remarquant que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n}{2n+1} \leq \frac{1}{2}$, on en déduit que la suite u est majorée. D'après le *théorème de convergence monotone*,

la suite u est convergente.

Exercice 6 Moyennes de Cesàro

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \\
 &= \frac{u_{n+1}}{n+1} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \\
 &= \frac{u_{n+1}}{n+1} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) u_k \\
 &= \frac{u_{n+1}}{n+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n(n+1)} u_k \\
 &= \frac{1}{n(n+1)} \left(n u_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k \right) \\
 &= \frac{1}{n(n+1)} \left(\sum_{k=1}^n (u_{n+1} - u_k) \right).
 \end{aligned}$$

on isole le terme pour $k = n + 1$
 par linéarité
 on réduit au même dénominateur
 on factorise par $1/n(n+1)$
 car $n u_{n+1} = \sum_{k=1}^n u_{n+1}$

Comme la suite u est croissante, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k \leq u_{n+1}$ et

$$\sum_{k=1}^n (u_{n+1} - u_k) \geq 0, \quad \text{donc} \quad v_{n+1} - v_n \geq 0.$$

La suite v est croissante.

• Trouvons un majorant à la suite v . Comme la suite u est croissante et convergente vers une limite finie, la suite u est majorée. Par exemple, sa limite ℓ en est un majorant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k \leq \ell.$$

Par somme, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n \ell = n\ell \quad \text{soit} \quad v_n \leq \ell.$$

Conclusion : la suite v est croissante et majorée, d'après le *théorème de convergence monotone*,

la suite v converge vers une limite finie.

Remarque

Attention, à ce stade, on ne peut pas conclure que la limite de v est aussi ℓ .

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $u_k \leq u_n$ et

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_n = u_n.$$

$$\text{De plus, } v_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} u_k = \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \right) = \frac{v_n}{2} + \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k.$$

De nouveau, la croissance de la suite u impose, pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, $u_k \geq u_n$ et

$$\frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_n = \frac{(2n - (n+1) + 1)}{2n} u_n = \frac{u_n}{2}.$$

On obtient ainsi

$$v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}.$$

c) Notons ℓ et ℓ' les limites respectivement de u et v . On a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geq v_n.$$

Par passage à la limite, $\ell \geq \ell'$.

On a aussi $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$.

Par passage à la limite, $\ell' \geq \frac{\ell + \ell'}{2}$.

Cette relation équivaut à $\ell' \geq \ell$. Finalement, $\ell = \ell'$.

Les suites u et v convergent vers une limite commune.

d) Reprenons l'inégalité :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2} \Rightarrow 2v_{2n} - v_n \geq u_n.$$

Comme la suite u est croissante, la suite v est aussi croissante. Si ℓ désigne sa limite, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad v_1 \leq v_k \leq \ell \Rightarrow 2v_{2n} - v_n \leq 2\ell - v_1.$$

On en déduit un majorant de la suite u . Par le *théorème de convergence monotone*,

la suite u converge vers une limite finie.

2) Introduisons la suite u de terme général

$$u_n = a_n - a_{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

D'après les hypothèses de l'énoncé,

- la suite u est convergente;
- la suite u est croissante. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (a_{n+1} - a_n) - (a_n - a_{n-1}) = a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} \geq 0.$$

D'après la première question, la suite v définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$$

est convergente. Or, par télescopage, $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) = \frac{a_n - a_0}{n}$.

Comme $a_0/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit

La suite $(a_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 7 Suites adjacentes et approximations

1) Justifions que les suites sont adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\
 &= \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} \\
 &= \frac{1}{2(2n+2)+1} - \frac{1}{2(2n+1)+1} < 0.
 \end{aligned}$$

} télescopage
 } $2n+2$ est pair,
 $2n+1$ est impair

Autrement dit, la suite u est décroissante. De même, on a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} \\
 &= \sum_{k=0}^{2n+3} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\
 &= \frac{(-1)^{2n+3}}{2(2n+3)+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} \\
 &= -\frac{1}{2(2n+3)+1} + \frac{1}{2(2n+2)+1} > 0.
 \end{aligned}$$

} télescopage
 } $2n+2$ est pair,
 $2n+3$ est impair

La suite v est croissante.

• Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\
 &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1}.
 \end{aligned}$$

D'où
$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{-1}{2(2n+1)+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2) Comme les deux suites u et v sont adjacentes, elles convergent vers une limite commune. On a

$$S_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \quad \text{et} \quad S_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Dans ce cas, la suite S est convergente et la limite est ℓ .

De plus, la suite v est croissante et convergente, elle est donc majorée par sa limite. De même, u est minorée par sa limite. Autrement dit,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n \leq \ell \leq u_n.$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}.}$$

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Distinguons suivant la parité de n .

- Si n est impair, il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$. L'inégalité précédente donne

$$0 \leq \frac{\pi}{4} - S_{2p+1} \leq S_{2p} - S_{2p+1}.$$

En reprenant le troisième calcul de la question 1,

$$0 \leq \frac{\pi}{4} - S_{2p+1} \leq \frac{1}{2(2p+1)+1} \leq \frac{1}{2(2p+1)}.$$

D'où
$$\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{2n}.$$

- Si $n = 2p$ est un entier pair. L'inégalité de la question précédente donne aussi

$$0 \geq \frac{\pi}{4} - S_{2p} \geq S_{2p+1} - S_{2p} \geq -\frac{1}{2(2p+1)+1} \geq -\frac{1}{2(2p)}.$$

D'où
$$\left| S_n - \frac{\pi}{4} \right| \leq \frac{1}{2n}.$$

On constate alors que dans tous les cas, la relation est vérifiée.

b) Prenons $n_0 = 200\,000$ de sorte que $4/(2n_0) = 10^{-5}$. On a alors

$$|4S_{n_0} - \pi| \leq \frac{2}{n_0} = 10^{-5}.$$

Donc $4S_{n_0}$ est une approximation de π à 10^{-5} -près. Il suffit alors d'écrire un programme qui calcule ce n_0 -ième terme.

```
>>> n_0 = int(2e5)
>>> S = sum((-1)**k / (2*k+1) for k in range(n_0 + 1))
>>> print(4 * S)
3.141597653564762
```

Remarque

On constate que la convergence vers π est assez lente. Le programme est peu efficace pour calculer un très grand nombre de décimales.

Exercice 8 Suites croisées

1) Démontrons par récurrence que la proposition $\mathcal{P}(n)$: $x_n > y_n > 1$ est vraie pour tout entier positif n .

- **Initialisation** $n = 0$. $a > b > 0$, donc $x_0 > y_0 > 1$. La proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - y_{n+1} &= \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{y_n}) - \frac{1}{2}(y_n + \sqrt{x_n}) \\
 &= \frac{1}{2}(x_n - y_n - \sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}) \\
 &= \frac{1}{2}\left(x_n - y_n - \frac{x_n - y_n}{\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(x_n - y_n)(\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n} - 1)}{\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}}
 \end{aligned}$$

car $\sqrt{x} - \sqrt{y} = \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$
 factorisation par $x_n - y_n$

Par hypothèse de récurrence, $x_n > 1$ et $y_n > 1$, donc $\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n} > 2$. En particulier,

$$\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n} - 1 > 0.$$

Et comme, par hypothèse de récurrence, $x_n - y_n > 0$, on obtient $x_{n+1} - y_{n+1} > 0$; donc

$$x_{n+1} > y_{n+1}.$$

De plus, par hypothèse de récurrence, $x_n > 1$ et $y_n > 1$; donc $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \sqrt{x_n}) > 1$. On a donc montré que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.**

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad x_n > y_n > 1.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{y_n}) - x_n \\
 &= \frac{1}{2}(\sqrt{y_n} - x_n) \\
 &\leq \frac{1}{2}(\sqrt{x_n} - x_n) \\
 &\leq 0.
 \end{aligned}$$

$y_n < x_n$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissante sur \mathbb{R}^+
 $\sqrt{x_n} < x_n$ car $x_n > 1$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

3) Pour commencer, $y_0 = b$ et $y_1 = \frac{1}{2}(y_0 + \sqrt{x_0}) = \frac{1}{2}(b + \sqrt{a})$. De plus, il suffit que $y_1 > y_0$ pour que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas décroissante. Or

$$\frac{1}{2}(b + \sqrt{a}) > b \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} > b.$$

On cherche donc un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\sqrt{a} > b$ et $a > b > 1$. On prend par exemple

$$b = 4 \quad \text{et} \quad a = 25.$$

Remarque

Par contre, si $y_1 \leq y_0$, alors on montre par récurrence que $y_{n+1} - y_n \leq 0$.

Pour l'hérédité, on remarque que $y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{1}{2}((y_{n+1} - y_n) + (\sqrt{x_{n+1}} - \sqrt{x_n}))$.

- 4) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0; d'après le *théorème de convergence monotone*, elle est convergente.

Notons ℓ_1 la limite de cette suite. Soit $n \in \mathbb{N}$. Du fait que $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \sqrt{y_n})$, on tire

$$y_n = (2x_{n+1} - x_n)^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (2\ell_1 - \ell_1)^2 = \ell_1^2.$$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n > y_n > 1$. Donc $\ell_1 \geq \ell_1^2 \geq 1$.

Nécessairement $\ell_1 = \ell_1^2 = 1$.

Bilan : les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 1.

Exercice 9

- 1) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^k$ est croissante sur \mathbb{R}^+ et donc

$$\alpha \geq 1, \quad \text{donc} \quad \alpha^k \geq 1^k = 1, \quad \text{d'où} \quad 1 + \alpha^k \geq 2.$$

Par produit,
$$u(\alpha)_n \geq \prod_{k=0}^n 2 = 2^{n+1}.$$

Comme $2^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on a par minoration $u(\alpha)_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

- 2) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité donnée à α^k , on obtient

$$1 + \alpha^k \leq e^{\alpha^k}.$$

Puis, par produit, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$u(\alpha)_n = \prod_{k=0}^n (1 + \alpha^k) \leq \prod_{k=0}^n e^{\alpha^k}.$$

Or

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^n e^{\alpha^k} &= e^{\sum_{k=0}^n \alpha^k} \\ &= e^{\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}} \\ &\leq e^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

} somme géométrique de raison $\alpha \neq 1$
} car $\frac{-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} < 0$

En conclusion,

la suite $u(\alpha)$ est majorée par $e^{\frac{1}{1-\alpha}}$.

b) Étudions les variations de la suite $u(\alpha)$. Soit $n \in \mathbb{N}$; par télescopage,

$$\frac{u(\alpha)_{n+1}}{u(\alpha)_n} = \frac{\prod_{k=0}^{n+1} (1 + \alpha^k)}{\prod_{k=0}^n (1 + \alpha^k)} = 1 + \alpha^{n+1} \geq 1.$$

Comme la suite $u(\alpha)$ est à termes strictement positifs,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u(\alpha)_{n+1} \geq u(\alpha)_n.$$

D'après le *théorème de convergence monotone*, la suite $u(\alpha)$ est croissante et majorée, elle converge donc vers une limite finie.

3) Revenons à la définition d'une fonction croissante. Soit $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$. Justifions l'implication

$$\alpha \leq \beta \quad \Rightarrow \quad \ell_\alpha \leq \ell_\beta.$$

Supposons donc $\alpha \leq \beta$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $1 + \alpha^k \leq 1 + \beta^k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, par produit, $\prod_{k=0}^n (1 + \alpha^k) \leq \prod_{k=0}^n (1 + \beta^k)$, d'où $u(\alpha)_n \leq u(\beta)_n$.

Or, $u(\alpha)_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_\alpha$ et $u(\beta)_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_\beta$.

Par *croissance du passage à la limite*, on en déduit donc que $\ell_\alpha \leq \ell_\beta$.

La fonction $\alpha \in [0, 1[\mapsto \ell_\alpha$ est croissante.

Remarque

Grâce aux propriétés sur la continuité et les suites (rappels sur la continuité, page 590), on montre que

$$\ell_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} u(\alpha)_n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}} = e^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Exercice 10

1) Justifions par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \quad u_{n+1} \geq 1 \quad \text{et} \quad u_n \geq 1$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** Comme $u_0 = 1, u_1 = 2, \mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n + 1)$.

Il suffit de démontrer que $u_{n+2} \geq 1$. Or,

$$u_{n+2} - 1 = \frac{u_n^2 + u_{n+1}^2 - (u_n + u_{n+1})}{u_n + u_{n+1}} = \frac{u_n(u_n - 1) + u_{n+1}(u_{n+1} - 1)}{u_n + u_{n+1}} \geq 0$$

puisque $u_n - 1 \geq 0$ et $u_{n+1} - 1 \geq 0$. D'où $u_{n+2} \geq 1$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ est prouvée.

• **Conclusion.** La suite u est minorée par 1.

La récurrence justifie aussi que la suite est bien définie, le dénominateur $u_n + u_{n+1}$ ne pouvant pas s'annuler.

On procède de même pour justifier la majoration par 2.

2) On met à jour n fois de suite le couple (u_i, u_{i+1}) . En partant de (u_0, u_1) , cela nous amènera à (u_n, u_{n+1}) dont on ne conservera que la première composante.

def u(n):

 a, b = 1, 2

 for _ in range(n):

 a, b = b, (a**2 + b**2) / (a + b)

 return a

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} u_{n+2} - u_{n+1} &= \frac{u_n^2 + u_{n+1}^2}{u_n + u_{n+1}} - u_{n+1} \\ &= \frac{u_n^2 + u_{n+1}^2 - u_{n+1}(u_n + u_{n+1})}{u_n + u_{n+1}} \\ &= \frac{u_n^2 - u_{n+1}u_n}{u_n + u_{n+1}} \\ &= -(u_{n+1} - u_n) \cdot \frac{u_n}{u_n + u_{n+1}}. \end{aligned}$$

} on réduit au même dénominateur
 } on simplifie
 } on factorise par $u_{n+1} - u_n$

Comme $u_n / (u_n + u_{n+1}) \geq 0$, $u_{n+2} - u_{n+1}$ et $u_{n+1} - u_n$ sont de signes opposés.

b) Sachant que $u_1 - u_0 = 1 \geq 0$, on démontre par récurrence que

$u_{n+1} - u_n$ est positif si et seulement si n est pair.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} - v_n &= u_{2n+2} - u_{2n} \\
 &= \frac{u_{2n}^2 + u_{2n+1}^2}{u_{2n} + u_{2n+1}} - u_{2n} \\
 &= \frac{u_{2n}^2 + u_{2n+1}^2 - u_{2n}(u_{2n} + u_{2n+1})}{u_{2n} + u_{2n+1}} \\
 &= \frac{u_{2n+1}(u_{2n+1} - u_{2n})}{u_{2n} + u_{2n+1}}.
 \end{aligned}$$

on réduit au même dénominateur
 factorisation par u_{2n+1}

Comme la suite u est positive, le signe de $v_{n+1} - v_n$ est le même que celui de $u_{2n+1} - u_{2n}$. D'après la question précédente, $v_{n+1} - v_n \geq 0$.

La suite v est croissante.

De même, on montre que le signe de $w_{n+1} - w_n$ est le même que celui de $u_{2n+2} - u_{2n+1}$ qui est négatif.

La suite w est décroissante.

• Comme la suite u est bornée (question 1), la suite v est majorée et la suite w est minorée. D'après le *théorème de convergence monotone*,

les suites v et w sont convergentes.

• Notons ℓ et ℓ' les limites respectives. Montrons que $\ell = \ell'$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence donne

$$u_{2n+2} = \frac{u_{2n}^2 + u_{2n+1}^2}{u_{2n} + u_{2n+1}} \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = \frac{u_{2n+1}^2 + u_{2n+2}^2}{u_{2n+1} + u_{2n+2}}.$$

De ce fait,

$$v_{n+1} = \frac{v_n^2 + w_n^2}{v_n + w_n} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = \frac{w_n^2 + v_{n+1}^2}{w_n + v_{n+1}}.$$

Par passage à la limite, $\ell = \frac{\ell^2 + \ell'^2}{\ell + \ell'}$ et $\ell' = \frac{\ell^2 + \ell'^2}{\ell + \ell'}$.

Dès lors, $\ell = \ell'$.

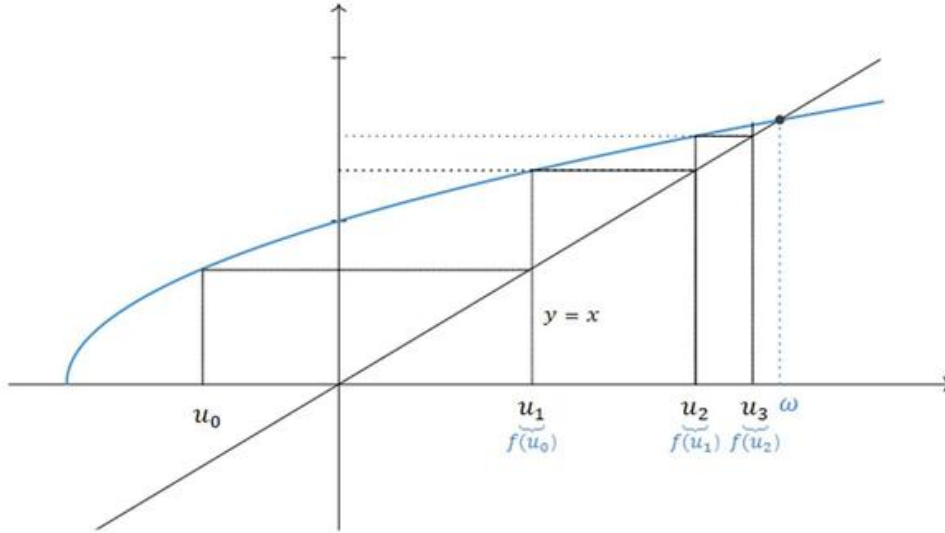
Résumons : les suites v et w convergent vers une limite commune.

b) Les suites extraites d'indices pairs $v = (u_{2n})_n$ et impairs $w = (u_{2n+1})_n$ convergent vers une limite commune. Donc

la suite u converge vers cette même limite.

Exercice 11 $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante

- 1) On conjecture que la suite u est croissante et convergente. La limite serait l'abscisse du point d'intersection des deux courbes, c'est-à-dire la solution de l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$.



- 2) a) Soit $x \in]-1, +\infty[$; $f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = x \Leftrightarrow x+1 = x^2$ car x est positif. À l'aide d'un discriminant, on montre qu'il n'y a qu'une solution positive, à savoir

$$\omega = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\text{nombre d'or}).$$

Remarque : la solution négative est l'abscisse du deuxième point d'intersection de la droite d'équation $y = x$ et de la parabole complète d'équation $y^2 = x + 1$.

- b) Démontrons que u est croissante et majorée par ω . Justifions par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : u_{n+1} \geq u_n \quad \text{et} \quad u_n \leq \omega$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** Par lecture graphique, $u_1 \geq u_0$ et $u_0 \leq \omega$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned} & u_{n+1} \geq u_n \quad \text{et} \quad u_n \leq \omega \\ \Rightarrow & f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \quad \text{et} \quad f(u_n) \leq f(\omega) \quad \left. \vphantom{f(u_{n+1})} \right\} \text{par croissance de } f \\ \Rightarrow & u_{n+2} \geq u_{n+1} \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq f(\omega) = \omega. \end{aligned}$$

Donc si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** La suite u est donc croissante et majorée par ω .

- c) Par le *théorème de convergence monotone*, la suite u converge vers une limite finie ℓ .
 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, donc $u_{n+1}^2 = u_n + 1$.
 Par opérations algébriques sur les limites $\ell^2 = \ell + 1$, donc $\ell = f(\ell)$.

Par unicité de la solution (question 2a), $\ell = \omega$.

Remarque

On peut aussi invoquer la continuité de f pour le passage à la limite, ainsi que cela sera rappelé au chapitre « Continuité » (p 225).

3) a) Soient x et y deux réels positifs.

$$\begin{aligned} f(x) - f(y) &= \sqrt{1+x} - \sqrt{1+y} \\ &= \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1+y})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y})}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} \\ &= \frac{(1+x) - (1+y)}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}} \\ &= \frac{x-y}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y}}. \end{aligned}$$

En remarquant que $\sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} \geq 2$, on obtient $|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x-y|}{2}$.

b) Justifions par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : |u_n - \omega| \leq \frac{|u_0 - \omega|}{2^n}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** $|u_0 - \omega| \leq 2^0 |u_0 - \omega|$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Appliquons l'inégalité précédente aux deux réels positifs u_n et ω .

$$|f(u_n) - f(\omega)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \omega| \stackrel{\mathcal{P}(n)}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \frac{|u_0 - \omega|}{2^n}.$$

$$\text{Comme } u_{n+1} = f(u_n), \omega = f(\omega), \quad |u_{n+1} - \omega| \leq \frac{|u_0 - \omega|}{2^{n+1}}.$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

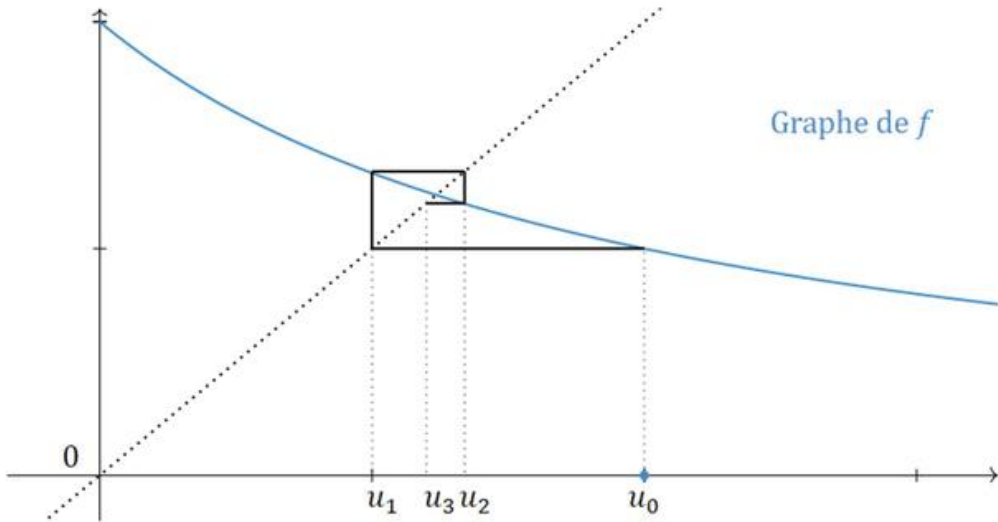
$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad -\frac{|u_0 - \omega|}{2^n} \leq u_n - \omega \leq \frac{|u_0 - \omega|}{2^n}.$$

D'après le théorème d'encadrement,

u converge vers ω .

Exercice 12 $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante

- 1) La suite u n'est pas monotone. Elle converge vers une limite finie en « tournant autour ». La limite serait l'abscisse du point d'intersection de la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$, donc la solution de l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}^+$. De plus, la suite des termes pairs (resp. impairs) est croissante (resp. décroissante). Elles forment deux suites adjacentes.



- 2) La suite est bien définie. Plus précisément, on vérifie par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.
- a) h est croissante par composition de deux fonctions décroissantes. Soit $n \in \mathbb{N}$;

$$h(v_n) = f(f(v_n)) = f(f(u_{2n})) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} = v_{n+1}.$$

De même, $w_{n+1} = h(w_n)$.

- b) La première question permet de conjecturer la croissance de v et la décroissance de w . Justifions par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : v_{n+1} \leq v_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} \geq w_n$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** À l'aide du graphe de la question 1, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Par croissance de h ,

$$\begin{cases} v_{n+1} \leq v_n \\ w_{n+1} \geq w_n \end{cases}, \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} h(v_{n+1}) \leq h(v_n) \\ h(w_{n+1}) \geq h(w_n) \end{cases}, \quad \text{donc} \quad \begin{cases} v_{n+2} \leq v_{n+1} \\ w_{n+2} \geq w_{n+1} \end{cases}.$$

La proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est par conséquent prouvée.

• **Conclusion.** Les suites v et w sont respectivement décroissante et croissante.

• Comme la fonction f est bornée, les suites v et w le sont aussi.

Par le *théorème de convergence monotone*,

les suites v et w sont convergentes.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Vérifier que $h(x) = \frac{x+1}{x+2}$. Ainsi,

$$h(x) = x \Leftrightarrow \frac{x+1}{x+2} = x \Leftrightarrow x+1 = x(x+2) \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0.$$

Par un calcul de discriminant, il n'y a qu'une solution positive : $(\sqrt{5} - 1)/2$.

• Notons ℓ et ℓ' les limites respectives de v et w . Par hypothèse,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = h(v_n) = \frac{v_n + 1}{v_n + 2} \quad \text{et} \quad w_{n+1} = h(w_n) = \frac{w_n + 1}{w_n + 2}.$$

Par unicité de la limite, et par opérations algébriques,

$$\ell = \frac{\ell + 1}{\ell + 2} = h(\ell) \quad \text{et} \quad \ell' = \frac{\ell' + 1}{\ell' + 2} = h(\ell').$$

Or, on a vu qu'il n'existe qu'une seule solution à l'équation $h(x) = x$. Finalement,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

d) Les suites extraites d'indices pairs $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et impairs $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune. Donc

la suite u converge vers $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13 Vrai ou faux?

1) **Vrai.**

Rappelons que l'inégalité triangulaire donne, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Soit u une suite convergente vers une limite ℓ . Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

Par encadrement, $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\ell|$.

Remarque

On retrouve ici la continuité de la fonction $x \mapsto |x|$.

2) Faux.

La suite $((-1)^n)$ est un contre-exemple.

3) Vrai.

On peut utiliser le théorème d'encadrement à partir des inégalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -|u_n| \leq u_n \leq |u_n|.$$

4) Faux.

Donnons un contre-exemple. Posons pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$. Il est clair que la suite u converge vers 1. Cependant, pour n pair $u_n = 1 + 1/n \in [1,2[$ et $[u_n] = 1$, tandis que pour n impair, $u_n \in]0,1[$ et donc $[u_n] = 0$. La suite $([u_n])_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut donc converger.

Remarque

Noter que le résultat devient ici faux à cause de la discontinuité présentée au point 1 par la fonction partie entière.

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_*^{+2}$, démontrer que $(a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \max\{a, b\}$.

Exercice 2 ** *Limites avec la partie entière*

Soient $a, b \in \mathbb{R}_*$. Calculer les limites en 0^+ , 0^- , $+\infty$ et $-\infty$ de $x \mapsto \frac{x}{a} \cdot \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$.

Indication. Pour $y \in \mathbb{R}$, utiliser l'encadrement $y - 1 < \lfloor y \rfloor \leq y$.

Exercice 3 *Calculs de limites*

Calculer, si elle existe, la limite quand x tend vers a dans les cas suivants.

1) $\frac{3x^3 + 2x^2 + x - 1}{5x^3 + 12x^2 + 7x + 6}$ $a = +\infty$

2) $x(1 + \ln(x))e^{-x}$ $a = 0^+$

3) $\frac{x^3 - 1}{x^2 - x}$ $a = 1$

4) $x \ln(xe^{1/x})$ $a = 0^+$

5) $\frac{\cos(x^2) + \ln(2x) - x^3}{3x^3 + \sin(x) - x}$ $a = +\infty$

6) $\frac{\sin(9x)}{\sin(3x)}$ $a = 0$

7) $x^{1/x}$ $a = +\infty$

8) $\sin(x^2) \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)$ $a = 0$

9) $\frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{x^3}$ $a = 0$

10) $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$ $a = +\infty$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 ★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ telle que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

1) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{f(x+n)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

2) Montrer que, si on suppose de plus f croissante, pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, $\frac{f(x+a)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice 5 ★★ Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ telle que $\frac{g(2x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$ avec g croissante.

1) En adaptant l'exercice précédent, démontrer que pour tout $\alpha \in [1, +\infty[$,

$$\frac{g(\alpha x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

2) Justifier que le résultat est encore valable pour $\alpha \in]0,1]$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 6 ★★ *Vrai ou faux?* Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, posons

$$H_\alpha = \left\{ f : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R} \mid \frac{f(x)}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \right\}.$$

Préciser si chacun des énoncés suivants est vrai ou faux. *Justifier vos réponses.*

1) $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+2}$, $(\alpha < \beta \Rightarrow H_\alpha \subset H_\beta)$.

2) Soit $g : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x \ln(x)$. On a $g \in \bigcap_{\alpha > 1} H_\alpha$ mais $g \notin H_1$.

3) $\forall f \in H_\alpha, \forall g \in H_\beta, f \cdot g \in H_{\alpha\beta}$.

4) Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^{+2}$.

$$\forall f \in H_\alpha, \forall g \in H_\beta, f \circ g \in H_{\alpha\beta}.$$

Exercice 7 ★★ Déterminer l'unique fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) + f(y) = f(x+y) \text{ et } \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^{*2}$. Raisonnons par disjonction des cas.

- Si $a = b$, alors $(a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{1}{x}} a \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a = \max\{a, b\}$.
- Supposons $a < b$. Pour $x \in \mathbb{R}_+^+$, $(a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(a^x + b^x)}{x}\right)$.

Si l'on pose $\gamma = a/b$,

$$\frac{\ln(a^x + b^x)}{x} = \frac{\ln(b^x(1 + (a/b)^x))}{x} = \frac{\ln(b^x) + \ln(1 + \gamma^x)}{x} = \ln b + \frac{\ln(1 + \gamma^x)}{x}.$$

Comme $\gamma \in]0, 1[$, $\gamma^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Par composition, puis par produit,

$$\ln(1 + \gamma^x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{donc} \quad \frac{\ln(1 + \gamma^x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où $(a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} b = \max\{a, b\}$.

- Si $a > b$, le cas est symétrique au précédent et le résultat reste valide.

Dans tous les cas,

$$(a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \max\{a, b\}.$$

Exercice 2 Limites avec la partie entière

- **Étude en 0^+ .**

Soit $x > 0$. En utilisant la définition de la partie entière et comme $\frac{x}{a} > 0$:

$$\frac{b}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{x} \quad \text{donc} \quad \frac{x}{a} \left(\frac{b}{x} - 1 \right) = \frac{b}{a} - \frac{x}{a} < \frac{x}{a} \cdot \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{x}{a} \cdot \frac{b}{x} = \frac{b}{a}.$$

Par encadrement, la limite existe et

$$\frac{x}{a} \cdot \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{a}.$$

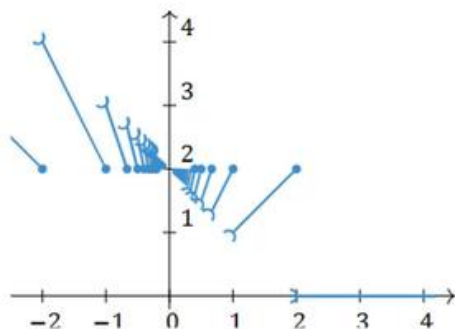
- **Étude en 0^- .**

Soit $x < 0$. On a de même (sans oublier que la multiplication par un nombre strictement négatif change l'ordre des inégalités),

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} > \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x} \right] \geq \frac{b}{a}$$

Par encadrement,

$$\boxed{\frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x} \right] \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} \frac{b}{a}}$$



Ci-dessus, le graphe de $x \mapsto \frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x} \right]$ pour $b = 2$ et $a = 1$.

• **Étude en $+\infty$.**

Soit $x > b$ de sorte que :

$$0 < \frac{b}{x} < 1 \quad \text{donc} \quad \left[\frac{b}{x} \right] = 0. \quad \text{Puis :} \quad \boxed{\frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x} \right] \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.}$$

• **Étude en $-\infty$.**

Si $x \leq -b$, alors : $-1 \leq \frac{b}{x} < 0$ donc $\left[\frac{b}{x} \right] = -1$. Par produit : $\boxed{\frac{x}{a} \cdot \left[\frac{b}{x} \right] \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty.}$

Exercice 3 Calculs de limites

1) On factorise par le terme de plus haut degré :

$$\frac{3x^3 + 2x^2 + x - 1}{5x^3 + 12x^2 + 7x + 6} = \frac{x^3(3 + 2/x + 1/x^2 - 1/x^3)}{x^3(5 + 12/x + 7/x^2 + 6/x^3)} = \frac{3 + 2/x + 1/x^2 - 1/x^3}{5 + 12/x + 7/x^2 + 6/x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{3}{5}}$$

2) $x(1 + \ln(x))e^{-x} = xe^{-x} + x \ln(x)e^{-x}$.

Par produit, $xe^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, par *croissance comparée* $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$, donc $x \ln(x)e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$.

D'où

$$\boxed{x(1 + \ln(x))e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.}$$

3) Avant de passer à la limite, on simplifie l'expression :

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - x} = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x(x - 1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \boxed{3.}$$

4) On a $x \ln(xe^{1/x}) = x \ln(x) + x \ln(e^{1/x}) = x \ln(x) + 1$.

Les *croissances comparées* permettent de conclure :

$$\boxed{x \ln(xe^{1/x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.}$$

5) On factorise par le terme dominant en $+\infty$

$$\frac{\cos(x^2) + \ln(2x) - x^3}{3x^3 + \sin(x) - x} = \frac{x^3 (\cos(x^2)/x^3 + \ln(2x)/x^3 - 1)}{x^3 (3 + \sin(x)/x^3 - 1/x^2)}.$$

Or, par encadrement, $\left| \frac{\cos(x^2)}{x^3} \right| \leq \frac{1}{|x|^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $\left| \frac{\sin(x)}{x^3} \right| \leq \frac{1}{|x|^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, par les *croissances comparées* : $\frac{\ln(2x)}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Concluons
$$\frac{\cos(x^2) + \ln(2x) - x^3}{3x^3 + \sin(x) - x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{3}.$$

6) Comme $\frac{\sin(y)}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 1$,
$$\frac{\sin(9x)}{\sin(3x)} = 3 \cdot \frac{\sin(9x)}{9x} \cdot \frac{3x}{\sin(3x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 3.$$

7) Par définition, $x^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$. De plus, par les *croissances comparées*, $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Enfin, par composition par la fonction exponentielle (continue en 0), on prouve :

$$x^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = \boxed{1}.$$

8) Comme la fonction sinus est bornée par 1, $\left| \sin(x^2) \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \right| \leq |\sin(x^2)|$. Or, par continuité de la fonction sinus en 0, $|\sin(x^2)| \xrightarrow{x \rightarrow 0} |\sin(0)| = 0$.

Par le *théorème d'encadrement*, il vient
$$\sin(x^2) \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

9) D'après les *formules de sommation des fonctions trigonométriques* $\sin(2x) = \sin(x+x) = 2 \sin(x) \cos(x)$. Il vient en réorganisant les facteurs

$$\frac{2 \sin(x) - \sin(2x)}{x^3} = 2 \cdot \overbrace{\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}^{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1} \cdot \overbrace{\left(\frac{1 - \cos(x)}{x^2}\right)}^{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 1/2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{1}.$$

10) On multiplie par « l'expression conjuguée » :

$$\begin{aligned} \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x} &= \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x})(\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+\sqrt{x}})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{x+\sqrt{x} - x}{\sqrt{x+\sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4

1) Soit $n \in \mathbb{N}$, par télescopage

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{f(x+i+1)}{f(x+i)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \prod_{i=0}^{n-1} 1 = 1.$$

En effet, pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, par composition, $\frac{f(x+i+1)}{f(x+i)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

2) Soient $a \in \mathbb{R}^+$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour $n = [a]$, on a $n \leq a < n+1$. Donc $x+n \leq x+a < x+n+1$.

D'où, par croissance de f , $f(x+n) \leq f(x+a) \leq f(x+n+1)$.

Comme $f(x) > 0$,

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} \leq \frac{f(x+a)}{f(x)} \leq \frac{f(x+n+1)}{f(x)}.$$

Or, on a vu à la question précédente,

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad \frac{f(x+n+1)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Par encadrement,

$$\frac{f(x+a)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Exercice 5

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par produit,

$$\frac{g(2^n x)}{g(x)} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{g(2^{i+1}x)}{g(2^i x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

On a aussi

$$\frac{g(2^{n+1}x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Soit $\alpha \in [1, +\infty[$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme la suite $(2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $2^n \leq \alpha < 2^{n+1}$. Par croissance de g ,

$$g(2^n x) \leq g(\alpha x) \leq g(2^{n+1}x) \quad \xRightarrow{\text{car } g(x) > 0} \quad \frac{g(2^n x)}{g(x)} \leq \frac{g(\alpha x)}{g(x)} \leq \frac{g(2^{n+1}x)}{g(x)}.$$

Par le théorème d'encadrement,

$$\frac{g(\alpha x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

2) Soit $\alpha \in]0,1[$. Ainsi, $\alpha^{-1} \in [1, +\infty[$. D'après la question précédente,

$$\frac{g(\alpha^{-1}t)}{g(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1.$$

Par composition, $t = \alpha x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, $\frac{g(x)}{g(\alpha x)} = \frac{g(\alpha^{-1}t)}{g(t)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$

Par passage à l'inverse,

$$\boxed{\frac{g(\alpha x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.}$$

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 6 Vrai ou faux?

1) **Vrai.**

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{+2}$ avec $\alpha < \beta$. Soit $f \in H_\alpha$. Par produit

$$\frac{f(x)}{x^\beta} = \frac{f(x)}{x^\alpha} \cdot \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \cdot 0 = 0 \quad (\text{car } \beta - \alpha > 0).$$

De plus, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi $f \in H_\beta$ et l'inclusion $H_\alpha \subset H_\beta$ est prouvée.

2) **Vrai.**

Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Par produit et par les *croissances comparées*,

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{g(x)}{x^\alpha} = \frac{\ln(x)}{x^{\alpha-1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc, pour tout $\alpha > 1$, $g \in H_\alpha$. C'est-à-dire, $g \in \bigcap_{\alpha > 1} H_\alpha$.

Par contre, $g(x)/x = \ln(x) \not\rightarrow 0$ et $g \notin H_1$.

3) **Faux.**

Posons pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f(x) = g(x) = x^{2/3}$.

C'est un contre-exemple, $f, g \in H_1$ mais $f \cdot g \notin H_{1 \times 1}$.

Remarque

Un bon énoncé serait : $\forall f \in H_\alpha, \forall g \in H_\beta, f \cdot g \in H_{\alpha+\beta}$.

D'après la croissance par l'inclusion démontrée à la question précédente, si $\alpha + \beta \leq \alpha\beta$

$$f \cdot g \in H_{\alpha+\beta} \subset H_{\alpha\beta}.$$

On choisit donc α et β de sorte que $\alpha + \beta > \alpha\beta$.

4) **Vrai.**

Soient $f \in H_\alpha$ et $g \in H_\beta$. Par composition,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \Rightarrow \quad f \circ g(x) = f(g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^+$,

$$\frac{f \circ g(x)}{x^{\alpha\beta}} = \left(\frac{g(x)}{x^\beta} \right)^\alpha \cdot \frac{f(g(x))}{g(x)^\alpha}.$$

Or, $g \in H_\beta$

$$\frac{g(x)}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \xRightarrow{\alpha > 0} \quad \left(\frac{g(x)}{x^\beta} \right)^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Comme $f \in H_\alpha$, on a par composition,

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad \frac{f(t)}{t^\alpha} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(g(x))}{g(x)^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

On obtient par produit, $\frac{f \circ g(x)}{x^{\alpha\beta}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Finalement, $f \circ g \in H_{\alpha\beta}$.

Exercice 7

Raisonnons par analyse-synthèse.

• **Analyse**

(recherche des conditions nécessaires)

Soit f une fonction vérifiant les deux conditions.

→ Appliquons la relation au cas particulier $x = y = 0$,

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0), \quad \text{donc} \quad f(0) = 2f(0), \quad \text{d'où} \quad f(0) = 0.$$

→ Soit $t \in \mathbb{R}$. Appliquons la relation avec $x = t, y = -t$,

$$f(t - t) = f(t) + f(-t), \quad \text{donc} \quad 0 = f(0) = f(t) + f(-t), \quad \text{d'où} \quad f(-t) = -f(t).$$

La fonction f est donc impaire. On peut limiter l'étude à \mathbb{R}^+ .

→ Soit $t \in \mathbb{R}_+^+$. Par récurrence, on montre pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nt) = nf(t)$. De plus, par composition,

$$\frac{f(t)}{t} = \frac{nf(t)}{nt} = \frac{f(nt)}{nt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{car} \quad nt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par unicité de la limite, $f(t)/t = 1$, c'est-à-dire, $f(t) = t$.

Comme f est impaire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t$.

• **Synthèse**

(recherche des conditions suffisantes)

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = t$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x + y) = x + y = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad \frac{f(x)}{x} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

f est bien solution du problème.

• **Conclusion.**

L'unique solution est l'identité de \mathbb{R}

Continuité

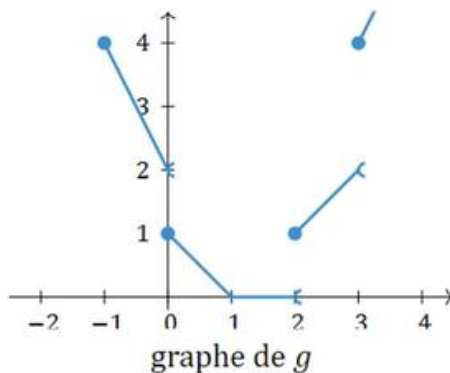
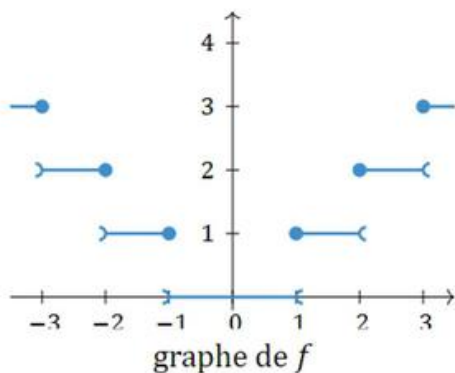
14

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 ** Continuité et partie entière

Étudier la continuité des fonctions f et g suivantes sur leur ensemble de définition.

$$f : x \mapsto \lfloor |x| \rfloor \quad \text{et} \quad g : x \mapsto (x-1)\lfloor x-1 \rfloor.$$



Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 2 * *Points fixes* Soit $f : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue.

- 1) Montrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$.
- 2) Soit $g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$ continue telle que $f \circ g = g \circ f$ et $f \leq g$.
On veut montrer qu'il existe $\alpha \in [0; 1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ et $g(\alpha) = \alpha$.
Soit $c \in [0; 1]$ tel que $f(c) = c$.
On définit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $x_0 = c$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$.
 - a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n$.

- b) Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Soit α sa limite. Justifier que $f(\alpha) = \alpha$ et $g(\alpha) = \alpha$.

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R} . On suppose f continue et g bornée. Justifier que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont deux fonctions bornées.

Exercice 4 * Justifier que $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ définit une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle à préciser. Donner les variations, l'éventuelle parité de la réciproque et son graphe.

Exercice 5 * *Continuité des applications lipschitziennes*

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On dit qu'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne sur I s'il existe une constante $K \in \mathbb{R}^+$ telle que

$$\forall (x; y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

- 1) Montrer que toute application lipschitzienne est continue.
- 2) En considérant l'application $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$, vérifier que la réciproque est fautive.

Exercice 6 **

- 1) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et périodique. Vérifier que f est bornée.
- 2) *Application.*
Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x + 1) = g(x) + 1$.
Montrer que $\frac{g(x)}{x}$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 7 ** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x) - f(y)| \geq |x - y| \quad (\bullet)$$

- 1) Justifier que f est injective.
- 2) On suppose dans cette question que $f(0) = 0$.
 - a) Justifier que f est de signe constant sur \mathbb{R}_+^* .
 - b) Préciser les éventuelles limites de f en $\pm\infty$.
 - c) Conclure en prouvant que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- 3) Montrer que la conclusion demeure si on ne suppose plus $f(0) = 0$.

Exercice 8 ** Les tours-puissances

Pour tout réel $x \in [1; e]$, on pose $f(x) = x^{1/x}$.

- 1) Justifier que la fonction f définit une bijection de $[1; e]$ sur $[1; e^{1/e}]$.
- 2) Considérons pour $a \in [1; e^{1/e}]$, la suite w définie par

$$w_0 = a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = a^{w_n}.$$

- a) Vérifier que $w_1 \geq w_0$.
 - b) Démontrer que w est une suite croissante.
 - c) Vérifier que e est un majorant de la suite w . En déduire la convergence vers une limite finie $T(a)$
- 3) Justifier que

$$T(a) = a^{T(a)}, \quad \text{puis,} \quad T(a) = f^{-1}(a).$$
 - 4) Montrer que $T(\sqrt{2}) = 2$.
Quelle écriture intuitive pouvez-vous en donner?

Exercice 9 ** Étude de deux équations fonctionnelles

- 1) On veut déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (\bullet).$$

- a) On suppose qu'il existe une telle fonction f .
 - i. Montrer que $f(0) = 0$.
 - ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$f(px) = pf(x), \quad \text{puis,} \quad f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p} \times f(x).$$

Vérifier que ces relations demeurent vraies pour $p \in \mathbb{Z}^*$.

- iii. Démontrer que pour tout réel x , $\frac{[nx]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.
 - iv. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf(1)$.
- b) Conclure en déterminant toutes les fonctions vérifiant (\bullet) .
- 2) On veut déterminer maintenant les fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x + y) = g(x) \times g(y) \quad (\bullet\bullet).$$

- a) Montrer que s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = 0$ alors g est la fonction nulle.
- b) Justifier que si g n'est pas la fonction nulle, alors g est strictement positive.
- c) Conclure en explicitant toutes les fonctions vérifiant $(\bullet\bullet)$.

Exercice 10 *** Une suite définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

Considérons les fonctions

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_*^+ & \rightarrow \mathbb{R}_*^+ \\ x & \mapsto 1/(xe^x) \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}_*^+ & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) - x. \end{cases}$$

On admet dans la suite que les fonctions f et g sont strictement décroissantes.

1) a) Préciser les variations de $h = f \circ f$.

Vérifier que h est prolongeable par continuité en posant $h(0) = 0$.

b) Vérifier que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_*^+$ n'a qu'une solution. Notons α cette solution.

c) Établir l'encadrement

$$e^{-1} < \alpha < 1.$$

2) On définit la suite u par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

a) En remarquant que $u_{2(n+1)} = h(u_{2n})$, vérifier que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.

De même, on montre que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

b) On admet que l'équation $h(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_*^+$ a exactement deux solutions. Préciser ces deux solutions.

c) i. Justifier que la suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Préciser la limite.

ii. Justifier que la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

On en déduit donc la divergence de la suite u .

Exercice 11 * Étude d'une suite implicite

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier qu'il existe une unique solution à l'équation

$$xe^x = n \quad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{R}.$$

Notons u_n cette solution.

2) Étudier les variations et la limite de la suite u .

Exercice 12 *** Étude d'une suite implicite

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, posons

$$f_n : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^n + x^{-n} - n(x + x^{-1}) \quad \text{et} \quad h : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x - \frac{1}{x}.$$

1) a) Préciser les variations de h .

b) Justifier la dérivabilité de f_n avec pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $f_n'(x) = \frac{n}{x}(h(x^n) - h(x))$.

c) En déduire les variations de f_n sur $]0 : 1]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Justifier qu'il existe une unique solution $x \in]0, 1]$ telle que

$$\frac{x^n + x^{-n}}{x + x^{-1}} = n.$$

Dans la suite, on note u_n cette unique solution.

3) Justifier successivement les encadrements

$$\frac{u_n^n + u_n^{-n}}{2} \leq u_n^{-n} \leq u_n^n + u_n^{-n}, \quad \left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n-1}} \leq u_n \leq \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

4) En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ vers 1.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13 * Continuité et suite

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$. On définit la suite u par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Étudier la convergence de la suite u .

Exercice 14 ** Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(2x).$$

Indication. On pourra étudier les suites de termes généraux $u_n = x/2^n$.

Exercice 15 *** Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(x^2).$$

Indication. On pourra remarquer que pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = f(x^{1/2}) = f(x^{1/4}) = \dots$

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Continuité et partie entière

• Précisons que f et g sont bien définies sur \mathbb{R} . De plus, la partie entière est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et discontinue en tout point de \mathbb{Z} . En effet, pour $n \in \mathbb{Z}$, les limites en n à gauche et à droite diffèrent :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} [x] = n - 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} [x] = n.$$

Notons que f est une fonction paire. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a : $f(x) = [x]$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}^*$, discontinue sur \mathbb{N}^* .

En 0, on a encore : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$. Par parité de f , on a aussi : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$. Par conséquent les limites à gauche et à droite existent et s'identifient à $f(0) = 0$. f est continue en 0. Résumons

f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^*$.

• Par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a par produit de limites

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} [x - 1] = n - 2 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} x - 1 = n - 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} g(x) = (n - 2)(n - 1)$$

$$\text{et } \left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} [x - 1] = n - 1 \\ \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} x - 1 = n - 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} g(x) = (n - 1)^2.$$

Or g est continue en n si et seulement si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x < n}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow n \\ x > n}} g(x) = g(n) = (n - 1)^2.$$

Cela n'est vrai que pour $n = 1$. En conclusion

g est seulement continue sur $\{1\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 2 Points fixes

- 1) Posons pour $x \in [0; 1]$, $h(x) = f(x) - x$. Par construction, h est continue par différence de fonctions continues, $h(0) \geq 0$ et $h(1) \leq 0$ car f est à valeurs dans $[0; 1]$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, h s'annule au moins une fois.
Il existe $c \in [0; 1]$ tel que $h(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.
- 2) a) Raisonnons par récurrence sur la propriété $\mathcal{P}(n) : f(x_n) = x_n$.

• **Initialisation.** $n = 0$. Par définition de x_0 , $f(x_0) = x_0$.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $f(x_n) = x_n$.

$$f(x_{n+1}) = f(g(x_n)) = g(f(x_n)) \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} g(x_n) = x_{n+1}.$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n$.

- b) Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) \leq g(x_n)$, donc $x_n \leq x_{n+1}$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite converge.

De plus, la fonction f est continue en α . Par passage à la limite, l'égalité $f(x_n) = x_n$ donne $f(\alpha) = \alpha$.

De même, la fonction g est continue en α .

Par passage à la limite, l'égalité $g(x_n) = x_{n+1}$ donne $g(\alpha) = \alpha$.

Exercice 3

Par définition, il existe $M \in \mathbb{R}^+$, tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|g(t)| \leq M$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$|g \circ f(x)| = |g(f(x))| \leq M.$$

$g \circ f$ est bornée.

- f est continue sur le segment $[-M; M]$. Par conséquent, elle est bornée sur ce segment. Autrement dit, il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $t \in [-M; M]$, $|f(t)| \leq K$. Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f \circ g(x)| = |f(g(x))| \leq K \quad \text{car} \quad g(x) \in [-M; M].$$

$f \circ g$ est bornée.

Exercice 4

Notons que f est impaire : pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = \frac{-x}{1+|-x|} = -\frac{x}{1+|x|} = -f(x)$.

On peut donc limiter l'étude de f à \mathbb{R}^+ .

• *Les limites.* Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{(1+x)-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$.

Par imparité, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$.

• *Variations.* L'expression $f(x) = 1 - 1/(1+x)$ permet de justifier directement la stricte croissance sur \mathbb{R}^+ par composition. Par imparité, f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Remarque

Attention, il faut être prudent avec l'emploi de la dérivée. La fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0. Les théorèmes généraux permettent de justifier la dérivabilité de f sur \mathbb{R}_* .

Une étude du taux d'accroissement en 0 montre que f est aussi dérivable en 0.

• *Conclusion.* f est continue sur \mathbb{R} comme quotient de fonctions continues sur \mathbb{R} . D'après le théorème de la bijection,

$$f \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-1,1[.$$

La réciproque a le même sens de variation que f et son graphe s'obtient par symétrie par rapport à l'axe $y = x$.

Remarque

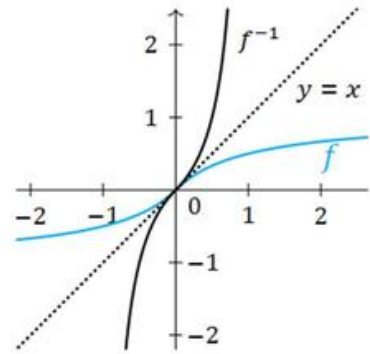
On peut déterminer une expression de la réciproque. Cette fonction est impaire.

Pour $x \in]0; 1[$, on trouve $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$.

Alors, pour $x \in]-1,0[$, $f^{-1}(x) = -f^{-1}(-x) = \frac{x}{1+x}$.

On peut regrouper les deux cas :

pour $x \in]-1,1[$, $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-|x|}$.



Exercice 5 Continuité des applications lipschitziennes

1) Soit f une fonction lipschitzienne. Soit $a \in I$. Il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq |f(x) - f(a)| \leq K|x - a|.$$

Pour $x \rightarrow a$, $K|x - a| \rightarrow 0$. Par le théorème d'encadrement

$$f(x) - f(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \quad \text{c.-à-d.} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a).$$

On a prouvé que f est continue en a . Cela étant valable pour tout $a \in I$,

$$f \text{ est continue sur } I.$$

- 2) Raisonnons par l'absurde en supposant $f : x \mapsto x^2$ lipschitzienne sur \mathbb{R} . Il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que pour tous réels x et y , $|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$. En particulier, on a pour $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 = |f(x) - f(0)| \leq K|x - 0| = K|x|.$$

Cette inégalité est fautive dès que $x > K$.

f est continue mais non lipschitzienne sur \mathbb{R} .

Exercice 6

- 1) Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$, une période de f . f est continue sur le segment $[0; T]$, elle donc bornée sur ce segment. Autrement dit, il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in [0; T], \quad |f(x)| \leq K.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe un entier n tel que $x - nT \in [0; T]$. Par exemple, $n = \left\lfloor \frac{x}{T} \right\rfloor$ vérifie

$$n \leq \frac{x}{T} < n + 1, \quad \text{donc} \quad nT \leq x < nT + T, \quad \text{d'où} \quad 0 \leq x - nT < T.$$

Par T -périodicité de f , $|f(x)| = |f(x - nT)| \leq K$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq K$,

f est bornée.

- 2) Posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto g(x) - x$. f est 1-périodique et continue.

Puis
$$\frac{g(x)}{x} - 1 = \frac{g(x) - x}{x} = \frac{f(x)}{x}.$$

D'après ce qui précède, f est bornée. D'après le théorème d'encadrement : $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Finalement,

$$\frac{g(x)}{x} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{donc} \quad \frac{g(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

Exercice 7

- 1) Soient deux réels x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2)$. En appliquant l'inégalité (•), on trouve

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq |x_1 - x_2|, \quad \text{donc} \quad 0 \geq |x_1 - x_2|.$$

D'où $|x_1 - x_2| = 0$, puis, $x_1 = x_2$.

f est injective.

- 2) a) Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas de signe constant sur \mathbb{R}_+^+ . Il existe donc $(x_1, x_2) \in (\mathbb{R}_+^+)^2$ tel que $f(x_1) \leq 0$ et $f(x_2) \geq 0$.

f est continue, d'après le *théorème des valeurs intermédiaires*, il existe x_0 compris en x_1 et x_2 tel que $f(x_0) = 0$. Ainsi $x_0 > 0$ et $f(x_0) = 0 = f(0)$, en contradiction avec l'injectivité de f .

- b) Plaçons nous dans le cas I.

On a donc f strictement positive sur \mathbb{R}_+^+ . En appliquant la relation (•) avec $y = 0$, on obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^+$,

$$|f(x) - f(0)| \geq |x - 0|, \text{ d'où } f(x) \geq x \text{ car } f(x) \in \mathbb{R}_+^+.$$

Par minoration,
$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Montrons par l'absurde que f est strictement négative sur \mathbb{R}_+^- .

Supposons $x \in \mathbb{R}_+^-$ tel que $f(x) > 0$.

On a $f(-x) > 0$ (car $-x > 0$). Soit $\alpha = \min(f(x), f(-x))/2 > 0$.

D'après le *théorème des valeurs intermédiaires*, il existe $y_1 \in [x, 0]$ et $y_2 \in [0, -x]$ tels que $f(y_1) = f(y_2) = \alpha$. Or $f(0) = 0$. Donc $y_1 \neq 0$ (et $y_2 \neq 0$), d'où $y_1 \neq y_2$. On a une contradiction avec l'injectivité de f . On montre alors que

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty.$$

- De même dans le cas II,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty \text{ et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty.$$

- c) f est continue sur \mathbb{R} . À l'aide des limites précédentes et du *théorème des valeurs intermédiaires*, f est surjective. Or, f est aussi injective d'après la question 1).

Donc f est bijective.

Remarque

On peut aussi justifier que f est strictement monotone sur \mathbb{R} afin d'appliquer le théorème de la bijection.

- 3) Posons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) - f(0)$ de sorte que $g(0) = 0$ et pour tout $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|g(x) - g(y)| = |f(x) - f(0) - (f(y) - f(0))| = |f(x) - f(y)| \geq |x - y|.$$

g vérifie donc les conditions des questions 1) et 2), g est donc une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Puis,

f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Exercice 8 Les tours-puissances

- 1) Pour tout $x \in [1; e]$, posons $\varphi(x) = \ln(x)/x$ de sorte que $f(x) = \exp(\varphi(x))$.
 φ est dérivable sur $[1; e]$ par quotient de fonctions dérivables avec

$$\forall x \in [1; e], \quad \varphi'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

On constate que $\varphi'(x)$ est strictement positif sur $]1; e]$. φ est donc strictement croissante. Par composition avec la fonction exponentielle, strictement croissante, f est strictement croissante sur $]1; e]$.

De plus, f est continue par composition avec $f(1) = 1$ et $f(e) = e^{1/e}$.

D'après le théorème de la bijection,

$$f \text{ définit une bijection de } [1; e] \text{ sur } [1; e^{1/e}].$$

- 2) a) Pour $a \geq 1$, $\frac{w_1}{w_0} = \frac{a^a}{a} = a^{a-1} = \exp((a-1)\ln(a)) \geq 1$, donc $w_1 \geq w_0$.
 b) Posons $g_a : t \in \mathbb{R} \mapsto a^t \in \mathbb{R}$. Démontrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : w_{n+1} \geq w_n$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** $\mathcal{P}(0)$ a été prouvée à la question précédente.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Par croissance de la fonction g_a ,

$$w_{n+1} \geq w_n, \text{ donc } g_a(w_{n+1}) \geq g_a(w_n), \text{ d'où } w_{n+2} \geq w_{n+1}.$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est prouvée.

- **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} \geq w_n$. La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- c) Dans un premier temps, justifions que e est un majorant de la fonction g_a .
 Soit $a \in [1; e^{1/e}]$. Pour $t \in [1; e]$,

$$g_a(t) = a^t = \exp(t \ln(a)) \leq \exp(e \ln(e^{1/e})) = e^{e \cdot 1/e} = e.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $w_{n+1} = g_a(w_n) \leq e$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n \leq e$.

Comme $w_0 \leq e$, on peut affirmer que

$$\text{La suite } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est majorée par } e.$$

La suite est donc croissante et majorée, par le théorème de convergence monotone,

$$\text{La suite } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers une limite finie.}$$

3) La fonction g_a est continue et par passage à la limite

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = g_a(w_n), \text{ d'où } T(a) = g_a(T(a)) = a^{T(a)}.$$

On en déduit que $T(a)^{1/T(a)} = a$.

Comme la suite w est minorée par 1 et majorée par e , on a $T(a) \in [1; e]$. On obtient $f(T(a)) = a$. Or, f est bijectif d'après la question 1)

$$T(a) = f^{-1}(a).$$

4) Notons que $f(2) = 2^{1/2} = \sqrt{2}$. Ainsi, $f^{-1}(\sqrt{2}) = 2$. D'après ce qui précède,

$$T(\sqrt{2}) = 2.$$

$$\text{On a } w_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}, w_2 = \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}, w_n = \sqrt{2}^{\underbrace{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots^{\sqrt{2}}}}}_n}.$$

$$\text{Par abus d'écriture } T(\sqrt{2}) = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots^{\sqrt{2}}}}} = 2.$$

Exercice 9 Étude de deux équations fonctionnelles

1) a) i. Testons l'égalité avec $x = y = 0$, $f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, donc $2f(0) = f(0)$.
D'où $f(0) = 0$.

Remarque

Soit $x \in \mathbb{R}$. Testons la relation avec x et $y = -x$.

$$0 = f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x), \text{ donc } f(-x) = -f(x).$$

f est aussi une fonction impaire.

ii. Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrons que la propriété

$$\mathcal{P}(p) : f(px) = pf(x)$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** $\mathcal{P}(0)$ est vraie, $f(0 \times x) = f(0) = 0$ et $0 \times f(x) = 0$.

• **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie.

$$\begin{aligned} f((p+1)x) &= f(px+x) \\ &= f(px) + f(x) && \left. \begin{array}{l} \text{d'après la relation } (\bullet) \\ \text{d'après } \mathcal{P}(p) \end{array} \right\} \\ &= pf(x) + f(x) \\ &= (p+1)f(x). \end{aligned}$$

Donc, si $\mathcal{P}(p)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f(px) = pf(x)$.
- Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Appliquons le résultat précédent avec $x \leftarrow x/p$,

$$f\left(p \cdot \frac{x}{p}\right) = p \times f\left(\frac{x}{p}\right), \quad \text{d'où} \quad f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p} \times f(x).$$

D'après la remarque précédente, f est impaire.

La relation s'étend donc au cas où $p \in \mathbb{Z}^*$.

En particulier, pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$, $f(p) = pf(1)$.

iii. Par définition de la partie entière,

$$[nx] \leq nx < [nx] + 1, \quad \text{donc} \quad nx - 1 < [nx] \leq nx.$$

$$\text{Divisons par } n > 0, \quad x - \frac{1}{n} = \frac{nx - 1}{n} < \frac{[nx]}{n} \leq \frac{nx}{n} = x.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\frac{[nx]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

iv. Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Par continuité de f ,

$$\frac{[nx]}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x, \quad \text{d'où} \quad f\left(\frac{[nx]}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

$$\text{Or, on a avec la question précédente,} \quad f\left(\frac{[nx]}{n}\right) = \frac{1}{n} f([nx]) = \frac{[nx]}{n} f(1).$$

$$\text{Puis,} \quad \frac{[nx]}{n} f(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} xf(1).$$

$$\text{Par unicité de la limite,} \quad f(x) = xf(1).$$

Autrement dit, f est linéaire.

- b) D'après la question précédente, si f vérifie la relation (•) alors il existe un réel a tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$. Réciproquement, pour $a \in \mathbb{R}$, posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax$. Pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y).$$

f vérifie la relation (•). Résumons

Les fonctions vérifiant (•) sont les fonctions linéaires.

- 2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g((x-x_0) + x_0) = g(x-x_0) \cdot g(x_0) = 0$.
Dans ce cas, g est la fonction nulle.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = g\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0$.

Comme g ne s'annule pas, l'inégalité est stricte.

g est strictement positive.

c) D'après la question précédente, la fonction $f = \ln \circ g$ est bien définie.

De plus, pour $(x; y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x + y) = \ln(g(x + y)) = \ln(g(x) \cdot g(y)) = \ln(g(x)) + \ln(g(y)) = f(x) + f(y).$$

D'après l'étude de la question 1), il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

Les fonctions vérifiant (••) sont les fonctions $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 10 Une suite définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$

1) a) Par composition de deux fonctions strictement décroissantes, $h = f \circ f$ est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ . De plus,

$$f(x) = \frac{1}{xe^x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Par composition,
$$h(x) = f(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0.$$

On prolonge h par continuité en posant $h(0) = 0$.

b) On a

$$g(x) = f(x) - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

g est continue sur \mathbb{R}_*^+ , strictement décroissante. D'après le théorème de la bijection, g définit une bijection de \mathbb{R}_*^+ sur \mathbb{R} .

Il existe une unique solution dans \mathbb{R}_*^+ à l'équation $g(x) = 0$. Finalement,

L'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}_*^+$ n'a qu'une solution.

c) On a $g(1) = f(1) - 1 = e^{-1} - 1 < 0$ et

$$g(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}e^{e^{-1}}} - e^{-1} = e^{1-e^{-1}} - e^{-1} = e^{-1}(e^{2-e^{-1}} - 1) > 0, \quad \text{car } 2 - e^{-1} > 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g s'annule entre e^{-1} et 1. Or, g ne s'annule seulement en α . D'où

$$e^{-1} < \alpha < 1.$$

Les inégalités sont strictes car $g(e^{-1}) \neq 0$ et $g(1) \neq 0$.

2) a) Justifions par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}(n) : u_{2(n+1)} > u_{2n}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $u_0 = 1$, $u_1 = e^{-1}$, $u_2 = e^{1-e^{-1}}$ et $u_2 \geq u_0$ en reprenant le calcul de la question précédente.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie, donc $u_{2(n+1)} > u_{2n}$.

Par croissance de h , $h(u_{2(n+1)}) > h(u_{2n})$, d'où $u_{2(n+2)} > u_{2(n+1)}$.

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors si $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** La suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est donc strictement croissante.

b) On a $h(\alpha) = f(f(\alpha)) = f(\alpha) = \alpha$ et, d'après 1), $h(0) = 0$.

$$0 \text{ et } \alpha \text{ sont les deux seules solutions de } h(x) = x.$$

c) i. La suite $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroissante.

D'après le théorème de convergence monotone, la suite est convergente. Notons ℓ la limite. Par continuité de h ,

$$u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell, \text{ donc } h(u_{2n+1}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} h(\ell).$$

Par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)+1} = h(u_{2n+1})$

D'où, par unicité de la limite, $\ell = h(\ell)$.

D'après la question précédente, $\ell = 0$ ou $\ell = \alpha$. Or, il faut exclure le cas $\ell = \alpha$ car la suite $(u_{2(n+1)})_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, donc, pour $n \geq 1$, elle est majorée par $u_3 < u_1 = e^{-1}$ et $\alpha > e^{-1}$ (question 1c)). Finalement,

$$u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$

ii. La suite $(u_{2n})_n$ est croissante. D'après le théorème de convergence monotone, deux cas sont possibles :

→ la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ;

→ la suite $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Justifions que le premier cas n'est pas possible. Raisonnons par l'absurde en supposant $(u_{2n})_n$ convergente vers ℓ' . En reprenant le raisonnement précédent, la continuité de h impose

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)} = h(u_{2n}), \text{ donc } \ell' = h(\ell').$$

Dans ce cas, $\ell' = 0$ ou $\ell' = \alpha$. Or, u est croissante et minorée par $u_0 = 1$. En contradiction avec la minoration $\alpha > 1$. Concluons

$$u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

Exercice 11 Étude d'une suite implicite

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Précisons que l'équation $xe^x = n$ ne peut avoir de solution négative. Dans la suite, on se limite à \mathbb{R}^+ . Introduisons la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^+ & \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto xe^x. \end{cases}$$

f est continue sur \mathbb{R}^+ , strictement croissante comme produit de fonctions strictement croissantes et strictement positives sur \mathbb{R}_+^* , avec $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

D'après le théorème de la bijection, f définit une bijection de \mathbb{R}^+ sur \mathbb{R}^+ . Il existe une unique solution de $f(x) = n$ donnée par

$$u_n = f^{-1}(n).$$

- 2) La réciproque est aussi strictement croissante d'après le théorème de la bijection. De plus, $f^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Ainsi,

$$u \text{ est strictement croissante et } u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Exercice 12 Étude d'une suite implicite

- 1) a) Comme $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto 1/x$ est strictement décroissante, $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto -1/x$ est strictement croissante. Par somme,

$$h \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*.$$

- b) f_n est dérivable sur \mathbb{R}_+^* en tant que somme de fonctions dérivables. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= nx^{n-1} - nx^{-n-1} - n\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{n}{x} \left(x^n - x^{-n} - x + \frac{1}{x} \right) \\ &= \frac{n}{x} \left(h(x^n) - h(x) \right). \end{aligned}$$

- c) Soit $x \in]0, 1[$. Alors $x^n < x$. D'où, par stricte croissance de h , $h(x^n) < h(x)$.
Donc $f_n'(x) < 0$.

D'où

$$f_n \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle }]0; 1[.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Pour tout $x \in]0, 1[$

$$\frac{x^n + x^{-n}}{x + x^{-1}} = n \Leftrightarrow x^n + x^{-n} = n(x + x^{-1}) \Leftrightarrow f_n(x) = 0.$$

Vérifier que $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et $f_n(1) = 2(1 - n) < 0$.

De plus f_n est continue et strictement décroissante. D'après le théorème de la bijection, f s'annule exactement une fois sur $]0; 1[$. Il existe donc une unique solution.

3) Comme $u_n > 0$, $u_n^{-n} \leq u_n^{-n} + u_n^n$.

Et $u_n \leq 1$, donne $u_n^n \leq u_n^{-n}$ puis $\frac{u_n^n + u_n^{-n}}{2} \leq u_n^{-n}$.

D'où l'encadrement
$$\frac{u_n^n + u_n^{-n}}{2} \leq u_n^{-n} \leq u_n^n + u_n^{-n}$$

Or, par construction $\frac{u_n^n + u_n^{-n}}{u_n + u_n^{-1}} = n$, donc $u_n^n + u_n^{-n} = n(u_n + u_n^{-1})$.

D'où
$$\frac{n}{2}(u_n + u_n^{-1}) \leq u_n^{-n} \leq n(u_n + u_n^{-1}).$$

Donc
$$\frac{n}{2}u_n^{-1} \leq u_n^{-n} \leq 2nu_n^{-1}.$$

D'où
$$\frac{n}{2} \leq u_n^{-n+1} \leq 2n.$$

Par élévation à la puissance $1/(n-1)$, puis par passage à l'inverse, on en déduit le second encadrement.

4) Notons que, d'après les croissances comparées et la continuité de la fonction exponentielle,

$$\left(\frac{1}{2n}\right)^{n-1} = \exp\left(\frac{\ln(1/2n)}{n-1}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(0) = 1.$$

De même,
$$\left(\frac{2}{n}\right)^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Par le théorème d'encadrement,
$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13 Continuité et suite

Soit $n \in \mathbb{N}$, appliquons l'inégalité à u_n , $f(u_n) < u_n$, donc $u_{n+1} < u_n$.
La suite u est donc décroissante. D'après le théorème de convergence monotone

- soit u tend vers $-\infty$;
- soit u converge vers une limite finie.

Raisonnons par l'absurde en supposant que u converge vers une limite finie ℓ .

Par continuité de f sur \mathbb{R} , $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$.

Or, $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Par unicité de la limite, $\ell = f(\ell)$. Ce cas est impossible puisque par hypothèse, pour tout réel x , $f(x) < x$. Concluons

La suite u tend vers $-\infty$.

Exercice 14

Remarquons que les fonctions constantes sont solutions. Montrons que ce sont les seules.

Soit f une solution. Soit $x \in \mathbb{R}$. On définit la suite u par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = x/2^n$.

Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: $f(u_n) = f(x)$.

- **Initialisation.** Comme $u_0 = x$, $\mathcal{P}(0)$ est clairement vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$.

D'après l'énoncé $f(u_{n+1}) = f(2u_{n+1})$, on a alors :

$$f(u_{n+1}) = f(2u_{n+1}) = f(u_n) \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} f(x).$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. En particulier

$$f(u_n) = f(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x).$$

De plus, par continuité de f en 0, on trouve

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{donc} \quad f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0).$$

Par unicité de la limite, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(0)$.

Conclusion

f est une fonction constante.

Remarque

On utilise uniquement la continuité en 0 de f

Exercice 15

- Notons dans un premier temps que la fonction f est paire. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = f((-x)^2) = f(x^2) = f(x).$$

On peut donc restreindre l'étude à \mathbb{R}^+ .

- Soit $x \in \mathbb{R}_*^+ \setminus \{1\}$, on a par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x^{1/2^n})$. De nouveau, par continuité de f en 1,

$$f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 1} f(1) \quad \text{et} \quad x^{1/2^n} = e^{\ln(x)/2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^0 = 1.$$

Par composition, $f(x) = f(x^{1/2^n}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(1)$.

Par unicité de la limite, $f(x) = f(1)$.

- Par continuité de f en 0, on a aussi $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} f(0)$. Or, pour $x \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$, $f(x) = f(1)$.

Donc par unicité de la limite $f(0) = f(1)$.

- En conclusion, à l'aide de la parité de f

f est constante sur \mathbb{R} .

Précisons que la réciproque est évidente : les fonctions constantes sont solutions.

Dérivation

15

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Calculs de dérivées

Après avoir précisé les domaines de définition et de dérivabilité, calculer les dérivées de

- 1) $h_1 : x \mapsto \sqrt{2x+1}^3$,
- 2) $h_2 : x \mapsto \cos\left(\frac{1}{x}\right)$,
- 3) $h_3 : x \mapsto \ln(\ln(x))$,
- 4) $h_4 : x \mapsto e^{x+\ln(1+x^2)}$,
- 5) $h_5 : x \mapsto \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$,
- 6) $h_6 : x \mapsto x^{2/(x+1)}$,
- 7) $h_7 : x \mapsto \ln(\cos(x))$,
- 8) $h_8 : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$,
- 9) $h_9 : x \mapsto \ln\left(\frac{1-\sin(x)}{1+\sin(x)}\right)$.

Exercice 2 ** Dérivées avec la fonction arctangente

Après avoir précisé les domaines de définition et de dérivabilité, calculer les dérivées de

- 1) $x \mapsto (\arctan(x))^4$,
- 2) $x \mapsto \arctan(x^4)$,
- 3) $x \mapsto \arctan(\sqrt{x})$,
- 4) $x \mapsto (\arctan(x))^x$.

Exercice 3 * Inégalités à l'aide de la dérivée

- 1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
- 2) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Exercice 4 ** Application du théorème de prolongement de classe C^1

Justifier que pour tout entier $\alpha \geq 4$, l'application f_α est de classe C^1 sur \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f_\alpha(x) = x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et } f_\alpha(0) = 0.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable dont la dérivée ne s'annule pas. Montrer que f est injective.

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable avec

$$\lim_{+\infty} f = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{-\infty} f = +\infty.$$

Montrer que la dérivée de f s'annule au moins une fois.

Exercice 7 *

Soit g une fonction dérivable sur \mathbb{R} telle que $g(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

1) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, prouver que pour tout entier naturel n

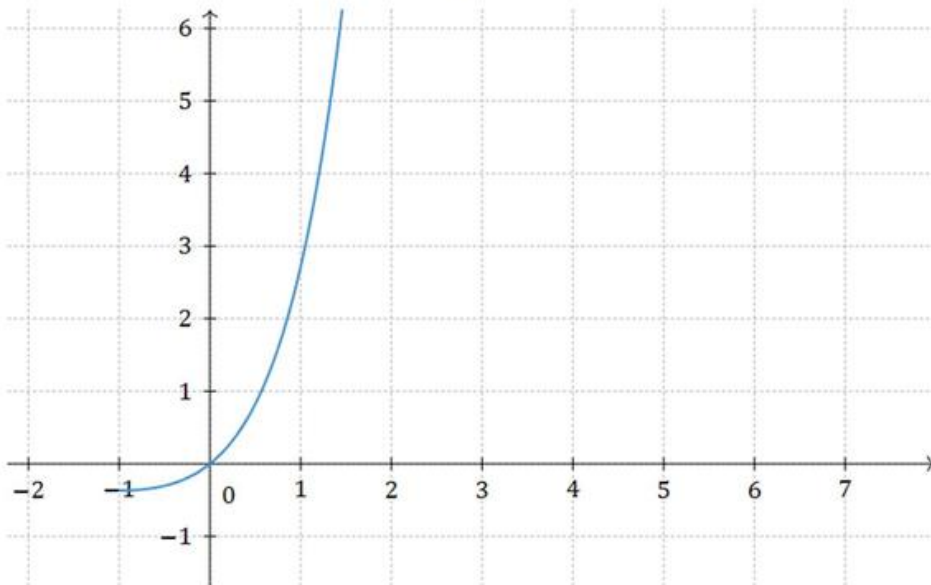
$$|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |u_n|.$$

2) En déduire l'existence et le calcul de la limite de la suite u .

Exercice 8 * Fonction de Lambert

Pour tout réel x , on pose $f(x) = xe^x$.

- Justifier que la fonction f définit une bijection de $I = [-1, +\infty[$ sur $J = [-1/e, +\infty[$.
- Dans la suite, on note W la bijection réciproque. Préciser les variations de W sur J .
- Voici le graphe de f . Compléter avec le graphe de W .



- 4) a) Préciser $W(0)$ et $W(e)$.
 b) Justifier que W est dérivable sur $J \setminus \{-1/e\}$ avec pour tout $x \in J \setminus \{-1/e\}$

$$W'(x) = \frac{1}{x + e^{W(x)}}$$

- c) En déduire les équations des tangentes en 0 et en e de la fonction W .

Exercice 9 * Considérons la suite S de terme général $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k^2}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

- 1) a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{R}^+$,

$$\frac{1}{1+(k+1)^2} \leq \arctan(k+1) - \arctan(k) \leq \frac{1}{1+k^2}$$

- b) En déduire un majorant de la suite S .
 2) Justifier la convergence de la suite S et un encadrement de la limite.

Exercice 10 ** *Théorème de Rolle généralisé à $[a, +\infty[$*

Soient a un réel et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et qui vérifie $f(a) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. Soit F la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$F : x \mapsto \begin{cases} f\left(\frac{1}{x} + a - 1\right) & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- 1) a) Justifier que F est continue sur $[0,1]$.
 b) Montrer que F' s'annule en un point de $]0,1[$.
 c) En déduire que f' s'annule en un point de $]a, +\infty[$.
 2) Soient b un réel et g une fonction continue sur l'intervalle $]-\infty, b]$, dérivable sur l'intervalle $]-\infty, b[$ et qui vérifie $g(b) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$.
 Montrer que g' s'annule en un point de $]-\infty, b]$.

Exercice 11 ** Soit f définie sur $I =]0, \pi/2]$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

- 1) Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à préciser.
 2) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J .
 3) Montrer que pour tout $x \in I$: $f'(x) = -f(x)\sqrt{f(x)^2 - 1}$.
 4) En déduire que pour tout $x \in]1, +\infty[$ la valeur de $(f^{-1})'(x)$

Exercice 12 ** Généralisation des accroissements finis

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et $a \in I$. On suppose que pour tout $x \in I$, $g'(x) \neq 0$.

- 1) Montrer que pour tout $b \in I \setminus \{a\}$: $g(b) - g(a) \neq 0$.
- 2) Montrer que pour tout $b \in I \setminus \{a\}$, il existe c_b compris entre a et b , tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_b)}{g'(c_b)}.$$

Indication. Considérer, pour un certain réel λ bien choisi, la fonction $h : x \mapsto f(x) - \lambda g(x)$.

- 3) Application.

- a) Montrer que si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \ell$.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2}$.

Exercice 13 **

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ avec $a < b$ et ne s'annulant pas sur $[a, b]$. En appliquant l'égalité des accroissements finis à une fonction convenablement choisie, montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b-a) \frac{f'(c)}{f(c)}\right).$$

Exercice 14 ** Un peu de géométrie

Soit f dérivable sur I et bijective. Soit $a \in I$ tel que $f'(a) \notin \{0; 1\}$. Notons \mathcal{D} la droite d'équation $y = x$, T (resp. T') la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a (resp. de f^{-1} au point d'abscisse $f(a)$).

Justifier que ces trois droites sont concourantes en un même point.

Exercice 15 *** Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n le polynôme défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (1 - x^2)^n.$$

- 1) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, le polynôme $P_n^{(k)}$, dérivée k -ième de P_n admet $k+2$ racines distinctes dans $[-1, 1]$
- 2) Que peut-on en déduire pour les racines du polynôme $P_n^{(n)}$?

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 16 * Vrai ou faux?

Soit I un intervalle symétrique de \mathbb{R} (c'est-à-dire : $\forall x \in I, -x \in I$). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Pour chacune des assertions suivantes, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

- 1) Si f est périodique alors f' est aussi périodique.
- 2) Si f est paire alors f' est impaire.
- 3) Si f' est impaire alors f est paire.
- 4) Si f' est paire alors f est impaire.

Exercice 17 *** Fonctions 2-hôldériennes

En étudiant la dérivée, déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2.$$

Corrections

☰ Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Calculs de dérivées

- 1) Précisons que la fonction racine carrée est définie sur \mathbb{R}^+ et dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Par composition, h_1 est définie sur $D_1 = [-1/2, +\infty[$ et dérivable sur $D_1' =]-1/2, +\infty[$.

Pour tout $x \in D_1'$, $h_1(x) = (2x + 1)^{3/2}$, d'où $h_1'(x) = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (2x + 1)^{3/2-1}$, donc

$$\forall x \in D_1', h_1'(x) = 3\sqrt{2x + 1}.$$

- 2) $x \mapsto 1/x$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* , la fonction cosinus est définie et dérivable sur \mathbb{R} . Par composition, h_2 est définie et dérivable sur $D_2 = \mathbb{R}^*$ avec, pour tout $x \in D_2$,

$$h_2'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right), \text{ donc } h_2'(x) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}.$$

- 3) La fonction \ln est définie sur \mathbb{R}_+^* . Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow x > 1$. Donc $h_3 = \ln \circ \ln$ est définie sur $D_3 =]1, +\infty[$. Elle est dérivable sur D_3 car \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Pour tout $x \in D_3$,

$$h_3'(x) = \frac{\ln'(x)}{\ln(x)}, \text{ donc } h_3'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}.$$

- 4) La fonction h_4 est définie sur \mathbb{R} car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1+x^2 > 0$. On simplifie l'expression. Pour $x \in \mathbb{R}$, $h_4(x) = e^x \cdot e^{\ln(1+x^2)} = (1+x^2)e^x$. La dérivée existe comme produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} avec pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$h_4'(x) = (x^2 + 1)e^x + 2xe^x = (x + 1)^2 e^x.$$

- 5) Par stricte croissance de la fonction racine sur \mathbb{R}_+ ,

$$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x \quad (|x| = -x \text{ si } x \leq 0 \text{ et } |x| > -x \text{ si } x > 0).$$

Donc $x + \sqrt{1+x^2} > 0$. Le dénominateur ne s'annule jamais; h_5 est définie sur \mathbb{R} . En introduisant la fonction $g : x \mapsto 1+x^2$, on a, pour tout x réel :

$h_5(x) = 1/(x + \sqrt{g(x)})$. La fonction g est à valeurs dans $[1, +\infty[$. Comme la fonction racine est dérivable sur \mathbb{R}_+ , h_5 est dérivable sur \mathbb{R} comme quotient de composées et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} h_5'(x) &= -\frac{1 + (g'(x)/(2\sqrt{g(x)}))}{(x + \sqrt{1+x^2})^2} = -\frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})^2} \\ &= \boxed{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2} (x + \sqrt{1+x^2})}}. \end{aligned}$$

- 6) On a $h_6(x) = \exp\left(\frac{2 \ln(x)}{x+1}\right)$ (le passage en exponentielle est nécessaire car l'exposant n'est pas entier et dépend de x). Notons $g : x \mapsto 1+x$ définie sur \mathbb{R} .

La fonction $h_6 = \exp \circ (2 \ln / g)$ est définie sur \mathbb{R}_+^* . Elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$h_6'(x) = \frac{2(x+1)/x - 2 \ln(x)}{(x+1)^2} \exp\left(\frac{2 \ln(x)}{x+1}\right) = \boxed{\frac{2(x+1) - 2x \ln(x)}{x(x+1)^2} x^{2/(x+1)}}.$$

- 7) $h_7(x)$ est défini si $\cos(x) > 0$.

En revenant au cercle trigonométrique, cela correspond à $x \in D_7$ où

$$D_7 = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right[.$$

La fonction cosinus est dérivable sur D_7 et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Par composition, h_7 est dérivable sur D_7 avec pour tout $x \in D_7$,

$$h_7'(x) = -\sin(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}, \quad \text{donc} \quad \boxed{h_7'(x) = -\tan(x)}.$$

- 8) $h_8(x)$ est défini si $\frac{1-x}{1+x} > 0$. Un tableau de signe donne $x \in D_8 =]-1, 1[$.

La fonction h_8 est dérivable sur D_8 . Pour tout $x \in D_8$, on a $1+x > 0$ et $1-x > 0$.

On peut donc écrire, pour tout $x \in D_8$

$$h_8(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x).$$

Par composition h_8 est dérivable sur D_8 et, pour tout $x \in D_8$,

$$h_8'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}, \quad \text{donc} \quad \boxed{h_8'(x) = \frac{1}{1-x^2}}$$

- 9) Notons que $h_9 = h_8 \circ \sin$. Posons $D_9 = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$. La fonction sinus est dérivable sur D_9 et à valeurs dans $] -1, 1[$. Or, h_8 est dérivable sur $] -1, 1[$. Par composition, h_9 est dérivable sur son ensemble de définition D_9 avec pour tout $x \in D_9$,

$$h_9'(x) = \cos(x) \cdot h_8'(\sin(x)) = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \boxed{\frac{1}{\cos(x)}}$$

Exercice 2 Dérivées avec la fonction arctangente

- 1) La fonction $f : t \in \mathbb{R} \mapsto t^4 \in \mathbb{R}$ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynomiale. En particulier, elle est dérivable sur I . Par composition de fonctions dérivables, $f \circ \arctan$ est dérivable sur \mathbb{R} avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \circ \arctan)'(x) = \arctan'(x) \times f'(\arctan(x)) = \boxed{\frac{4}{1+x^2} (\arctan(x))^3}$$

- 2) De même, la fonction composée $\arctan \circ f$ est dérivable sur \mathbb{R} avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\arctan \circ f)'(x) = f'(x) \times \arctan'(f(x)) = \boxed{\frac{4x^3}{1+x^8}}$$

- 3) Posons $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x} \in \mathbb{R}^+$. g est définie sur \mathbb{R}_+ et dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Par composition, $\arctan \circ g$ est définie sur \mathbb{R}_+ et dérivable sur \mathbb{R}_+^* avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad (\arctan \circ g)'(x) = g'(x) \times \arctan'(g(x)) = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}}$$

- 4) Par définition des puissances non entières : $\arctan(x)^x = \exp(x \ln(\arctan(x)))$.

Cette expression n'est donc définie que pour $\arctan(x) \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Posons $h : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x \ln(\arctan(x)) \in \mathbb{R}$.

La composée $\ln \circ \arctan$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme composée (la fonction logarithme étant dérivable sur \mathbb{R}_+^*). Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$(\ln \circ \arctan)'(x) = \arctan'(x) \times \ln'(\arctan(x)) = \frac{1}{(1+x^2)\arctan(x)}$$

Par produit de fonctions dérivables, h est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Pour $x > 0$:

$$h'(x) = x(\ln \circ \arctan)'(x) + \ln(\arctan(x)) = \frac{x}{(1+x^2)\arctan(x)} + \ln(\arctan(x)).$$

La dérivée recherchée s'obtient par composition avec la fonction exponentielle :

$$(\exp \circ h)'(x) = h'(x) \times \exp'(h(x)) = h'(x) \times \exp(h(x))$$

$$(\exp \circ h)'(x) = \left(\frac{x}{(1+x^2)\arctan(x)} + \ln(\arctan(x)) \right) (\arctan(x))^x.$$

Exercice 3 Inégalités à l'aide de la dérivée

- 1) Pour l'inégalité de droite, on introduit la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) - x$. f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \cos(x) - 1 \leq 0.$$

Donc la fonction f est décroissante sur \mathbb{R} . Et comme $f(0) = 0$, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $f(x) \leq 0$.

- Pour l'inégalité de gauche, on introduit la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$.

$$g'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}, \quad g''(x) = -\sin(x) + x, \quad g'''(x) = -\cos(x) + 1 \geq 0.$$

Donc g'' est croissante sur \mathbb{R} . Or $g''(0) = 0$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $g''(x) \geq 0$.

Alors g' est croissante sur \mathbb{R}^+ . Or $g'(0) = 0$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $g'(x) \geq 0$.

Finalement, g est croissante sur \mathbb{R}^+ . D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $g(x) \geq g(0) = 0$.

Ces deux études de fonctions permettent de conclure

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x.$$

- 2) On pose $h : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{120}$. La fonction h est indéfiniment dérivable comme somme.

On opère comme à la question précédente : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(x) = -g(x) \leq 0$.

Puis, en remontant jusqu'à h , il vient : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h(x) \leq 0$.

Conclusion

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Remarque

On peut aussi montrer directement ces inégalités en utilisant la formule de Taylor-Lagrange qui sera vue au second semestre.

Exercice 4 Application du théorème de prolongement de classe \mathcal{C}^1

Remarque

Par les théorèmes généraux, on étudie la continuité et la dérivabilité sur \mathbb{R}^* . Puis, en revenant à la définition de la continuité et par le théorème de prolongement, on traite le cas en 0.

• *Continuité.*

La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est continue sur \mathbb{R} car polynomiale. $x \mapsto 1/x^2$ est continue sur \mathbb{R}^* à valeurs dans \mathbb{R} . La fonction sinus est continue sur \mathbb{R} . Par produit et composition de fonctions continues, f_α est continue sur \mathbb{R}^* .

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, comme la fonction sinus est bornée par 1,

$$\left| f_\alpha(x) - f_\alpha(0) \right| = \left| x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq |x|^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Par encadrement, $f_\alpha(x) - f_\alpha(0) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc $f_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f_\alpha(0)$.

Donc f est aussi continue en 0.

• *Dérivabilité.*

La fonction $x \mapsto 1/x^2$ est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* à valeurs dans \mathbb{R} . Les fonction sinus et $x \mapsto x^\alpha$ (polynomiale) sont dérivables sur \mathbb{R} . Par produit et composition, f_α est dérivable sur \mathbb{R}^* avec pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^\alpha \cdot \frac{-2}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On constate que f'_α est continue sur \mathbb{R}^* par produit et composition de fonctions continues. f est donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* . De plus,

$$\left| \alpha x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq \alpha |x|^{\alpha-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \left| x^\alpha \cdot \frac{-2}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \right| \leq 2|x|^{\alpha-3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Par encadrement, $f'_\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Par le théorème de prolongement \mathcal{C}^1 , f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0) = 0$ et

$$f_\alpha \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas injective. Il existe donc $\alpha < \beta$ tels que $f(\alpha) = f(\beta)$. Comme f est dérivable sur \mathbb{R} :

- f est continue sur $[\alpha, \beta]$;
- f est dérivable sur $] \alpha, \beta [$;
- $f(\alpha) = f(\beta)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $\gamma \in] \alpha, \beta [$ tel que $f'(\gamma) = 0$. Absurde. En conclusion,

$$f \text{ est injective.}$$

Exercice 6

D'après les hypothèses sur les limites de f , il existe deux réels α et β tels que

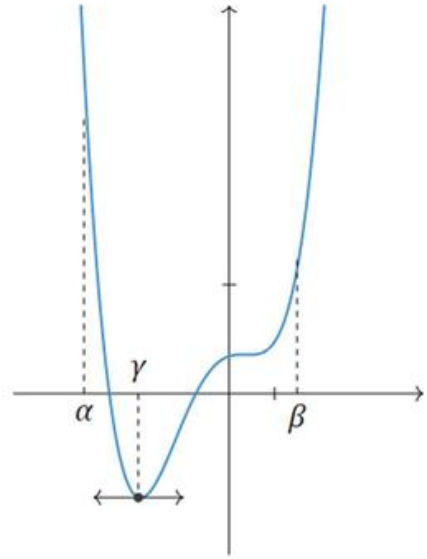
$$\alpha < 0 < \beta \quad \text{et} \quad f(\alpha) > f(0), \quad f(\beta) > f(0).$$

De plus, f est continue sur l'intervalle fermé et borné $[\alpha, \beta]$. f admet donc un minimum sur cet intervalle.

$$\exists \gamma \in [\alpha, \beta], \quad \forall x \in [\alpha, \beta], \quad f(x) \geq f(\gamma).$$

Notons que γ est différent de α et β car $f(\gamma) \leq f(0)$. Ainsi, γ est un point critique $f'(\gamma) = 0$.

f' s'annule au moins une fois.



Exercice 7

Remarque

Ce court exercice met en évidence l'intérêt du théorème des accroissements finis dans l'étude des suites récurrentes.

1) On remarque que $|u_{n+1} - 0| = |g(u_n) - g(0)|$, ce qui oriente vers une utilisation de l'inégalité des accroissements finis.

Par hypothèse, g est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|g'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

L'inégalité des accroissements finis appliquée à g sur l'intervalle \mathbb{R} donne

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |g(x) - g(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|.$$

Comme $g(0) = 0$, on obtient, pour tout x réel $|g(x)| \leq \frac{|x|}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité précédente à $x = u_n \in \mathbb{R}$,

$$|u_{n+1}| = |g(u_n)| \leq \frac{|u_n|}{2}.$$

2) Par récurrence, on prouve que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \frac{1}{2^n}|u_0|$. Puis, par encadrement,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 8 Fonction de Lambert

- 1)
- f
- est dérivable sur
- I
- en tant que produit de fonctions dérivables sur
- I
- .

Pour $x \in I$, $f'(x) = (1+x)e^x$. On constate que pour tout $x \in I \setminus \{-1\}$, $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur l'intervalle I .

Remarque

Il ne faut pas oublier de préciser que l'on se place sur un intervalle. On pourra penser à $x \in \mathbb{R}^* \mapsto 1/x$ pour un contre-exemple. La dérivée est bien négative mais la fonction n'est pas strictement décroissante. \mathbb{R}^* n'est pas un intervalle.

De plus, $f(-1) = -1/e$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

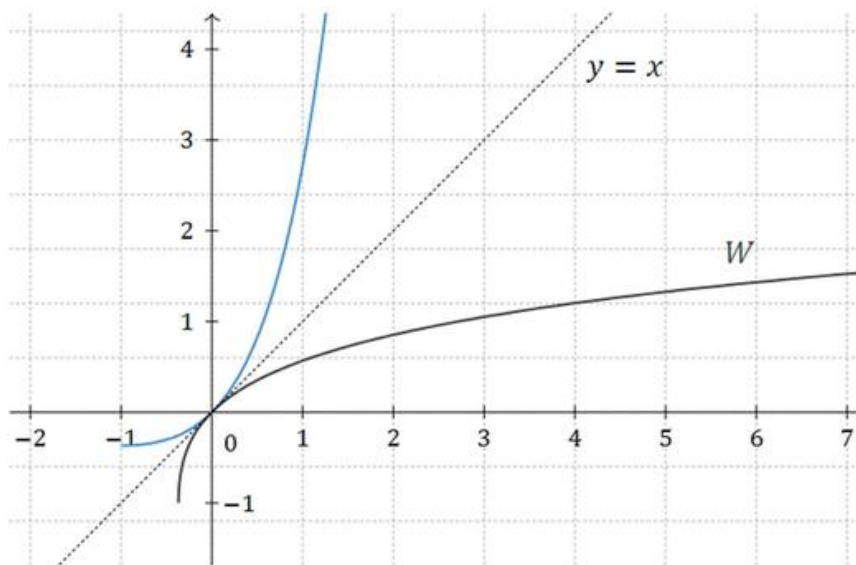
D'après le théorème de la bijection,

f définit une bijection de $[-1, +\infty[$ dans $[-1/e, +\infty[$.

- 2) De nouveau, le théorème de la bijection précise que l'application réciproque est continue et la réciproque a le même sens de variation que la fonction. Ici,

W est strictement croissante sur J .

- 3) Pour obtenir le graphe de
- W
- , il suffit de faire la symétrie par rapport à l'axe
- $y = x$
- .



- 4) a) Comme
- $f(0) = 0$
- et
- $f(1) = e$
- , on a
- $W(0) = 0$
- et
- $W(e) = 1$
- .

- b) Pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f'(x) \neq 0$. Précisons que $f(-1) = -1/e$ et $f'(-1) = 0$. Il faut donc exclure $-1/e$ de l'ensemble de dérivation de W . D'après le théorème de dérivation des applications réciproques, W est dérivable sur $J \setminus \{-1/e\}$ avec pour tout $x > -1/e$,

$$\begin{aligned}
 W'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\
 &= \frac{1}{f'(W(x))} \\
 &= \frac{1}{(W(x) + 1)e^{W(x)}} \\
 &= \frac{1}{x + e^{W(x)}}.
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} f^{-1} = W \\ f'(t) = (1+t)e^t \\ \text{car } f(W(x)) = x, \\ \text{et donc } W(x)e^{W(x)} = x \end{array} \right\}$

c) L'équation de la tangente en 0 est $y = W'(0)(x - 0) + W(0)$. Or, on a vu

$$W(0) = 0 \quad \text{et} \quad W'(0) = \frac{1}{0 + e^{W(0)}} = 1, \quad \text{d'où, } \boxed{T_0 : y = x.}$$

- Comme $W(e) = 1$, $W'(e) = 1/(e + e^{W(e)}) = 1/(2e)$.
L'équation de la tangente en e est

$$\boxed{T_e : y = \frac{1}{2e}(x - e) + 1.}$$

Exercice 9

1) a) Soit $k \in \mathbb{R}^+$. La fonction arctan est dérivable sur $[k, k + 1]$ avec

$$\forall x \in [k, k + 1], \quad \arctan'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

On en déduit l'encadrement, pour $x \in [k, k + 1]$.

$$\frac{1}{(k + 1)^2 + 1} \leq \arctan'(x) \leq \frac{1}{k^2 + 1}.$$

À l'aide de l'inégalité des accroissements finis (avec $(k + 1) - k = 1$),

$$\boxed{\frac{1}{1 + (k + 1)^2} \leq \arctan(k + 1) - \arctan(k) \leq \frac{1}{1 + k^2}.}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. À l'aide d'un changement d'indice,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + k^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + (k + 1)^2} \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\arctan(k + 1) - \arctan(k)).$$

On a une somme télescopique, $S_n \leq \arctan(n) - \arctan(0) \leq \arctan(n) \leq \frac{\pi}{2}$.

$\pi/2$ est un majorant de la suite S .

- 2) • D'après la question précédente, la suite S est majorée.
• De plus, S est croissante. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{1+k^2} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{1+(n+1)^2} \geq 0.$$

D'après le théorème de convergence monotone, La suite S est convergente.

En reprenant la question précédente, on a la minoration

$$S_n \geq \sum_{k=1}^n (\arctan(k+1) - \arctan(k)) = \arctan(n+1) - \arctan(1).$$

Sachant que $\arctan(1) = \pi/4$ et $\arctan(n+1) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi/2$, on a

$$\frac{\pi}{4} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \leq \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 10 Théorème de Rolle généralisé à $[a, +\infty[$

- 1) a) Par hypothèse sur f

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{x} + a - 1 \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} +\infty.$$

Par composition, $F(x) = f\left(\frac{1}{x} + a - 1\right) \xrightarrow[x \rightarrow 0^+]{} 0 = F(0).$

C'est-à-dire, F est continue en 0. De plus, par composition, F est continue sur $]0,1[$.
Finalement, F est continue sur $[0,1]$.

- b) On a $F(1) = f(1 + a - 1) = f(a) = 0$. En particulier, $F(0) = F(1)$. De plus, par composition, F est dérivable sur $]0,1[$. D'après le théorème de Rolle,

F' s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

- c) D'après le théorème de dérivation des fonctions composées, pour tout $x \in]0,1[$,

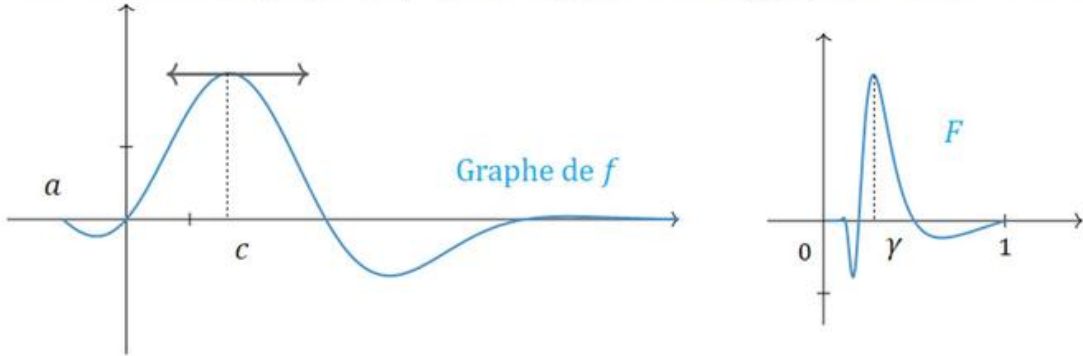
$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} f' \left(\frac{1}{x} + a - 1 \right).$$

Soit $\gamma \in]0,1[$ tel que $F'(\gamma) = 0$. Si on pose $c = 1/\gamma + a - 1$, alors $f'(c) = 0$.

f' s'annule au moins une fois sur $]a, +\infty[$.

Remarque

Donnons un exemple de graphe de f et de F pour illustrer le résultat et la preuve. L'idée est de contracter le graphe de f sur un segment afin d'appliquer *le théorème de Rolle*.



- 2) Posons $a = -b$ et pour tout réel $x \geq a$, $f(x) = g(-x)$. f vérifie les hypothèses de la première question. f' s'annule donc au moins une fois, puis,

g' s'annule au moins une fois sur $]-\infty, b[$.

Exercice 11

- 1) f est continue sur I . De plus, sinus est strictement croissante sur I à valeurs dans \mathbb{R}_+^+ et $x \mapsto 1/x$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^+ , par composition f est strictement décroissante sur I . De plus,

$$\sin(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^+ \quad \text{et} \quad \sin(\pi/2) = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \quad \text{et} \quad f(\pi/2) = 1.$$

D'après *le théorème de la bijection*,

f réalise une bijection de I sur $J = [1, +\infty[$.

- 2) f est dérivable sur I avec pour tout $x \in I$, $f'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$. La dérivée s'annule uniquement en $\pi/2$. D'après *le théorème de dérivation des applications composées*, f^{-1} est dérivable sur $J \setminus \{1\}$.

3) Soit $x \in I$,

$$\begin{aligned}
 f(x)\sqrt{f(x)^2 - 1} &= \frac{1}{\sin(x)} \sqrt{\frac{1}{\sin^2(x)} - 1} && \text{on réduit au même dénominateur} \\
 &= \frac{1}{\sin(x)} \sqrt{\frac{1 - \sin^2(x)}{\sin^2(x)}} && \text{car } \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \\
 &= \frac{1}{\sin(x)} \sqrt{\frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)}} && \text{sur } I, \cos(x) \geq 0, \sin(x) > 0 \\
 &= \frac{1}{\sin(x)} \frac{\cos(x)}{\sin(x)} && \text{on retrouve l'expression de } f'(x) \\
 &= \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = -f'(x).
 \end{aligned}$$

4) D'après le théorème de dérivation des applications composées, pour $x \in]1, +\infty[$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = -\frac{1}{f(f^{-1}(x))\sqrt{f(f^{-1}(x))^2 - 1}} = \boxed{\frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}}.$$

Exercice 12 Généralisation des accroissements finis

1) D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in I$ tel que

$$\boxed{g(b) - g(a) = (b - a)g'(c) \neq 0}.$$

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, posons $h : x \mapsto f(x) - \lambda g(x)$. h est dérivable sur I par différence de fonctions dérivables sur I avec pour tout $x \in I$,

$$h'(x) = f'(x) - \lambda g'(x).$$

Appliquons une nouvelle fois le théorème de Rolle :

- h est dérivable sur $]a, b[$ si $a < b$ (resp. $]b, a[$ si $a > b$);
- h est continue sur $[a, b]$ (resp. $[b, a]$);
- $h(a) = h(b)$ si l'on choisit $\lambda = (f(b) - f(a))/(g(a) - g(b))$.

Il existe donc c_b , compris entre a et b , tel que

$$h'(c_b) = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_b)}{g'(c_b)}}.$$

3) a) Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Comme c_x est compris entre a et x , par encadrement, $c_x \xrightarrow{x \rightarrow a} a$.

Par composition, on obtient

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} \ell \quad \text{donc} \quad \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} \ell.$$

Puis,

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} \ell.$$

Remarque

Cet énoncé est connu sous le nom de règle de L'Hôpital (Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704)).

b) Posons pour $x \in]0, +\infty[$,

$$f(x) = (x - 1) - \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = (x - 1)^2.$$

f et g sont dérivables sur $]0, +\infty[$ avec

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, \quad g'(x) = 2(x-1), \quad \text{donc} \quad \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{1}{2x} \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} \frac{1}{2}.$$

D'après ce qui précède,

$$\boxed{\frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} \underset{x \rightarrow 1}{\rightarrow} \frac{1}{2}}$$

Exercice 13

• Précisons que f est de signe constant sur $[a, b]$. En effet, si cela n'est pas le cas, le théorème des valeurs intermédiaires permet de justifier que f s'annule au moins un fois. Ce cas est exclu par hypothèse sur f . En particulier, $|f|$ est strictement positive et dérivable sur $[a, b]$. Posons pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = \ln(|f(x)|)$. Par composition, g une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

Le théorème des accroissements finis s'applique, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(c), \quad \text{donc} \quad \frac{\ln(|f(b)|) - \ln(|f(a)|)}{b - a} = f'(c) \cdot \frac{1}{f(c)}.$$

Comme f est de signe constant $|f(b)|/|f(a)| = f(b)/f(a)$, et

$$\ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b - a) \frac{f'(c)}{f(c)}, \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b - a) \frac{f'(c)}{f(c)}\right)}.$$

Remarque

Expliquons comment trouver la fonction g .
On cherche une transformation qui permette d'utiliser le théorème des accroissements finis. Pour passer du quotient $\frac{f(b)}{f(a)}$ à $g(b) - g(a)$, on pose $g = \ln \circ f$. Si une telle égalité est vraie et si la composition avec \ln est licite,

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left((b - a) \frac{f'(c)}{f(c)}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right) = (b - a) \frac{f'(c)}{f(c)} \Leftrightarrow \frac{\ln(f(b)) - \ln(f(a))}{b - a} = \frac{f'(c)}{f(c)} = (\ln \circ f)'(c).$$

Exercice 14 *Un peu de géométrie*

Notons que la réciproque est bien dérivable en $f(a)$ puisque, par hypothèse, $f'(a) \neq 0$. La tangente T' est bien définie.

- Déterminons le point d'intersection des droites T et \mathcal{D} .
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Si x_0 est l'abscisse du point d'intersection,

$$x_0 = f'(a)(x_0 - a) + f(a) \Leftrightarrow x_0 = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a) - 1}$$

Précisons que x_0 est bien défini car $f'(a) \neq 1$.

- De même, déterminons le point d'intersection des droites T' et \mathcal{D} .
L'équation de la tangente à la courbe représentative de f^{-1} au point d'abscisse $f(a)$ est

$$y = (f^{-1})'(f(a))(x - f(a)) + f^{-1}(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}(x - f(a)) + a.$$

Si x_1 est l'abscisse du point d'intersection,

$$x_1 = \frac{1}{f'(a)}(x_1 - f(a)) + a \Leftrightarrow x_1 = \frac{af'(a) - f(a)}{f'(a) - 1}$$

On constate que $x_1 = x_0$, \mathcal{D} , T et T' sont concourantes.

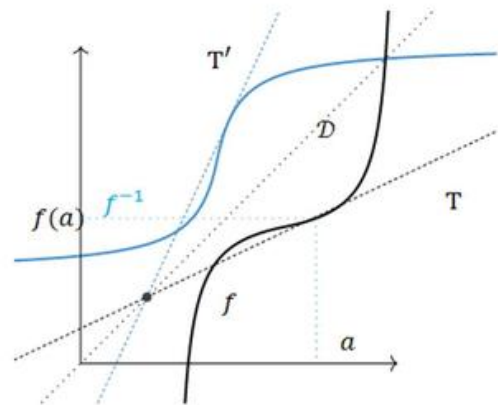
Remarque

On peut démontrer graphiquement ce résultat.

La condition $f'(a) \neq 1$ permet de s'assurer que les droites T et \mathcal{D} ne soient pas parallèles. Elles peuvent donc s'intersecter en un unique point.

Comme le graphe de f^{-1} et celui de f sont symétriques par rapport à \mathcal{D} , nécessairement T' intersecte \mathcal{D} au même point.

Les trois droites sont bien concourantes.

**Exercice 15**

- 1) On remarque que, pour tout x réel, $P_n(x) = (1 - x)^n(1 + x)^n$. Donc 1 et -1 sont racines d'ordre n de P_n . D'après les propriétés des racines multiples, 1 et -1 sont racines des polynômes $P_n^{(k)}$ pour $0 \leq k \leq n - 1$.

Montrons par récurrence finie que la propriété

$$Q(k) : \text{« le polynôme } P_n^{(k)} \text{ admet } k + 2 \text{ racines distinctes dans } [-1, 1] \text{ »}$$

est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- **Initialisation.** P_0 admet -1 et 1 comme racines donc $Q(0)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $k \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket$. Supposons $Q(k)$. Le polynôme $P_n^{(k)}$ admet $k + 2$ racines. Notons les par ordre croissant : $-1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{k+2} \leq 1$. Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, le polynôme $P_n^{(k)}$ est continu, dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$. D'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $P_n^{(k+1)}(y_i) = 0$.

Ainsi $-1 \leq x_1 < y_1 < x_2 < \dots < x_{k+1} < y_{k+1} < x_{k+2}$.

Donc $(y_i)_{1 \leq i \leq k+1}$ sont $k + 1$ racines distinctes de $P_n^{(k+1)}$. Comme -1 et 1 sont aussi des racines de $P_n^{(k+1)}$, on obtient $k + 3$ racines distinctes pour $P_n^{(k+1)}$ dans $[-1, 1]$.

On a montré que, si $Q(k)$ est vraie, alors $Q(k + 1)$ est vraie.

- **Conclusion.**

Pour $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, le polynôme $P_n^{(k)}$ admet $k + 2$ racines distinctes dans $[-1, 1]$.

- 2) Le polynôme $P_n^{(n-1)}$ admet $n + 1$ racines dans l'intervalle $[-1, 1]$. Alors, en raisonnant comme au début de l'hérédité, on obtient que $P_n^{(n)}$ admet n racines dans l'intervalle $[-1, 1]$. De plus $P_n^{(n)}$ est la dérivée n -ième d'un polynôme de degré $2n$. Il est donc de degré n . Donc

Toutes les racines de $P_n^{(n)}$ sont simples et dans l'intervalle $] -1, 1[$.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 16 Vrai ou faux?

1) **Vrai.**

Supposons que f soit T -périodique. Alors : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$.

En notant $g : x \mapsto f(x + T)$, on a $f = g$, et g est dérivable sur \mathbb{R} , comme composée de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \mathbb{R}, g'(x) = f'(x + T)$. Par conséquent, f' est T -périodique.

2) **Vrai.**

Supposons que f soit paire. Alors : $\forall x \in I, f(x) = f(-x)$.

En notant $g : x \mapsto f(-x)$, on a donc $f = g$ sur I , et g est dérivable sur I car f l'est. En dérivant, on obtient, pour tout $x \in I, f'(x) = g'(x)$, et par dérivation d'une fonction composée, on vérifie que $g'(x) = -f'(-x)$. Donc

$$\forall x \in I, f'(x) = -f'(-x),$$

ce qui signifie que f' est impaire.

Remarque

De même, la dérivée d'une fonction impaire est paire.

3) **Vrai.**

Posons pour tout $x \in I$, $g(x) = f(x) - f(-x)$. g est dérivable et pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = f'(x) + f'(-x) = 0 \quad \text{car } f' \text{ est impaire.}$$

g est définie sur un intervalle donc g est constante. Comme I est un intervalle symétrique, $0 \in I$ et $g(0) = f(0) - f(0) = 0$. Ainsi, g est la fonction nulle.

Pour tout $x \in I$, $f(x) = f(-x)$, f est paire.

Remarque

L'hypothèse que I est un intervalle est fondamentale ici. Sinon, le résultat est faux.

4) **Faux.**

$f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + 1$ est un contre-exemple. f n'est pas impaire car $f(0) \neq 0$, pourtant f' est paire.

Remarque

Le raisonnement de la question précédente ne s'adapte pas au cas d'une fonction impaire. Si, on pose $g(x) = f(x) + f(-x)$ alors g est bien de dérivée nulle sur I , donc constante mais on ne peut plus conclure que g est nulle en utilisant 0.

Exercice 17 Fonctions 2-hölderiennes

Raisonnons par analyse-synthèse.

• Analyse

(Recherche des conditions nécessaires)

Supposons qu'il existe f une fonction vérifiant l'inégalité. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{a\}$,

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \leq |x - a|.$$

Par encadrement,

$$\frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

On en déduit que f est dérivable en a et $f'(a) = 0$. f est donc de dérivée nulle sur l'intervalle \mathbb{R} . f est donc constante.

• Synthèse

(Recherche des conditions suffisantes)

Il est clair que toute fonction constante est solution.

• **Conclusion.** Les seules fonctions solutions du problème sont les fonctions constantes (il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Intégration sur un segment

16

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes

1) $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt \quad (x \in \mathbb{R}, \lambda > 0)$

2) $\int_1^2 x^n \ln(x) dx \quad (n \in \mathbb{N})$

3) $\int_0^3 (x+1)e^{2x} dx$

4) $\int_1^x \ln(t)^2 dt \quad (x > 0)$

5) $\int_1^2 \frac{dt}{t^{5/2}}$

6) $\int_0^1 xe^{x^2} dx$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx$

8) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

Exercice 2 À l'aide du changement de variable indiqué, calculer

1) $\int_2^5 \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} \quad (t = \sqrt{x-1})$

2) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx \quad (u = \cos x)$

3) $\int_{e^x}^{e^{x^2}} \frac{dt}{t \ln(t) \ln(\ln t)} \quad (x > 1, u = \ln t)$

4) $\int_1^x \ln(1+\sqrt{t}) dt \quad (x \in \mathbb{R}^*, u = 1+\sqrt{t})$

Exercice 3 * Soit f une fonction C^1 sur l'intervalle $[a, b]$. Justifier, à l'aide d'une intégration par parties, l'existence d'une constante M telle que pour tout x réel non nul

$$\left| \int_a^b f(t) \cos(xt) dt \right| \leq \frac{M}{|x|}.$$

Exercice 4 **

- 1) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_0^1 |x - t| dt$.
- 2) a) Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que $2 \max(x, y) = x + y + |x - y|$.
- b) En déduire l'existence et le calcul de $\int_0^1 \max(x, t) dt$.

Exercice 5 ** Sommes et intégrales.

- 1) Justifier l'existence et l'égalité des intégrales

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n - 1}{t} dt = \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u} du.$$

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Exercice 6 ** Sommes de Riemann

Déterminer l'existence et la valeur de la limite des suites dont les termes généraux, pour $n \in \mathbb{N}^*$, sont

$$1) u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}; \quad 2) v_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}; \quad 3) w_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}.$$

 **Exercices axés sur le raisonnement****Exercice 7** * Extrait de concours Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x)^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

- 1) a) Démontrer que les suites $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bien définies. Calculer I_0 et J_0 .
- b) Justifier la décroissance et la convergence de la suite (I_n) .
- c) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_n + 2I_{n+1} + I_{n+2}$.
En déduire la limite de la suite (I_n) .
- 2) a) Démontrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}$.
- b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $J_n + J_{n+1}$.

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(-1)^n J_n = \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

d) Puis, $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

Exercice 8 ** Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer $\sin(x)$ et $\sin(\pi - x)$.

b) Justifier que

$$\int_0^\pi x f(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x)) dx.$$

2) En déduire la valeur de $J = \int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos(x)^2} dx$.

Indication. On sera amené à utiliser le changement de variable $u = \cos(x)$.

Exercice 9 ** Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue croissante. On pose

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad G(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

1) Montrer que pour tous réels positifs tels que $a < b$: $f(a) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq f(b)$.

2) En déduire, pour $0 < x < y$: $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq f(x) \leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt$.

3) Démontrer la croissance de G sur \mathbb{R}_*^+ .

Indication. On pourra considérer $G(y) - G(x)$ pour $0 < x < y$.

4) Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ .

Retrouver, en étudiant le signe de G' , que G est croissante.

Exercice 10 ** Soit f définie sur \mathbb{R}_*^+ par $f(x) = \int_{1/x}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$.

1) Montrer que f est bien définie sur \mathbb{R}_*^+ .

2) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_*^+ et calculer f' .

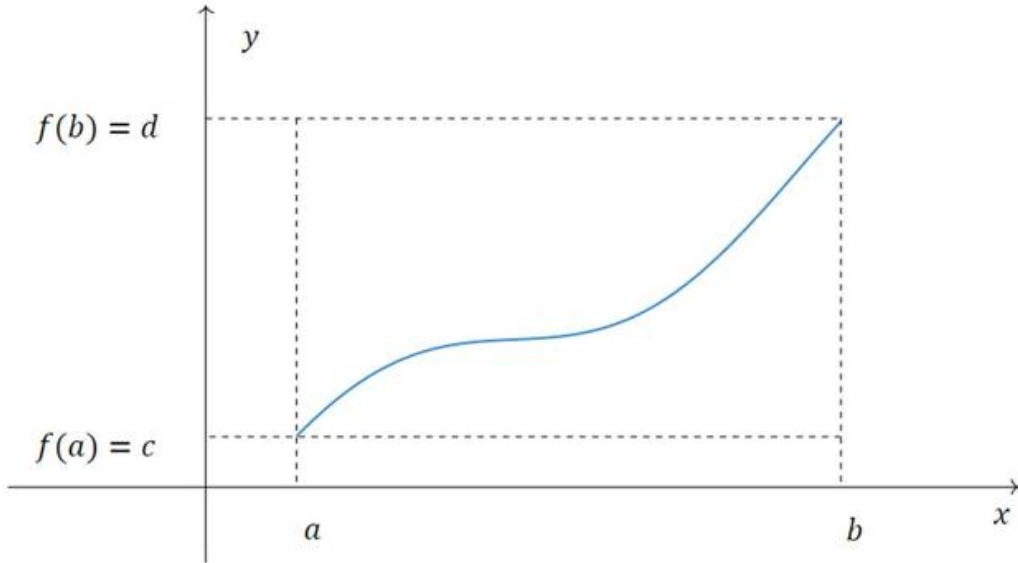
3) Que peut-on en déduire ?

Exercice 11 **

Soit $f : [a,b] \rightarrow [c,d]$ de classe C^1 et bijective. L'objectif est d'établir l'égalité

$$\int_a^b f(t) dt + \int_c^d f^{-1}(t) dt = bd - ac.$$

1) À partir du graphe suivant, expliquer cette égalité.



2) Effectuer le changement de variable $t = f(x)$ dans la seconde intégrale afin de prouver l'énoncé.

Exercice 12 ***

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$.

1) Préciser I_0 et I_1 .

2) a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (2n + 2)(I_n - I_{n+1})$.

b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n + 1)!}$$

3) À l'aide du changement de variable $t = \sin(u)$, calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^{2n+1} dt$.

Exercice 13 *** Une intégrale à paramètre

Soit $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |F(x) - F(y)| \leq |\sin(x) - \sin(y)| \quad (\bullet)$$

1) *Un exemple.* Soit F la fonction réelle d'une variable réelle définie par

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \exp(-3t^2 \sin(x)^2) dt.$$

a) Préciser le domaine de définition de F .

b) Justifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^{+2}$,

$$|\sin(x)^2 - \sin(y)^2| \leq 2|\sin(x) - \sin(y)|.$$

c) Démontrer à l'aide des accroissements finis que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$,

$$|e^{-a} - e^{-b}| \leq |a - b|.$$

d) En déduire que F vérifie la relation (\bullet) .

2) Soit F une fonction vérifiant (\bullet) .

a) Vérifier que F est 2π -périodique.

b) Démontrer que F est continue sur \mathbb{R} .

c) Montrer que F est dérivable en $\pi/2$ avec $F'(\pi/2) = 0$.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 14 ★ Trouver toutes les applications continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^1 f(t) dt = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)| \quad (\bullet)$$

Corrections

☰ Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. $\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^x = \boxed{1 - e^{-\lambda x}}$

2) *Intégrons par parties* en considérant les fonctions u et v de classe C^1 sur $[1,2]$ avec

$$\forall x \in [1,2], \quad \begin{cases} u(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \\ u'(x) = x^n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(x) = \ln(x) \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^n \ln(x) dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^n}{n+1} dx. \\ &= \frac{2^{n+1} \ln(2)}{n+1} - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_1^2 = \boxed{\frac{2^{n+1} \ln(2)}{n+1} - \frac{2^{n+1} - 1}{(n+1)^2}}. \end{aligned}$$

3) *Intégrons par parties* en considérant les fonctions u et v de classe C^1 sur $[0,3]$ avec

$$\forall x \in [0,3], \quad \begin{cases} u(x) = \frac{e^{2x}}{2} \\ u'(x) = e^{2x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(x) = x + 1 \\ v'(x) = 1. \end{cases}$$

D'où

$$\int_0^3 (x+1)e^{2x} dx = \left[(x+1) \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^3 - \int_0^3 \frac{e^{2x}}{2} dx = 2e^6 - \frac{1}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4} \right]_0^3 = \boxed{\frac{7e^6 - 1}{4}}.$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. *Intégrons par parties* avec les fonctions u et v de classe C^1 sur $[1,x]$:

$$\forall t \in [1,x], \quad \begin{cases} u(t) = t \ln(t) - t \\ u'(t) = \ln(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(t) = \ln(t) \\ v'(t) = \frac{1}{t}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^x \ln(t)^2 dt &= \left[(t \ln(t) - t) \ln(t) \right]_1^x - \int_1^x (t \ln(t) - t) \frac{1}{t} dt \\ &= (x \ln(x) - x) \ln(x) - \int_1^x (\ln(t) - 1) dt \\ &= (x \ln(x) - x) \ln(x) - \left[t \ln(t) - t - t \right]_1^x = \boxed{x(\ln x)^2 - 2x \ln(x) + 2x - 2}. \end{aligned}$$

5) On a $\int_1^2 \frac{dt}{t^{5/2}} = \int_1^2 t^{-5/2} dt = \left[-\frac{2}{3} \frac{1}{t^{3/2}} \right]_1^2 = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{2^{3/2}} \right) = \boxed{\frac{1}{3} \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)}.$

6) On a une forme connue $u'e^u$ à un coefficient près.

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x)e^{x^2} dx = \frac{1}{2} [e^{x^2}]_0^1 = \boxed{\frac{e-1}{2}}.$$

On peut aussi faire le *changement de variable* $u = x^2$ (de classe C^1 sur $[0,1]$).

7) Pour tout $x \in [0, \pi/2]$, on a $\frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = 1 + \sin(x)$. D'où

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)} dx = \left[\ln |1 + \sin(x)| \right]_0^{\pi/2} = \boxed{\ln(2)}.$$

On peut aussi faire le *changement de variable* $u = \sin(x)$ (de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$).

- 8) Pour tout $x \in [e, e^2]$, on a $\frac{1}{x \ln(x)} = \frac{1/x}{\ln(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \ln(x)$. On a $u \geq 0$ sur $[e, e^2]$.

$$\text{D'où} \quad \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln(x)} = \left[\ln(\ln(x)) \right]_e^{e^2} = \boxed{\ln(2)}.$$

Exercice 2

- 1) La fonction $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est définie, de classe C^1 sur $[2, 5]$. On peut faire le changement de variable « $t = \sqrt{x-1}$ » (« $dt = \frac{dx}{2\sqrt{x-1}}$ »).

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{dx}{x-1+\sqrt{x-1}} &= \int_2^5 \frac{2\sqrt{x-1}}{x-1+\sqrt{x-1}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x-1}} = \int_1^2 \frac{2t}{t^2+t} dt = 2 \int_1^2 \frac{1}{t+1} dt \\ &= 2 [\ln(1+t)]_1^2 = \boxed{2(\ln 3 - \ln 2)}. \end{aligned}$$

- 2) L'application \cos est de classe C^1 sur $[0, \pi]$.

On peut faire le changement de variable « $u = \cos x$ » (« $du = -\sin x dx$ »).

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx = \int_1^{-1} \frac{-du}{1+u^2} = [-\arctan u]_1^{-1} = -\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}}.$$

- 3) Soit $x \in]1, +\infty[$. On remarque que pour tout $t \in [e^x, e^{x^2}]$, $\ln(t) \geq \ln(e^x) = x$, donc $\ln(\ln t) \geq \ln(x) > 0$, et il en résulte que l'application $t \mapsto \frac{1}{t \ln(t) \ln(\ln t)}$ est définie, et même continue (par composition) sur le segment $[e^x, e^{x^2}]$.

L'application \ln est de classe C^1 sur $[e^x, e^{x^2}]$, ce qui permet de faire le changement de variable « $u = \ln(t)$ » (donc « $du = \frac{1}{t} dt$ ») dans l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{e^x}^{e^{x^2}} \frac{dt}{t \ln(t) \ln(\ln t)} &\stackrel{u=\ln(t)}{=} \int_x^{x^2} \frac{du}{u \ln(u)} = \left[\ln(\ln u) \right]_x^{x^2} = \ln(\ln(x^2)) - \ln(\ln(x)) \\ &= \ln(2 \ln(x)) - \ln(\ln(x)) = \ln(2) + \ln(\ln(x)) - \ln(\ln(x)) \\ &= \boxed{\ln(2)}. \end{aligned}$$

- 4) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. L'application $t \mapsto 1 + \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , ce qui permet de faire le changement de variable « $u = 1 + \sqrt{t}$ » (donc « $du = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ ») dans l'intégrale

$$\int_1^x \ln(1 + \sqrt{t}) dt = \int_1^x 2\sqrt{t} \ln(1 + \sqrt{t}) \frac{1}{2\sqrt{t}} dt \stackrel{u=1+\sqrt{t}}{=} \int_2^{1+\sqrt{x}} 2(u-1) \ln u du.$$

On fait une intégration par parties, les applications $u \mapsto u^2 - 2u$ et $u \mapsto \ln u$ étant de

classe \mathcal{C}^1 sur $[2, 1 + \sqrt{x}]$ (ou $[1 + \sqrt{x}, 2]$ si $\sqrt{x} \leq 1$)

$$\begin{aligned} \int_2^{1+\sqrt{x}} 2(u-1) \ln u \, du &= \left[(u^2 - 2u) \ln u \right]_2^{1+\sqrt{x}} - \int_2^{1+\sqrt{x}} \frac{u^2 - 2u}{u} \, du \\ &= (x-1) \ln(1+\sqrt{x}) - \int_2^{1+\sqrt{x}} (u-2) \, du \\ &= (x-1) \ln(1+\sqrt{x}) - \left[\frac{u^2}{2} - 2u \right]_2^{1+\sqrt{x}} \\ &= (x-1) \ln(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2}(x - 2\sqrt{x} + 1). \end{aligned}$$

Finalement
$$\int_1^x \ln(1+\sqrt{t}) \, dt = (x-1) \ln(1+\sqrt{x}) - \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2}.$$

Exercice 3

Soit x un réel non nul. Notons $I = \int_a^b f(t) \cos(xt) \, dt$.

Intégrons par parties en considérant les fonctions u et v de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ avec

$$\forall t \in [a, b], \quad \begin{cases} u(t) = \frac{1}{x} \sin(xt) \\ u'(t) = \cos(xt) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(t) = f(t) \\ v'(t) = f'(t). \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \left[\frac{1}{x} \sin(xt) f(t) \right]_{t=a}^b - \frac{1}{x} \int_a^b f'(t) \sin(xt) \, dt \\ &= \frac{1}{x} (\sin(xb) f(b) - \sin(xa) f(a)) - \frac{1}{x} \int_a^b f'(t) \sin(xt) \, dt. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |I| &\leq \frac{1}{|x|} (|\sin(xb)| \cdot |f(b)| + |\sin(xa)| \cdot |f(a)|) + \frac{1}{|x|} \left| \int_a^b f'(t) \sin(xt) \, dt \right| \\ &\leq \frac{1}{|x|} (|f(b)| + |f(a)|) + \frac{1}{|x|} \left| \int_a^b f'(t) \sin(xt) \, dt \right|. \end{aligned}$$

Puis, d'après l'inégalité triangulaire pour les intégrales,

$$\left| \int_a^b f'(t) \sin(xt) \, dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| \cdot |\sin(xt)| \, dt \leq \int_a^b |f'(t)| \, dt.$$

La fonction $|f|$ est continue sur le segment $[a, b]$ donc $A = \max_{[a, b]} |f|$ existe. On a

$$|I| \leq \frac{1}{|x|} \left(2A + \int_a^b |f'(t)| \, dt \right).$$

En posant $M = 2A + \int_a^b |f'(t)| \, dt$, on obtient
$$\left| \int_a^b f(t) \sin(xt) \, dt \right| \leq \frac{M}{|x|}.$$

Exercice 4

1) On sait que $|x - t| = \begin{cases} x - t & \text{si } x \geq t \\ t - x & \text{si } x < t. \end{cases}$

Pour l'intégrale, on distingue trois cas : le cas $0 \leq x \leq 1$, pour lequel $x - t$ change de signe suivant les valeurs de t dans l'intervalle $[0,1]$ et les cas $x < 0$ et $x > 1$.

- Si $x < 0$, alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $x < t$, donc $|x - t| = t - x$ et

$$\int_0^1 |x - t| dt = \int_0^1 t - x dt = \left[\frac{t^2}{2} - xt \right]_{t=0}^1 = \frac{1}{2} - x.$$

- Si $0 \leq x \leq 1$, alors pour $t \in [0,x]$, on a $t < x$ et $|x - t| = x - t$. Pour $t \in [x,1]$, on a $x < t$, $|x - t| = t - x$. La relation de Chasles nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} \int_0^1 |x - t| dt &= \int_0^x |x - t| dt + \int_x^1 |x - t| dt = \int_0^x (x - t) dt + \int_x^1 (t - x) dt \\ &= \left[xt - \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^x + \left[\frac{t^2}{2} - xt \right]_{t=x}^1 = x^2 - x + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Si $x > 1$, alors pour tout $t \in [0,1]$, on a $x > t$ et $|x - t| = x - t$.

$$\int_0^1 |x - t| dt = \int_0^1 x - t dt = \left[xt - \frac{t^2}{2} \right]_{t=0}^1 = x - \frac{1}{2}.$$

Conclusion :

$$\int_0^1 |x - t| dt = \begin{cases} \frac{1}{2} - x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x + \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x - \frac{1}{2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

2) a) On a $x + y + |x - y| = \begin{cases} x + y + (x - y) = 2x & \text{si } x \geq y \\ x + y + (y - x) = 2y & \text{si } x < y. \end{cases}$

Donc, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $2 \max(x,y) = x + y + |x - y|.$

- b) La valeur absolue est continue sur \mathbb{R} . À l'aide de l'expression de la question précédente, pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \max(x,t)$ est continue sur $[0,1]$. L'intégrale existe. La linéarité de l'intégrale donne

$$\int_0^1 \max(x,t) dt = \int_0^1 \frac{1}{2}(x + t + |x - t|) dt = \frac{1}{2} \left(\int_0^1 (x + t) dt + \int_0^1 |x - t| dt \right).$$

Or $\int_0^1 (x + t) dt = \left[xt + \frac{1}{2}t^2 \right]_{t=0}^1 = x + \frac{1}{2}.$

Concluons en utilisant le résultat de la question précédente

$$\int_0^1 \max(x,t) dt = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}(1+x^2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Exercice 5 Sommes et intégrales.

1) D'après la formule du binôme de Newton, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(1-t)^n - 1 = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-t)^k \right) - 1 = \left(1 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-t)^k \right) - 1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-t)^k.$$

La somme commence à $k = 1$. On peut mettre t en facteur. En divisant par t , il vient, pour tout $t \neq 0$

$$\frac{(1-t)^n - 1}{t} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-t)^{k-1}.$$

Donc $\frac{(1-t)^{n-1}}{t}$ admet une limite finie en 0. La fonction est prolongeable par continuité en 0. La fonction étant par ailleurs continue sur $]0,1]$, la première intégrale existe.

2) Le changement de variable affine $u = 1 - t$ donne

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n - 1}{t} dt = \int_1^0 \frac{u^n - 1}{u - 1} (-du) = \int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du.$$

On calcule chacune de ces intégrales. En utilisant la linéarité des intégrales

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(1-t)^n - 1}{t} dt &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-t)^{k-1} dt = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \binom{n}{k} (-t)^{k-1} dt \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} \frac{1}{-k} (-t)^k \right]_0^1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule de la somme des termes d'une progression géométrique

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1 - u^n}{1 - u} du &= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} u^k du = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 u^k du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{u^{k+1}}{k+1} \right]_0^1 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} \stackrel{k'=k+1}{=} \sum_{k'=1}^n \frac{1}{k'} \end{aligned}$$

Concluons :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Remarque

Les exercices 9 du chapitre 4 et 3 du chapitre 28 propose deux autres preuves de cette égalité.

Exercice 6 Sommes de Riemann

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{où} \quad f : x \in [0,1] \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à l'application f , qui est continue sur $[0,1]$.
On sait alors par théorème que

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln(1+x) \right]_0^1,$$

donc en calculant le crochet :

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2).$$

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2} \cdot \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\frac{k^2}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{où} \quad g : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1+x}{1+x^2}.$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à l'application g , qui est continue sur $[0,1]$.
On sait alors par théorème que

$$v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 g(x) dx.$$

On calcule l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \left[\arctan(x) \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1,$$

et donc après calcul

$$v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}.$$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $w_n > 0$, puis

$$\ln(w_n) = \sum_{k=1}^n \ln \left(\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right).$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à l'application $h : x \mapsto \ln(1 + x^2)$, qui est continue sur $[0,1]$ (car pour tout $x \in [0,1]$, $1 + x^2 > 0$ et \ln est continue sur \mathbb{R}_+^*). On sait alors que

$$\ln(w_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 h(x) dx.$$

On calcule l'intégrale par intégration par parties, sachant que les applications $x \mapsto x$ et $x \mapsto \ln(1 + x^2)$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx &= \left[x \ln(1 + x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1 + x^2} dx = \ln(2) - \int_0^1 \frac{2(1 + x^2) - 2}{1 + x^2} dx \\ &= \ln(2) - \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{1 + x^2}\right) dx = \ln(2) - \left[2x - 2 \arctan(x)\right]_0^1 \\ \int_0^1 \ln(1 + x^2) dx &= \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

En passant à l'exponentielle (continue)

$$w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{2} - 2}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 7 *Extrait de concours*

1) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, les fonctions $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)^2}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ sont définies, continues sur $[0,1]$, donc I_n et J_n existent.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \left[\frac{-1}{1+x} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} \right] \quad J_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \boxed{\ln 2}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \forall x \in [0,1], \quad 0 &\leq x \leq 1 \\ \forall x \in [0,1], \quad 0 &\leq \frac{x^{n+1}}{(1+x)^2} \leq \frac{x^n}{(1+x)^2} && \left. \begin{array}{l} \text{car } \frac{x^n}{(1+x)^2} \geq 0 \\ \text{par croissance de l'intégrale } (0 < 1) \end{array} \right\} \\ 0 &\leq I_{n+1} \leq I_n \end{aligned}$$

La suite (I_n) est décroissante, minorée par 0, donc elle converge d'après le théorème de convergence monotone.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité,

$$\begin{aligned} I_n + 2I_{n+1} + I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^n + 2x^{n+1} + x^{n+2}}{(1+x)^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1+2x+x^2)}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

• **Méthode 1.** Par décroissance de la suite, on a $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n \geq 4I_{n+2}$. D'où $I_{n+2} \leq \frac{1}{4(n+1)}$. Alors, pour tout $n \geq 2$: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{4(n-1)}$.

Par conservation des inégalités à la limite,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

• **Méthode 2.** D'après la question précédente, la suite $(I_n)_n$ converge. Notons ℓ la limite. Par passage à la limite dans la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n + 2I_{n+1} + I_{n+2} = \frac{1}{n+1} \quad \text{donc} \quad \ell + 2\ell + \ell = 0 \Rightarrow \ell = 0.$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties en considérant les fonctions u et v de classe \mathcal{C}^1 sur $[0,1]$ avec :

$$\forall x \in [0,1], \quad \begin{cases} u(x) = \frac{-1}{1+x} \\ u'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(x) = x^n \\ v'(x) = nx^{n-1}. \end{cases}$$

Il vient
$$I_n = \left[-\frac{x^n}{1+x} \right]_0^1 + n \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x} dx = nJ_{n-1} - \frac{1}{2}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité,
$$J_n + J_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

c) Démontrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : (-1)^n J_n = \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• **Initialisation.** D'après la question précédente,

$$(-1)^1 J_1 = -1 + J_0 = \ln 2 - 1 = \ln 2 - \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \text{ Donc } \mathcal{P}(1) \text{ est vraie.}$$

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} J_{n+1} &\stackrel{2b)}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} - (-1)^{n+1} J_n \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \ln(2) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \end{aligned}$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

• **Conclusion.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (-1)^n J_n = \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

- d) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq J_n \leq I_n$. D'après le *théorème d'encadrement*, $J_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2).$$

Exercice 8

- 1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide des formules de sommation

$$\sin(\pi - x) = \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \cos(x) - \sin(x) \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} = \sin(x).$$

- b) Notons $J = \int_0^\pi x f(\sin(x)) dx$.

On effectue le *changement de variable* affine $u = \pi - x$ (« $du = -dx$ »).

$$\begin{aligned} J &= \int_\pi^0 (\pi - u) f(\sin(\pi - u)) (-du) \\ &= \int_0^\pi (\pi - u) f(\sin(u)) du \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin(u)) du - \int_0^\pi u f(\sin(u)) du \\ &= \pi \int_0^\pi f(\sin(x)) dx - J. \end{aligned}$$

} par linéarité
} la variable est muette

Conclusion

$$\int_0^\pi x f(\sin(x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin(x)) dx.$$

- 2) Comme $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$, on a $J = \int_0^\pi x \frac{\sin(x)}{2 - \sin(x)^2} dx = \int_0^\pi x f(\sin(x)) dx$ où f est la fonction définie sur $[-1, 1]$ par $f(t) = \frac{t}{2 - t^2}$.

D'après la question précédente : $J = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{2 - \sin(x)^2} dx$.

À l'aide du *changement de variable* de classe C^1 sur $[0, \pi]$, $u = \cos(x)$ (« $du = -\sin x dx$ »).

$$\int_0^\pi \frac{\sin(x) dx}{1 + \cos(x)^2} = \int_1^{-1} \frac{-du}{1 + u^2} = \int_{-1}^1 \frac{du}{1 + u^2} = [\arctan(u)]_{-1}^1 = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion

$$\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1 + \cos(x)^2} dx = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 9

1) La fonction f est croissante sur $[a, b]$, $\forall t \in [a, b]$, $f(a) \leq f(t) \leq f(b)$.

Avec $a < b$, par croissance de l'intégrale $(b - a)f(a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq (b - a)f(b)$.

Comme $b - a > 0$, concluons $f(a) \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(t) dt \leq f(b)$.

2) On applique le résultat précédent avec $a = 0$ et $b = x$, puis avec $a = x$ et $b = y$. Il vient :

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \leq f(x) \leq \frac{1}{y - x} \int_x^y f(t) dt.$$

3) Soit $0 < x < y$.

$$\begin{aligned} G(y) - G(x) &= \frac{1}{y} \int_0^y f(t) dt - \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{y} \left(\int_0^x f(t) dt + \int_x^y f(t) dt \right) - \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt && \left. \begin{array}{l} \text{relation de Chasles} \\ \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{y} \int_x^y f(t) dt + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \int_0^x f(t) dt && \left. \begin{array}{l} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = -\frac{y-x}{xy} \\ \text{question précédente} \end{array} \right\} \\ &= \frac{y-x}{y} \left(\frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt - \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Donc pour tous réels x et y tels que $0 < x < y$, $G(x) \leq G(y)$.

Conclusion : La fonction G est croissante sur \mathbb{R}_+^* .

4) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $G(x) = \frac{1}{x} F(x)$ où $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Or F est la primitive de f sur \mathbb{R}_+^* qui s'annule en 0. F est dérivable sur \mathbb{R}_+^* avec $F' = f$. Par produit, la fonction G est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\frac{1}{x^2} F(x) + \frac{1}{x} F'(x) \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt + f(x) \right) && \left. \begin{array}{l} \text{voir question 2)} \\ \end{array} \right\} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

On retrouve ainsi la propriété de croissance de G sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* .

Exercice 10

- 1) Posons $g : t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. La valeur $f(x)$ est bien définie si g est définie continue sur l'intervalle $I_x = [\min(1/x, x), \max(1/x, x)]$ dont les bornes sont $1/x$ et x ($I_x = [1/x, x]$ si $x \geq 1$ et $I_x = [x, 1/x]$ si $x < 1$).

Or l'application \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* , et l'application $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R} (car rationnelle et bien définie). Par produit, l'application g est continue sur \mathbb{R}_+^* . Or, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $I_x \subset \mathbb{R}_+^*$; donc l'intégrale $f(x) = \int_{1/x}^x g(t) dt$ est bien définie. Ainsi,

 f est définie sur \mathbb{R}_+^* .

- 2) Comme g est continue sur \mathbb{R}_+^* , g admet des primitives sur \mathbb{R}_+^* ; notons G l'une de ces primitives. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f(x) = \int_{1/x}^x g(t) dt = \left[G(t) \right]_{1/x}^x = G(x) - G\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme $x \mapsto 1/x$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* , tout comme G , l'expression ci-dessus montre, par composition, que f est de classe C^1 sur \mathbb{R}_+^* . De plus, par *dérivation des fonctions composées*, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = G'(x) + \frac{1}{x^2} G'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\ln(x)}{1+x^2} + \frac{-\ln(x)}{x^2+1} = \boxed{0}.$$

- 3) Ainsi $f' = 0$ sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* , donc f est constante sur \mathbb{R}_+^* . Pour trouver cette constante, il suffit d'évaluer f en un point où l'on sait faire le calcul. Pour $x = 1$, on a $\frac{1}{x} = x = 1$, d'où $f(1) = 0$.

Finalement,

 f est l'application nulle sur \mathbb{R}_+^* .

Exercice 11

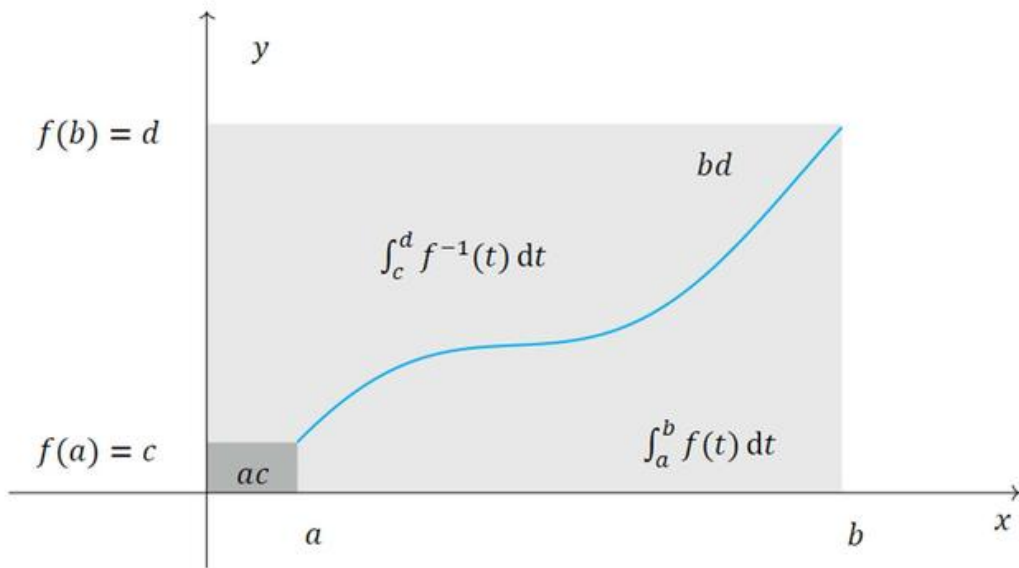
- 1) L'aire \mathcal{A} de la partie grisée peut se calculer de deux manières :

- Par définition de l'intégrale, $\int_a^b f$ est l'aire sous la courbe représentative de f sur $[a, b]$ et, comme la courbe de f^{-1} s'obtient par symétrie par rapport à l'axe $y = x$, $\int_c^d f^{-1}$ est l'aire entre la courbe de f et les droites d'équations $y = c$, $y = d$ et l'axe des ordonnées. Il vient

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(t) dt + \int_c^d f^{-1}(t) dt.$$

- C'est aussi l'aire de la partie comprise entre l'axe des abscisses, des ordonnées et les droites d'équation $y = d$, $x = b$ moins l'aire du rectangle compris entre l'axe des abscisses, des ordonnées et les droites d'équation $y = c$, $x = a$.

$$\mathcal{A} = bd - ac.$$



D'où la relation.

- 2) Supposons f strictement croissante de sorte que $f(a) = c$, $f(b) = d$.
Effectuons le changement de variable de classe \mathcal{C}^1 , $t = f(x)$, « $dt = f'(x) dx$ ».

$$\int_c^d f^{-1}(t) dt = \int_{f^{-1}(c)}^{f^{-1}(d)} f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int_a^b x f'(x) dx.$$

Puis, intégrons par parties,

$$\int_a^b x f'(x) dx = [x f(x)]_a^b - \int_a^b 1 \cdot f(x) dx = b f(b) - a f(a) - \int_a^b 1 \cdot f(x) dx.$$

Ainsi
$$\int_c^d f^{-1}(t) dt = b d - a c - \int_a^b f(x) dx.$$

D'où le résultat. Le cas f strictement décroissant est similaire.

Exercice 12

1) $I_0 = \int_0^1 dt = [t]_0^1 = \boxed{1}$ et $I_1 = \int_0^1 (1 - t^2) dt = \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}$

- 2) a) Intégrons par parties en considérant les fonctions u et v de classe \mathcal{C}^1 sur $[0,1]$ avec :

$$\forall t \in [0,1], \quad \begin{cases} u(t) = t \\ u'(t) = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v(t) = (1 - t^2)^{n+1} \\ v'(t) = -2(n+1)t(1 - t^2)^n. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \underbrace{[t(1 - t^2)^{n+1}]_0^1}_{=0} + 2(n+1) \int_0^1 t^2 (1 - t^2)^n dt \\ &= 2(n+1) \int_0^1 ((t^2 - 1) + 1)(1 - t^2)^n dt = \boxed{2(n+1)(I_n - I_{n+1})}. \end{aligned}$$

b) Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n) : I_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

• **Initialisation.** $I_0 = 1 = \frac{4^0(0!)^2}{1!}$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie

• **Hérédité.** Soit $n \geq 0$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

La question précédente permet d'exprimer I_{n+1} en fonction de I_n .

$$I_{n+1} \stackrel{1.b)}{=} \frac{2n+2}{2n+3} I_n \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{2n+2}{2n+3} \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2(n+1)}{2n+3} \frac{2(n+1)}{2n+2} \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.**

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

3) Posons le changement de variable $t = \sin(u)$ de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$ (« $dt = \cos u \, du$ »).

$$\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1} \, du = \int_0^{\pi/2} (1 - (\sin u)^2)^n (\cos u \, du) = \int_0^1 (1 - t^2)^n \, dt = I_n.$$

Dès lors,
$$\int_0^{\pi/2} (\cos u)^{2n+1} \, du = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

Remarque

Ces dernières intégrales — un classique des concours — sont connues sous le nom d'*intégrales de Wallis*, d'après John Wallis, mathématicien britannique du XVII^e siècle.

Exercice 13 Une intégrale à paramètre

1) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto \exp(-3t^2 \sin(x)^2)$ est définie, continue sur $[0, 1]$. Donc l'intégrale existe. F est définie sur \mathbb{R} .

b) $|\sin(x)^2 - \sin(y)^2| = |\sin(x) + \sin(y)| \cdot |\sin(x) - \sin(y)| \leq 2|\sin(x) - \sin(y)|$.

c) La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ . Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$|\varphi'(t)| = |-e^{-t}| = e^{-t} \leq e^0,$$

car la fonction \exp est croissante sur \mathbb{R} et $-t \leq 0$. Ainsi $|\varphi'| \leq 1$ sur \mathbb{R}^+ .

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$:

$$|e^{-b} - e^{-a}| \leq |b - a|.$$

d)
$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \frac{1}{2} \left| \int_0^1 \exp(-3t^2 \sin(y)^2) \, dt - \int_0^1 \exp(-3t^2 \sin(x)^2) \, dt \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_0^1 \left(\exp(-3t^2 \sin(y)^2) - \exp(-3t^2 \sin(x)^2) \right) \, dt \right| \end{aligned}$$

On applique l'inégalité triangulaire pour les intégrales.

$$|F(y) - F(x)| \leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left| \exp(-3t^2 \sin(y)^2) - \exp(-3t^2 \sin(x)^2) \right| dt.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, $3t^2 \sin(y)^2$ et $3t^2 \sin(x)^2$ sont positifs, donc, d'après c)

$$\left| \exp(-3t^2 \sin(y)^2) - \exp(-3t^2 \sin(x)^2) \right| \leq |3t^2 \sin(y)^2 - 3t^2 \sin(x)^2|,$$

d'après 1 b), il vient

$$|3t^2 \sin(y)^2 - 3t^2 \sin(x)^2| = 3t^2 |\sin(y)^2 - \sin(x)^2| \leq 6t^2 |\sin(y) - \sin(x)|.$$

Par croissance de l'intégrale, on déduit des deux résultats précédents l'inégalité

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &\leq 3 |\sin(y) - \sin(x)| \int_0^1 t^2 dt \\ &\leq |\sin(y) - \sin(x)| \end{aligned} \quad \left. \int_0^1 t^2 dt = [t^3/3]_0^1 = 1/3 \right\}$$

Conclusion

F vérifie (\bullet) .

- 2) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $|F(x + 2\pi) - F(x)| \leq |\sin(x + 2\pi) - \sin(x)|$.
Or $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$, donc $|F(x + 2\pi) - F(x)| \leq 0$ et $F(x + 2\pi) = F(x)$.
Finalement

La fonction F est 2π -périodique.

- b) Soient $x, y \in \mathbb{R}$. D'après (\bullet) ,

$$F(x) - |\sin(y) - \sin(x)| \leq F(y) \leq F(x) + |\sin(y) - \sin(x)|.$$

D'après le théorème d'existence de limite par encadrement

$$\lim_{y \rightarrow x} F(y) = F(x).$$

Conclusion

F est continue sur \mathbb{R} .

- c) Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $x \neq \pi/2$. D'après (\bullet) $\frac{|F(x) - F(\pi/2)|}{|x - \pi/2|} \leq \frac{|\sin(x) - \sin(\pi/2)|}{|x - \pi/2|}$.
D'où l'encadrement

$$\frac{|\sin(x) - \sin(\pi/2)|}{|x - \pi/2|} \leq \frac{F(x) - F(\pi/2)}{x - \pi/2} \leq \frac{|\sin(x) - \sin(\pi/2)|}{|x - \pi/2|}.$$

Or, par définition du nombre dérivé

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin(x) - \sin(\pi/2)}{x - \pi/2} = \sin'(\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0.$$

Le théorème d'existence de limite par encadrement donne $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{F(x) - F(\pi/2)}{x - \pi/2} = 0$.

F est dérivable en $\pi/2$ et $F'(\pi/2) = 0$.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 14

- Posons $M = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ et définissons g sur $[0,1]$ par $g(t) = M - f(t)$.

$$\int_0^1 g(t) dt = \int_0^1 (M - f(t)) dt = \int_0^1 M dt - \int_0^1 f(t) dt = M - \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Par ailleurs la fonction g est continue positive sur $[0,1]$.

D'après la *propriété de stricte positivité de l'intégrale*, la fonction g est nulle sur $[0,1]$, donc f est constante.

- Réciproquement, toute fonction constante vérifie l'égalité.

Bilan

Les applications continues sur $[0,1]$ vérifiant (•) sont les fonctions constantes.

Probabilités sur un univers fini

17

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(A) = 1/3$ et $\mathbb{P}(B) = 1/2$.
Calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :

- 1) L'événement A implique l'événement B ;
- 2) A et B sont incompatibles;
- 3) A et B sont indépendants;
- 4) $\mathbb{P}_B(A) = 1/2$;
- 5) $\mathbb{P}(\bar{A} \cup B) = 3/4$.

Exercice 2 * *Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle*

On dispose d'une urne contenant une proportion a de boules blanches ($0 < a < 1$). On effectue deux tirages avec remise. On considère les événements

- A : « La première boule tirée est blanche »,
 - B : « La seconde boule tirée est blanche »,
 - C : « Les deux boules tirées sont de même couleur ».
- 1) Montrer que A , B et C sont deux à deux indépendants si et seulement si $a = \frac{1}{2}$.
 - 2) On suppose $a = \frac{1}{2}$.
Vérifier que les événements A , B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3 * Parmi n clefs, deux ouvrent une porte. On essaye les clefs les unes après les autres jusqu'à ouvrir la porte. Quelle est la probabilité d'ouvrir la porte au k -ième essai ?

Exercice 4 ** Urne et indépendance

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On effectue trois tirages successifs d'une boule avec remise.

- 1) Quelle est la probabilité que les trois numéros soient identiques ?
- 2) Quelle est la probabilité que les trois numéros soient différents ?
- 3) Les événements
 - « les deux premières boules ont des numéros distincts »,
 - « les deux dernières boules ont des numéros distincts »
 sont-ils indépendants ?
- 4) Quelle est la probabilité de tirer trois numéros en ordre strictement croissant ?
- 5) Les événements
 - « les numéros des deux premières boules sont en ordre strictement croissant »,
 - « les numéros des deux dernières boules sont en ordre strictement croissant »
 sont-ils indépendants ?

Exercice 5 ** Un étudiant étourdi n'a plus son portable. Il peut l'avoir laissé chez lui avec une probabilité a , ou oublié de façon équiprobable dans l'une des cinq salles où il a eu cours. Avant de rentrer chez lui, il le cherche dans le lycée. Il ne le trouve dans aucune des quatre premières salles. Quelle est la probabilité qu'il soit dans la dernière salle ?

Exercice 6 ** Une usine fabrique des clefs USB dont 25 % n'ont pas la rapidité requise pour être vendues à l'export. Deux logiciels A et B permettent de tester les clefs. Les techniques de tests sont complètement différentes, ce qui amène à considérer leurs réponses indépendantes. Plus précisément :

- si la clef est assez rapide, le logiciel A le détecte dans 95 % des cas et le logiciel B le détecte dans 98 % des cas (avec une réponse indépendante en probabilité de celle de A) ;
 - si la clef n'est pas assez rapide, le logiciel A le détecte dans 99 % des cas et le logiciel B le détecte dans 98 % des cas (avec une réponse indépendante en probabilité de celle de A).
- 1) Une clef testée est annoncée assez rapide par le logiciel A et pas assez rapide par le logiciel B. Quelle est la probabilité que la clef soit assez rapide ?
 - 2) Quelle est la probabilité que le logiciel A se trompe ? que le logiciel B se trompe ?

Exercice 7 *** Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On place dans une urne n boules blanches. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est blanche, on la remplace dans l'urne par une boule rouge, puis on tire la boule suivante en respectant le même protocole ;
 - si la boule tirée est rouge, on arrête.
- 1) Soit $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$. Quelle est la probabilité que la boule rouge soit tirée au k -ième tirage ?

- 2) Utiliser cette expérience pour montrer l'égalité
$$\sum_{k=1}^n \frac{k \cdot k!}{n^k} \binom{n}{k} = n.$$

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8 **

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons n urnes numérotées de 1 à n , contenant chacune r boules bleues et s boules rouges ($1 < s$).

On réalise l'expérience suivante. On choisit au hasard une première boule dans la première urne que l'on remplace dans la seconde et on répète l'opération jusqu'à la dernière urne.

Quelle est la probabilité qu'une boule tirée au hasard dans la dernière urne soit bleue?

Indication. Étudier les cas $n = 1$ et $n = 2$ et émettre une conjecture que l'on vérifiera.

Exercice 9 ***

Sur un damier de quatre lignes quatre colonnes, on a placé quatre pions au hasard. On considère les événements :

A : « les pions sont sur quatre lignes différentes »,

B : « les pions sont sur quatre colonnes différentes ».

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Corrections

☰ Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

- 1) Dire que A implique B revient à dire que pour tout $\omega \in \Omega$, si $\omega \in A$, alors $\omega \in B$. Donc $A \subset B$. D'où $A \cup B = B$ et

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

- 2) Si A et B sont incompatibles, alors d'après la propriété d'additivité d'une probabilité,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = \frac{5}{6}.$$

- 3) Si A et B sont indépendants, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$.

Puis, on conclut avec la formule du crible,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{2}{3}.$$

- 4) D'après la formule des probabilités composées, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}_B(A) \mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}$.

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{7}{12}.$$

- 5) D'après les lois de Morgan, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. D'où $\mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A \cup B}) = 1/4$.
On a $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. Comme $(A \cap B)$ et $A \cap \overline{B}$ sont incompatibles,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}), \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{12}.$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{4}.$$

Exercice 2 Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

Remarque

Cet exercice fournit un exemple d'événements deux à deux indépendants mais qui ne sont pas mutuellement indépendants. Rappelons que dans le cas de trois événements A , B et C , l'indépendance mutuelle se traduit par :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C) \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C).$$

indépendance deux à deux

- 1) On a $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = a$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = a^2 = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
Or $0 < a < 1$. D'où $a^2 \neq a$. Donc

A et B sont des événements indépendants.

On remarque que $C = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$. Les événements $(A \cap B)$ et $(\overline{A} \cap \overline{B})$ sont incompatibles, d'après la propriété d'additivité d'une probabilité,

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = a^2 + (1 - a)^2 = 2a^2 - 2a + 1.$$

Et $\mathbb{P}(C \cap A) = \mathbb{P}(C \cap B) = \mathbb{P}(A \cap B) = a^2$.

C est indépendant avec A si et seulement si

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C \cap A) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(A) &\Leftrightarrow a^2 = a(2a^2 - 2a + 1) \\ &\Leftrightarrow a(2a^2 - 3a + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a(2a - 1)(a - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 1/2. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{car } 0 < a < 1$$

Donc A et C sont indépendants si et seulement si $a = 1/2$. De même, B et C sont indépendants si et seulement si $a = 1/2$. Bilan :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont deux à deux indépendants si et seulement si } a = \frac{1}{2}.$$

- 2) On suppose $a = \frac{1}{2}$. Donc A, B et C sont deux à deux indépendants. Ils sont mutuellement indépendants si et seulement si en plus $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$. Or

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Conclusion : A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3

On a deux clefs qui ouvrent la porte, donc on effectuera au plus $n - 1$ essais. Pour $1 \leq k \leq n - 1$, on introduit les événements

- A_k : « La k -ième clef n'ouvre pas la porte » ;
- B_k : « On ouvre la porte au k -ième essai ».

On a $B_1 = \overline{A_1}$ et, pour $2 \leq k \leq n - 1$, $B_k = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{k-1} \cap \overline{A_k}$. La formule des probabilités composées donne, pour $2 \leq k \leq n - 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_k) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2) \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-2}}(A_{k-1}) \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(\overline{A_k}) \\ &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \dots \times \frac{n-k}{n-(k-2)} \times \frac{2}{n-(k-1)} \\ &= \frac{2(n-2)(n-3)\dots(n-k+1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+2)(n-k+1)} = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}. \end{aligned}$$

La formule est correcte pour $k = 1$ car $\mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{n}$. Finalement,

Pour $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, la probabilité d'ouvrir la porte au k -ième essai est $\frac{2(n-k)}{n(n-1)}$.

Exercice 4 Urne et indépendance

On peut modéliser chaque tirage par un triplet d'entiers éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Autrement dit, $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^3$ et $\text{card}(\Omega) = n^3$. On est dans une situation d'équiprobabilité.

- 1) Soit A l'événement « les trois boules portent le même numéro ».

$$A = \{(i, i, i) ; i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

- 2) Soit B l'événement « les trois numéros sont distincts ».

- n possibilités pour la première boule, puis,
- $n - 1$ possibilités pour la seconde boule (distincte de la première), puis,

- $n - 2$ possibilités pour la troisième boule.

$$\text{Donc } \mathbb{P}(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = \boxed{\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}}.$$

3) Soit C l'événement « les deux premières boules ont des numéros distincts ». On a

- n possibilités pour la première boule, puis
- $n - 1$ possibilités pour la seconde boule (distincte de la première), puis
- n possibilités pour la troisième boule (pas de restriction).

$$\text{Donc } \mathbb{P}(C) = \frac{\text{card}(C)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{n(n-1)n}{n^3} = \boxed{\frac{n-1}{n}}.$$

De même avec D l'événement : « les deux dernières boules ont des numéros distincts »,

$$\mathbb{P}(D) = \frac{n-1}{n}.$$

Pour l'événement $C \cap D$,

- n possibilités pour la première boule, puis,
- $n - 1$ possibilités pour la seconde boule (distincte de la première), puis,
- $n - 1$ possibilités pour la troisième boule (distincte de la seconde).

$$\text{D'où } \mathbb{P}(C \cap D) = \frac{\text{card}(C \cap D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{(n-1)^2}{n^2} = \mathbb{P}(C)\mathbb{P}(D).$$

Conclusion :

Les événements C et D sont indépendants.

4) Soit E l'événement « les trois numéros sont en ordre croissant ». Les trois numéros tirés forment un sous-ensemble de 3 éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour réaliser E , il faut et il suffit de :

- trois numéros distincts, c'est-à-dire, un sous-ensemble de 3 éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$ pour lequel il y a $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ possibilités,
- le plus petit est celui de la première boule, le suivant celui de la seconde boule, le plus grand celui de la troisième boule : ce qui peut se faire que d'une seule façon.

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2}.$$

5) Pour réaliser l'événement F « les deux premiers numéros sont en ordre strictement croissant », il faut deux numéros distincts : $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ possibilités, le plus petit est le numéro de la première boule, l'autre celui de la seconde et un troisième numéro quelconque. Donc

$$\mathbb{P}(F) = \frac{\text{card}(F)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{n(n-1)n}{2n^3} = \frac{n-1}{2n}.$$

Si G est « les numéros des deux dernières boules sont en ordre strictement croissant », on obtient de même $\mathbb{P}(G) = \frac{n-1}{2n}$.

$$\text{Or } G \cap F = E \text{ et } \mathbb{P}(G)\mathbb{P}(F) = \frac{(n-1)^2}{4n^2} \text{ et } \mathbb{P}(G \cap F) = \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2}.$$

$$\mathbb{P}(G)\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(G \cap F) \Leftrightarrow \frac{(n-1)^2}{4n^2} = \frac{(n-1)(n-2)}{6n^2} \Leftrightarrow 3(n-1) = 2(n-2) \Leftrightarrow n = -1.$$

Conclusion : Les événements F et G ne sont pas indépendants.

Remarque

La dépendance de F et G s'explique ainsi : si F est réalisé, alors le numéro de la seconde boule a plus de chance d'être grand, ce qui diminue la probabilité de réalisation de G .

Exercice 5

On introduit les événements

- A « L'étudiant a laissé son portable chez lui »,
- S_i « L'étudiant a laissé son portable dans la i -ème salle » ($1 \leq i \leq 5$).

$(A, S_1, S_2, \dots, S_5)$ est un système complet d'événements, donc $\mathbb{P}(A) + \sum_{i=1}^5 \mathbb{P}(S_i) = 1$.

Or $\mathbb{P}(A) = a$ et les événements de S_i ont la même probabilité. Donc, pour $1 \leq i \leq 5$,

$$\sum_{k=1}^5 \mathbb{P}(S_k) = 1 - a \Rightarrow \mathbb{P}(S_i) = \frac{1-a}{5}.$$

La probabilité que le portable soit dans la dernière salle est : $\mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^4 \overline{S_i}}(S_5) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^4 \overline{S_i} \cap S_5\right)}{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^4 \overline{S_i}\right)}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^4 \overline{S_i}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^4 S_i\right) && \text{loi de Morgan} \\ &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^4 S_i\right) && \text{union disjointe} \\ &= 1 - \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(S_i) \\ &= 1 - \frac{4(1-a)}{5} = \frac{1+4a}{5}. \end{aligned}$$

Si le portable est dans la cinquième salle, alors il n'est pas dans une des salles précédentes,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^4 \overline{S_i} \cap S_5\right) = \mathbb{P}(S_5) = \frac{1-a}{5}, \quad \text{puis,} \quad \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^4 \overline{S_i}}(S_5) = \frac{1-a}{1+4a}.$$

Conclusion : La probabilité que le portable soit dans la dernière salle est $\frac{1-a}{1+4a}$.

Exercice 6

Introduisons les événements

- R : « La clef est assez rapide »,
- A : « Le logiciel A annonce la clef assez rapide »,
- B : « Le logiciel B annonce la clef assez rapide ».

1) Calculons $\mathbb{P}_{A \cap \bar{B}}(R)$.

(R, \bar{R}) constitue un système complet d'événements possibles. D'après la formule de Bayes

$$\mathbb{P}_{A \cap \bar{B}}(R) = \frac{\mathbb{P}(R) \cdot \mathbb{P}_R(A \cap \bar{B})}{\mathbb{P}(R) \cdot \mathbb{P}_R(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{R}) \cdot \mathbb{P}_{\bar{R}}(A \cap \bar{B})}$$

D'après les propriétés d'indépendances de l'énoncé :

- $\mathbb{P}_R(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}_R(A) \cdot \mathbb{P}_R(\bar{B}) = 0,95 \times 0,02$
- $\mathbb{P}_{\bar{R}}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}_{\bar{R}}(A) \cdot \mathbb{P}_{\bar{R}}(\bar{B}) = 0,01 \times 0,98$.

$$\text{D'où } \mathbb{P}_R(A \cap \bar{B}) = \frac{0,75 \times 0,95 \times 0,02}{0,75 \times 0,95 \times 0,02 + 0,25 \times 0,01 \times 0,98} \approx \boxed{0,85}$$

Il y a donc environ 85 % de chance que la clef soit suffisamment rapide.

2) • « Le logiciel A se trompe » est l'événement $(R \cap \bar{A}) \cup (\bar{R} \cap A)$. L'union est disjointe, d'après la propriété d'additivité d'une probabilité

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R \cap \bar{A}) \cup (\bar{R} \cap A) &= \mathbb{P}(R \cap \bar{A}) + \mathbb{P}(\bar{R} \cap A) \\ &= \mathbb{P}(R)\mathbb{P}_R(\bar{A}) + \mathbb{P}(\bar{R})\mathbb{P}_{\bar{R}}(A) \\ &= 0,75 \times 0,05 + 0,25 \times 0,01 = \boxed{0,04} \end{aligned}$$

- « Le logiciel B se trompe » est l'événement $(R \cap \bar{B}) \cup (\bar{R} \cap B)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((R \cap \bar{B}) \cup (\bar{R} \cap B)) &= \mathbb{P}(R)\mathbb{P}_R(\bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{R})\mathbb{P}_{\bar{R}}(B) \\ &= 0,75 \times 0,02 + 0,25 \times 0,02 = \boxed{0,02} \end{aligned}$$

Remarque

On a un exemple ici de résultat qui peut paraître contre intuitif. Le logiciel A se trompe plus souvent que le logiciel B. N'empêche que, si A trouve la clef assez rapide et B au contraire la trouve trop lente, alors la clef est assez rapide avec une probabilité supérieure à 0,75.

Exercice 7

1) Introduisons, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement B_i : « on obtient une boule blanche au i -ème tirage ».

Par ailleurs, on note R_k : « La boule rouge est tirée au k -ième tirage ».

On a $R_k = B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{k-1} \cap \bar{B}_k$. D'après la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(R_k) = \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) \times \dots \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-2}}(B_{k-1}) \times \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(\bar{B}_k).$$

Soit $i \in \llbracket 2, k \rrbracket$. Si le i -ème tirage a lieu, c'est qu'on a obtenu des boules blanches lors des $i - 1$ premiers tirages qui ont été remplacées par des boules rouges. Autrement dit, pour le i -ème tirage, l'urne contient $(i - 1)$ boules rouges et $n - (i - 1)$ boules blanches,

$$\mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{i-1}}(B_i) = \frac{n-(i-1)}{n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{B_1 \cap \dots \cap B_{k-1}}(\overline{B}_k) = \frac{k-1}{n}.$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(R_k) &= \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \dots \times \underbrace{\frac{n-(k-2)}{n}}_{\text{tirage } k-1} \times \underbrace{\frac{k-1}{n}}_{\text{tirage } k} \\ &= \frac{n!}{(n-(k-1))!} \cdot \frac{k-1}{n^k} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-(k-1))!} \cdot \frac{(k-1) \cdot (k-1)!}{n^k} \\ &= \boxed{\binom{n}{k-1} \cdot \frac{(k-1) \cdot (k-1)!}{n^k}}. \end{aligned}$$

- 2) Précisons que le nombre de tirages est compris entre 2 et $n + 1$. Au début, il n'y a aucune boule rouge et au maximum, les n boules blanches sont choisies et remplacées par des boules rouges. Au tirage $n + 1$, il ne reste que des boules rouges.

Ainsi, $(R_k)_{1 \leq k \leq n+1}$ forme un système complet d'événements et $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{(k-1) \cdot (k-1)!}{n^k} \binom{n}{k-1} = 1$. Par changement d'indice et en multipliant par n , on retrouve l'égalité annoncée.

Remarque

Cette égalité a été démontrée par une méthode calculatoire à l'exercice 11 du chapitre 4.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8

Remarque

Conjeturons le résultat.

Introduisons, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement A_i : « La i -ème boule tirée est bleue ». On a

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{r}{r+s}.$$

(A_1, \overline{A}_1) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(A_2) + \mathbb{P}(\overline{A}_1) \mathbb{P}_{\overline{A}_1}(A_2) \\ &= \frac{r}{r+s} \underbrace{\frac{r+1}{r+s+1}}_{\substack{r+1 \text{ boules B} \\ s \text{ boules R}}} + \frac{s}{r+s} \underbrace{\frac{r}{r+s+1}}_{\substack{r \text{ boules B} \\ s+1 \text{ boules R}}} = \frac{r(r+s+1)}{(r+s)(r+s+1)} = \frac{r}{r+s}. \end{aligned}$$

On constate que l'on retrouve le même résultat que si l'on avait tiré directement dans la seconde urne. On conjecture que ce résultat perdure à chaque étape.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \frac{r}{r+s}$.

- **Initialisation.** $\mathbb{P}(A_1) = \frac{r}{r+s}$. La propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathbb{P}(A_n) = \frac{r}{r+s}$. $(A_n, \overline{A_n})$ est un système complet d'événements possibles. D'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_n})\mathbb{P}_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= \frac{r}{r+s} \cdot \frac{r+1}{\underbrace{r+s+1}_{\substack{r+1 \text{ boules B} \\ s \text{ boules R}}} + \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r}{\underbrace{r+s+1}_{\substack{r \text{ boules B} \\ s+1 \text{ boules R}}} = \frac{r(r+s+1)}{(r+s)(r+s+1)} = \frac{r}{r+s}. \end{aligned}$$

La propriété est vraie au rang suivant.

- **Conclusion.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(A_n) = \frac{r}{r+s}$$

Exercice 9

Numérotons les 16 cases du damier de 1 à 16 et considérons Ω , l'ensemble des parties de $\llbracket 1, 16 \rrbracket$ à 4 éléments. Choisir un élément de Ω équivaut à choisir la position des quatre pions. Par définition des coefficients binomiaux,

$$\text{card}(\Omega) = \binom{16}{4} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4!} = 1820.$$

Tous les choix sont équiprobables,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{\text{card}(B)}{\text{card}(\Omega)} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(\Omega)}.$$

Pour réaliser A , il faut un pion sur chaque ligne. Pour chaque ligne, on a 4 choix possibles : $\text{card}(A) = 4^4$. De même avec les colonnes : $\text{card}(B) = 4^4$. Il vient

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{4^4}{1820} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = \frac{4^8}{1820^2}.$$

Enfin, pour réaliser $A \cap B$, il faut choisir une case par ligne, de sorte que les cases soient sur des colonnes différentes. Pour cela :

- on choisit une case sur la première ligne (4 choix),
- puis une case sur la seconde ligne qui soit sur une colonne différente de la case choisie précédemment (3 choix),
- une case sur la troisième ligne qui ne soit pas sur l'une des deux colonnes déjà occupées (2 choix),
- pour la case de la dernière ligne, il ne reste qu'une colonne inoccupée (1 choix).

Donc $\text{card}(A \cap B) = 4! = 24$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{24}{1820}$.

À la suite de ces calculs, on vérifie que $\mathbb{P}(A \cap B) \neq \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Les événements A et B ne sont pas indépendants.

Variables aléatoires finies

18

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$, et X une variable aléatoire à valeurs dans $[[0, n]]$ avec

$$\forall k \in [[0, n]], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{k+1} \binom{n}{k}.$$

- 1) Pour tout $k \in [[0, n]]$, exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de a , n et $\binom{n+1}{k+1}$.
- 2) Déterminer la valeur de a .
- 3) À l'aide de $\mathbb{E}(X + 1)$, calculer l'espérance de X .

Exercice 2 * *Loi d'un maximum*

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On réalise deux tirages avec remise. On note X la variable aléatoire réelle égale au plus grand des deux numéros. On réalise un troisième tirage. On note Y le numéro de la troisième boule.

- 1) Déterminer la loi de X , la loi de Y .
- 2) Quelle est la probabilité que le plus grand des deux premiers numéros soit égal au troisième?

Exercice 3 ** *Loi d'une somme*

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega) = [[0, n]]$. On suppose $\mathbb{P}(X = 0) > 0$.

- 1) Soit Y une variable aléatoire réelle indépendante de X telle que $Y(\Omega) = [[0, n]]$. Exprimer la loi de $X + Y$ en fonction des lois de X et Y .
- 2) Soit Z une variable aléatoire réelle indépendante de X telle que $Z(\Omega) = [[0, n]]$. Montrer que si $X + Y$ et $X + Z$ ont même loi, alors Y et Z ont même loi.

Exercice 4 *** *Majoration de la variance*

Soient X une variable aléatoire réelle et a, b deux réels. On note $m = \mathbb{E}(X)$.

1) Montrer que $\mathbb{E}((X - a)(b - X)) = (m - a)(b - m) - V(X)$.

Indication. $(X - a)(b - X) = ((X - m) + (m - a))((b - m) + (m - X))$.

2) On suppose $a < b$ et $X(\Omega) \subset [a, b]$.

a) Montrer que $(m - a)(b - m) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$. En déduire $V(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

b) Ce majorant peut-il être amélioré?

 **Exercices axés sur le raisonnement**

Exercice 5 ** Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire simultanément trois jetons. On appelle Y la variable aléatoire égale à celui des 3 numéros tirés dont la valeur est intermédiaire entre les deux autres. Par exemple, si les trois numéros sont 12, 5 et 9, alors $Y = 9$.

1) Déterminer la loi de Y .

2) On pose $Z = n + 1 - Y$. Montrer que Y et Z ont même loi. En déduire l'espérance de Y .

Exercice 6 ** *Une nouvelle expression de l'espérance*

Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

1) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer $\mathbb{P}(X = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X \leq k)$ et $\mathbb{P}(X \leq k - 1)$.

2) En déduire, $\mathbb{E}(X) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X \leq k)$.

3) *Application.*

On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On effectue une suite de N tirages d'une boule avec remise. On note X_N la variable aléatoire égale au plus grand nombre tiré.

a) Démontrer que $\mathbb{E}(X_N) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^N$.

b) Calculer, pour n fixé, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_N)$.

Exercice 7 ** *Entropie d'une variable aléatoire*

On note h l'application de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} définie par $h(0) = 0$ et pour tout $x > 0$, $h(x) = x \ln x$. Pour tout cet exercice, n est un entier naturel fixé et $I_n = \llbracket 0, n \rrbracket$.

1) a) Montrer que h est continue sur \mathbb{R}^+ .

b) Vérifier que, pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ et que $\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$.

2) Soit X une variable aléatoire à valeur dans I_n , on définit l'entropie de X par

$$H(X) = - \sum_{i=0}^n h(p_i) \quad \text{où, pour tout } i \in I_n, \quad p_i = \mathbb{P}(X = i).$$

- a) On dit que U suit une loi uniforme sur I_n si, et seulement si, il existe un réel α tel que, pour tout $i \in I_n$, $\mathbb{P}(U = i) = \alpha$. Déterminer α , puis, calculer $H(U)$.
- b) Soit X une variable aléatoire à valeur dans I_n telle que pour tout $i \in I_n$, $\mathbb{P}(X = i) > 0$. Montrer que $H(X) \geq 0$ puis que $H(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire certaine (c'est-à-dire une variable aléatoire qui ne prend qu'une seule valeur avec une probabilité de 1).
- c) En utilisant la question 1.b)), montrer que

$$\forall i \in I_n, \quad -h(p_i) + p_i \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - p_i.$$

- d) En déduire $H(X) \leq H(U)$, puis $H(X) = H(U)$ si et seulement si X suit la loi uniforme sur I_n .

Exercice 8 *** On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On effectue une suite de tirages de la façon suivante. Si au i -ème tirage, on obtient la boule numérotée k , alors on retire de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à k , et on remet la boule k dans l'urne. L'urne est alors prête pour le $(i+1)$ -ème tirage. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note X_i le numéro de la i -ème boule tirée.

- 1) Si la seconde boule tirée a pour numéro 1, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été la boule numéro 1?
On exprimera le résultat en fonction de $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
- 2) a) Déterminer la loi de X_1 et son espérance.
b) Déterminer la loi de X_2 .
- 3) Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Exprimer la loi de X_{i+1} en fonction de la loi de X_i .
- 4) En déduire, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_{i+1}) = \frac{1}{2}(\mathbb{E}(X_i) + 1)$.
- 5) Calculer $\mathbb{E}(X_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 *** Une application des fonctions génératrices

Pour une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ et à valeur dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice G_X de X par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \mathbb{E}(t^X).$$

On admet que pour toutes variables X, Y indépendantes, toute fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, alors $g(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes et

$$\mathbb{E}(g(X)g(Y)) = \mathbb{E}(g(X)) \cdot \mathbb{E}(g(Y)).$$

1) Justifier que G_X est la fonction polynomiale : $\forall t \in \mathbb{R}, G_X(t) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) t^k$.
Préciser $G_X(1)$.

2) Justifier que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[[0, n]]$, alors

$$G_{X+Y} = G_X G_Y.$$

3) *Application.* Soit U une variable dont la loi est donnée par

$$U(\Omega) = [[2, 12]] \quad \text{et} \quad \forall k \in [[2, 12]], \quad \mathbb{P}(U = k) = \frac{1}{11}.$$

On considère deux dés truqués à six faces numérotées de 1 à 6. La valeur obtenue en lançant le premier (resp. second) dé est une variable aléatoire X_1 (resp. X_2). On suppose X_1 et X_2 indépendantes. Le but de cette question est de montrer qu'il est impossible que $X_1 + X_2$ suive la même loi que U .

a) Montrer que, pour tout réel t , $G_U(t) = \frac{t^2}{11} P(t)$ où P est un polynôme de degré 10.

b) Calculer, pour t réel, $(t-1)P(t)$. En déduire que P n'a pas de racine réelle.

c) En déduire qu'il est impossible de trouver deux polynômes R et S de degré cinq tels que $P = RS$.

d) Conclure.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 10 ★ Soit X une variable aléatoire avec $X(\Omega)$, un sous-ensemble fini de \mathbb{N}^* .

1) Montrer que $\mathbb{E}\left(X + \frac{1}{X}\right) \geq 2$.

2) Quelle doit être la loi de X pour avoir $\mathbb{E}\left(X + \frac{1}{X}\right) = 2$?

Exercice 11 ★★ On place dans une urne vide une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne en appliquant le protocole suivant : après chaque tirage, on remet la boule dans l'urne en y ajoutant une boule de la même couleur.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n le nombre de boules blanches obtenues lors des n premiers tirages.

On introduira, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, l'événement B_i : « tirer une blanche au i -ième tirage ».

1) Déterminer la loi de X_1 , puis de X_2 . Conjecturer la loi de X_n .

2) Justifier votre conjecture.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. D'après les propriétés des coefficients du binôme de Newton :

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{n+1} \binom{n+1}{k+1}.$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=0}^n \frac{a}{n+1} \binom{n+1}{k+1} \stackrel{k'=k+1}{=} \frac{a}{n+1} \sum_{k'=1}^{n+1} \binom{n+1}{k'} \\ &= \frac{a}{n+1} \left(\sum_{k'=0}^{n+1} \binom{n+1}{k'} - 1 \right) \quad \left. \vphantom{\sum_{k'=0}^{n+1} \binom{n+1}{k'}} \right\} \text{formule du binôme de Newton} \\ &= \frac{a}{n+1} (2^{n+1} - 1). \end{aligned}$$

Or, $([X = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements, $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1$.

Nécessairement,

$$a = \frac{n+1}{2^{n+1} - 1}.$$

3) D'après le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}(X+1) = \sum_{k=0}^n (k+1) \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n a \binom{n}{k} = a 2^n = \frac{2^n (n+1)}{2^{n+1} - 1}.$$

Or, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X+1) = \mathbb{E}(X) + 1$ et

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X+1) - 1 = \frac{(n-1)2^n + 1}{2^{n+1} - 1}.$$

Exercice 2 Loi d'un maximum

1) Posons $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^2$ afin d'être dans une situation d'équiprobabilité.

- **Loi de X .** On a $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on écrit $[X = k]$ comme réunion de trois ensembles disjoints,

$$[X = k] = \{(k, k)\} \cup \{(i, k) ; i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket\} \cup \{(k, i) ; i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket\}.$$

$$\text{D'où} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{\text{card}(X = k)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1 + (k-1) + (k-1)}{n^2} = \frac{2k-1}{n^2}.$$

- **Loi de Y .** L'urne contient toutes les boules de 1 à n . Donc

$$Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{1}{n}.$$

- 2) Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements possibles $([Y = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = Y] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}(Y = k) \quad \left. \begin{array}{l} \text{X et Y indépendantes} \\ \end{array} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{n^3} \\ &= \frac{2}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n k \right) - \frac{1}{n^3} \left(\sum_{k=1}^n 1 \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{par linéarité} \\ \end{array} \right\} \\ &= \frac{2}{n^3} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{n^3} = \boxed{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Exercice 3 Loi d'une somme

- 1) Comme X et Y sont à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, $(X + Y)(\Omega) = \llbracket 0, 2n \rrbracket$.
De plus, $([Y = i])_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales, pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X + Y = k) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X + Y = k] \cap [Y = i]) \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}([X = k - i] \cap [Y = i]) \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X = k - i) \mathbb{P}(Y = i) \quad \left. \begin{array}{l} \text{car X et Y indépendantes} \\ \mathbb{P}(X = k - i) = 0 \text{ si } i > k \end{array} \right\} \\ &= \boxed{\sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = k - i) \mathbb{P}(Y = i)}. \end{aligned}$$

2) Démontrons que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \quad \forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y = i) = \mathbb{P}(Z = i),$$

est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

• **Initialisation.** Pour $k = 0$. Par hypothèse $\mathbb{P}(X + Y = 0) = \mathbb{P}(X + Z = 0)$. D'après la question 1) cela donne,

$$\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Z = 0).$$

Comme $\mathbb{P}(X = 0) \neq 0$, on en déduit $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(Z = 0)$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. Pour montrer que $\mathcal{P}(k + 1)$ est aussi vraie, il suffit de montrer que $\mathbb{P}(Y = k + 1) = \mathbb{P}(Z = k + 1)$.

Par hypothèse, $X + Y$ et $X + Z$ ont même loi, donc $\mathbb{P}(X + Y = k + 1) = \mathbb{P}(X + Z = k + 1)$. D'après la relation de la 1) avec $k + 1$ au lieu de k ,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{k+1} \mathbb{P}(X = k + 1 - i)\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=0}^{k+1} \mathbb{P}(X = k + 1 - i)\mathbb{P}(Z = i) \\ \text{donc} & \quad \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = k + 1 - i)\mathbb{P}(Y = i) + \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = k + 1) \\ & = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = k + 1 - i)\mathbb{P}(Z = i) + \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Z = k + 1). \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse de récurrence, pour tout $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $\mathbb{P}(Y = i) = \mathbb{P}(Z = i)$ et

$$\sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = k + 1 - i)\mathbb{P}(Y = i) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X = k + 1 - i)\mathbb{P}(Z = i).$$

Après simplification, il vient $\mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Y = k + 1) = \mathbb{P}(X = 0)\mathbb{P}(Z = k + 1)$. Et comme $\mathbb{P}(X = 0) \neq 0$, on en déduit

$$\mathbb{P}(Y = k + 1) = \mathbb{P}(Z = k + 1).$$

Si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Les variables Y et Z suivent la même loi.

Exercice 4 Majoration de la variance

1) Notons $\alpha = \mathbb{E}((X - a)(b - X))$.

$$\alpha = \mathbb{E}(((X - m) + (m - a))((b - m) + (m - X))).$$

En développant le produit,

$$\alpha = \mathbb{E}(\underbrace{(X - m)}_{\in \mathbb{R}}) \underbrace{(b - m)}_{\in \mathbb{R}} + (X - m)(m - X) + \underbrace{(m - a)(b - m)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(m - a)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(m - X)}_{\in \mathbb{R}}.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\alpha = (b - m)(\mathbb{E}(X) - m) + \mathbb{E}((X - m)(m - X)) + (m - a)(b - m) + (m - a)(m - \mathbb{E}(X)).$$

Or $\mathbb{E}(X) = m$, ce qui permet de simplifier,

$$\alpha = \mathbb{E}((X - m)(m - X)) + (m - a)(b - m) = (m - a)(b - m) - \mathbb{E}((X - m)^2).$$

Par définition de la variance,

$$\boxed{\mathbb{E}((X - a)(b - X)) = (m - a)(b - m) - \mathbb{V}(X).}$$

2) a) Par hypothèse, $a \leq X \leq b$, donc par croissance de l'espérance, $a \leq m \leq b$.

Soit f définie sur $[a, b]$ par $f(t) = (t - a)(b - t)$. f est polynomiale donc dérivable avec pour tout $t \in [a, b]$, $f'(t) = -2t + a + b$.

f est croissante sur l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$, décroissante sur $[\frac{a+b}{2}, b]$. Donc, f admet un maximum atteint en $(a + b)/2$, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq f(\frac{a+b}{2})$.

Or $f(\frac{a+b}{2}) = \frac{(b-a)^2}{4}$, donc $\boxed{(m - a)(b - m) \leq \frac{(b - a)^2}{4}.}$

• Comme $a \leq X \leq b$, $(X - a)(b - X) \geq 0$.

Par positivité de l'espérance, $\mathbb{E}((X - a)(b - X)) \geq 0$.

D'après la question 1), $\boxed{V(X) \leq \frac{(b - a)^2}{4}.}$

b) Montrons que la majoration ne peut être améliorée en déterminant une variable aléatoire U telle que $\mathbb{V}(U) = \frac{(b-a)^2}{4}$.

L'inégalité de la question 2 a) est une égalité si $m = \frac{a+b}{2}$.

L'inégalité $\mathbb{E}((U - a)(b - U)) \geq 0$ est une égalité si $(U - a)(b - U) = 0$ presque sûrement. On considère $U(\Omega) = \{a, b\}$ avec $p = \mathbb{P}(U = a)$. Alors

$$\mathbb{E}(U) = a\mathbb{P}(U = a) + b\mathbb{P}(U = b) = ap + b(1 - p).$$

$$\mathbb{E}(U) = \frac{a + b}{2} \iff p = \frac{1}{2}.$$

On trouve bien alors $\mathbb{V}(U) = \frac{(b-a)^2}{4}$. $\boxed{\text{L'inégalité ne peut pas être améliorée.}}$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

- 1) Considérons comme univers de possibles Ω , l'ensemble des parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à 3 éléments. Avec ce choix, on est en situation d'équiprobabilité.

$$\text{card}(\Omega) = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

La valeur de Y peut être n'importe quel numéro, à l'exception de 1 et n .

$$Y(\Omega) = \llbracket 2, n-1 \rrbracket.$$

Soit $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, on a $[Y = k]$ si et seulement si parmi les trois numéros on a un numéro strictement inférieur à k ($k-1$ possibilités), k (1 seule possibilité) et un numéro strictement supérieur à k ($n-k$ choix). Donc

$$\text{card}(Y = k) = 1 \times (k-1) \times (n-k).$$

$$\forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{\text{card}([Y = k])}{\text{card}(\Omega)} = \frac{6(k-1)(n-k)}{n(n-1)(n-2)}.$$

- 2) On remarque que $Z(\Omega) = \llbracket 2, n-1 \rrbracket = Y(\Omega)$. Pour tout $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z = k) &= \mathbb{P}(n+1-Y = k) \\ &= \mathbb{P}(Y = n+1-k) \\ &= \frac{6((n+1-k)-1)(n-(n+1-k))}{n(n-1)(n-2)} && \left. \begin{array}{l} \text{question précédente} \\ \text{simplifications} \end{array} \right\} \\ &= \frac{6(n-k)(k-1)}{n(n-1)(n-2)} = \mathbb{P}(Y = k). \end{aligned}$$

Par définition,

$$Y \text{ et } Z \text{ ont même loi.}$$

- Comme l'espérance d'une variable aléatoire ne dépend que de la loi,

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(n+1-Y) = n+1 - \mathbb{E}(Y) \quad (\text{par linéarité}).$$

Concluons

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{n+1}{2}.$$

Exercice 6 Une nouvelle expression de l'espérance

1) On écrit $[X \leq k]$ comme union de deux événements incompatibles

$$[X \leq k] = [X \leq k - 1] \cup [X = k].$$

Par la propriété d'additivité d'une probabilité,

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k - 1) + \mathbb{P}(X = k).$$

Il vient

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1).$$

2) Par définition de l'espérance

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^n k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k (\mathbb{P}(X \leq k) - \mathbb{P}(X \leq k - 1)) \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X \leq k) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X \leq k - 1) \\ &= \underbrace{n \mathbb{P}(X \leq n)}_{=1} + \sum_{k=1}^{n-1} k \mathbb{P}(X \leq k) - \sum_{k'=0}^{n-1} (k' + 1) \mathbb{P}(X \leq k') \\ &= n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} k \mathbb{P}(X \leq k)}_{\text{ajout du terme } k=0 \text{ nul}} - \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) \mathbb{P}(X \leq k) \\ &= \boxed{n - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X \leq k)}. \end{aligned}$$

par linéarité
changement d'indice
par linéarité

3) a) **Méthode 1.**

Considérons $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket^N$, comme univers des possibles. On est dans un cas d'équiprobabilité. Pour tout $k \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$, $[X_N \leq k] = \llbracket 1, k \rrbracket^N$,

$$\mathbb{P}(X_N \leq k) = \frac{\text{card}(X_N \leq k)}{\text{card}(\Omega)} = \left(\frac{k}{n}\right)^N.$$

Méthode 2.

Notons, pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, A_i l'événement « le numéro de la i -ème boule tirée est inférieur à k ». Avec ce choix

$$[X_N \leq k] = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_N = \bigcap_{i=1}^N A_i.$$

Comme les événements $(A_i)_{i \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ sont mutuellement indépendants,

$$\mathbb{P}(X_N \leq k) = \prod_{i=1}^N \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i=1}^N \frac{k}{n} = \left(\frac{k}{n}\right)^N.$$

D'après la question précédente

$$\mathbb{E}(X_N) = n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^N.$$

- b) Pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $0 < \frac{k}{n} < 1$. Donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{k}{n}\right)^N = 0$.

Par linéarité des limites, on en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_N) = n.$$

Exercice 7 Entropie d'une variable aléatoire

- 1) a) Par produit de fonctions continues sur \mathbb{R}_*^+ , h est continue sur \mathbb{R}_*^+ .
 h est continue en 0, car d'après les croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0 = h(0)$.

h est continue sur \mathbb{R}_*^+ .

- b) On définit sur \mathbb{R}_*^+ , $f(x) = \ln(x) - (x-1)$. f est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ en tant que différence de fonctions dérivables sur \mathbb{R}_*^+ avec

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \quad \text{et} \quad f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1.$$

f est donc strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. f admet donc un minimum uniquement atteint en 1. Or, $f(1) = 0$. f est donc positive et strictement positive sauf en 1. Autrement dit,

Pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ et $\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$.

Remarque

Au second semestre, on pourra utiliser un argument de concavité.

La fonction logarithme est strictement concave. Sa courbe est en dessous de chacune de ses tangentes et strictement en dessous hors du point de contact de la courbe avec la tangente. Or la tangente en $(1, 0)$ a pour équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x-1$. D'où le résultat.

- 2) a) Comme $([U = i])_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements,

$$\sum_{i=0}^n \mathbb{P}(U = i) = 1, \quad \text{puis,} \quad (n+1)\alpha = 1.$$

$$\alpha = \frac{1}{n+1}.$$

Et
$$H(U) = - \sum_{i=0}^n h\left(\frac{1}{n+1}\right) = - \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln(n+1).$$

b) Pour tout $i \in I_n$, $0 \leq p_i \leq 1$. On a $h(0) = h(1) = 0$ et pour $x \in]0,1[$, on a $\ln(x) < 0$. Ainsi, $-h(p_i) \geq 0$. Par somme, $H(X) = \sum_{i=0}^n -h(p_i) \geq 0$.

• Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls. Donc

$$H(X) = 0 \iff \forall i \in I_n, (p_i = 0 \text{ ou } p_i = 1).$$

Or, $\sum_{i=0}^n p_i = 1$. Donc toutes les probabilités sont nulles sauf une.

$H(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire certaine.

c) Si $p_i = 0$, le résultat est directement vrai. Sinon, $p_i > 0$ et

$$\begin{aligned} -h(p_i) + p_i \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) &= -p_i \ln(p_i) + p_i \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= p_i \ln\left(\frac{1}{p_i(n+1)}\right) \\ &\leq p_i \left(\frac{1}{p_i(n+1)} - 1\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Question 1 b) avec } p_i > 0 \\ \swarrow \end{array} \right\} \\ &\leq \frac{1}{n+1} - p_i. \end{aligned}$$

d)
$$H(X) = \sum_{i=0}^n -h(p_i) \leq \underbrace{\sum_{i=0}^n \frac{1}{n+1}}_{=1} - \underbrace{\sum_{i=0}^n p_i}_{=1} - \sum_{i=0}^n p_i \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ \leq \ln(n+1) \underbrace{\sum_{i=0}^n p_i}_{=1} \leq H(U).$$

Il y a égalité si et seulement si chacune des inégalités qui sont sommées est une égalité. Or, l'inégalité de la question 4 b) est une égalité si et seulement si

$$\begin{aligned} -h(p_i) + p_i \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - p_i &\iff \ln\left(\frac{1}{p_i(n+1)}\right) = \frac{1}{p_i(n+1)} - 1 \\ &\iff \frac{1}{p_i(n+1)} = 1 \\ &\iff p_i = \frac{1}{n+1}. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} 2) \text{ et } \frac{1}{p_i(n+1)} \neq 0$$

$H(X) = H(U)$ si et seulement si X suit la loi uniforme sur I_n .

Exercice 8

1) Calculons $\mathbb{P}_{[X_1=1]}(X_2 = 1)$.Appliquons la formule de Bayes avec le système complet d'événements $([X_1 = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

$$\mathbb{P}_{[X_2=1]}(X_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}_{[X_1=1]}(X_2 = 1) \mathbb{P}(X_1 = 1)}{\sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \mathbb{P}_{[X_1=k]}(X_2 = 1) \mathbb{P}(X_1 = k)}$$

Si $[X_1 = k]$ est réalisé, alors l'urne contient les boules de 1 à k au moment du second tirage :

$$\mathbb{P}_{[X_1=k]}(X_2 = 1) = \frac{1}{k}$$

D'où
$$\mathbb{P}_{[X_2=1]}(X_1 = 1) = \frac{1 \times \frac{1}{n}}{\sum_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket} \frac{1}{k} \times \frac{1}{n}} = \boxed{\frac{1}{H_n}}$$

2) a) Loi de X_1 .

Pour le premier tirage, toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

$$X_1(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{n}$$

Et

$$\mathbb{E}(X_1) = \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{2}$$

b) Loi de X_2 . La première boule tirée est remise dans l'urne, toutes les boules peuvent être à nouveau choisies.

$$X_2(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$$

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X_2 = k) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\mathbb{P}_{[X_1=j]}(X_2 = k)}_{=0 \text{ si } j < k} \mathbb{P}(X_1 = j) = \sum_{j=k}^n \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{n} = \boxed{\frac{1}{n} \sum_{j=k}^n \frac{1}{j}}$$

3) Au $(i+1)$ -ème tirage, toutes les boules peuvent être présentes et être ainsi choisies. On aa) $X_{i+1}(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements possibles $([X_{i+1} = j])_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket}$,

$$\mathbb{P}(X_{i+1} = k) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\mathbb{P}_{[X_i=j]}(X_{i+1} = k)}_{=0 \text{ si } j < k} \mathbb{P}(X_i = j) = \boxed{\sum_{j=k}^n \frac{1}{j} \cdot \mathbb{P}(X_i = j)}$$

4) Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(X_{i+1}) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(X_{i+1} = k) \stackrel{\text{d'après 3)}}{=} \sum_{k=1}^n k \left(\sum_{j=k}^n \frac{1}{j} \cdot \mathbb{P}(X_i = j) \right) \\
 &= \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{k}{j} \mathbb{P}(X_i = j) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} \mathbb{P}(X_i = j) \left(\sum_{k=1}^j k \right) \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} \mathbb{P}(X_i = j) \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^n j \mathbb{P}(X_i = j)}_{=\mathbb{E}(X_i)} + \underbrace{\sum_{j=1}^n \mathbb{P}(X_i = j)}_{=1} \right) \\
 &= \boxed{\frac{1}{2} (\mathbb{E}(X_i) + 1)}.
 \end{aligned}$$

5) La suite $(\mathbb{E}(X_i))$ est une suite arithmético-géométrique.

- Le point fixe ℓ vérifie $\ell = \frac{1}{2}(\ell + 1)$. Donc $\ell = 1$.
- La suite (v_i) définie, pour $i \in \mathbb{N}^*$ par : $v_i = \mathbb{E}(X_i) - 1$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $v_i = v_1/2^{i-1}$ et, d'après la question 2 a),

$$\mathbb{E}(X_i) = \left(\frac{1}{2} \right)^{i-1} (\mathbb{E}(X_1) - 1) + 1 = \frac{n-1}{2^i} + 1.$$

Remarque

On constate que $\mathbb{E}(X_i) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} 1$. Résultat assez logique : plus le nombre d'étapes augmente, plus la probabilité de n'avoir plus que la boule 1 augmente.

Exercice 9 Une application des fonctions génératrices

1) Soit $t \in \mathbb{R}$. On définit g sur \mathbb{N}^* par $g(x) = t^x$. D'après le théorème de transfert,

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k=0}^n g(k) \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) t^k.$$

Comme $([X = k])_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est un système complet d'événements

$$G_X(1) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

2) Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant le résultat admis dans l'énoncé,

$$\begin{aligned}
 G_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X t^Y) \\
 &= \mathbb{E}(g(X)g(Y)) = \mathbb{E}(g(X)) \cdot \mathbb{E}(g(Y)) \\
 &= G_X(t)G_Y(t).
 \end{aligned}$$

3) a) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$G_U(t) = \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(U = k) t^k = \frac{1}{11} \sum_{k=2}^{12} t^k \stackrel{k'=k-2}{=} \frac{1}{11} \sum_{k'=0}^{10} t^{k'+2} = \frac{t^2}{11} P(t),$$

où P est le polynôme défini sur \mathbb{R} par

$$P(t) = \sum_{k=0}^{10} t^k.$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$(1-t)P(t) = (1-t) \sum_{k=0}^{10} t^k = \sum_{k=0}^{10} t^k - \sum_{k=0}^{10} t^{k+1} \stackrel{k'=k+1}{=} \sum_{k=0}^{10} t^k - \sum_{k'=1}^{11} t^{k'} = 1 - t^{11}.$$

Si a est une racine de P , alors $(1-a)P(a) = 0$, donc $a^{11} - 1 = 0$.

La fonction $h : t \in \mathbb{R} \mapsto t^{11} - 1$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc injective. Elle s'annule en 1, qui est la seule racine de $(1-t)P(t)$. Mais $P(1) = 11 > 0$. Donc P n'a pas de racine réelle.

c) Raisonnons par l'absurde en supposant que $P = RS$ où R et S sont deux polynômes de degré 5. Alors R et S ont au moins une racine réelle, d'après les propriétés de factorisation des polynômes. En contradiction avec la question précédente.

Remarque

Si R est un polynôme de degré impair (et de coefficient dominant positif) alors

$$R \text{ est continue sur } \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} R = +\infty, \quad \lim_{-\infty} R = -\infty.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, R s'annule au moins une fois.

d) Supposons que X_1 et X_2 existent et $X_1 + X_2$ a même loi que U . Alors

$$G_{X_1+X_2} = G_U = G_{X_1} G_{X_2}.$$

Or $X_1(\Omega) = \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Donc, pour tout t réel

$$G_{X_1}(t) = \sum_{k=1}^6 \mathbb{P}(X_1 = k) t^k \stackrel{k'=k-1}{=} t \sum_{k'=0}^5 \mathbb{P}(X_1 = k'+1) t^{k'} = tR(t),$$

avec R , polynôme de degré 5. De même, pour tout t réel

$$G_{X_2}(t) = t \sum_{k'=0}^5 \mathbb{P}(X_1 = k'+1) t^{k'} = tS(t) \quad (\text{avec } S, \text{ polynôme de degré } 5).$$

Or, d'après la question précédente, on ne peut factoriser P à l'aide de deux polynômes de degré 5 ($P = RS$). Finalement,

Il est impossible que $X_1 + X_2$ suive la même loi que U .

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 10

1) $X + \frac{1}{X} - 2 = \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$. Donc $X + \frac{1}{X} \geq 2$.

Par croissance de l'espérance, $\mathbb{E}\left(X + \frac{1}{X}\right) \geq \mathbb{E}(2)$. Donc $\mathbb{E}\left(X + \frac{1}{X}\right) \geq 2$.

- 2) Posons $Y = X + \frac{1}{X} - 2$. On a $Y \geq 0$ d'après la question précédente.
S'il existe $k \in Y(\Omega)$ tel que $k > 0$ et $\mathbb{P}(Y = k) > 0$, alors

$$\mathbb{E}(Y) = k\mathbb{P}(Y = k) + \sum_{x \in Y(\Omega), x \neq k} \underbrace{x\mathbb{P}(Y = x)}_{>0} \geq k\mathbb{P}(Y = k) > 0.$$

Par contraposée, $\mathbb{E}(Y) = 0$ si et seulement si Y est la variable certaine égale à 0. Donc,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(X + \frac{1}{X}\right) = 2 &\Leftrightarrow \mathbb{E}(Y) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Y = 0) = 1 \\ &\Leftrightarrow \mathbb{P}\left(X + \frac{1}{X} - 2 = 0\right) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = 1) = 1. \end{aligned}$$

X est presque sûrement constant à 1.

Exercice 11

- 1) **Loi de X_1 .** Au premier tirage, il peut avoir une ou deux boules : $X_1(\Omega) = \{0,1\}$.

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{\text{card}(X_1 = 0)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Conclusion :

$$X_1(\Omega) = \{0,1\}, \quad \mathbb{P}(X_1 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}.$$

Loi de X_2 . $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$.

- $\mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \mathbb{P}(\overline{B_1})\mathbb{P}_{\overline{B_1}}(\overline{B_2}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
- $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.
- $\mathbb{P}(X_2 = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 0) - \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$.

Conclusion :

$$X_2(\Omega) = \{0,1,2\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_2 = 0) = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{3}.$$

2) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{P}(n): X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

• **Initialisation.** Pour $n = 1$, la propriété a été montrée à la question précédente.

• **Hérédité.** Soit $n \geq 1$. On suppose $\mathcal{P}(n)$.

Déterminons la loi de X_{n+1} . Clairement, $X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 0, n+1 \rrbracket$.

Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Appliquons la *formule des probabilités totales* avec le système complet d'événements $(B_{n+1}, \overline{B_{n+1}})$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = k) &= \mathbb{P}([X_{n+1} = k] \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}([X_{n+1} = k] \cap \overline{B_{n+1}}) \\ &= \mathbb{P}([X_n = k-1] \cap B_{n+1}) + \mathbb{P}([X_n = k] \cap \overline{B_{n+1}}) \\ &= \mathbb{P}(X_n = k-1) \mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(X_n = k) \mathbb{P}_{[X_n=k]}(\overline{B_{n+1}}). \end{aligned}$$

Si $[X_n = k-1]$, on a ajouté $k-1$ boules blanches et $n-k+1$ boules noires lors des n premiers tirages. Ainsi l'urne contient $n+2$ boules dont k blanches. D'où

$$\mathbb{P}_{[X_n=k-1]}(B_{n+1}) = \frac{k}{n+2}.$$

Si $[X_n = k]$, alors on a ajouté k boules blanches et $n-k$ boules noires lors des n premiers tirages. Donc

$$\mathbb{P}_{[X_n=k]}(\overline{B_{n+1}}) = \frac{n-k+1}{n+2}.$$

$$\text{D'où} \quad \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \underbrace{\frac{1}{n+1} \frac{k}{n+2}}_{\mathcal{P}(n)} + \underbrace{\frac{1}{n+1} \frac{n-k+1}{n+2}}_{\mathcal{P}(n)} = \frac{1}{n+2}.$$

Et, par ailleurs

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(X_n = 0) \mathbb{P}_{[X_n=0]}(\overline{B_{n+1}}) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = n+1) = \mathbb{P}(X_n = n) \mathbb{P}_{[X_n=n]}(B_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}.$$

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Un calcul d'espérance

Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$.

On note $Y = \frac{1}{X+1}$. Sans déterminer la loi de Y , calculer l'espérance de Y .

Exercice 2 * Jetons et boules

On dispose d'un sac contenant 10 jetons numérotés de 0 à 9 et d'une urne contenant une boule blanche et deux boules noires.

On organise le jeu suivant. Le joueur tire un jeton au hasard. On note X la variable aléatoire réelle égale au numéro du jeton tiré.

- Si $X > 0$, alors le joueur gagne X euros et le jeu s'arrête.
- Si $X = 0$, alors le joueur effectue 9 tirages avec remise dans l'urne. Chaque tirage d'une boule blanche lui rapporte un euro.

On note G la variable aléatoire réelle égale au gain réalisé lors d'une partie.

- 1) Donner la loi de G .
- 2) Quelle mise initiale doit prévoir l'organisateur du jeu pour gagner en moyenne 0,2 euro par partie?

Exercice 3 *** Mode(s) de la loi binomiale

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On appelle mode de X , toute valeur $x \in X(\Omega)$ telle que

$$\forall y \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = y) \leq \mathbb{P}(X = x).$$

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. Montrer que, selon les valeurs de n et p , la loi $\mathcal{B}(n,p)$ admet un ou deux modes que l'on précisera.
- 2) Pour $n = 9$, illustrer par des représentations graphiques en Python les différents cas obtenus.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 * Déplacements sur deux cases

On dispose d'un damier avec deux cases numérotées 1 et 2 et d'une pièce de monnaie équilibrée. On place un pion blanc sur la case 1 avec une probabilité a et sur la case 2 avec une probabilité $1 - a$. On lance indéfiniment la pièce de monnaie. À chaque lancer, si la pièce de monnaie tombe sur pile, on change le pion de case, sinon il reste sur la même case.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'événement

A_n : « La pièce est sur la case 1 après le n -ième lancer de la pièce ».

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}(A_n)$. En particulier $u_0 = a$.

- 1) Calculer u_1 . Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de u_n .
- 2) On prend $a = 1$.
 - a) À quelle condition sur le nombre de piles réalisés lors des n premiers lancers, l'événement A_n est-il réalisé?
 - b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\sum_{k \in E_n} \binom{n}{k}$, où $E_n = \{k \in \llbracket 0, n \rrbracket ; k \text{ pair} \}$.

Exercice 5 * QCM

Un QCM est composé de vingt questions. Pour chaque question, on propose quatre réponses, et une seule des quatre réponses est juste à chaque fois. Une bonne réponse rapporte un point. Une mauvaise réponse entraîne une pénalité d'un tiers de point.

Un candidat peu scrupuleux répond à chaque fois au hasard, et ses choix entre les différentes questions sont indépendants les uns des autres. On appelle X la variable aléatoire qui renvoie le nombre de réponses justes, et N la note correspondante.

- 1) Donner la loi de X .
- 2) Exprimer N en fonction de X .
- 3) Quelle note peut espérer le candidat, en moyenne?

Exercice 6 ** Être ou ne pas être une loi binomiale

- 1) Un restaurant universitaire ouvre. 100 étudiants qui ne se connaissent pas entrent. La probabilité qu'un étudiant soit en Master est de 0,3. On note X le nombre d'étudiants en Master parmi les 100 étudiants. Quelle est la loi de X , son espérance, sa variance?
- 2) On dénombre 35 étudiants en Master parmi les 100 étudiants qui sont dans le restaurant. 40 étudiants sortent. On note Y le nombre d'étudiants en Master qui sont sortis du restaurant.
 - a) Quelle est la loi de Y ?
 - b) Pour chaque étudiant sortant du restaurant, on définit une variable aléatoire de Bernoulli valant 1 si l'étudiant est en Master, 0 sinon. On note $(Z_i)_{1 \leq i \leq 40}$ les variables aléatoires ainsi obtenues.
Exprimer Y en fonction des variables $(Z_i)_{1 \leq i \leq 40}$. En déduire l'espérance de Y .

Exercice 7 ** Mutualisation des risques bancaires

Une banque propose de prêter de l'argent selon le modèle suivant. L'emprunteur reçoit une somme c et doit rembourser le double vingt ans plus tard.

Soit $q \in [0; 1]$ la probabilité de non-remboursement et X la variable aléatoire égale au gain de la banque.

- 1) Donner la loi de X .
- 2) Préciser l'espérance et la variance de X en fonction de q et c .

Considérons maintenant 10 banques et 10 emprunteurs. Ces dix banques vont partager les risques de la manière suivante. Chaque prêt est découpé en 10 tranches de $c/10$ pour un gain de $2c/10$, chaque tranche est désigné par le terme titre. Les banques se répartissent équitablement les titres. Ainsi, chaque banque dispose maintenant de 10 titres. Notons X' le gain d'une banque et N le nombre d'emprunteurs qui vont faire défaut. On suppose que les événements « L'emprunteur i fait défaut » sont mutuellement indépendants.

- 3) Donner la loi de N . Préciser l'espérance et la variance.
- 4) a) Donner la relation entre X' et N .
b) En déduire l'espérance et la variance de X' .
c) Comparer ces résultats avec X .
- 5) Expliquer l'intérêt pour les banques de ce procédé.

Exercice 8 *** Fonctions génératrices

Soit X une variable aléatoire discrète finie à valeur dans \mathbb{N} . Soit n tel que $X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$. On définit la fonction génératrice de X par,

$$\text{pour tout réel } t : G_X(t) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k)t^k.$$

- 1) Soient X et Y deux variables aléatoires finies à valeurs dans \mathbb{N} .
Montrer que si $G_X = G_Y$, alors X et Y ont même loi.
- 2) Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres (n, p) .

Application.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose d'une urne contenant une boule blanche et une boule noire. On y effectue des séries de tirages selon le protocole suivant :

Pour la première série, on effectue une suite de n tirages d'une boule avec remise. Si on obtient k fois la boule blanche lors de cette première série de tirages, on effectue une suite de $n - k$ tirages d'une boule avec remise pour la seconde série. On répète les séries de tirages de telle manière que si on a obtenu j fois la boule blanche lors des i premières séries, la $(i + 1)$ -ième série de tirages consiste à tirer $n - j$ boules avec remise dans l'urne. Autrement dit, si, pour tout entier naturel non nul i , on désigne par Y_i la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues lors de la i -ème série, et $X_i = \sum_{m=1}^i Y_m$. Alors, si $X_i = j$, on effectue

$n - j$ tirages pour la $(i + 1)$ -ième série. Précisons que si pour un certain i , $X_i = n$, on pose pour tout entier $j \geq i : X_j = 0$.

En particulier, $X_i(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ et on note G_i la fonction génératrice de X_i .

3) Donner la loi de X_1 et sa fonction génératrice.

4) Soit $i \in \mathbb{N}^*$.

a) Soient k et j deux entiers tels que $0 \leq k < j \leq n$. Que vaut $\mathbb{P}([X_{i+1} = k] \cap [X_i = j])$?

b) Soient k et j deux entiers tels que $0 \leq j \leq k \leq n$.

Exprimer $\mathbb{P}([X_{i+1} = k] \cap [X_i = j])$ en fonction de $\mathbb{P}(X_i = j)$.

Indication. Remarquer que $([X_{i+1} = k] \cap [X_i = j]) = ([Y_{i+1} = k - j] \cap [X_i = j])$.

c) En déduire, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X_{i+1} = k)$ en fonction des valeurs $(\mathbb{P}(X_i = j))_{j \in \llbracket 0, k \rrbracket}$.

d) Montrer que pour tout $t \neq -1$, $G_{i+1}(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^n G_i\left(\frac{2t}{1+t}\right)$.

5) Justifier que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, et tout $t \in \mathbb{R}$, $G_i(t) = \left(\frac{1}{2^i} + \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)t\right)^n$.

Conclure en donnant la loi de X_i .

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 9 ** Exemple d'optimisation des coûts

Une coopérative de production de comté regroupe $2n$ producteurs de lait. On souhaite tester la qualité du lait.

On sait que chaque producteur, indépendamment des autres, à une probabilité $p \in]0; 1[$ de produire un lait de qualité suffisante. Pour minimiser le coût des tests sans prendre le risque de conserver un lait de mauvaise qualité, on procède de la manière suivante : on forme des groupes de 2 échantillons ; dans chaque groupe, on mélange les laits en un seul double-échantillon, dont on teste la qualité du lait.

Si on détecte que le lait est de qualité insuffisante dans un double-échantillon, on teste les deux laits séparément.

1) Quelle est la loi du nombre de double-échantillon mauvais ?

2) À quelle condition sur p cette méthode est-elle intéressante ?

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Un calcul d'espérance

La variable X est finie et à valeurs dans $\llbracket 0, m \rrbracket$. Il en résulte que $Y = \frac{1}{X+1}$ est bien définie, et que c'est également une variable finie. Elle admet donc une espérance.

Avec le théorème de transfert :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k+1} \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}.$$

Rappelons que pour $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $\binom{m+1}{k+1} = \frac{m+1}{k+1} \binom{m}{k}$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^m \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{k+1} p^k (1-p)^{m-k} = \frac{1}{p(m+1)} \sum_{k=0}^m \binom{m+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{m-k} \\ &\stackrel{j=k+1}{=} \frac{1}{p(m+1)} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{m+1}{j} p^j (1-p)^{m+1-j} \\ \mathbb{E}(Y) &= \frac{1}{p(m+1)} \left(\sum_{j=0}^{m+1} \binom{m+1}{j} p^j (1-p)^{m+1-j} - (1-p)^{m+1} \right). \end{aligned}$$

Il reste à appliquer la formule du binôme de Newton,

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{p(m+1)} \left(1 - (1-p)^{m+1} \right).$$

Exercice 2 Jetons et boules

- 1) $G(\Omega) = \llbracket 0, 9 \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$, on peut gagner k euros, soit en tirant le jeton k , soit en tirant le jeton 0 puis en tirant k fois la boule blanche. On a donc, pour $k \in \llbracket 1, 9 \rrbracket$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G = k) &= \mathbb{P}([X = k] \cup ([X = 0] \cap [G = k])) && \begin{array}{l} \text{union d'événements} \\ \text{incompatibles} \end{array} \\ &= \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}_{[X=0]}(G = k) && \text{loi binomiale } \mathcal{B}(9, 1/4) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \binom{9}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{9-k}.$$

Et $\mathbb{P}(G = 0) = \mathbb{P}([X = 0] \cap [G = 0]) = \frac{1}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^9.$

- 2) La mise initiale doit être de $\mathbb{E}(G) + 0,2$. Or,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(G) &= \sum_{k=0}^9 k \mathbb{P}(G = k) = \sum_{k=1}^9 k \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{10} \binom{9}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{9-k} \right) && \text{par linéarité} \\ &= \frac{1}{10} \left(\sum_{k=1}^9 k \right) + \frac{1}{10} \sum_{k=1}^9 k \binom{9}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{9-k} && \text{espérance de la loi } \mathcal{B}(9, 1/3) \\ &= \frac{1}{10} \frac{9 \times 10}{2} + \frac{1}{10} \times 9 \times \frac{1}{3} = \boxed{4,8}. \end{aligned}$$

L'organisateur doit prévoir une mise de $\boxed{5 \text{ euros}}$.

Exercice 3 Mode(s) de la loi binomiale

1) Posons pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $u_n = \mathbb{P}(X = k) > 0$.

Étudions les variations de la suite. Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1}}{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}} = \frac{n! k! (n-k)! p}{n! (k+1)! (n-k-1)! (1-p)} = \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)}.$$

(u_n) est strictement croissante lorsque

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 &\Leftrightarrow \frac{(n-k)p}{(k+1)(1-p)} > 1 \\ &\Leftrightarrow (n-k)p > (k+1)(1-p) \quad \left. \vphantom{\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1} \right\} (k+1)(1-p) > 0 \\ &\Leftrightarrow k < p(n+1) - 1. \end{aligned}$$

Or $-1 < p(n+1) - 1 < n$. On distingue alors 4 cas :

• $p(n+1) - 1 < 0$. Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$.

La suite $(u_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est strictement décroissante.

On a un seul mode : 0. La valeur du mode est $\mathbb{P}(X = 0) = (1-p)^n$.

• $p(n+1) - 1 > n-1$. Alors, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$.

La suite $(u_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est strictement croissante.

On a un seul mode : n .

• $0 \leq p(n+1) - 1 \leq n-1$. On a deux sous-cas :

→ Premier sous-cas $p(n+1) - 1 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Autrement dit, il existe $k_0 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $k_0 = p(n+1) - 1$.

Pour $k < k_0$ ($0 \leq k \leq k_0 - 1$), on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$, donc $u_0 < u_1 < \dots < u_{k_0}$.

Puis $\frac{u_{k_0}}{u_{k_0+1}} = 1$, donc $u_{k_0} = u_{k_0+1}$.

Puis pour $k > k_0$ ($k_0 + 1 \leq k \leq n$), on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$, donc $u_{k_0+1} < u_1 < \dots < u_n$.

On a deux modes : $p(n+1) - 1$ et $p(n+1)$.

→ Second sous-cas $p(n+1) - 1 \notin \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Alors il existe $k_0 \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $k_0 < p(n+1) - 1 < k_0 + 1$.

$$k_0 = \lfloor p(n+1) - 1 \rfloor = \lfloor p(n+1) \rfloor - 1$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x

Pour $k \leq k_0$, on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$, donc $u_0 < u_1 < \dots < u_{k_0+1}$.

Pour $k_0 + 1 \leq k \leq n-1$, on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$, donc $u_{k_0+1} < u_{k_0+2} < \dots < u_n$.

On a un seul mode : $k_m = \lfloor p(n+1) \rfloor$.

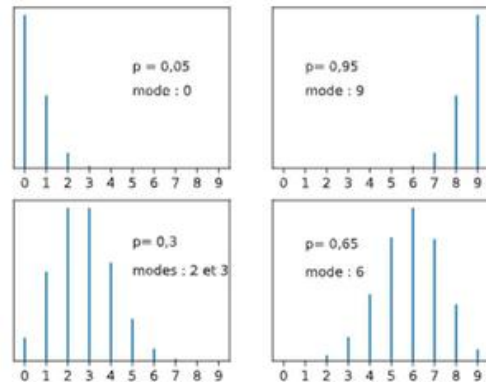
- 2) On écrit une fonction `liste_loi_binom` qui renvoie la liste des valeurs pour construire l'histogramme. On utilise, pour $1 \leq k \leq n$, la relation $\mathbb{P}(X = k) = \frac{(n-k+1)p}{kp} \mathbb{P}(X = k-1)$.

```
def liste_loi_binom(n,p):
    proba=(1-p)**n # P(X=0)
    b=[proba]
    for k in range(1,n+1):
        proba=((n-k+1)*p)/(k*(1-p))*proba
        b.append(proba)
    return b
```

Pour afficher l'histogramme on utilise `plt.bar`.

```
import matplotlib.pyplot as plt

n=9
x = range(n+1)
p=0.5
width = 0.1
plt.bar(x, liste_loi_binom(n,p),width)
```



Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 Déplacements sur deux cases

- 1) $(A_0, \overline{A_0})$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales

$$u_1 = \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 \cap A_0) + \mathbb{P}(A_1 \cap \overline{A_0}).$$

Si $a \in]0; 1[$, les événements sont non négligeables et :

$$u_1 = \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}_{A_0}(A_1) \mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}_{\overline{A_0}}(A_1) \mathbb{P}(\overline{A_0}) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(1-a) = \frac{1}{2}.$$

On constate, *a posteriori*, que la relation reste valable pour $a = 0$ et $a = 1$.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$. Il suffit de reprendre le calcul avec le système complet d'événements $(A_{n-1}, \overline{A_{n-1}})$

$$u_n = \frac{1}{2}u_{n-1} + \frac{1}{2}(1 - u_{n-1}) = \frac{1}{2}.$$

Conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{2}.$$

- 2) a) Si $a = 1$, alors le pion est sur la case 1 au début. Il sera sur la case après le n -ième lancer si et seulement si on a effectué un nombre pair de déplacements, c'est-à-dire obtenu un nombre pair de piles lors des n premiers lancers.
- b) En considérant qu'obtenir pile est un succès, les lancers forment une suite d'épreuves de *Bernoulli identiques et indépendantes*. Le nombre de succès lors des n premiers lancers est donc une variable aléatoire X_n qui suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/2)$.

Or, $u_n = \sum_{k \in E_n} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{2}$. D'après l'expression de la loi binomiale,

$$\sum_{k \in E_n} \mathbb{P}(X_n = k) = \sum_{k \in E_n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k \in E_n} \binom{n}{k}.$$

Finalement :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k \in E_n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$.

Remarque

On pourra consulter l'exercice 2 du chapitre 4 pour une preuve calculatoire.

Exercice 5 QCM

- 1) La variable aléatoire X compte le nombre de succès dans une succession de 20 épreuves de Bernoulli (avoir oui ou non la bonne réponse) mutuellement indépendantes et de même paramètre $1/4$ (il y a une chance sur quatre de répondre juste à une question donnée). On sait alors que

X suit la loi binomiale de paramètres $(20; 1/4)$.

- 2) Le nombre de réponses justes est X , et chacune rapporte un point. Le nombre de réponses fausses est $20 - X$, et chacune rapporte $-\frac{1}{3}$ de points, donc

$$N = X - \frac{1}{3}(20 - X) = \frac{4}{3}X - \frac{20}{3}.$$

- 3) Il s'agit de calculer $\mathbb{E}(N)$. Comme $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(20, \frac{1}{4}\right)$, on sait que X admet une espérance, et que $\mathbb{E}(X) = 20 \times \frac{1}{4} = 5$. Puis, par *linéarité de l'espérance*,

$$\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}\left(\frac{4}{3}X - \frac{20}{3}\right) = \frac{4}{3}\mathbb{E}(X) - \frac{20}{3} = \frac{4}{3} \times 5 - \frac{20}{3} = \boxed{0}.$$

Exercice 6 Être ou ne pas être une loi binomiale

- 1) Les entrées des étudiants constituent une suite de 100 épreuves de Bernoulli (succès : être en Master) mutuellement indépendantes car les étudiants ne se connaissent pas. X est le nombre de succès. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $(100; 0,3)$.

D'après les propriétés des lois binomiales

$$\mathbb{E}(X) = 100 \times 0,3 = 30 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = 100 \times 0,3 \times (1 - 0,3) = 21.$$

- 2) a) La situation est complètement différente de la question 1). On a un nombre connu d'étudiants en Master. Pour deux étudiants pris au hasard, si le premier est en Master, alors le second n'a plus qu'une probabilité de $\frac{29}{99}$ d'être en Master. Autrement dit, il n'y a plus indépendance comme à la première question.

Les étudiants forment un ensemble de 100 individus que nous noterons E . L'univers des possibles associé à l'expérience est l'ensemble des parties de 40 éléments de E : $\text{card}(\Omega) = \binom{100}{40}$.

Précisons la loi de X .

- $X(\Omega) = \llbracket 0, 35 \rrbracket$.
- Soit $k \in \llbracket 0, 35 \rrbracket$. Pour avoir $[X = k]$, il faut k étudiants parmi les 35 qui sont en Master, et $40 - k$ parmi les 65 étudiants qui ne sont pas en Master. Tous les choix sont équiprobables

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{35}{k} \binom{65}{40-k}}{\binom{100}{40}}.$$

- b) Les variables de Bernoulli permettent, quelque soit la situation de compter le nombre de succès en les additionnant : $Y = \sum_{i=1}^{40} Z_i$. Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^{40} \mathbb{E}(Z_i) = 40 \times \frac{35}{100} = \boxed{14}.$$

Exercice 7 Mutualisation des risques bancaires

- 1) Si l'emprunteur rembourse, alors $X = c$. Sinon, $X = -c$. Ainsi,

$$X(\Omega) = \{-c, c\} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = -c) = q, \quad \mathbb{P}(X = c) = 1 - q.$$

- 2) Par définition $\mathbb{E}(X) = -c \cdot \mathbb{P}(X = -c) + c \cdot \mathbb{P}(X = c) = -cq + c(1 - q) = \boxed{(1 - 2q)c}$.

D'après la formule de Koenig-Huygens, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$.

Or $\mathbb{E}(X^2) = (-c)^2 \cdot \mathbb{P}(X = -c) + c^2 \cdot \mathbb{P}(X = c) = c^2$.

D'où

$$\mathbb{V}(X) = \boxed{4q(1 - q)c^2}.$$

- 3) Pour tout $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, notons X_i la variable indicatrice de l'événement « L'emprunteur i fait défaut ». C'est-à-dire, X_i prend la valeur 1 si l'événement est réalisé et 0 sinon.

On a $N = \sum_{i=1}^{10} X_i$. Or les variables X_i sont mutuellement indépendantes, de même paramètre q , donc

$$N \hookrightarrow \mathcal{B}(10, q).$$

En particulier, $\mathbb{E}(N) = 10q$ et $\mathbb{V}(N) = 10q(1 - q)$.

- 4) a) Pour chaque emprunteur faisant défaut, la perte est de $c/10$. Pour chaque emprunteur qui rembourse, le gain est de $c/10$. D'où

$$X' = \underbrace{-N \frac{c}{10}}_{\text{emprunteurs en défaut}} + \underbrace{(10 - N) \frac{c}{10}}_{\text{emprunteurs qui remboursent}} = \left(1 - \frac{2N}{10}\right) c.$$

- b) Par linéarité

$$\mathbb{E}(X') = \mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{2N}{10}\right) c\right) = \left(1 - \frac{2\mathbb{E}(N)}{10}\right) c = (1 - 2q)c.$$

Par propriété de la variance :

$$\mathbb{V}(X') = \left(-\frac{2c}{10}\right)^2 \mathbb{V}(N) = \frac{4q(1-q)}{10} c^2.$$

- c) D'après les questions précédentes

$$\mathbb{E}(X') = \mathbb{E}(X) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X') = \frac{1}{10} \mathbb{V}(X).$$

- 5) En moyenne, le gain pour la banque est le même. Par contre, le risque est supporté par l'ensemble des banques, il est donc moins important.

Noter l'hypothèse de mutuelle indépendance qui est une hypothèse forte dans ce modèle de gestion des risques. Dans le cas d'une crise importante qui impacte de nombreux agents économiques, cette hypothèse n'est plus vérifiée et les pertes peuvent devenir très importantes.

Exercice 8 Fonctions génératrices

- 1) Les fonctions G_X et G_Y sont deux fonctions polynomiales de degré n définies sur \mathbb{R} . Si $G_X = G_Y$, alors, d'après les propriétés des polynômes, elles ont mêmes coefficients. Donc, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k)$.

$$\text{Si } G_X = G_Y, \text{ alors } X \text{ et } Y \text{ ont même loi.}$$

- 2) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$. On a pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G_X(t) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) t^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k \\ &= (tp + (1-p))^n. \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \\ \text{formule du binôme de Newton} \end{array} \right\}$

- 3) La suite des n tirages est une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes (succès : « tirer une boule blanche », de probabilité $1/2$). La variable aléatoire réelle X_1 compte le nombre de succès, donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$. D'après la question précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_1(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^n.$$

- 4) a) Par définition $X_{i+1} - X_i = Y_{i+1} \geq 0$.
Donc, pour $k < j$, l'événement $[X_{i+1} = k] \cap [X_i = j]$ est impossible,

$$\mathbb{P}([X_{i+1} = k] \cap [X_i = j]) = 0.$$

- b) Si $0 \leq j \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}([X_{i+1} = k] \cap [X_i = j]) \\ &= \mathbb{P}([X_{i+1} - X_i = k - j] \cap [X_i = j]) \\ &= \mathbb{P}([Y_{i+1} = k - j] \cap [X_i = j]) \\ &= \mathbb{P}_{[X_i = j]}(Y_{i+1} = k - j) \mathbb{P}(X_i = j) \\ &= \underbrace{\binom{n-j}{k-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}}_{k-j \text{ boules blanches}} \mathbb{P}(X_i = j) = \boxed{\binom{n-j}{k-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \mathbb{P}(X_i = j)}. \end{aligned}$$

- c) D'après la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(X_{i+1} = k) = \sum_{j=0}^n \underbrace{\mathbb{P}([X_{i+1} = k] \cap [X_i = j])}_{=0 \text{ si } j > k} = \boxed{\sum_{j=0}^k \binom{n-j}{k-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \mathbb{P}(X_i = j)}.$$

- d) Soit $t \neq -1$,

$$\begin{aligned} G_{i+1}(t) &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X_{i+1} = k) t^k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^k \binom{n-j}{k-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} \mathbb{P}(X_i = j) \right) t^k \\ &= \sum_{0 \leq j \leq k \leq n} \binom{n-j}{k-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} t^k \mathbb{P}(X_i = j) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n \binom{n-j}{k-j} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} t^k \mathbb{P}(X_i = j) \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{k'=0}^{n-j} \binom{n-j}{k'} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-j} t^{k'+j} \mathbb{P}(X_i = j) \quad \left. \begin{array}{l} \text{chang}^t \text{ d'indice } k' = k - j \end{array} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^n 2^j t^j \sum_{k'=0}^{n-j} \binom{n-j}{k'} t^{k'} \mathbb{P}(X_i = j) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{j=0}^n 2^j t^j (1+t)^{n-j} \mathbb{P}(X_i = j) \quad \left. \begin{array}{l} \text{binôme de Newton} \end{array} \right\} \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \sum_{j=0}^n \left(\frac{2t}{1+t}\right)^j \mathbb{P}(X_i = j) = \boxed{\left(\frac{1+t}{2}\right)^n G_i\left(\frac{2t}{1+t}\right)}. \end{aligned}$$

5) Démontrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(i) : \forall t \in \mathbb{R}, G_i(t) = \left(\frac{1}{2^i} + \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)t\right)^n$$

est vraie pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

• **Initialisation.** Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_1(t) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^n$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(i)$ vraie. pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$,

$$\begin{aligned} G_{i+1}(t) &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^n G_i\left(\frac{2t}{1+t}\right) \\ &= \left(\frac{1+t}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2^i} + \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)\frac{2t}{1+t}\right)^n \quad \left. \vphantom{\frac{1+t}{2}} \right) \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \left(\frac{1+t}{2^{i+1}} + \left(1 - \frac{1}{2^i}\right) \cdot t\right)^n = \left(\frac{1}{2^{i+1}} + t - \frac{t}{2^{i+1}}\right)^n = \left(\frac{1}{2^{i+1}} + \left(1 - \frac{1}{2^{i+1}}\right)t\right)^n. \end{aligned}$$

Notons que l'égalité s'étend à $t = -1$ par continuité de la fonction polynomiale G_{i+1} .
Donc, si $\mathcal{P}(i)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(i+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour $t \in \mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{N}^*$, $G_i(t) = \left(\frac{1}{2^i} + \left(1 - \frac{1}{2^i}\right)t\right)^n$.

On reconnaît la fonction génératrice d'une loi $\mathcal{B}(n, 1 - 1/2^i)$. D'après la question 1) :

$$X_i \text{ suit une loi } \mathcal{B}\left(n, 1 - \frac{1}{2^i}\right).$$

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 9

1) On teste n double-échantillons indépendants. La probabilité qu'un double-échantillon soit bon est p^2 . La probabilité qu'il soit mauvais est donc $1 - p^2$. X compte le nombre de succès (ici : le double échantillon est mauvais) dans n répétitions d'épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes. Le nombre X de double-échantillons mauvais suit donc une loi binomiale de paramètre $(n, 1 - p^2)$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - p^2), \quad \mathbb{E}(X) = n(1 - p^2) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = n(1 - p^2)p^2.$$

2) Soit N le nombre de tests effectués avec cette méthode. On effectue n tests de double-échantillons, puis, pour chaque double-échantillon mauvais, on effectue deux tests. Donc le nombre total de tests est $N = n + 2X$. En moyenne le nombre de tests sera

$$\mathbb{E}(N) = n + 2\mathbb{E}(X) = n + 2n(1 - p^2) = n(3 - 2p^2).$$

La méthode est intéressante si cette moyenne est inférieure à $2n$.

$$\mathbb{E}(N) < 2n \iff n(3 - 2p^2) < 2n \iff 2p^2 > 1 \iff p > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{La méthode est intéressante si et seulement si } p > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Espaces vectoriels de dimension finie

20

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 On travaille dans \mathbb{R}^3 . On pose

$$u = (1, 1, -1), \quad v = (-1, 1, 5), \quad w = (1, 2, 1) \quad \text{et} \quad F = \text{Vect}(u, v, w).$$

- 1) Donner une famille génératrice de F .
- 2) En déduire une base de F , puis la dimension de F .

Exercice 2 * *Sous-ensembles de \mathbb{R}^n*

Dans chacun des cas, préciser si l'ensemble est un espace vectoriel et donner la dimension.

- 1) $E_1 = \{(x, y, x + y) ; x, y \in \mathbb{R}\}$;
- 2) $E_2 = \{(x, y, xy) ; x, y \in \mathbb{R}\}$;
- 3) $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$;
- 4) $E_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}$.

Exercice 3 * On travaille dans l'espace des applications de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} .

On note f l'application constante égale à 1, puis

$$g_1 : x \mapsto \ln(x), \quad g_2 : x \mapsto \ln(2x) \quad \text{et} \quad g_3 : x \mapsto \ln(3x).$$

Déterminer le rang de la famille (f, g_1, g_2, g_3) .

Exercice 4 * Donner une base des espaces vectoriels suivants, préciser la dimension.

- 1) $E_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a + b + c + d = 0 \right\}$;
- 2) $E_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(4) = 0\}$;
- 3) $E_3 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A \text{ est diagonale}\}$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5 * Soit (e_1, \dots, e_n) , une base de E . On pose pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$f_i = \sum_{\ell=1}^i e_\ell.$$

Justifier que $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ est génératrice de E . Est-ce une base de E ?

Exercice 6 ** Soient E un espace vectoriel de dimension $n > 1$ et (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E . Soit (u_1, \dots, u_n) , la famille définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad u_i = e_{i+1} - e_i \quad \text{et} \quad u_n = e_n + e_1.$$

- 1) Montrer que (u_1, \dots, u_n) est une base de E .
- 2) Déterminez les coordonnées du vecteur e_1 dans cette base.

Exercice 7 ** Soit E un espace vectoriel dont (e_1, e_2, \dots, e_n) est une base ($n \geq 2$).

- 1) La famille (u_1, \dots, u_n) définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad u_i = e_{i+1} - e_i, \quad \text{et} \quad u_n = e_n - e_1$$

est-elle libre?

- 2) Quel est son rang?

Exercice 8 *** On considère l'ensemble des suites réelles :

$$E = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + \alpha\}.$$

- 1) Montrer que E est un espace vectoriel.
- 2) Soient $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 1, \quad b_n = (-1)^n, \quad c_n = 2^n.$$

Vérifier que (a, b, c) est une base de E .

Exercice 9 *** Une base de $\mathbb{R}_n[x]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, les polynômes $P_k(x) = (1-x)^k x^{n-k}$

- 1) Préciser le degré de P_k .
- 2) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Simplifier $\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P_i$.
- 3) En déduire que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- 4) a) Montrer que pour $0 \leq i \leq n$, $\sum_{k=i}^n \binom{k}{i} = \binom{n+1}{i+1}$.
 b) Déterminer les coordonnées du polynôme $Q(x) = \sum_{j=0}^n x^j$ dans la base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Remarque

Afin de déterminer la dimension de l'espace, on extrait une base à partir d'une famille génératrice.

1) Puisque $F = \text{Vect}(u, v, w)$, alors par définition (u, v, w) est une famille génératrice de F .

2) On cherche à extraire une famille libre de la famille (u, v, w) .

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. On considère l'égalité $S : \lambda_1 \cdot u + \lambda_2 \cdot v + \lambda_3 \cdot w = 0_{\mathbb{R}^3}$.

On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} S &\Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, -\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{L_2 - L_2 - L_1} \\ \xleftrightarrow{L_3 + L_3 + L_1} \end{array} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \\ &\xleftrightarrow{L_3 = 2L_2} \begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3\lambda_2 \\ \lambda_3 = -2\lambda_2. \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que la famille (u, v, w) est liée. En prenant par exemple $\lambda_2 = 1$, le système donne $\lambda_1 = 3$ et $\lambda_3 = -2$, d'où la combinaison linéaire $3u + v - 2w = 0_{\mathbb{R}^3}$.

On a donc $v = -3u + 2w$. D'où $\text{Vect}(u, v, w) = \text{Vect}(u, w)$

Les équivalences précédentes donnent, pour tout $(\lambda_1, \lambda_3) \in \mathbb{R}^2$,

$$\lambda_1 u + \lambda_3 w = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Ainsi la famille (u, w) est libre. Finalement, la famille (u, w) est libre et génératrice de F ,

$$\boxed{(u, w) \text{ est une base de } F.}$$

Cette base a deux éléments, donc F est un plan vectoriel :

$$\boxed{\dim(F) = 2.}$$

Exercice 2) Sous-ensembles de \mathbb{R}^n

1) Posons $u_1 = (1, 0, 1)$ et $u_2 = (0, 1, 1)$.

$$E_1 = \{(x, y, x + y) ; x, y \in \mathbb{R}\} = \{x \cdot u_1 + y \cdot u_2 ; x, y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

Donc E_1 est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 engendré par (u_1, u_2) .

De plus, $x \cdot u_1 + y \cdot u_2 = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x, y, x + y) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow (x = 0 \text{ et } y = 0)$.

Donc (u_1, u_2) est une famille libre. C'est une base de E_1 et $\boxed{\dim(E_1) = 2}$.

- 2) $u = (1, 1, 1)$ est un vecteur de E_2 . Par contre $2u = (2, 2, 2)$ n'est pas un vecteur de E_2 . E_2 n'est pas stable par la multiplication par un scalaire.

E_2 n'est pas un espace vectoriel.

- 3) $E_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\} = \{(x, y, z, -x - y - z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$
 Posons $u_1 = (1, 0, 0, -1)$, $u_2 = (0, 1, 0, -1)$ et $u_3 = (0, 0, 1, -1)$, de sorte que

$$E_3 = \{x \cdot u_1 + y \cdot u_2 + z \cdot u_3 \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3).$$

E_3 est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par (u_1, u_2, u_3) .

$$\begin{aligned} x \cdot u_1 + y \cdot u_2 + z \cdot u_3 = (0, 0, 0, 0) &\Leftrightarrow (x, y, z, -x - y - z) = (0, 0, 0, 0) \\ &\Leftrightarrow x = y = z = 0. \end{aligned}$$

Ainsi (u_1, u_2, u_3) est une famille libre. C'est une base de E_3 et $\dim(E_3) = 3$.

- 4) $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 + L_2 - L_1} \begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -2y - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -t. \end{cases}$

Pour la dernière équivalence, on a pris z et t comme inconnues auxiliaires. On pose $u_4 = (-1, 0, 1, 0)$ et $u_5 = (0, -1, 0, 1)$ de sorte que

$$E_4 = \{(-z, -t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(u_4, u_5).$$

E_4 est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par (u_4, u_5) .

$$z \cdot u_4 + t \cdot u_5 = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (-z, -t, z, t) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow (z = t = 0).$$

Ainsi (u_4, u_5) est une famille libre. C'est une base de E_4 et $\dim(E_4) = 2$.

Exercice 3

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_2(x) = \ln(2x) = \ln(2) + \ln(x) = \ln(2)f(x) + g_1(x).$$

On a donc l'égalité au niveau des applications : $g_2 = \ln(2)f + g_1$. Puis, $g_2 \in \text{Vect}(f, g_1)$.

- On montre de même que $g_3 = \ln(3)f + g_1$, donc $g_3 \in \text{Vect}(f, g_1)$.

- Il résulte des deux premiers points que $\text{Vect}(f, g_1, g_2, g_3) = \text{Vect}(f, g_1)$. Montrons que la famille (f, g_1) est libre.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $\lambda f + \mu g_1 = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ désigne l'application nulle. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda f(x) + \mu g_1(x) = 0$, c'est-à-dire :

$$\lambda + \mu \ln(x) = 0.$$

En particulier, en prenant $x = 1$, on obtient $\lambda = 0$. Il reste donc dans la relation initiale :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mu \ln(x) = 0.$$

En évaluant par exemple en $x = e$, on obtient $\mu = 0$. Finalement,

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \lambda f + \mu g_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0.$$

La famille (f, g_1) est libre, c'est une base de $\text{Vect}(f, g_1, g_2, g_3)$, ce qui donne

$$\text{rg}(f, g_1, g_2, g_3) = \dim(\text{Vect}(f, g_1, g_2, g_3)) = 2.$$

Exercice 4

- 1) Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. On a $A \in E_1 \Leftrightarrow d = -a - b - c$.

Autrement dit les matrices de E_1 sont les matrices :

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a - b - c \end{bmatrix} = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{M_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{M_2} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}_{M_3}.$$

Donc la famille (M_1, M_2, M_3) est une famille génératrice de E_1 .

Elle est libre car $aM_1 + bM_2 + cM_3 = \mathbf{0}_2 \Rightarrow a = b = c = 0$.

Conclusion : (M_1, M_2, M_3) est une base de E_1 avec $\dim(E_1) = 3$.

- 2) Soit $P \in \mathbb{R}_3[x]$. On a les équivalences

$$\begin{aligned} P \in E_2 &\Leftrightarrow P(4) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 \text{ est racine de } P \\ &\Leftrightarrow (x - 4) \text{ divise } P \\ &\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_2[x], P = (x - 4)Q \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{deg}(Q) = \text{deg}(P) - 1 = 2 \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, P = (x - 4)(ax^2 + bx + c) \\ &\Leftrightarrow \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, P = \underbrace{ax^2(x - 4)}_{Q_1} + \underbrace{bx(x - 4)}_{Q_2} + \underbrace{c(x - 4)}_{Q_3}. \end{aligned}$$

On vient de montrer que

$$E_2 = \text{Vect}(Q_1, Q_2, Q_3).$$

De plus, la famille (Q_1, Q_2, Q_3) est une famille de polynômes à degrés échelonnés ($\deg(Q_1) = 1, \deg(Q_2) = 2, \deg(Q_3) = 3$). Elle est donc libre.

Finalement, (Q_1, Q_2, Q_3) est libre et génératrice de E_2 , c'est une base de E_2 .

$$\boxed{((x - 4), x(x - 4), x^2(x - 4)) \text{ est une base de } E_2.}$$

En particulier,

$$\boxed{\dim(E_2) = 3.}$$

Remarque

- E_2 est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[x]$.
- On peut proposer une autre base de E_2 . D'après la formule de Taylor pour les polynômes, pour tout $P \in \mathbb{R}_3[x]$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{P^{(k)}(4)}{k!} (x - 4)^k.$$

Pour $P \in E_2$, on a $P(4) = 0$, donc le premier terme de cette somme est nul, P est combinaison linéaire de $((x - 4), (x - 4)^2, (x - 4)^3)$ qui est bien une famille de polynômes de E_2 . Elle est libre car de degrés échelonnés.

$$\boxed{((x - 4), (x - 4)^2, (x - 4)^3) \text{ est une base de } E_2.}$$

3) Les matrices diagonales d'ordre n sont les matrices qui sont de la forme

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^n d_k D_k,$$

où D_k est la matrice diagonale dont tous les éléments sont nuls, sauf l'élément à l'intersection de la k -ième ligne et k -ième colonne qui vaut 1. Donc $(D_k)_{1 \leq k \leq n}$ est une famille génératrice de E_3 . De plus,

$$\sum_{k=1}^n d_k D_k = 0_n, \quad \text{donc } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad d_k = 0.$$

Ainsi cette famille est libre. Finalement,

$$\boxed{(D_k)_{1 \leq k \leq n} \text{ est une base de } E_3 \text{ avec } \dim(E_3) = n.}$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5

Comme, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $f_i \in E$,

$$\text{Vect}(f_1, \dots, f_n) \subset E.$$

On remarque que $f_1 = e_1$, et pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $e_i = f_i - f_{i-1}$.

On en déduit que toutes combinaisons linéaires de la famille $(e_i)_i$ est une combinaison linéaire de la famille $(f_i)_i$. Autrement dit,

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \subset \text{Vect}(f_1, \dots, f_n).$$

Or, $(e_i)_i$ est une base de E . En particulier, c'est une famille génératrice et

$$\text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E \quad \text{puis,} \quad E \subset \text{Vect}(f_1, \dots, f_n).$$

Par double inclusion, $\text{Vect}(f_1, \dots, f_n) = E$ et la famille \mathcal{F} est génératrice de E . De plus,

$$\text{card}(\mathcal{F}) = \text{card}(e_1, \dots, e_n) = \dim(E).$$

D'après la caractérisation des bases à l'aide du cardinal de la famille,

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } E.}$$

Exercice 6

- 1) (u_1, \dots, u_n) est une famille de vecteurs de E telle que $\text{card}(u_1, \dots, u_n) = n = \dim(E)$. D'après la caractérisation des bases, il suffit de montrer que la famille est libre pour prouver qu'elle est une base de E . Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i &= \lambda_n(e_n + e_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i(e_{i+1} - e_i) \\ &= \lambda_n(e_n + e_1) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_n(e_n + e_1) + \sum_{j=2}^n \lambda_{j-1} e_j - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \\ &= (\lambda_n - \lambda_1)e_1 + (\lambda_n + \lambda_{n-1})e_n + \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_{i-1} - \lambda_i)e_i. \end{aligned}$$

par linéarité
 changement d'indice $j = i + 1$

Or $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base, en particulier, la famille est libre. On obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_n + \lambda_{n-1} = 0 \\ \forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \lambda_{i-1} - \lambda_i = 0 \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_n = \lambda_1 \\ \lambda_n = -\lambda_{n-1} \\ \forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \lambda_{i-1} = \lambda_i. \end{array} \right.$$

On constate que $\lambda_n = -\lambda_{n-1}$ et $\lambda_n = \lambda_{n-1}$. Donc $\lambda_n = \lambda_{n-1} = 0$ et par extension,

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0.$$

On a ainsi montré que $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre. Finalement

$$(u_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ est une base de } E.$$

- 2) Les coordonnées $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de e_1 dans la base (u_1, \dots, u_n) vérifient $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = e_1$. En reprenant le calcul de la question précédente,

$$(\lambda_n - \lambda_1)e_1 + (\lambda_n + \lambda_{n-1})e_n + \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_{i-1} - \lambda_i)e_i = e_1.$$

Par unicité de l'écriture d'un vecteur dans la base (e_1, e_2, \dots, e_n) ,

$$\begin{cases} \lambda_n - \lambda_1 = 1 \\ \lambda_n + \lambda_{n-1} = 0 \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = -\lambda_n \\ 2\lambda_n = 1. \end{cases}$$

$$\text{Les coordonnées de } e_1 \text{ dans la base } (u_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ sont } \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

Exercice 7

- 1) On reconnaît une somme télescopique

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i = \sum_{i=1}^{n-1} (e_{i+1} - e_i) = \sum_{i=1}^{n-1} e_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} e_i = e_n - e_1 = u_n.$$

Le vecteur u_n est combinaison linéaire de (u_1, \dots, u_{n-1}) . La famille (u_1, \dots, u_n) est liée.

- 2) On a $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$. Justifions que la famille (u_1, \dots, u_{n-1}) est libre.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tel que $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i = 0_E$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i u_i &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (e_{i+1} - e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_{i+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \\ &= \sum_{j=2}^n \lambda_{j-1} e_j - \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i \\ &= \lambda_{n-1} e_n - \lambda_1 e_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (\lambda_{i-1} - \lambda_i) e_i. \end{aligned}$$

} par linéarité
} changement d'indice $j = i + 1$

Or $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base, en particulier, c'est une famille libre. On obtient le système

$$\begin{cases} \lambda_{n-1} = 0 \\ -\lambda_1 = 0 \\ \forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \lambda_{i-1} - \lambda_i = 0 \end{cases}, \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \lambda_{n-1} = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \forall i \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \lambda_{i-1} = \lambda_i. \end{cases}$$

D'où $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0.$

La famille (u_1, \dots, u_{n-1}) est libre. C'est une base de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ avec $n - 1$ vecteurs.

$$\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)) = n - 1.$$

Exercice 8

1) On montre que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{N})$ des suites réelles.

- $E \subset \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{N})$ et E non vide (la suite nulle est dans E en prenant $\alpha = 0$).
- Montrons que E est stable par combinaison linéaire.
Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites dans E et λ un réel. Montrons que $w = \lambda u + v \in E$.
Par définition de E , il existe deux réels α_1 et α_2 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + \alpha_1 \quad \text{et} \quad v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n + \alpha_2.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+2} = w_{n+1} + 2w_n + (\lambda\alpha_1 + \alpha_2)$.

Donc $w \in E$ (la constante α étant alors $\lambda\alpha_1 + \alpha_2$) : E est stable par combinaison linéaire.

E est un espace vectoriel.

2) Il faut vérifier que les trois suites sont dans E , que la famille est libre et quelle est génératrice de E .

- $\rightarrow (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ (la relation est vérifiée en prenant $\alpha = -2$).
- $\rightarrow (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ (la relation est vérifiée en prenant $\alpha = 0$).
- $\rightarrow (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ (la relation est vérifiée en prenant $\alpha = 0$).
- Montrons que la famille est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0_{\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{N})}.$$

La suite $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$ étant nulle, tous ces termes sont nuls.

En particulier, pour $n = 0, n = 1$ et $n = 2$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (n = 0) \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 & (n = 1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 & (n = 2) \end{cases} \begin{array}{c} \leftarrow \\ \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}} \\ \leftarrow \end{array} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

D'où, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, la famille (a, b, c) est libre.

- Montrons que la famille (a, b, c) est génératrice de E .
Soit $u \in E$. On cherche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $u = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$.

• **Analyse** (recherche des conditions nécessaires)
On écrit l'égalité précédente pour les trois premiers termes de la suite.

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = u_0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = u_1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = u_2 \end{cases} \begin{array}{c} \longleftarrow \\ \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \end{array} \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = u_0 \\ -2\lambda_2 + \lambda_3 = u_1 - u_0 \\ 3\lambda_3 = u_2 - u_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\frac{u_2}{2} + \frac{u_1}{2} + u_0 \\ \lambda_2 = \frac{u_2}{6} - \frac{u_1}{2} + \frac{u_0}{3} \\ \lambda_3 = \frac{u_2}{3} - \frac{u_0}{3} \end{cases}$$

• **Synthèse** (recherche des conditions suffisantes)
Prenons les valeurs de λ_1, λ_2 et λ_3 obtenues à la question précédente.
Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : u_n = \lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n + \lambda_3 c_n \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \lambda_1 a_{n+1} + \lambda_2 b_{n+1} + \lambda_3 c_{n+1},$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** Soit $n = 0$. D'après le système dont λ_1, λ_2 et λ_3 sont solutions,

$$u_0 = \lambda_1 a_0 + \lambda_2 b_0 + \lambda_3 c_0 \quad \text{et} \quad u_1 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 b_1 + \lambda_3 c_1.$$

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Montrons $\mathcal{P}(n + 1)$. On a

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + \alpha \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \lambda_1(a_{n+1} + 2a_n) + \lambda_2(b_{n+1} + 2b_n) + \lambda_3(c_{n+1} + 2c_n) + \alpha.$$

Or $a_{n+1} + 2a_n = a_{n+2} + 2$, $b_{n+1} + 2b_n = b_{n+2}$ et $c_{n+1} + 2c_n = c_{n+2}$.

Donc $u_{n+2} = \lambda_1 a_{n+2} + \lambda_2 b_{n+2} + \lambda_3 c_{n+2} + 2\lambda_1 + \alpha$.

De plus, $2\lambda_1 = -u_2 + u_1 + 2u_0 = -(u_1 + 2u_0 + \alpha) + u_1 + 2u_0 = -\alpha$.

Ainsi, $u_{n+2} = \lambda_1 a_{n+2} + \lambda_2 b_{n+2} + \lambda_3 c_{n+2}$.

Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda_1 a_n + \lambda_2 b_n + \lambda_3 c_n$.

Autrement dit $u = \lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c$. La famille (a, b, c) est génératrice de E .

Finalement :

La famille (a, b, c) est une base de E .

Exercice 9 Une base de $\mathbb{R}_n[x]$

- 1) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(P_k) = \deg(x^k) + \deg((1-x)^{n-k}) = k + (n-k) = n$.
- 2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P_i(x) &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1-x)^i x^{n-i} \\ &= x^{n-k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (1-x)^i x^{k-i} \\ &= x^{n-k} ((1-x) + x)^k = x^{n-k}. \end{aligned}$$

) formule du binôme de Newton

En particulier, tout polynôme x^k avec $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ s'écrit comme combinaison linéaire de la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$.

- 3) De la question précédente, $\text{Vect}((x^k)_{0 \leq k \leq n}) \subset \text{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq n})$.
 Or, $(x^k)_{0 \leq k \leq n}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$, $\mathbb{R}_n[x] = \text{Vect}((x^k)_{0 \leq k \leq n})$.
 Ainsi, $\mathbb{R}_n[x] \subset \text{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq n})$.

De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k \in \mathbb{R}_n[x]$, $\text{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq n}) \subset \mathbb{R}_n[x]$.

Par double-inclusion $\text{Vect}((P_k)_{0 \leq k \leq n}) = \mathbb{R}_n[x]$.

$(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est génératrice de $\mathbb{R}_n[x]$ et $\text{card}((P_k)_{0 \leq k \leq n}) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[x])$.

Donc :

$$\boxed{(P_k)_{0 \leq k \leq n} \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[x].}$$

- 4) a) D'après la formule du triangle de Pascal, pour tout $(i, k) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{k+1}{i+1} = \binom{k}{i+1} + \binom{k}{i}$.

$$\sum_{k=i}^n \binom{k}{i} = \underbrace{\sum_{k=i}^n \left(\binom{k+1}{i+1} - \binom{k}{i+1} \right)}_{\text{Somme télescopique}} = \binom{n+1}{i+1} - \binom{i}{i+1} = \boxed{\binom{n+1}{i+1}}.$$

b)

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= \sum_{j=0}^n x^j \\
 &= \sum_{k=0}^n x^{n-k} && \left. \begin{array}{l} \text{changement d'indice } k = n - j \\ \text{question 2)} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} P_i(x) \\
 &= \sum_{0 \leq i \leq k \leq n} \binom{k}{i} P_i(x) && \left. \begin{array}{l} \text{inversion de l'ordre de sommation} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{i=0}^n P_i(x) \sum_{k=i}^n \binom{k}{i} \\
 &= \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i+1} P_i(x).
 \end{aligned}$$

Les coordonnées de Q dans la base $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ sont $\left(\binom{n+1}{1}, \binom{n+1}{2}, \dots, \binom{n+1}{n+1} \right)$.

Compléments sur les espaces vectoriels

21

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Considérons deux sous-espaces vectoriels de $E = \mathbb{R}^4$.

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 2z - t = 0 \text{ et } 2x - 3y + z = 0\},$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - z + t = 0 \text{ et } -y + 2z - t = 0\}.$$

- 1) En exprimant x et y en fonction de z et t , déterminer une base de F . Puis, une base de G et de $F \cap G$.
- 2) Que peut-on dire de $\dim(F + G)$?
- 3) Compléter la base obtenue de $F \cap G$ en une base de $F + G$ par des vecteurs extraits de la base de F et de la base de G .

Exercice 2 ** Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.

Soient $F = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \mid x + y + z + t = 0 \right\}$ et $G = \text{Vect} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$.

Montrer, par analyse-synthèse que F et G sont supplémentaires dans E .

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3 Soient A, B et C trois sous-espaces vectoriels de E tels que

$$A \cap C \subset B, \quad C \subset A + B \quad \text{et} \quad B \subset C.$$

Montrer que $B = C$.

Exercice 4 ** Exemples de supplémentaires avec des suites

Soient F et G les sous-espaces de $E = \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ définis par

$$F = \{ (u_n)_n \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n} \} \quad \text{et} \quad G = \{ (u_n)_n \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = 0 \}.$$

Vérifier que ces deux espaces sont supplémentaires.

Exercice 5 ** Exemples de supplémentaires avec des matrices

Soient $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et A une matrice de E telle que $A^2 = I_n$. On note

$$F = \{ M \in E \mid AM = M \} \quad \text{et} \quad G = \{ M \in E \mid AM = -M \}.$$

Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 6 *** Égalité de Bézout

Soient $a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, b_2, \dots, b_q$ $p + q$ réels distincts. On considère les polynômes

$$A(x) = \prod_{i=1}^p (x - a_i) \quad \text{et} \quad B(x) = \prod_{i=1}^q (x - b_i).$$

On note $n = p + q - 1$ et $E = \mathbb{R}_n[x]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On introduit de plus,

$$F_A = \{ P \in E \mid A \text{ divise } P \} \quad \text{et} \quad F_B = \{ P \in E \mid B \text{ divise } P \}.$$

- 1) Montrer que F_A et F_B sont des sous-espaces vectoriels de E .
Préciser les dimensions de F_A et F_B .
- 2) Vérifier que $E = F_A \oplus F_B$.
- 3) En déduire qu'il existe deux polynômes U et V tels que $UA + VB = 1$.

Exercice 7 *** Soit $E = \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites réelles. On considère

$$F = \{ (u_n) \in E \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \}$$

et G l'ensemble des suites arithmétiques.

- 1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et que leur somme est directe.
- 2) Justifier qu'une suite u appartient à $F \oplus G$ si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a \quad \text{et} \quad u_n - an \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b.$$

- 3) *Exemple.* Vérifier que la suite (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{n^2 + 1}$ appartient à $F \oplus G$.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8 ** Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E .

1) Préciser si les énoncés suivants sont vrais ou faux?

a) $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.

Justifiez vos réponses.

b) $(F + G) \cap (F + H) \subset F + (G \cap H)$.

Indication. On pourra tester avec les sous-espaces de \mathbb{R}^2

$$G = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((1,0)), \quad H = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((0,1))$$

$$\text{et } F = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

2) Vrai ou faux?

a) $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.

b) $F \cap (G + H) \subset (F \cap G) + (F \cap H)$.

Corrections

☰ Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad u \in F &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z - t = 0 \\ 2x - 3y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z - t = 0 \\ y - 3z + 2t = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z - 3t \\ y = 3z - 2t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow u = (x,y,z,t) = z \cdot (4,3,1,0) + t \cdot (-3, -2,0,1). \end{aligned}$$

Posons $u_1 = (4,3,1,0)$, $u_2 = (-3, -2,0,1)$ de sorte que

$$F = \{z \cdot u_1 + t \cdot u_2 \mid (z,t) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(u_1, u_2).$$

(u_1, u_2) sont deux vecteurs non colinéaires, ils forment une famille libre. En conclusion,

$$\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } F, \text{ de dimension } 2.}$$

- Par la même méthode,

$$u_3 = (3, 2, 1, 0) \text{ et } u_4 = (-2, -1, 0, 1) \text{ forment une base de } G.$$

- Soit $u = (x, y, z, t)$ un vecteur quelconque de \mathbb{R}^4 .

$$\begin{aligned}
 u \in F \cap G & \iff \begin{cases} x - 2y + 2z - t = 0 \\ y - 3z + 2t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \\ -y + 2z - t = 0 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{cases} x - 2y + 2z - t = 0 \\ y - 3z + 2t = 0 \\ y - 3z + 2t = 0 \\ -y + 2z - t = 0 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{\substack{L_3 = L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2}} \begin{cases} x - 2y + 2z - t = 0 \\ y - 3z + 2t = 0 \\ -z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$F \cap G = \text{Vect}(u_5) \text{ où } u_5 = (1, 1, 1, 1).$$

Remarque

F et G sont deux plans vectoriels, l'intersection est ici une droite vectorielle.

- 2) D'après la formule de Grassmann,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

- 3) Pour compléter la famille libre (u_5) en une base de $F + G$, il faut extraire deux vecteurs de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) .

- La famille (u_5, u_1) est libre car les vecteurs sont non colinéaires.
- Il faut un troisième vecteur. u_2 ne peut pas convenir puisque c'est une combinaison linéaire de (u_5, u_1) car cette famille est une base de F (famille libre de vecteurs de F et $\text{card}(u_5, u_1) = \dim(F)$).

Tentons u_3 . Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \lambda_1 \cdot u_5 + \lambda_2 \cdot u_1 + \lambda_3 \cdot u_3 = 0_{\mathbb{R}^4} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

(u_5, u_1, u_3) est une famille libre de vecteurs de $F + G$ et $\text{card}(u_5, u_1, u_3) = \dim(F + G)$.

(u_1, u_3, u_5) est une base de $F + G$.

Exercice 2

Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \in E$.

• Analyse

(recherche des conditions nécessaires)

Supposons qu'il existe $(M_1, M_2) \in F \times G$ tel que $M = M_1 + M_2$.

Il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $M_2 = a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$. Puis, $M_1 = M - M_2 = \begin{bmatrix} x-a & y-a \\ z-a & t-a \end{bmatrix}$.

M_1 appartient à F , donc $x + y + z + t - 4a = 0$. D'où $a = \frac{1}{4}(x + y + z + t)$.

On a donc, comme unique couple (M_1, M_2) de solution possible,

$$M_2 = \frac{x+y+z+t}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad M_1 = M - M_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3x-y-z-t & -x+3y-z-t \\ -x-y+3z-t & -x-y-z+3t \end{bmatrix}.$$

• Synthèse

(recherche des conditions suffisantes)

Vérifions que les matrices trouvées précédemment conviennent.

→ $M_1 + M_2 = M_1 + (M - M_1) = M$.

→ $M_2 = \frac{x+y+z+t}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, donc $M_2 \in G$.

→ La somme des coefficients de M_1 donne

$$\frac{1}{4}(3x-y-z-t) + \frac{1}{4}(-x+3y-z-t) + \frac{1}{4}(-x-y+3z-t) + \frac{1}{4}(-x-y-z+3t) = 0.$$

Donc $M_1 \in F$.

• **Conclusion.** On a montré que

$$\forall M \in E, \quad \exists!(M_1, M_2) \in F \times G, \quad M = M_1 + M_2.$$

D'après la définition des supplémentaires,

$$E = F \oplus G.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3

Raisonnons par double inclusion, d'après l'énoncé $B \subset C$. Il reste à montrer $C \subset B$.

Soit $u \in C$. Par hypothèse, $C \subset A + B$, donc $u \in A + B$.

Il existe $(u_1, u_2) \in A \times B$ tel que $u = u_1 + u_2$. Or $B \subset C$, donc $u_2 \in C$.

Alors $u_1 = \underbrace{u}_{\in C} - \underbrace{u_2}_{\in C} \in C$ car C est un espace vectoriel, donc stable par combinaison linéaire.

Ainsi $u_1 \in A \cap C$. Comme $A \cap C \subset B$, on a aussi $u_1 \in B$.

Et, comme B est un espace vectoriel, $u = u_1 + u_2 \in B$. L'inclusion est prouvée.

Concluons avec

$$\boxed{B = C.}$$

Exercice 4 Exemples de supplémentaires avec des suites

Raisonnons par analyse-synthèse. Soit (u_k) une suite.

• **Analyse** (recherche des conditions nécessaires)

Supposons qu'il existe $((v_k), (w_k)) \in F \times G$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = v_k + w_k$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par construction,

$$u_{2n} = v_{2n} + w_{2n} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = v_{2n+1} + w_{2n+1} = v_{2n} + 0 = v_{2n}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n} = v_{2n+1} = u_{2n+1}$. Ce qui définit la suite (v_k) .

Et $w_{2n} = u_{2n} - u_{2n+1}$ et $w_{2n+1} = 0$. Ce qui définit la suite (w_k) .

On a obtenu un seul couple $((v_k), (w_k)) \in F \times G$ de solution possible.

• **Synthèse** (recherche des conditions suffisantes)

On vérifie que la solution trouvée convient.

→ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = v_k + w_k$. En effet,

- Si k est pair, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2n$. Alors

$$v_k + w_k = v_{2n} + w_{2n} = u_{2n+1} + u_{2n} - u_{2n+1} = u_{2n} = u_k.$$

- Si k est impair, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $k = 2n + 1$. Alors

$$v_k + w_k = v_{2n+1} + w_{2n+1} = u_{2n+1} + 0 = u_k.$$

→ $(v_k) \in F$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{2n+1} = v_{2n} = u_{2n}$.

→ $(w_k) \in G$ car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{2n+1} = 0$.

Les suites (v_k) et (w_k) conviennent.

On a donc montré que

$$\forall (u_k) \in E, \quad \exists! ((v_k), (w_k)) \in F \times G, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = v_k + w_k.$$

Conclusion.

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont des sous-espaces supplémentaires de } E.}$$

Exercice 5 Exemples de supplémentaires avec des matrices

Précisons que les deux ensembles sont bien des sous-espaces vectoriels de E .
Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $B \in E$.

• **Analyse** (recherche des conditions nécessaires)

Supposons qu'il existe $(M, N) \in F \times G$ tel que $B = M + N L_1$. Alors

$$AB = A(M + N) = AM + AN = M - N L_2.$$

En effectuant les opérations $(L_1 + L_2)/2$ et $(L_2 - L_1)/2$, on obtient

$$M = \frac{1}{2}(B + AB) \quad \text{et} \quad N = \frac{1}{2}(B - AB).$$

• **Synthèse** (recherche des conditions suffisantes)

Vérifions que les valeurs de M et N trouvées conviennent.

$$\rightarrow M + N = \frac{1}{2}(B + AB) + \frac{1}{2}(B - AB) = B.$$

$$\rightarrow AM = \frac{1}{2}A(B + AB) = \frac{1}{2}(AB + \underbrace{A^2 B}_{=I_n B}) = \frac{1}{2}(AB + B) = M.$$

Donc $M \in F$.

$$\rightarrow AN = \frac{1}{2}A(B - AB) = \frac{1}{2}(AB - \underbrace{A^2 B}_{=I_n B}) = \frac{1}{2}(AB - B) = -N.$$

Donc $N \in G$.

Donc le couple (M, N) trouvé précédemment convient et c'est la seule solution.

$$\forall B \in E, \quad \exists!(M, N) \in F \times G, \quad B = M + N.$$

Par définition des sommes directes, $E = F \oplus G$.

Exercice 6 Égalité de Bézout

1) • Le polynôme nul appartient à F_A , donc F_A n'est pas vide.

Soient $P_1, P_2 \in F_A$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Il existe $Q_1, Q_2 \in E$ tels que $P_1 = A \cdot Q_1$ et $P_2 = A \cdot Q_2$.

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = \lambda A \cdot Q_1 + \mu A \cdot Q_2 = A \cdot (\lambda Q_1 + \mu Q_2).$$

Ainsi A divise $\lambda P_1 + \mu P_2$, c'est-à-dire, $\lambda P_1 + \mu P_2 \in F_A$.

F_A est non vide, stable par combinaison linéaire.

$$F_A \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

De même, F_B est un sous-espace vectoriel de E .

- $P \in F_A \Leftrightarrow P \in \mathbb{R}_n[x] \text{ et } \exists Q \in \mathbb{R}[x], P = AQ$
 $\Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_{n-p}[x], P = AQ$ } $\deg(P) = \deg(A) + \deg(Q)$
 $\Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-p}, P(x) = A(x) \left(\sum_{i=0}^{n-p} \alpha_i x^i \right)$
 $\Leftrightarrow \exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-p}) \in \mathbb{R}^{n-p}, P(x) = \sum_{i=0}^{n-p} \alpha_i x^i A(x)$
 $\Leftrightarrow P \in \text{Vect} \left((x^i A(x))_{0 \leq i \leq n-p} \right).$

La famille $(x^i A(x))_{0 \leq i \leq n-p}$ est une famille génératrice de F_A ,

$$F_A = \text{Vect} \left((x^i A(x))_{0 \leq i \leq n-p} \right).$$

Montrons maintenant que la famille $(x^i A(x))_{0 \leq i \leq n-p}$ est libre. Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n-p}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-p} \lambda_i x^i A(x) = 0_E &\Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{n-p} \lambda_i x^i \right) A(x) = 0_E && \left. \begin{array}{l} \text{propriété d'intégrité} \\ \text{unicité des coefficients} \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n-p} \lambda_i x^i = 0_E \\ &\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 0, n-p \rrbracket, \lambda_i = 0. \end{aligned}$$

Ainsi $(x^i A(x))_{0 \leq i \leq n-p}$ est une base de F_A et $\dim(F_A) = n - p + 1$.

- De même $(x^i B(x))_{0 \leq i \leq n-q}$ est une base de F_B et $\dim(F_B) = n - q + 1$.

2) On a $\dim(F_A) + \dim(F_B) = 2n - p - q + 2 = n + 1 = \dim(E)$.

D'après la caractérisation des sous-espaces supplémentaires avec la dimension, il suffit de vérifier

$$F_A \cap F_B = \{0_E\}.$$

Raisonnons par double-inclusion.

- ⊃ Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels, ils contiennent le vecteur nul.

$$0_E \in F_A \cap F_B, \text{ c'est-à-dire, } \{0_E\} \subset F_A \cap F_B.$$

- ⊂ Soit $P \in F_A \cap F_B$, c'est-à-dire, A et B divisent P . Comme a_1, \dots, a_p sont les racines de A , ces valeurs sont aussi racines de P . De même, b_1, \dots, b_q sont racines de P . Le polynôme P admet donc $p + q = n + 1$ racines distinctes. Or $P \in E = \mathbb{R}_n[x]$, nécessairement $P = 0_E$. On obtient

$$\{0_E\} \supset F_A \cap F_B.$$

D'où l'égalité et

$$E = F_A \oplus F_B.$$

3) 1 est le polynôme constant dont la constante vaut 1. On a $1 \in E$ et $E = F_A \oplus F_B$. Donc il existe $(P, Q) \in F_A \times F_B$ tel que $1 = P + Q$. Puis, par définition de F_A et F_B ,

$$\text{Il existe deux polynômes } U \text{ et } V \text{ tels que } UA + VB = 1.$$

Exercice 7

1) • La suite nulle appartient à F .

Soient $((u_n), (v_n)) \in F^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. D'après la propriété de linéarité des limites, $(\lambda u_n + \mu v_n)$ a une limite quand n tend vers $+\infty$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n + \mu v_n = \lambda \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \mu \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Donc $\lambda(u_n) + \mu(v_n) \in F$.

F est non vide et stable par combinaisons linéaires, donc F est un sous-espace vectoriel de E .

- De même, l'ensemble des suites arithmétiques est non vide, stable par combinaison linéaire, donc G est un sous-espace vectoriel de E .
- Montrons, par double inclusion, que $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$ où $\mathbf{0}$ est la suite nulle.

⊃ Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels,

$$\mathbf{0} \in F \quad \text{et} \quad \mathbf{0} \in G \quad \text{donc} \quad \{\mathbf{0}\} \subset F \cap G.$$

⊂ Soit $(u_n) \in F \cap G$. (u_n) est une suite arithmétique. Notons a sa raison et $b = u_0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = an + b$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

Or $(u_n) \in F$. Donc nécessairement $a = 0$ et $b = 0$. La suite (u_n) est la suite nulle.

Conclusion, $F \cap G = \{\mathbf{0}\}$. La somme $F + G$ est directe.

2) Raisonnons par double-implication.

⇒ Soit (u_n) une suite de $F \oplus G$. Il existe $((v_n), (w_n)) \in F \times G$ tel que $(u_n) = (v_n + w_n)$. La suite (w_n) est arithmétique. Soient a sa raison et b son premier terme.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = an + b.$$

Alors, $u_n = an + b + v_n$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - an = b$.

⇐ Réciproquement, soit (u_n) une suite vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = a \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - an = b \in \mathbb{R}.$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = an + b$ et $v_n = u_n - an - b$.

Ainsi, $(u_n) = (v_n) + (w_n)$. On vérifie que

$$(v_n) \in F \quad \text{et} \quad (w_n) \in G.$$

Par conséquent $(u_n) \in F \oplus G$.

On a ainsi caractérisé les suites appartenant à $F \oplus G$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}} = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$$

Il vient
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n - n = \sqrt{n^2+1} - n = \frac{(n^2+1) - n^2}{\sqrt{n^2+1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + n}.$$

Et
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - n = 0.$$

La suite (u_n) satisfait aux deux conditions. Elle appartient à $F \oplus G$.

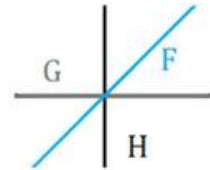
Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8

Remarque

Testons avec l'exemple de l'indication.

- $F + G = \mathbb{R}^2$;
- $F + H = \mathbb{R}^2$;
- $F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$;
- $F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$;
- $F + (G \cap H) = F$;
- $(F + G) \cap (F + H) = \mathbb{R}^2$;
- $F \cap (G + H) = F$;
- $(F \cap G) + (F \cap H) = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$.



1) a) **Vrai.**

Soit $u \in F + (G \cap H)$. Alors il existe $(u_1, u_2) \in F \times (G \cap H)$ tel que $u = u_1 + u_2$.

$$\left. \begin{array}{l} u \in F + G \quad \text{car } u_2 \in G \\ u \in F + H \quad \text{car } u_2 \in H \end{array} \right\} \text{ donc } u \in (F + G) \cap (F + H).$$

D'où
$$F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H).$$

b) **Faux.**

Donnons un contre-exemple pour lequel l'inclusion n'est pas vérifiée. Suivons l'indication avec

$$G = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad H = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad F = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

D'une part, $G \cap H = \{(0,0)\}$ et $F + (G \cap H) = F$.

D'autre part, montrons que $F + G = E = \mathbb{R}^2$.

On a $F \subset E$ et $G \subset E$, donc $F + G \subset E$.

Réciproquement, si $u = (x,y) \in E$, alors

$$u = \underbrace{(y,y)}_{\in F} + \underbrace{(x-y,0)}_{\in G} \in F + G.$$

De même, on montre que $F + H = E$. Finalement $(F + G) \cap (F + H) = E$.

Avec ce choix,

$$(F + G) \cap (F + H) \not\subset F + (G \cap H).$$

2) a) **Vrai.**

Soit $u \in (F \cap G) + (F \cap H)$. Alors il existe $(u_1, u_2) \in (F \cap G) \times (F \cap H)$, tel que $u = u_1 + u_2$.

$$\left. \begin{array}{l} u_1, u_2 \in F \Rightarrow u \in F \\ (u_1, u_2) \in G \times H \Rightarrow u \in G + H \end{array} \right\} \text{ donc } u \in F \cap (G + H).$$

D'où

$$(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H).$$

b) **Faux.**

Reprenons les espaces de l'indication de la question précédente.

$$G + H = E \Rightarrow F \cap (G + H) = F \cap E = F,$$

et,

$$F \cap G = \{0_{\mathbb{R}^2}\}, \quad F \cap H = \{0_{\mathbb{R}^2}\}.$$

L'inclusion n'est pas vérifiée.

Applications linéaires

22

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Exemples de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2

Déterminer, parmi les applications de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2 données ci-dessous, celles qui sont linéaires :

- 1) $f_1 : (x, y, z) \mapsto (y + 3z, 2x + z)$;
- 2) $f_2 : (x, y, z) \mapsto (y + z, x + 2)$;
- 3) $f_3 : (x, y, z) \mapsto (yz, x)$;
- 4) $f_4 : (x, y, z) \mapsto (4x - y, x + y - z)$.

Exercice 2 * Exemple dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} indéfiniment dérivables. Déterminer parmi les applications de E dans E qui suivent celles qui sont linéaires :

- 1) $\varphi_1 : f \mapsto f(2) + f'$;
- 2) $\varphi_2 : f \mapsto f \times f$;
- 3) $\varphi_3 : f \mapsto f \circ f$;
- 4) $\varphi_4 : f \mapsto f \circ \exp$.

Exercice 3 * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application F sur $\mathbb{R}_n[x]$ par :

$$(F(P))(x) = nP(x) - xP'(x).$$

- 1) Montrer que F est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.
- 2) Déterminer $\text{Ker}(F)$ et $\text{Im}(F)$.

Exercice 4 * Expression d'un projecteur

Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y - z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

- 1) Montrer que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires dans E .
- 2) Déterminer la projection de $u = (x, y, z)$ sur F parallèlement à G .

Exercice 5 ** Exemple d'application sur les suites réelles

Soient $E = \mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble vectoriel des suites réelles et Δ l'application définie pour toute suite u de E par $\Delta(u) = v$ où v est la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

- 1) Montrer que Δ est une application linéaire.
- 2) Déterminer $\text{Ker}(\Delta)$, puis, vérifier que $\text{Ker}(\Delta)$ est de dimension finie.
- 3) Montrer que Δ est surjective.
- 4) a) Expliciter $\Delta^2(u)$ où $u \in E$ et $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$.
b) Démontrer que $\text{Ker}(\Delta^2)$ est de dimension finie et préciser une base de cet espace vectoriel.

 **Exercices axés sur le raisonnement**

Dans tous les exercices qui suivent, si f est un endomorphisme, alors on note

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Exercice 6 * Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E .

- 1) Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.
- 2) On suppose $f^3 = f$, justifier que $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$.

Exercice 7 ** Condition suffisante pour une inclusion entre image et noyau

Soient E un espace vectoriel, f et g deux endomorphismes de E .

- 1) On suppose que $f^2 = \theta$ où θ est l'endomorphisme nul de E . Justifier que $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.
- 2) On suppose que $f \circ g + g \circ f = \text{id}_E$. Montrer que $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$.

Exercice 8 ** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que $f^3 = f^2 + f$.

Montrer, par analyse-synthèse, que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

Exercice 9 ** Soient E un espace vectoriel et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tels que

$$f \circ g \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ f \circ g = g.$$

- 1) Montrer que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } g$ sont des espaces supplémentaires de E .
- 2) Caractériser l'application linéaire $p = g \circ f$.

Exercice 10 ** Soient E un espace vectoriel, f, g deux endomorphismes de E tels que

$$f \circ g - g \circ f = \text{id}_E \quad (\bullet)$$

- 1) *Exemple.* Soit $E = \mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des polynômes.
On considère les endomorphismes de E définis par

$$(f(P))(x) = P'(x) \quad \text{et} \quad (g(P))(x) = xP(x).$$

Démontrer que f et g vérifient (\bullet) .

- 2) Revenons au cas général.

Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $f^n \circ g - g \circ f^n = nf^{n-1}$.

Exercice 11 *** *Espaces stables*

Soient E un espace vectoriel et f un endomorphisme de E .
On dit qu'une partie A de E est stable par f si

$$\forall u \in E, u \in A \Rightarrow f(u) \in A.$$

Soit p un projecteur de E . Montrer que

$$(f \circ p = p \circ f) \Leftrightarrow \text{Im } p \text{ et } \text{Ker } p \text{ sont stables par } f.$$

Indication. On rappelle que pour un projecteur p , $\text{Ker } p \oplus \text{Im } p = E$.

Exercice 12 ** Soient E un espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $g \circ f = \text{id}_E$.

- Montrer que $\text{Ker } g$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires dans E .
- Déterminer l'expression de la projection p sur $\text{Ker}(g)$ parallèlement à $\text{Im}(f)$.

Exercice 13 *** Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Montrer que

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = f(\text{Ker}(f \circ f)),$$

où $f(\text{Ker}(f \circ f))$ désigne l'image de la restriction de f à $\text{Ker}(f \circ f)$. Autrement dit,
 $u \in f(\text{Ker}(f \circ f))$ si, et seulement si, il existe $v \in \text{Ker}(f \circ f)$ tel que $u = f(v)$.

Exercice 14 *** Soient E un espace vectoriel et f, g deux endomorphismes de E .

- a) Montrer que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$.
b) Dans cette question uniquement, on considère $E = \mathbb{R}^2$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(x, y) = (x, x + y)$.
Trouver un endomorphisme g tel que $\text{Im}(f + g) \neq \text{Im } f + \text{Im } g$.

- 2) On va montrer l'égalité dans un cas particulier.
On suppose que f est un projecteur et que $g \circ f = \theta$ où θ désigne l'endomorphisme nul de E .
- Montrer que $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$.
 - Soit $u \in \text{Im } f$. Calculer $f(u) + g(u)$. En déduire que $u \in \text{Im}(f + g)$.
 - Soit $u \in \text{Im } g$. Justifier l'existence d'un vecteur $v \in \text{Ker } f$ tel que $u = g(v)$.
En déduire que $u \in \text{Im}(f + g)$.
Indication. On rappelle que pour un projecteur f , $\text{Ker } f \oplus \text{Im } f = E$.
 - Conclure avec $\text{Im } f + \text{Im } g = \text{Im}(f + g)$.

Exercice 15 ***

On note E l'espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} continues sur \mathbb{R} .
Pour $f \in E$, on note $T(f) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)(x) = \int_{x-2}^{x+2} f(t) dt.$$

- Justifier que pour tout $f \in E$, $T(f)$ est une application de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
Calculer $T(f)'$.
- En déduire que T induit un endomorphisme de E .
- Est-ce que T est surjective ?
- Soit $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, s(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.
 - Vérifier que $s \in \text{Ker}(T)$. Est-ce que T est injective ?
 - Montrer que si $f \in \text{Ker}(T)$, alors f est 4-périodique.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Exemples de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R}^2

- 1) Soient $u = (x, y, z)$ et $v = (x', y', z')$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Alors $\lambda \cdot u + \mu \cdot v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z')$.

$$\begin{aligned} f_1(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= f_1(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= ((\lambda y + \mu y') + 3(\lambda z + \mu z'), 2(\lambda x + \mu x') + (\lambda z + \mu z')) \\ &= (\lambda(y + 3z) + \mu(y' + 3z'), \lambda(2x + z) + \mu(2x' + z')) \\ &= \lambda \cdot (y + 3z, 2x + z) + \mu \cdot (y' + 3z', 2x' + z') \\ &= \lambda \cdot f_1(u) + \mu \cdot f_1(v). \end{aligned}$$

f_1 est linéaire.

2) $f_2(0,0,0) = (0,2)$. Comme $f_2(0_{\mathbb{R}^3}) \neq (0,0) = 0_{\mathbb{R}^2}$,

f_2 n'est pas linéaire.

3) Vérifier que $f_3(2 \cdot (1,1,1)) \neq 2 \cdot f_3(1,1,1)$.

f_3 n'est pas linéaire.

4) Soient $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$ deux vecteurs de \mathbb{R}^3 . Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f_4(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) &= f_4(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z') \\ &= (4(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y'), (\lambda x + \mu x') + (\lambda y + \mu y') - (\lambda z + \mu z')) \\ &= (\lambda(4x - y) + \mu(4x' - y'), \lambda(x + y - z) + \mu(x' + y' - z')) \\ &= \lambda \cdot (4x - y, x + y - z) + \mu \cdot (4x' - y', x' + y' - z') \\ &= \lambda \cdot f_4(u) + \mu \cdot f_4(v). \end{aligned}$$

f_4 est linéaire.

Exercice 2 Exemple dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

1) Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \varphi_1(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) &= (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(2) + (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)' \\ &= \lambda f(2) + \mu g(2) + \lambda \cdot f' + \mu \cdot g' \quad \left. \vphantom{\varphi_1(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)} \right\} \text{linéarité de la dérivation} \\ &= \lambda \cdot (f(2) + f') + \mu \cdot (g(2) + g') = \lambda \cdot \varphi_1(f) + \mu \cdot \varphi_2(g). \end{aligned}$$

Conclusion

φ_1 est linéaire.

2) Prenons par exemple $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi_2(2f))(x) = ((2f) \times (2f))(x) = 4x^2 \quad \text{et} \quad 2\varphi_2(f)(x) = 2(f \times f)(x) = 2x^2.$$

On constate que $\varphi_2(2f) \neq 2\varphi_2(f)$ et φ_2 n'est pas linéaire.

3) Considérons la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi_3(2f))(x) = (2f \circ (2f))(x) = (2f(2f(x))) = 2f(2x^2) = 2(2x^2)^2 = 8x^4,$$

et, $2(\varphi_3(f))(x) = 2(f \circ f)(x) = 2f(f(x)) = 2f(x^2) = 2x^4.$

Comme $\varphi_3(2f) \neq 2\varphi_3(f)$, φ_3 n'est pas linéaire.

4) Soient $(f,g) \in E^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\varphi_4(\lambda \cdot f + \mu \cdot g))(x) &= (\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(e^x) \\ &= \lambda \cdot f(e^x) + \mu \cdot g(e^x) = \lambda \cdot (\varphi_4(f))(x) + \mu \cdot (\varphi_4(g))(x) \\ \Rightarrow \varphi_4(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) &= \lambda \varphi_4(f) + \mu \varphi_4(g). \end{aligned}$$

Conclusion

φ_4 est linéaire.

Exercice 3

1) • Montrons que F est une application de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$.

$$(F(P))(x) = nP(x) - xP'(x) = \sum_{k=0}^n (n-k)a_k x^k = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)a_k x^k \quad (\bullet)$$

car le terme $(n-n)a_n x^n$ est nul. Ainsi, $F(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$.

• Vérifions que F est linéaire. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (F(\lambda P + \mu Q))(x) &= n(\lambda P + \mu Q)(x) - x(\lambda P + \mu Q)'(x) \\ &= n\lambda P(x) + n\mu Q(x) - \lambda xP'(x) - \mu xQ'(x) \quad \left. \begin{array}{l} \text{linéarité de la} \\ \text{dérivation} \end{array} \right\} \\ &= \lambda(nP(x) - xP'(x)) + \mu(nQ(x) - xQ'(x)) \\ &= \lambda(F(P))(x) + \mu(F(Q))(x). \end{aligned}$$

Bilan F est une application linéaire de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[x]$.

2) • Soit $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$.

$$\begin{aligned} P \in \text{Ker}(F) &\Leftrightarrow (F(P))(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)a_k x^k = 0_{\mathbb{R}[x]} \quad \left. \begin{array}{l} \text{question 1) } (\bullet) \\ \text{par unicité des coeffi-} \\ \text{cients} \end{array} \right\} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, (n-k)a_k = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_k = 0. \end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(F) = \{P(x) = a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}(x^n)$.

Remarque

$\text{Ker}(F)$ est une droite vectorielle engendrée par le vecteur/polynôme x^n .

• Soit $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^k$ un polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$. Considérons le polynôme

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{n-k} x^k.$$

Alors P est un polynôme de $\mathbb{R}_n[x]$ et, en reprenant la relation (\bullet) , $Q = F(P)$.

$$\text{Im}(F) = \mathbb{R}_{n-1}[x].$$

Remarque

On en déduit que F est surjective mais non injective.

Exercice 4 Expression d'un projecteur

1) Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de E .

• Analyse (recherche des conditions nécessaires)

Supposons qu'il existe $(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que $u = u_1 + u_2$.

Comme $u_2 \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 = \lambda \cdot (1, 1, 1) = (\lambda, \lambda, \lambda)$. Puis,

$$u_1 = u - u_2 = (x - \lambda, y - \lambda, z - \lambda).$$

Or, $u_1 \in F$, $3(x - \lambda) - (y - \lambda) - (z - \lambda) = 0$.

Il vient $\lambda = 3x - y - z$. Le seul couple (u_1, u_2) possible est

$$\begin{aligned} u_2 &= (3x - y - z, 3x - y - z, 3x - y - z), \\ u_1 &= u - u_2 = (-2x + y + z, -3x + 2y + z, -3x + y + 2z). \end{aligned}$$

• Synthèse (recherche des conditions suffisantes)

Vérifions que le couple précédent convient.

→ $u_1 + u_2 = (u - u_2) + u_2 = u$.

→ Vérifions que $u_1 \in F$. On a $u_1 = (-2x + y + z, -3x + 2y + z, -3x + y + 2z)$.

$$\underbrace{3(-2x + y + z)}_{1^{\text{e}} \text{ composante}} - \underbrace{(-3x + 2y + z)}_{2^{\text{e}} \text{ composante}} - \underbrace{(-3x + y + 2z)}_{3^{\text{e}} \text{ composante}} = 0.$$

Par définition de F , $u_1 \in F$.

→ Vérifions que $u_2 \in G$. On a

$$u_2 = (3x - y - z, 3x - y - z, 3x - y - z) = \lambda \cdot (1, 1, 1) \quad \text{avec} \quad \lambda = 3x - y - z.$$

Donc $u_2 \in G$.

• Conclusion.

F et G sont deux espaces supplémentaires de E .

2) Si p désigne la projection sur F parallèlement à G , alors, par définition, $p(u) = u_1$,

$$p((x, y, z)) = (-2x + y + z, -3x + 2y + z, -3x + y + 2z).$$

Exercice 5 Exemple d'application sur les suites réelles

1) Soient $(u, v) \in E$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On pose $w = \Delta(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} w_n &= (\lambda \cdot u + \mu \cdot v)_{n+1} - (\lambda \cdot u + \mu \cdot v)_n \\ &= (\lambda u_{n+1} + \mu v_{n+1}) - (\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= \lambda(u_{n+1} - u_n) + \mu(v_{n+1} - v_n). \end{aligned}$$

Donc
$$\Delta(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot \Delta(u) + \mu \cdot \Delta(v).$$

Δ est une application linéaire.

2) Soit $u \in E$,

$$u \in \text{Ker}(\Delta) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n.$$

Donc

$\text{Ker}(\Delta) = \{u \in E \mid u \text{ est constante}\} = \text{Vect}(\mathbf{1}),$

où $\mathbf{1}$ est la suite constante égale à 1.

Remarque

En particulier, Δ n'est pas injective.

3) Soit $v \in E$. On cherche une suite u telle que $v = \Delta(u)$. Or,

$$v = \Delta(u) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = v_n + u_n.$$

Il suffit de considérer la suite u définie par

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k.$$

Conclusion :

Δ est surjective.

4) a) Soit $u \in E$. Posons $v = \Delta(u)$ et $w = \Delta^2(u) = \Delta(\Delta(u)) = \Delta(v)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1},$$

Puis,

$$w_n = v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n.$$

b) D'après la question précédente,

$$u \in \text{Ker}(\Delta^2) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0.$$

$\text{Ker}(\Delta)$ est l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 dont l'équation caractéristique est $x^2 - 2x + 1 = 0$.

Cette équation admet 1 pour racine double. D'après les formules explicites des suites récurrentes linéaires d'ordre 2,

$$u \in \text{Ker}(\Delta^2) \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda n + \mu.$$

Autrement dit $u \in \text{Ker}(\Delta^2) \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (u) = \lambda \cdot (n) + \mu \cdot \mathbf{1}$.

Les suites $(n)_n$ et $\mathbf{1}$ forment une famille génératrice de $\text{Ker}(\Delta^2)$, donc $\text{Ker}(\Delta^2)$ est de dimension finie. Or, cette famille est libre.

Les suites $(n)_n$ et $\mathbf{1}$ forment une base de $\text{Ker}(\Delta^2)$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 6

- 1) Soit $u \in \text{Ker } f$, c'est-à-dire, $f(u) = 0_E$. Par linéarité de f , $f^2(u) = f(f(u)) = f(0_E) = 0_E$ et $u \in \text{Ker } f^2$. Il vient

$$\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2.$$

Remarque

Ce résultat se généralise. La suite des noyaux itérés $(\text{Ker } f^i)_{i \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion. C'est-à-dire,

$$\forall i \in \mathbb{N}, \text{Ker } f^i \subset \text{Ker } f^{i+1}.$$

Par contre, la suite des images itérées est décroissante pour l'inclusion

$$\forall i \in \mathbb{N}, \text{Im } f^i \supset \text{Im } f^{i+1}.$$

- 2) On suppose $f^3 = f$. Pour établir l'égalité, il suffit de montrer $\text{Ker } f^2 \subset \text{Ker } f$. Soit $u \in \text{Ker } f^2$. Par définition, $f^2(u) = 0_E$. D'où $f^3(u) = f(0_E) = 0_E$. Puis, $f(u) = f^3(u) = 0_E$ et $u \in \text{Ker } f$.

Finalement,

$$\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f.$$

Exercice 7 Condition suffisante pour une inclusion entre image et noyau

- 1) Soit $u \in \text{Im}(f)$. Par définition, il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$. Alors

$$f(u) = \underbrace{(f \circ f)(v)}_{=0} = 0_E \quad \text{donc} \quad u \in \text{Ker}(f).$$

Finalement,

$$\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f).$$

- 2) Soit $u \in \text{Ker}(f)$, c'est-à-dire, $f(u) = 0_E$.

L'hypothèse $f \circ g + g \circ f = \text{id}_E$ impose $f(g(u)) + g(f(u)) = u$. Or

$$g(f(u)) = g(0_E) = 0_E \quad (\text{car } g \text{ est linéaire}).$$

Donc $u = f(g(u))$, puis, $u \in \text{Im}(f)$ car $g(u) \in E$. On a bien

$$\text{Ker } f \subset \text{Im } f.$$

Exercice 8

Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $u \in E$.

• **Analyse**

(recherche des conditions nécessaires)

On suppose qu'il existe $(v, w) \in \text{Ker}(f) \times \text{Im}(f)$ tel que $u = v + w$.

Comme $w \in \text{Im } f$, il existe $w' \in E$ tel que $f(w') = w$. De plus, $v \in \text{Ker } f$ signifie $f(v) = 0_E$.
Par linéarité

$$f(u) = \underbrace{f(v)}_{=0_E} + f(w) = f(w) = f^2(w').$$

On en déduit que

$$f^2(u) = f^3(w').$$

Or, $f = f^3 - f^2$ impose $w = f(w') = f^3(w') - f^2(w') = f^2(u) - f(u)$.

Et $v = u - w = u - f^2(u) + f(u)$.

On a ainsi un unique couple (v, w) possible.

• **Synthèse**

(recherche des conditions suffisantes)

Vérifions que les expressions de v et w trouvées précédemment conviennent.

→ $v + w = u - f^2(u) + f(u) + (f^2(u) - f(u)) = u$.

→ Montrons que $v \in \text{Ker } f$. Par linéarité,

$$f(v) = f(u - f^2(u) + f(u)) = f(u) - f^3(u) + f^2(u) = \underbrace{(f - f^3 + f^2)}_{=0_{\mathcal{L}(E)}}(u) = 0_E.$$

→ Montrons que $w \in \text{Im}(f)$.

$$w = f^2(u) - f(u) = f(f(u) - u) = f(w'') \quad \text{où } w'' = f(u) - u.$$

• **Conclusion**

$$\forall u \in E, \quad \exists! (v, w) \in \text{Ker } f \times \text{Im } f, \quad u = v + w.$$

$$E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

Exercice 9

1) Raisonnons par analyse-synthèse. Soit $u \in E$.

• **Analyse**

(recherche des conditions nécessaires)

Supposons qu'il existe $(u_1, u_2) \in \text{Ker } f \times \text{Im } g$ tel que $u = u_1 + u_2$.

On a $f(u_1) = 0_E$ et il existe $v_2 \in E$ tel que $u_2 = g(v_2)$.

Par linéarité, $f(u) = f(u_1) + f(u_2) = f(g(v_2))$.

On en déduit $(g \circ f)(u) = (g \circ f \circ g)(v_2) = g(v_2) = u_2$.

D'où, la seule solution possible :

$$u_2 = (g \circ f)(u) \quad \text{et} \quad u_1 = u - u_2 = u - (g \circ f)(u).$$

• Synthèse

(recherche des conditions suffisantes)

Vérifions que la solution trouvée convient.

$$\rightarrow u_1 + u_2 = (u - u_2) + u_2 = u.$$

 \rightarrow Par linéarité de f , $f(u_1) = f(u) - (f \circ g \circ f)(u) = f(u) - f(u) = 0_E$. Donc, $u_1 \in \text{Ker } f$.

 $\rightarrow u_2 = g(\underbrace{f(u)}_{\in E})$. Donc $u_2 \in \text{Im}(g)$.

On a montré que

$$\forall u \in E, \exists!(u_1, u_2) \in \text{Ker } f \times \text{Im } g, \quad x = u_1 + u_2.$$

• Conclusion

Ker f et Im g sont des supplémentaires de E .

$$2) \quad p \circ p = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g \circ f) = g \circ f = p.$$

Donc p est un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.Par la caractérisation des projecteurs, p est un projecteur.
 \rightarrow Pour $u \in \text{Ker } f$, on a $p(u) = g(f(u)) = g(0_E) = 0_E$ (car g est linéaire).

 \rightarrow Pour $u \in \text{Im } g$, il existe $v \in E$ tel que $u = g(v)$. Ainsi

$$p(u) = (g \circ f \circ g)(v) = g(v) = u.$$

Ker(f) et Im(g) sont supplémentaires dans E , alors,pour tout $u \in E$, il existe $(u_1, u_2) \in \text{Ker } f \times \text{Im } g$ tel que $u = u_1 + u_2$.Par linéarité, $p(u) = p(u_1) + p(u_2) = 0_E + u_2 = u_2$.D'après la définition des projections, p est la projection sur Im g parallèlement à Ker f .

Exercice 10

1) Soit $P \in \mathbb{R}[x]$.

$$\left. \begin{aligned} (f(g(P)))(x) &= (g(P))'(x) = P(x) + xP'(x) \\ (g(f(P)))(x) &= (g(P'))(x) = xP'(x) \end{aligned} \right\} \text{D'où } ((f \circ g - g \circ f)(P))(x) = P(x).$$

Conclusion

$f \circ g - g \circ f = \text{id}_E.$

2) Démontrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : f^n \circ g - g \circ f^n = n f^{n-1}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.• Initialisation. $f \circ g - g \circ f = \text{id}_E$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} f^{n+1} \circ g - g \circ f^{n+1} &= f^{n+1} \circ g - f^n \circ g \circ f + f^n \circ g \circ f - g \circ f^{n+1} \\ &= f^n \circ \underbrace{(f \circ g - g \circ f)}_{\text{id}_E} + \underbrace{(f^n \circ g - g \circ f^n)}_{nf^{n-1} \mathcal{P}(n)} \circ f \\ &= f^n \circ \text{id}_E + (nf^{n-1}) \circ f \\ &= (n+1)f^n. \end{aligned}$$

Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n \circ g - g \circ f^n = nf^{n-1}.$$

Exercice 11 *Espaces stables*

Raisonnons par double implication.

⇒ On suppose $f \circ p = p \circ f$.

- Soit $v \in \text{Im } p$, c'est-à-dire, il existe $w \in E$ tel que $v = p(w)$.
Justifions que $f(v) \in \text{Im } p$.

$$f(v) = f(p(w)) = (f \circ p)(w) = (p \circ f)(w) = p(f(w)).$$

Comme $f(w) \in E$, $f(v) \in \text{Im}(p)$. Ce qui prouve que $\text{Im } p$ est stable par f .

- Montrons que $\text{Ker } p$ est stable par f . Soit $u \in \text{Ker } p$. Vérifions que $f(u) \in \text{Ker } p$.
 $p(f(u)) = (p \circ f)(u) = (f \circ p)(u) = f(p(u)) = f(0_E) = 0_E$ (car f est linéaire).
Donc $\text{Ker } p$ est stable par f .

On a donc prouvé la première implication.

Remarque

Pour cette partie de la démonstration, nous n'avons pas utilisé que p est un projecteur. Autrement dit, cette propriété est vraie pour toute application linéaire p telle que $p \circ f = f \circ p$.

⇐ Supposons $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ stables par f .

Soit $u \in E$. D'après les propriétés des projecteurs, $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ et p est la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Donc, il existe $(u_1, u_2) \in \text{Ker } p \times \text{Im } p$ tel que $u = u_1 + u_2$ et $p(u) = u_2$. Alors, par linéarité

$$(f \circ p)(u) = f(p(u)) = f(u_2).$$

Par hypothèse $f(u_1) \in \text{Ker}(p)$, donc $p(f(u_1)) = 0_E$.

Et $f(u_2) \in \text{Im } p$, donc il existe $u'_2 \in E$ tel que $f(u_2) = p(u'_2)$. Alors

$$p(f(u_2)) = p(p(u'_2)) = (p \circ p)(u'_2) = p(u'_2) = f(u_2).$$

Donc, par linéarité,

$$(p \circ f)(u) = p(f(u_1 + u_2)) = p(f(u_1)) + p(f(u_2)) = p(0_E) + f(u_2) = f(u_2).$$

Ainsi $\forall u \in E, (f \circ p)(u) = f(u_2) = (p \circ f)(u).$

Ce qui prouve la seconde implication.

Finalement, l'équivalence est bien prouvée.

Exercice 12

- 1) On veut montrer que pour tout $u \in E$, il existe un unique couple $(u_1, u_2) \in \text{Ker } g \times \text{Im } f$ tel que $u = u_1 + u_2$. On raisonne par analyse-synthèse. Soit $u \in E$.

• **Analyse** (recherche des conditions nécessaires)

Supposons que $(u_1, u_2) \in \text{Ker } g \times \text{Im } f$ vérifie $u = u_1 + u_2$.

On a $g(u_1) = 0_E$ et il existe $v \in E$ tel que $u_2 = f(v)$, donc, comme g est linéaire

$$g(u) = g(u_1 + u_2) = g(u_1) + g(u_2) = 0_E + \underbrace{(g \circ f)}_{=id_E}(v) = v.$$

Donc, la seule solution possible est

$$u_2 = f(v) = (f \circ g)(u) \quad \text{et} \quad u_1 = u - u_2 = u - (f \circ g)(u).$$

• **Synthèse** (recherche des conditions suffisantes)

Montrons que la solution trouvée convient.

$$\rightarrow u_1 + u_2 = u - (f \circ g)(u) + (f \circ g)(u) = u.$$

$$\rightarrow u_1 \in \text{Ker}(g) \text{ car}$$

$$g(u_1) = g(u - u - (f \circ g)(u)) = g(u) - \underbrace{(g \circ f \circ g)}_{=id_E}(u) = g(u) - g(u) = 0_E.$$

$$\rightarrow u_2 \in \text{Im}(f) \text{ car } u_2 = f(\underbrace{g(v)}_{\in E}).$$

On a montré que $\forall u \in E, \exists!(u_1, u_2) \in \text{Ker } g \times \text{Im } f, u = u_1 + u_2$.

Conclusion :

$$E = \text{Ker } g \oplus \text{Im } f.$$

- 2) De plus, on vient de voir que pour tout $u \in E$,

$$u = \underbrace{(u - f(g(u)))}_{\in \text{Ker } g} + \underbrace{f(g(u))}_{\in \text{Im } f}.$$

On conclut, par définition de la projection p , que

$$p(u) = u - f(g(u)).$$

Exercice 13

Raisonnons par double-inclusion.

- ⊂ Soit $u \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.
 Il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$ et $f(u) = 0_E$.
 Donc $(f \circ f)(v) = f(f(v)) = f(u) = 0_E$.
 Autrement dit, $v \in \text{Ker}(f \circ f)$ et $u = f(v) \in f(\text{Ker}(f \circ f))$.
- ⊃ Soit $u \in f(\text{Ker}(f \circ f))$.
 Il existe $v \in \text{Ker}(f \circ f)$ tel que $u = f(v)$.
 Alors $v \in E$, donc $u \in \text{Im}(f)$. Et $f(u) = f(f(v)) = (f \circ f)(v) = 0_E$ (car $v \in \text{Ker}(f \circ f)$).
 On obtient $u \in \text{Ker}(f)$. En regroupant les deux appartenances, $u \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$.

Finalement,

$$\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) = f(\text{Ker}(f \circ f)).$$

Exercice 14

- 1) a) Soit $u \in \text{Im}(f + g)$. Par définition, il existe $v \in E$ tel que $u = (f + g)(v) = f(v) + g(v)$.
 Or, $f(v) \in \text{Im } f$ et $g(v) \in \text{Im } g$. Donc $u \in \text{Im } f + \text{Im } g$.

$$\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g.$$

- b) Considérons $g = -\text{id}_E$. Alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(f + g)(x, y) = (0, x) = x \cdot (0, 1)$.
 Donc $\text{Im}(f + g) = \text{Vect}((0, 1))$.
 Or $\text{Im}(-\text{id}_E) = \mathbb{R}^2$. Donc $\text{Im } f + \text{Im } g = \mathbb{R}^2$. On constate que $\text{Im}(f + g) \neq \text{Im } f + \text{Im } g$.

Remarque

Si $u \in \text{Im } f + \text{Im } g$, alors il existe $(v_1, v_2) \in E^2$ tel que $u = f(v_1) + g(v_2)$.
 Il faudrait pouvoir prendre $v_1 = v_2 = v$ pour affirmer que $u = (f + g)(v)$ et donc que $u \in \text{Im } f + \text{Im } g$. Nous venons de voir que ce n'est pas possible en général.

- 2) a) Comme $u \in \text{Im } f$, il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$. Alors $g(u) = \underbrace{(g \circ f)}_{=0}(v) = 0_E$ et $u \in \text{Ker } g$. D'où

$$\text{Im } f \subset \text{Ker } g.$$

- b) Par définition de $u \in \text{Im } f$, il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$.
 f est un projecteur, donc $f^2 = f$. D'où $f(u) = f^2(v) = f(v) = u$.
 D'après la question précédente, $u \in \text{Ker } g$. Donc $g(u) = 0_E$ et
 $u = f(u) + g(u) = (f + g)(u)$.

Conclusion.

$$u \in \text{Im}(f + g).$$

- c) Soit $u \in \text{Im } g$. Il existe $v \in E$ tel que $u = g(v)$. D'après les propriétés des projecteurs,

$$E = \text{Im } f + \text{Ker } f.$$

En particulier, il existe $(v_1, v_2) \in \text{Im } f \times \text{Ker } f$ tel que $v = v_1 + v_2$.

On a montré que $\text{Im } f \subset \text{Ker } g$, donc $v_1 \in \text{Ker } g$.

Par linéarité $g(v) = g(v_1 + v_2) = g(v_1) + g(v_2) = g(v_2)$.

Comme $v_2 \in \text{Ker}(f)$, on a

$$u = g(v) = g(v_2) = f(v_2) + g(v_2) = (f + g)(v_2) \in \text{Im}(f + g)$$

Bilan

$$u \in \text{Im}(f + g).$$

- d) Il suffit de montrer $\text{Im } f + \text{Im } g \subset \text{Im}(f + g)$.

Soit $u \in \text{Im } f + \text{Im } g$. Il existe $(u_1, u_2) \in \text{Im } f \times \text{Im } g$ tel que $u = u_1 + u_2$.

D'après les questions précédentes, $u_1 \in \text{Im}(f + g)$ et $u_2 \in \text{Im}(f + g)$.

Comme $\text{Im}(f + g)$ est un espace vectoriel, $u_1 + u_2 \in \text{Im}(f + g)$.

Conclusion :

$$\text{Im } f + \text{Im } g = \text{Im}(f + g).$$

Exercice 15

- 1) Soit $f \in E$. Comme f est continue sur \mathbb{R} , f admet des primitives sur \mathbb{R} . Soit F l'une de ces primitives. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$T(f)(x) = \int_{x-2}^{x+2} f(t) dt = \left[F(t) \right]_{x-2}^{x+2} = F(x+2) - F(x-2).$$

F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , donc par linéarité et composition $T(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . Par dérivation des fonctions composées,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T(f)'(x) = 1 \times F'(x+2) - 1 \times F'(x-2) = f(x+2) - f(x-2).$$

- 2) • On vient de voir que pour tout $f \in E$, $T(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} . En particulier $T(f)$ est continue sur \mathbb{R} , c'est-à-dire, $T(f) \in E$.
• Soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(f + \lambda g)(x) &= \int_{x-2}^{x+2} (f + \lambda g)(t) dt = \int_{x-2}^{x+2} (f(t) + \lambda g(t)) dt \\ &= \int_{x-2}^{x+2} f(t) dt + \lambda \int_{x-2}^{x+2} g(t) dt = T(f)(x) + \lambda T(g)(x) \\ \Rightarrow T(f + \lambda g) &= T(f) + \lambda T(g). \end{aligned}$$

Ainsi, T est linéaire

$$T \in \mathcal{L}(E).$$

3) D'après la question 1), $\text{Im}(T) \subset C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Or il existe des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui sont continues, mais pas de classe C^1 sur \mathbb{R} : par exemple l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$. On conclut que

L'application T n'est pas surjective.

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(s)(x) &= \int_{x-2}^{x+2} \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) dt = \left[-\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right]_{x-2}^{x+2} \\ &= -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x+2)\right) + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}(x-2)\right) \\ &= -\frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x + \pi\right) + \frac{2}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{) } \cos \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\ \text{) } \end{array} \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'application $T(s)$ est l'application nulle. D'où $s \in \text{Ker}(T)$.

Comme s n'est pas l'application nulle, $\text{Ker}(T) \neq \{0_E\}$ et

T n'est pas injective.

b) Soit $f \in \text{Ker}(T)$, c'est-à-dire, $T(f) = 0_E$ (l'application nulle).
En particulier, $T(f)' = 0_E$, ce qui se reformule, d'après la question 1), en :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2) = f(x-2).$$

Soit $t \in \mathbb{R}$. En prenant $x = t + 2$ dans la relation ci-dessus :

$$f(t+4) = f(x+2) = f(x-2) = f(t).$$

Ceci étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$,

f est 4-périodique.

Applications linéaires en dimension finie

23

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Calcul de noyau et de l'image

On considère les applications linéaires $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$ définies par

$$\begin{aligned} f : (x, y, z) &\mapsto (x + y - z, 2x + 3y - 3z, 3x - 4y + 4z); \\ g : (x, y, z, t, u) &\mapsto (x - y + z - t, 2x - y - t - u, 3x - y - 3t - 3u, z - 2t - u). \end{aligned}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{C}_n , la base canonique de \mathbb{R}^n .

- 1) a) Donner la matrice $A = \text{Mat}_{\mathcal{C}_3, \mathcal{C}_3}(f)$.
b) Déterminer une base $\text{Ker } f$, une base de $\text{Im } f$.
- 2) a) Donner la matrice $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5}(g)$.
b) Déterminer une base $\text{Ker } g$, une base de $\text{Im } g$.

Exercice 2 **

Soit $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

- 1) Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2.
- 2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I .
- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$.
 - a) Déterminer R_n , le reste de la division euclidienne de x^n par $x^2 - 2x - 3$.
 - b) En déduire A^n .

Indication. On rappelle que si S, T, U sont trois polynômes tels que $S = TU$, alors $S(A) = T(A) \times U(A)$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3 * Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f^2 = -\text{id}_E \quad \text{et} \quad f \neq \text{id}_E.$$

Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de f dans cette base soit $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 4 ** *Équivalences multiples*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer l'équivalence des quatre propositions suivantes :

- | | |
|---|--|
| (1) $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\};$ | (3) $\text{Im } f = \text{Im } f^2;$ |
| (2) $\mathbb{R}^n = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f;$ | (4) $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2.$ |

Indication. Pour montrer l'équivalence des propositions, on montrera $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1)$.

Exercice 5 ** Soit E l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et

$$M(a,b,c) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{bmatrix}.$$

- 1) Prouver que E est un espace vectoriel.
- 2) Vérifier que E est de dimension 3 et préciser une base (M_1, M_2, M_3) .
- 3) Calculer $M_i M_j$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, et démontrer que E est stable par produit.
- 4) Soit $A \in E$ inversible.
 - a) Soit $f : M \in E \mapsto AM \in E$. Montrer que f est bien définie et bijective.
 - b) En déduire que $A^{-1} \in E$.

Exercice 6 *** Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\text{Ker } f = \text{Im } f.$$

- 1) Justifier que n est un nombre pair. On pose $m = n/2$.
- 2) Soit H un supplémentaire de $\text{Im } f$ dans E .
Montrer que pour tout $u \in \text{Im } f$, il existe $v \in H$ tel que $f(v) = u$.
- 3) Soit (v_1, v_2, \dots, v_k) une famille de vecteurs de E telle que $(f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_k))$ soit une famille libre. Montrer que (v_1, v_2, \dots, v_k) est libre.
- 4) Montrer qu'il existe une base $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_m)$ de E telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad f(u_i) = 0_E, \quad f(v_i) = u_i.$$

- 5) Déterminer un endomorphisme g de E tel que $f \circ g + g \circ f = \text{id}_E$.

Indication. On pourra, dans un premier temps, tester la relation avec les vecteurs u_i et v_i .

Exercice 7 ** Polynômes annulateurs Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que la famille $(A^k)_{0 \leq k \leq n^2}$ est une famille liée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
En déduire l'existence d'un polynôme annulateur de A .
- 2) Soit $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ un polynôme annulateur de A de degré minimal. Montrer que

$$A \text{ inversible} \iff a_0 \neq 0.$$

Quelle remarque peut-on faire alors sur A^{-1} ?

Exercice 8 *** Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application

$$\varphi : P \in \mathbb{R}_n[x] \mapsto nxP - (x^2 - 1)P'$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

- 2) Donner la matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = ((x-1)^k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.
- 3) À quelle condition sur n , l'application φ est-elle bijective ?

Exercice 9 *** Exemple d'endomorphisme cyclique

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

- 1) Montrer par récurrence que la propriété :
 $\mathcal{P}(k) : \ll \forall y \in E, (f^{k-1}(y) \neq 0_E \text{ et } f^k(y) = 0_E) \Rightarrow (y, f(y), \dots, f^{k-1}(y)) \text{ est libre} \gg$
est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- 2) Soit $x \in E$ tel $f^{n-1}(x) \neq 0_E$ et $f^n(x) = 0_E$.
Déduire de la question précédente que $\mathcal{B}_x = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .
- 3) Préciser la matrice de f dans cette base \mathcal{B}_x .
- 4) En déduire une base de $\text{Ker } f$, puis de $\text{Im } f$.

Exercice 10 ***

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E , admettant un polynôme annulateur de degré m . On note $G = \text{Vect}((f^i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket})$.

- 1) Vérifier que pour tout entier $k \geq m$, $f^k \in G$.
- 2) Soient $(g, h) \in G^2$. Montrer que $g \circ h \in G$. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g^k \in G$.
- 3) Montrer que g admet un polynôme annulateur de degré inférieur ou égal à m .

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Calcul de noyau et de l'image

- 1) a) À partir de l'expression analytique de f , on obtient $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 4 \end{bmatrix}$.
- b) Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}
 u \in \text{Ker } f &\Leftrightarrow f(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - 3z = 0 \\ 3x - 4y + 4z = 0 \end{cases} \\
 &\xLeftrightarrow[\begin{smallmatrix} L_2 - L_2 - 2L_1 \\ L_3 - L_3 - 3L_1 \end{smallmatrix}] \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - z = 0 \\ -7y + 7z = 0 \end{cases} \\
 &\xLeftrightarrow[L_3 = -7L_2] \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow u = (0, z, z) \Leftrightarrow u = z \underbrace{(0, 1, 1)}_{v_1}. \\
 &\boxed{\text{Ker } f = \text{Vect}(v_1)}.
 \end{aligned}$$

Le vecteur v_1 n'est pas nul, c'est une base de $\text{Ker } f$ et $\dim(\text{Ker } f) = 1$.

D'après la formule du rang, $\dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\text{Ker } f) = 2$. Les vecteurs

$$v_2 = f(1, 0, 0) = (1, 2, 3) \quad \text{et} \quad v_3 = f(0, 1, 0) = (1, 3, -4)$$

sont deux vecteurs de $\text{Im } f$. Ils sont non colinéaires, donc ils forment une famille libre. Et comme $\dim(\text{Im } f) = \text{card}((v_2, v_3))$, c'est une base de $\text{Im } f$.

$$\boxed{(v_2, v_3) \text{ est une base de } \text{Im } f.}$$

- 2) a) À partir de l'expression analytique de g , on obtient $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$.
- b) Soit $V = (x, y, z, t, u)$ un vecteur de \mathbb{R}^5 .

$$V \in \text{Ker } g \Leftrightarrow g(V) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2x - y - t - u = 0 \\ 3x - y - 3t - 3u = 0 \\ z - 2t - u = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ y - 2z + t - u = 0 \\ 2y - 3z - 3u = 0 \\ z - 2t - u = 0 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ y - 2z + t - u = 0 \\ z - 2t - u = 0 \\ z - 2t - u = 0 \end{cases} \\
 & \xrightarrow{L_3 = L_4} \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ y - 2z + t - u = 0 \\ z - 2t - u = 0 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2t + 2u \\ y = 3t + 3u \\ z = 2t + u \end{cases} \Leftrightarrow V = (2t + 2u, 3t + 3u, 2t + u, t, u) \\
 & \Leftrightarrow V = t \underbrace{(2, 3, 2, 1, 0)}_{v_1} + u \underbrace{(2, 3, 1, 0, 1)}_{v_2} \Leftrightarrow V \in \text{Vect}(v_1, v_2).
 \end{aligned}$$

Donc (v_1, v_2) est une famille génératrice de $\text{Ker } g$. De plus, v_1 et v_2 sont non colinéaires, ils forment une famille libre.

(v_1, v_2) est une base de $\text{Ker } g$.

D'après la formule du rang, $\dim(\text{Im } f) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(\text{Ker } g) = 5 - 2 = 3$.

Considérons les vecteurs $v_3 = f(1, 0, 0, 0, 0) = (1, 2, 3, 0)$,

$v_4 = f(0, 1, 0, 0, 0) = (-1, -1, -1, 0)$ et $v_5 = f(0, 0, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1)$.

Cette famille est libre, car, d'après la résolution précédente :

$$x \cdot v_3 + y \cdot v_4 + z \cdot v_5 = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

(v_3, v_4, v_5) est une famille libre de vecteurs de $\text{Im } f$ et $\text{card}((v_3, v_4, v_5)) = \dim(\text{Im } f)$.
Finalement

(v_3, v_4, v_5) est une base de $\text{Im } g$.

Exercice 2

$$1) A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 11 \end{bmatrix} = 2A + 3I_3. \text{ Donc } A^2 - 2A - 3I_3 = 0_3.$$

$$P(x) = x^2 - 2x - 3 \text{ est un polynôme annulateur de } A.$$

2) D'après la question précédente,

$$\left(\frac{1}{3}(A - 2I_3)\right) \cdot A = A \cdot \left(\frac{1}{3}(A - 2I_3)\right) = I_3.$$

Donc A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 2I_3).$$

3) a) D'après le théorème de la division euclidienne, $\deg(R_n) < \deg(x^2 - 2x - 3)$ et il existe un polynôme Q_n tel que

$$x^n = (x^2 - 2x - 3)Q_n(x) + R_n(x) \quad (\bullet).$$

Le polynôme R_n étant de degré au plus 1, il s'écrit $R_n(x) = a_n x + b_n$ où $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$. Les racines du polynôme $x^2 - 2x - 3$ sont -1 et 3 . En donnant à x chacune de ces valeurs dans la relation (\bullet) , on obtient

$$\begin{cases} -a_n + b_n = (-1)^n \\ 3a_n + b_n = 3^n \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} a_n = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n) \\ b_n = \frac{1}{4}(3^n + 3(-1)^n). \end{cases}$$

Concluons, le reste de la division euclidienne est

$$R_n = \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n)x + \frac{1}{4}(3^n + 3(-1)^n).$$

b) En évaluant en la matrice A dans (\bullet) et d'après le rappel sur les propriétés des polynômes de matrices,

$$\begin{aligned} A^n &= (A^2 - 2A - 3I_3) \cdot Q_n(A) + R_n(A) && \downarrow \text{d'après 1)} \\ &= R_n(A) && \\ &= \frac{1}{4}(3^n - (-1)^n)A + \frac{1}{4}(3^n + 3(-1)^n)I_3 && \downarrow \text{d'après 3 a)} \end{aligned}$$

Après simplifications, on trouve

$$A_n = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3^n + 5 \cdot (-1)^n & 3^{n+1} - 3 \cdot (-1)^n & -5 \cdot 3^n + 5 \cdot (-1)^n \\ 0 & 4 \cdot (-1)^n & 0 \\ 3^n - (-1)^n & -3^{n+1} + 3 \cdot (-1)^n & 5 \cdot 3^n + (-1)^{n+1} \end{bmatrix}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3

Par définition de la matrice d'une application linéaire, on cherche une base (u, v) de E telle que $v = f(u)$ et $-u = f(v)$.

Par hypothèse $f \neq \text{id}_E$. Il existe alors $u \in E$ tel que $f(u) \neq u$. Montrons que $(u, f(u))$ est une base de E . Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\lambda \cdot u + \mu \cdot f(u) = 0_E$ (L_1). On applique f

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot u + \mu \cdot f(u)) &= f(0_E) \\ \lambda \cdot f(u) + \mu \cdot f^2(u) &= 0_E \\ \lambda \cdot f(u) - \mu \cdot u &= 0_E \quad (L_2) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow f \text{ linéaire} \\ \downarrow f^2 = -\text{id}_E \end{array} \right\}$$

En effectuant $\lambda L_1 - \mu L_2$, on trouve $(\lambda^2 + \mu^2) \cdot u = 0_E$.

Or $u \neq 0_E$ car $f(0_E) = 0_E$, alors que $f(u) \neq u$. Donc $\lambda^2 + \mu^2 = 0$. Une somme de carrés de réels (donc positifs) ne peut être nulle que si tous les termes sont nuls. Donc $\lambda = \mu = 0$ et la famille $(u, f(u))$ est libre.

De plus, $\text{card}(u, f(u)) = 2 = \dim(E)$. C'est une base de E .

Posons $v = f(u)$ de sorte que $f(v) = f^2(u) = -u$.

La matrice de f dans la base (u, v) est $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 4 Équivalences multiples

- (1) \Rightarrow (2). D'après la formule du rang : $\dim(\mathbb{R}^n) = \text{rg}(f) + \dim(\text{Ker } f)$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\} \\ \dim E = \text{rg } f + \dim(\text{Ker } f) \end{array} \right\} \text{ donc } \boxed{\mathbb{R}^n = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f.}$$

D'après la caractérisation des supplémentaires via la dimension.

- (2) \Rightarrow (3). On suppose $\mathbb{R}^n = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker } f$. Montrons $\text{Im } f = \text{Im } f^2$ en raisonnant par double inclusion.

(\subset) Soit $x \in \text{Im } f$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$.

Par hypothèse $\mathbb{R}^n = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

Par définition, il existe $(y_1, y_2) \in \text{Im } f \times \text{Ker } f$ tel que $y = y_1 + y_2$.

Donc $f(y_2) = 0_E$ et il existe $z \in E$ tel que $y_1 = f(z)$.

Par linéarité $x = f(y) = f(y_1) + f(y_2) = f(y_1) = f^2(z)$. Puis $x \in \text{Im } f^2$.

(\supset) Soit $x \in \text{Im } f^2$. Il existe $z \in E$ tel que $x = f^2(z) = f(\underbrace{f(z)}_{\in \mathbb{R}^n})$. Donc $x \in \text{Im } f$.

$\text{Im } f = \text{Im } f^2.$

- (3) \Rightarrow (4). On suppose $\text{Im } f = \text{Im } f^2$.
 Pour tout endomorphisme, on a $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$ (voir exercice 6 du chapitre 22).
 Montrons l'inclusion réciproque. Par hypothèse $\dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Im } f^2)$.

D'après la formule du rang

$$\left. \begin{array}{l} \dim(\text{Ker } f) = n - \dim(\text{Im } f) \\ \dim(\text{Ker } f^2) = n - \dim(\text{Im } f^2) \end{array} \right\} \text{ donc } \dim(\text{Ker } f) = \dim(\text{Ker } f^2).$$

Alors

$$\left. \begin{array}{l} \dim(\text{Ker } f) = \dim(\text{Ker } f^2) \\ \text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2 \end{array} \right\} \text{ donc } \boxed{\text{Ker } f = \text{Ker } f^2}.$$

- (4) \Rightarrow (1). On suppose $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$. Montrons que $\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ par double inclusion.

⊂ Soit $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$. Il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$ et $f(x) = 0_E$.
 Alors $f^2(y) = 0_E$, donc $y \in \text{Ker } f^2$. Comme $\text{Ker } f = \text{Ker } f^2$, on a $y \in \text{Ker } f$ et $x = f(y) = 0_E$.

⊃ Comme $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^n , ils contiennent le vecteur nul.

Il vient

$$\boxed{\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0_{\mathbb{R}^n}\}}.$$

Résumons

$\boxed{\text{Les quatre propositions sont équivalentes.}}$

Exercice 5

- 1) Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$M(a, b, c) = a \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} + b \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{M_2} + c \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M_3}.$$

Donc $E = \text{Vect}(M_1, M_2, M_3)$.

$\boxed{E \text{ est l'espace vectoriel engendré par } (M_1, M_2, M_3).}$

- 2) On vérifie que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$aM_1 + bM_2 + cM_3 = 0_3 \quad \Rightarrow \quad (a = b = c = 0).$$

La famille (M_1, M_2, M_3) est libre. De plus, la famille (M_1, M_2, M_3) engendre E , c'est une base de E .

$\boxed{\dim(E) = 3 \text{ et une base de } E \text{ est } (M_1, M_2, M_3).}$

- 3) Vérifier que
- $M_1^2 = M_1$,
 - $M_1M_2 = M_2M_1 = M_2$,
 - $M_1M_3 = M_3M_1 = M_3$,
 - $M_2^2 = M_1 + M_3$,
 - $M_2M_3 = M_3M_2 = M_2$,
 - $M_3^2 = M_1$.

Tous les produits sont dans E . Soient $M(a_1, a_2, a_3)$ et $M(b_1, b_2, b_3)$ deux matrices de E .

$$M(a_1, a_2, a_3) \times M(b_1, b_2, b_3) = \sum_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket^3} a_i b_j \underbrace{M_i M_j}_{\in E} \in E$$

car E est stable par combinaison linéaire.

E est stable par produit.

- 4) a) • f est bien une application de E dans E d'après la question précédente.
 • Vérifions qu'elle est linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(M, N) \in E^2$. Par distributivité,

$$f(\lambda M + \mu N) = A(\lambda M + \mu N) = \lambda \cdot AM + \mu \cdot AN = \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N).$$

- Montrons que f est injective.

$$M \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow AM = 0_3 \Leftrightarrow A^{-1}AM = 0_3 \Leftrightarrow M = 0_3.$$

Donc $\text{Ker}(f) = \{0_3\}$. On en déduit que f est injectif. Comme tout endomorphisme injectif de dimension finie est un isomorphisme.

f est bijective.

- b) L'endomorphisme est bijectif et $I_3 = M_1 \in E$. Posons $B = f^{-1}(I_3)$, l'unique antécédent de I_3 par f . Par définition de f , $I_3 = f(B) = AB$. Par unicité de l'inverse, $B = A^{-1}$. Or $B \in E$. Concluons

$A^{-1} \in E.$

Exercice 6

- 1) D'après la formule du rang, $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(E) = n$.
 Par hypothèse $\text{Ker } f = \text{Im } f$. Donc $n = 2 \dim(\text{Im } f)$.

n est pair.

- 2) Soit $u \in \text{Im } f$. Il existe $w \in E$, tel que $u = f(w)$.
 On a $E = \text{Im } f \oplus H = \text{Ker } f \oplus H$. Donc il existe $(v', v) \in \text{Ker } f \times H$, $w = v + v'$.
 Par linéarité de f , $u = f(w) = \underbrace{f(v')}_{=0_E} + f(v) = f(v)$.

Conclusion Pour tout $u \in \text{Im } f$, il existe $v \in H$ tel que $f(v) = u$.

3) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ tels que $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0_E$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0_E &\Rightarrow f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i\right) = 0_E \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i f(v_i) = f(0_E) = 0_E \\ &\Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, \lambda_i = 0. \end{aligned}$$

f linéaire
 $(f(v_i))_{1 \leq i \leq k}$ est libre

Donc

La famille (v_1, v_2, \dots, v_k) est libre.

4) D'après la question 1), $\dim(\text{Im } f) = \dim(\text{Ker } f) = m$. On peut donc considérer (u_1, u_2, \dots, u_m) une base de $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$. En particulier, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $f(u_i) = 0_E$;

D'après 2), il existe $v_i \in H$, tel que $f(v_i) = u_i$. Sachant que la famille (u_1, u_2, \dots, u_m) est libre, on a, d'après 3), la liberté de la famille (v_1, v_2, \dots, v_m) .

De plus, les sous-espaces H et $\text{Im } f$ sont supplémentaires dans E . En particulier,

$$\dim(H) = \dim(E) - \dim(\text{Im } f) = m.$$

Alors (v_1, v_2, \dots, v_m) est une famille libre de vecteurs de H : c'est une base de H . D'après la caractérisation des sommes directes par concaténation,

$$(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_m) \text{ est une base de } E,$$

et

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, f(u_i) = 0_E, f(v_i) = u_i.$$

5) Recherche d'une solution.

Supposons qu'il existe g un endomorphisme de E tel que $f \circ g + g \circ f = \text{id}_E$. Déterminons l'image de la base de la question précédente par g . Soit $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$.

Comme $u_i \in \text{Ker}(f)$, $(f \circ g + g \circ f)(u_i) = f(g(u_i)) + \underbrace{g(f(u_i))}_{=0_E} = f(g(u_i))$

or $(f \circ g + g \circ f)(u_i) = \text{id}_E(u_i) = u_i$.

D'où $f(g(u_i)) = u_i$.

Une solution possible est $g(u_i) = v_i$.

Alors, comme d'après 4) $f(v_i) = u_i$,

$$(f \circ g + g \circ f)(v_i) = f(g(v_i)) + g(f(v_i)) = f(g(v_i)) + g(u_i) = f(g(v_i)) + v_i.$$

Or $(f \circ g + g \circ f)(v_i) = \text{id}_E(v_i) = v_i$

D'où $f(g(v_i)) = 0_E$.

Une solution possible est $g(v_i) = 0_E$.

Rappelons qu'un endomorphisme de E est uniquement déterminé par l'image d'une base. Or, $(u_1, u_2, \dots, u_m, v_1, v_2, \dots, v_m)$ est une base de E . Les relations précédentes suggèrent de considérer l'unique endomorphisme g de E tel que

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad g(u_i) = v_i, \quad g(v_i) = 0_E.$$

Vérification de la relation.

Pour un tel choix de g , on a, pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

- $(f \circ g + g \circ f)(u_i) = f(g(u_i)) + g(f(u_i)) = f(v_i) + g(0_E) = u_i = \text{id}_E(u_i)$,
- $(f \circ g + g \circ f)(v_i) = f(g(v_i)) + g(f(v_i)) = f(0_E) + g(u_i) = v_i = \text{id}_E(v_i)$.

Les endomorphismes $(f \circ g + g \circ f)$ et id_E sont égaux car ils prennent les mêmes valeurs sur une base de E .

$$f \circ g + g \circ f = \text{id}_E.$$

Exercice 7 Polynômes annulateurs

1)

$$\left. \begin{array}{l} \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2 \\ \text{card}(A^k)_{0 \leq k \leq n^2} = n^2 + 1 \end{array} \right\} \text{ donc } \text{card}(A^k)_{0 \leq k \leq n^2} > \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})).$$

D'après les propriétés de dimension

La famille $(A^k)_{0 \leq k \leq n^2}$ est liée.

Il existe donc $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n^2} \in \mathbb{R}^{n^2+1}$ tel que $(\lambda_k)_{0 \leq k \leq n^2} \neq 0_{\mathbb{R}^{n^2+1}}$ et $\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k A^k = 0_n$.

Alors le polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k x^k$ est un polynôme annulateur de A .

A admet un polynôme annulateur.

2) Soit $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ un polynôme annulateur de A de degré minimal.

Par double implication, montrons l'équivalence

$$A \text{ inversible} \Leftrightarrow a_0 \neq 0.$$

\Rightarrow Par l'absurde. Supposons A inversible et $a_0 = 0$.

On peut mettre x en facteur dans P . Il existe $Q \in \mathbb{R}[x]$ tel que $P(x) = xQ(x)$.

D'où $P(A) = A \times Q(A)$. Il s'ensuit que $A^{-1} \times P(A) = Q(A)$.

Comme P est un polynôme annulateur de A , on en déduit que $Q(A) = 0_n$. Q est un polynôme annulateur de A avec $\deg(Q) < \deg(P)$. En contradiction avec la définition de P .

⊖ On suppose $a_0 \neq 0$. Par hypothèse $P(A) = 0_n$, donc $\sum_{k=1}^m a_k A^k = -a_0 I_n$.

Posons
$$B = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^m a_k A^{k-1} \quad (a_0 \neq 0).$$

Alors
$$A \times B = B \times A = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^m a_k A^k = I_n.$$

A est inversible et $A^{-1} = B$.

Lorsqu'elle existe, A^{-1} est une combinaison linéaire de puissances de A , c'est-à-dire, un polynôme en A .

A^{-1} est un polynôme en A .

Remarque

Précisons que l'ensemble des degrés des polynômes annulateurs de A forment une partie de \mathbb{N} non vide. Il existe donc un plus petit élément et on peut donc bien parler d'un polynôme annulateur de P de degré minimal.

Exercice 8 Un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$

1) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Alors $nxP - (x^2 - 1)P' \in \mathbb{R}[x]$ et

$$\deg(nxP) \leq n + 1 \quad \text{et} \quad \deg(-(x^2 - 1)P') \leq n + 1.$$

D'où $\deg(nxP - (x^2 - 1)P') \leq n + 1$.

Vérifions que $\deg(nxP - (x^2 - 1)P') \leq n$. Isolons le terme de degré n dans P :

$$P = ax^n + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) \leq n - 1.$$

$$\begin{aligned} nxP - (x^2 - 1)P' &= nx(ax^n + R) - (x^2 - 1)(nax^{n-1} + R') \\ &= \cancel{nax^{n+1}} - \cancel{nax^{n+1}} + \underbrace{(nxR + nax^{n-1} - (x^2 - 1)R')}_{\in \mathbb{R}_n[x]}. \end{aligned}$$

Donc $\deg(nxP - (x^2 - 1)P') \leq n$; φ est une application $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$.

Montrons que φ est linéaire. Soient $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) &= nx(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) - (x^2 - 1)(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q)' \\ &= nx(\lambda \cdot P + \mu \cdot Q) - (x^2 - 1)(\lambda \cdot P' + \mu \cdot Q') \quad \left. \begin{array}{l} \text{linéarité de la} \\ \text{dérivation} \end{array} \right\} \\ &= \lambda \cdot (nxP - (x^2 - 1)P') + \mu \cdot (nxQ - (x^2 - 1)Q') \\ &= \lambda \cdot \varphi(P) + \mu \cdot \varphi(Q). \end{aligned}$$

Finalement

φ est endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.

2) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned}
 \varphi((x-1)^k) &= nx(x-1)^k - (x^2-1)k(x-1)^{k-1} \\
 &= nx(x-1)^k - k(x+1)(x-1)^k \quad \left. \vphantom{\varphi((x-1)^k)} \right\} (x^2-1) = (x-1)(x+1) \\
 &= (n-k)x(x-1)^k - k(x-1)^k \\
 &= (n-k)((x-1)+1)(x-1)^k - k(x-1)^k \\
 &= (n-k)(x-1)^{k+1} + (n-2k)(x-1)^k
 \end{aligned}$$

Précisons que pour $k = n$, on retrouve $\varphi((x-1)^n) = -n(x-1)^n$.

Pour $k = 0$: $\varphi((x-1)^0) = \varphi(1) = nx = n(x-1+1) = n(x-1)^1 + n(x-1)^0$.

Notons $A = (x-1)$. La matrice de φ dans la base $\mathcal{B} = (A^k)_{0 \leq k \leq n}$ est

$$\begin{array}{c}
 \varphi(A^0) \quad \varphi(A^1) \quad \dots \quad \varphi(A^k) \quad \dots \quad \varphi(A^n) \\
 \begin{array}{c}
 A^0 \\
 A^1 \\
 A^2 \\
 \vdots \\
 A^{k-1} \\
 A^k \\
 \vdots \\
 A^n
 \end{array}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{ccccccc}
 n & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 n & n-2 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 0 & n-1 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & \dots & n-2k & \dots & \dots & 0 \\
 0 & \dots & 0 & n-k & \dots & \dots & 0 \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -n
 \end{array} \right] = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi).$$

3) φ est bijectif si et seulement si la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est inversible. Or $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$ est triangulaire inférieure. Donc elle est inversible si et seulement si tous les coefficients de la diagonale sont différents de 0.

- Si n est pair. Alors $n = 2m$. Pour $k = m$, le coefficient de la diagonale est nul.
- Si n est impair, alors $n - 2k$ est toujours différent de 0.

Conclusion

φ est bijectif si et seulement si n est impair.

Exercice 9 Exemple d'endomorphisme cyclique

1) • **Initialisation.** $k = 1$. On suppose $f^0(y) \neq 0_E$, c'est-à-dire $y \neq 0_E$. Alors la famille (y) est libre. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie et prouvons $\mathcal{P}(k+1)$.

Soit $y \in E$ tel que $f^k(y) \neq 0_E$ et $f^{k+1}(y) = 0_E$. Montrons que $(y, f(y), \dots, f^k(y))$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que $\sum_{i=0}^k \lambda_i f^i(y) = 0_E$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k \lambda_i f^i(y) = 0_E &\Rightarrow f\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i f^i(y)\right) = f(0_E) \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^k \lambda_i f^{i+1}(y) = 0_E \\ &\Rightarrow \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f^{i+1}(y) = 0_E. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} f \text{ est linéaire} \\ f^{k+1}(y) = 0_E \end{array} \right\}$$

Posons $z = f(y)$.

Alors $z \in E$, $f^{k-1}(z) \neq 0_E$ (car $f^{k-1}(z) = f^k(y)$) et $f^k(z) = f^{k+1}(y) = 0_E$.

La propriété $\mathcal{P}(k)$ s'applique à n'importe quel vecteur de E . On peut donc l'appliquer au vecteur z . On en déduit que $(z, f(z), \dots, f^{k-1}(z))$ est libre. Or

$$\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f^i(z) = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i f^{i+1}(y) = 0_E.$$

Donc

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{k-1} = 0.$$

En remplaçant dans la combinaison linéaire du début, il vient : $\lambda_k f^k(y) = 0_E$.

Par hypothèse $f^k(y) \neq 0_E$, donc $\lambda_k = 0$.

On a donc montré que tous coefficients $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, k \rrbracket}$ sont nuls. La famille $(y, f(y), \dots, f^{k-1}(y))$ est libre.

Ainsi, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

• **Conclusion.**

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

- 2) D'après la question précédente la famille $\mathcal{B} = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre. Comme $\text{card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$,

$(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E .

- 3) Les images des vecteurs de cette base par f sont :

$$f(f^{n-1}(x)) = 0_E \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket, \quad f(f^i(x)) = f^{i+1}(x).$$

D'où la matrice de f dans cette base

$$\begin{array}{c} x \\ f(x) \\ f^2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ f^{n-1}(x) \end{array} \begin{bmatrix} f(x) & f^2(x) & \dots & f^{n-1}(x) & f^n(x) \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}_x}(f).$$

4) • Noyau

Soient $a \in E$ et (a_1, a_2, \dots, a_n) les coordonnées de a dans la base $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$. On note X la matrice colonne des coordonnées de a .

$$a \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow f(a) = 0_E \Leftrightarrow M \cdot X = 0_{n,1} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ \vdots \\ a_{n-1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = a_n \cdot f^{n-1}(x).$$

Donc $\text{Ker } f = \text{Vect}(f^{n-1}(x))$. Comme $f^{n-1}(x) \neq 0_E$,

$$(f^{n-1}(x)) \text{ est une base de } \text{Ker } f.$$

• Image

$B_x = (x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une base de E . Donc

$$\begin{aligned} \text{Im } f &= \text{Vect}(f(x), f(f(x)), \dots, f(f^{n-2}(x)), f(f^{n-1}(x))) \\ &= \text{Vect}(f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x), f^n(x)) \\ &= \text{Vect}(f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)). \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} f^n(x) = 0_E$$

La famille $(f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre (extraite de B_x qui est libre) et génératrice de $\text{Im } f$.

$$(f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)) \text{ est une base de } \text{Im } f.$$

Remarque

Le noyau est une droite vectorielle, l'image, un hyperplan.

Exercice 10

1) Démontrons par récurrence que la propriété $f^k \in G$ est vraie pour tout entier $k \geq m$.

• **Initialisation.** Soit $P(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$ un polynôme annulateur de f de degré m . Alors

$$P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)} \quad \text{donc} \quad a_m f^m = - \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k.$$

P étant de degré m , $a_m \neq 0$, donc $f^m = \frac{-1}{a_m} \sum_{k=0}^{m-1} a_k f^k \in G$.

La propriété est vraie au rang m .

- **Hérédité.** Soit $k \geq m$. On suppose que $f^k \in G$. Donc il existe $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ tel que $f^k = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i$. Alors,

$$f^{k+1} = f^k \circ f = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^{i+1} = \underbrace{\alpha_{m-1} f^m}_{\in G} + \sum_{i=0}^{m-2} \underbrace{\alpha_i f^{i+1}}_{\in G}.$$

On en déduit que $f^{k+1} \in G$ puisque G est stable par combinaison linéaire en tant que sous-espace vectoriel. Donc, si $f^k \in G$, alors $f^{k+1} \in G$.

- **Conclusion.**

$$\forall k \geq m, \quad f^k \in G.$$

- 2) Considérons $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ et $(\beta_i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ tels que

$$g = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i f^i \quad \text{et} \quad h = \sum_{i=0}^{m-1} \beta_i f^i.$$

Par linéarité de g

$$g \circ h = \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket^2} \alpha_i \beta_j \underbrace{f^{i+j}}_{\in E}.$$

D'où $g \circ h \in E$ car E est stable par combinaison linéaire.

On en déduit alors, par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}, g^k \in G.}$

- 3) $(f^i)_{i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket}$ est une famille génératrice de G , donc G est de dimension finie et

$$\dim(G) \leq m.$$

Alors $(g^i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ est une famille d'éléments de G et $\text{card}((g^i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}) > \dim(G)$. Donc cette famille est liée. Il existe des réels $(\beta_i)_{i \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^m \beta_i g^i = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

$$\boxed{Q(x) = \sum_{i=0}^m \beta_i x^i \text{ est un polynôme annulateur de } g \text{ avec } \deg(Q) \leq m.}$$

Comparaison des suites

24

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Dans chacun des exemples, déterminer un équivalent simple de $(u_n)_n$.

1) $u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 + 1}$

2) $u_n = \sqrt{n^2 + 1} + n$

3) $u_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$

4) $u_n = \ln\left(\frac{1 + e^{1/n}}{2}\right)$

5) $u_n = \sqrt{n} + \ln(1 + e^n)$

6) $u_n = e^{1/n} + 1/n^2 - e^{1/n}$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 2 * Soit u une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.
Montrer que u converge vers 0 et trouver un équivalent simple de u .

Exercice 3 * *Sommes de Riemann*

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Donner un équivalent simple de $\sum_{k=1}^n k^\alpha$.

2) Pour $a \in \mathbb{R}^+$, en déduire la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $\frac{1^{a+1} + 2^{a+1} + \dots + n^{a+1}}{n(1^a + 2^a + \dots + n^a)}$.

Exercice 4 ** Équivalent d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel n , on pose
$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n e^{-2t} dt.$$

1) Équivalent par encadrement.

- a) Justifier que pour tout $t \in [0,1]$, $1 - 2t \leq e^{-2t} \leq 1$.
 b) En déduire $I_n \sim 1/n$.

2) Équivalent à partir d'une relation de récurrence.

- a) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et en déduire la convergence vers une limite finie.
 b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+1} = \frac{1 - (n+1)I_n}{2}.$$

 c) En déduire la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et retrouver le résultat de la question 1 b).
 d) Montrer que la suite $\left(n^2 \left(I_n - \frac{1}{n} \right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, et préciser sa limite.
 e) À l'aide des questions précédentes, préciser trois réels a, b et c tels que

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} a + b \frac{1}{n} + c \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 5 ** Équivalent d'une suite implicite I

Considérons, pour tout entier naturel non nul n , l'équation :

$$1 + \ln(x+n) = x \quad (E_n).$$

On pose, pour x réel positif : $f_n(x) = 1 + \ln(x+n) - x$.

- 1) Montrer que (E_n) admet une unique solution a_n sur \mathbb{R}^+ .
 2) Vérifier que $a_n > 1 + \ln(n)$. Que peut-on en conclure pour la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?
 3) a) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(2 + \ln n)$.
 b) En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que pour $n > n_0$: $a_n < 2 + \ln(n)$.
 4) Conclure en prouvant $a_n \sim \ln(n)$.

Exercice 6 *** Équivalents de suites implicites II

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n(x) = x - n \ln(x).$$

- 1) a) Donner le graphe de f_n .

- b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant $0 < u_n < n < v_n$.

2) Étude de la suite $(u_n)_{n \geq 3}$.

- a) Vérifier que pour tout entier $n \geq 3$, $1 < u_n < e$.
 b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis, en conclure que $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
 c) En déduire que $(u_n)_{n \geq 3}$ converge. Puis, montrer, en raisonnant par l'absurde, que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

- d) Exprimer $\ln(u_n)$ en fonction de u_n et n . Montrer que $u_n - 1 \sim \frac{1}{n}$.

3) Étude de la suite $(v_n)_{n \geq 3}$.

- a) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.
 b) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$: $2 \ln(x) < x$.
 c) Soit $n \geq 3$. Montrer que $n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)$.
 d) En déduire : $v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)$.

Indication. Remarquer que $v_n = n \ln(v_n)$.

Exercice 7 *** Vitesse de convergence

Soit $b \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b^k}{b^k + 1}.$$

- 1) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
 En déduire que cette suite converge vers un nombre réel ℓ appartenant à l'intervalle $[0, 1/2]$. *On ne cherchera pas à expliciter ce nombre réel.*
 2) Vitesse de convergence de la suite (u_n) .
 a) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. Établir l'inégalité

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{b^k} \leq \frac{1}{b^{n-1}(b-1)}.$$

- b) Pour tout nombre réel x appartenant à $[0, 1]$, établir l'encadrement

$$1 + x \leq e^x \leq 1 + 2x.$$

- c) En déduire les inégalités $1 \leq \frac{u_n}{u_{n+p}} \leq \exp\left(\frac{1}{b^{n-1}(b-1)}\right)$.

- d) En faisant tendre p vers $+\infty$, démontrer que $0 \leq u_n - \ell \leq \frac{1}{(b-1)b^{n-1}}$.

- e) Conclure, pour tout $q \in]0, b[$, $u_n - \ell = o(q^{-n})$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8 * Contre-exemples?

Soient u, v deux suites réelles.

Les énoncés suivants sont faux, saurez-vous donner un contre-exemple ?

- 1) $u_{n+1} \sim u_n$.
- 2) Si $u_n \sim v_n$, alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.
- 3) Si $u_n \sim \frac{1}{n}$, alors la suite u est positive.
- 4) Si $u_n \sim \frac{1}{n}$, alors la suite u est décroissante à partir d'un certain rang.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

$$1) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^* : u_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{1}{n^2(n^2 + 1)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n^2} = \boxed{\frac{1}{n^4}}.$$

$$2) \text{ Pour } n \in \mathbb{N}^* : u_n = \sqrt{n^2 + 1} + n = |n| \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + n = n \left(\underbrace{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}_{\substack{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \\ (2 \neq 0)}} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \boxed{2n}.$$

$$3) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ On a } u_n = \sqrt{n^2 - 1} - n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \right).$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2} \end{array} \right\} \text{ Donc } \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\sqrt{n^2 + 1} - n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n}}.$$

$$4) \left. \begin{array}{l} \frac{1+e^{1/n}}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \\ \ln(X) \underset{X \rightarrow 1}{\sim} X-1 \end{array} \right\} \text{ donc } u_n = \ln\left(\frac{1+e^{1/n}}{2}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1+e^{1/n}}{2} - 1 = \frac{e^{1/n} - 1}{2}.$$

Or $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$, donc
$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\ln(1+e^n) = \ln(e^n(e^{-n}+1)) = n + \ln(e^{-n}+1)$.
On a $\ln(e^{-n}+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $\ln(e^{-n}+1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} o(n)$. On a aussi $\sqrt{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} o(n)$.
D'après les propriétés des équivalents :
$$\sqrt{n} + \ln(1+e^n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n.$$

6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = e^{1/n+1/n^2} - e^{1/n} = \underbrace{e^{1/n}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1} (e^{1/n^2} - 1) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{1/n^2} - 1.$

Enfin,
$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \\ e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \end{array} \right\} \text{ donc } u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^2}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 2

Comme la suite u est décroissante, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $u_{n-1} \geq u_n \geq u_{n+1}$, donc, en ajoutant u_n :

$$\begin{aligned} u_{n-1} + u_n &\geq 2u_n \geq u_n + u_{n+1} \\ \Rightarrow n(u_{n-1} + u_n) &\geq 2nu_n \geq n(u_n + u_{n+1}). \quad (\bullet) \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$, on sait que $n(u_n + u_{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Mais l'hypothèse donne aussi : $u_{n-1} + u_n \sim \frac{1}{n-1} \sim \frac{1}{n}$, donc $n(u_{n-1} + u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Finalement, on peut appliquer le *théorème d'encadrement* à partir de (\bullet) pour conclure que

$2nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, autrement dit :
$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

Exercice 3 Sommes de Riemann

1) Considérons la fonction $f : x \in [0,1] \mapsto x^\alpha$. La somme de Riemann d'ordre n s'écrit

$$T_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha = \frac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^n k^\alpha.$$

La fonction f est continue, les sommes de Riemann convergent avec

$$T_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t^\alpha dt = \left[\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^n k^\alpha \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}.$$

Remarque

On peut tester ce résultat avec $\alpha \in \{1,2\}$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \sim \frac{n^2}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \sim \frac{n^3}{3}.$$

- 2) Précisons un équivalent simple du numérateur et du dénominateur à l'aide du résultat précédent.

$$1^{a+1} + 2^{a+1} + \dots + n^{a+1} = \sum_{k=0}^n k^{a+1} \sim \frac{n^{a+2}}{a+2}$$

$$n(1^a + 2^a + \dots + n^a) = n \sum_{k=0}^n k^a \sim n \cdot \frac{n^{a+1}}{a+1}$$

Par quotient,
$$\frac{1^{a+1} + 2^{a+1} + \dots + n^{a+1}}{n(1^a + 2^a + \dots + n^a)} \sim \frac{\frac{n^{a+2}}{a+2}}{n \cdot \frac{n^{a+1}}{a+1}} = \frac{a+1}{a+2}.$$

La limite est donc
$$\frac{a+1}{a+2}.$$

Exercice 4 Équivalent d'une suite d'intégrales

- 1) a) Rappelons le graphe de la fonction exponentielle avec la tangente en 0. En particulier, pour $x \in \mathbb{R}^-$,

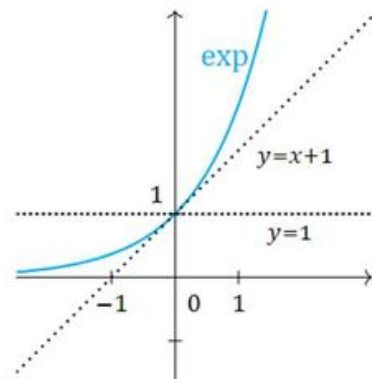
$$e^x < 1,$$

et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x \geq 1 + x.$$

Soit $t \in [0,1]$ en appliquant les deux inégalités précédentes à $-2t$, on a directement

$$1 - 2t \leq e^{-2t} \leq 1.$$



b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)^n \geq 0$,

$$1 - 2t \leq e^{-2t} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad (1-t)^n(1-2t) \leq (1-t)^n e^{-2t} \leq (1-t)^n.$$

Par croissance de l'intégrale ($0 < 1$), $\int_0^1 (1-t)^n(1-2t) dt \leq I_n \leq \int_0^1 (1-t)^n dt$.

Calculons ces deux intégrales. Dans un premier temps,

$$J_n = \int_0^1 (1-t)^n dt = \left[\frac{-(1-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \quad (\bullet)$$

Puis,

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t)^n(1-2t) dt &= \int_0^1 (1-t)^n((2-2t)-1) dt && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{par linéarité} \\ &= 2J_{n+1} - J_n \\ &= \frac{2}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{(n+2)(n+1)}. \end{aligned}$$

En résumé, nous obtenons l'encadrement,

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \quad \xrightarrow{\times n > 0} \quad \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \leq nI_n \leq \frac{n}{n+1}.$$

Comme le membre de gauche et celui de droite tendent vers 1 lorsque $n \rightarrow +\infty$, on trouve par le *théorème d'encadrement*,

$$nI_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \quad \text{c'est-à-dire,} \quad \boxed{I_n \sim \frac{1}{n}}$$

2) a)

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^{-2t} dt - \int_0^1 (1-t)^n e^{-2t} dt \\ &= \int_0^1 (1-t)^n (1-t-1) e^{-2t} dt = - \int_0^1 \underbrace{t(1-t)^n e^{-2t}}_{>0} dt \\ &\leq 0 \quad \text{par positivité de l'intégrale.} \end{aligned}$$

Conclusion

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

De nouveau, par positivité de l'intégrale, $I_n \geq 0$. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée (par 0). D'après le *théorème de convergence monotone*,

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Intégrons par parties. Pour $x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} u(x) &= -\frac{1}{2}e^{-2x} \\ v(x) &= (1-x)^{n+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) &= e^{-2x} \\ v'(x) &= -(n+1)(1-x)^n. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0,1]$.

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} (1-x)^{n+1} \right]_0^1 - \frac{n+1}{2} \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx.$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} I_n.$$

c) D'après la question 2 a), nous savons que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Notons ℓ sa limite. Reformulons la relation précédente,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = \frac{1 - (n+1)I_n}{2} \quad \Rightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{2I_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n.$$

Passons à la limite dans cette relation, $0 \cdot \ell = 0 - \ell$. Finalement, $\ell = 0$,

La suite (I_n) tend vers 0.

De nouveau, $2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$. Donc $nI_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Autrement dit,

$$I_n \sim \frac{1}{n}.$$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu que $nI_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n$. Donc

$$\begin{aligned} n^2 \left(I_n - \frac{1}{n} \right) &= n(nI_n - 1) = n(-2I_{n+1} - I_n) = -2 \frac{n}{n+1} (n+1)I_{n+1} - nI_n \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2 - 1 = \boxed{-3}. \end{aligned}$$

e) On reformule : $n^2 \left(I_n - \frac{1}{n} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -3 + o(1)$ et

$$I_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 5 Équivalent d'une suite implicite I

- 1) La fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R}^+ en tant que somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R}^+ .
Pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$f_n'(x) = \frac{1}{x+n} - 1 = \frac{1-n-x}{n+x}.$$

On constate que f_n' est strictement négative sur l'intervalle \mathbb{R}^+ car $n \in \mathbb{N}^*$.
 f_n est strictement décroissante sur \mathbb{R}^+ . De plus,

$$f_n(0) = 1 + \ln(n) > 0 \quad \text{et} \quad f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty \quad (\text{croissances comparées}).$$

f_n est continue sur \mathbb{R}^+ , le théorème de la bijection s'applique.

Il existe une unique solution strictement positive à l'équation $f_n(x) = 0$. Cette unique solution est l'unique solution de (E_n) .

- 2) Calculons

$$\begin{aligned} f_n(1 + \ln(n)) &= 1 + \ln(1 + \ln(n) + n) - 1 - \ln(n) \\ &= \ln(1 + \ln(n) + n) - \ln(n) = \ln\left(\frac{1 + \ln(n) + n}{n}\right). \end{aligned}$$

Comme $\frac{1 + \ln(n) + n}{n} = 1 + \frac{1 + \ln(n)}{n} > 1$, et $f_n(1 + \ln(n)) > 0$.

$$f_n(1 + \ln(n)) > 0 = f_n(a_n) \xrightarrow{f_n \text{ strict}^+ \text{ déc.}} 1 + \ln(n) < a_n.$$

- On a $1 + \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, par minoration, $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

- 3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$f_n(2 + \ln(n)) = 1 + \ln(2 + \ln(n) + n) - 2 - \ln(n) = \ln\left(1 + \frac{2 + \ln(n)}{n}\right) - 1.$$

Or, par les croissances comparées, $\frac{2 + \ln(n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

et la continuité de \ln en 1, $\ln\left(1 + \frac{2 + \ln(n)}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0$.

Concluons

$$\boxed{f_n(2 + \ln(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -1.}$$

- b) Par définition de la limite, il existe un entier n_0 tel que pour $n > n_0$, $f_n(2 + \ln n) < 0$.
De nouveau,

$$f_n(2 + \ln(n)) < 0 = f_n(a_n) \xrightarrow{f_n \text{ strict}^+ \text{ déc.}} 2 + \ln(n) > a_n.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ avec $n \geq n_0$,

$$1 + \ln(n) \leq a_n \leq 2 + \ln(n) \Rightarrow 1 + \frac{1}{\ln(n)} \leq \frac{a_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{2}{\ln(n)}$$

Par encadrement, $\frac{a_n}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, c'est-à-dire, $a_n \sim \ln(n)$.

Exercice 6 Équivalents de suites implicites II

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est dérivable sur \mathbb{R}_+^* par combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n'(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$.

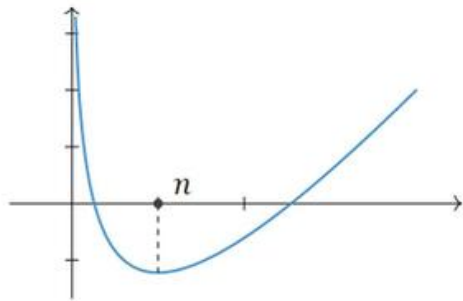
$f_n'(x)$ est du signe de $x - n$.

$\lim_0 f_n = +\infty$ (pas de F.I.).

$\lim_{+\infty} f_n = +\infty$ (par croissances comparées).

f_n est strictement décroissante sur $]0, n]$ et strictement croissante sur $[n, +\infty[$. f_n admet un minimum :

$$m_n = f_n(n) = n(1 - \ln(n)) = -n \ln\left(\frac{n}{e}\right).$$



b) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$. Alors $\frac{n}{e} > 1$, et le minimum est strictement négatif.

La fonction f_n est continue sur \mathbb{R}_+^* , strictement décroissante sur $]0, n]$, strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

- D'après le théorème de la bijection, la restriction de f_n à $]0, n]$ réalise une bijection de $]0, n]$ vers $[f_n(n), \lim_0 f_n[= [m_n, +\infty[$.

$0 \in [m_n, +\infty[$ (car $m_n < 0$). Donc il existe un unique $u_n \in]0, n]$ tel que $f_n(u_n) = 0$. De plus $u_n < n$ car $m_n \neq 0$.

- D'après le théorème de la bijection, la restriction de f_n à $[n, +\infty[$ réalise une bijection de $[n, +\infty[$ vers $[f_n(n), \lim_{+\infty} f_n[= [m_n, +\infty[$.

Or $0 \in [m_n, +\infty[$ (car $m_n < 0$).

Donc il existe un unique $v_n \in [n, +\infty[$ tel que $f_n(v_n) = 0$. De plus $v_n > n$ car $m_n \neq 0$.

Conclusion :

Il existe deux réels u_n et v_n solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiant

$$0 < u_n < n < v_n.$$

2) a) Soit $n \geq 3$. On a $f_n(e) = e - n \ln(e) = e - n < 0$ et $f_n(1) = 1 - n \ln(1) = 1 > 0$.

Comme $f_n(u_n) = 0$, on a $f_n(e) < f_n(u_n) < f_n(1)$.

Soit $(x, y) \in]0, n]^2$. f_n est décroissante sur $]0, n]$. Donc : $x \leq y \Rightarrow f_n(x) \geq f_n(y)$.

Avec la contraposée, on a : $f_n(x) < f_n(y) \Rightarrow x > y$.

On a $(1, u_n, e) \in]0, n]^3$ et $f_n(e) < f_n(u_n) < f_n(1)$; donc $1 < u_n < e$.

Remarque

On peut aussi raisonner par l'absurde pour montrer que $1 < u_n < e$.

- b) Soit $n \geq 3$. Par définition de u_{n+1} , on a $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. D'où $u_{n+1} = (n+1) \ln(u_{n+1})$.
 Alors $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} - n \ln(u_{n+1}) = (n+1) \ln(u_{n+1}) - n \ln(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$.
 Or $u_{n+1} > 1$. Donc $f_n(u_{n+1}) > 0$; d'où $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$.
 D'après la question 2 a), $1 < u_{n+1} < e$; donc $u_{n+1} \in]0, n]$.
 Comme à la question précédente, la décroissance de f_n sur $]0, n]$ donne $u_{n+1} < u_n$.
 Conclusion : La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.

- c) La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante, minorée par 1. Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(u_n)_{n \geq 3}$ converge vers une limite finie $\ell \geq 1$.

Raisonnons par l'absurde en supposant $\ell > 1$. Alors, la fonction \ln étant continue sur \mathbb{R}_+^* , $\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell) > 0$. D'où $n \ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Mais, on a aussi $u_n = n \ln(u_n)$ car $f_n(u_n) = 0$. C'est en contradiction avec $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et l'unicité de la limite.

- d) La relation $f_n(u_n) = 0$ donne $\ln(u_n) = \frac{u_n}{n}$. Or :
- D'après les équivalents usuelles, avec $u_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

$$\ln(u_n) = \ln(1 + (u_n - 1)) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n - 1.$$

- De plus, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$ implique $\frac{u_n}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Finalement,

$$u_n - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

- 3) a) On sait que $v_n \geq n$. Par le théorème de minoration,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

- b) Posons $g(x) = x - 2 \ln(x)$. Pour tout $x > 1$, $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$.

Donc $g'(x)$ est du signe de $x - 2$. La fonction g est décroissante sur $]1, 2]$, croissante sur $[2, +\infty[$. La valeur $g(2) = 2 - 2 \ln(2) > 0$ (car $\ln(2) < 1$) est le minimum de g sur $]1, +\infty[$. En conséquence, $g(x) > 0$ pour tout $x > 1$.

Conclusion

$$\text{Pour tout } x \in]1, +\infty[: 2 \ln(x) < x.$$

c) On s'inspire de la question 2. Soit $n \geq 3$.

$$f_n(n \ln(n)) = n \ln(n) - n \ln(n \ln(n)) = -n \ln\left(\frac{n \ln(n)}{n}\right) = -n \ln(\ln(n)) < 0,$$

car $n \geq 3 > e$.

$$\text{Et, } f_n(2n \ln(n)) = 2n \ln(n) - n \ln(2n \ln(n)) = n \ln\left(\frac{n^2}{2n \ln(n)}\right) = n \ln\left(\frac{n}{2 \ln(n)}\right).$$

Or, pour $x > 1$, on a $x > 2 \ln(x)$.

Donc $\frac{n}{2 \ln(n)} > 1$ (car $n > 1$ et $\ln(n) > 0$). D'où $f_n(2n \ln(n)) > 0$.

Ainsi, $f_n(n \ln(n)) < f_n(v_n) < f_n(2n \ln(n))$. Or la fonction f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$. Comme $n \geq 3$, on a $\ln(n) > 1$, donc $n < n \ln(n)$ et $n < 2n \ln(n)$.

Par croissance de f_n , il vient

$$\boxed{n \ln(n) < v_n < 2n \ln(n)}.$$

d) Soit $n \geq 3$. On a $f_n(v_n) = 0$. Donc $v_n = n \ln(v_n)$.

D'après c) et par croissance de \ln : $\ln(n \ln(n)) \leq \ln(v_n) \leq \ln(2n \ln(n))$.

En divisant par $\ln(n) > 0$: $\frac{\ln(n) + \ln(\ln(n))}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(n) + \ln(2 \ln(n))}{\ln(n)}$.

Soit $1 + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \leq \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{\ln(2)}{\ln(n)} + \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)}$.

Par les *croissances comparées* et composition de limites : $\frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

D'après le *théorème d'encadrement*, et le début de cette question

$$\frac{v_n}{n \ln(n)} = \frac{\ln(v_n)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Conclusion :

$$\boxed{v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)}.$$

Exercice 7 Vitesse de convergence

1) u est une suite strictement positive. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=0}^n \frac{b^k}{b^{k+1}}}{\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b^k}{b^{k+1}}} = \frac{b^n}{b^n + 1} < 1.$$

Ainsi, $u_{n+1} < u_n$.

$\boxed{\text{La suite } u \text{ est décroissante.}}$

De plus, la suite est minorée par 0. D'après le *théorème de la convergence monotone*, la suite converge vers une limite finie ℓ .

Comme, u est positive, décroissante avec $u_0 = 1/2$, $\ell \in [0, \frac{1}{2}]$.

2) a) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$. On reconnaît une somme géométrique de raison $1/b \neq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{b^k} &= \sum_{k=n}^{n+p-1} \left(\frac{1}{b}\right)^k && \text{changement d'indice } i = k - n \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{1}{b}\right)^{n+i} \\ &= \frac{1}{b^n} \sum_{i=0}^{p-1} \left(\frac{1}{b}\right)^i && \text{somme géométrique} \\ &= \frac{1}{b^n} \frac{1 - (1/b)^p}{1 - (1/b)} \\ &= \frac{1}{b^{n-1}} \frac{1 - (1/b)^p}{b - 1} && \text{simplification} \end{aligned}$$

Comme $-(1/b)^p < 0$ et $b - 1 > 0$,

$$\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{b^k} \leq \frac{1}{b^{n-1}(b-1)}.$$

b) Introduisons, pour $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = e^x - (1 + x) \quad \text{et} \quad g(x) = e^x - (1 + 2x).$$

f et g sont dérivables sur $[0, 1]$ par différence de fonctions dérivables sur $[0, 1]$ et

$$f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad g'(x) = e^x - 2.$$

f est donc croissante sur l'intervalle $[0, 1]$. Comme $f(0) = 0$, f est positive sur $[0, 1]$.

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad e^x \geq 1 + x.$$

g' est strictement croissante sur $[0, 1]$ avec $g'(0) = -1 < 0$ et $g'(1) = e - 2 > 0$.

g' est continue, il existe une unique valeur α telle que $g'(\alpha) = 0$.

g' est alors négative sur $[0, \alpha]$ et positive sur $[\alpha, 1]$. Par conséquent, g est décroissante sur $[0, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, 1]$. Le maximum de g est donc en 0 ou en 1. Or,

$$g(0) = -1 \quad \text{et} \quad g(1) = e - 2 < 0.$$

Le maximum est négatif, et g est une fonction négative.

$$\forall x \in [0, 1], \quad g(x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad e^x \leq 1 + 2x.$$

- c) Comme la suite u est décroissante, pour $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, $\frac{u_n}{u_{n+p}} \geq 1$.
 Soit $k \in \mathbb{N}$, on a vu à la question 1),

$$\frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{b^k + 1}{b^k} = 1 + \frac{1}{b^k}.$$

En appliquant l'inégalité de gauche précédente à $x = 1/b^k \in [0,1]$,

$$1 + \frac{1}{b^k} \leq e^{1/b^k} \Rightarrow \frac{u_k}{u_{k+1}} \leq e^{1/b^k}.$$

Par produit télescopique de termes positifs et croissance de l'exponentielle,

$$\frac{u_n}{u_{n+p}} = \prod_{k=n}^{n+p-1} \frac{u_k}{u_{k+1}} \leq \prod_{k=n}^{n+p-1} e^{1/b^k} = \exp\left(\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{b^k}\right) \leq \exp\left(\frac{1}{b^{n-1}(b-1)}\right).$$

- d) Redonnons l'encadrement de la question précédente

$$1 < \frac{u_n}{u_{n+p}} < \exp\left(\frac{1}{b^{n-1}(b-1)}\right).$$

Puis, en utilisant l'inégalité de droite de la question 2 b) avec $\frac{1}{b^{n-1}(b-1)} \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} 1 &< \frac{u_n}{u_{n+p}} < 1 + 2\frac{1}{b^{n-1}(b-1)} \\ \Rightarrow u_{n+p} &\leq u_n \leq u_{n+p} + 2u_{n+p}\frac{1}{b^{n-1}(b-1)} \\ \Rightarrow \ell &\leq u_n \leq \ell + 2\ell\frac{1}{b^{n-1}(b-1)} \\ \Rightarrow 0 &\leq u_n - \ell \leq \frac{1}{b^{n-1}(b-1)}. \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} u_{n+p} > 0 \\ \text{par passage à la limite} \\ p \rightarrow +\infty \\ \ell < 1/2 \end{array} \right\}$$

- e) Soit $q \in]0,b[$. L'encadrement précédent implique

$$0 \leq q^n(u_n - \ell) \leq \frac{q^n}{b^{n-1}(b-1)} = \frac{b}{b-1} \cdot \left(\frac{q}{b}\right)^n.$$

Comme $q/b \in]-1,1[$, $(q/b)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et par le théorème d'encadrement,

$$q^n(u_n - \ell) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \text{c'est-à-dire, } \boxed{u_n - \ell = o(q^{-n})}.$$

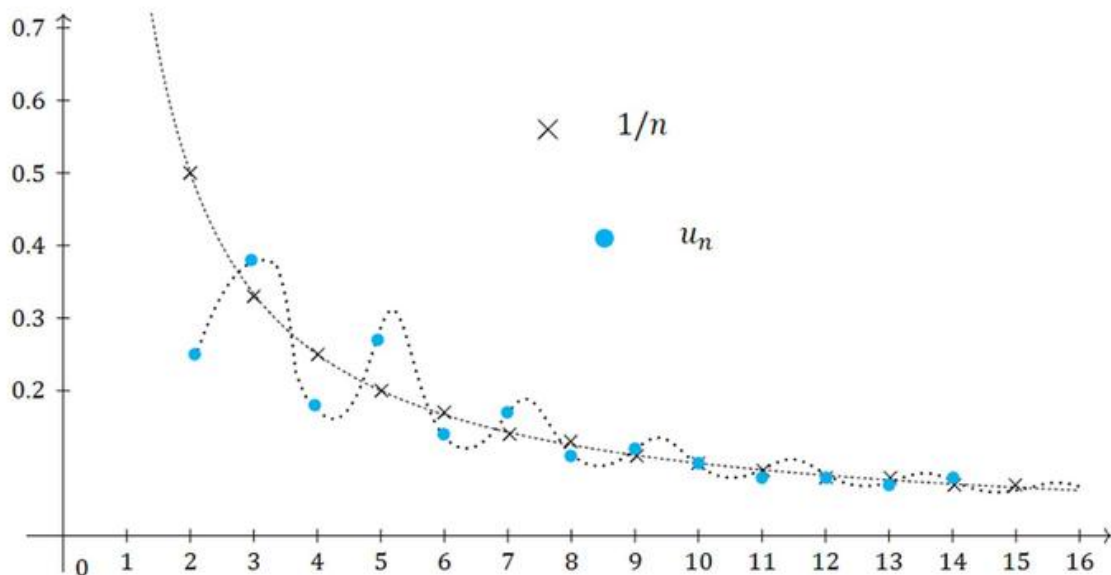
✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8) Contre-exemples?

- 1) Considérer la suite de terme général $u_n = n!$.
- 2) Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n + 1$ et $v_n = n$. On a

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 1, \quad \text{mais} \quad \frac{e^{u_n}}{e^{v_n}} = e^{u_n - v_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} e \neq 1.$$

- 3) Un énoncé juste sera : Si $u_n \sim \frac{1}{n}$, alors la suite u est positive à partir d'un certain rang. Par exemple, la suite u , définie par $u_n = -1$ pour $n \leq 100$, et $u_n = 1/n$ ensuite est équivalente à $1/n$ sans être positive.
- 4) Illustrons la situation par un schéma. L'idée est de faire osciller les termes de la suite u autour de ceux de $(1/n)$ afin de garder l'équivalent sans garder la décroissance.



Pour un contre-exemple avec une formule explicite, on peut considérer la suite u de terme général

$$u_n = \frac{1}{n + 2 \cdot (-1)^n} \quad \text{où} \quad n \geq 2.$$

Comparaison de fonctions

25

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Donner un équivalent simple des expressions suivantes.

- 1) $\ln(2(e^x + e^{-x^3}))$ en $+\infty$ 3) $\frac{(2+x)x^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{x}\sin(4\sqrt{x})}$ en 0^+ 5) $\frac{(e^x-1)\sin^2(x)}{3x^2 + \arctan(x^4)}$ en 0
2) $\frac{1 - \cos(x)(1+2x)}{x^2 - x^3}$ en 0 4) $\sqrt{\cos(x)} - 1$ en 0 6) $\frac{\sin(3x)}{3x}$ en $\frac{\pi}{3}$.

Exercice 2 ** Déterminer les limites suivantes.

- 1) $\frac{7x^7 - 1}{x^7}$ en 0 3) $\frac{\cos(2x) - 1}{\sin^2(x)}$ en 0 5) $\frac{e^x - x^2 - \cos(x)}{\ln(1+x^2)}$ en 0^+ .
2) $xe^{\frac{1}{x}} - x$ en $+\infty$ 4) $\frac{\sin(4x)}{\sin(2x)}\cos(x)$ en 0

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3 *

- 1) Donner un équivalent simple de la fonction arctangente en 0 .
2) Simplifier l'expression $\arctan(x) + \arctan(1/x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.
3) En déduire un équivalent de $\frac{\pi}{2} - \arctan(x)$ en $+\infty$.

Exercice 4 ** *équivalent de l'application réciproque*

- 1) On définit $f : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x e^{x^2}$. Justifier que f est une bijection de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ .
 2) Déterminer deux réels a, b tels que

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow e}{\sim} a + b(x - e) + o(x - e).$$

- 3) a) Donner un équivalent simple de $f^{-1}(y)$ lorsque $y \rightarrow +\infty$.
 b) Même question lorsque $y \rightarrow 0$.

Exercice 5 ** Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a et à valeurs strictement positives.

- 1) On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$. Justifier que $\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))$.
 2) *Application.* En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\ln(x^7 + 3e^x + 2e^{x^2})$.
 3) a) Vérifier que la conclusion de la question 1 demeure si on suppose maintenant que $f \underset{a}{\sim} g$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
Indication. On distinguera le cas $\ell = 0^+$.
 b) Que dire si $\ell = 1$?

Exercices avec questions ouvertes**Exercice 6** * *Vrai ou faux?*

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x} + x \sin(1/x)) \exp(x^2 + \ln(3x^4 + 2x^2))}{\cos(x) \frac{(1 - \cos(\sqrt{x}))}{\sin(x)} 4x(2x + 3 \ln(1 + x) + \sqrt{x})} \underset{0^+}{\sim} x.$$

Exercice 7 ** *Investissement immobilier*

Pour un crédit de n mensualités de m (euros) d'un emprunt d'un capital C_0 à taux q , on a démontré à l'exercice 11 du chapitre 11 la relation $m = q C_0 \frac{(1+q)^n}{(1+q)^n - 1}$.

On définit alors le coût du crédit, noté K , comme la différence entre la somme des mensualités et le capital emprunté.

- 1) Justifier que $K \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{(n+1)C_0 q}{2}$.

Indication. On pourra justifier que

$$(1+q)^n \underset{q \rightarrow 0}{\sim} 1 + nq + \frac{n(n-1)}{2} q^2 + o(q^2).$$

- 2) Toutes choses égales par ailleurs, est-il préférable de prendre un crédit à 1,7% sur 10 ans ou un crédit à 0,6% sur 25 ans?

Indication. Donner une approximation du coût des crédits sans utiliser la calculatrice.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) On a

$$\begin{aligned}\ln(2(e^x + e^{-x^3})) &= \ln(2e^x(1 + e^{-x^3-x})) \\ &= \ln(2) + \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x^3-x}) = \ln(2) + x + \ln(1 + e^{-x^3-x}).\end{aligned}$$

Or, par composition, $\ln(1 + e^{-x^3-x}) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

En particulier, $\ln(2) + \ln(1 + e^{-x^3-x}) \underset{+\infty}{=} o(x)$.

Conclusion

$$\boxed{\ln(2(e^x + e^{-x^3})) \underset{+\infty}{\sim} x.}$$

2) étudions le numérateur

$$1 - \cos(x)(1 + 2x) = (1 - \cos(x))(1 + 2x) - 2x.$$

Or, $(1 - \cos(x))(1 + 2x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \cdot 1 = \frac{x^2}{2}$.

Ainsi, $(1 - \cos(x))(1 + 2x) \underset{0}{=} o(x)$ et $1 - \cos(x)(1 + 2x) \underset{0}{\sim} -2x$.

Pour le dénominateur, $x^3 \underset{0}{=} o(x^2)$, donc $x^2 - x^3 \underset{0}{\sim} x^2$. Finalement, par quotient,

$$\frac{1 - \cos(x)(1 + 2x)}{x^2 - x^3} \underset{0}{\sim} \frac{-2x}{x^2} = \boxed{-\frac{2}{x}}.$$

3) Par produit, le numérateur est

$$(2 + x)x^2\sqrt{3x^2 + 4} \underset{0^+}{\sim} 2 \cdot x^2 \cdot \sqrt{4} = 4x^2$$

et le dénominateur est $\sqrt{x} \sin(4\sqrt{x}) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{x} \cdot 4\sqrt{x} = 4x$.

Par quotient $\frac{(2 + x)x^2\sqrt{3x^2 + 4}}{\sqrt{x} \sin(4\sqrt{x})} \underset{0^+}{\sim} \frac{4x^2}{4x} = \boxed{x}.$

4) Pour x dans un voisinage de 0,

$$\sqrt{\cos(2x)} - 1 = \frac{(\sqrt{\cos(2x)} - 1)(\sqrt{\cos(2x)} + 1)}{\sqrt{\cos(2x)} + 1} = -\frac{1 - \cos(2x)}{\sqrt{\cos(2x)} + 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1 - \cos(2x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \\ \sqrt{\cos(2x)} + 1 \underset{0}{\sim} 2 \end{array} \right\} \text{ d'où } \boxed{\sqrt{\cos(2x)} - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{4}}$$

5) On démontre à l'exercice 3

$$\arctan(x) \underset{0}{\sim} x, \text{ puis, } \arctan(x^4) \underset{0}{\sim} x^4.$$

$$\left. \begin{array}{l} 3x^2 + \underbrace{\arctan(x^4)}_{=o(x^2)} \underset{0}{\sim} 3x^2 \\ (e^x - 1) \sin^2(x) \underset{0}{\sim} x \cdot x^2 = x^3 \end{array} \right\} \text{ d'où } \boxed{\frac{(e^x - 1) \sin^2(x)}{3x^2 + \arctan(x^4)} \underset{0}{\sim} \frac{x}{3}}$$

6) On a directement, $3x \underset{\pi/3}{\sim} \pi$. De plus, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $h = x - \pi/3$.

$$\sin(3x) = \sin\left(3\left(h + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \sin(3h + \pi) = -\sin(3h).$$

Or, lorsque $x \rightarrow \pi/3$, $h \rightarrow 0$,

$$\sin(3x) = -\sin(3h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} -3h = -3\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Concluons

$$\boxed{\frac{\sin(3x)}{3x} \underset{\pi/3}{\sim} \frac{\pi - 3x}{\pi}}$$

Exercice 2

1) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{7^{x^7} - 1}{x^7} = \frac{\overset{-0}{e^{x^7 \ln(7)}} - 1}{x^7} \underset{0}{\sim} \frac{x^7 \ln(7)}{x^7} = \ln(7).$$

On obtient

$$\boxed{\frac{7^{x^7} - 1}{x^7} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(7)}.$$

2) On a

$$xe^{1/x} - x = x(e^{\overset{-0}{1/x}} - 1) \underset{+\infty}{\sim} x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{xe^{1/x} - x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}.$$

3) Puis,

$$\frac{\cos(2x) - 1}{\sin^2(x)} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2} \cdot \frac{(2x)^2}{x^2} = -2 \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\cos(2x) - 1}{\sin^2(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -2.}$$

4) Et,

$$\frac{\sin(4x)}{\sin(2x)} \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{4x}{2x} \cdot 1 = 2 \quad \text{donc} \quad \boxed{\frac{\sin(4x)}{\sin(2x)} \cos(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2.}$$

5) Soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned} \frac{(e^x - x^2 - \cos(x))}{\ln(1 + x^2)} &= \frac{((e^x - 1) + (1 - \cos(x)) - x^2)}{\ln(1 + x^2)} \\ &= \frac{e^x - 1}{\ln(1 + x^2)} + \frac{1 - \cos(x)}{\ln(1 + x^2)} - \frac{x^2}{\ln(1 + x^2)}. \end{aligned}$$

Or, on a les équivalents,

$$\begin{aligned} \ln(1 + x^2) &\underset{0}{\sim} x^2; \\ e^x - 1 &\underset{0}{\sim} x; \\ 1 - \cos(x) &\underset{0}{\sim} x^2/2. \end{aligned}$$

Par quotient, $\frac{e^x - 1}{\ln(1 + x^2)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$, $\frac{1 - \cos(x)}{\ln(1 + x^2)} \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$ et $\frac{x^2}{\ln(1 + x^2)} \underset{0}{\sim} 1$.

Par compatibilité des équivalents avec les limites,

$$\boxed{\frac{e^x - x^2 - \cos(x)}{\ln(1 + x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.}$$



Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3

1) La fonction arctangente est dérivable en 0 avec :

$$\arctan(0) = 0 \quad \text{et} \quad \arctan'(0) = \frac{1}{1 + 0^2} = 1.$$

Par définition du nombre dérivé, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\arctan(x) \underset{0}{=} 0 + \arctan'(0)(x - 0) + o(x) \underset{0}{=} x + o(x).$$

C'est-à-dire,

$$\boxed{\arctan(x) \underset{0}{\sim} x.}$$

2) Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \arctan(x) + \arctan(1/x)$.

Comme la fonction arctangente est dérivable sur \mathbb{R} et la fonction inverse $x \mapsto 1/x$ est dérivable sur \mathbb{R}^* à valeur dans \mathbb{R} , la fonction f est dérivable sur \mathbb{R}^* par somme et composition. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1+(1/x)^2} = 0.$$

Pourtant la fonction f n'est pas constante car \mathbb{R}^* n'est pas un intervalle. Par contre, d'après le théorème précédent, f est constante sur l'intervalle $] -\infty; 0[$ et sur l'intervalle $]0; +\infty[$. Or

$$f(1) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad f(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad \left(\text{car } \arctan(1) = -\arctan(-1) = \frac{\pi}{4}\right).$$

Finalement,
$$\arctan(x) + \arctan(1/x) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } x > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

3) Pour $x \in \mathbb{R}_+^+$, d'après les questions précédentes

$$\frac{\pi}{2} - \arctan(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \boxed{\frac{1}{x}} \quad \text{car } \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 4) équivalent de l'application réciproque

1) f est dérivable sur \mathbb{R}^+ par produit de fonctions dérivables. Pour $x \in \mathbb{R}^+$

$$f'(x) = x \cdot 2xe^{x^2} + 1 \cdot e^{x^2} = (2x^2 + 1)e^{x^2} > 0.$$

f est strictement croissante, continue sur l'intervalle \mathbb{R}^+ avec

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

D'après le théorème de la bijection,

$$f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } \mathbb{R}^+.$$

2) Précisons que $f(1) = e$, $f^{-1}(e) = 1$. On a $f'(1) \neq 0$, d'après le théorème de dérivation des applications réciproques, f^{-1} est dérivable en $e = f(1)$ avec

$$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{f'(f^{-1}(e))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{3e}.$$

La définition de la dérivée donne

$$f^{-1}(y) \underset{e}{=} f^{-1}(e) + (f^{-1})'(e)(y - e) + o(y - e),$$

$$f^{-1}(y) \underset{e}{=} 1 + \frac{1}{3e}(y - e) + o(y - e).$$

3) a) Soit $y \in \mathbb{R}^+$, posons $x = f^{-1}(y)$. On a

$$y = f(x) \Rightarrow y = xe^{x^2} \Rightarrow \ln(y) = \ln(x) + x^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2.$$

Par élévation à la puissance $1/2$, $\sqrt{\ln(y)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

Comme $x \rightarrow +\infty$ si et seulement si $y \rightarrow +\infty$,

$$\boxed{f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\ln(y)}}.$$

b) On a $f(0) = 0$, $f^{-1}(0) = 0$. De plus,

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1.$$

Or, par définition de la dérivée

$$\frac{f^{-1}(y)}{y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y - 0} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} (f^{-1})'(0) = 1 \neq 0,$$

donc

$$\boxed{f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y}.$$

Exercice 5

Remarque

Précisons que la condition $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ avec $\ell = +\infty$ ou $\ell \in \mathbb{R}_*^+$ impose que g est strictement positive dans un voisinage de a . Par l'équivalent $f \underset{a}{\sim} g$, f est strictement positive dans un voisinage de a . Dans ces cas, les fonctions $x \mapsto \ln(f(x))$ et $x \mapsto \ln(g(x))$ sont bien définies dans un voisinage de a .

Si $\ell \neq 1$, g ne prend pas la valeur 1 dans un voisinage de a et $\ln(g(x)) \neq 0$ sur ce voisinage.

1) On a

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} - 1 = \frac{\ln(f(x)) - \ln(g(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln(f(x)/g(x))}{\ln(g(x))}.$$

Comme $f(x)/g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$ et \ln est continue en 1, $\ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ln(1) = 0$.

De plus, par composition, $\ln(g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$, et

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} - 1 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Dit autrement,
$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1.$$

C'est-à-dire,
$$\boxed{\ln(f(x)) \underset{a}{\sim} \ln(g(x))}.$$

2) On vérifie que $x^7 + 3e^x + 2e^{x^2} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{x^2}$ et $2e^{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. Grâce à la question précédente,
$$\ln(x^7 + 3e^x + 2e^{x^2}) \underset{+\infty}{\sim} \ln(2e^{x^2}) = \ln(2) + x^2.$$

Ainsi,
$$\boxed{\ln(x^7 + 3e^x + 2e^{x^2}) \underset{+\infty}{\sim} x^2}.$$

3) a) • Si $\ell \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0; 1\}$.

On a
$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell.$$

Comme la fonction logarithme est continue en ℓ ,

$$\ln(g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ln(\ell) \quad \text{et} \quad \ln(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ln(\ell).$$

Or, $\ell \neq 1$, $\ln(\ell) \neq 0$, et
$$\boxed{\ln(g(x)) \underset{a}{\sim} \ln(f(x))}.$$

• Si $\ell = 0^+$.

$$\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \frac{(\ln(f(x)) - \ln(g(x))) + \ln(g(x))}{\ln(g(x))} = \frac{\ln(f(x)/g(x))}{\ln(g(x))} + 1.$$

Par composition,
$$\begin{cases} \ln(y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} -\infty \\ g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0^+ \end{cases} \quad \text{donc} \quad \ln(g(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty.$$

De plus, par continuité du logarithme en 1,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1, \quad \text{donc} \quad \ln\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ln(1) = 0.$$

Ainsi,
$$\frac{\ln(f(x)/g(x))}{\ln(g(x))} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \quad \text{et} \quad \frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1.$$

Finalement,
$$\boxed{\ln(g(x)) \underset{a}{\sim} \ln(f(x))}.$$

b) Le résultat n'est plus valable dans le cas où $\ell = 1$. Donnons un contre-exemple.

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, $a = 0$, $f(x) = 1 + x$, $g(x) = 1 + x^2$.

On a bien $f(x) \underset{0}{\sim} g(x)$, pourtant, $\ln(f(x)) = \ln(1 + x) \underset{0}{\sim} x$.

Et $\ln(g(x)) = \ln(1 + x^2) \underset{0}{\sim} x^2$.

Finalement, on a bien $f(x) \underset{0}{\sim} g(x)$ mais $\ln(f(x)) \not\sim \ln(g(x))$.

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 6 Vrai ou faux?

Vrai.

Donnons un équivalent simple de chacun des facteurs.

On a l'encadrement, pour $x \in \mathbb{R}_+^+$, $\left| \frac{x \sin(1/x)}{\sqrt{x}} \right| \leq \sqrt{x}$, i.e. $x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0}{=} o(\sqrt{x})$.

Puis, $\sqrt{x} + x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{x}$.

Ensuite,

$$\exp(x^2 + \ln(3x^4 + 2x^2)) = e^{x^2} (3x^4 + 2x^2) \underset{0}{\sim} 2x^2;$$

$$\cos(x) \frac{(1 - \cos(\sqrt{x}))}{\sin(x)} \underset{0^+}{\sim} 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}^2}{2}\right) \cdot \frac{1}{x} \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{2};$$

$$2x + 3 \ln(1+x) + \sqrt{x} \underset{0^+}{\sim} \sqrt{x}.$$

En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+^+$,

$$\frac{2x + 3 \ln(1+x)}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0, \text{ d'où } 2x + 3 \ln(1+x) \underset{0}{=} o(\sqrt{x}).$$

Par produit, quotient, $f(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{\sqrt{x} \cdot 2x^2}{(1/2) \cdot 4x \cdot \sqrt{x}}$

On simplifie

$$f(x) \underset{0^+}{\sim} x.$$

Exercice 7 Investissement immobilier

1) Soit $q \in \mathbb{R}^+$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} (1+q)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^k \\ &= \binom{n}{0} q^0 + \binom{n}{1} q^1 + \binom{n}{2} q^2 + \sum_{k=3}^n \binom{n}{k} q^k \\ (1+q)^n &\underset{0}{=} 1 + nq + \frac{n(n-1)}{2} q^2 + o(q^2). \end{aligned}$$

- Par définition du coût du crédit, $K = nm - C_0$, donc

$$K = nq C_0 \frac{(1+q)^n}{(1+q)^n - 1} - C_0 = C_0 \left(\frac{nq(1+q)^n - (1+q)^n + 1}{(1+q)^n - 1} \right).$$

Or, on a vu que $(1 + q)^n \underset{q \rightarrow 0}{\approx} 1 + nq + \frac{n(n-1)}{2}q^2 + o(q^2)$.

En multipliant par nq et en retranchant le développement de $(1 + q)^n - 1$, on obtient

$$nq(1 + q)^n - (1 + q)^n + 1 \underset{q \rightarrow 0}{\approx} n^2q^2 - \frac{n(n-1)}{2}q^2 + o(q^2) = \frac{n(n+1)}{2}q^2 + o(q^2).$$

Autrement dit : $nq(1 + q)^n - (1 + q)^n + 1 \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{n(n+1)}{2}q^2$.

Avec $(1 + q)^n - 1 \sim nq$, on conclut par quotient

$$K \underset{q \rightarrow 0}{\sim} C_0 \frac{\frac{n(n+1)}{2}q^2}{nq} = \frac{(n+1)C_0q}{2}.$$

- 2) Le crédit le plus avantageux est le crédit qui a le coût le moins élevé.
Pour q « suffisamment petit », on a

$$K \simeq \frac{C_0}{2} \cdot nq.$$

En effet, sur plusieurs années, on peut approximer $n + 1 \simeq n$.

- Pour le premier crédit,
- Pour le second crédit,

$$nq = (10 \times 12) \times \frac{1.7}{100},$$

$$n'q' = (25 \times 12) \times \frac{0.6}{100}.$$

D'une part $10 \times 1.7 = 17$ et d'autre part $25 \times 0.6 = 15$, on constate que

Le second crédit est plus avantageux.

Séries numériques

26

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Discuter en fonction de $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la série $\sum \cos^{2n}(x)$. Préciser la somme.

Exercice 2 Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, posons $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

1) Montrer que la série de terme général u_n converge.

2) a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = a \ln(k-1) + b \ln k + c \ln(k+1)$.

b) Calculer $\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$.

Exercice 3 * Justifier que les séries suivantes sont convergentes, et calculer leur somme.

$$1) \sum_{k \geq 0} e^{-k} \quad 2) \sum_{k \geq 0} \frac{k(k-1)2^k}{k!} \quad 3) \sum_{k \geq 2} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k) \ln(k+1)}$$

Exercice 4 Déterminer la nature des séries suivantes.

- (*) 1) $\sum_{n \geq 1} 1, \sum_{n \geq 1} e^{1/n^2}, \sum_{n \geq 1} (e^{1/n^2} - 1)$ 4) $\sum_{n \geq 1} \frac{3}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{n^2}\right)$
- 2) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 5) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n + (-1)^n \sqrt{n}}}$
- 3) $\sum_{n \geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$
- (**) 6) $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ 9) $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$
- 7) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + 2^2 + \dots + n^2}$ 10) $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$
- 8) $\sum_{n \geq 2} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$
- (***) 11) $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^5}{n^2}$ 13) $\sum_{n \geq 1} n^{-\cos(\frac{1}{n})}$
- 12) $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$ 14) $\sum_{n \geq 2} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$

Exercice 5 *** On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
 On admet l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}^+$ tel que : $H_n = \gamma + \ln(n) + o(1)$.

Discuter, en fonction de la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}^+$ de la convergence de la série $\sum \alpha^{H_n}$.

 **Exercices axés sur le raisonnement**

Exercice 6 * Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{u_n(1 + u_n)}{2u_n + 1}.$$

- 1) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et déterminer sa limite.
- 2) Justifier que la série de terme général u_n^2 est de même nature que la série de terme général $v_n = u_n - u_{n+1}$.
- 3) En déduire la convergence de la série de terme général u_n^2 .

Exercice 7 * *Série et intégration* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$.

1) Vérifier que

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt.$$

2) En déduire la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ et l'égalité $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

3) En déduire $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k2^k} = \ln(2)$.

Exercice 8 * *Série et dérivation*

1) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k \ln(k)}.$$

2) En déduire la divergence de la série $\sum \frac{1}{k \ln(k)}$.

Exercice 9 ** *Série et intégration II* L'objectif est de prouver la divergence de la série

$$\sum_{k \geq 3} \frac{1}{k \ln k} \text{ et de déterminer un équivalent des sommes partielles : } S_n = \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

1) Étudier les variations de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t \ln t}$.

2) a) Montrer que pour tout $k \geq 2$: $\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \frac{1}{k \ln k}$.

b) En déduire, pour tout $k \geq 3$,

$$\int_3^n \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_3^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq S_n \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln t}.$$

3) Calculer, pour tous a, b réels strictement supérieurs à 1 : $\int_a^b f(t) dt$.

4) a) Montrer que la série $\sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln k}$ diverge.

b) Utiliser la question 2 b) pour trouver un équivalent de S_n .

Exercice 10 ** On définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n) \quad \text{et} \quad x_0 = 1.$$

1) Pourquoi cette suite est-elle bien définie et positive ?

Indication. On pourra s'aider de l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x$.

2) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}}.$$

b) En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_n$.

c) Justifier que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

3) Démontrer la convergence de la série $\sum x_n$ et l'égalité $\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = e - 1$.

Exercice 11 *** *Produit de Cauchy*

Soient $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles positives. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + x_2 y_{n-2} + \cdots + x_{n-1} y_1 + x_n y_0 = \sum_{i=0}^n x_i y_{n-i}.$$

1) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. préciser l'ensemble A_k tel que $z_k = \sum_{(i,j) \in A_k} x_i y_j$.

b) On note $B_n = \bigcup_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} A_k$. Justifier que $B_n = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leq n\}$.

2) Montrer, en utilisant la question précédente, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n z_k \leq \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) \left(\sum_{k=0}^n y_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} z_k.$$

3) On suppose que la série de terme général x_n et la série de terme général y_n convergent.

On note $A = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k$ et $B = \sum_{k=0}^{+\infty} y_k$.

Prouver la convergence de la série de terme général z_n , puis $\sum_{k=0}^{+\infty} z_k = AB$.

4) *Application.*

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^{+2}$. En utilisant le résultat précédent, démontrer que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \right).$$

Exercice 12 *** Extrait de concours

1) Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1, 1[$, vérifier l'équivalent $\binom{k}{p} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}$.

En déduire la convergence de la série $\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.

2) On définit, pour $x \in]-1, 1[$, $S_p(x) = \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k$.

a) Préciser $S_0(x)$.

b) À l'aide de la formule du triangle de Pascal, démontrer que $(1-x)S_{p+1}(x) = xS_p(x)$.

c) Conclure avec

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

D'après EDHEC 2015

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13 * Vrai ou faux? Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- 1) La série $\sum e^{u_n}$ ne converge pas.
- 2) Si la série $\sum u_n^2$ converge alors la série $\sum u_n$ converge aussi.
- 3) Si la série $\sum u_n$ converge alors la série $\sum u_n^2$ converge aussi.
- 4) Si la série $\sum (nu_n)^2$ converge alors la série $\sum u_n$ converge aussi.

Corrections

☰ Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

On reconnaît une somme géométrique de raison $\cos^2(x)$. Notons $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

$$\cos^2(x) \in]-1, 1[\Leftrightarrow x \in D.$$

La série converge si et seulement si $x \in D$ avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \cos^{2n}(x) = \frac{1}{1 - \cos^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Exercice 2

1) On peut montrer la convergence en étudiant la limite des sommes partielles. On peut aussi le faire avec les critères du cours de la façon suivante. La série est à termes négatifs. On passe par la série opposée qui est à termes positifs.

On a $-\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$. D'après les critères de convergence des séries à termes positifs, la série $\sum_{k \geq 2} -\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ est de même nature que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ qui converge (série de Riemann avec $\alpha > 1$). D'où $\sum_{k \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ converge.

2) a) Notons que pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$,

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) \\ &= \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k). \end{aligned}$$

$$a = 1, \quad b = -2 \quad \text{et} \quad c = 1.$$

b) On obtient alors une somme télescopique

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n u_k &= \sum_{k=2}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) - \sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1)) \\ &\quad \sum_{p=3}^{n+1} (\ln(p) - \ln(p-1)) - \sum_{k=2}^n (\ln(k) - \ln(k-1)) \\ &= (\ln(n+1) - \ln(2)) - (\ln(n) - \ln(1)) \\ &= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2). \end{aligned}$$

} changement d'indice
 $p = k + 1$
} télescopage

Finalement,

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = -\ln(2).$$

Exercice 3

1) On a une série géométrique de raison $1/e$. Cette série converge car $|1/e| < 1$, et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k} = \frac{1}{1 - 1/e} = \frac{e}{e-1}.$$

2) Les deux premiers termes de la série sont nuls. Pour $k \geq 2$,

$$\frac{k(k-1)2^k}{k!} = 2^2 \frac{2^{k-2}}{(k-2)!}.$$

Or, la série $\sum_{k \geq 0} \frac{2^k}{k!}$ converge (série exponentielle). Donc $\sum_{k \geq 2} \frac{2^{k-2}}{(k-2)!}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k(k-1)2^k}{k!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k(k-1)2^k}{k!} = 2^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{2^{k-2}}{(k-2)!} = 4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} = 4e^2.$$

3) Prouvons la convergence en étudiant la limite des sommes partielles. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} &= \sum_{k=2}^n \frac{\ln(k+1) - \ln(k)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\ln(k)} - \frac{1}{\ln(k+1)} \right) \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln(k)} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln(k+1)} \stackrel{p=k+1}{=} \sum_{k=2}^n \frac{1}{\ln(k)} - \sum_{p=3}^{n+1} \frac{1}{\ln(p)} \\ &= \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(n+1)} \quad (\text{par télescopage}) \\ \sum_{k=2}^n \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(2)}. \end{aligned}$$

Conclusion La série $\sum_{k \geq 2} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)}$ converge et $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)} = \frac{1}{\ln(2)}$.

Exercice 4

1) • D'après le cours, le terme général d'une série doit tendre vers 0. Par contraposée si le terme général d'une série ne tend pas vers 0, la série diverge. Donc

Les séries $\sum_{n \geq 1} 1$, $\sum_{n \geq 1} e^{1/n^2}$ divergent.

• Le terme général de la série $\sum_{n \geq 1} (e^{1/n^2} - 1)$ tend vers 0. Mais cette condition n'est pas suffisante pour avoir une série convergente. Cette série est à termes positifs car $1/n^2 > 0$, donc $e^{1/n^2} > 1$. Comme $(1/n^2) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on a $e^{1/n^2} - 1 \sim \frac{1}{n^2}$. D'après les critères sur les séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} (e^{1/n^2} - 1)$ est de même nature que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ qui converge (série de Riemann avec $\alpha > 1$).

La série $\sum_{n \geq 1} (e^{1/n^2} - 1)$ converge.

Remarque

Cet exemple montre qu'une série convergente peut-être combinaison linéaire de séries divergentes.

2) Le terme général de la série est positif et $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{n}$.

D'après les *critères de convergences des séries à termes positifs*, la série étudiée est de même nature que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ qui diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1$ dite série harmonique).

Conclusion :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ diverge.}$$

3) La série est à termes négatifs, de même nature que la série opposée qui est à termes positifs.

Or $1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}$. D'après les *critères de convergences des séries à termes positifs*,

la série $\sum_{n \geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)$ est de même nature que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ convergente.

$$\sum_{n \geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) \text{ converge.}$$

4) On vérifie que la série est à termes positifs. Par compatibilité des équivalents avec les produits $\frac{3}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{n^2}\right) \sim \frac{3}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n} \times 1$. D'après les *critères de convergences des séries à termes positifs*, la série $\sum_{n \geq 2} \frac{3}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{n^2}\right)$ est de même nature que la série de Riemann

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ convergente.

$$\text{La série } \sum_{n \geq 1} \frac{3}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{n^2}\right) \text{ converge.}$$

5) Le terme général de la série est positif ($\sqrt{n} < n$ donc $(-1)^n \sqrt{n} < n$). Comme $\sqrt{n} = o(n)$, on a $n + (-1)^n \sqrt{n} \sim n$. Donc $\frac{1}{\sqrt{n + (-1)^n \sqrt{n}}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. D'après les *critères de convergences*

des séries à termes positifs, la série est de même nature que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergente ($\alpha < 1$).

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\sqrt{n + (-1)^n \sqrt{n}}}$ diverge.

6) Le terme général de la série est positif et $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$.

Or $\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2n}$. D'où $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha \sim \left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)^\alpha$.

D'après les critères de convergences des séries à termes positifs, la série est de même nature que la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$ qui converge si et seulement si $\alpha/2 > 1$, donc

La série $\sum_{n \geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^\alpha$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

7) Le terme général de la série est positif. On a, pour $n \geq 1$: $1 + 2 + \dots + n^2 > n^2 > 0$. D'où

$$\frac{1}{1 + 2^2 + \dots + n^2} < \frac{1}{n^2}.$$

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha > 1$). Donc,

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + 2^2 + \dots + n^2}$ converge.

8) Le terme général de la série est positif.

Remarque

On commence comme pour la série 6), mais comme l'exposant varie avec n , on ne peut plus utiliser l'équivalent $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$. On doit utiliser l'équivalent $e^x - 1 \sim x$.

$$\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n} \left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = e^{(\ln n)/n} \left(\exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - 1 \right).$$

Or $(\ln n)/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ (croissances comparées). Donc $e^{(\ln n)/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Et $\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) - 1 \sim \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2}$.

Ainsi, on obtient $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \frac{1}{n^2}$. D'après les critères de convergence des séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 2} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$ est de même nature que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ qui converge (série de Riemann avec $\alpha > 1$). Donc

La série $\sum_{n \geq 2} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n})$ converge.

9) On a $\frac{1}{n^2 \ln n} = \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{\ln n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ qui est à termes positifs converge. Donc, d'après les critères de convergence

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge.

10) Le terme général de la série est positif. Pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{\sqrt{\ln n}}{n} \geq \frac{\sqrt{\ln 2}}{n} > 0$. La série de Riemann $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n}$ diverge. Donc, d'après les critères sur les séries à termes positifs,

La série $\sum_{n \geq 2} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$ diverge.

11) On a $\frac{(\ln n)^5}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ car $(\ln n)^5 = o(\sqrt{n})$ par les croissances comparées.

Or la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann à termes positifs qui converge.

D'après le critère de convergence par négligeabilité

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(\ln n)^5}{n^2}$ converge.

12) Le terme général de la série est positif. En majorant chacun des termes $n, n-1, \dots, 3$ de $n!$ par n ; on a, pour $n \geq 3$: $n! \leq 2(n^{n-2})$. D'où $\frac{n!}{n^n} \leq \frac{2}{n^2}$. Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Donc, d'après les critères sur les séries à termes positifs :

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$ converge.

13) Le terme général de la série est positif. Montrons que $n^{-\cos(1/n)} \sim n^{-1}$.

$$\frac{n^{-\cos(1/n)}}{n^{-1}} = n^{1-\cos(1/n)} = \exp(\ln(n)(1 - \cos(1/n))).$$

Or $1 - \cos(1/n) \sim \frac{1}{2n^2}$ car $1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Donc $\ln(n)(1 - \cos(1/n)) \sim \frac{\ln(n)}{2n^2}$.

Comme $\frac{\ln(n)}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, On a $\ln(n)(1 - \cos(1/n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $n \times n^{-\cos(1/n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Ce qui

prouve l'équivalent $n^{-\cos(1/n)} \sim \frac{1}{n}$.

D'après les critères de convergence des séries à termes positifs, la série étudiée est de même nature que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ qui diverge (série de Riemann avec $\alpha = 1$, dite série harmonique).

Conclusion

$$\text{La série } \sum_{n \geq 1} n^{-\cos(\frac{1}{n})} \text{ diverge.}$$

14) Le terme général de la série est positif. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Passons par la forme exponentielle

$$\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \exp\left((\ln n)^2 - n \ln(\ln n)\right).$$

Montrons que $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

$$n^2 \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \exp\left(2 \ln n + (\ln n)^2 - n \ln(\ln n)\right).$$

Les croissances comparées donnent $\ln n = o(n)$ et $(\ln n)^2 = o(n)$.

Donc $\ln n = o(n \ln(\ln n))$ et $(\ln n)^2 = o(n \ln(\ln n))$.

D'où $2 \ln n + (\ln n)^2 - n \ln(\ln n) \sim -n \ln(\ln n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.

Ainsi $n^2 \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha > 1$) et est à termes positifs.

D'après le critère de convergence par négligeabilité

$$\sum_{n \geq 2} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \text{ converge.}$$

Exercice 5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifions l'équivalent $\alpha^{H_n} \sim \alpha^\gamma \cdot \alpha^{\ln(n)}$.

$$\frac{\alpha^{H_n}}{\alpha^\gamma \cdot \alpha^{\ln(n)}} = \alpha^{H_n - (\gamma + \ln(n))} = \alpha^{o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et $\alpha^{\ln(n)} = e^{\ln(\alpha) \cdot \ln(n)} = n^{\ln(\alpha)}$.

D'après le critère d'équivalence des séries à termes positifs, les séries $\sum \alpha^{H_n}$ et $\sum n^{\ln(\alpha)}$ ont même nature. Or, $\sum n^{\ln(\alpha)}$ est une série de Riemann convergente si et seulement si $\ln(\alpha) < -1$, c'est-à-dire, $\alpha < e^{-1}$.

$$\text{La série } \sum \alpha^{H_n} \text{ converge si et seulement si } \alpha < e^{-1}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 6

1) Par récurrence, la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est strictement positive. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 + u_n}{2u_n + 1} < 1 \quad \text{car} \quad 2u_n + 1 \geq u_n + 1.$$

La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc strictement décroissante et minorée par 0, d'après *le théorème de convergence monotone*, la suite est convergente. Notons ℓ sa limite. Passons à la limite dans la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{u_n(1 + u_n)}{2u_n + 1} \Rightarrow \ell = \frac{\ell(1 + \ell)}{2\ell + 1} \Rightarrow \ell = 0.$$

Bilan

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2) Vérifier que

$$u_n - u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n + 1} \sim u_n^2 \quad \text{car} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

D'après *le critère d'équivalence des séries à termes positifs*, la série de terme général u_n^2 est de même nature que la série de terme général $u_n - u_{n+1}$.

3) Justifions la convergence de la série $\sum v_n$ en étudiant les sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^N v_n = \sum_{n=0}^N (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} u_0.$$

D'après la question précédente :

La série de terme général u_n^2 converge.

Exercice 7 Série et intégration

1) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [0, 1[$. Notons que $\int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x)$. Ainsi,

$$-\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt = \int_0^x \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t} \right) dt.$$

On reconnaît alors une somme géométrique de raison $t \neq 1$,

$$\begin{aligned}
 -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt &= \int_0^x \sum_{i=0}^{n-1} t^i dt && \text{linéarité} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^x t^i dt \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{i+1}}{i+1} && k = i + 1 \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}
 \end{aligned}$$

2) Pour $t \in [0, x]$,

$$0 < 1-x \leq 1-t \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} \Rightarrow 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}.$$

Par croissance de l'intégrale ($0 < x$), $0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(1+x)(n+1)}.$

Par le théorème d'encadrement, $\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$

À l'aide de la relation précédente, on en déduit la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{x^k}{k}$ et l'égalité demandée.

3) On applique l'égalité avec $x = 1/2$.

Exercice 8 Série et dérivation

1) Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. La fonction $f : x \in]1, +\infty[\mapsto \ln(\ln(x))$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ avec

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}.$$

Appliquons l'inégalité des accroissements finis. f est continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$ avec pour tout $x \in [k, k+1]$,

$$\frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq f'(x) \leq \frac{1}{k \ln(k)}.$$

D'où $\frac{(k+1) - k}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{(k+1) - k}{k \ln(k)}.$

Puis,
$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}.$$

2) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour tout $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k)) \leq \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Par somme
$$\sum_{k=2}^n (\ln(\ln(k+1)) - \ln(\ln(k))) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)}.$$

On reconnaît une somme télescopique,

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(2)) \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)}.$$

Or, $\ln(\ln(n+1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Par le théorème de minoration, la série diverge

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k\ln(k)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Exercice 9 Série et intégration II

1) Pour tout $t \in]1, +\infty[$, $f'(t) = -\frac{\ln(t)+1}{(t\ln t)^2} < 0$. La fonction f est décroissante.

2) a) Soit $k \geq 2$. La fonction f est décroissante sur $]1, +\infty[$, donc, pour tout réel t tel que $k \leq t \leq k+1$, on a

$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \frac{1}{t\ln t} \leq \frac{1}{k\ln k}.$$

Par croissance de l'intégrale ($k < k+1$), il vient

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln t} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{k\ln k}.$$

Ainsi, pour tout $k \geq 2$:
$$\frac{1}{(k+1)\ln(k+1)} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t\ln t} \leq \frac{1}{k\ln k}.$$

b) En utilisant la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale,

$$\int_3^{n+1} \frac{dt}{t\ln t} = \int_3^n \frac{dt}{t\ln t} + \int_n^{n+1} \frac{dt}{t\ln t} \geq \int_3^n \frac{dt}{t\ln t}.$$

La première inégalité est justifiée.

Pour la seconde inégalité, on somme de 3 à n , l'inégalité de droite de la question précédente. Cela donne

$$\sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \ln k}.$$

En utilisant la relation de Chasles $\int_3^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq S_n$.

Pour la dernière inégalité, on somme de 2 à $n-1$ l'inégalité de gauche de la question précédente. Cela donne

$$\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)} \leq \sum_{k=2}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t \ln t}.$$

La relation de Chasles pour la somme des intégrales et un changement d'indice pour la somme de gauche donnent :

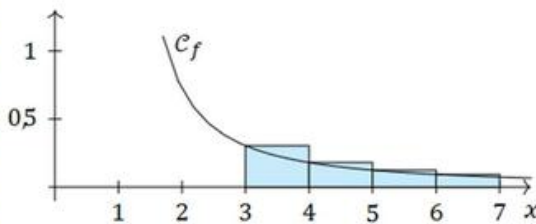
$$S_n = \sum_{p=3}^n \frac{1}{p \ln p} \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln t}.$$

Conclusion, pour tout $k \geq 3$,

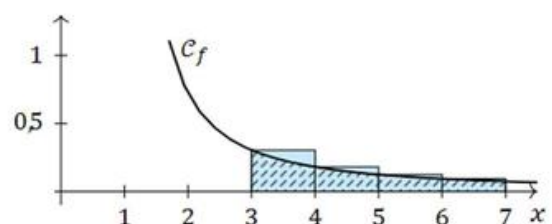
$$\int_3^n \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_3^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} \leq S_n \leq \int_2^n \frac{dt}{t \ln t}.$$

Remarque

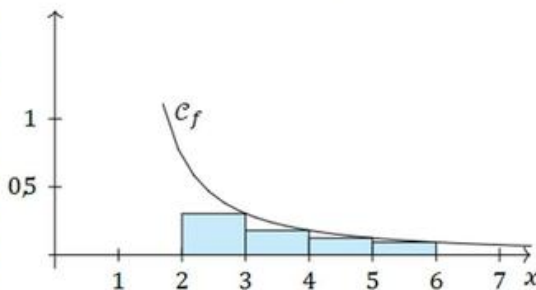
Illustrons par des dessins l'encadrement de S_6 . Selon que les rectangles ont le coin supérieur droit ou gauche sur la courbe, on obtient l'une ou l'autre des inégalités.



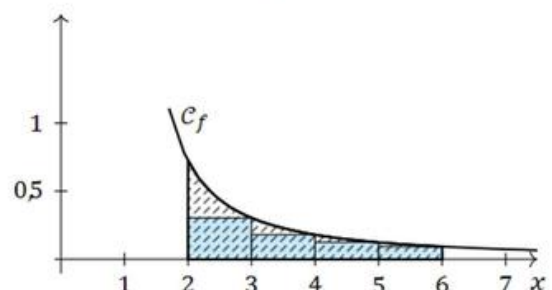
$$S_6 = \sum_{k=3}^6 f(k)$$



$$S_6 \geq \int_3^7 f(t) dt$$



$$S_6 = \sum_{k=3}^6 f(k)$$



$$S_6 \leq \int_2^6 f(t) dt$$

3) On introduit la fonction $u(t) = \ln t$ pour $t > 0$. On constate que

$$\int_a^b \frac{dt}{t \ln t} = \int_a^b \frac{1/t}{\ln t} dt = \int_a^b \frac{u'(t)}{u(t)} dt = [\ln |\ln t|]_a^b = \boxed{\ln |\ln b| - \ln |\ln a|}.$$

4) a) Pour tout $n \geq 3$, on a donc $\int_3^n \frac{dt}{t \ln t} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 3) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

D'après la question 2 b) $\int_3^n \frac{dt}{t \ln t} \leq S_n$. Donc $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Donc

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k \geq 2} \frac{1}{k \ln k} \text{ diverge.}}$$

b) Soit $n \geq 3$. L'encadrement de la question 2 b) et la question 4) donnent

$$\ln(\ln n) - \ln(\ln 3) \leq S_n \leq \ln(\ln n) - \ln(\ln 2).$$

En divisant par $\ln(\ln n)$ qui est positif ($n \geq 3 > e$) :

$$1 - \frac{\ln(\ln 3)}{\ln(\ln n)} \leq \frac{S_n}{\ln(\ln n)} \leq 1 - \frac{\ln(\ln 2)}{\ln(\ln n)}.$$

D'après le théorème d'encadrement, il vient $\frac{S_n}{\ln(\ln n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Conclusion

$$\boxed{S_n \sim \ln(\ln n)}.$$

Exercice 10

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $e^x - x \geq 1$. L'expression $\ln(e^x - x)$ a donc bien un sens. Elle est de plus positive. La suite $(x_n)_n$ est donc bien définie et positive.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$x_{n+1} = \ln(e^{x_n} - x_n) \Rightarrow e^{x_{n+1}} = e^{\ln(e^{x_n} - x_n)} = e^{x_n} - x_n.$$

D'où,

$$\boxed{x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}}}.$$

b) D'après la question 1), la suite $(x_n)_n$ est positive. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$e^{x_n} - e^{x_{n+1}} = x_n \geq 0 \quad \text{donc} \quad e^{x_n} \geq e^{x_{n+1}}.$$

Enfin, par croissance de la fonction logarithme, $x_n \geq x_{n+1}$. Finalement,

$$\boxed{\text{La suite } (x_n)_n \text{ est décroissante.}}$$

Remarque

On aurait pu utiliser la croissance de la fonction $x \mapsto \ln(e^x - x)$ et l'exercice 9 du chapitre 1.

- c) La suite $(x_n)_n$ est décroissante et minorée, d'après le théorème de convergence monotone, la suite est convergente. Notons ℓ sa limite. Passons à la limite dans la relation de la question 2 a), par continuité de la fonction exponentielle,

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = e^{x_n} - e^{x_{n+1}} \quad \text{donc} \quad \ell = e^\ell - e^\ell = 0.$$

Finalement,

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- 3) Prouvons la convergence et le calcul de la somme en explicitant les sommes partielles. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=0}^N x_n = \sum_{n=0}^N e^{x_n} - e^{x_{n+1}} = e^{x_0} - e^{x_{N+1}} \quad (\text{télescopage}).$$

Or, $x_0 = 1$, et par continuité de l'exponentielle (en 0),

$$x_{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0 \quad \Rightarrow \quad e^{x_{N+1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} e^0 = 1$$

Concluons

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x_k = e - 1.$$

Exercice 11 Produit de Cauchy

- 1) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après l'énoncé $z_k = \sum_{i=0}^k x_i y_{k-i} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ j=k-i}} x_i y_j = \sum_{\substack{0 \leq i \leq k \\ i+j=k}} x_i y_j$.

$$\text{Donc} \quad A_k = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 0 \leq i \leq k \text{ et } i + j = k\} = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = k\}.$$

- b) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

$$\begin{aligned} (i, j) \in B_n &\Leftrightarrow (i, j) \in \bigcup_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} A_k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket, (i, j) \in A_k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket, i + j = k \Leftrightarrow i + j \leq n, \end{aligned}$$

donc

$$B_n = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leq n\}.$$

- 2) On a

$$\left(\sum_{i=0}^n x_i \right) \left(\sum_{j=0}^n y_j \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i y_j = \sum_{(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} x_i y_j.$$

Par ailleurs
$$\sum_{k=0}^n z_k = \sum_{k=0}^n \sum_{(i,j) \in A_k} x_i y_j = \sum_{(i,j) \in B_n} x_i y_j.$$

De même
$$\sum_{k=0}^{2n} z_k = \sum_{(i,j) \in B_{2n}} x_i y_j.$$

Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$.

- $(i, j) \in B_n \Rightarrow i + j \leq n \Rightarrow (i \leq n \text{ et } j \leq n) \Rightarrow (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2,$
- $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \Rightarrow i + j \leq 2n \Rightarrow (i, j) \in B_{2n}.$

Donc
$$B_n \subset \llbracket 0, n \rrbracket^2 \subset B_{2n}.$$

Les sommes sont à termes positifs, il vient

$$\sum_{(i,j) \in B_n} x_i y_j \leq \sum_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2} x_i y_j \leq \sum_{(i,j) \in B_{2n}} x_i y_j.$$

Ce qui donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n z_k \leq \left(\sum_{k=0}^n x_k \right) \left(\sum_{k=0}^n y_k \right) \leq \sum_{k=0}^{2n} z_k.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après les propriétés des séries à termes positifs,

$$\sum_{k=0}^n x_k \leq A \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n y_k \leq B, \quad \text{donc} \quad \sum_{k=0}^n z_k \leq AB.$$

La série de terme général z_k est une série à terme positif. La suite des sommes partielles est croissante et majorée par AB , elle converge d'après le *théorème de convergence monotone*. Par passage à la limite dans l'encadrement de la question 2), on obtient

$$\sum_{k=0}^{+\infty} z_k \leq AB \leq \sum_{k=0}^{+\infty} z_k, \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} z_k = AB.$$

4) Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{(a+b)^k}{k!} = \sum_{i=0}^k \frac{\binom{k}{i}}{k!} a^i b^{k-i} = \sum_{i=0}^k \frac{a^i}{i!} \cdot \frac{b^{k-i}}{(k-i)!}.$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $x_n = \frac{a^n}{n!}$ et $y_n = \frac{b^n}{n!}$, on a

$$\frac{(a+b)^k}{k!} = \sum_{i=0}^k x_i y_{k-i} = z_k.$$

Les séries exponentielles de terme général $\frac{a^k}{k!}$ et $\frac{b^k}{k!}$ convergent. D'après la question 3)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(a+b)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \right).$$

Remarque

On retrouve ainsi, pour a et b positif, $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Précisons de plus que la propriété de la question 3) reste vraie lorsque les séries $\sum_{n \geq 0} x_n$ et $\sum_{n \geq 0} y_n$ sont absolument convergentes.

Exercice 12 Extrait de concours

1) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour $k \geq p$,

$$\frac{\binom{k}{p}}{\frac{k^p}{p!}} = \frac{\frac{k!}{p!(k-p)!}}{\frac{k^p}{p!}} = \frac{1}{k^p} \cdot \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{1}{k^p} \cdot \prod_{i=1}^p (k-p+i) = \prod_{i=1}^p \frac{k-p+i}{k}.$$

Or, $\frac{k-p+i}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$, par produit, $\prod_{i=1}^p \frac{k-p+i}{k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1$.

$$\boxed{\binom{k}{p} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^p}{p!}}$$

Soit $x \in]-1, 1[$. À l'aide du résultat précédent puis des *croissances comparées*,

$$k^2 \binom{k}{p} x^k \sim \frac{k^{p+2} x^k}{p!} \quad \text{et} \quad \frac{k^{p+2}}{p!} x^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0.$$

D'où, $\binom{k}{p} x^k \underset{k \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{k^2}\right)$.

Comme la série de Riemann $\sum 1/k^2$ est convergente, le critère de négligeabilité des séries à termes positifs s'applique.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k \text{ converge.}}$$

2) a) $S_0(x)$ est la série géométrique de raison x . D'après le cours,

$$\boxed{S_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}}$$

b) Soient $x \in]-1,1[$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 (1-x)S_{p+1}(x) &= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k}{p+1} (1-x)x^k \\
 &= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k}{p+1} x^k - \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k}{p+1} x^{k+1} && \left. \begin{array}{l} \text{on développe} \\ i = k + 1 \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{k=p+1}^{+\infty} \binom{k}{p+1} x^k - \sum_{i=p+2}^{+\infty} \binom{i-1}{p+1} x^i && \left. \begin{array}{l} \text{variable muette} \\ \text{et } \binom{p}{p+1} = 0 \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{i=p+1}^{+\infty} \left(\binom{i}{p+1} - \binom{i-1}{p+1} \right) x^i && \left. \begin{array}{l} \text{formule du} \\ \text{triangle de Pascal} \end{array} \right\} \\
 &= \sum_{i=p+1}^{+\infty} \binom{i-1}{p} x^i && \left. \begin{array}{l} j = i - 1 \end{array} \right\} \\
 (1-x)S_{p+1}(x) &= \sum_{j=p}^{+\infty} \binom{j}{p} x^{j+1} = xS_p(x).
 \end{aligned}$$

c) Fixons $x \in]-1,1[$. D'après ce qui précède,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad S_{p+1}(x) = \frac{x}{1-x} \cdot S_p(x).$$

$(S_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{x}{1-x}$ et premier terme $S_0 = \frac{1}{1-x}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=p}^{+\infty} \binom{k}{p} x^k = \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}}.$$

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 13 Vrai ou faux?

1) **Vrai.**

Comme u est une série à termes positifs, $e^{u_n} \geq 1$. La série $\sum e^{u_n}$ diverge grossièrement.

2) **Faux.**

Les séries de Riemann fournissent un contre-exemple. Pour $n \geq 1$, $u_n = 1/n$. La série $\sum u_n^2$ converge mais la série harmonique $\sum u_n$ diverge.

3) **Vrai.**

Si la série $\sum u_n$ converge alors, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $u_n^2 = o(u_n)$.

Par le critère de négligeabilité des séries à termes positifs, la série $\sum u_n^2$ converge.

4) **Vrai.**

Rappelons l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ valable pour tous réels a, b . Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_n = \frac{1}{n} \cdot (nu_n) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + (nu_n)^2 \right).$$

La série de Riemann $\sum 1/n^2$ et la série $\sum (nu_n)^2$ sont convergentes. Par le *critère de comparaison des séries à termes positifs*, la série $\sum u_n$ converge.

Intégrales généralisées

27

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes. Calculer la valeur de celles qui convergent.

$$\begin{array}{lll} (*) \quad 1) \int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} & 2) \int_0^2 \frac{dt}{(t-2)^2} & 3) \int_{-2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t+2}} \\ 4) \int_{-\infty}^{-2} \frac{dt}{t^2} & 5) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t^3-8}}{t^{5/2}} dt & 6) \int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{\sqrt{t}} dt \\ (**) \quad 7) \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt & 8) \int_0^1 \frac{e^t dt}{t^2} & 9) \int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} dt. \end{array}$$

Exercice 2 Par un calcul direct, montrer que les intégrales suivantes sont convergentes et donner leur valeur.

$$\begin{array}{lll} (*) \quad 1) \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2} & 2) \int_1^2 \frac{t dt}{\sqrt{t^2-1}} & 3) \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \\ (**) \quad 4) \int_0^9 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}} & 5) \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \right) dt. & \end{array}$$

Exercice 3 **

Déterminer, soit par le calcul, soit en utilisant les critères de convergence, la nature des intégrales suivantes.

- 1) $\int_0^1 \ln(t) dt$;
 - 2) $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t} dt$;
 - 3) $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+1} dt$;
 - 4) $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$;
 - 5) $\int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{-t}) dt$;
 - 6) $\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$;
 - 7) $\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1 + \sqrt{t})^3}$;
 - 8) $\int_0^{+\infty} (t^{17} + \ln(t^8 + 3))e^{-t} dt$.
- 9) Donner, en fonction de α , la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} dt$ et $\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} dt$.

Exercice 4 ** On considère les intégrales généralisées

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx, \quad J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) dx.$$

- 1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer en fonction de $\sin x$ et $\cos x$ les valeurs

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \quad \sin(\pi - x) \quad \text{et} \quad \cos(\pi - x).$$

On rappelle par ailleurs que, pour tout x réel : $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$.

- 2) a) Montrer que l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \ln(x) dx$ converge.
 b) Justifier que pour tout réel $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$.
 c) En déduire la convergence de I .
 3) À l'aide d'un changement de variable, vérifier que J converge et que $J = I$.
 4) Montrer que K converge et $K = I + J + \frac{\pi}{2} \ln 2$.
 5) Prouver les égalités suivantes

$$I = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin x) dx \quad \text{et} \quad K = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin x) dx = I.$$

- 6) En déduire la valeur de I .

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5 * Étude d'une suite d'intégrales On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$.

- 1) Justifier que J_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Établir, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation entre J_n et J_{n+1} .
- 3) En déduire J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 ** Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. On suppose P positif. Soit $Q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x)$.

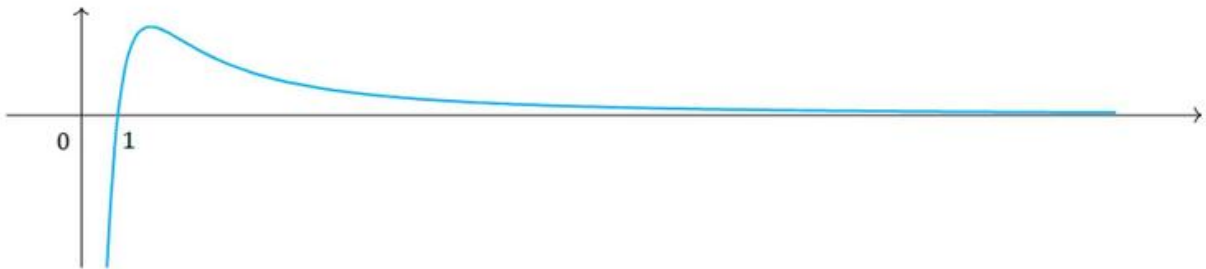
1) Justifier la convergence et l'égalité

$$Q(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t} dt.$$

Indication. On pourra étudier la quantité $Q(x) - Q'(x)$.

2) En déduire que Q est aussi un polynôme positif.

Exercice 7 ** Voici le graphe de $f : t \mapsto \ln(t)/(1+t^2)$.



Après avoir justifié la convergence, établir l'égalité : $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0$.

Exercice 8 *** Étude d'une suite d'intégrales II

1) Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} dx$ est convergente.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$.

Justifier que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement positive et convergente.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $I_n = 2n \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x} dx = 2n(I_{n-1} - I_n)$.

b) On pose $v_n = \ln(I_{n-1}) - \ln(I_n)$. Vérifier que $v_n = \ln(1 + 1/2n)$.

4) Préciser la nature de la série $\sum v_n$. En déduire la limite de $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

5) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $M_n = \sqrt{n} I_n$ et $K_n = \sqrt{n+1} I_n$. Montrer que les suites $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire l'existence d'un réel a strictement positif tel que

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 9 *** Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell.$$

On veut montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+t) - f(b+t)) dt$ converge et déterminer sa valeur.

1) a) Soit g continue sur $[\alpha, \beta]$. Montrer qu'il existe c compris entre α et β tel que

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = (\beta - \alpha)g(c).$$

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{x+b}^{x+a} f(u) du$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{x+a}^{x+b} f(u) du$.

2) a) Exprimer $\int_0^x (f(a+t) - f(b+t)) dt$ en fonction de $\int_{x+b}^{x+a} f(u) du$ et $\int_a^b f(u) du$.

b) En déduire que $\int_0^{+\infty} (f(a+t) - f(b+t)) dt$ converge et donner sa valeur.

3) Montrer de façon analogue que $\int_{-\infty}^0 (f(a+t) - f(b+t)) dt$ converge.

4) Conclure.

Exercice 10 *** Étude d'une intégrale à paramètre

Pour $x \in \mathbb{R}_*^+$, on définit
$$F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}.$$

1) Justifier que la fonction F est bien définie sur \mathbb{R}_*^+ .

2) Vérifier que F est une fonction *strictement* décroissante.

3) a) Justifier l'encadrement, pour tout $x \in]1, +\infty[$,

$$0 \leq F(x) \leq \frac{1}{2(x-1)}.$$

b) En déduire la limite de F en $+\infty$.

4) a) Justifier la majoration, pour tout $x \in \mathbb{R}_*^+$, $F(x) \geq \frac{1}{2x}$.

b) En déduire la limite de F en 0^+ .

5) a) Démontrer que pour $(x, y) \in \mathbb{R}_*^{+2}$

$$|F(x) - F(y)| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

En déduire la continuité de l'application F sur \mathbb{R}_*^+ .

- b) Justifier que F est une bijection de \mathbb{R}_+^+ dans un intervalle à préciser.
- 6) a) Préciser $F(1)$.
- b) Simplifier $F(x) + F(x+1)$ lorsque $x \in \mathbb{R}_+^+$.
- c) En déduire un équivalent simple de F en $+\infty$.

Exercice 11 ***

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t - 1/t) dt$ soient convergentes.

- 1) a) Effectuer le changement de variable $u = -1/t$ sur

$$\int_0^{+\infty} f(t - 1/t) dt \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 f(t - 1/t) dt.$$

- b) En déduire

$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - 1/t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) f\left(t - \frac{1}{t}\right) dt.$$

- c) À l'aide d'un nouveau changement de variable, établir l'égalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(t - \frac{1}{t}\right) dt.$$

- 2) *Application.* Sachant que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t^2 - 1/t^2} dt$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Les quatre premières sont des intégrales de Riemann (ou apparentées).

- 1) $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ diverge (intégrale de Riemann généralisée en $+\infty$ et $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).
- 2) $\int_0^2 \frac{dt}{(t-2)^2}$ diverge (intégrale de Riemann généralisée en 2 et $\alpha = 2 \geq 1$).

3) $\int_{-2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t+2}}$ converge (intégrale de Riemann généralisée en -2 et $\alpha = \frac{1}{2} < 1$).

• Soit $A \in]-2, 0]$.

$$\int_A^0 \frac{dt}{\sqrt{t+2}} = \int_A^0 (t+2)^{-1/2} dt = [2(t+2)^{1/2}]_A^0 = 2(\sqrt{2} - \sqrt{A+2}) \xrightarrow{A \rightarrow -2} 2\sqrt{2}.$$

Par conséquent,

$$\int_{-2}^0 \frac{dt}{\sqrt{t+2}} = 2\sqrt{2}.$$

4) $\int_{-\infty}^{-2} \frac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann généralisée en $-\infty$ et $\alpha = 2 > 1$).

• Soit $A \in]-\infty, -2]$. $\int_A^{-2} \frac{dt}{t^2} = \int_A^{-2} t^{-2} dt = [-t^{-1}]_A^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \xrightarrow{A \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}$.

Conclusion :

$$\int_{-\infty}^{-2} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}.$$

5) La fonction $f : t \mapsto \frac{\sqrt{t^3-8}}{t^{5/2}}$ est continue positive sur $[2, +\infty[$.

L'intégrale est généralisée en $+\infty$. De plus, $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{t^3}}{t^{5/2}} = \frac{1}{t}$.

D'après le *critère d'équivalence*, l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t) dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t}$ qui diverge.

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{t^3-8}}{t^{5/2}} dt \text{ diverge.}$$

6) La fonction $f : t \mapsto \frac{e^{1/t}}{\sqrt{t}}$ est positive, continue sur $[1, +\infty[$.

L'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ (car $e^{1/t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$).

D'après le *critère d'équivalence*, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ qui diverge ($\alpha \leq 1$).

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{\sqrt{t}} dt \text{ diverge.}$$

- 7) La fonction $t \mapsto t^2 e^{-t}$ est positive, continue sur $[0, +\infty[$.
L'intégrale est généralisée en $+\infty$. Par les *croissances comparées*,

$$\frac{t^2 e^{-t}}{1/t^2} = t^4 e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow t^2 e^{-t} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive sur $[1, +\infty[$ et que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge ($2 > 1$), le critère de négligeabilité impose

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt \text{ converge.}$$

- Soit $A > 0$. On effectue une double intégration par parties avec

$$\begin{cases} u : t \mapsto -e^{-t} \\ v : t \mapsto t^2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u' : t \mapsto e^{-t} \\ v' : t \mapsto 2t \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'' : t \mapsto -e^{-t} \\ v'' : t \mapsto 1. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, A]$.

$$\begin{aligned} \int_0^A t^2 e^{-t} dt &= [t^2(-e^{-t})]_0^A - \int_0^A (2t)(-e^{-t}) dt = -A^2 e^{-A} + 2 \int_0^A t e^{-t} dt \\ &= -A^2 e^{-A} + 2 \left([t(-e^{-t})]_0^A + \int_0^A e^{-t} dt \right) = -A^2 e^{-A} - 2A e^{-A} + 2[-e^{-t}]_0^A \end{aligned}$$

$$\int_0^A t^2 e^{-t} dt = -A^2 e^{-A} - 2A e^{-A} - 2e^{-A} + 2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 2.$$

Par définition,

$$\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 2.$$

- 8) La fonction $t \mapsto \frac{e^t}{t^2}$ est positive, continue sur $]0, 1]$. L'intégrale est généralisée en 0.

On a $\frac{e^t}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^2}$. Donc $\int_0^1 \frac{e^t}{t^2} dt$ est de même nature que $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ qui diverge.

Conclusion :

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t^2} dt \text{ diverge.}$$

- 9) La fonction $t \mapsto \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}}$ est positive, continue sur $[0, +\infty[$.
L'intégrale est généralisée en $+\infty$. Par les *croissances comparées*,

$$\frac{\sqrt{t} e^{-\sqrt{t}}}{1/t^2} = (\sqrt{t})^5 e^{-\sqrt{t}} \underset{x=\sqrt{t}}{=} X^5 e^{-X} \xrightarrow[\substack{t \rightarrow +\infty \\ (X \rightarrow +\infty)}]{} 0 \Rightarrow \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive sur $[1, +\infty[$.

D'après les théorèmes de convergence,

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} dt \text{ converge.}$$

• L'intégrale converge. Effectuons le changement de variable \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$, $t = u^2$, strictement croissant.

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} u e^{-u} (2u du) = 2 \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u} du.$$

D'après 7),

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{-\sqrt{t}} dt = 4.$$

Exercice 2

1) $f : t \mapsto \frac{t}{(1+t^2)^2}$ est continue sur \mathbb{R}^+ . L'intégrale est généralisée en $+\infty$.

En posant $u : t \mapsto 1+t^2$, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$f(t) = \frac{1}{2} \frac{u'(t)}{u^2(t)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} \right)'(t).$$

• Soit $A > 0$. $\int_0^A \frac{t dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1+t^2} \right]_0^A = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1+A^2} + 1 \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

Concluons

$$\text{L'intégrale converge et } \int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}.$$

2) $f : t \mapsto \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1,2]$. L'intégrale est généralisée en 1.

En posant $u : t \mapsto t^2 - 1$, pour tout $t \in]1,2]$,

$$f(t) = \frac{u'(t)}{2\sqrt{u(t)}} = \left(\sqrt{u} \right)'(t).$$

• Soit $A \in]1,2]$. $\int_A^2 \frac{t dt}{\sqrt{t^2-1}} = \left[\sqrt{t^2-1} \right]_A^2 = \sqrt{3} - \sqrt{A^2-1} \xrightarrow{A \rightarrow 1} \sqrt{3}$.

Il vient

$$\text{L'intégrale converge et } \int_1^2 \frac{t dt}{\sqrt{t^2-1}} = \sqrt{3}.$$

3) $f : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R}_+ . L'intégrale est généralisée en $+\infty$.

$$\text{Soit } A > 0, \quad \int_0^A \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^A = \arctan(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}.$$

Conclusion

$$\text{L'intégrale converge et } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

4) La fonction définie sur $]0,9[$ par $f(t) = 1/(2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}})$ est continue sur $]0,9[$. L'intégrale est doublement généralisée en 0 et en 9. Par définition, elle converge si et seulement

$$\text{si } \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}} \text{ et } \int_1^9 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}} \text{ convergent.}$$

Posons $u : t \mapsto 3 - \sqrt{t}$. Pour $t \in]0,9[$,

$$f(t) = -\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = -2(\sqrt{u})'(t).$$

D'où, pour tous $A, B \in]0,9[$

$$\int_A^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}} = \left[-2\sqrt{3-\sqrt{t}} \right]_A^1 = -2\left(\sqrt{2} - \sqrt{3-\sqrt{A}}\right) \xrightarrow{A \rightarrow 0} -2\sqrt{2} + 2\sqrt{3}.$$

$$\int_1^B \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}} = \left[-2\sqrt{3-\sqrt{t}} \right]_1^B = -2\left(\sqrt{3-\sqrt{B}} - \sqrt{2}\right) \xrightarrow{B \rightarrow 9} 2\sqrt{2}.$$

Ainsi $\int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}}$ et $\int_1^9 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}}$ convergent, donc

$$\int_0^9 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}} \text{ converge.}$$

D'après la *relation de Chasles* pour les intégrales généralisées convergentes

$$\int_0^9 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}} = \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}} + \int_1^9 \frac{dt}{2\sqrt{t}\sqrt{3-\sqrt{t}}} = 2\sqrt{3}.$$

5) La fonction $t \mapsto \left(\frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right)\right)$ est continue sur $]0, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en 0 et $+\infty$. Par définition $\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right)\right) dt$ converge si et seulement si $\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right)\right) dt$ et $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right)\right) dt$ convergent.

• **En 0.** On étudie $\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \right) dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - \ln(t+1) + \ln(t) \right) dt$.

$\int_0^1 \frac{1}{t+1} dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$. Avec le changement de variable affine $u = 1+t$:

$$\int_0^1 \ln(t+1) dt = \int_1^2 \ln(u) du = [u \ln(u) - u]_1^2 = 2 \ln(2) - 2 + 1 = 2 \ln(2) - 1.$$

Soit $A \in]0,1]$.

$$\int_A^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_A^1 = -1 - A \ln(A) + A \xrightarrow{A \rightarrow 0} -1 \quad (\text{croissances comparées}).$$

Donc, par linéarité $\int_0^1 \left(\frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \right) dt$ converge et vaut $-\ln(2)$.

• **En $+\infty$.** On étudie $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \ln(t+1) + \ln(t) \right) dt$.

Soit $A > 1$. $\int_1^A \frac{1}{t+1} dt = [\ln(t+1)]_1^A = \ln(A+1) - \ln(2)$.

Avec le changement de variable affine $u = t+1$, il vient

$$\begin{aligned} \int_1^A \ln(t+1) dt &= \int_2^{A+1} \ln(u) du = [u \ln(u) - u]_2^{A+1} \\ &= (A+1) \ln(A+1) - (A+1) - 2 \ln(2) + 2. \end{aligned}$$

Enfin $\int_1^A \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_1^A = A \ln(A) - A + 1$.

Ainsi, en sommant les première et troisième intégrales et en retranchant la seconde

$$\begin{aligned} \int_1^A \left(\frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \right) dt &= \ln(A+1) - \ln(2) \\ &\quad - ((A+1) \ln(A+1) - (A+1) - 2 \ln(2) + 2) \\ &\quad + A \ln(A) - A + 1 \\ &= A(\ln(A) - \ln(A+1)) + \ln(2) \end{aligned}$$

$$\int_1^A \left(\frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \right) dt = -A \ln\left(1 + \frac{1}{A}\right) + \ln 2 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} -1 + \ln(2).$$

Car $\ln\left(1 + \frac{1}{A}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{A}$, donc $-A \ln\left(1 + \frac{1}{A}\right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} -1$.

Donc $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \right) dt$ converge et vaut $-1 + \ln(2)$. Il vient,

$$\text{L'intégrale converge et } \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) \right) dt = -\ln(2) - 1 + \ln(2) = -1.$$

Remarque

On intègre la fonction $f(t) = \frac{1}{t+1} - \ln\left(\frac{t+1}{t}\right) = \underbrace{\frac{1}{t+1}}_{f_1(t)} - \underbrace{\ln(1+t)}_{f_2(t)} + \underbrace{\ln(t)}_{f_3(t)}$.

- Pour $\int_0^1 f$, on a une combinaison linéaire de trois intégrales convergentes. On les a calculées séparément.
- Pour $\int_1^{+\infty} f$, on ne peut pas faire ainsi car $\int_1^{+\infty} f_1$, $\int_1^{+\infty} f_2$ et $\int_1^{+\infty} f_3$ divergent. On a donc calculé et déterminé la limite de $\int_1^A f = \int_1^A f_1 - \int_1^A f_2 + \int_1^A f_3$.

Exercice 3

- 1) La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue sur $]0,1]$. L'intégrale est généralisée en 0. Or, on connaît une primitive de f . On l'utilise pour étudier la nature de l'intégrale.

Soit $A \in]0,1]$.

$$\int_A^1 \ln(t) dt = [t \ln(t) - t]_A^1 = -1 - A \ln(A) + A \xrightarrow{A \rightarrow 0^+} -1 \quad (\text{croissances comparées}).$$

Il vient :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 \ln(t) dt \text{ converge.}}$$

- 2) $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$. L'intégrale est généralisée en 0. En posant $u : t \mapsto \ln(t)$, on constate que pour tout $t \in]0,1]$, $f(t) = u'(t)u(t)$.

Soit $A \in]0,1]$.
$$\int_A^1 \frac{\ln(t)}{t} dt = \left[\frac{1}{2} \ln^2(t) \right]_A^1 = -\frac{1}{2} \ln^2(A) \xrightarrow{A \rightarrow 0^+} -\infty.$$

Par conséquent

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t} dt \text{ diverge.}}$$

- 3) $f : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t+1}$ est continue et négative sur $]0,1]$. L'intégrale est généralisée en 0.

D'après le critère d'équivalence, $\int_0^1 f$ est de même nature que $\int_0^1 \ln(t) dt$ qui converge (étudiée en 1)).

Concluons

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+1} dt \text{ converge.}}$$

- 4) La fonction $f : t \mapsto 1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)$ est continue positive sur $[1, +\infty[$.

L'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a $1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \underset{+\infty}{\underset{\rightarrow 0}{\sim}} \frac{1}{2t^2}$

D'après le *critère d'équivalence* $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ qui converge ($\alpha > 1$).

Finalement, $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$ converge.

5) La fonction $f : t \mapsto \ln(1 + e^{-t})$ est continue, positive sur $[1, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a $\ln\left(1 + \frac{e^{-t}}{t^2}\right) \underset{+\infty}{\underset{\rightarrow 0}{\sim}} e^{-t} \underset{+\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (par *croissances comparées*).

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{t^2} > 0$. L'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge ($2 > 1$).

D'après le *critère de négligeabilité*,

$\int_1^{+\infty} \ln(1 + e^{-t}) dt$ converge.

6) $f : t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}}$ est continue, positive sur $]0, 1]$. L'intégrale est généralisée en 0.

On a $\frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$. D'après le *critère d'équivalence*, l'intégrale $\int_0^1 f(t) dt$ est de même nature que $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ (intégrale de Riemann avec $1/2 \leq 1$).

Donc $\int_0^1 \frac{\cos(t)}{\sqrt{t}} dt$ converge.

7) $f : t \mapsto \frac{t}{(1 + \sqrt{t})^3}$ est continue, positive sur $[0, +\infty[$. L'intégrale est généralisée en $+\infty$.

On a $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{t}{(\sqrt{t})^3} = \frac{1}{\sqrt{t}}$. D'après le *critère d'équivalence*, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est de même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ qui diverge (intégrale de Riemann avec borne infinie et $\alpha \leq 1$).

Il vient : L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t dt}{(1 + \sqrt{t})^3}$ diverge.

- 8) La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = (t^{17} + \ln(t^8 + 3))e^{-t}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
L'intégrale est généralisée en $+\infty$.

Pour $t > 0$,

$$t^{17} + \ln(t^8 + 3) = t^{17} + \ln(t^8) + \ln\left(1 + \frac{3}{t^8}\right) = t^{17} + 8\ln(t) + \ln\left(1 + \frac{3}{t^8}\right) \underset{+\infty}{\sim} t^{17}.$$

D'où $\frac{f(t)}{1/t^2} \underset{+\infty}{\sim} t^{19}e^{-t} \xrightarrow{+\infty} 0$, c.-à-d. $f(t) \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ avec $\frac{1}{t^2} \geq 0$.

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. Donc, d'après le critère de négligeabilité,

L'intégrale $\int_0^{+\infty} (t^{17} + \ln(t^8 + 3))e^{-t} dt$ converge.

- 9) La fonction $f_\alpha : t \mapsto \frac{\arctan(t)}{t^\alpha}$ est continue, positive sur \mathbb{R}_+^* .

- Étude de $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} dt$. L'intégrale est généralisée en $+\infty$. On a $f_\alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} \frac{1}{t^\alpha}$.

D'après le critère d'équivalence, $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ sont de même nature.

Concluons à partir des intégrales de Riemann

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- Étude de $\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} dt$. L'intégrale est généralisée en 0.

D'après l'exercice 3 du chapitre 25, $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$. Donc $f_\alpha(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{t^\alpha} = \frac{1}{t^{\alpha-1}}$.

$\int_0^1 f_\alpha(t) dt$, de même nature que $\int_0^1 \frac{dt}{t^{\alpha-1}}$, converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$.

Terminons :

L'intégrale $\int_0^1 \frac{\arctan(t)}{t^\alpha} dt$, converge si et seulement si $\alpha < 2$.

Exercice 4

- 1) Vérifier à l'aide des formules de sommation ou du cercle trigonométrique

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x),$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x), \quad \cos(\pi - x) = -\cos(x).$$

- 2) a) La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, \pi/2[$. L'intégrale est généralisée en 0. D'après la relation de Chasles pour les intégrales généralisées, elle est de même nature que $\int_0^1 \ln(x) dx$ qui converge (voir exercice 3, exemple 1))

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{\pi/2} \ln(x) dx \text{ converge.}}$$

- b) Nous renvoyons à l'exercice 6 du chapitre 5, page 70.
- c) La fonction $x \in]0, \frac{\pi}{2}[\mapsto \ln(\sin(x))$ est bien définie, *négative* et continue par composition. On a une intégrale généralisée en 0.

$$\text{Pour tout } x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) + \ln(x) = \ln\left(\frac{2}{\pi}x\right) \leq \ln(\sin(x)).$$

Les intégrales $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{2}{\pi}\right) dx$ et $\int_0^{\pi/2} \ln(x) dx$ convergent.

Donc $\int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{2}{\pi}x\right) dx$ converge. D'après le critère d'équivalence pour les intégrales de fonction négatives, I est convergente.

- 3) Effectuons le changement de variable affine $t = \frac{\pi}{2} - x$ sur I . Le changement de variable est bien de classe C^1 et strictement monotone, les intégrales sont donc de même nature. Comme I converge, on peut écrire l'égalité obtenue par changement de variable :

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_{\pi/2}^0 \ln(\sin(\pi/2 - t)) (-dt) \stackrel{1)}{=} \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) dx = J.$$

$$\boxed{J \text{ converge et } J = I.}$$

- 4) Pour tout $x \in]0, \pi/2[$,

$$\ln(\sin(2x)) = \ln(2 \cos(x) \sin(x)) = \ln(2) + \ln(\sin(x)) + \ln(\cos(x)).$$

Les intégrales I et J convergent et $\int_0^{\pi/2} \ln(2) dx$ n'est pas impropre.

Donc, par linéarité : $I + J + \int_0^{\pi/2} \ln(2) dx$ converge, et

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(2) dx + I + J &= \int_0^{\pi/2} \ln(2) dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx + \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) dx \quad \text{par linéarité} \\ &= K. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\boxed{K \text{ converge et } K = I + J + \frac{\pi}{2} \ln 2.}$$

- 5) • En effectuant le changement de variable de classe C^1 strictement monotone $t = \pi - x$,

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = \int_{\pi}^{\pi/2} \ln(\sin(\pi - t)) (-dt) = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin t) dt.$$

- En effectuant le changement de variable, $t = 2x$,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin t) dt. \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin t) dt \quad \left. \begin{array}{l} \text{relation de Chasles} \\ \swarrow \end{array} \right\} \\ &= I. \end{aligned}$$

- 6) Comme $I = J = K$, la relation de la question 4) donne

$$I = I + I + \frac{\pi}{2} \ln(2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = -\frac{\pi}{2} \ln(2).}$$

Remarque

On peut tester la cohérence du calcul en étudiant le signe du résultat final. Il est naturel que I soit négatif car pour tout $t \in]0, \pi/2]$, $\ln(\sin(t)) \leq 0$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5 Étude d'une suite d'intégrales

- 1) La fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est continue sur \mathbb{R}^+ . L'intégrale J_n est généralisée en $+\infty$.

On a $t^{n+2} e^{-t} \xrightarrow{+\infty} 0$, c'est-à-dire, $t^n e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive sur $[1, +\infty[$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge. Donc d'après le critère de négligeabilité, J_n converge.

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $A > 0$. On effectue une intégration par parties avec

$$\begin{cases} u : t \mapsto -e^{-t} \\ v : t \mapsto t^{n+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u' : t \mapsto e^{-t} \\ v' : t \mapsto (n+1)t^n. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$.

$$\int_0^A t^{n+1} e^{-t} dt = [e^{-t} t^{n+1}]_0^A + (n+1) \int_0^A t^n e^{-t} dt = e^{-A} A^{n+1} + (n+1) \int_0^A t^n e^{-t} dt.$$

Or, par croissance comparée, $e^{-A} A^{n+1} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$.

Donc, quand A tend vers $+\infty$, l'égalité précédente donne $\boxed{J_{n+1} = (n+1)J_n}$.

3) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = n!$.

- **Initialisation.** On a $J_0 = \lim_{A \rightarrow +\infty} [-e^{-t}]_0^A = \lim_{A \rightarrow +\infty} -e^{-A} + 1 = 1 = 0!$.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $J_n = n!$, alors $J_{n+1} = (n+1)J_n = (n+1)!$.
- **Conclusion.** D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = n!$.

Exercice 6

1) Précisons que si P est un polynôme de degré n , alors, pour $k > n$, $P^{(k)}$ est le polynôme nul. Ainsi,

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(x).$$

$$Q(x) - Q'(x) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^n P^{(k)'}(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n P^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^n P^{(k+1)}(x)$$

$$= P^{(0)}(x) - P^{(n+1)}(x) = P(x).$$

) somme télescopique

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $A \in \mathbb{R}$ avec $A > x$. Explicitons

$$e^x \int_x^A P(t)e^{-t} dt = e^x \int_x^A (Q(t) - Q'(t))e^{-t} dt.$$

Méthode 1.

On peut remarquer que $t \mapsto (Q(t) - Q'(t))e^{-t}$ est la dérivée de $t \mapsto Q(t)e^{-t}$. Ainsi,

$$\int_x^A (Q(t) - Q'(t))e^{-t} dt = [Q(t)e^{-t}]_x^A = Q(x)e^{-x} - Q(A)e^{-A}.$$

Les croissances comparées, $e^x \int_x^A P(t)e^{-t} dt = Q(x) - Q(A)e^{x-A} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} Q(x)$.

Méthode 2.

On peut faire une intégration par parties (les fonctions sont de classe C^1).

$$\int_x^A Q'(t)e^{-t} dt = [-Q(t)e^{-t}]_x^A + \int_x^A Q(t)e^{-t} dt.$$

En reprenant le raisonnement précédent,

$$Q(x) = e^x \int_x^{+\infty} P(t)e^{-t} dt.$$

Remarque

Si l'on souhaite justifier la convergence sans effectuer le calcul. On peut écrire :
 $t \in \mathbb{R} \mapsto P(t)e^{-t}$ est continue sur $[x, +\infty[$. On a une intégrale généralisée en $+\infty$. De plus, à l'aide des *croissances comparées*,

$$t^2 P(t)e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow P(t)e^{-t} \underset{+\infty}{\equiv} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Précisons que les intégrandes sont positives. Comme $\int_1^{+\infty} 1/t^2 dt$ est une intégrale de Riemann convergente ($2 > 1$), le *critère d'équivalence* s'applique et $\int_x^{+\infty} P(t)e^{-t} dt$ est convergente.

2) C'est une conséquence directe de la relation précédente et de la positivité de l'intégrale.

Remarque

Nous donnons à l'exercice 4 du chapitre 28 une seconde preuve de ce résultat.

Exercice 7

$t \mapsto \frac{\ln(t)}{1+t^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. L'intégrale proposée est généralisée en 0 et en $+\infty$.

• **En 0.** On a, pour $t \in]0, 1]$, $1+t^2 \sim 1$ donc $\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{0}{\sim} \ln(t)$. De plus, ces expressions restent de signe constant quand $t \in]0, 1]$.

On peut donc appliquer le *critère d'équivalence pour les intégrales de fonctions négatives* : les intégrales $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et $\int_0^1 \ln(t) dt$ sont de même nature.

Or, $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente (exemple 1)) de l'exercice 3. Ainsi, $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ converge.

• **En $+\infty$.** Pour $t \in [1, +\infty[$, par les *croissances comparées*, $\ln(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\equiv} o(\sqrt{t})$,

et donc $\frac{\ln(t)}{1+t^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(t)}{t^2} \underset{+\infty}{\equiv} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$, avec $\frac{1}{t^{3/2}} \geq 0$.

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge ($\frac{3}{2} > 1$).

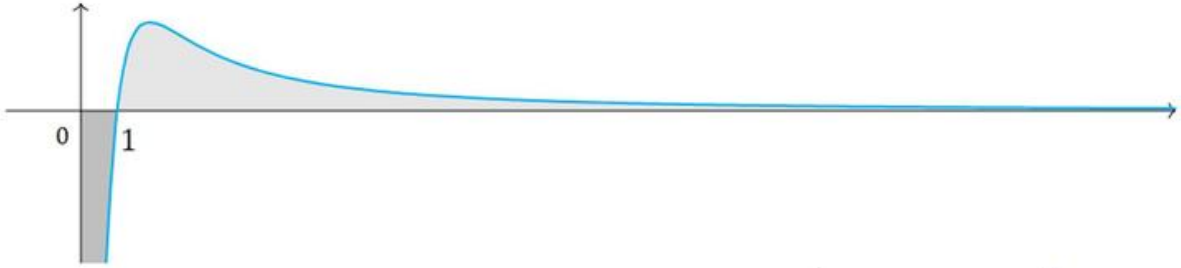
Donc, avec le *critère de négligeabilité*, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ converge.

Finalement :

$$\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt \text{ converge.}$$

Remarque

Le graphe permet de mieux comprendre l'égalité demandée. Pour que l'intégrale généralisée soit nulle, il suffit de montrer que l'aire algébrique est nulle en justifiant que l'aire algébrique de la partie sur $]0,1[$ est l'opposée de l'aire algébrique de la partie sur $[1, +\infty[$.



On fait le *changement de variable strictement croissant* $u = \frac{1}{t}$ (donc $du = -\frac{1}{t^2} dt$) dans l'intégrale convergente, ce qui est possible car $t \mapsto \frac{1}{t}$ est de classe C^1 sur $[1, +\infty[$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = - \int_1^{+\infty} -\frac{1}{t^2} \frac{\ln(t)}{\frac{1}{t^2} + 1} dt = - \int_1^0 \frac{\ln(\frac{1}{u})}{u^2 + 1} du.$$

En simplifiant, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = - \int_0^1 \frac{\ln(u)}{1+u^2} du$ puis, $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u^2} du = 0.}$

Exercice 8 Étude d'une suite d'intégrales II

- 1) f est continue sur un segment. Elle est donc bornée (et elle atteint ses bornes). Il existe donc $K \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in [0,1], |f(x)| \leq K \Rightarrow \forall x \in [0,1], \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{K}{\sqrt{1-x}}$$

De plus, par comparaison aux intégrales de Riemann, $\int_0^1 \frac{K}{\sqrt{1-x}} dx$ est une intégrale convergente ($1/2 < 1$). Par le *critère de comparaison*, l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}} dx$ est absolument convergente, elle est donc convergente.

- 2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par *positivité de l'intégrale*,

$$\forall x \in [0,1], \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} \geq 0 \Rightarrow I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx \geq 0.$$

Précisons que l'intégrande est positive et non nulle, l'inégalité est stricte. De plus, par *croissance de l'intégrale*,

$$\forall x \in [0,1], \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n.$$

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. D'après le théorème de convergence monotone,

La suite est convergente.

- 3) a) Effectuons une intégration par parties sur le segment $[0, \varepsilon]$ où $\varepsilon \in [0, 1[$. Pour $x \in [0, \varepsilon]$, posons

$$\begin{cases} u(x) = x^n \\ v(x) = -2\sqrt{1-x} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u'(x) = nx^{n-1} \\ v'(x) = 1/\sqrt{1-x} \end{cases}.$$

u est polynomiale donc de classe C^1 sur \mathbb{R} . Comme la fonction racine carrée est C^1 sur \mathbb{R}_+^+ , v est bien C^1 sur $[0, \varepsilon]$.

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx &= [-2x^n\sqrt{1-x}]_0^\varepsilon + 2n \int_0^\varepsilon x^{n-1}\sqrt{1-x} dx \\ &= -2\varepsilon^n\sqrt{1-\varepsilon} + 2n \int_0^\varepsilon \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1-x}} (1-x) dx \\ \int_0^\varepsilon \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 1^-} 2n(I_{n-1} - I_n). \end{aligned}$$

Finalement,

$$I_n = 2n(I_{n-1} - I_n).$$

- b) La relation précédente se réécrit $I_{n-1}/I_n = (2n+1)/(2n)$. Puis,

$$v_n = \ln(I_{n-1}) - \ln(I_n) = \ln\left(\frac{I_{n-1}}{I_n}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{2n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right).$$

- 4) Comme $1/(2n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim \frac{1}{2n}$. Or, la série harmonique $\sum 1/2n$ est divergente. Par le critère d'équivalence des séries à termes positifs, la série $\sum v_n$ diverge et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n v_k = +\infty.$$

- De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n (\ln(I_{k-1}) - \ln(I_k)) = \ln(I_0) - \ln(I_n).$$

D'où

$$I_n = \exp\left(\ln(I_0) - \sum_{k=1}^n v_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{car } e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0).$$

Conclusion :

$$I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

5) • Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
 M_n - M_{n-1} &= \sqrt{n} I_n - \sqrt{n-1} I_{n-1} \\
 &= \sqrt{n} I_n - \sqrt{n-1} \frac{2n+1}{2n} I_n \\
 &= \left(\sqrt{n} \cdot 2n - \sqrt{n-1} \cdot (2n+1) \right) \frac{I_n}{2n} \\
 &= \left(\sqrt{n \cdot (2n)^2} - \sqrt{(n-1)(2n+1)^2} \right) \frac{I_n}{2n}.
 \end{aligned}$$

$I_{n-1}/I_n = (2n+1)/(2n)$
 on factorise

En développant, on s'assure que $n \cdot (2n)^2 \geq (n-1)(2n+1)^2$.
 Ainsi, $M_n - M_{n-1} \geq 0$. La suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

• De même, on montre que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

• Rappelons que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, elle est donc bornée. Il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|I_n| \leq C$. Ainsi,

$$|K_n - M_n| = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) |I_n| \leq (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) C = \frac{C}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Par le théorème d'encadrement, $K_n - M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Les suites $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

• D'après le théorème des suites adjacentes, les suites $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune. Notons a cette limite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M_n \leq a \leq K_n \Rightarrow \sqrt{n} I_n \leq a \leq \sqrt{n+1} I_n.$$

Comme $I_n > 0$,

$$1 \leq \frac{a}{\sqrt{n} I_n} \leq \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}.$$

Par encadrement, $\frac{a}{\sqrt{n} I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, c'est-à-dire, $I_n \sim \frac{a}{\sqrt{n}}$.

Exercice 9

1) a) g est continue sur $[\alpha, \beta]$. Soit G une primitive de g . G est continue sur $[\alpha, \beta]$, dérivable sur $] \alpha, \beta [$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c \in] \alpha, \beta [$ tel que :

$$G(\beta) - G(\alpha) = (\beta - \alpha) G'(c) = (\beta - \alpha) g(c).$$

Par définition des intégrales,

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt = G(\beta) - G(\alpha) = (\beta - \alpha) g(c).$$

- b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Appliquons le résultat précédent, il existe c_x compris entre $x + a$ et $x + b$ tel que

$$\int_{x+a}^{x+b} f(u) du = f(c_x)((x+b) - (x+a)) = (b-a)f(c_x).$$

Or, par construction, $c_x \geq a + x$. Par minoration, puis, par composition,

$$c_x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad f(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} L \quad \Rightarrow \quad f(c_x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L.$$

En conclusion,
$$\int_{x+b}^{x+a} f(u) du = -\int_{x+a}^{x+b} f(u) du \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L(a-b).$$

De même,
$$\int_{x+a}^{x+b} f(u) du \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell(b-a).$$

2) a)
$$\begin{aligned} \int_0^x (f(a+t) - f(b+t)) dt &= \int_0^x f(a+t) dt - \int_0^x f(b+t) dt \\ &= \int_a^{x+a} f(u) du - \int_b^{x+b} f(v) dv \\ &= \left(\int_a^b f(u) du + \int_b^{x+a} f(u) du \right) + \int_{x+b}^b f(v) dv \\ &= \int_a^b f(u) du + \int_{x+b}^{x+a} f(u) du. \end{aligned}$$

linéarité
 $u = a + t,$
 $v = b + t$
relation de Chasles
relation de Chasles

- b) D'après les questions précédentes,

$$\int_0^x (f(a+t) - f(b+t)) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt + L(a-b).$$

L'intégrale est donc bien convergente et

$$\int_0^{+\infty} (f(a+t) - f(b+t)) dt = \int_a^b f(t) dt + L(a-b).$$

3) De même,
$$\int_{-\infty}^0 (f(a+t) - f(b+t)) dt = -\int_a^b f(t) dt + \ell(b-a).$$

4) De nouveau, les intégrales sont convergentes, la relation de Chasles s'applique

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+t) - f(b+t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 (f(a+t) - f(b+t)) dt + \int_0^{+\infty} (f(a+t) - f(b+t)) dt \\ &= \boxed{(L - \ell)(a - b)}. \end{aligned}$$

Exercice 10 Étude d'une intégrale à paramètre

1) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x(1+t)}$ est continue sur $[1, +\infty[$. On a une intégrale généralisée en $+\infty$. Or,

$$\frac{1}{t^x(1+t)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}.$$

La fonction f est positive. D'après le critère d'équivalence, l'intégrale $F(x)$ est de même nature que l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}}$ qui est convergente ($x+1 > 1$).

La fonction F est bien définie sur \mathbb{R}_*^+ .

2) Soient x, y deux réels avec $x < y$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$0 < t^x < t^y \Rightarrow 0 < t^x(1+t) < t^y(1+t) \Rightarrow \frac{1}{t^x(1+t)} > \frac{1}{t^y(1+t)}.$$

Par croissance de l'intégrale, $F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} > \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^y(1+t)} = F(y)$.

Précisons que $F(x) \neq F(y)$. En effet,

$$F(y) - F(x) = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^y(1+t)} - \frac{1}{t^x(1+t)} \right) dt.$$

Cette intégrale ne peut-être nulle car l'intégrande est continue, positive et non nulle. En conclusion,

F est une fonction strictement décroissante.

3) a) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$(1+t)t^x \geq 2t^x > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{t^x(1+t)} < \frac{1}{2t^x}.$$

Par croissance de l'intégrale,

$$0 < F(x) < \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t^x} = \frac{1}{2(x-1)}.$$

b) Par le *théorème d'encadrement*,

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$. Pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$t^x(1+t) \leq t^x \cdot 2t \Rightarrow \frac{1}{t^x(1+t)} \geq \frac{1}{2t^{x+1}}$$

Par *croissance de l'intégrale*,
$$F(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{2t^{x+1}} = \frac{1}{2x}.$$

b) Par le *théorème de minoration*,

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty.$$

5) a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_*^{+2}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$F(x) - F(y) = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} - \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^y(1+t)} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t} \left(\frac{1}{t^x} - \frac{1}{t^y} \right) dt.$$

Distinguons deux cas :

• **Premier cas :** $x < y$. F étant décroissante sur \mathbb{R}_*^+ , $|F(x) - F(y)| = F(x) - F(y)$.

$$\text{Pour tout } t \in [1, +\infty[, \quad \frac{1}{1+t} \left(\frac{1}{t^x} - \frac{1}{t^y} \right) \leq \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t^x} - \frac{1}{t^y} \right) = \frac{1}{t^{x+1}} - \frac{1}{t^{y+1}}$$

> 0 car $t^x < t^y$

Par *croissance de l'intégrale*,

$$F(x) - F(y) \leq \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^{x+1}} - \frac{1}{t^{y+1}} \right) dt = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

• **Second cas :** $y < x$. Les rôles de x et y s'échangent. On obtient :

$$|F(x) - F(y)| = F(y) - F(x) \leq \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

Conclusion.

$$\text{pour } (x, y) \in \mathbb{R}_*^{+2}, \quad |F(x) - F(y)| \leq \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

• Soit $a \in \mathbb{R}_*^+$. $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$. Par le *théorème d'encadrement*,

$$F(x) - F(a) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \Rightarrow F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} F(a).$$

F est continue en a . Ce résultat étant valable pour tout $a \in \mathbb{R}_*^+$,

$$F \text{ est continue sur } \mathbb{R}_*^+.$$

b) On a démontré dans les questions précédentes :

• F est strictement croissante sur \mathbb{R}_*^+ ;

- F est continue sur \mathbb{R}_*^+ ;
- $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ et $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

D'après le théorème de la bijection,

F est une bijection de \mathbb{R}_*^+ dans \mathbb{R}_*^+ .

6) a) Soit $A \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\int_1^A \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^A \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = [\ln(t) - \ln(1+t)]_1^A = \ln(2) + \ln\left(\frac{A}{A+1}\right).$$

Par continuité de la fonction logarithme en 1,

$$\frac{A}{A+1} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1 \Rightarrow \ln\left(\frac{A}{A+1}\right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ln(1) = 0.$$

Finalement,

$F(1) = \ln(2)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_*^+$.

$$\begin{aligned} F(x) + F(x+1) &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{x+1}(1+t)} + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)} \\ &= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^{x+1}(1+t)} + \frac{1}{t^x(1+t)} \right) dt \quad \left. \begin{array}{l} \text{linéarité} \\ \downarrow \end{array} \right\} \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}(1+t)} (1+t) dt \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{x+1}} dt = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

c) Soit $x \in]1, +\infty[$. Par décroissance de la fonction F ,

$$\begin{aligned} &F(x-1) \geq F(x) \geq F(x+1) \\ \Rightarrow &F(x) + F(x-1) \geq 2F(x) \geq F(x+1) + F(x) \quad \left. \begin{array}{l} \text{on ajoute } F(x) \\ \text{question précédente} \end{array} \right\} \\ \Rightarrow &\frac{1}{x-1} \geq 2F(x) \geq \frac{1}{x} \\ \Rightarrow &\frac{x}{x-1} \geq 2x \cdot F(x) \geq 1. \quad \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \times x \text{ avec } x > 0 \end{aligned}$$

Par le théorème d'encadrement, $2x \cdot F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. C'est-à-dire,

$F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

Exercice 11

- 1) a) Effectuons le changement de variable $u = -1/t$ de classe \mathcal{C}^1 et strictement monotone. Les intégrales sont de même nature (convergentes) et

$$\int_0^{+\infty} f(t - 1/t) dt = \int_{-\infty}^0 f(-1/u + u) \frac{du}{u^2} = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{u^2} f(u - 1/u) du.$$

De même
$$\int_{-\infty}^0 f(t - 1/t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} f(u - 1/u) du.$$

- b) Les intégrales sont convergentes, la relation de Chasles s'applique

$$\begin{aligned} & 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - 1/t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t - 1/t) dt + \int_{-\infty}^0 f(t - 1/t) dt + \int_0^{+\infty} f(t - 1/t) dt + \int_0^{+\infty} f(t - 1/t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t - 1/t) dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} f(u - 1/u) du + \int_0^{+\infty} f(t - 1/t) dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{u^2} f(u - 1/u) du \\ &= \int_{-\infty}^0 f(t - 1/t) dt + \int_{-\infty}^0 \frac{1}{u^2} f(u - 1/u) du + \int_0^{+\infty} f(t - 1/t) dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2} f(u - 1/u) du \\ &= \int_{-\infty}^0 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) f(u - 1/u) du + \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) f(u - 1/u) du. \end{aligned}$$

Enfinement,
$$2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - 1/t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) f(t - 1/t) dt.$$

- c) Effectuons le changement de variable $x = u - 1/u$. Précisons que le changement de variable est bien de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_*^+ , strictement monotone avec

$$u - \frac{1}{u} \xrightarrow[u \rightarrow 0^+]{-} -\infty \quad \text{et} \quad u - \frac{1}{u} \xrightarrow[u \rightarrow +\infty]{+} +\infty.$$

De plus, « $dx = (1 + 1/u^2) du$ »,

$$\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) f(u - 1/u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

Effectuons maintenant le changement de variable $x = u - 1/u$ sur \mathbb{R}_*^- ,

$$\int_{-\infty}^0 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) f(u - 1/u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx.$$

En reprenant le résultat précédent, on trouve

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - 1/t) dt &= \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) f(u - 1/u) du + \int_{-\infty}^0 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) f(u - 1/u) du \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx. \end{aligned}$$

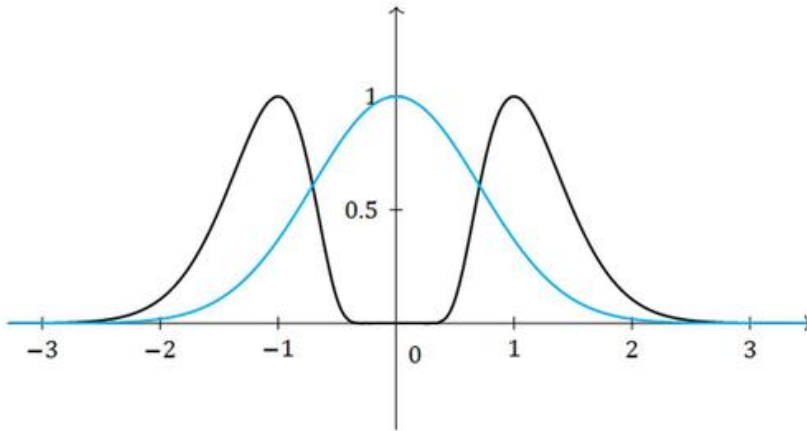
D'où le résultat.

2) Précisons que par le critère de négligeabilité, les intégrales sont convergentes. D'après le résultat précédent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-1/t)^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2+2-1/t^2} dt = e^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2-1/t^2} dt.$$

Concluons

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2-1/t^2} dt = \sqrt{\pi}e^{-2}.$$



Graphes de $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto e^{-(t-1/t)^2}$.

Dérivées successives

28

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Soit $P_0 \in \mathbb{R}_p[x]$. Justifier que la dérivée n -ième de $f : x \in \mathbb{R} \mapsto P_0(x)e^{-2x}$ est de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto P_n(x)e^{-2x} \quad \text{avec} \quad P_n \in \mathbb{R}_p[x].$$

Exercice 2 * Dérivées n -ièmes et fonctions rationnelles

- 1) Donner la dérivée n -ième de $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{1}{x}$.
- 2) En déduire les dérivées n -ièmes des fonctions

$$\ln \quad \text{et} \quad g : x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \mapsto \frac{2}{x^2 - 1}$$

Exercice 3 *** Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in \mathbb{R}_*^+$, posons $f_n(x) = x^n \ln(x)$.

- 1) Vérifier que f_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_*^+ avec, pour $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$f_n^{(n)}(x) = n! \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

Indication. On pourra procéder par récurrence.

- 2) a) Préciser les dérivées successives de la fonction logarithme.

b) En déduire,
$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \binom{n}{k}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 ** Dérivées successives dans le cas polynomial

Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. On suppose que P est positif. Soit

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(x).$$

L'objectif de l'exercice est de prouver que Q est aussi un polynôme positif.

- 1) Que dire du degré de P ? de Q ? Même question avec le coefficient dominant.
- 2) En étudiant $Q - Q'$, conclure.

Exercice 5 ** Pour $x \in D =]-\pi/2; \pi/2[$, on pose $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

On définit la suite de polynôme $(P_n)_n$ par

$$P_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1}(x) = (1 - x^2)P_n'(x) + (n + 1)xP_n(x).$$

- 1) Justifier que la fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur D et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in D, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}.$$

- 2) En remarquant que f est paire, préciser la parité de $f^{(n)}$, en déduire celle de P_n .

Exercice 6 *** Existence d'un zéro de $f^{(n)}$

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable n fois. On suppose qu'il existe

$$a_0 < a_1 < \dots < a_n \text{ tels que pour tout } i \in \llbracket 0, n \rrbracket : f(a_i) = 0.$$

- 1) En raisonnant par récurrence sur le nombre de zéros de $f^{(k)}$, prouver qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f^{(n)}(\alpha) = 0$.
- 2) Application.
Prouver que l'équation $e^x = P(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ avec P polynomial n'admet qu'un nombre fini de solutions.

Exercice 7 *** On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

- 1) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

2) Pour tous n entier naturel, x réel, on pose $P_n(x) = (1 + x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)$.

a) Vérifier que pour tout réel x

$$(1 + x^2)P_n'(x) = 2(n + 1)xP_n(x) + P_{n+1}(x).$$

b) Montrer que $P_n \in \mathbb{R}_n[x]$.

3) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f^{(n)}(x)$.

b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes.

Rappel. On pourra utiliser la variante du théorème de Rolle de l'exercice 10 du chapitre 15 : si $g : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable avec $g(a) = \lim_{+\infty} g$, alors g' s'annule au moins une fois sur $]a, +\infty[$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Appliquons la formule de Leibniz avec P_0 et $g : x \mapsto e^{-2x}$. On justifie ainsi que f est infiniment dérivable sur \mathbb{R} avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g^{(n)} = (-2)^n g$,

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} = \left(\sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} \binom{n}{k} P_0^{(k)} \right) \cdot g = P_n \cdot g,$$

avec
$$P_n = \sum_{k=0}^n (-2)^{n-k} \binom{n}{k} P_0^{(k)} \in \mathbb{R}[x].$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_0^{(k)} \in \mathbb{R}_p[x]$, par stabilité par combinaison linéaire de $\mathbb{R}_p[x]$, $P_n \in \mathbb{R}_p[x]$.

Exercice 2 Dérivées n -ièmes et fonctions rationnelles

Remarque

Calculons les premières dérivées

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{2 \times 3}{x^4}.$$

Ces premiers calculs permettent de conjecturer une formule générale que l'on prouve par récurrence.

1) Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : f \text{ est } n \text{ fois dérivable et } \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** On vérifie que pour tout réel x non nul

$$\frac{(-1)^0 0!}{x^{0+1}} = \frac{1}{x} = f(x).$$

$\mathcal{P}(0)$ est donc vraie. Par convention : $0! = 1$.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Tout d'abord, en tant que fraction rationnelle (le dénominateur ne s'annule pas), f est $(n+1)$ fois dérivable et pour tout réel x non nul : puisque $f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-(n+1)}$,

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = (-1)^n n! (-1)(n+1)x^{-(n+1)-1} = \frac{(-1)^{n+1} (n+1)!}{x^{n+2}}.$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

2) • Sachant que $\ln' = f$ (sur \mathbb{R}_+^*), on peut affirmer d'après ce qui précède que la fonction logarithme est n fois dérivable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\ln^{(n)}(x) = f^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n} \quad \text{et} \quad \ln^{(0)} = \ln.$$

• Notons que pour tout réel $x \neq \pm 1$

$$g(x) = \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = f(x-1) - f(x+1).$$

Par composition, les fonctions $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \mapsto f(x-1)$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \mapsto f(x+1)$ sont infiniment dérivables sur leur ensemble de définition. Par somme, il en est de même pour g sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il vient pour tout réel $x \neq \pm 1$

$$g^{(n)}(x) = f^{(n)}(x-1) - f^{(n)}(x+1) = \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}.$$

Exercice 3

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par produit d'un polynôme et de la fonction logarithme de classe \mathcal{C}^∞ , f_n est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* . Prouvons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad \text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f_n^{(n)}(x) = n! \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right).$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

• **Initialisation.** Pour $n = 1$, $f_1(x) = x \ln(x)$ et, par produit,

$$f'(x) = 1 + \ln(x) = 1! \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} \right).$$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Posons $g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x$ de sorte que $f_{n+1} = g \cdot f_n$.

g est $(n+1)$ -dérivable avec pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g(x) = x, \quad g'(x) = 1, \quad g^{(k)}(x) = 0 \quad \text{pour } k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}.$$

L'hypothèse de récurrence donne, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$f_n^{(n)}(x) = n! \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \quad \text{et} \quad f_n^{(n+1)}(x) = n! \frac{1}{x}.$$

D'après la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x) \cdot f_n^{(n+1-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{n+1}{k} g^{(k)}(x) \cdot f_n^{(n+1-k)}(x) && \left. \begin{array}{l} g^{(k)}(x) = 0, k > 1 \\ \binom{n+1}{0} = 1, \binom{n+1}{1} = n+1 \end{array} \right\} \\ &= x f_n^{(n+1)}(x) + (n+1) f_n^{(n)}(x) \\ &= x \cdot n! \frac{1}{x} + (n+1) \cdot n! \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{hypothèse de récurrence} \\ &= (n+1)! \cdot \frac{1}{n+1} + (n+1)! \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) \\ &= (n+1)! \left(\ln(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $\mathcal{P}(n+1)$ aussi.

• **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2) a) On a démontré à l'exercice 2 que

$$\ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \quad \text{et} \quad \ln^{(0)} = \ln.$$

- b) Posons $g_n : x \in \mathbb{R}_*^+ \mapsto x^n$ de sorte que $f_n = \ln \cdot g_n$. De plus, par récurrence immédiate, pour tous $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$g_n^{(k)}(x) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)x^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}.$$

Appliquons la formule de Leibniz en isolant le premier terme de la somme

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) g_n^{(n-k)}(x) \\ &= \ln^{(0)}(x) g_n^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) g_n^{(n-k)}(x) \\ &= n! \ln(x) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) g_n^{(n-k)}(x). \end{aligned}$$

En utilisant les différentes expressions des dérivées

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \ln^{(k)}(x) g_n^{(n-k)}(x) &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \cdot \frac{n!}{(n-(n-k))!} x^k \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \cdot \frac{n!}{k}. \end{aligned}$$

Pour $x = 1$, les deux expressions obtenues de $f_n^{(n)}$ donnent bien

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$$

Remarque

On pourra consulter les exercices 9 du chapitre 4 et 5 du chapitre 16 pour une preuve par télescopage et via le calcul intégral.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 Dérivées successives dans le cas polynomial

Précisons que si P est un polynôme constant, le résultat est évident. Dans la suite, P est un polynôme non constant de degré d .

- 1) Si P est un polynôme de degré impair alors

$$\begin{cases} P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \\ P(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty \\ P(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty. \end{cases}$$

Dans les deux cas, P ne peut-être un polynôme positif. Par contraposée,

$$\boxed{P \text{ est de degré pair.}}$$

Notons que Q est aussi de degré pair puisque, par récurrence, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\deg(P^{(k)}) < \deg(P), \quad \text{puis,} \quad \sum_{k=1}^n \deg(P^{(k)}) < \deg(P).$$

Ainsi, $\deg(Q) = \deg(P)$.

• Soit a_d le coefficient dominant de P . On a $P(x) = a_d x^d + R(x)$ avec $\deg(R) \leq d - 1$. Alors

$$Q(x) = a_d x^d + R(x) + \underbrace{\sum_{k=0}^n P^{(k)}(x)}_{\deg < d-1}$$

P et Q ont le même coefficient dominant. Comme P est à valeurs positives, ce coefficient dominant est positif car $\lim_{+\infty} P$ est du signe de a_d .

Remarque

Précisons que les coefficients de P ne sont pas nécessaire tous positifs.

Exemple : $P(x) = x^2 - x + 1$.

- 2) D'après la question précédente, $\lim_{+\infty} Q = \lim_{-\infty} Q = +\infty$. D'après l'exercice 6 du chapitre 15, Q admet nécessairement un minimum global. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $Q(\gamma)$ soit le minimum. Précisons que, en tant que extremum (local) atteint à l'intérieur de l'intervalle, $Q'(\gamma) = 0$. Par linéarité de la dérivation,

$$\begin{aligned} Q(x) - Q'(x) &= \sum_{k=0}^n P^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^n P^{(k)'}(x) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(x) - \sum_{k=0}^n P^{(k+1)}(x) \\ &= P^{(0)}(x) - P^{(n+1)}(x) = P(x). \end{aligned}$$

En particulier, $P(\gamma) = Q(\gamma) - Q'(\gamma) = Q(\gamma)$.

Comme P est à valeurs positives, $P(\gamma) \geq 0$. Q admet un minimum global positif,

Q est un polynôme positif.

Exercice 5

- 1) La fonction cosinus est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et ne s'annule pas sur D . Par quotient, f est de classe C^∞ sur D . Démontrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall x \in D, \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin(x))}{\cos^{n+1}(x)}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** Comme $P_0 = 1$, on constate que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

• Par composition, la dérivée de $x \in D \mapsto \cos^{n+1}(x)$ est $x \in D \mapsto (n+1)(-\sin(x)) \cos^n(x)$;

• Par composition, la dérivée de $x \in D \mapsto P_n(\sin(x))$ est $x \in D \mapsto \cos(x)P_n'(\sin(x))$.

Par quotient de fonctions dérivables sur D , $f^{(n)}$ est dérivable et pour tout $x \in D$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= f^{(n)'}(x) \\ &= \frac{\cos(x)P_n'(\sin(x)) \cos^{n+1}(x) - P_n(\sin(x))(n+1)(-\sin(x)) \cos^n(x)}{(\cos^{n+1}(x))^2} \\ &= \frac{P_n'(\sin(x)) \cdot \cos^{n+2}(x) + (n+1) \sin(x) \cos^n(x) P_n(\sin(x))}{\cos^{2n+2}(x)} \\ &= \frac{P_n'(\sin(x)) \cdot \cos^2(x) + (n+1) \sin(x) P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{simplification} \\ \text{par } \cos^n(x) \end{array} \right\} \\ &= \frac{P_n'(\sin(x)) \cdot (1 - \sin^2(x)) + (n+1) \sin(x) P_n(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)} \\ &= \frac{P_{n+1}(\sin(x))}{\cos^{n+2}(x)}. \end{aligned}$$

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

2) Par récurrence, on montre que

- $f^{(n)}$ est une fonction paire si n est un nombre pair;
- $f^{(n)}$ est une fonction impaire si n est un nombre impair.

Remarque

On pourra consulter l'exercice 16 du chapitre 15 pour les détails. On peut résumer avec une formule

$$\forall x \in D, \quad f^{(n)}(-x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

• Comme la fonction cosinus est paire, $f^{(n)}$ et $x \in D \mapsto P_n(\sin(x))$ ont la même parité. Soit $t \in]-1, 1[$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in D$ tel que $\sin(x) = t$, puis,

$$\begin{aligned} P_n(-t) &= P_n(-\sin(x)) = P_n(\sin(-x)) = \cos(-x)^{n+1} f^{(n)}(-x) \\ &= (-1)^n \cos(x)^{n+1} f^{(n)}(x) = (-1)^n P_n(t). \end{aligned}$$

Autrement dit, le polynôme $P_n(t) - (-1)^n P_n(t)$ est nul sur tout l'intervalle $] - 1, 1[$. Or, seul le polynôme nul a une infinité de racines. D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P_n(t) - (-1)^n P_n(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad P_n(t) = (-1)^n P_n(t).$$

P_n a la même parité que $f^{(n)}$.

Remarque

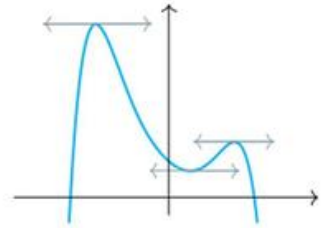
On peut aussi procéder par récurrence à partir de la définition de la suite $(P_n)_n$.

Exercice 6 Existence d'un zéro de $f^{(n)}$

Remarque

On montre pour cette fonction f , grâce à une généralisation du théorème de Rolle, que la dérivée n -ième s'annule au moins une fois.

Il faut bien comprendre que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction vérifiant les hypothèses du théorème de Rolle, f est une fonction admettant un extremum dans l'intervalle *sans les bords* $]a, b[$. La tangente en ce point est horizontale et le nombre dérivé est nul.



1) Procédons par récurrence sur la propriété, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$\mathcal{P}(k)$: $f^{(k)}$ s'annule au moins $n + 1 - k$ fois dans l'intervalle $[a, b]$.

• **Initialisation.** $\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse sur $f = f^{(0)}$.

• **Hérédité.** Soit $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie, démontrons que $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $b_0 < b_1 < \dots < b_{n-k}$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 0, n - k \rrbracket, \quad f^{(k)}(b_i) = 0.$$

Soit $i \in \llbracket 0, n - k - 1 \rrbracket$.

On sait que $f^{(k)}$ est continue sur $[b_i, b_{i+1}]$, dérivable sur $]b_i, b_{i+1}[$, $f^{(k)}(b_i) = f^{(k)}(b_{i+1})$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in]b_i, b_{i+1}[$ tel que $f^{(k+1)}(c_i) = f^{(k)'}(c_i) = 0$.

On a donc $n + 1 - (k + 1)$ réels c_i tels que

$$b_0 < c_0 < b_1 < c_1 < \dots < c_{n-k-1} < b_{n-k} \quad \text{et} \quad f^{(k+1)}(c_i) = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(k + 1)$ est prouvé car les c_i sont bien distincts.

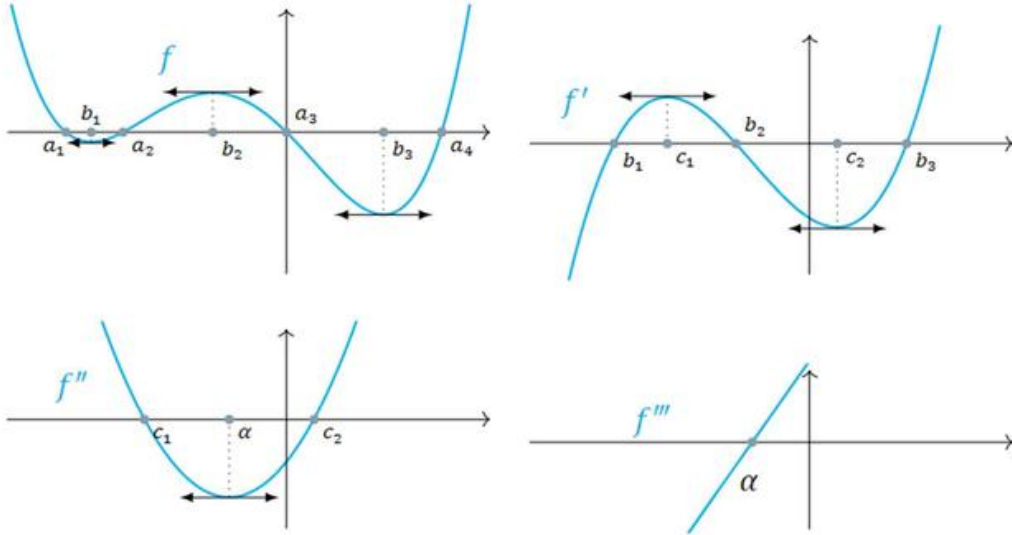
• **Conclusion.** Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

En particulier, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, $f^{(n)}$ s'annule au moins $n + 1 - n = 1$ fois.

Remarque

Illustrons ce résultat. Si f s'annule 4 fois en a_1, a_2, a_3 et a_4 alors,

- f' s'annule au moins $4 - 1 = 3$ fois en b_1, b_2 et b_3 ;
- f'' s'annule au moins $4 - 2 = 2$ fois en c_1 et c_2 ;
- f''' s'annule au moins $4 - 3 = 1$ fois α .



2) Soit d le degré de P . Posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x - P(x)$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que l'équation admet une infinité de solutions. En particulier la fonction f s'annule au moins $d + 2$ fois. f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} par différence de fonctions C^∞ . D'après le résultat précédent, $f^{(d+1)}$ s'annule au moins une fois. Or,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(d+1)}(x) = e^x \quad \text{car} \quad P^{(d+1)} = 0.$$

On obtient une contradiction : la fonction exponentielle ne s'annule pas. Finalement,

L'équation admet un nombre fini de solutions.

Exercice 7

Remarque

Noter que f est la dérivée de la fonction arctangente. Cet exercice propose donc une étude des dérivées successives de la fonction arctangente.

- 1) En tant que fraction rationnelle (quotient de deux polynômes) dont le dénominateur ne s'annule pas, f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
- 2) Notons que par produit, P_n est aussi de classe C^∞ sur \mathbb{R} .
 - a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_n(x) = (1 + x^2)^{n+1} f^{(n)}(x).$$

On en déduit, par dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= (n+1)2x(1+x^2)^n \cdot f^{(n)}(x) + (1+x^2)^{n+1} \cdot f^{(n+1)}(x) \\ &= \frac{(n+1)2x}{1+x^2} \cdot \underbrace{(1+x^2)^{n+1} f^{(n)}(x)}_{=P_n(x)} + \frac{1}{1+x^2} \cdot \underbrace{(1+x^2)^{n+2} f^{(n+1)}(x)}_{P_{n+1}(x)}. \end{aligned}$$

Par définition de P_n et P_{n+1} ,

$$P_n'(x) = \frac{(n+1)2xP_n(x)}{1+x^2} + \frac{P_{n+1}(x)}{1+x^2}.$$

D'où le résultat en multipliant par $1+x^2$.

b) Précisons que $P_0 = 1$. La relation précédente se reformule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - 2(n+1)xP_n(x).$$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n) : P_n \in \mathbb{R}_n[x]$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** $P_0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\deg(P_n') < \deg(P_n) \leq n \quad \Rightarrow \quad \deg((1+x^2)P_n') \leq n+1;$$

$$\deg(P_n) \leq n \quad \Rightarrow \quad \deg(xP_n) \leq n+1.$$

Par combinaison linéaire, $\deg(P_{n+1}) \leq n+1$.

Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \in \mathbb{R}_n[x]$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le résultat précédent, $\deg(P_n) < \deg((x^2+1)^{n+1})$, donc

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0.$$

b) Prouvons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad \text{le polynôme } P_n \text{ admet } n \text{ racines réelles distinctes.}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- **Initialisation.** $P_0 = 1$ n'a pas de racines, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Notons a_1, a_2, \dots, a_n les réels tels que

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P_n(a_i) = 0.$$

On en déduit que $f^{(n)}$ s'annule n fois (au point a_i). Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

- $f^{(n)}$ est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$,
- $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$,
- $f^{(n)}(a_i) = f^{(n)}(a_{i+1})$.

D'après le théorème de Rolle, $f^{(n)'} = f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $]a_i, a_{i+1}[$.
On a donc construit b_1, b_2, \dots, b_{n-1} tels que

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_{n-1} < b_{n-1} < a_n.$$

Or d'après la question précédente, $f^{(n)}(a_n) = \lim_{+\infty} f$. Et d'après le rappel de l'exercice 10 du chapitre 15, il existe b_n tel que

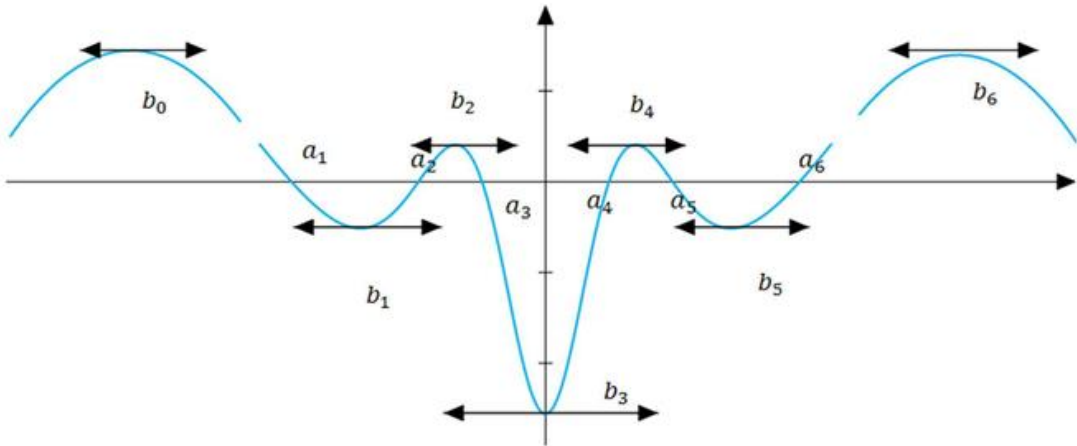
$$b_n > a_n \quad \text{et} \quad f^{(n+1)}(b_n) = f^{(n)'}(b_n) = 0.$$

De même, sur $] -\infty, a_1]$, il existe b_0 tel que

$$b_0 < a_1 \quad \text{et} \quad f^{(n+1)}(b_0) = f^{(n)'}(b_0) = 0.$$

Au total, on a trouvé $n + 1$ zéros à la fonction $f^{(n+1)}$.

On en déduit $n + 1$ racines à P_{n+1} . Comme P_{n+1} est de degré au plus $n + 1$, on a exhibé toutes les racines de P_{n+1} .



Donc, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

- **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n admet n racines réelles distinctes.

Formules de Taylor

29

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, |e^x - 1 - x| < \frac{1}{2}x^2e^x$.

Exercice 2 * Deux exemples d'encadrement

1) Écrire, après avoir justifié que cela est possible, la formule de Taylor avec reste intégral pour \exp à l'ordre 2, entre 0 et 1.

En déduire que $\frac{5}{2} \leq e \leq 3$.

2) Écrire, après avoir justifié que cela est possible, la formule de Taylor avec reste intégral pour $t \mapsto \ln(1+t)$ à l'ordre 3, entre 0 et x , où $x \in \mathbb{R}^+$ est fixé. En déduire

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 3 ** Développement en série des fonctions cosinus et sinus

1) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 ** Une majoration des fonctions de classe C^2

Soit f une application de classe $C^{+\infty}$ de $[0,1]$ dans \mathbb{R} .

- Justifier que le nombre $\max_{x \in [0,1]} f''(x)$ existe. On note M ce maximum.
- En utilisant deux fois la formule de Taylor avec reste intégral, avec des bornes bien choisies, montrer que : $f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \leq \frac{M}{4}$.
- Pour quelles applications y a-t-il égalité ?

Exercice 5 *** Inégalité de Kolmogorov

Soit f une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

On suppose qu'il existe M_0 et M_2 tels que : $|f| \leq M_0$ et $|f''| \leq M_2$ sur \mathbb{R} .

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Justifier que pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leq \frac{M_2}{2} h^2 \quad \text{et} \quad |f(x-h) - f(x) + hf'(x)| \leq \frac{M_2}{2} h^2.$$

- En déduire que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$: $|f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2}{2} h$.
- a) Déterminer le minimum de $\varphi : x \mapsto \frac{M_0}{x} + \frac{M_2}{2} x$ sur \mathbb{R}_+^* .
b) Conclure en montrant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}$.

Exercice 6 *** Application de la formule de Taylor avec reste intégral

- Montrer que si $x > 1$, la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ diverge.

Pour la suite de cet exercice $x \in [0,1]$. Soit $f : t \in]-1, +\infty[\mapsto \ln(1+t) \in \mathbb{R}$.

- Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée k -ième de f .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n pour f entre 0 et x .
- En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ converge, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x).$$

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. L'application \exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, x]$.

L'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 appliquée à \exp sur $[0, x]$ donne

$$|\exp(x) - \exp(0) - \exp'(0)x| \leq \frac{M_2}{2}|x - 0|^2, \quad \text{avec } M_2 = \max_{[0, x]} |\exp^{(2)}|$$

Or $\exp^{(2)} = \exp' = \exp$.

Par positivité et croissance de \exp sur \mathbb{R}

$$\forall t \in [0, x], \quad |\exp(t)| = \exp(t) \leq \exp(x)$$

Donc $M_2 = e^x$. En remplaçant par les valeurs, puisque $|x - 0|^2 = x^2$,

$$|e^x - 1 - x| \leq \frac{1}{2}x^2 e^x.$$

Exercice 2 Deux exemples d'encadrement

1) L'application \exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , donc de classe \mathcal{C}^3 .

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 donne :

$$\exp(1) = \sum_{k=0}^2 \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} \exp^{(3)}(t) dt.$$

Or : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exp^{(k)} = \exp$, et $\exp(0) = 1$; il reste après simplification :

$$e = \frac{5}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} e^t dt. \quad (\bullet)$$

Encadrons l'intégrande, puis appliquons la croissance de l'intégrale. Soit $t \in [0, 1]$.

$$0 < t < 1 \xrightarrow[\substack{\text{exp croît} \\ \text{sur } \mathbb{R}}]{\text{exp croît}} 0 < e^0 < e^t < e^1 \xrightarrow[(1-t)^2 > 0]{\text{exp croît}} 0 < \frac{(1-t)^2}{2} e^t < \frac{(1-t)^2}{2} e$$

$$\text{D'où,} \quad 0 < \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} e^t dt < e \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2} dt = e \left[-\frac{(1-t)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{e}{6}.$$

Avec (\bullet) , on obtient l'encadrement, $\frac{5}{2} \leq e \leq \frac{5}{2} + \frac{e}{6}$.

L'inégalité de droite donne $e - \frac{e}{6} < \frac{5}{2}$. D'où $e < 3$.

Conclusion :

$$\frac{5}{2} \leq e < 3.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

L'application \ln est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* ; il en résulte par composition que l'application $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 3, donne :

$$f(x) = \sum_{k=0}^3 \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t) dt.$$

On vérifie que $f' : t \mapsto \frac{1}{1+t}$, $f'' : t \mapsto -\frac{1}{(1+t)^2}$, $f^{(3)} : t \mapsto \frac{2}{(1+t)^3}$ et $f^{(4)} : t \mapsto -\frac{6}{(1+t)^4}$.

• En évaluant en 0 et en simplifiant, on obtient

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \int_0^x (x-t)^3 \times \frac{1}{(1+t)^4} dt.} \quad (*)$$

On encadre l'intégrale. Pour $t \in [0, x]$,

$$1 \leq 1+t \xrightarrow[\substack{u \rightarrow 1/u^4 \\ \text{décroit sur } \mathbb{R}_+^*}]{\quad} 0 \leq \frac{1}{(1+t)^4} \leq 1 \xrightarrow[\substack{x-t \geq 0}]{\quad} 0 \leq \frac{(x-t)^3}{(1+t)^4} \leq (x-t)^3$$

Par croissance de l'intégrale ($0 < x$), on obtient :

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^3}{(1+t)^4} dt \leq \int_0^x (x-t)^3 dt = \left[-\frac{(x-t)^4}{4} \right]_0^x = \frac{x^4}{4}$$

En remplaçant dans (*) (attention au signe moins devant l'intégrale),

$$\boxed{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 3 Développement en série des fonctions cosinus et sinus

1) On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}(n) : \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

• **Initialisation.** Soit $x \in \mathbb{R} : \cos^{(0)}(x) = \cos(x)$ et $\sin^{(0)}(x) = \sin(x)$. $\mathcal{P}(0)$ est vérifiée.

• **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On dérive, avec la formule des dérivées composées et la relation :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(t + \pi/2) = -\sin(t).$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \cos^{(n+1)}(x) &\stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \cos' \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \cos \left(x + (n+1) \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Il en va de même pour la seconde formule. $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

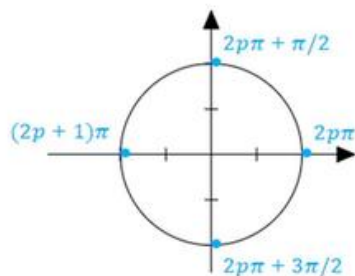
• **Conclusion.** $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 2) Si $n \in \mathbb{N}$ et si f est une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur \mathbb{R} telle que $|f^{(n+1)}|$ admette un majorant M_{n+1} sur \mathbb{R} , alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et x donne

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

• Considérons $f : x \mapsto \cos(x)$. La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= \cos \left(k \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = 4p \ (p \in \mathbb{N}) \\ 0 & \text{si } k = 4p + 1 \text{ ou } k = 4p + 3 \\ -1 & \text{si } k = 4p + 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ impair} \\ (-1)^\ell & \text{si } k \text{ pair } (k = 2\ell, \ell \in \mathbb{N}). \end{cases} \end{aligned}$$



Soit $n \in \mathbb{N}$. On écrit la formule à l'ordre $2n$. Il reste

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} x^{2\ell}.$$

La fonction $|\cos|$ est majorée par 1 sur \mathbb{R} . On prend donc $M_{2n+1} = 1$ et on obtient

$$\left| \cos(x) - \sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} x^{2\ell} \right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!}.$$

Par croissance comparée, $\frac{|x|^{2n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'après le théorème d'encadrement, il vient

$$\boxed{\sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^\ell}{(2\ell)!} x^{2\ell} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos(x).}$$

• Considérons $f : x \mapsto \sin(x)$. La fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Pour $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ (-1)^\ell & \text{si } k \text{ impair } (k = 2\ell + 1, \ell \in \mathbb{N}) \end{cases}$.

En continuant comme pour la fonction cos,

$$\sum_{\ell=0}^n \frac{(-1)^\ell}{(2\ell+1)!} x^{2\ell+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(x).$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 Une majoration des fonctions de classe C^2

- 1) Par hypothèse f'' est continue sur le segment $[0,1]$, ce qui justifie l'existence de $\max_{x \in [0,1]} f''(x)$.
- 2) Comme f est de classe $C^{+\infty}$ sur $[0,1]$, on peut utiliser la formule de Taylor avec reste intégral :

- d'abord entre $\frac{1}{2}$ et 1 : $f(1) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \int_{1/2}^1 (1-t)f''(t) dt$;

- puis entre $\frac{1}{2}$ et 0 : $f(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(0 - \frac{1}{2}\right) + \int_{1/2}^0 (0-t)f''(t) dt$.

On en déduit : $f(0) + f(1) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{1/2}^1 (1-t)f''(t) dt + \int_0^{1/2} tf''(t) dt$.

- Pour $t \in [1/2,1]$, on a $1-t \geq 0$ et $f''(t) \leq M$, donc $(1-t)f''(t) \leq (1-t)M$.

- Pour $t \in [0,1/2]$, $tf''(t) \leq tM$.

Par croissance de l'intégrale, il vient

$$\int_{1/2}^1 (1-t)f''(t) dt \leq \int_{1/2}^1 (1-t)M dt = \frac{M}{8} \quad \text{et} \quad \int_0^{1/2} tf''(t) dt \leq \int_0^{1/2} tM dt = \frac{M}{8}.$$

Finalement :

$$f(0) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) \leq \frac{M}{4}.$$

- 3) Il faut qu'il y ait égalité dans les deux intégrales, ce qui entraîne, par le théorème sur les fonctions continues positives d'intégrale nulle, que $f'' = M$ sur $]0,1[$, donc que f est polynomiale de degré 2. La réciproque est facile à vérifier.

Exercice 5 Inégalité de Kolmogorov

- 1) La fonction f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . On peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x+h$ d'une part, entre x et $x-h$ d'autre part avec M_2 comme majorant de $|f''|$ sur \mathbb{R} . On obtient directement le résultat.

- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. La première inégalité de la question 1) donne, en remarquant que $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| = |-f(x+h) + f(x) + hf'(x)|$,

$$-\frac{M_2}{2}h^2 \leq -f(x+h) + f(x) + hf'(x) \leq \frac{M_2}{2}h^2.$$

La seconde inégalité de la question 1) donne :

$$-\frac{M_2}{2}h^2 \leq f(x-h) - f(x) + hf'(x) \leq \frac{M_2}{2}h^2.$$

En additionnant membre à membre, il vient,

$$-M_2h^2 \leq f(x-h) - f(x+h) + 2hf'(x) \leq M_2h^2.$$

D'où

$$|f(x-h) - f(x+h) + 2hf'(x)| \leq M_2h^2.$$

Avec l'inégalité triangulaire, on a pour tous réels a et b , $|a| - |b| \leq |a - b|$, donc

$$|2hf'(x)| - |f(x-h) - f(x+h)| \leq |f(x-h) - f(x+h) + 2hf'(x)| \leq M_2h^2.$$

D'où, comme $h > 0$,

$$\begin{aligned} 2h|f'(x)| &\leq M_2h^2 + |f(x-h) - f(x+h)| \leq M_2h^2 + |f(x-h)| + |f(x+h)| \\ &\leq M_2h^2 + 2M_0. \end{aligned}$$

En divisant par $2h$ qui est positif, il vient :

$$\text{Pour tout } h > 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{M_0}{h} + \frac{M_2}{2}h.$$

- 3) a) L'application φ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* , et pour tout $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\frac{M_0}{x^2} + \frac{M_2}{2} = \frac{M_2x^2 - 2M_0}{2x^2}.$$

$$\text{D'où :} \quad \varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}, \quad \text{avec } \varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}.$$

La fonction φ est décroissante sur l'intervalle $]0, \sqrt{2M_0/M_2}]$, croissante sur l'intervalle $[\sqrt{2M_0/M_2}, +\infty[$, et il en résulte que φ admet un minimum sur \mathbb{R}_+^* , égal à :

$$\varphi(\sqrt{2M_0/M_2}) = \sqrt{M_0M_2/2} + \sqrt{M_0M_2/2} = \sqrt{2M_0M_2}.$$

- b) L'inégalité de la question 2) est vraie pour tout $h > 0$.

On peut donc prendre $h = \sqrt{2M_0/M_2}$. Il vient alors

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leq \sqrt{2M_0M_2}.$$

Exercice 6 Application de la formule de Taylor avec reste intégral

- 1) Si $x > 1$, alors par *croissance comparée* $\left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| = \frac{x^k}{k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$, donc la série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ diverge grossièrement.
- 2) Comme \ln est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_*^+ , f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$.

• Pour $t \in] -1, +\infty[$, $f^{(0)}(t) = f(t) = \ln(1+t)$. Une récurrence (voir exercice 2 du chapitre 28) permet de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in] -1, +\infty[, \quad f^{(k)}(t) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{(1+t)^k}.$$

- 3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -1, +\infty[$.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et x s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

On a $f(0) = 0$, et en remplaçant par les valeurs données par la question 2), on obtient après simplification :

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt.$$

- 4) Encadrons l'intégrale précédente. Pour tout $t \in [0, x]$,

$$1 < 1+t \xrightarrow[u \mapsto 1/(1+u)^{n+1} \text{ décroît sur } \mathbb{R}_*^+]{\text{}} 0 < \frac{1}{(1+t)^{n+1}} < 1 \xrightarrow[x-t > 0]{\text{}} 0 < \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} < (x-t)^n$$

Par *croissance de l'intégrale* ($0 < x$)

$$0 < \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \leq \int_0^x (x-t)^n dt = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

D'après le théorème d'encadrement : $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$

Cela montre, avec le résultat de la question 3), que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ln(1+x)$,

$$\text{pour } x \in [0, 1], \text{ la série } \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \text{ converge, et sa somme vaut } \ln(1+x).$$

Développements limités

30

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 *Calculs de DL*

Écrire le développement limité à l'ordre n indiqué, au voisinage de 0, pour les fonctions suivantes.

1) $x \mapsto 5 - 3x + 4x^2 + 4x^5 - 12x^7, n = 3$ 2) $x \mapsto \cos(x) + \ln(1+x), n = 2$

3) $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}, n = 2$

4) $x \mapsto \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), n = 3$

5) $x \mapsto \ln(2+x), n = 2$

6) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 + x + x^4 + e^x, n = 3$

7) $x \mapsto (3x^8 - 14x^6 + 13x^5 + 5x^3 - x^2 + 1)(1+x)^{\frac{1}{2}}, n = 2$

8) $x \mapsto e^x(1 + \sin(x)), n = 3$

9) $x \mapsto \frac{3 + x^2 + x^3 + \ln(1+x)}{1-x}, n = 2$

10) $x \mapsto (\sin x)^2 \cos(x), n = 4$

11) $x \mapsto \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}, n = 4$

12) (***) $x \mapsto \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right), n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 2 * Calculer la limite en 0 des fonctions suivantes.

1) $x \mapsto \frac{x(2 + \cos(x)) - 3 \sin(x)}{x^3(1 - \cos(x))};$ 2) $x \mapsto \frac{2}{x(e^x - 1)} - \frac{2}{x^2};$

3) $x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2};$

4) $x \mapsto \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2};$

5) $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}.$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3 ** Développement limité de tangente

1) On note $f = \tan$. Justifier que f admet un développement limité à l'ordre 5 en 0. On pose :

$$\tan(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^5).$$

- 2) La fonction tangente étant impaire, que dire de a_0, \dots, a_4 ?
- 3) à l'aide des coefficients $(a_i)_{0 \leq i \leq 5}$, donner le développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto 1 + \tan^2(x)$.
- 4) écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 5 pour f en 0, et à l'ordre 4 pour f' en 0, et en déduire que : $f'(x) \underset{0}{=} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + o(x^4)$.
- 5) En remarquant que pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$, calculer les coefficients a_0, a_1, \dots, a_5 .

Exercice 4 **

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Soit $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad G(x) = \frac{1}{2x} \int_{-x}^x f(t) dt \quad \text{et} \quad G(0) = f(0).$$

- 1) Justifier que f admet des primitives sur \mathbb{R} . On note F une de ces primitives.
- 2) Montrer que G est continue sur \mathbb{R} , de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* , et calculer G' sur \mathbb{R}^* .
- 3) On suppose maintenant que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
 - a) Justifier que F admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, et écrire la formule de Taylor-Young correspondante.
 - b) En déduire que G est dérivable en 0, et calculer $G'(0)$.
 - c) L'application G est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} ?

Exercice 5 *** Développement limité d'une fonction réciproque

On considère la fonction $f : t \mapsto t + \ln(1 + t^2)$.

- 1) Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ et induit une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
- 2) On note $a = f(-1)$. Justifier que $a < 0$, puis montrer que f^{-1} est dérivable sur $]a, +\infty[$, et donner l'expression de $(f^{-1})'$ sur $]a, +\infty[$.
En déduire que f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]a, +\infty[$.
- 3) Justifier qu'il existe des réels a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 tels que

$$\text{Pour tout } t \in]a, +\infty[, \quad f^{-1}(f(t)) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^4 a_k (f(t))^k + o(t^4).$$

- 4) Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en 0 des applications $t \mapsto (f(t))^n$, pour $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.
- 5) Déduire des questions 3) et 4) un système linéaire dont $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ est solution.
- 5) Donner le développement limité de f^{-1} à l'ordre 4 en 0.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 6 * Un peu d'algèbre linéaire...

On définit les fonctions f , g et h par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x), \quad g(x) = \sin(x^2) \quad \text{et} \quad h(x) = \cos(x^3).$$

- 1) Donner les développements limités de f , g et h en 0 à l'ordre 4.
- 2) Est-ce que (f, g, h) forme une famille libre dans l'espace des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ?

Corrections

☰ Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Calculs de DL

Voici les résultats.

- 1) Par troncature, il vient, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$5 - 3x + 4x^2 + 4x^5 - 12x^7 \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 5 - 3x + 4x^2 + o(x^3).$$
- 2) Pour $x \in]-1, +\infty[$,

$$\cos(x) + \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 1 + x - x^2 + o(x^2).$$
- 3) Pour $x \in]-1, +\infty[\setminus \{0\}$,

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^2).$$
- 4) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \cos(x) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(x) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{\sqrt{2}}{2} \left(1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right).$$
- 5) Soit $x \in]2, +\infty[$,

$$\ln(2+x) = \ln(2) + \ln\left(1 + \frac{x}{2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \ln(2) + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2).$$
- 6) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1 + x + x^4 + e^x \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 3 + 2x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3).$$
- 7) Pour $x \in [-1, +\infty[$,

$$(3x^8 - 14x^6 + 13x^5 + 5x^3 - x^2 + 1)(1+x)^{\frac{1}{2}} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{9}{8}x^2 + o(x^2).$$
- 8) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x(1 + \sin(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + o(x^3).$$
- 9) Pour $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{3 + x^2 + x^3 + \ln(1+x)}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 3 + 4x + \frac{9}{2}x^2 + o(x^2).$$

$$10) \text{ Pour } x \in \mathbb{R}, \quad (\sin x)^2 \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4).$$

$$11) \text{ Pour } x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} x^2 - \frac{3}{2}x^4 + o(x^4).$$

$$12) \text{ Pour } x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n),$$

$$\text{ce qui donne : } \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n). \text{ Donc}$$

$$\begin{aligned} \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \exp(\ln(1+x) + o(x^n)) &= \exp(\ln(1+x)) \exp(o(x^n)) \\ &= (1+x)(1+o(x^n)) = \boxed{1+x+o(x^n)}. \end{aligned}$$

Exercice 2

1) Soit $x \in]-3\pi/2, \pi/2[$. Notons

$$\begin{aligned} N(x) &= x(2 + \cos(x)) - 3 \sin(x) \\ &\underset{0}{=} x\left(2 + \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)\right) - 3\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) + o(x^5) \\ &\underset{0}{=} \frac{x^5}{60} + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\text{De façon similaire } D(x) = x^3(1 - \cos(x)) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{x^5}{2} + o(x^5).$$

$$\text{D'où } \frac{N(x)}{D(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{1/60 + o(1)}{1/2 + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{1}{30}}.$$

2) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $e^x - 1 \underset{0}{=} x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{2}{x(e^x - 1)} - \frac{2}{x^2} &= \frac{2x - 2(e^x - 1)}{x^2(e^x - 1)} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{-1 + o(1)}{x + o(x)} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{\begin{array}{l} -\infty \text{ (si } x \rightarrow 0^+) \\ +\infty \text{ (si } x \rightarrow 0^-). \end{array}} \end{aligned}$$

3) Soit $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} &= \frac{x^2 - \sin^2(x)}{x^2 \sin^2(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{(x^4/3) + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{(1/3) + o(1)}{1 + o(1)} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow 0} \boxed{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

4) Rappelons que $e^t \underset{t \rightarrow 0}{\equiv} 1 + t + o(t)$, donc, pour $x \in \mathbb{R}$, $e^{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 1 + x^2 + o(x^2)$.

Avec $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, on obtient par différence

$$e^{x^2} - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

et donc, pour $x \neq 0$, $\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \frac{3}{2} + o(1)$, autrement dit

$$\boxed{\frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{3}{2}}$$

5) Pour $x \in]-1, +\infty[$ tel que $x \neq 0$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} = \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)}$.

On sait que $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc

$$\begin{aligned} \ln(1+x) - x &\underset{x \rightarrow 0}{\equiv} -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \\ \Rightarrow \ln(1+x) - x &\underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2} \\ \Rightarrow \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)} &\underset{0}{\sim} -\frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x \\ \Rightarrow \boxed{\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3 Développement limité de tangente

- 1) La fonction tangente, de classe C^∞ sur $] -\pi/2, \pi/2[$, admet un développement limité à l'ordre 5 en 0 d'après la *formule de Taylor-Young*.
- 2) Comme \tan est impaire, on a pour tout $x \in] -\pi/2, \pi/2[$,

$$\tan(x) = -\tan(-x) \underset{0}{=} -a_0 + a_1x - a_2x^2 + a_3x^3 - a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^5).$$

Par *unicité du développement limité*, on en déduit que $a_0 = -a_0$, $a_2 = -a_2$ et $a_4 = -a_4$.

Donc : $\boxed{a_0 = 0, a_2 = 0 \text{ et } a_4 = 0.}$

3) Pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2(x) &\underset{0}{=} 1 + (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5))^2 \\ &\underset{0}{=} 1 + a_1^2x^2 + 2a_1a_3x^4 + 2a_1a_5x^6 + a_3^2x^6 + 2a_3a_5x^8 + a_5^2x^{10} \\ &\quad + 2o(x^5)(a_1x + a_3x^3 + a_5x^5) + (o(x^5))^2 \\ 1 + \tan^2(x) &\underset{0}{=} 1 + a_1^2x^2 + 2a_1a_3x^4 + o(x^5). \end{aligned}$$

4) Comme f est de classe C^∞ et f' de classe C^∞ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, on a les deux formules de Taylor-Young demandées

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{120}x^5 + o(x^5) \\ f'(x) &\underset{0}{=} f'(0) + (f')'(0)x + \frac{(f')''(0)}{2}x^2 + \frac{(f')^{(3)}(0)}{6}x^3 + \frac{(f')^{(4)}(0)}{24}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

La première donne

$$a_0 = f(0), \quad a_1 = f'(0), \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2}, \quad a_3 = \frac{f^{(3)}(0)}{6}, \quad a_4 = \frac{f^{(4)}(0)}{24}, \quad a_5 = \frac{f^{(5)}(0)}{120}.$$

Donc, dans la deuxième

$$f'(0) = a_1, \quad (f')'(0) = f''(0) = 2a_2, \quad \frac{(f')''(0)}{2} = \frac{f^{(3)}(0)}{2} = 3a_3,$$

$$\frac{(f')^{(3)}(0)}{6} = \frac{f^{(4)}(0)}{6} = 4a_4, \quad \frac{(f')^{(4)}(0)}{24} = \frac{f^{(5)}(0)}{24} = 5a_5.$$

On conclut

$$f'(x) \underset{0}{=} a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + o(x^4).$$

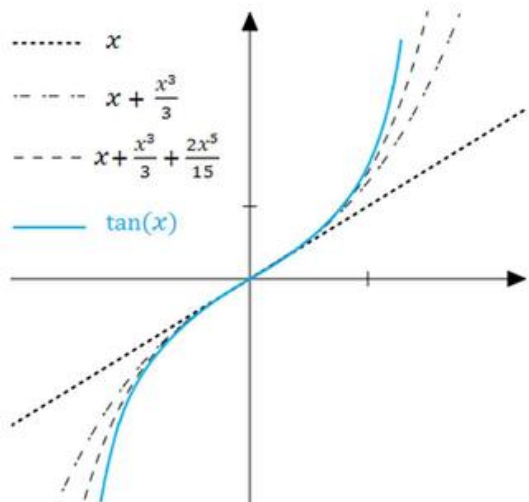
5) On a déjà vu que $a_0 = a_2 = a_4 = 0$. En comparant les résultats des questions 3) et 4), on a, par unicité du développement limité

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ 3a_3 = a_1^2 \\ 5a_5 = 2a_1a_3. \end{cases}$$

Donc $\left(a_1 = 1; a_3 = \frac{1}{3}; a_5 = \frac{2}{15} \right)$.

Il vient :

$$\tan(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$



Exercice 4

1) La fonction f étant continue sur \mathbb{R} , elle admet des primitives sur \mathbb{R} .

2) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $G(x) = \frac{1}{2x} [F(t)]_{-x}^x = \frac{F(x) - F(-x)}{2x}$. Donc G est continue

sur \mathbb{R}^* par différence et quotient de fonctions continues sur \mathbb{R}^* .

Comme $F' = f$, $\frac{F(x) - F(0)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$ et $\frac{F(-x) - F(0)}{-x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0)$.

Ainsi, pour $x \neq 0$, $G(x) = \frac{1}{2} \frac{(F(x) - F(0)) - (F(-x) - F(0))}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0) = G(0)$.

Conclusion :

G est continue sur \mathbb{R} .

Sur \mathbb{R}^* , G est quotient de fonctions de classe C^1 , donc G est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$G'(x) = \frac{(f(x) - -f(-x))(2x) - 2(F(x) - F(-x))}{(2x)^2} = \frac{f(x) + f(-x) - 2G(x)}{2x}.$$

3) a) En tant que primitive de f , F est de classe C^∞ sur \mathbb{R} . Puis, d'après la *formule de Taylor-Young*, F admet un développement limité à l'ordre 2 en 0 :

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} F(0) + xF'(0) + x^2 \frac{F''(0)}{2} + o(x^2)$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{\approx} \left[F(0) + xf(0) + x^2 \frac{f'(0)}{2} + o(x^2) \right].$$

b) Soit $x \neq 0$: $\frac{G(x) - G(0)}{x} = \frac{1}{x} \left(\frac{F(x) - F(-x)}{2x} - f(0) \right) = \frac{F(x) - F(-x) - 2xf(0)}{2x^2}$.

Or, $-x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Donc, d'après la question précédente,

$$F(-x) \underset{x \rightarrow 0}{\approx} F(0) - xf(0) + x^2 \frac{f'(0)}{2} + o(x^2).$$

$$\text{Alors, } \frac{G(x) - G(0)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{2xf(0) + o(x^2) - 2xf(0)}{2x^2} = \frac{o(x^2)}{2x^2} = o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Conclusion :

$$G'(0) = 0.$$

c) La fonction G' est définie sur \mathbb{R} , continue sur \mathbb{R}^* d'après son expression sur \mathbb{R}^* . Il reste à montrer la continuité de G' en 0.

Les fonctions f et G sont dérivables en 0. Donc

$$f(x) \underset{0}{\approx} f(0) + x \cdot f'(0) + o(x), \quad f(-x) \underset{0}{\approx} f(0) - x \cdot f'(0) + o(x).$$

Et

$$G(x) \underset{0}{\approx} G(0) + x \cdot G'(0) + o(x) = f(0) + o(x).$$

Soit $x \neq 0$. On a

$$\begin{aligned}
 G'(x) &= \frac{f(x) + f(-x) - 2G(x)}{2x} \\
 &\stackrel{0}{=} \frac{(f(0) + x \cdot f'(0) + o(x)) + (f(0) - x \cdot f'(0) + o(x)) - 2(f(0) + o(x))}{2x} \\
 &\stackrel{0}{=} \frac{o(x)}{2x} = o(1) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = G'(0).
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Exercice 5 Développement limité d'une fonction réciproque

1) • L'application \ln est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* , et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1 + t^2 \geq 1 > 0$, donc, par composition puis somme, f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

• Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f'(t) = 1 + \frac{2t}{1+t^2} = \frac{(t+1)^2}{1+t^2} \geq 0$, avec $f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$.

Comme $f' \geq 0$ sur l'intervalle \mathbb{R} , et que f' ne s'annule qu'en un point, on peut affirmer que f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

• On a $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ (pas de forme indéterminée).

• Pour $t \in \mathbb{R}_-^*$,

$$f(t) = t + \ln\left(t^2\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)\right) = -|t| + \underbrace{2 \ln(|t|)}_{\xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty} + \underbrace{\ln\left(\frac{1}{t^2} + 1\right)}_{\xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} 0} \underset{-\infty}{\sim} -|t|.$$

On conclut

$$f(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty.$$

• On récapitule : f est continue et croissante sur l'intervalle \mathbb{R} , et $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$, $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow -\infty]{} -\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection, f induit une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (et on a vu que f est de classe \mathcal{C}^∞).

2) On a : $-1 < 0$, et f est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc $f(-1) < f(0) = 0$:

$$a < 0.$$

La dérivée f' ne s'annule jamais sur $] -1, +\infty[$. D'après le théorème de dérivation de la bijection réciproque, f^{-1} est dérivable sur $]a, +\infty[$, et

$$\forall x \in]a, +\infty[, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Montrons par récurrence la propriété

$$\mathcal{P}(n) : f^{-1} \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur }]a, +\infty[$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** D'après le théorème de la bijection, f^{-1} est continue sur $]a, +\infty[$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.** Soit $n \geq 0$. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors f^{-1} est de classe \mathcal{C}^n sur $]a, +\infty[$ et, d'après 1), f est de classe \mathcal{C}^n sur $] -1, +\infty[$. Donc, d'après les propriétés générales sur les fonctions de classe \mathcal{C}^n et l'expression de $(f^{-1})'$, $(f^{-1})'$ est de classe \mathcal{C}^n sur $]a, +\infty[$. Ainsi f^{-1} est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $]a, +\infty[$.

On a montré que si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.**

$$f^{-1} \text{ est de classe } \mathcal{C}^{+\infty} \text{ sur }]a, +\infty[$$

- 3) f^{-1} est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]a, +\infty[$; d'après la formule de Taylor-Young (car $0 \in]a, +\infty[$), f^{-1} admet en 0 un développement limité à l'ordre 4 : il existe $(a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5$ tel que pour tout $x \in]a, +\infty[$:

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} \sum_{k=0}^4 a_k x^k + o(x^4). \quad (*)$$

Comme $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ et $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, on a, pour $t \in] -1, +\infty[$,

$$f^{-1}(f(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\equiv} \sum_{k=0}^4 a_k (f(t))^k + o((f(t))^4) \underset{t \rightarrow 0}{\equiv} \sum_{k=0}^4 a_k (f(t))^k + o(t^4).$$

- 4) On rappelle que pour $x \in] -1, +\infty[$, $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. On en déduit le développement limité de f , puis il suffit de calculer les puissances de ce développement, en tronquant l'écriture à l'ordre demandé. Voici les résultats

$$\begin{aligned} f(t) &\underset{t \rightarrow 0}{\equiv} t + t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4), & (f(t))^2 &\underset{t \rightarrow 0}{\equiv} t^2 + 2t^3 + t^4 + o(t^4), \\ (f(t))^3 &\underset{t \rightarrow 0}{\equiv} t^3 + 3t^4 + o(t^4), & (f(t))^4 &\underset{t \rightarrow 0}{\equiv} t^4 + o(t^4). \end{aligned}$$

- 5) En utilisant les questions 3) et 4), pour $t \in] -1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(t)) &\underset{t \rightarrow 0}{\equiv} a_0 + a_1 \left(t + t^2 - \frac{t^4}{2} + o(t^4) \right) + a_2 (t^2 + 2t^3 + t^4 + o(t^4)) \\ &\quad + a_3 (t^3 + 3t^4 + o(t^4)) + a_4 (t^4 + o(t^4)) + o(t^4), \end{aligned}$$

donc en rassemblant les termes :

$$f^{-1}(f(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\equiv} a_0 + a_1 t + (a_1 + a_2) t^2 + (2a_2 + a_3) t^3 + \left(-\frac{a_1}{2} + a_2 + 3a_3 + a_4 \right) t^4 + o(t^4).$$

Ceci est le développement limité de $f^{-1} \circ f$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Mais par ailleurs, pour tout $t \in] -1, +\infty[$, $f^{-1}(f(t)) = t$, donc

$$f^{-1}(f(t)) \underset{t \rightarrow 0}{\equiv} 0 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 + 0 \cdot t^4 + o(t^4).$$

Par unicité du développement limité, on identifie les coefficients,

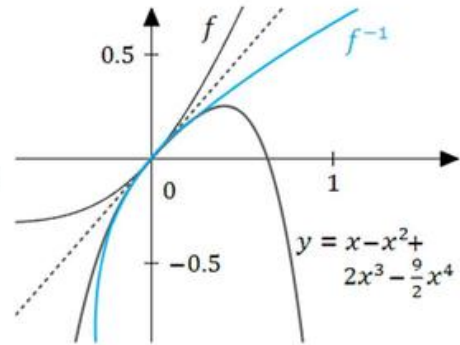
$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_1 + a_2 = 0 \\ 2a_2 + a_3 = 0 \\ -\frac{a_1}{2} + a_2 + 3a_3 + a_4 = 0. \end{cases}$$

6) Vérifier que l'on trouve

$$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = 2, a_4 = -\frac{9}{2}.$$

En revenant au développement limité (*) écrit à la question 3), on conclut

$$f^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} x - x^2 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^4 + o(x^4).$$



Exercices avec questions ouvertes

Exercice 6) Un peu d'algèbre linéaire...

Remarque

Voilà un exercice qui mélange des notions d'algèbre linéaire et les développements limités. Il n'est pas pourtant pas difficile au sens où la stricte application de la définition d'une famille libre permet de conclure.

1) On a $x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et $x^3 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Pour g et h on utilise donc les développements limités de sin et cos au voisinage de 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4), \quad g(x) = \sin(x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} (x^2)^1 + o((x^2)^2) = x^2 + o(x^4),$$

$$h(x) = \cos(x^3) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 1 - \frac{(x^3)^2}{2} + o((x^3)^2) = 1 - \frac{x^6}{2} + o(x^6),$$

donc en tronquant : $h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} 1 + o(x^4)$.

2) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $\lambda_1 f + \lambda_2 g + \lambda_3 h = \mathbf{0}$ où $\mathbf{0}$ est l'application nulle. D'après la question précédente :

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) + \lambda_3 h(x) \underset{x \rightarrow 0}{\equiv} (\lambda_1 + \lambda_3) + \left(\lambda_2 - \frac{\lambda_1}{2} \right) x^2 + \frac{\lambda_1}{24} x^4 + o(x^4).$$

Or $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 g(x) + \lambda_3 h(x) = 0 \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^4)$. Par unicité du développement limité

$$\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 - \frac{\lambda_1}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1}{24} = 0,$$

d'où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Concluons :

La famille (f, g, h) est libre.

Extrema, convexité

31

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Une inégalité de convexité

- 1) Étudier la convexité de $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ sur $]1, +\infty[$.
- 2) En déduire que pour tous $a, b \in]1, +\infty[$,

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a) \cdot \ln(b)}.$$

Exercice 2

- 1) Soit $n \geq 3$. Par une étude de fonction, montrer que $\forall x \in [2, n], (n-x+1)x > n$.
- 2) En déduire que pour tout $n \geq 3, (n!)^2 > n^n$.

Indication. Considérer $\prod_{k=1}^n k(n-k+1)$.

Exercice 3 ** Inégalité de Hölder

Soient $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux n -uplets de réels strictement positifs.

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

- 1) Montrer que la fonction $x \mapsto x^p$ est concave sur \mathbb{R}_+^* .
- 2) Justifier que

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{1/q}$$

Indication. On pourra appliquer l'inégalité de Jensen (voir (J), exercice 5) aux réels

$x_k = a_k b_k^{1-q}$ et aux coefficients $t_k = \frac{b_k^q}{\lambda}$ où $\lambda = \sum_{i=1}^n b_i^q$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 ** Soit $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ convexe, bijective et croissante. On définit les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $a \leq u_0 \leq v_0 \leq b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = f^{-1}\left(\frac{f(u_n) + f(v_n)}{2}\right).$$

- 1) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
- 2) Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 5 * Inégalités de Jensen

- 1) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que pour tout n -uplet (x_1, x_2, \dots, x_n) d'éléments de I et tout n -uplet (t_1, t_2, \dots, t_n) de coefficients positifs tels que $\sum_{k=1}^n t_k = 1$,

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k). \quad (J)$$

- 2) Applications. (**)

a) Soient X une variable aléatoire finie et φ une fonction convexe. Démontrer que

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

b) Soient $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec φ convexe. Justifier que

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t)) dt.$$

Indication. On pourra partir des sommes de Riemann associées à f et $\varphi \circ f$.

Exercice 6 ** Inégalités via des arguments de convexité

- 1) Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1 + e^x)$ est convexe sur \mathbb{R} .
- 2) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$,

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k)\right)^{1/n}.$$

- 3) Soient $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ des réels. Montrer que

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n}.$$

Exercice 7 *** Soient deux réels a et b tels que $0 < a < b$.

1) Soit f une fonction continue, convexe sur $[a, b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(t) dt \leq (b-a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

2) Quelle majoration de $\int_a^b \frac{dx}{x}$ obtient-on avec cette inégalité?

3) On souhaite améliorer ce résultat.

a) Exprimer $\int_a^b \frac{dx}{x}$ en fonction de $\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{dx}{x}$.

b) En déduire une nouvelle majoration de $\int_a^b \frac{dx}{x}$, puis vérifier que celle-ci est meilleure que la précédente.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8 * Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow K$ deux fonctions convexes.

Que peut-on dire de la composée $g \circ f$...

- lorsque g est croissante?
- lorsque g est décroissante?

Corrections

☰ Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Une inégalité de convexité

1) La fonction f est clairement de classe \mathcal{C}^2 avec pour tout réel $x \in [1, +\infty[$,

$$f''(x) = -\frac{1 + \ln(x)}{(x \ln(x))^2} \leq 0.$$

D'après la caractérisation de la concavité pour les fonctions \mathcal{C}^2 , f est concave.

2) Par définition de la concavité : pour tous $a, b \in]1, +\infty[$,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

C'est-à-dire, $\ln\left(\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) \geq \frac{\ln(\ln(a)) + \ln(\ln(b))}{2} = \ln\left(\sqrt{\ln(a)\ln(b)}\right).$

Par composition avec la fonction exponentielle (qui est croissante),

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a) \cdot \ln(b)}.$$

Exercice 2

1) Soit f la fonction définie sur $[2, n-1]$ par

$$f(x) = x(n-x+1) = (n+1)x - x^2.$$

La fonction f est dérivable sur $[2, n-1]$ et

$$\forall x \in [2, n-1], \quad f'(x) = n+1 - 2x.$$

D'où le tableau de variation ci-contre,

avec $M = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$ et $m = 2(n-1)$

x	2	$(n+1)/2$	$n-1$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	m		M	m

Donc

$$\forall x \in [2, n-1], f(x) \geq 2(n-1) > n \quad (\text{car } n \geq 3).$$

2) Soit $n \geq 3$. Le changement d'indice $k' = n - k + 1$ donne $\prod_{k=1}^n (n - k + 1) = \prod_{k'=1}^n k' = n!$.

Ainsi, on a

$$\prod_{k=1}^n k(n - k + 1) = \left(\prod_{k=1}^n k\right) \left(\prod_{k=1}^n (n - k + 1)\right) = (n!)^2.$$

Alors

$$\begin{aligned} (n!)^2 &= \prod_{k=1}^n k(n - k + 1) = \underbrace{n}_{k=1} \underbrace{2(n-1)}_{k=2} \prod_{k=3}^n k(n - k + 1) \\ &> n \times n \prod_{k=3}^n (n - k + 1) \\ &> n \times n \times n^{n-2}. \end{aligned}$$

} car $n \geq 3$
} d'après la question précédente

Conclusion :

$$\text{pour tout } n \geq 3, \quad (n!)^2 > n^n.$$

Exercice 3 *Inégalité de Hölder*

1) Notons $f_p : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^p$. f_p est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* avec

$$f_p'(x) = px^{p-1} \quad \text{et} \quad f_p''(x) = p(p-1)x^{p-2} = p(p-1)e^{(p-1)\ln(x)}.$$

Or la condition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ avec p et q positifs impose que $p > 1$. On en déduit que f_p'' est positive sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* ,

$$x \mapsto x^p \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^*.$$

2) Suivons l'indication et posons pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$x_k = a_k b_k^{1-q}, \quad \lambda = \sum_{i=1}^n b_i^q \quad \text{et} \quad t_k = \frac{b_k^q}{\lambda}.$$

Remarquons que
$$\sum_{k=1}^n t_k = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n b_k^q = 1.$$

On peut donc appliquer l'inégalité de convexité :

$$f_p \left(\sum_{k=1}^n t_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f_p(x_k).$$

Or
$$f_p \left(\sum_{k=1}^n t_k x_k \right) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k^q}{\lambda} \cdot a_k b_k^{1-q} \right)^p = \frac{1}{\lambda^p} \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^p.$$

De plus,
$$\sum_{k=1}^n t_k f_p(x_k) = \sum_{k=1}^n \frac{b_k^q}{\lambda} \cdot (a_k b_k^{1-q})^p = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n a_k^p b_k^{p+q-qp}.$$

Vérifier que la condition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ donne $p + q - qp = 0$. Après simplification, l'inégalité devient

$$\frac{1}{\lambda^p} \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^p \leq \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n a_k^p \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^p \leq \sum_{k=1}^n a_k^p \cdot \lambda^{p-1}.$$

Puis,
$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^p \leq \sum_{k=1}^n a_k^p \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{p-1}.$$

On en déduit la relation demandée par composition avec la fonction croissante $t \mapsto t^{1/p}$ et $(p-1)/p = 1/q$.

Remarque

Avec $p = q = 1/2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4

Remarque

Rappelons que si f est strictement monotone et continue, alors elle admet une réciproque d'après le théorème de la bijection, et cette réciproque a le même sens de variation.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons que

$$f(v_{n+1}) = \frac{f(u_n) + f(v_n)}{2} \quad \text{et} \quad f(u_{n+1}) = f\left(\frac{u_n + v_n}{2}\right).$$

Or, par hypothèse de convexité de f ,

$$f\left(\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n\right) \leq \frac{1}{2}f(u_n) + \frac{1}{2}f(v_n)$$

$$\left. \begin{array}{l} f(u_{n+1}) \leq f(v_{n+1}) \\ u_{n+1} \leq v_{n+1}. \end{array} \right\} \text{croissance de } f^{-1}$$

Par décalage d'indice, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$.

Précisons que par ailleurs, par construction, $u_0 \leq v_0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$;

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2} \geq 0.$$

Donc

la suite u est croissante.

De plus, la croissance de f entraîne l'inégalité $f(u_n) \leq f(v_n)$ et

$$f(v_{n+1}) - f(v_n) = \frac{f(u_n) - f(v_n)}{2} \leq 0.$$

La suite v est décroissante.

• En particulier, u_0 est un minorant de v et v_0 est un majorant de u . D'après le *théorème de convergence monotone*, les deux suites convergent. Notons respectivement ℓ et L les limites respectivement de u et v . Par passage à la limite dans la relation de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \Rightarrow L = \frac{L + \ell}{2} \Rightarrow L = \ell.$$

Les suites u et v convergentes vers une limite commune. En conclusion,

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Exercice 5 Inégalités de Jensen

1) On procède par récurrence sur la proposition suivante, définie pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\mathcal{P}(i) : \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_i) \in I^i, \quad \forall (t_1, t_2, \dots, t_i) \in [0, 1]^i,$$

$$\sum_{k=1}^i t_k = 1 \Rightarrow f\left(\sum_{k=1}^i t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^i t_k f(x_k).$$

• **Initialisation.** $\mathcal{P}(1)$ est évidente puisqu'alors t_1 doit valoir 1.

• **Hérédité.** Soit $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Supposons $\mathcal{P}(i)$ vraie et démontrons $\mathcal{P}(i+1)$.

Soient $(x_1, \dots, x_{i+1}) \in I^{i+1}$ et $(t_1, \dots, t_{i+1}) \in [0,1]^{i+1}$ tels que $\sum_{k=1}^{i+1} t_k = 1$. On pose

$$\mu = \sum_{k=1}^i t_k, \quad \text{de sorte que} \quad t_{i+1} = 1 - \mu.$$

• Si $\mu \neq 0$, on peut écrire

$$f\left(\sum_{k=1}^{i+1} t_k x_k\right) = f\left(t_{i+1} x_{i+1} + \sum_{k=1}^i t_k x_k\right) = f((1-\mu)X + \mu Y) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} X = x_{i+1} \\ Y = \sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\mu} x_k. \end{cases}$$

Par convexité de f , $f((1-\mu)X + \mu Y) \leq (1-\mu)f(X) + \mu f(Y)$.

Et par hypothèse de récurrence, $f(Y) = f\left(\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\mu} x_k\right) \leq \sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\mu} f(x_k)$.

En effet, on a bien $\sum_{k=1}^i \frac{t_k}{\mu} = 1$. On vient de justifier que $f\left(\sum_{k=1}^{i+1} t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{i+1} t_k f(x_k)$.

• Cette relation est encore valable pour $\mu = 0$ puisque on retrouve directement $\mathcal{P}(i)$. Ainsi, $\mathcal{P}(i+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** $\mathcal{P}(n)$ est vraie par récurrence, ce qu'il fallait démontrer.

2) a) Posons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Par définition de l'espérance et la *formule de transfert*,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{P}(X = x_i), \\ \varphi(\mathbb{E}(X)) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^m x_i \mathbb{P}(X = x_i)\right) \\ \text{et } \mathbb{E}(\varphi(X)) &= \sum_{i=1}^m \varphi(x_i) \mathbb{P}(X = x_i). \end{aligned}$$

De plus, $([X = x_i])_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$ est un système complet d'événements. En particulier,

$$\sum_{i=1}^m \mathbb{P}(X = x_i) = 1.$$

On peut donc appliquer la formule de Jensen avec pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$,

$$t_i = \mathbb{P}(X = x_i) \in [0,1].$$

On obtient directement

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Remarque

Par exemple, la fonction carrée $\varphi : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est convexe. Par conséquent,

$$\mathbb{E}(X^2) \geq \mathbb{E}(X)^2.$$

Résultat connu, puisque la variance est positive et que par la *formule de Koenig-Huygens*,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \geq 0.$$

- b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Les sommes de Riemann associées respectivement à f et $\varphi \circ f$ d'ordre n sont définies par

$$S_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n(\varphi \circ f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Appliquons l'inégalité de Jensen avec

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n},$$

$$x_1 = f(0), x_2 = f\left(\frac{1}{n}\right), x_3 = f\left(\frac{2}{n}\right), \dots, x_n = f\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

Il vient

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

C'est-à-dire

$$\varphi(S_n(f)) \leq S_n(\varphi \circ f).$$

Or, la continuité de f et $\varphi \circ f$ impose la convergence des sommes de Riemann :

$$S_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$$

et,

$$S_n(\varphi \circ f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \varphi(f(t)) dt.$$

Puis, par continuité de φ , $\varphi(S_n(f)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi\left(\int_0^1 f(t) dt\right)$.

On conclut par passage à la limite que

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leq \int_0^1 \varphi(f(t)) dt.$$

Exercice 6 Inégalités via des arguments de convexité

1) Posons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \ln(1 + e^x)$.

- La fonction exponentielle est de classe \mathcal{C}^2 et à valeurs dans \mathbb{R}_*^+ .
- La fonction logarithme est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_*^+ .

Par composition, f est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} avec

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x} = 1 - \frac{1}{1 + e^x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2} \geq 0.$$

La fonction f'' est positive sur l'intervalle \mathbb{R} , donc

f est convexe.

2) Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^n$. Appliquons l'inégalité de Jensen (voir (I)), exercice 5) avec pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $t_k = \frac{1}{n}$ et aux nombres $\ln(x_k)$:

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k \ln(x_k)\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(\ln(x_k)).$$

Or
$$\sum_{k=1}^n t_k f(\ln(x_k)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \ln(1 + x_k) = \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k)\right)$$

et
$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k \ln(x_k)\right) = \ln\left(1 + e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(x_k)}\right) = \ln\left(1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n}\right).$$

Ainsi,
$$\ln\left(1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n}\right) \leq \frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k)\right).$$

Enfin, par croissance de la fonction exponentielle,

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k)\right)^{1/n}.$$

3) Appliquons le résultat précédent à $x_k = b_k/a_k \in \mathbb{R}_*^+$.

$$1 + \left(\prod_{k=1}^n \frac{b_k}{a_k}\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{b_k}{a_k}\right)\right)^{1/n}.$$

C'est-à-dire,
$$1 + \frac{\left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n}}{\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}} \leq \left(\prod_{k=1}^n \left(\frac{a_k + b_k}{a_k}\right)\right)^{1/n} = \frac{\left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n}}{\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n}}.$$

En multipliant par $\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} > 0$,

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{1/n} + \left(\prod_{k=1}^n b_k\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{k=1}^n (a_k + b_k)\right)^{1/n}.$$

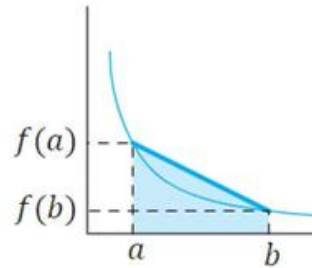
Exercice 7

- 1) D'après les propriétés des fonctions convexes, la courbe représentative de f est située en dessous de la corde joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$. Cette corde a pour équation

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Donc

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right) dx.$$



Calculons l'intégrale du membre de droite.

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right) dx &= \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(x - a)^2}{2} + f(a)x \right]_a^b \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{(b - a)^2}{2} + f(a)b - f(a)a \\ &= (f(b) - f(a)) \frac{b - a}{2} + f(a)(b - a) \\ &= (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Conclusion :

$$\int_a^b f(t) dt \leq (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Remarque

Pour l'aire sous la corde, on peut passer par l'aire du trapèze, ce qui est plus rapide.

- 2) La fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = \frac{1}{x}$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}_+^* et,

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3} \geq 0.$$

Donc cette fonction est convexe sur \mathbb{R}_+^* .

- 3) a) Le résultat de la question précédente donne

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b^2 - a^2}{2ab}.$$

b) On a $\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{dx}{x} = \ln \sqrt{b} - \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} (\ln(b) - \ln(a)) = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{dx}{x}$. L'inégalité du 1 donne

$$\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{2\sqrt{ab}}$$

D'où la nouvelle majoration

$$\int_a^b \frac{dx}{x} \leq \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$$

Or $\frac{b^2 - a^2}{2ab} - \frac{b-a}{\sqrt{ab}} = (b-a) \frac{b+a-2\sqrt{ab}}{2ab} = (b-a) \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2ab} \geq 0$.

Donc

Cette seconde majoration est meilleure que la première.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8

1) Soient $(x, y) \in I^2$ et $(t_1, t_2) \in [0, 1]^2$ tel que $t_1 + t_2 = 1$. Alors, par convexité de f ,

$$\begin{aligned} f(t_1x + t_2y) &\leq t_1f(x) + t_2f(y) \\ g(f(t_1x + t_2y)) &\leq g(t_1f(x) + t_2f(y)) && \left. \begin{array}{l} \text{application de } g \text{ croissante} \\ \text{convexité de } g \end{array} \right\} \\ g(f(t_1x + t_2y)) &\leq t_1g(f(x)) + t_2g(f(y)) \\ g \circ f(t_1x + t_2y) &\leq t_1g \circ f(x) + t_2g \circ f(y). \end{aligned}$$

Si g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe.

2) On peut reprendre le même raisonnement que précédemment mais il est plus judicieux de l'utiliser. $-g$ est croissante, donc d'après la question 1), $-g \circ f$ est convexe.

Si g est décroissante, alors $g \circ f$ est concave.

Généralités sur les espaces probabilisés

32

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Une personne dispose d'une pièce de monnaie et effectue une suite de lancers. Pour chaque $i \in \mathbb{N}^*$, on note A_i l'événement « la personne obtient pile lors du i -ème lancer ». On dit que cette personne gagne dès qu'elle obtient pile.

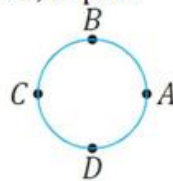
- 1) Exprimer l'événement « obtenir pile à au moins l'un des 50 premiers lancers » à l'aide des événements A_i .
- 2) Exprimer l'événement « la personne finit par gagner (i.e. finit par obtenir pile) ».
- 3) Exprimer l'événement « elle n'obtient jamais pile »?
- 4) Que représente l'événement $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_{2k}$? et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement $\bigcap_{k > n} A_k$?
- 5) (*) Comment interpréter l'événement $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k > n} A_k$?
- 6) (**) Comment interpréter l'événement $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k > n} A_k$?

Exercice 2 ** Probabilités, suites et calculs matriciels

Un pion se déplace sur les 4 points $A = (1,0)$, $B = (0,1)$, $C = (-1,0)$ et $D = (0, -1)$ du cercle trigonométrique selon la règle suivante. Au top d'horloge n , le pion

- reste sur le point où il se trouve avec une probabilité $1/2$;
- se déplace sur l'un des deux points voisins avec une probabilité $1/4$ pour chacun d'eux.

Au top 0, le pion est en A. On introduit les événements :



- A_n : « le pion est sur A au top n »;
- B_n : « le pion est sur B au top n »;
- C_n : « le pion est sur C au top n »;
- D_n : « le pion est sur D au top n »;

On note $a_n = \mathbb{P}(A_n)$, $b_n = \mathbb{P}(B_n)$, $c_n = \mathbb{P}(C_n)$, $d_n = \mathbb{P}(D_n)$ et $X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$.

- 1) Trouver une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
- 2) Déterminer J telle que $A = \frac{1}{2}(I_4 + \frac{1}{2}J)$.
On pose $K = \frac{1}{2}J^2$. Calculer KJ .
- 3) Montrer qu'il existe deux suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(I_4 + \frac{1}{2}J\right)^n = I_4 + u_n J + v_n K.$$

- 4) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + v_n$. Quel type usuel de suite reconnaît-on?
Calculer w_n . En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, u_n et v_n .
- 5) Conclure en exprimant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n , b_n , c_n et d_n .

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3 **

Albert et Bertrand disposent d'une pièce truquée qui tombe sur pile avec une probabilité a ($0 < a < 1$). Il convienne du jeu suivant. Ils lancent, chacun à son tour la pièce jusqu'à ce que l'un des deux joueurs gagne.

- Lorsqu'Albert lance la pièce, il gagne s'il obtient pile.
- Lorsque Bertrand lance la pièce, il gagne s'il obtient face.

Albert lance le premier : il effectuera donc les lancers impairs et Bertrand les lancers pairs, tant qu'aucun des deux joueurs n'est déclaré gagnant du jeu.

- 1) Quelle est la probabilité que le jeu ne s'arrête jamais?
Indication. On pourra s'intéresser aux événements :
 - C_{2n} : Aucun des deux joueurs n'a gagné à l'issue du $2n$ -ième lancer;
 - C : le jeu ne s'arrête jamais.
- 2) Quelle est la probabilité qu'Albert gagne, que Bertrand gagne ?
- 3) Pour quelle valeur de a , chacun des deux joueurs a-t-il la même chance de gagner ?

Exercice 4 *** Séries de pile et face

On dispose d'une pièce de monnaie équilibrée. Les faces sont numérotées 0 et 1. On lance indéfiniment la pièce de monnaie et on note X_i le résultat du i -ème lancer. On se fixe une séquence $s = (s_1, s_2, \dots, s_k) \in \{0, 1\}^k$ de longueur k . On veut montrer que cette séquence apparaît dans la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

On définit les événements :

- A : « La suite s apparaît une infinité de fois » ;
- pour tout $i \in \mathbb{N}$, A_i : « La suite s apparaît au moins une fois à partir du $(k \times i + 1)$ -ième lancer ;
- pour tout $j \in \mathbb{N}$, $B_j = \bigcap_{m=1}^k [X_{kj+m} = s_m]$.

1) Justifier que $A = \bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$.

Indication. On pourra raisonner par double inclusion sur les complémentaires.

2) En déduire $\mathbb{P}(A) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

3) Montrer que $\bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j \subset A_i$.

4) Soit $i \in \mathbb{N}$, on pose $C_i = \bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j$. On veut montrer que $\mathbb{P}(C_i) = 1$.

- Montrer que les événements $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants.
- Déterminer, pour $n \geq i$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=i}^n \overline{B_j}\right)$.
- En déduire que $\mathbb{P}(C_i) = 1$.

5) Montrer que la séquence s apparaît dans la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

Exercice 5 ** Propagation de bactéries

Une bactérie se reproduit ainsi : elle donne deux descendants avec probabilité $p = 3/4$, et zéro descendant avec probabilité $1 - p = 1/4$. Elle meurt ensuite.

On part d'une seule bactérie et on cherche à déterminer si la population va s'éteindre ou non. On suppose que les descendances sont mutuellement indépendantes et on note, pour $n \in \mathbb{N}$, A_n l'événement « la population est éteinte à la n -ième génération » et $u_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1) Préciser u_0 et u_1 .

2) Justifier que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
En déduire la convergence vers une limite finie ℓ .

3) On pose $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{3x^2+1}{4} \in \mathbb{R}$. Justifier que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4) En déduire la valeur de ℓ .

5) Quelle est la probabilité que la population s'éteigne un jour ?

Exercice 6 ***

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'événements mutuellement indépendants.

1) Montrer que $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_k))\right)$.

2) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) \neq 0$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1 \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) \text{ diverge} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \text{ diverge.}$$

3) *Application.*

On dispose d'une urne d'une capacité illimitée, d'une boule rouge et d'une quantité illimitée de boules blanches. Dans chacun des cas suivants, déterminer la probabilité de tirer au moins une fois la boule rouge.

- On place la boule rouge et une boule blanche dans l'urne. On effectue une suite infinie de tirages avec remise.
- On effectue une suite infinie de tirages de la façon suivante. Pour le premier tirage, on place la boule rouge et une boule blanche dans l'urne. Puis, après chaque tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute une boule blanche.
- On effectue une suite infinie de tirages de la façon suivante. Pour le premier tirage, on place la boule rouge et trois boules blanches dans l'urne. Après le n -ième tirage, on remet la boule tirée dans l'urne et on y ajoute $2n + 3$ boules blanches.

Indication. On commencera par déterminer le nombre de boules dans l'urne avant le n -ième tirage

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

Remarque

Remarquer qu'il n'est pas question de probabilité dans cet exercice, seulement d'événements. On travaille au niveau d'un espace probablisable (Ω, \mathcal{A}) , avant même de faire appel à un espace probablisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1) On veut exprimer le fait qu'au moins un des 50 premiers lancers donne pile, la réponse est donc $\bigcup_{i=1}^{50} A_i$.

2) On veut exprimer le fait qu'au moins un des lancers donne pile, la réponse est donc $\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$.

- 3) C'est l'événement complémentaire du précédent : $\overline{\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i}$. Ceci est aussi égal à $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$ (« tous les lancers donnent face »).
- 4) L'événement $\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_{2k}$ est « obtenir pile sur tous les lancers pairs ». L'événement $\bigcap_{k \geq n} A_k$ est « obtenir pile sur tous les lancers de numéro supérieur ou égal à n ».
- 5) L'événement $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcap_{k \geq n} A_k$ est « il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel qu'on n'obtienne plus que pile à partir du $n^{\text{ème}}$ lancer ». Plus simplement, cela se reformule en « on n'obtient plus que pile au bout d'un moment ».
- 6) L'événement $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{k \geq n} A_k$ est « pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $k \geq n$ tel que le $k^{\text{ème}}$ lancer donne pile ». Plus simplement, cela se reformule en « on obtient une infinité de fois pile ».

Exercice 2 Probabilités, suites et calculs matriciels

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. (A_n, B_n, C_n, D_n) forme un système complet d'événements.

D'après la formules des probabilités totales,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(A_{n+1}) \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{D_n}(A_{n+1}) \mathbb{P}(D_n) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(B_n) + 0 + \frac{1}{4} \mathbb{P}(D_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(B_{n+1}) \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(B_{n+1}) \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{D_n}(B_{n+1}) \mathbb{P}(D_n) \\ &= \frac{1}{4} \mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(C_n) + 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(C_{n+1}) \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(C_{n+1}) \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(C_{n+1}) \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{D_n}(C_{n+1}) \mathbb{P}(D_n) \\ &= 0 + \frac{1}{4} \mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{4} \mathbb{P}(D_n). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(D_{n+1}) &= \mathbb{P}_{A_n}(D_{n+1}) \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}_{B_n}(D_{n+1}) \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}_{C_n}(D_{n+1}) \mathbb{P}(C_n) + \mathbb{P}_{D_n}(D_{n+1}) \mathbb{P}(D_n) \\ &= \frac{1}{4} \mathbb{P}(A_n) + 0 + \frac{1}{4} \mathbb{P}(C_n) + \frac{1}{2} \mathbb{P}(D_n). \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}}_A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Avec ce choix, on a bien $X_{n+1} = AX_n$.

Remarque

Par récurrence, on en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$. La suite de l'exercice permet de calculer les puissances de la matrice A .

2) Donc $A = \frac{1}{2}(I_4 + \frac{1}{2}J)$ où $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Alors $K = \frac{1}{2}J^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Un calcul matriciel donne $KJ = 2J$.

3) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels u_n et v_n tels que

$$(I_4 + \frac{1}{2}J)^n = I_4 + u_n J + v_n K.$$

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}(n)$: « Il existe des réels u_n et v_n tels que $(I_4 + \frac{1}{2}J)^n = I_4 + u_n J + v_n K$ ».

- **Initialisation.** $n = 0$. $(I_4 + \frac{1}{2}J)^0 = I_4$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vérifié en prenant $u_0 = v_0 = 0$
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

$$\begin{aligned} (I_4 + \frac{1}{2}J)^{n+1} &= (I_4 + \frac{1}{2}J)^n \cdot (I_4 + \frac{1}{2}J) \\ &= (I_4 + u_n J + v_n K) \cdot (I_4 + \frac{1}{2}J) \quad \left. \begin{array}{l} \text{hypothèse de récurrence} \\ \downarrow \end{array} \right\} \\ &= I_4 + u_n J + v_n K + \frac{1}{2}J + \frac{u_n}{2}J^2 + \frac{v_n}{2}KJ \\ &= I_4 + (u_n + v_n + \frac{1}{2})J + (u_n + v_n)K. \quad \left. \begin{array}{l} \downarrow \\ J^2 = K, KJ = 2J \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vérifiée en posant

$$u_{n+1} = u_n + v_n + \frac{1}{2} \text{ et } v_{n+1} = u_n + v_n.$$

• **Conclusion.**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels u_n et v_n tels que $(I_4 + \frac{1}{2}J)^n = I_4 + u_n J + v_n K$.

- 4) Les relations trouvées à la question précédente donne, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_{n+1} = 2w_n + \frac{1}{2}$.
- La suite (w_n) est une suite arithmético-géométrique.
 - Le point fixe ℓ vérifie $\ell = 2\ell + \frac{1}{2}$. Donc $\ell = -\frac{1}{2}$.

La suite $(w_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2. $w_0 - \ell = \frac{1}{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$

$$w_n = 2^n \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2^{n-1} - \frac{1}{2}.$$

On en déduit, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = w_{n-1} + \frac{1}{2} = 2^{n-2} \quad \text{et} \quad v_n = w_{n-1} = 2^{n-2} - \frac{1}{2}.$$

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \frac{1}{2^n}(I_4 + \frac{1}{2}J)^n = \frac{1}{2^n}I_4 + \frac{1}{4}J + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}})K$.

$$X_n = A^n X_0 = \frac{1}{2^n}X_0 + \frac{1}{4}JX_0 + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}})KX_0 = \frac{1}{2^n} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + (\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2^{n+1}}$, $b_n = d_n = \frac{1}{4}$ et $c_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 3

Commençons par introduire les événements utiles pour la suite :

- A_{2n+1} : Albert gagne le $(2n+1)$ -ième lancer ;
- B_{2n} : Bertrand gagne le $(2n)$ -ième lancer ;
- A : Albert gagne le jeu ;
- B : Bertrand gagne le jeu ;
- C_k : Aucun des deux joueurs n'a gagné à l'issue du k -ième lancer ;
- C : le jeu ne s'arrête jamais.

On convient que $C_0 = \Omega$.

- 1) Pour que le jeu ne s'arrête pas, il faut et il suffit que, pour tout entier k , aucun des deux joueurs n'ait gagné à l'issue du k -ième lancer, ou aussi que pour tout entier n , aucun des deux joueurs n'ait gagné à l'issue du $2n$ -ième lancer (plus simple pour le calcul) :

$$C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} C_k = \bigcap_{n=1}^{+\infty} C_{2n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $C_{2(n+1)} = C_{2n} \cap \overline{A_{2n+1}} \cap \overline{B_{2n+2}} \subset C_{2n}$.

La suite d'événements $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, d'après le théorème de la limite monotone

$$\mathbb{P}(C) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(C_{2n}).$$

Calculons cette limite. Commençons par exprimer $\mathbb{P}(C_{2(n+1)})$ en fonction de $\mathbb{P}(C_{2n})$.

Pour que le $(2n+1)$ -ième lancer ait lieu, il faut qu'avant, aucun joueur ne gagne :

$$C_{2(n+1)} = C_{2n} \cap \overline{A_{2n+1}} \cap \overline{B_{2n+2}},$$

d'après la formule des probabilités composées

$$\mathbb{P}(C_{2(n+1)}) = \mathbb{P}(C_{2n}) \mathbb{P}_{C_{2n}}(\overline{A_{2n+1}}) \mathbb{P}_{C_{2n} \cap \overline{A_{2n+1}}}(\overline{B_{2n+2}}) = \mathbb{P}(C_{2n}) a(1-a).$$

La suite $(C_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique premier terme $\mathbb{P}(C_0) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$ et de raison $a(1-a)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N} : \mathbb{P}(C_{2n}) = (a(1-a))^n$.

Comme $0 < a(1-a) < 1$,

$$\mathbb{P}(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a(1-a))^n = 0.$$

2) Albert gagne s'il gagne au premier jet ou au 3-ième jet ... et que Bertrand ne gagne avant :

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (C_{2n} \cap A_{2n+1}).$$

Les événements $(C_{2n} \cap A_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont incompatibles. Par σ -additivité, la série de terme général $\mathbb{P}(C_{2n-1} \cap A_{2n})$ converge et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_{2n} \cap A_{2n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(C_{2n}) \mathbb{P}_{C_{2n}}(A_{2n+1}) \quad \leftarrow \text{formule des probabilités composées} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (a(1-a))^n \cdot a \\ &= \frac{a}{1-a(1-a)}. \quad \leftarrow \text{série géométrique} \end{aligned}$$

3) (A, B, C) est un système complet d'événements. Donc

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(C) = 1 - \frac{a}{1-a(1-a)} = \frac{(1-a)^2}{1-a(1-a)}.$$

4) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow a = (1-a)^2 \Leftrightarrow 1 - 3a + a^2 = 0$.

Les solutions sont $a_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$ et $a_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Comme $2 < \sqrt{5} < 3$, on a $0 < a_2 < \frac{1}{2}$. Ainsi a_2 est bien une probabilité.

Conclusion :

$$\text{Le jeu est équilibré si } a = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Remarque

On a bien $a \neq 1/2$, le jeu est asymétrique puisque Albert commence en premier.

Exercice 4 Séries de pile et face

1) D'après les lois de De Morgan, il suffit d'établir $\bar{A} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i$. Procédons par double inclusion.

(C) Soit $\omega \in \bar{A}$. Alors la séquence s apparaît un nombre fini de fois. Soit j le rang de la dernière apparition de s , 1 si s n'apparaît jamais. On a $\omega \in \bar{A}_j$ Donc $\omega \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} \bar{A}_i$.

⊃ Soit $\omega \in \bigcup_{i=1}^{+\infty} \overline{A_i}$. Il existe un indice j tel que $\omega \in \overline{A_j}$. Donc toutes les apparitions de s se font avant le $(k \times j + 1)$ -ième lancer. On a au plus $(k \times j + 1)$ apparitions de s . Ainsi $\omega \in \overline{A}$.

2) La suite (A_i) est une suite décroissante : si $\omega \in A_{i+1}$ alors s apparaît au moins une fois après le $(k(i+1) + 1)$ -ième lancer. Cette apparition se fait après le $(k \times i + 1)$ -ième lancer. Donc $\omega \in A_i$. D'où $A_{i+1} \subset A_i$. D'après le théorème de la limite monotone,

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_i).$$

3) Soit $\omega \in \bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j$, alors, il existe $j \geq i$ tel que $\omega \in B_j$. Donc la séquence est réalisée à partir du lancer $kj + 1 \geq ki + 1$. Donc $\omega \in A_i$. On a montré

$$\bigcup_{j=i}^{+\infty} B_j \subset A_i.$$

4) a) Soient $j_1 < j_2 < \dots < j_p$. B_{j_1} concerne les lancers $k \times j_1 + 1$ à $(k+1)j_1$ qui précèdent strictement les lancers $k \times j_2 + 1$ à $(k+1)j_2$, et ainsi de suite. Donc, dans l'intersection, on considère kp lancers distincts.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in \{j_1, \dots, j_p\}} B_j\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{kp} = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^p = \prod_{j \in \{j_1, \dots, j_p\}} \mathbb{P}(B_j).$$

Les événements (B_j) sont mutuellement indépendants.

b) Les événements $(\overline{B_j})$ sont mutuellement indépendants. Donc

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=i}^n \overline{B_j}\right) = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^n.$$

c) On en déduit donc (encore les loi de De Morgan)

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=i}^n B_j\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=i}^n \overline{B_j}\right) = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)^n.$$

D'après le théorème de la limite monotone,

$$\mathbb{P}(C_i) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=i}^n B_j\right) = 1.$$

5) D'après la question 3), $C_i \subset A_i$. Donc $\mathbb{P}(A_i) = 1$. La question permet alors de conclure

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

Autrement dit,

s apparaît dans la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une infinité de fois avec une probabilité de 1.

Exercice 5 Propagation de bactéries

Remarque

Deux britanniques du XIX^e siècle, Francis Galton et Henry William Watson se sont intéressés à la propagation des noms de famille dans l'aristocratie anglaise : les grands noms sont-ils condamnés à disparaître ?

Voici une version simplifiée de leur démarche dans un cadre biologique.

- 1) À la génération 0, il y a une bactérie, donc : $u_0 = \mathbb{P}(A_0) = 0$.

La descendance de cette bactérie constitue la génération 1 ; d'après l'énoncé,

$$u_1 = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{4}.$$

- 2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est évident que si la population est éteinte à la génération n , alors elle l'est à la génération $n + 1$; on a donc l'inclusion $A_n \subset A_{n+1}$ et on en déduit que : $u_n = \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(A_{n+1}) = u_{n+1}$.

Ainsi :

La suite est croissante.

Elle est de plus majorée : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \mathbb{P}(A_n) \leq 1$; on peut donc appliquer le *théorème de la limite monotone* et conclure qu'elle converge.

- 3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la *formule des probabilités totales* avec le système complet d'événements $(A_1, \overline{A_1})$:

$$\mathbb{P}(A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_{n+1}),$$

avec $\mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{4} \neq 0$ et $\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \frac{3}{4} \neq 0$.

Sous l'hypothèse A_1 , la population est éteinte dès la génération 1 : $\mathbb{P}_{A_1}(A_{n+1}) = 0$.

Sous l'hypothèse $\overline{A_1}$, la bactérie de génération 0 a deux descendants. Notons D_1 (resp. D_2) l'événement « à la génération $n + 1$, il ne reste pas de descendant issu du premier (resp. deuxième) descendant ». Par indépendance des comportements des descendants, on a :

$$\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(A_{n+1}) = \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(D_1 \cap D_2) = \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(D_1) \mathbb{P}_{\overline{A_1}}(D_2).$$

Pour le premier descendant, tout se passe comme si l'on recommençait l'expérience au début : c'est une bactérie qui a (ou non) une descendance. Comme de plus la génération $n + 1$ de la bactérie initiale correspond à la génération n des descendants de génération 1, on a : $\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(D_1) = \mathbb{P}(A_n)$. De même : $\mathbb{P}_{\overline{A_1}}(D_2) = \mathbb{P}(A_n)$.

Finalement,

$$u_{n+1} = \mathbb{P}(A_{n+1}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\mathbb{P}(A_n)^2 = f(u_n).$$

- 4) • On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. De plus $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, donc $u_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, et comme f est continue (car polynomiale), $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(\ell)$. On obtient donc, en passant

à la limite : $f(\ell) = \ell$, autrement dit $3\ell^2 - 4\ell + 1 = 0$. La résolution de cette équation donne $\ell = \frac{1}{3}$ ou $\ell = 1$.

• On remarque que $u_0 = 0 \leq \frac{1}{3}$. Une récurrence facile, qui utilise le fait que $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ et le fait que f soit croissante sur \mathbb{R}_+ (facile à vérifier) permet de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{1}{3}$, et donc, en passant à la limite, $\ell \leq \frac{1}{3}$.

• Ces deux points permettent de conclure que : $\ell = \frac{1}{3}$.

5) L'événement « la population finit par s'éteindre » est l'événement $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

Comme la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, le théorème de la limite monotone indique que $\mathbb{P}(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right)$.

La question précédente donne $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \frac{1}{3}$.

Exercice 6

1) D'après les lois de De Morgan, $\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k} = \bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}$.

D'après le corollaire de la limite monotone

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k}\right)\right) \stackrel{\text{lois de De Morgan}}{=} 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right).$$

Par hypothèse $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements mutuellement indépendants. Donc $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est aussi une suite d'événements mutuellement indépendants et

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_k)).$$

Puis,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_k))\right).$$

2) Raisonnons par double implication sur la première équivalence.

\Rightarrow Si $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_k))\right) = 0$.

$$\text{Or} \quad \ln\left(\prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_k))\right) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)).$$

Donc
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) = -\infty.$$

Finalement, La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))$ diverge.

⊖ On suppose que la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))$ diverge.

Cette série est à termes négatifs, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) = -\infty$. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_k)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))\right) = 0.$$

Puis,
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1.$$

Pour la seconde équivalence, il suffit de montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) \text{ converge} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \text{ converge.}$$

⇒ Si $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))$ converge, alors le terme général tend vers 0. La série est à termes négatifs et $\ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) \sim (-\mathbb{P}(A_k))$.

D'après les critères de convergence des séries à termes constants, les séries

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty} -\mathbb{P}(A_k) \text{ sont de même nature, donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \text{ converge.}$$

⊖ Si $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ converge, alors le terme général tend vers 0. La série est à termes positifs et $-\ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) \sim \mathbb{P}(A_k)$.

D'après les critères sur les séries à termes positifs, les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} -\ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) \text{ sont de même nature, donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) \text{ converge.}$$

Conclusion :
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = 1 \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) \text{ diverge} \iff \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) \text{ diverge.}$$

3) Introduisons, les événements

- A : « tirer au moins une fois la boule rouge ».
- pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les événements A_k : « La k -ième boule tirée est la boule rouge. »

L'événement A est réalisé si et seulement si on réalise l'un des événements A_k :

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k.$$

De plus, pour les trois protocoles $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'événements indépendants car, pour tout $k \geq 1$, la composition de l'urne au k -ième ne dépend pas des résultats des tirages précédents. On peut donc utiliser les équivalences montrées à la question 2).

- a) Pour le k -ième tirage, la composition de l'urne est d'une boule rouge et une boule blanche. Donc $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}$. Ce terme ne tend pas vers 0, la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ diverge. Donc

$$\mathbb{P}(A) = 1.$$

Presque sûrement, la boule rouge est tirée.

- b) Pour le k -ième tirage, l'urne contient la boule rouge et k boules blanches (on a rajouté $k - 1$ boules blanches). Donc $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{k+1}$.

La série $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k)$ est la série harmonique (décalée). Elle diverge. De nouveau,

$$\mathbb{P}(A) = 1.$$

- c) Pour le premier tirage l'urne contient 4 boules. Pour le second tirage, elle en contient 9, puis 16 boules. Montrons, par récurrence que le nombre de boules dans l'urne pour le n -ième tirage est $N_n = (n + 1)^2$

- **Initialisation.** $n = 1$. On a $N_1 = 4 = 2^2$. La propriété est vraie au rang 1.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'urne contient $(n + 1)^2$ boules pour le n -ième tirage. Alors, pour le $(n + 1)$ -ième tirage on rajoute $2n + 3$ boules. Le nombre de boules dans l'urne est alors de $N_{n+1} = (n + 1)^2 + 2(n + 1) + 1 = (n + 2)^2$.
- **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(n + 1)^2$ boules dans l'urne pour le n -ième tirage.

On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{(k+1)^2}$.

La série de terme général $\mathbb{P}(A_k)$ est une série de Riemann d'exposant $2 > 1$, donc convergente. À l'aide de la question 2), on peut simplement affirmer que $\mathbb{P}(A) \neq 1$.

Calculons $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln(1 - \mathbb{P}(A_k))$ avec la question 1).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) = \ln\left(1 - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \ln\left(\frac{k^2 + 2k}{(k+1)^2}\right) = \ln(k) + \ln(k+2) - 2\ln(k+1).$$

Soit $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \ln(1 - \mathbb{P}(A_k)) &= \sum_{k=1}^n \ln(k) + \sum_{k=1}^n \ln(k+2) - 2 \sum_{k=1}^n \ln(k+1) \\
 &= \sum_{k=1}^n \ln(k) + \sum_{\substack{k'=3 \\ (k'=k+2)}}^{n+2} \ln(k') - 2 \sum_{\substack{k'=2 \\ (k'=k+1)}}^{n+1} \ln(k') \quad \left. \begin{array}{l} \text{change-} \\ \text{ments} \\ \text{d'indice} \end{array} \right\} \\
 &= \ln(2) + \ln(n+1) + \ln(n+2) - 2(\ln(2) + \ln(n+1)) \\
 &= -\ln(2) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\ln(2) + \ln(1) = -\ln(2).
 \end{aligned}$$

D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n (1 - \mathbb{P}(A_k)) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Variables aléatoires discrètes

33

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans \mathbb{N} .

1) Déterminer la loi de X sachant que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k} \mathbb{P}(X = k - 1).$$

2) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans \mathbb{N} . Déterminer la loi de X sachant que

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n + 2) = \frac{1}{8}(6 \mathbb{P}(X = n + 1) - \mathbb{P}(X = n)).$$

Exercice 2 * Un sportif s'entraîne en réalisant tous les jours un même exercice qui lui permet de s'améliorer. S'il réussit à faire complètement l'exercice pendant n jours, la probabilité qu'il réussisse à le faire complètement le jour suivant est $\frac{n+1}{n+2}$. Il commence son entraînement le jour 1.

La probabilité qu'il réussisse l'exercice le premier jour est de $\frac{1}{2}$.

Soit X la variable aléatoire réelle égale au jour où, pour la première fois le sportif ne réussit pas à faire complètement l'exercice.

1) Donner $\mathbb{P}(X > 0)$, $\mathbb{P}(X > 1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(X > n + 1)$ en fonction de $\mathbb{P}(X > n)$.

2) Déterminer la loi de X .

3) X possède-t-elle une espérance?

Exercice 3 * Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

On définit Y de la façon suivante :

- si X prend une valeur paire, alors Y prend la valeur $\frac{X}{2}$;
- si X prend une valeur impaire, alors Y prend la valeur 0.

Détermine la loi de Y . Justifier l'existence de l'espérance $\mathbb{E}(Y)$, puis la calculer.

Exercice 4 ** Variance et politesse

Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in]0,1[$. Dans une boulangerie, on estime que le nombre N de clients qui passent en une journée suit la loi de Poisson de paramètre λ . On estime que chaque client, indépendamment des autres, a une probabilité p de dire bonjour en entrant. On note X le nombre de clients qui ont ainsi dit « bonjour » dans la journée.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Préciser, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la valeur de $\mathbb{P}_{[N=n]}(X = k)$.
- 2) Déterminer la loi de X .
- 3) Déterminer l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 5 *** Mode(s) de la loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On appelle mode de X , toute valeur $x_0 \in X(\Omega)$ telle que

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) \leq \mathbb{P}(X = x_0).$$

- 1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, selon la valeur de λ , la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ admet un ou deux modes que l'on précisera.
Indication. On distinguera 3 cas : $\lambda \in]0,1[$, $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $\lambda \in]1, +\infty[\setminus \mathbb{N}$.
- 2) Illustrer par des représentations graphiques en Python les différents cas obtenus.

 **Exercices axés sur le raisonnement****Exercice 6** * Caractérisation de la loi géométrique par l'absence de mémoire

- 1) Soit X une variable aléatoire de loi géométrique. Montrer que

$$\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}_{[X>n]}(X > n + k) = \mathbb{P}(X > k). \quad (*)$$

- 2) Réciproquement, supposons que X soit une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > n) \neq 0$, et vérifiant la propriété (*).
 - a) On pose $q = \mathbb{P}(X > 1)$.
 Montrer que la suite $(\mathbb{P}(X > n))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q .
 - b) En déduire que X suit la loi géométrique de raison $p = 1 - q$.

 **Exercices avec questions ouvertes****Exercice 7** * Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

- 1) Soit $Y = (-1)^X X$. Est-ce que Y possède une espérance ? Si oui, la calculer.
- 2) Soit Z définie par :

- Si X prend une valeur paire, alors Z prend la valeur $\frac{X}{2}$
- Si X prend une valeur impaire, alors Z prend la valeur 0.

Quelle relation a-t-on entre X , Y et Z ?

Est-ce que Z possède une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 8 ** Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de même paramètre p . Donner la probabilité que la matrice

$$A = \begin{bmatrix} X & Y \\ Y & X \end{bmatrix} \quad \text{soit inversible.}$$

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) Posons $a = \mathbb{P}(X = 0)$. La formule de récurrence donne

$$\mathbb{P}(X = 1) = a, \quad \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}a, \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{6}a = \frac{1}{3!}a.$$

Raisonnons par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\mathcal{P}(n) : \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!}a$.

- **Initialisation.** $n = 0$. $\mathbb{P}(X = 0) = a = \frac{1}{0!}a$. Donc la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!}a$. Alors

$$\mathbb{P}(X = n + 1) = \frac{1}{n + 1} \mathbb{P}(X = n) \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{1}{n + 1} \frac{1}{n!} a = \frac{1}{(n + 1)!} a.$$

Donc, si $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!}a$, alors $\mathbb{P}(X = n + 1) = \frac{1}{(n + 1)!}a$.

- **Conclusion.** $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!}a$.

• Il reste à déterminer a .

$([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements. En particulier, $\sum \mathbb{P}(X = k)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1$. On a une série exponentielle, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e^1$. Donc $ae = 1$.

$$a = e^{-1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{e^{-1}}{n!}.$$

Remarque

On reconnaît la loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$8x^2 - 6x + 1 = 0.$$

Les racines de cette équation sont $x_1 = \frac{1}{4}$ et $x_2 = \frac{1}{2}$. Il existe deux réels λ et μ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda \left(\frac{1}{4}\right)^n + \mu \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Par hypothèse $u_0 = \frac{2}{3}$, donc $\lambda + \mu = \frac{2}{3}$.

Comme $([X = n])_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$.

Les séries géométriques $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ convergent ($0 < \frac{1}{4} < 1$ et $0 < \frac{1}{2} < 1$) et,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lambda \frac{1}{1 - (1/4)} + \mu \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{4}{3}\lambda + 2\mu.$$

Ainsi λ et μ sont les solutions du système
$$\begin{cases} \lambda + \mu = \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3}\lambda + 2\mu = 1. \end{cases}$$

Ce système a pour unique solution $\lambda = \frac{1}{2}$ et $\mu = \frac{1}{6}$. Bilan :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{2}{4^{n+1}} + \frac{1}{6 \cdot 2^n}.$$

Exercice 2

1) Par concision, nous dirons « le sportif réussit » pour dire que le sportif réussit à faire complètement l'exercice.

L'événement $[X > 0]$ est certain, $\mathbb{P}(X > 0) = 1$. De plus, $[X > 1]$ est réalisé si et seulement si le sportif réussit le premier jour. Donc $\mathbb{P}(X > 1) = \frac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$[X > n]$ est réalisé si et seulement si le premier jour où le sportif ne réussit pas est au delà du n -ième jour, donc si et seulement si il a réussi les n premiers jours.

L'hypothèse se traduit par $\mathbb{P}_{[X > n]}(X > n + 1) = \frac{n+1}{n+2}$.

Par définition de la probabilité conditionnelle,

$$\mathbb{P}_{[X > n]}(X > n + 1) = \frac{\mathbb{P}(\overbrace{[X > n] \cap [X > n + 1]}^{X > n + 1})}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{\mathbb{P}(X > n + 1)}{\mathbb{P}(X > n)}.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X > n + 1) = \frac{n + 1}{n + 2} \mathbb{P}(X > n).$$

On a
$$\mathbb{P}(X > 2) = \frac{2}{3} \mathbb{P}(X > 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(X > 3) = \frac{3}{4} \mathbb{P}(X > 2) = \frac{1}{4}.$$

On montre, par une récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\mathbb{P}(X > n) = \frac{1}{n+1}.$$

2) Déterminons maintenant la loi de X .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $[X > n - 1] = [X \geq n] = [X = n] \cup [X > n]$.

C'est une union d'événements incompatibles, par σ -additivité,

$$\mathbb{P}(X = n) = \mathbb{P}(X > n - 1) - \mathbb{P}(X > n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1} = \frac{1}{n(n + 1)}.$$

Ainsi

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^*, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n(n + 1)}.$$

3) $\mathbb{E}(X)$ existe si et seulement si la série de terme général $k\mathbb{P}(X = k)$ est absolument convergente. Or $k\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k+1}$. On retrouve le terme général de la série harmonique (décadée). Donc

X n'a pas d'espérance.

Exercice 3

• On a $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

→ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = 2k) = (1 - p)^{2k-1}p$.

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbb{P}(Y = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = 2k + 1) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - p)^{2k}p = p \sum_{k=0}^{+\infty} ((1 - p)^2)^k \\ &= p \frac{1}{1 - (1 - p)^2} = \frac{1}{2 - p}. \end{aligned}$$

• On remarque que $0 \leq Y \leq X$ et X possède une espérance. D'après le théorème de domination, Y possède une espérance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - p)^{2k-1}p \\ &= p(1 - p) \sum_{k=1}^{+\infty} k((1 - p)^2)^{k-1} = \frac{p(1 - p)}{(1 - (1 - p)^2)^2} = \frac{1 - p}{p(2 - p)^2}. \end{aligned}$$

série géométrique dérivée

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{1 - p}{p(2 - p)^2}.$$

Exercice 4 Variance et politesse

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Sous l'hypothèse $[N = n]$, la variable X compte le nombre de succès (dire bonjour) dans une succession de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes (cela est précisé dans l'énoncé) et de même paramètre p . On sait alors que la loi « conditionnelle » de X est la loi binomiale de paramètres n et p .

Ainsi :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

2) La variable X est (presque sûrement, c'est-à-dire avec probabilité 1) à valeurs dans \mathbb{N} . Soit $k \in \mathbb{N}$.

On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$: on sait alors que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [N = n])$ converge, et que :

$$\mathbb{P}(X = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [N = n]).$$

Or pour tout $n < k$, $\mathbb{P}([X = k] \cap [N = n]) = 0$ (il ne peut pas y avoir plus de « bonjour » que de clients). Il reste :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [N = n]) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) \mathbb{P}_{[N=n]}(X = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{p^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \stackrel{\ell=n-k}{=} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^\ell}{\ell!} \\ \mathbb{P}(X = k) &= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)}, \end{aligned}$$

car on a reconnu une somme de série exponentielle. Ainsi : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$.

X suit la loi de Poisson de paramètre λp .

3) Comme $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$, on sait que X admet une espérance et une variance avec

$\mathbb{E}(X) = \lambda p$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda p$.

Exercice 5 Mode(s) de la loi de Poisson

1) Posons pour $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \mathbb{P}(X = k)$. Étudions les variations de cette suite. Pour $k \in \mathbb{N}$.

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{k+1}.$$

Donc $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{k+1} > 1 \Leftrightarrow k < \lambda - 1$.

• Nous distinguons trois cas :

→ $0 < \lambda < 1$. Alors $\lambda - 1 < 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$.

La suite est strictement décroissante.

On a un seul mode : 0.

→ $\lambda \in \mathbb{N}^*$. Soit $k_0 = \lambda - 1$. Alors $u_{k_0+1} = u_{k_0}$.

Pour $k < k_0$, on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} > 1$, donc $u_0 < u_1 < \dots < u_{k_0}$.

Pour $k > k_0$, on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} < 1$, donc $u_{k_0+1} > u_{k_0+2} > \dots > u_k > u_{k+1} > \dots$

On a deux modes : $k_0 = \lambda - 1$ et $k_0 + 1 = \lambda$.

→ $\lambda > 1$ et $\lambda \notin \mathbb{N}^*$. Soit $k_0 = \lfloor \lambda - 1 \rfloor$. Alors $k_0 < \lambda - 1 < k_0 + 1$.

Pour $k \leq k_0$, on a $k < \lambda - 1$. Donc $u_k < u_{k+1}$. D'où $u_0 < u_1 < \dots < u_{k_0+1}$.

Pour $k \geq k_0 + 1$, on a $k > \lambda - 1$. Donc $u_k > u_{k+1}$. D'où $u_{k_0+1} > u_{k_0+2} > \dots$

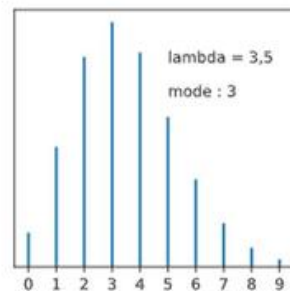
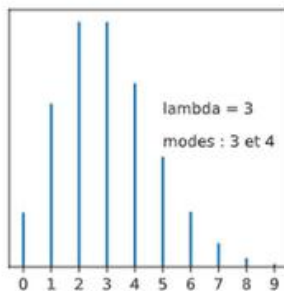
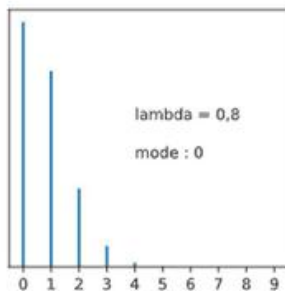
On a un mode : $k_0 + 1 = \lfloor \lambda \rfloor$.

- 2) On écrit une fonction `liste_loi_Poisson` qui renvoie la liste des valeurs pour construire l'histogramme. On utilise, pour $1 \leq k \leq n$, la relation $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda}{k} \mathbb{P}(X = k - 1)$. Pour afficher l'histogramme, on utilise `plt.bar`.

```
def liste_loi_Poisson(ll):
    proba=np.exp(-ll) # P(X=0)
    b=[proba]
    for k in range(1,n+1):
        # P(X=k) = P(X=k-1) * ll / k
        proba = proba * ll / k
        b.append(proba)
    return b

import matplotlib.pyplot as plt

n=9
x = range(n+1)
ll=3.5
width = 0.1
plt.bar(x, liste_loi_Poisson(ll),width)
```



Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 6) Caractérisation de la loi géométrique par l'absence de mémoire

- 1) Notons $p \in]0,1[$ le paramètre de la géométrique que suit X .

• Montrons tout d'abord que : $\forall m \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > m) = (1 - p)^m$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Il y a deux façons de raisonner.

Méthode 1.

Les événements $([X = k])_{k > m}$ sont deux à deux incompatibles, par σ -additivité, la série $\sum_{k > m} P(X = k)$ converge, et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X > m) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=m+1}^{+\infty} [X = k]\right) = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=m+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = \sum_{\ell=k-m-1}^{+\infty} p(1-p)^{\ell+m} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X > m) = p(1-p)^m \sum_{\ell=0}^{+\infty} (1-p)^\ell = p(1-p)^m \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^m,$$

en reconnaissant une somme de série géométrique de raison $1-p$, avec $|1-p| < 1$.

On aurait aussi pu travailler sur une somme finie en passant par l'événement complémentaire : $\mathbb{P}(X \leq m) = 1 - \mathbb{P}(X > m)$.

Méthode 2.

Considérons une suite infinie d'expériences aléatoires de Bernoulli, mutuellement indépendantes, et de même paramètre de succès p . En notant Z le rang du premier succès, on sait que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, autrement dit, Z suit la même loi que X , et en particulier $\mathbb{P}(X > m) = \mathbb{P}(Z > m)$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement « il y a succès lors de la k -ième épreuve »,

$$[Z > m] = \bigcap_{k=1}^m \overline{A_k},$$

(dire que $[Z > m]$, c'est dire qu'il n'y a pas eu de succès sur les m premières épreuves), et comme les événements A_1, \dots, A_m sont mutuellement indépendants,

$$\mathbb{P}(Z > m) = \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(\overline{A_k}) = \prod_{k=1}^m (1-p) = (1-p)^m.$$

• Soient $n, k \in \mathbb{N}$. D'après ce que l'on vient de voir, $\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$, donc en particulier $\mathbb{P}(X > n) \neq 0$. Puis,

$$\mathbb{P}_{[X > n]}(X > n+k) = \frac{\mathbb{P}([X > n+k] \cap [X > n])}{\mathbb{P}(X > n)}.$$

Or $[X > n+k] \cap [X > n] = [X > n+k]$ (car $[X > n+k] \subset [X > n]$), donc

$$\mathbb{P}_{[X > n]}(X > n+k) = \frac{\mathbb{P}(X > n+k)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbb{P}(X > k).$$

Ce qui prouve la relation (*).

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise la relation (*) avec $k = 1$, on obtient

$$\mathbb{P}_{[X > n]}(X > n+1) = \mathbb{P}(X > 1) = q.$$

Mais par ailleurs

$$\mathbb{P}_{[X > n]}(X > n+1) = \frac{\mathbb{P}([X > n+1] \cap [X > n])}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{\mathbb{P}(X > n+1)}{\mathbb{P}(X > n)}.$$

Ainsi $\frac{\mathbb{P}(X > n+1)}{\mathbb{P}(X > n)} = q$, autrement dit, $\mathbb{P}(X > n+1) = q\mathbb{P}(X > n)$. Ceci étant valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a montré que

la suite $(\mathbb{P}(X > n))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison q .

b) On déduit de ce résultat que : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > n) = q^n \mathbb{P}(X > 0)$. Comme on a supposé X à valeurs dans \mathbb{N}^* , on a $\mathbb{P}(X > 0) = 1$, et donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X > n) = q^n$.

Nous allons en déduire que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, où $p = 1 - q$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On remarque que, puisque X est à valeurs entières,

$$[X > k - 1] = [X \geq k] = [X = k] \cup [X > k],$$

union d'événements incompatibles, donc, par σ -additivité,

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X > k - 1) - \mathbb{P}(X > k).$$

Comme k et $k - 1$ sont dans \mathbb{N} (car $k \in \mathbb{N}^*$), on peut appliquer le résultat ci-dessus :

$$\mathbb{P}(X = k) = q^{k-1} - q^k = q^{k-1}(1 - q) = (1 - p)^{k-1}p \quad \text{car } 1 - p = q.$$

Ceci étant valable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on conclut que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 7

1) $|Y| \leq X$ et X admet une espérance. D'après le théorème de domination, Y admet une espérance. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k k \mathbb{P}(X = k) && \left. \begin{array}{l} \text{terme nul pour } k = 0 \\ \text{changement d'indice } k' = k - 1 \\ \text{série exponentielle} \end{array} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k'=0}^{+\infty} \frac{(-\lambda)^{k'+1}}{k'!} \\ &= e^{-\lambda} (-\lambda) e^{-\lambda} \\ &= \boxed{-\lambda e^{-2\lambda}} \end{aligned}$$

2) Montrons $X + Y = 4Z$.

- Si X prend une valeur paire, alors $Y = X$. Donc $X + Y = 2X = 4Z$.
- Si X prend une valeur impaire, alors $Y = -X$. Donc $X + Y = 0 = 4Z$.

Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}\left(\frac{X+Y}{4}\right) = \frac{1}{4}(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)) = \frac{1}{4}(\lambda - \lambda e^{-2\lambda})$.

Concluons

$$\mathbb{E}(Z) = \frac{\lambda(1 - e^{-2\lambda})}{4}.$$

Exercice 8

Passons par l'événement contraire. A n'est pas inversible si et seulement si $\det(A) = 0$.

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow [X^2 - Y^2 = 0] \Leftrightarrow [X^2 = Y^2] \stackrel{\substack{[X>0] \\ [Y>0]}}{\Leftrightarrow} [X = Y]$$

$(Y = k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est un système complet d'événements.

D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = Y] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = k]) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = k) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 (1-p)^{2(k-1)} \\ &= p^2 \sum_{k'=0}^{+\infty} ((1-p)^2)^{k'} \quad \left. \begin{array}{l} \text{changement d'indice } k' = k - 1 \\ \text{série géométrique de raison } (1-p)^2 \in]0,1[\end{array} \right\} \\ &= \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}. \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\text{« } A \text{ inversible »}) = 1 - \frac{p}{2-p} = \frac{2(1-p)}{2-p}.$$

Couples de variables aléatoires

34

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Loi d'un couple : une variable fonction d'une autre variable

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Notons $Y = X^2$.

- 1) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- 2) En déduire la loi de Y .
- 3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
- 4) Comparer $\mathbb{E}(X \cdot Y)$ et $\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$. Commenter.

Exercice 2 ** Loi d'un couple : loi conjointe donnée par un tableau

La loi conjointe du couple (X, Y) est donnée par le tableau suivant :

$X \setminus Y$	0	1	2
0	1/20	1/4	0
1	17/60	1/4	1/6

- 1) Déterminer la loi de X et celle de Y .
- 2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
- 3) Calculer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{E}(X \cdot Y)$. Commenter.

Exercice 3 * Une boîte puis une boule

On considère n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte numéro k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard une boîte, puis une boule dans cette boîte. Soient X et Y les numéros de la boîte et de la boule obtenues.

- 1) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- 2) Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.
- 3) Déterminer la loi de Y ainsi que son espérance.

Exercice 4 ** Temps d'attente

Une urne contient $N - 2$ boules vertes, 1 boule blanche et 1 boule rouge. On tire les boules de l'urne, une à une et sans remise.

- 1) Soient X_1 le rang d'apparition de la boule blanche et X_2 le rang d'apparition de la boule rouge. Déterminer la loi de X_1 , la loi de X_2 et la loi du couple (X_1, X_2) .
- 2) Soit X le rang où on obtient pour la première fois soit la boule blanche, soit la boule rouge. Soit Y le rang où on a obtenu pour la première fois les deux boules blanche et rouge. Déterminer la loi de X et la loi de Y .

 **Exercices axés sur le raisonnement****Exercice 5** ** Au plus deux tentatives

Un standardiste effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geq 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartenant à $]0,1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q , avec $q = 1 - p$.

- 1) Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance.
- 2) Après ces n recherches, le standardiste appelle une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'il n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et soit $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.
 - a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
 - b) Calculer $p_0 = \mathbb{P}(Z = 0)$ et vérifier que $p_1 = npq^{2n-2}(1 + q)$.
 - c) Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X=k]}(Y = \ell)$, pour k appartenant à $[[0, n]]$ et ℓ à $[[0, n - k]]$.
 - d) Établir que $\mathbb{P}(Z = s) = \sum_{k=0}^s \mathbb{P}((X = k) \cap (Y = s - k))$.
 - e) Calculer $p_s = \mathbb{P}(Z = s)$, et montrer que Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p(1 + q)$.
Indication. On pourra vérifier que $\binom{n}{k} \binom{n-k}{s-k} = \binom{n}{s} \binom{s}{k}$.

Exercice 6 ** Minimum et maximum de deux géométries indépendantes

Soient X et X' deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(p')$, où p et p' sont deux éléments de $]0,1[$ fixés. On note également $q = 1 - p$ et $q' = 1 - p'$. Pour toute variable aléatoire T , on notera \mathbb{F}_T sa fonction de répartition.

- 1) Rappeler ou retrouver $\mathbb{F}_X(k)$ pour tout entier positif k .
- 2) Soit $Y = \max(X, X')$.
 - a) Calculer $\mathbb{F}_Y(k)$ pour tout entier positif k .
 - b) La variable Y suit-elle une loi géométrique?

- 3) Soit $Z = \min(X, X')$.
- Calculer $\mathbb{F}_Z(k)$ pour tout entier positif k .
 - En déduire que Z suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
 - Donner une interprétation de ce résultat en termes d'expériences aléatoires.

Exercice 7 ** Maximum d'uniformes

On fixe deux entiers strictement positifs d et n , et on considère d variables aléatoires X_1, \dots, X_d mutuellement indépendantes, suivant chacune la loi uniforme sur l'ensemble $[[1, n]]$. On note alors

$$M(d, n) = \max(X_1, \dots, X_d).$$

- 1) *Échauffement.* Dans un premier temps, on suppose que d vaut 2, et on considère donc la variable aléatoire $M(2, n) = \max(X_1, X_2)$, que l'on note ici M pour abrégé.
- Pour chaque entier $k \in [[1, n]]$, déterminer la valeur de $\mathbb{F}_M(k)$.
 - Justifier successivement que

$$\forall k \in [[1, n]], \quad \mathbb{P}(M = k) = \mathbb{F}_M(k) - \mathbb{F}_M(k - 1),$$

$$\text{que} \quad \mathbb{E}(M) = n \mathbb{F}_M(n) - \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_M(k)$$

$$\text{puis que} \quad \mathbb{E}(M) = \sum_{k=0}^n (1 - \mathbb{F}_M(k)).$$

Indication. On pourra utiliser la linéarité de la sommation et introduire un changement d'indice bien choisi.

- c) En déduire la valeur de $\mathbb{E}(M(2, n))$.

Indication. On pourra admettre ou redémontrer que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

- d) Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(M(2, n))$ lorsque n tend vers l'infini.

- 2) On revient au cas général, et d est donc désormais un entier strictement positif quelconque. Reprendre les questions précédentes, et montrer que

$$\mathbb{E}(M(d, n)) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{nd}{d+1}.$$

- 3) Dans cette dernière partie, on vérifie numériquement le résultat qui vient d'être obtenu.
- Écrire en Python une fonction d'en-tête `simulation_M(d, n, N)` qui renvoie N simulations aléatoires indépendantes de la variable $M(d, n)$. On pourra importer le module `numpy` sous l'alias `np`, et le sous-module `numpy.random` sous l'alias `rd`.
 - Écrire en Python une fonction d'en-tête `moyenne_empirique(d, n, N)` qui fasse appel à la fonction précédente et qui renvoie la moyenne des valeurs des N simulations.
 - Examiner la valeur de `moyenne_empirique(d, n, N) / n` pour différentes valeurs de d, n et N .

Exercice 8 *** Fonctions génératrices et stabilité

On établit ici le résultat de stabilité des lois binomiales sous l'addition indépendante en servant de quelques propriétés simples des *fonctions génératrices*.

Si X est une variable aléatoire finie, à valeurs entières positives, la fonction génératrice de X est la fonction

$$g_X : \begin{cases} [0,1[& \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto \mathbb{E}(t^X). \end{cases}$$

- 1) Déterminer une expression simple de $g_X(t)$ pour $t \in [0,1[$ si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , puis si X suit une loi uniforme sur $[[1,n]]$, où n est un entier positif fixé.
- 2) On suppose dans cette question que $n \in \mathbb{N}$ et que X est une variable aléatoire à valeurs dans $[[0,n]]$.

a) Justifier que

$$\forall t \in [0,1[, \quad g_X(t) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) t^k.$$

b) Justifier que si deux variables aléatoires à valeurs dans $[[0,n]]$ ont la même loi, alors elles ont la même fonction génératrice.

c) Montrer que

$$\forall k \in [[0,n]], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k!} g_X^{(k)}(0),$$

où $g^{(k)}$ désigne la dérivée k -ième de g_X .

d) En déduire que si deux variables aléatoires à valeurs dans $[[0,n]]$ ont la même fonction génératrice, alors elles ont la même loi.

- 3) Soient X et Y deux variables aléatoires finies. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors

$$g_{X+Y} = g_X \cdot g_Y$$

en tant que fonctions de $[0,1[$ dans \mathbb{R} .

- 4) Dans cette dernière question, on note γ la fonction génératrice associée à une variable de loi $\mathcal{B}(p)$, telle que calculée lors de la première question.

a) Montrer que si X est une variable de loi $\mathcal{B}(n,p)$, alors $g_X = \gamma^n$.

b) Montrer que si X_1 et X_2 sont deux variables indépendantes, de loi respective $\mathcal{B}(n_1,p)$ et $\mathcal{B}(n_2,p)$, alors $g_{X_1+X_2} = \gamma^{n_1+n_2}$.
Retrouver le fait que $X_1 + X_2$ suit la loi $\mathcal{B}(n_1 + n_2,p)$.

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 Loi d'un couple : une variable fonction d'une autre variable

- 1) La variable Y est à valeurs dans $\{0,1\}$. De plus, si $X = 0$, alors $Y = 0$, et si $X = \pm 1$, alors $Y = 1$. De ce fait, la loi de (X,Y) peut être décrite par le tableau suivant :

$Y \setminus X$	-1	0	1
0	0	1/3	0
1	1/3	0	1/3

- 2) On en déduit que $\mathbb{P}(Y = 0) = 1/3$ et que $\mathbb{P}(Y = 1) = 2/3$. Autrement dit, $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(2/3)$.
- 3) Intuitivement, puisque Y est fonction de X , il faut s'attendre à ce que X et Y ne soient pas indépendantes. Plus précisément, la valeur de X détermine entièrement celle de Y . Formalisons cette idée. D'une part

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) &= \mathbb{P}(X = 0) && \text{(puisque si } X = 0, \text{ alors } Y = 0) \\ &= 1/3, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0) &= 1/3 \cdot 1/3 \\ &= 1/9. \end{aligned}$$

On constate donc que $\mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 0]) \neq \mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 0)$, ce qui prouve que

X et Y ne sont pas indépendantes.

- 4) Pour X et Y , on revient à la définition de l'espérance : ces deux variables étant finies, elles admettent automatiquement une espérance, et

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k) = (-1) \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1/3 = 0.$$

De même,

$$\mathbb{E}(Y) = 2/3.$$

(on peut par exemple se servir du fait que Y suit une loi de Bernoulli). De plus, le *théorème de transfert* (dans le cas de sommes finies, donc automatiquement absolument convergentes) donne

$$\mathbb{E}(X \cdot Y) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ \ell \in Y(\Omega)}} k \ell \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) = (-1) \cdot 1 \cdot 1/3 + 1 \cdot 1 \cdot 1/3 = 0.$$

En particulier, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, et ce sans que X et Y soient pour autant indépendantes.

Remarque

On peut généraliser de la façon suivante :

Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-n, n]$ et $Y = X^2$.

Alors X et $-X$ ont même loi. De même X^3 et $-X^3$. Donc $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^3) = 0$.

Ainsi $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, sans que X et Y soient indépendantes.

Exercice 2

Loi d'un couple : loi conjointe donnée par un tableau

- 1) On procède par sommation des lignes et des colonnes, en commençant par les sommes les plus simples et en concluant en utilisant le fait que la somme de toutes les probabilités vaut 1. On trouve d'une part

$$\mathbb{P}(X = 0) = 6/20 = 3/10, \quad \text{puis,} \quad \mathbb{P}(X = 1) = 14/20 = 7/10,$$

et d'autre part

$$\mathbb{P}(Y = 2) = 2/12 = 1/6, \quad \mathbb{P}(Y = 1) = 6/12 = 1/2, \quad \text{et donc} \quad \mathbb{P}(Y = 0) = 1/3.$$

- 2) La présence d'une case nulle entraîne qu'une certaine valeur de X empêche une certaine autre valeur de Y : ici, si $X = 0$, alors $Y \neq 2$. Transformons cette idée en une preuve rigoureuse du fait que X et Y ne sont pas indépendantes : d'une part

$$\mathbb{P}([X = 0] \cap [Y = 2]) = 0$$

(événement impossible); d'autre part

$$\mathbb{P}(X = 0) \cdot \mathbb{P}(Y = 2) = 3/10 \cdot 1/6 \neq 0,$$

ce qui montre que

X et Y ne sont pas indépendantes.

- 3) Pour X et Y , on revient à la définition de l'espérance : ces deux variables étant finies, elles admettent automatiquement une espérance, et

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} k \mathbb{P}(X = k) = 1 \cdot 7/10 = 7/10.$$

(on peut d'ailleurs utiliser l'expression connue pour l'espérance d'une variable de Bernoulli). De même, $\mathbb{E}(Y) = 5/6$.

De plus, le théorème de transfert (dans le cas de sommes finies, donc automatiquement absolument convergentes) donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X \cdot Y) &= \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ \ell \in Y(\Omega)}} k \ell \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 1/4 + 1 \cdot 2 \cdot 1/6 \quad (\text{les 4 autres termes étant nuls}) \\ &= 7/12. \end{aligned}$$

Or on remarque également que $\mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y) = 7/10 \cdot 5/6 = 7/12$.

et en particulier, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, et ce sans que X et Y soient pour autant indépendantes.

Exercice 3 Une boîte puis une boule

- 1) La variable X est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, et la variable Y est également à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ puisque si l'on choisit la boîte numéro n , tous les numéros de boule entre 1 et n sont accessibles. De plus, soit $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. La formule des probabilités composées donne

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) &= \mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = \ell) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \begin{cases} 0 & \text{si } \ell > k \\ 1/k & \text{si } \ell \in \llbracket 1, k \rrbracket. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc entièrement déterminé la loi du couple (X, Y) .

- 2) Décomposons cet événement à l'aide de la formule des probabilités totales, en se servant du système complet d'événements $([X = k])_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = Y) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}_{[X=k]}(X = Y) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = k) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \boxed{\frac{1}{n} H_n}, \end{aligned}$$

où H_n désigne le n -ième nombre harmonique.

- 3) De la même manière, si $\ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$, décomposons l'événement $Y = \ell$ à l'aide de la formule des probabilités totales. On écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = \ell) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell-1} \underbrace{\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell])}_{=0(\ell > k)} + \sum_{k=\ell}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) \quad \left. \begin{array}{l} \text{relation} \\ \text{de Chasles} \end{array} \right\} \\ &= 0 + \sum_{k=\ell}^n \mathbb{P}([X = k] \cap [Y = \ell]) \\ &= \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n} (H_n - H_{\ell-1}) \end{aligned}$$

avec la même notation que dans la question précédente.

Ensuite, puisque la variable Y est finie, elle admet automatiquement une espérance, et

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(Y) &= \sum_{\ell=1}^n \ell \mathbb{P}(Y = \ell) = \sum_{\ell=1}^n \ell \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=\ell}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq \ell \leq k \leq n} \ell \cdot \frac{1}{k} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{\ell=1}^k \ell \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \cdot \frac{k(k+1)}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{somme arithmétique} \\ \text{par factorisation} \\ \text{et linéarité} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \right) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{somme arithmétique} \end{array} \right\} \\
 &= \frac{1}{2n} \left(\frac{n(n+1)}{2} + n \right) \\
 &= \boxed{\frac{n+3}{4}}.
 \end{aligned}$$

Exercice 4 Temps d'attente

- 1) Puisque l'urne contient une boule blanche et une boule rouge, ces deux boules jouent un rôle équivalent, et donc X_1 et X_2 ont la même loi.

On peut tirer au maximum N boules, puisque l'expérience se fait sans remise, et chaque boule peut être tirée à n'importe quel moment, donc $X_1(\Omega) = \llbracket 1, N \rrbracket$.

Fixons un entier $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$; en tenant compte de l'évolution de la composition de l'urne au fil des tirages et en appliquant la formule des probabilités composées, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X_1 = k) &= \frac{\overbrace{\frac{N-1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \dots \times \frac{N-(k-1)}{N-(k-1)+1}}^{k-1 \text{ fois une boule verte ou la rouge}} \times \frac{\overbrace{1}^{\text{boule blanche}}}{N-(k-1)}}{N} \\
 &= \frac{1}{N} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{simplification} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, N \rrbracket)$.

et de même pour X_2 .

- Fixons désormais deux entiers k et ℓ dans $\llbracket 1, N \rrbracket$ et calculons $\mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = \ell])$. Les deux boules ne pouvant pas être tirées en même temps, cette probabilité est nulle lorsque $k = \ell$; supposons à présent que $k \neq \ell$. Par symétrie des rôles, on peut d'ailleurs supposer que $k < \ell$, c'est-à-dire que l'on va seulement examiner les situations où la boule blanche est tirée avant la boule rouge.

D'après la formule des probabilités composées,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = \ell]) &= \frac{N-2}{N} \times \frac{N-3}{N-1} \times \cdots \times \frac{N-(k-1)-1}{N-(k-1)+1} \times \frac{1}{N-(k-1)} \\ &\quad \times \frac{N-k-1}{N-k} \times \frac{N-k-2}{N-k-1} \times \cdots \times \frac{N-(\ell-1)}{N-(\ell-1)+1} \times \frac{1}{N-(\ell-1)}. \end{aligned}$$

Les dénominateurs correspondent au nombre de boules dans l'urne à chaque étape, et les numérateurs au nombre de boules favorables à l'événement considéré. Par télescopage de produit,

$$\mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = \ell]) = \frac{1}{N(N-1)}.$$

et de même lorsque $k > \ell$. En résumé,

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, N \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = \ell]) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = \ell \\ \frac{1}{N(N-1)} & \text{si } k \neq \ell. \end{cases}$$

Remarque

On peut aussi obtenir ces résultats de la façon suivante.

Pour avoir équiprobabilité des façons de vider l'urne, on distingue toutes les boules en les numérotant. L'univers est l'ensemble des permutations : $N!$ tirages possibles.

Pour la boule rouge en position k : 1 possibilité pour la boule rouge, $(N-1)!$ pour les boules restantes. Donc

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = \frac{\text{card}(X_1 = k)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}.$$

Pour la boule rouge en position k et la boule verte en position ℓ ($k \neq \ell$) : 1 possibilité pour la boule rouge et la boule verte $(N-2)!$ pour les boules restantes.

$$\text{Donc } \mathbb{P}([X_1 = k] \cap [X_2 = \ell]) = \frac{\text{card}([X_1 = k] \cap [X_2 = \ell])}{\text{card}(\Omega)} = \frac{(N-2)!}{N!} = \frac{1}{N(N-1)}.$$

- 2) La variable X ne peut prendre la valeur N , car cela signifierait que l'on a tiré $N-1$ boules vertes, or l'urne n'en contient initialement que $N-2$. De plus, si $k \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = k) &= \frac{N-2}{N} \frac{N-3}{N-1} \cdots \frac{N-(k-1)-1}{N-(k-1)+1} \cdot \frac{2}{N-(k-1)} \\ &= \frac{1}{N} \frac{1}{N-1} \frac{N-(k-1)}{1} \frac{N-(k-1)-1}{1} \cdots \frac{2}{N-(k-1)} \\ &= \frac{2(N-k)}{N(N-1)}. \end{aligned}$$

De plus, au vu de la loi du couple (X_1, X_2) , on peut déduire la loi de Y de celle de X : en imaginant que l'on renverse l'ordre dans lequel les tirages sont effectués, la probabilité que la dernière des deux boules blanche et rouge soit tirée à l'instant k , et suivie de $N - k$ boules vertes, est la même que la probabilité que la première des deux boules blanche et rouge soit tirée à l'instant $N + 1 - k$, et précédée de $N - k$ boules vertes. Autrement dit, $Y(\Omega) = \llbracket 2, N \rrbracket$ et, pour tout entier $k \in \llbracket 2, N \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(X = N + 1 - k) = \frac{2(N - (N + 1 - k))}{N(N - 1)} = \frac{2(k - 1)}{N(N - 1)}.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 5 *Au plus deux tentatives*

- 1) On est en présence d'une répétition de n expériences de Bernoulli, que l'on peut supposer indépendantes et de même probabilité de succès p , et X compte le nombre de succès.

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

et en particulier $\mathbb{E}(X) = np$.

- 2) a) Le nombre total de correspondants obtenus est compris entre 0 (dans le pire des cas) et n (car on ne peut pas obtenir une même personne deux fois de suite).
- b) • Dire que $Z = 0$, c'est dire qu'aucun correspondant n'a été obtenu ni pendant la première, ni pendant la deuxième phase. La probabilité de cet événement est donc

$$p_0 = q^n \cdot q^n = q^{2n}.$$

- Dire que $Z = 1$, c'est dire que $X = 0$ et que $Y = 1$, ou que $X = 1$ et que $Y = 0$, ces deux événements étant incompatibles. De ce fait,

$$\begin{aligned} p_1 &= \underbrace{q^n}_{\mathbb{P}(X=0)} \times \underbrace{\binom{n}{1} q^{n-1} p}_{\mathbb{P}_{[X=0]}(Y=1)} + \underbrace{\binom{n}{1} q^{n-1} p}_{\mathbb{P}(X=1)} \times \underbrace{q^{n-1}}_{\mathbb{P}_{[X=1]}(Y=0)} \\ &= n q^{n-1} p (q^{n-1} + q^n) = n q^{2n-2} p (1 + q). \end{aligned}$$

- c) Si l'on a réussi à obtenir k correspondants lors de la première phase, il en reste $n - k$ à appeler.

La probabilité que l'on en obtienne ℓ est donnée par la loi binomiale $\mathcal{B}(n - k, p)$:

$$\forall \ell \in \llbracket 0, n - k \rrbracket, \quad \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = \ell) = \binom{n - k}{\ell} p^\ell q^{n-k-\ell}.$$

- d) Il ne s'agit de rien d'autre que de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(X = k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, en restreignant la somme aux indices inférieurs à s puisque Y ne peut être négatif.

e) Écrivons : la formule des probabilités composées donne

$$\begin{aligned} p_s &= \sum_{k=0}^s \mathbb{P}(X = k) \cdot \mathbb{P}_{[X=k]}(Y = \ell) \\ &= \sum_{k=0}^s \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \cdot \binom{n-k}{s-k} p^{s-k} q^{n-s} = p^s q^{n-s} \sum_{k=0}^s \binom{n}{k} \binom{n-k}{s-k} q^{n-k}. \end{aligned}$$

$$\text{Or } \binom{n}{k} \binom{n-k}{s-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(s-k)!(n-s)!} = \frac{n!}{k!} \cdot \frac{1}{(s-k)!(n-s)!}.$$

$$\text{Et, } \binom{n}{s} \binom{s}{k} = \frac{n!}{s!(n-s)!} \cdot \frac{s!}{k!(s-k)!} = \frac{n!}{(n-s)!} \cdot \frac{1}{k!(s-k)!}.$$

Les deux expressions sont égales. Revenons à présent à notre calcul de probabilité :

$$\begin{aligned} p_s &= p^s q^{n-s} \sum_{k=0}^s \binom{n}{s} \binom{s}{k} q^{n-k} \\ &= p^s q^{n-s} \binom{n}{s} \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} q^{n-k} \\ &= p^s q^{n-s} \binom{n}{s} \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} q^{n-s+s-k} \\ &= p^s q^{2n-2s} \binom{n}{s} \sum_{k=0}^s \binom{s}{k} q^{s-k} \\ &= p^s q^{2n-2s} \binom{n}{s} (1+q)^s \quad \leftarrow \text{binôme de Newton} \\ &= \binom{n}{s} (p(1+q))^s (q^2)^{n-s}. \end{aligned}$$

On est bien en présence d'une loi binomiale de paramètres n et $p(1+q)$.

On vérifie que $1 - q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$ et donc que $1 - p(1+q) = q^2$.

Remarque

On peut donner une interprétation plus simple à ce résultat : dans l'ensemble de l'expérience, chaque correspondant peut se retrouver dans une et une seule de trois situations possibles ; soit il répond au premier appel (probabilité p), soit il répond au second appel mais pas au premier (probabilité qp), soit il ne répond pas du tout (probabilité q^2). Dès lors, la probabilité qu'un correspondant individuel réponde à au moins un des appels est $p + qp = p(1+q)$.

Exercice 6 Minimum et maximum de deux géométriques indépendantes

1) Deux principaux points de vue possibles :

- On utilise, en les additionnant, les probabilités (connues) $\mathbb{P}(X = k)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} F_X(k) &= \sum_{\substack{i \in X(\Omega) \\ i \leq k}} \mathbb{P}(X = i) = \sum_{i=1}^k q^{i-1}p \\ &= p \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q} = 1 - q^k \end{aligned}$$

) somme géométrique de raison différente de 1

puisque $p + q = 1$.

- On interprète X comme le temps d'attente avant le premier succès dans une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

Écrivons $F_X(k) = \mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X > k)$. La probabilité $\mathbb{P}(X > k)$ est la probabilité que le premier succès survienne strictement après l'instant k , ce qui revient à dire que les k premières tentatives se sont toutes soldées par un échec. Donc par indépendance

$$\mathbb{P}(X > k) = q^k$$

et l'on retrouve le résultat.

2) a) Écrivons : $F_Y(k) = \mathbb{P}(\max(X, X') \leq k)$. Or,

$$\begin{aligned} [\max(X, X') \leq k] &\Leftrightarrow [X \leq k] \cap [X' \leq k]; \\ F_Y(k) &= \mathbb{P}([X \leq k] \cap [X' \leq k]) \\ &= \mathbb{P}(X \leq k) \cdot \mathbb{P}(X' \leq k) \\ &= (1 - q^k) \cdot (1 - q'^k) = 1 - q^k - q'^k + (qq')^k. \end{aligned}$$

) Passage aux probabilités
) indépendance

b) La fonction de répartition de Y n'est donc pas de la forme de celle associée à une loi géométrique, donc on peut s'attendre à ce que la loi de Y ne soit pas géométrique. Justifions-le rigoureusement : pour que Y suive une loi géométrique, les probabilités $\mathbb{P}(Y = k)$ devraient être en progression géométrique. En particulier, on devrait avoir

$$\frac{\mathbb{P}(Y = 3)}{\mathbb{P}(Y = 1)} = \left(\frac{\mathbb{P}(Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 1)} \right)^2$$

Calculons ces deux quotients : on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 1) &= (1 - q)(1 - q'), \\ \mathbb{P}(Y = 2) &= (1 - q^2)(1 - q'^2) - (1 - q)(1 - q') \\ &= (1 - q)(1 - q')((1 + q)(1 + q') - 1) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 3) &= (1 - q^3)(1 - q'^3) - (1 - q)(1 - q') \\ &= (1 - q)(1 - q')((1 + q + q^2)(1 + q' + q'^2) - 1) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 1)} &= (1 + q)(1 + q') - 1 \\ &= q + q' - qq'\end{aligned}$$

et donc

$$\left(\frac{\mathbb{P}(Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 1)}\right)^2 = q^2 + q'^2 + (qq')^2 + 2qq'(1 - q - q')$$

tandis que

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(Y = 3)}{\mathbb{P}(Y = 1)} &= (1 + q + q^2)(1 + q' + q'^2) - 1 \\ &= q + q' + q^2 + q'^2 + qq' + qq'^2 + q^2q' + (qq')^2 \\ &= q + q' + q^2 + q'^2 + (qq')^2 + qq'(1 + q + q')\end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(Y = 3)}{\mathbb{P}(Y = 1)} - \left(\frac{\mathbb{P}(Y = 2)}{\mathbb{P}(Y = 1)}\right)^2 &= q + q' + qq'(-1 + 3q + 3q') \\ &= (q + q')(1 + 3qq') - qq'\end{aligned}$$

ce qui est en général strictement positif, parce que q et q' sont tous deux strictement supérieurs à qq' , et que $1 + 3qq'$ est supérieur à 1. Bref,

Y n'est pas géométrique.

- 3) a) On procède de la même manière, mais cette fois-ci il est judicieux de passer au complémentaire pour se ramener à la probabilité d'une intersection :

$$\mathbb{F}_Z(k) = \mathbb{P}(\min(X, X') \leq k) = 1 - \mathbb{P}(\min(X, X') > k).$$

Or
$$[\min(X, X') \leq k] \Leftrightarrow [X > k] \cap [X' > k];$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{F}_Z(k) &= 1 - \mathbb{P}([X > k] \cap [X' > k]) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X > k) \cdot \mathbb{P}(X' > k) \quad \text{par indépendance} \\ &= 1 - q^k \cdot q'^k = 1 - (qq')^k.\end{aligned}$$

- b) On aboutit donc à une fonction de répartition identique à celle associée à une loi géométrique de probabilité d'échec qq' , c'est-à-dire à la loi $\mathcal{G}(1 - qq')$.
- c) Voyons X et X' comme les temps d'attente avant d'obtenir le premier succès dans deux répétitions d'expériences de Bernoulli indépendantes et de paramètre respectif p et p' , et supposons que ces deux répétitions ont lieu *en parallèle*. Alors Z correspond au temps d'attente avant d'obtenir un premier « succès collectif », c'est-à-dire au premier instant où l'expérience de Bernoulli associée à X , ou celle associée à X' , connaît son premier succès. Dans cette interprétation, un « échec collectif » a une probabilité qq' de se produire, et on retrouve ainsi la loi de Z ainsi que son paramètre.

Exercice 7 Maximum d'uniformes

1) a) Par définition,

$$\mathbb{F}_M(k) = \mathbb{P}(M \leq k) = \mathbb{P}(\max(X_1, X_2) \leq k) = \mathbb{P}([X_1 \leq k] \cap [X_2 \leq k]),$$

car le plus grand de deux nombres est inférieur à k si et seulement si les deux nombres sont inférieurs à k ; donc, par indépendance

$$\mathbb{F}_M(k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k) \cdot \mathbb{P}(X_2 \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k)^2 = \left(\frac{k}{n}\right)^2.$$

puisque X_1 suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ et qu'elle a donc k chances sur n d'appartenir à $\llbracket 1, k \rrbracket$.

b) Comme M est à valeurs entières,

$$\begin{aligned} [M = k] &\Leftrightarrow [M \leq k] \setminus [M < k] \\ &\Leftrightarrow [M \leq k] \setminus [M \leq k - 1] \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M = k) &= \mathbb{P}(M \leq k) - \mathbb{P}(M \leq k - 1) \\ &= \mathbb{F}_M(k) - \mathbb{F}_M(k - 1). \end{aligned}$$

Ensuite, la variable M est finie, donc admet une espérance, et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M) &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{P}(M = k) \\ &= \sum_{k=1}^n k (\mathbb{F}_M(k) - \mathbb{F}_M(k - 1)) \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{F}_M(k) - \sum_{k=1}^n k \mathbb{F}_M(k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^n k \mathbb{F}_M(k) - \sum_{k=0}^{n-1} (k + 1) \mathbb{F}_M(k) \\ &= n \mathbb{F}_M(n) + \sum_{k=0}^{n-1} (k - (k + 1)) \mathbb{F}_M(k). \end{aligned}$$

linéarité de la sommation
changement d'indice $k \leftarrow k - 1$

Or puisque M est à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, sa fonction de répartition vaut 1 en n , donc

$$\mathbb{E}(M) = n + \sum_{k=0}^{n-1} (-1) \mathbb{F}_M(k) = \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \mathbb{F}_M(k)) = \sum_{k=0}^n (1 - \mathbb{F}_M(k)).$$

c) De ce fait,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(M(2,n)) &= \sum_{k=0}^n \left(1 - \left(\frac{k^2}{n}\right)\right) = n + 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 \\ &= n + 1 - \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (n+1) \left(1 - \frac{2n+1}{6n}\right) \\ &= \boxed{(n+1) \frac{4n-1}{6n}}.\end{aligned}$$

d) En simplifiant chaque facteur en ne conservant que son terme prépondérant, on obtient

$$\mathbb{E}(M(2,n)) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{3} n.$$

2) En adaptant les premières questions, on trouve

$$\mathbb{E}(M(d,n)) = \sum_{k=0}^n \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^d\right) = n \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où l'on a introduit la fonction $f : \begin{cases} [0,1] & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto 1 - t^d. \end{cases}$

On reconnaît *une somme de Riemann* et, la fonction f étant continue, on en déduit que

$$\mathbb{E}(M(d,n)) \sim n \cdot \int_0^1 (1 - t^d) dt = n \cdot \left(1 - \frac{1}{d+1}\right)$$

ce qui conduit au résultat annoncé.

```
3) a) import numpy as np
import numpy.random as rd

def simulation_M(d, n, N):
    res = []
    for _ in range(N):
        X = rd.randint(1, n+1, d)
        res.append(max(X))
    return res

def moyenne_empirique(d, n, N):
    M = simulation_M(d, n, N)
    return np.mean(M)
```

b) On peut par exemple exécuter des scripts de la forme suivante :

```
d, N = 5, 100
print(d/(d+1),
      [moyenne_empirique(d, n, N) / n for n in range(100, 110)])
```

c) On doit observer des valeurs d'autant plus proches de $d/(d+1)$ que n est plus grand!

Exercice 8 Fonctions génératrices et stabilité

1) • Supposons que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, et fixons une valeur de $t \in [0,1[$. D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} g_X(t) &= \mathbb{E}(t^X) \\ &= \sum_{k \in X(\Omega)} t^k \mathbb{P}(X = k) \\ &= t^0 \mathbb{P}(X = 0) + t^1 \mathbb{P}(X = 1) \\ &= 1 \cdot q + t \cdot p && \text{(en notant } q = 1 - p) \\ &= q + p t. \end{aligned}$$

• Supposons ensuite que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$. Toujours d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} g_X(t) &= \sum_{k=1}^n t^k \mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^n t^k \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t^k = \frac{1}{n} t \cdot \frac{1 - t^n}{1 - t} \end{aligned}$$

puisqu'il s'agit d'une somme géométrique de raison $t \neq 1$, de premier terme t et contenant n termes.

2) a) Il s'agit là encore d'appliquer le théorème de transfert, ce qui est licite puisque la variable X est finie.

b) Si X et Y ont la même loi, alors $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k)$ pour toute valeur de k , et donc l'expression précédente entraîne que $g_X(t) = g_Y(t)$ pour toute valeur de t , ce qui signifie que X et Y ont la même fonction génératrice.

c) Pour éviter les confusions, remplaçons par i l'indice de la somme définissant g_X . Par linéarité de la dérivation, si k est un entier positif, alors pour toute valeur de t

$$\begin{aligned} g_X^{(k)}(t) &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X = k) \cdot k(k-1)(k-2) \cdots (k-i+1) t^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X = k) \frac{k!}{(k-i)!} t^{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^n \mathbb{P}(X = k) i! \binom{k}{i} t^{k-i}. \end{aligned}$$

Or, lorsque $t = 0$, l'expression $\binom{k}{i} t^{k-i}$ est nulle pour $i > k$ (car le coefficient binomial est nul), pour $i < k$ (car l'exposant de $t = 0$ est strictement positif), et vaut 1 pour $i = k$ (car le coefficient binomial et la puissance sont tous deux égaux à 1). Dès lors

$$g_X^{(k)}(0) = \mathbb{P}(X = k) k!$$

ce qui équivaut au résultat demandé.

- d) Si X et Y ont la même fonction génératrice, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les expressions $g_X^{(k)}(0)$ et $g_Y^{(k)}(0)$ sont égales, donc $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k)$, ce qui revient à dire que X et Y ont la même loi.

- 3) Fixons une valeur de $t \in [0, 1[$. On écrit

$$\begin{aligned} g_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(t^{X+Y}) \\ &= \mathbb{E}(t^X \cdot t^Y). \end{aligned}$$

Or, les variables X et Y étant indépendantes, c'est aussi le cas de t^X et t^Y (on peut par exemple invoquer un cas particulier du lemme des coalitions). Donc

$$\begin{aligned} g_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(t^X) \cdot \mathbb{E}(t^Y) \\ &= g_X(t) \cdot g_Y(t). \end{aligned}$$

- 4) a) Introduisons n variables aléatoires X_1, \dots, X_n de loi $\mathcal{B}(p)$ mutuellement indépendantes. Alors X et $X_1 + \dots + X_n$ ont la même loi ($\mathcal{B}(n, p)$), donc la même fonction génératrice; or, par indépendance mutuelle, $g_{X_1 + \dots + X_n} = g_{X_1} \cdots g_{X_n} = \gamma \cdots \gamma = \gamma^n$, ce qu'il fallait démontrer.
- b) Puisque $g_{X_1} = \gamma^{n_1}$, que $g_{X_2} = \gamma^{n_2}$ et que X_1 et X_2 sont indépendantes, les résultats précédents entraînent que $g_{X_1 + X_2} = \gamma^{n_1 + n_2}$. Donc la fonction génératrice de $X_1 + X_2$ est celle d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. Or on a vu que si deux variables aléatoires (ici à valeurs dans $\llbracket 0, n_1 + n_2 \rrbracket$) ont la même fonction génératrice, alors elles ont la même loi, donc $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Convergences et approximations

35

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1 * Soit X une variable aléatoire de loi géométrique de paramètre $p = \frac{1}{3}$.

- 1) Majorer, en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $\mathbb{P}(X \geq 9)$.
- 2) Calculez $\mathbb{P}(X \geq 9)$. Commenter.

Exercice 2 * *Application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Soit X une variable aléatoire possédant une espérance de 6 et une variance de 2. Appliquer, lorsque cela est possible, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour majorer ou minorer les probabilités des événements suivants. Préciser si le résultat obtenu est intéressant.

- | | | |
|---------------------------|--------------------|-------------------|
| 1) $[2 \leq X \leq 10]$; | 2) $[5 < X < 7]$; | 3) $[X \leq 7]$; |
| 4) $[X - 6 \geq 1]$; | 5) $[X \geq 11]$; | 6) $[X \geq 4]$. |

Exercice 3 * *Approximation de loi usuelle*

Un grossiste de matériel informatique achète un lot de 1000 cartouches de toner. La probabilité qu'une cartouche soit défectueuse est de 0,2% et cela indépendamment des autres cartouches. On note X le nombre de cartouches défectueuses dans le lot.

- 1) Quelle est la loi de X ?
- 2) Donnez une valeur approchée de la probabilité qu'au moins 5 cartouches soient défectueuses.

Indication. On donne la valeur approchée $7 \times e^{-2} = 0,947$.

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4 * Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, indépendantes, de même loi d'espérance 1 et de variance σ^2 . On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$T_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

1) Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > t$, justifier que

$$[T_n \leq t] \subset [|T_n - n| \geq n - t].$$

2) On admet que, si $(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des variables aléatoires indépendantes possédant toutes une variance, alors la variance de la somme est la somme des variances.

a) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n \leq t).$$

b) En déduire que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'événement $\bigcap_{n=1}^{+\infty} [T_n \leq t]$ est négligeable.

Exercice 5 ** Souris mutantes

Un laboratoire élève des souris dont 1/4 sont mutantes. La durée de vie d'une souris mutante est une variable aléatoire dont la moyenne est de 3 ans avec un écart-type de 9 mois, mais elle ne vit jamais plus de 4 ans. La durée de vie d'une souris normale a une moyenne d'un an, avec un écart-type de 6 mois. On ne prend en compte que les souris dont la durée de vie est strictement positive.

Une souris est vivante au bout de deux ans. On note α la probabilité qu'elle soit mutante. On considère l'événement M : « La souris est une souris mutante » et on note X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la souris.

1) Exprimer $\frac{\mathbb{P}(M \cap [X \geq 2])}{\mathbb{P}(\bar{M} \cap [X \geq 2])}$ en fonction de α .

2) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une minoration de α .

Exercice 6 ** Inégalité de Chernov

1) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit X une variable aléatoire discrète telle que e^{tX} admette une espérance. Montrer, à l'aide de l'inégalité de Markov, que pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}}.$$

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, e^{tX} admet une espérance et que :

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = (1 - p + pe^t)^n.$$

- b) Étudier les variations de la fonction $f : t \mapsto (1-p)e^{-\frac{t}{2}} + pe^{\frac{t}{2}}$ sur \mathbb{R}_+^* .
En déduire que f admet un minimum sur \mathbb{R}_+^* , égal à $2\sqrt{p(1-p)}$.
- c) À l'aide de la question 1), montrer que $\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) \leq 2^n(p(1-p))^{\frac{n}{2}}$.

Exercice 7 *** Variante de la loi faible des grands nombres

Soit $(p_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels appartenant à $[0,1]$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes.

On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p_k . On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \quad \text{et} \quad m_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k.$$

- 1) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $V(X_k) \leq \frac{1}{4}$.
En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une majoration de $V(Y_n)$.
On admet que la variance d'une somme de variables de Bernoulli indépendantes est la somme des variances.
- b) En déduire, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n - m_n| < \varepsilon) = 1.$$

- 2) On suppose que la suite $(m_n)_{n \geq 1}$ converge vers m .

- a) Soit $\varepsilon > 0$. On suppose $|m_n - m| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Comparer les événements $[|Y_n - m_n| < \frac{\varepsilon}{2}]$ et $[|Y_n - m| < \varepsilon]$. En déduire que

$$\mathbb{P}(|Y_n - m_n| < \frac{\varepsilon}{2}) \leq \mathbb{P}(|Y_n - m| < \varepsilon).$$

- b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n - m| < \varepsilon) = 1.$$

✚ Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8 * Un fleuriste estime que le nombre de roses qu'il vend en une semaine est une variable aléatoire d'espérance 60.

- 1) Peut-on majorer la probabilité qu'il vende au moins 80 roses en une semaine ?
- 2) On suppose de plus que l'écart-type du nombre de roses vendues en une semaine est égale à 10. Peut-on donner un meilleur majorant de cette probabilité ?

Corrections

Exercices axés sur le calcul

Exercice 1

1) D'après les propriétés des lois géométriques, $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} = 3$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{1-p}{p^2} = 6$. On a

$$[X \geq 9] \subset [|X - 3| \geq 6] = [|X - \mathbb{E}(X)| \geq 6].$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne, $\mathbb{P}(|X - 3| \geq 6) \leq \frac{6}{6^2}$.

Conclusion

$$\mathbb{P}(X \geq 9) \leq \frac{1}{6}.$$

2) On a $[X \geq 9] = \bigcup_{k=9}^{+\infty} [X = k]$. Les événements sont incompatibles, donc, par σ -additivité,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq 9) &= \sum_{k=9}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=9}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \frac{2}{3} \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^8 \frac{2}{3} \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^j = \left(\frac{1}{3}\right)^8 \frac{2}{3} \frac{3}{2} = \frac{1}{3^8} \approx 0,00015. \end{aligned}$$

La majoration obtenue à la question précédente est valable pour toute variable aléatoire d'espérance 3 et variance 6. Elle est bonne pour certaines, beaucoup moins bonne pour d'autres.

En particulier, si on considère une variable aléatoire Y telle que

$$Y(\Omega) = \{-3, 3, 9\}, \quad \mathbb{P}(Y = -3) = \mathbb{P}(Y = 9) = \frac{1}{12} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Y = 3) = \frac{5}{6}.$$

On trouve $\mathbb{E}(Y) = 3$ et $\mathbb{V}(Y) = 6$.

$$\mathbb{P}(|Y - 3| \geq 6) = \mathbb{P}([Y \leq -3] \cup [Y \geq 9]) = \mathbb{P}(Y \leq -3) + \mathbb{P}(Y \geq 9) = \frac{1}{6}.$$

On ne peut donc pas obtenir de meilleure majoration valable pour toutes les lois d'espérance 3 et variance 6.

Exercice 2 Application de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Remarque

Rappelons que l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'utilise :

- soit pour majorer la probabilité d'un événement de la forme $[|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon]$, ou inclus dans un tel événement;
- soit pour minorer la probabilité d'un événement de la forme $[|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon]$, ou contenant un tel événement.

1) $[2 \leq X \leq 10] = [|X - 6| \leq 4] = [|X - \mathbb{E}(X)| \leq 4] \supset [|X - \mathbb{E}(X)| < 4]$. Donc

$$\mathbb{P}(2 < X < 10) \geq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < 4) \geq 1 - \frac{V(X)}{4^2}.$$

Ce qui donne

$$\mathbb{P}(2 < X < 10) \geq \frac{7}{8}.$$

- 2) $[5 < X < 7] = [|X - 6| < 1] = [|X - \mathbb{E}(X)| < 1]$. Donc

$$\mathbb{P}(5 < X < 7) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < 1) \geq 1 - \frac{V(X)}{1^2}.$$

Ce qui donne

$$\mathbb{P}(5 < X < 7) \geq -1.$$

Cette minoration n'apporte rien.

- 3) $[X \leq 7]$. Cet événement n'est inclus dans aucun événement de la forme $[|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon]$, et ne contient pas d'événement de la forme $[|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon]$.

On ne peut pas appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

- 4) $[|X - 6| \geq 1] = [|X - \mathbb{E}(X)| \geq 1]$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 1) \leq \frac{V(X)}{1^2}$. D'où

$$\mathbb{P}(|X - 6| \geq 1) \leq 2.$$

Cette majoration n'apporte rien.

- 5) $[X \geq 11] \subset [X \leq 1] \cup [X \geq 11] = [|X - \mathbb{E}(X)| \geq 5]$. D'où

$$\mathbb{P}(X \geq 11) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 5) \leq \frac{4}{25}.$$

- 6) $[X \geq 4]$. Cet événement n'est inclus dans aucun événement de la forme $[|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon]$, et ne contient pas d'événement de la forme $[|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon]$. On ne peut pas appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 3 Approximation de loi usuelle

- 1) Y compte le nombre de succès (« avoir une cartouche défectueuse ») dans 1000 répétitions d'expériences de Bernoulli mutuellement indépendantes. La probabilité de succès est 0,002. Par conséquent,

$$Y \text{ suit une loi binomiale de paramètres } (1000; 0,002).$$

- 2) La valeur de 0,002 est petite (inférieure à 0,1). On peut approcher la loi $\mathcal{B}(1000; 0,002)$ par une loi de Poisson de paramètre $1000 \times 0,002 = 2$.

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(2)$. On a donc $\mathbb{P}(X \geq 5) \approx \mathbb{P}(Z \geq 5)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z \geq 5) &= 1 - \mathbb{P}(Z \leq 4) = 1 - \sum_{k=0}^4 e^{-2} \frac{2^k}{k!} \\ &= 1 - e^{-2} \left(\frac{1}{0!} + \frac{2}{1!} + \frac{4}{2!} + \frac{8}{3!} + \frac{16}{4!} \right) \\ &= 1 - 7e^{-2} \approx 0,053 \end{aligned}$$

Conclusion

$$\mathbb{P}(X \geq 5) \approx 5\%.$$

Exercices axés sur le raisonnement

Exercice 4

1) On a $n > t$, donc $n - t > 0$. D'après les propriétés de la valeur absolue,

$$\begin{aligned} [|T_n - n| \geq n - t] &= [T_n - n \geq n - t] \cup [T_n - n \leq -(n - t)] \\ &= [T_n \geq 2n - t] \cup [T_n \leq t]. \end{aligned}$$

On a donc $[T_n \leq t] \subset [|T_n - n| \geq n - t]$.

2) a) Par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^n 1 = n$.

Les variables aléatoires réelles $(X_k)_{k \geq 1}$ étant indépendantes, de même loi

$$\mathbb{V}(T_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = n\sigma^2.$$

Soit $n > t$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (B.T.) et la question 1) donnent

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{P}(|T_n - n| \geq n - t) &\leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(n-t)^2} \text{ (B.T.)} \\ \mathbb{P}(T_n \leq t) &\leq \mathbb{P}(|T_n - n| \geq n - t) \text{ 1)} \end{aligned} \right\} \text{ Donc } 0 \leq \mathbb{P}(T_n \leq t) \leq \frac{\mathbb{V}(T_n)}{(n-t)^2}.$$

Or
$$\frac{\mathbb{V}(T_n)}{(n-t)^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2(1-t/n)^2} = \frac{\sigma^2}{n(1-t/n)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le théorème d'encadrement donne l'existence de sa limite et la valeur

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n \leq t) = 0.$$

b) Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé. La suite $([X_n \leq t])_{n \geq 1}$ est une suite décroissante d'événements car

$$\omega \in [T_{n+1} < t] \Rightarrow \omega \in [T_n + X_{n+1} < t] \xrightarrow{X_{n+1} > 0} \omega \in [T_n < t].$$

D'après le théorème de la limite monotone (version probabiliste)

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} [T_n < t]\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n < t) = 0.$$

Exercice 5

1) Par définition, $\alpha = \mathbb{P}_{[X \geq 2]}(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap [X \geq 2])}{\mathbb{P}(X \geq 2)}$.

La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (M, \bar{M}) donne

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \mathbb{P}(M \cap [X \geq 2]) + \mathbb{P}(\bar{M} \cap [X \geq 2]).$$

En divisant par $\mathbb{P}(M \cap [X \geq 2]) > 0$, on obtient

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\mathbb{P}(X \geq 2)}{\mathbb{P}(M \cap [X \geq 2])} = 1 + \frac{\mathbb{P}(\bar{M} \cap [X \geq 2])}{\mathbb{P}(M \cap [X \geq 2])}$$

Après simplifications

$$\frac{\mathbb{P}(M \cap [X \geq 2])}{\mathbb{P}(\bar{M} \cap [X \geq 2])} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

- 2) Notons Y la variable aléatoire réelle donnant la durée de vie d'un souris mutante et Z celle d'une souris normale. Par hypothèse

$$\mathbb{E}(Y) = 3 \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(Y) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

Comme une souris mutante ne vit jamais plus de 4 ans, on peut affirmer que

$$[Y > 2] = [2 < Y < 4] = [|Y - \mathbb{E}(Y)| < 1].$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev impose

$$\mathbb{P}(Y > 2) = \mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| < 1) \geq 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

Par hypothèse $\mathbb{E}(Z) = 1$ et $\mathbb{V}(Z) = \frac{1}{4}$. On a $[Z \geq 2] = [|Z - 1| \geq 1]$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne

$$\mathbb{P}(Z \geq 2) = \mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq 1) \leq \frac{1}{4}$$

On peut maintenant calculer

$$\frac{\mathbb{P}(M \cap [X \geq 2])}{\mathbb{P}(\bar{M} \cap [X \geq 2])} = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}_M(X \geq 2)}{\mathbb{P}(\bar{M})\mathbb{P}_{\bar{M}}(X \geq 2)} = \frac{\mathbb{P}(M)\mathbb{P}(Y \geq 2)}{\mathbb{P}(\bar{M})\mathbb{P}(Z \geq 2)}$$

On déduit des résultats précédents :

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} \geq \frac{7}{12}, \quad \text{puis,} \quad \boxed{\alpha \geq \frac{7}{19}}$$

Exercice 6 Inégalité de Chernov

Remarque

L'inégalité de la question 1) s'appelle l'inégalité de Chernov. Elle est beaucoup plus précise que l'inégalité de Markov, mais nécessite une hypothèse beaucoup plus forte : l'existence d'une espérance pour e^{tX} .

- 1) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

Comme $t > 0$, on a $[X \geq a] = [tX \geq ta]$. Comme \exp est strictement croissante, on a

aussi $[X \geq a] = [e^{tX} \geq e^{ta}]$.

Comme la variable aléatoire e^{tX} est positive et qu'elle admet une espérance (par hypothèse), on peut lui appliquer l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(e^{tX} \geq e^{ta}) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{ta}}.$$

2) a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. X est une variable aléatoire finie, e^{tX} également. Elle admet donc une espérance. D'après le théorème de transfert

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p)^{n-k},$$

et donc avec la formule du binôme de Newton, $\mathbb{E}(e^{tX}) = (1-p + pe^t)^n$.

b) L'application f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* avec pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(t) = -\frac{1}{2}(1-p)e^{-\frac{t}{2}} + \frac{1}{2}pe^{\frac{t}{2}}.$$

De plus, $f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow pe^{\frac{t}{2}} \geq (1-p)e^{-\frac{t}{2}} \Leftrightarrow e^t \geq \frac{1-p}{p} \Leftrightarrow t \geq \ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$.

$$\begin{aligned} f\left(\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)\right) &= (1-p)\left(\frac{1-p}{p}\right)^{-\frac{1}{2}} + p\left(\frac{1-p}{p}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1-p)\sqrt{\frac{p}{1-p}} + p\sqrt{\frac{1-p}{p}} = 2\sqrt{p(1-p)}. \end{aligned}$$

D'où le tableau de variations

t	0	$\ln\left(\frac{1-p}{p}\right)$	$+\infty$
$f'(t)$	-	0	+
f			

Finalement

$$f \text{ admet un minimum donné par } 2\sqrt{p(1-p)}.$$

c) Avec la question 2 a), on sait que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la variable e^{tX} admet une espérance. On peut donc appliquer la question 1) avec $a = \frac{n}{2}$:

$$\mathbb{P}\left(X \geq \frac{n}{2}\right) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{tX})}{e^{nt/2}} = \frac{(1-p + pe^t)^n}{(e^{t/2})^n} = \left(\frac{1-p + pe^t}{e^{t/2}}\right)^n = (f(t))^n.$$

On obtient la meilleure majoration pour le minimum de f^n sur \mathbb{R}_+^* . Ce minimum est atteint en même temps que celui de f car $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et $f > 0$. On obtient, d'après 2 b)

$$\mathbb{P}(X \geq \frac{n}{2}) \leq (2\sqrt{p(1-p)})^n = 2^n(p(1-p))^{\frac{n}{2}}.$$

Exercice 7 Variante de la loi faible des grands nombres

1) a) D'après les propriétés des variables de Bernoulli, $\mathbb{V}(X_k) = p_k(1 - p_k)$.

Étudions la fonction polynomiale f définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = x(1 - x) = x - x^2.$$

$$\forall x \in [0,1], f'(x) = 1 - 2x.$$

Donc $\forall x \in [0,1], f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{2}$.

D'où le tableau de variations ci-contre.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		+	-
f	0	$\nearrow \frac{1}{4} \searrow$	0

En particulier, f possède un maximum en $\frac{1}{2}$. Conclusion

$$\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{V}(X_k) \leq \frac{1}{4}.$$

Comme $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{V}(Y_n) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k).$$

Avec l'inégalité précédente, on obtient

$$\mathbb{V}(Y_n) \leq \frac{1}{4n}.$$

b) Par linéarité de l'espérance

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k = m_n.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $\mathbb{P}(|Y_n - m_n| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(Y_n)}{\varepsilon^2}$.

Puis, d'après la question 1 a) $1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \leq \mathbb{P}(|Y_n - m_n| < \varepsilon) \leq 1$.

Avec le théorème d'encadrement, on conclut sur l'existence et la valeur de la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n - m_n| < \varepsilon) = 1.$$

- 2) a) L'inégalité triangulaire donne $|Y_n - m| \leq |Y_n - m_n| + |m_n - m| \leq |Y_n - m_n| + \varepsilon/2$.
On trouve

$$\left[|Y_n - m_n| < \frac{\varepsilon}{2}\right] \subset [|Y_n - m| < \varepsilon].$$

D'après les propriétés des probabilités

$$\mathbb{P}(|Y_n - m_n| < \frac{\varepsilon}{2}) \leq \mathbb{P}(|Y_n - m| < \varepsilon).$$

- b) Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la limite, il existe n_0 tel que, pour tout entier $n \geq n_0$,

$$|m_n - m| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n \geq n_0$, un entier.

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{P}(|Y_n - m_n| < \frac{\varepsilon}{2}) \leq \mathbb{P}(|Y_n - m| < \varepsilon) \quad \text{2.a)} \\ \mathbb{P}(|Y_n - m_n| < \frac{\varepsilon}{2}) \geq 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \quad \text{1.b)} \end{array} \right\} \text{Donc } 1 - \frac{1}{n\varepsilon^2} \leq \mathbb{P}(|Y_n - m| < \varepsilon) \leq 1$$

Avec le théorème d'encadrement, on en conclut que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|Y_n - m| < \varepsilon) = 1.$$

Exercices avec questions ouvertes

Exercice 8

- 1) Notons X le nombre de roses vendues en une semaine. Comme X est à valeurs dans \mathbb{R}^+ , et que X admet une espérance (égale à 60), on peut appliquer l'inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(X \geq 80) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{80} = \frac{60}{80} = \frac{3}{4}.$$

- 2) En connaissant la variance, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Il faut d'abord remarquer $[X \geq 80] \subset [X < 40] \cup [X \geq 80]$.

Donc $[X \geq 80] \subset [|X - 60| \geq 20].$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 20) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{20^2}$. Concluons

$$\mathbb{P}(X \geq 80) \leq \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 20) \leq \frac{1}{4}.$$

Rappels de cours



Donnons un exemple pour chacun des trois raisonnements classiques :

La récurrence

Le raisonnement s'articule en quatre parties :

- I. L'introduction où l'on énonce clairement l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$.
 - II. L'initialisation où l'on vérifie l'hypothèse de récurrence au premier rang.
 - III. L'hérédité où l'on prouve que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie sous réserve que $\mathcal{P}(n)$ le soit.
 - IV. La conclusion où l'on énonce clairement que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est bien démontrée.
- Toute rédaction doit comporter ces quatre points.

Exemple. Démontrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• **Initialisation.** D'une part, $\sum_{k=0}^0 k^3 = 0$. D'autre part, $\frac{0^2 \cdot (0+1)^2}{4} = 0$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition $\mathcal{P}(n)$ vraie, démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \quad \left. \begin{array}{l} \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \end{array} \right\} \\ &= (n+1)^2 \frac{n^2 + 4(n+1)}{4} = (n+1)^2 \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Ainsi, si la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Le raisonnement par l'absurde

Pour prouver qu'un énoncé \mathcal{P} est vrai, on peut supposer que la négation de ce dernier est vraie et aboutir à une contradiction.

Exemple. Soit u une suite réelle définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3u_n^2 - u_n + 1 \quad \text{et} \quad u_0 = 1.$$

Justifions que la suite u ne converge pas vers une limite finie.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$. Dans ce cas,

$$u_{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \quad \text{et} \quad 3u_n^2 - u_n + 1 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 3\ell^2 - \ell + 1.$$

Par unicité de la limite, ℓ est solution de l'équation polynomiale $\ell = 3\ell^2 - \ell + 1$. Or, le discriminant est strictement négatif (-8). Absurde, la suite u ne converge pas vers une limite finie.

Remarque. Rappelons la négation des quantificateurs. Soit $\mathcal{P}(x)$ un énoncé dépendant de $x \in E$ et $\text{NON } \mathcal{P}(x)$ sa négation.

- La négation de l'énoncé $(\exists x \in E, \mathcal{P}(x))$ est $(\forall x \in E, \text{NON } \mathcal{P}(x))$.
- La négation de l'énoncé $(\forall x \in E, \mathcal{P}(x))$ est $(\exists x \in E, \text{NON } \mathcal{P}(x))$.

L'analyse-synthèse

On applique ce type de raisonnement lorsqu'on souhaite déterminer des éléments x tel que l'énoncé $\mathcal{P}(x)$ soit vrai. Il y a trois parties.

- **L'analyse**, où l'on identifie les candidats possibles. On suppose que de tels éléments x existent, puis on essaie de trouver des *conditions nécessaires* à l'existence de tels éléments.
- **La synthèse**, où l'on vérifie si le ou les candidats trouvés sont bien solutions. Autrement dit, on regarde les *conditions suffisantes*.
- **La conclusion**, où l'on regroupe les résultats des deux premières parties.

Exemple. En raisonnant par analyse-synthèse, montrons que la fonction exponentielle s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

• Analyse.

(recherche des conditions nécessaires)

Supposons que la fonction \exp se décompose sous la forme $\exp = p + i$ où p et i sont respectivement des fonctions paire et impaire. Par suite, on a pour tout réel x ,

$$\begin{cases} \exp(x) = p(x) + i(x) \\ \exp(-x) = p(x) - i(x) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ i(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow \frac{L_1 + L_2}{2} \\ L_2 \leftarrow \frac{L_1 - L_2}{2} \end{matrix}$$

On vient de prouver que si une telle décomposition existe alors elle est unique.

• Synthèse.

(recherche des conditions suffisantes)

Comme \exp est définie sur \mathbb{R} , on peut poser pour tout réel x :

$$p(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad i(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

De plus, on vérifie que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$p(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = p(x) \quad \text{et} \quad i(-x) = \frac{e^{-x} - e^x}{2} = -i(x).$$

Autrement dit, p et i sont respectivement paire et impaire. On a aussi

$$p(x) + i(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \exp(x).$$

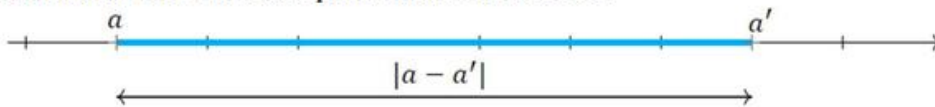
Il existe au moins une solution au problème.

• Conclusion.

La fonction exponentielle s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Approximations et inégalités

Soient a et a' deux réels. Lorsqu'on place ces deux nombres sur la droite réelle, la quantité $|a - a'|$ représente la distance entre les deux points d'abscisse a et a' .



On dira que \tilde{a} est **une approximation de a à ε -près** si $|a - \tilde{a}| \leq \varepsilon$. Par exemple, à 10^{-2} près :

$$e \simeq 2,72, \quad \pi \simeq 3,14, \quad \sqrt{2} \simeq 1,41 \quad \text{et} \quad \ln(2) \simeq 0,69.$$

PROPOSITION

somme/produit et inégalités

Soient a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des réels.

Si pour tout indice $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $a_i \leq b_i$ alors $\sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i$.

Si de plus, ces réels sont positifs : $\prod_{i=1}^n a_i \leq \prod_{i=1}^n b_i$.

THÉORÈME

inégalité triangulaire

• Soient x, x' deux réels, $||x| - |x'|| \leq |x + x'| \leq |x| + |x'|$.

• Soient n réels x_1, x_2, \dots, x_n $\left| \sum_{i=1}^n x_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Les intervalles de \mathbb{R}

On dit qu'un sous-ensemble de \mathbb{R} est un intervalle s'il s'écrit sous la forme

- $]-\infty, a[$ (ouvert, non borné);
- $]-\infty, a]$ (fermé, non borné);
- $]a, +\infty[$ (ouvert, non borné);
- $[a, +\infty[$ (fermé, non borné);
- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$;
- $]a, b[$ (ouvert, borné);
- $]a, b]$ (semi-ouvert, semi-fermé);
- $[a, b[$ (semi-ouvert, semi-fermé);
- $[a, b]$ **segment** (fermé, borné)
où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a \leq b$.

Maximum/minimum - bornes supérieure/inférieure

DÉFINITION

majorant, minorant

On considère une partie E non vide de \mathbb{R} . Soient M, m deux réels.

- M est un **majorant** de E si : $\forall x \in E, \quad x \leq M.$

Dans ce cas, on dit que E est une **partie majorée**.

- m est un **minorant** de E si : $\forall x \in E, \quad m \leq x.$

Dans ce cas, on dit que E est une **partie minorée**.

- Une partie minorée et majorée est dite **bornée** : $\exists K \in \mathbb{R}^+, \quad \forall x \in E, \quad |x| \leq K.$

DÉFINITION

maximum, minimum

On considère une partie E non vide de \mathbb{R} , on dit que

- b est le **maximum** de E si : $\forall x \in E, \quad x \leq b$ et $b \in E.$

- a est le **minimum** de E si : $\forall x \in E, \quad a \leq x$ et $a \in E.$

Sous réserve d'existence, on note respectivement $b = \max E$ et $a = \min E.$

DÉFINITION

borne supérieure/inférieure

On considère un sous-ensemble E de \mathbb{R} non vide.

- **La borne supérieure** de E est définie, sous réserve d'existence, comme le plus petit des majorants de E . On la note $\sup(E).$

- **La borne inférieure** de E est définie, sous réserve d'existence, comme le plus grand des minorants de E . On la note $\inf(E).$

Remarque. Si le maximum (resp. minimum) existe, alors $\max E = \sup E$ (resp. $\min E = \inf E$).

Exemple. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$,

$$\sup]-\infty, b] = \sup]-\infty, b[= \sup]a, b[= \sup]a, b] = b.$$

THÉORÈME

de la borne supérieure

Toute partie de \mathbb{R} non vide et majorée admet une borne supérieure.

Toute partie de \mathbb{R} non vide et minorée admet une borne inférieure.

Ensembles

DÉFINITION

appartenance, comparaison d'ensembles

- Un ensemble A est constitué d'éléments x qui sont dit **appartenir à** A . On note $x \in A$.
- On dit qu'un ensemble A est **inclus** dans l'ensemble B , noté $A \subset B$, si tout élément de A est élément de B . Avec des quantificateurs, cela devient

$$\forall x \in A, x \in B.$$

- On dit que deux ensembles A et B sont **égaux**, noté $A = B$, si $A \subset B$ et $B \subset A$. Avec des quantificateurs, cela devient

$$(\forall x \in A, x \in B) \quad \text{ET} \quad (\forall x \in B, x \in A).$$

Remarque. Pour établir une égalité entre deux ensembles A et B , on raisonne souvent par *double inclusion*. On établit $A \subset B$ puis $B \subset A$.

DÉFINITION

ensemble des parties

- Considérons deux ensembles A et E . On dit que A est une **partie** de E (ou encore que A est un sous-ensemble E) si A est inclus dans E .
- L'**ensemble des parties** de E est noté $\mathcal{P}(E)$.

Remarque. Si A et B sont deux parties de E , alors

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

DÉFINITION

complémentaire d'une partie

Soit A une partie d'un ensemble E . On définit le **complémentaire** de A dans E , noté \bar{A} (en cas d'ambiguïté, on utilise la notation $C_E A$), comme la partie de E qui contient tous les éléments de E n'appartenant pas à A . Autrement dit,

$$\forall x \in E, \quad \left(x \notin A \Leftrightarrow x \in \bar{A} \right).$$

On définit, de plus, le **complémentaire de A dans B** (on dit aussi B **privé de A**) comme l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A . On le note $B \setminus A$.

DÉFINITION

union, intersection

Considérons un ensemble E , A et B deux parties de E . On définit

- **La réunion** de A et B , notée $A \cup B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **ou** à B .

$$\forall x \in E, (x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \text{ OU } x \in B);$$

- **L'intersection** de A et B , notée $A \cap B$, est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A **et** à B .

$$\forall x \in E, (x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ ET } x \in B).$$

Exemples. Si A et B sont deux parties de E , alors $A \cup \bar{A} = E$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cap \bar{B} = A \setminus B$.

Généralisation. Considérons pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(E)$, on définit la réunion et l'intersection de parties A_i par

$$x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\exists i \in I, x \in A_i) \quad \text{et} \quad x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow (\forall i \in I, x \in A_i).$$

PROPOSITION

lois DE MORGAN

Pour deux parties A_1 et A_2 d'un ensemble E ,

$$\overline{A_1 \cap A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \quad \text{et} \quad \overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2.$$

Généralisation. Considérons pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(E)$, les lois DE MORGAN s'étendent

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i.$$

DÉFINITION

partition d'un ensemble

Une **partition** d'un ensemble E est un sous-ensemble de parties non vides de E deux à deux disjointes dont la réunion vaut E . Autrement dit, $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de E si, pour tout $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$,

$$\bigcup_{i \in I} A_i = E \quad \text{et} \quad \forall i, j \in I, (i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset).$$

DÉFINITION

produit cartésien

Soient A et B deux ensembles. On parle de **produit cartésien**, noté $A \times B$, pour désigner l'ensemble des couples dont la première composante appartient à A et la seconde à B . Autrement dit,

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Exemples. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. La définition s'étend à un produit cartésien de n ensembles. Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ est l'ensemble des n -uplets (x_1, \dots, x_n) où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in \mathbb{R}$.

n ensembles

Cardinal d'un ensemble et coefficients binomiaux

DÉFINITION

cardinal d'un ensemble

Lorsqu'un ensemble E a un nombre fini d'éléments, on dit qu'il est **fini** et on définit son **cardinal** comme le nombre d'éléments distincts. On le note $\text{card}(E)$.

Exemples. Si $E = \{0,1,2\}$, $\text{card}(E) = 3$ et $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 8$.

PROPOSITION

opérations sur le cardinal

Soient A et B deux parties d'un ensemble E de cardinal fini. A et B sont des ensembles finis, et

- si $A \subset B$, alors $\text{card}(A) \leq \text{card}(B)$.
- $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.
- si $A \cap B = \emptyset$, alors $\text{card}(A \sqcup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$.

THÉORÈME

formule du Crible

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble fini E .

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B); \\ \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ &\quad - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

DÉFINITION

coefficients binomiaux

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}$.

Le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Exemples. Pour $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$. Et,

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \quad \text{et} \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

PROPOSITION

formule explicite des coefficients binomiaux

Pour $p \leq n$,
$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

PROPOSITION

formule du triangle de Pascal

Soient n et p deux entiers naturels.
$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

Sommes et produits

DÉFINITION

- Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille **finie** de réels.

$\sum_{i \in I} a_i$ et $\prod_{i \in I} a_i$ désignent respectivement la somme et le produit de tous les nombres de la famille.

- On appelle factorielle de n , que l'on note $n!$, l'entier naturel défini par

$$0! = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n! = \prod_{k=1}^n k = 1 \times 2 \times 3 \cdots \times n.$$

Convention. Si I est l'ensemble vide, alors $\sum_{i \in I} a_i = 0$ et $\prod_{i \in I} a_i = 1$.

PROPOSITION

règles de calculs

Soient $(a_i)_{i \in I}, (b_i)_{i \in I}$ deux familles finies de réels et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} (a_i + b_i) &= \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i \in I} a_i. \\ \prod_{i \in I} (\lambda a_i) &= \lambda^{\text{card}(I)} \prod_{i \in I} a_i \quad \text{et} \quad \prod_{i \in I} (a_i b_i) = \left(\prod_{i \in I} a_i \right) \cdot \left(\prod_{i \in I} b_i \right). \end{aligned}$$

Remarque. Lorsque l'ensemble I des indices est une partie de \mathbb{N}^2 , on parle de somme double.

THÉORÈME

cas des sommes doubles

Soient $(p, n) \in \mathbb{N}^2$, $I = \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, n \rrbracket$ et $(a_{i,j})_{(i,j) \in I}$ une famille finie de réels.

$$\sum_{(i,j) \in I} a_{i,j} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^n a_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^p a_{i,j}.$$

Sommes usuelles

PROPOSITION

sommes arithmétique et géométrique

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Remarque. Pour $q = 1$, $\sum_{k=0}^n q^k = n + 1$.

THÉORÈME

formule du binôme de Newton

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous réels a et b ,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Exemples. En reprenant le triangle de Pascal des pages précédentes,

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3ab^2 + 3a^2b + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + b^4 \\ &\dots \end{aligned}$$

PROPOSITION

une identité remarquable

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tous réels a et b ,

$$a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Sommes télescopiques

Soit $(a_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de réels.

$$\sum_{i=p}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = a_n - a_p.$$

Pour s'en convaincre, on peut expliciter la somme

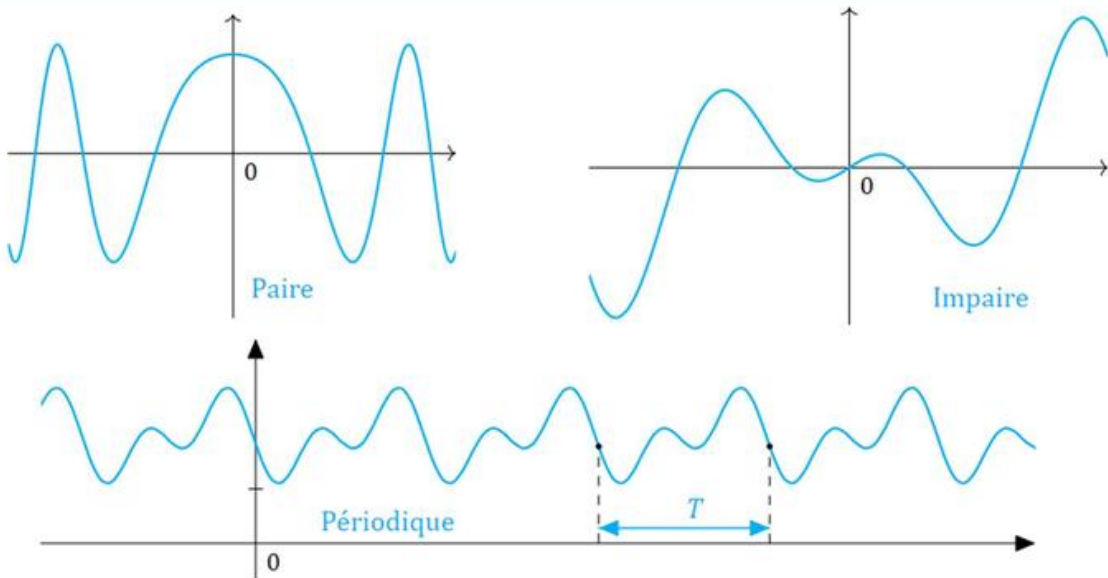
$$\sum_{i=p}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) = (\cancel{a_{p+1}} - a_p) + (a_{\cancel{p+2}} - \cancel{a_{p+1}}) + \dots + (\cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_{n-2}}) + (a_n - \cancel{a_{n-1}}) = a_n - a_p.$$

Les définitions

DÉFINITION

parité et périodicité

- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un sous-ensemble de \mathbb{R} symétrique (si $x \in I$ alors $-x \in I$), on dit que
 - f est **paire** si pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$;
 - f est **impaire** si pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.
- Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $T \in \mathbb{R}_*^+$. On dit que
 - f est **T-périodique** si pour tout $x \in I$, on a $x + T \in I$ et $f(x + T) = f(x)$.
 - f est **périodique** s'il existe $T \in \mathbb{R}_*^+$ tel que f soit T-périodique.



Remarque. Graphiquement, dire que la fonction est paire (respectivement impaire) signifie que la courbe représentative de f a une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (resp. une symétrie centrale par rapport à l'origine).

Le graphe représentatif d'une fonction T -périodique est invariant par une translation.

DÉFINITION

monotonie

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que

- f est **croissante sur** I si pour tous $x, y \in I$, $x < y$ implique $f(x) < f(y)$;
- f est **décroissante sur** I si pour tous $x, y \in I$, $x < y$ implique $f(x) > f(y)$;
- f est **monotone sur** I si elle est croissante ou décroissante sur I .

Remarque. Soient f et g sont deux fonctions monotones telles que la composée $h : x \in I \mapsto g(f(x))$ soit bien définie.

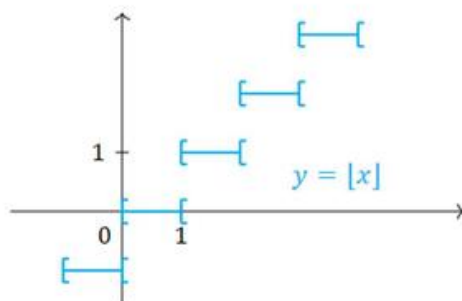
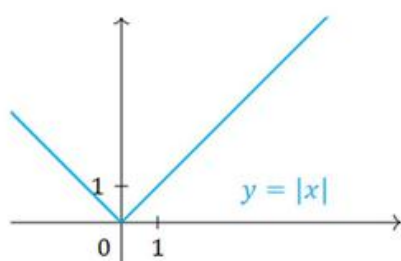
- Si f et g ont le même sens de variations, alors h est croissante.
- Si f et g n'ont pas le même sens de variations, alors h est décroissante.

Valeur absolue et partie entière

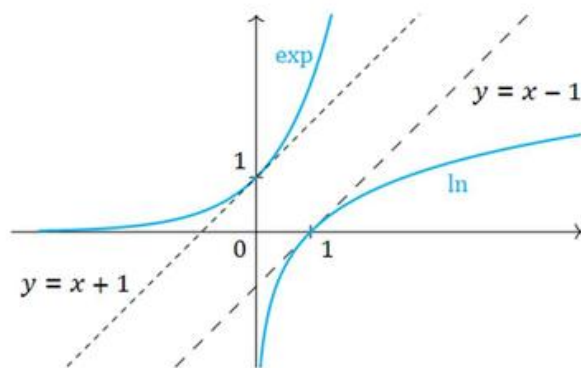
• Rappelons que l'on définit la **valeur absolue** de a , notée $|a|$, par a si a est positif et son opposé sinon. Autrement dit,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad |a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

- Pour tout réel x , on définit la **partie entière** de x , notée $[x]$, comme l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$.



Fonctions exponentielle, logarithme et puissance



Pour tous réels x, y ,

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

→ Si α est un entier naturel, on définit simplement

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^\alpha = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{\alpha \text{ termes}}$$

→ Mais dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, on peut étendre la définition avec

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)).$$

- La fonction exponentielle est strictement croissante et continue avec

$$\exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad \text{et} \quad \exp(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty.$$

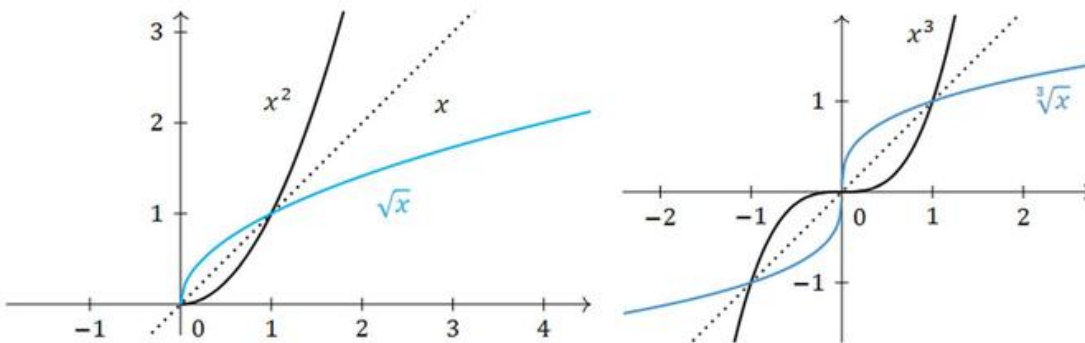
Elle admet une fonction réciproque : la fonction logarithme, notée \ln . Les deux graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Pour tous réels x, y strictement positifs,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y).$$

Rappels

- Ci-dessous, les graphes des fonctions $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^2$ et $x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$. Ces deux fonctions sont bijectives. On précise le graphe des réciproques.



Fonctions trigonométriques

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

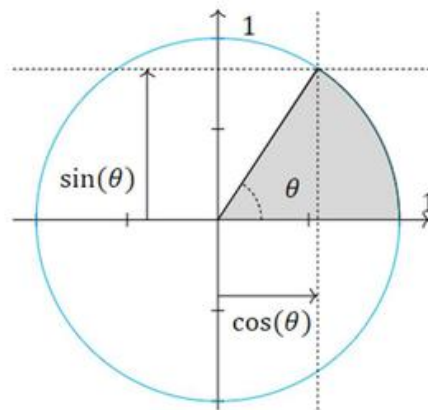
À tout réel t , on associe par enroulement de la droite numérique un unique point M du cercle de centre O et de rayon 1. Le point M a pour coordonnées $(\cos(t); \sin(t))$.

- La fonction qui à tout réel t , associe le réel $\cos(t)$ est appelée **fonction cosinus**.

$$\cos : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(t) \in \mathbb{R}.$$

- La fonction qui à tout réel t , associe le réel $\sin(t)$ est appelée **fonction sinus**.

$$\sin : t \in \mathbb{R} \mapsto \sin(t) \in \mathbb{R}.$$



Valeurs particulières

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

- Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques.
- Pour tout nombre réel t ,

$$-1 \leq \cos(t) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(t) \leq 1.$$

- Sinus et cosinus sont dérivables sur \mathbb{R} avec

$$\cos' = \sin \quad \text{et} \quad \sin' = \cos.$$

Formules

Pour tout x réel,

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Soient a et b deux réels.

Formules d'addition

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b,$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

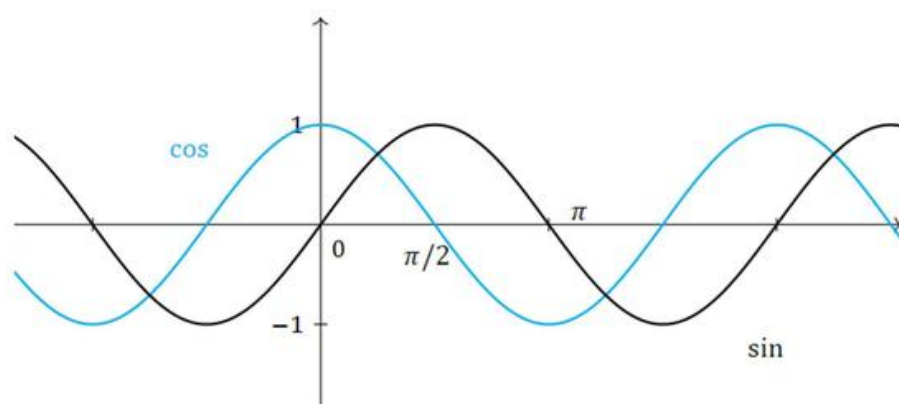
Formules de duplication

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$= 2 \cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 a,$$

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a.$$



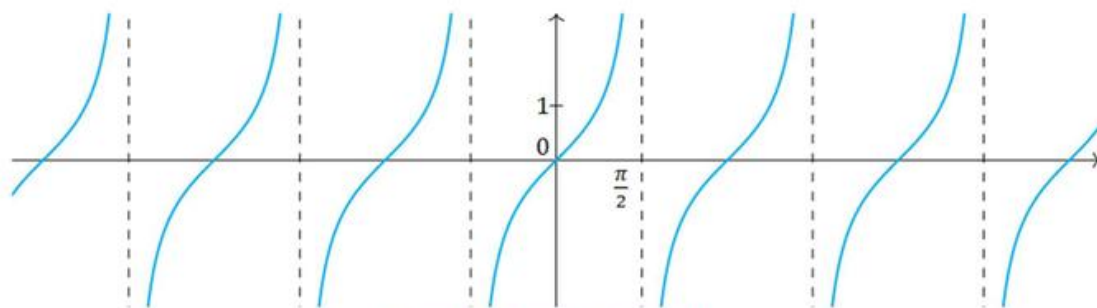
Graphes de cosinus et sinus

- Sur l'ensemble $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$. On peut définir la fonction tangente par le quotient

$$\tan = \frac{\sin}{\cos}.$$

La fonction tangente est π -périodique, impaire et dérivable sur \mathcal{D} avec

$$\tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}.$$

Graphe de tangente sur \mathcal{D}_{\tan}

Applications et compositions

DÉFINITION

application

Une **application** f est la donnée :

- D'un ensemble de départ E ;
- D'un ensemble d'arrivée F ;
- D'un procédé qui à tout élément de E associe un unique élément de F .

Notation. Les applications de E dans F forment un ensemble noté $\mathcal{A}(E, F)$.

DÉFINITION

restriction, prolongement

• Soient $f : E \rightarrow F$ et $E' \subset E$. On appelle **restriction** de f à E' , l'application $f|_{E'} : E' \rightarrow F$ définie par :

$$\forall x \in E', f|_{E'}(x) = f(x).$$

• Soient $g : E' \rightarrow F$, $f : E \rightarrow F$ et $E' \subset E$. On dit que f est un **prolongement** de g à E si $g = f|_{E'}$.

DÉFINITION

composition

Considérons $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$, on définit la **composition** $g \circ f$ par

$$g \circ f : \begin{cases} E & \rightarrow & G \\ x & \mapsto & g(f(x)). \end{cases}$$

Attention. La composition n'est pas commutative, en général, $f \circ g \neq g \circ f$.

Exemple. Si on note $\text{id}_G : x \in G \mapsto x \in G$, l'application identité sur l'ensemble G , alors $f \circ \text{id}_E = f$ et $\text{id}_F \circ f = f$.

Injectivité, surjectivité et bijectivité

DÉFINITION

application injective, surjective et bijective

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite :

- **Injective** si pour tout couple $(x, x') \in E^2$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.
- **Surjective** si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
- **Bijective** si elle est à la fois surjective et injective.

Autrement dit, pour prouver qu'une application $f : E \rightarrow F$ est :

- Injective, il faut justifier que chaque élément de F a *au plus* un antécédent (dans E);
- Surjective, il faut justifier que chaque élément de F a *au moins* un antécédent (dans E);
- Bijective, chaque élément de F a *un unique* antécédent (dans E).

PROPOSITION

lien avec la composition

Soient E, F, G trois ensembles. Soient $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$, deux applications.

- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
- Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

DÉFINITION

application réciproque

Considérons $f : E \rightarrow F$ bijective, il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad (x = g(y) \iff y = f(x)).$$

L'application g est unique, c'est l'**application réciproque** de f et est notée f^{-1} .

Remarques. Soit $f : E \rightarrow F$ bijective.

- L'application réciproque f^{-1} est aussi bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
- De plus, $f \circ f^{-1} = \text{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \text{id}_E$.

PROPOSITION

caractérisation de la bijectivité

Soit $f : E \rightarrow F$. Les propriétés suivantes sont **équivalentes** :

- f est bijective.
- Il existe une application $g : F \rightarrow E$ telle que : $f \circ g = \text{id}_F$ et $g \circ f = \text{id}_E$.

Dans ce cas, $g = f^{-1}$.

PROPOSITION

composition et bijectivité

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ l'est aussi et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Polynômes, $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$

DÉFINITION

polynôme

Une application $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad \text{avec } (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1},$$

est appelée application polynomiale ou plus simplement **polynôme**.

Remarque. Tout polynôme peut s'écrire sous la forme

$$P(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k,$$

où $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite nulle à partir d'un certain rang.

Les nombres $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ sont les **coefficients** du polynôme P .

Notation. Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est le polynôme nul, noté $0_{\mathbb{R}[x]}$.

PROPOSITION

unicité des coefficients

Soit P un polynôme à coefficients dans \mathbb{R} pour lequel on peut trouver $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tels que

$$P(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k x^k = \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k x^k,$$

alors pour tout entier naturel k , $a_k = b_k$.

Remarques. • À l'aide de l'unicité, on peut définir sans ambiguïté le degré d'un polynôme non nul comme le plus grand indice pour lequel le coefficient est non nul. Ainsi, P est de degré n si

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \quad \text{avec } (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{et } a_n \neq 0.$$

On note $\deg(P) = n$. Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.

• Il y a quatre opérations importantes sur les polynômes. Considérons P, Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit alors $P + Q, \lambda \cdot P, PQ$ et $P \circ Q$ par les relations

$$\begin{cases} (P + Q)(x) = P(x) + Q(x) & \text{(Somme)} \\ (\lambda \cdot P)(x) = \lambda \times P(x) & \text{(Multiplication par un réel)} \\ (PQ)(x) = P(x)Q(x) & \text{(Produit)} \\ (P \circ Q)(x) = P(Q(x)) & \text{(Composition)}. \end{cases}$$

PROPOSITION**opérations et degré**

Soient P, Q deux polynômes et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $\lambda \neq 0$, $\deg(\lambda \cdot P) = \deg(P)$;
- $\deg(P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ avec égalité si P et Q sont de degrés différents;
- $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.
- $\deg(P \circ Q) = \deg(P) \deg(Q)$ si P et Q sont distincts du polynôme nul ($0_{\mathbb{R}[x]}$).

Remarque. On peut rajouter une nouvelle opération : la dérivation.

$x \in \mathbb{R} \mapsto P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{R}$ est dérivable sur \mathbb{R} , sa dérivée est donnée pour tout réel x par

$$P'(x) = \sum_{i=1}^n a_i i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) a_{i+1} x^i.$$

Si P n'est pas un polynôme constant : $\deg(P') = \deg(P) - 1$.

DÉFINITION**polynômes dérivés successifs**

On définit les **polynômes dérivés successifs** de P par la récurrence :

$$P^{(0)} = P \quad \text{et} \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad P^{(m+1)} = (P^{(m)})'.$$

On dit que $P^{(m)}$ est le polynôme dérivé m -ième de P .

Remarque. Si P est un polynôme de degré n , alors, pour tout $m > n$, $P^{(m)} = 0_{\mathbb{R}[x]}$.

DÉFINITION

- L'ensemble des polynômes réels est noté $\mathbb{R}[x]$.
- Pour tout entier naturel n , l'ensemble des polynômes réels de degré au plus n est noté $\mathbb{R}_n[x]$.

Liens avec les espaces vectoriels.

>>> voir page 578.

- Les ensembles $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathbb{R}[x]$ sont des espaces vectoriels pour les opérations usuelles.
- La famille $(1, x, \dots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$ dite **base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$** .
- Un critère particulièrement pratique pour justifier qu'une famille (Q_1, Q_2, \dots, Q_r) est une famille libre est de remarquer qu'elle est de **degrés échelonnés**. C'est-à-dire,

$$\deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \dots < \deg(Q_r).$$

Rappels

Arithmétique dans $\mathbb{R}[x]$

DÉFINITION

diviseurs

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[x]^2$ avec P non nul.

On dit que P **divise** Q s'il existe $R \in \mathbb{R}[x]$ tel que $PR = Q$. On note alors $P|Q$.

Vocabulaire. On dit encore que P est un **diviseur** de Q ou que Q est un **multiple** de P .

Remarque. Soient P, Q, R trois polynômes avec P non nul.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\lambda|P$;
- $P|0_{\mathbb{R}[x]}$ et $P|P$;
- si $P|Q$ et $P|R$ alors $P|(Q + R)$;
- si $P|Q$ et $Q|R$ alors $P|R$.

THÉORÈME

division euclidienne

Soient $A \in \mathbb{R}[x], B \in \mathbb{R}[x] \setminus \{0_{\mathbb{R}[x]}\}$. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[x]^2$ tel que

$$A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Q est le **quotient** et R est le **reste** de la division euclidienne de A par B .

Exemples. • B divise A si et seulement si le reste dans la division euclidienne de A par B est nul.

- Le reste de la division euclidienne par $x - a$ du polynôme P est $P(a)$.

Racines, multiplicités et factorisation

DÉFINITION

racine

Soit $P \in \mathbb{R}[x]$. Un nombre $a \in \mathbb{R}$ est une **racine** du polynôme P si $P(a) = 0$.

Exemple. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$). P admet deux racines réelles distinctes si le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est strictement positif.

Remarque. Il ne faut pas oublier qu'un polynôme est une application de la variable réelle. On peut donc utiliser les théorèmes classiques de l'analyse. Par exemple, à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, on montre que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

PROPOSITION

caractérisation d'une racine

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont **équivalentes** :

- a est une racine de P .
- Le reste de la division par $(x - a)$ est nul.
- $(x - a)|P$, c'est-à-dire $(x - a)$ divise P .

DÉFINITION**multiplicité d'une racine**

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

- Une racine a est de **multiplicité** au moins m si $(x - a)^m$ divise P .
- La racine est exactement de multiplicité m si, de plus, $(x - a)^{m+1}$ ne divise pas P .

Remarque. La proposition suivante caractérise la multiplicité à l'aide des dérivées successives.

PROPOSITION**multiplicité et dérivée**

Soient $P \in \mathbb{R}[x]$, $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$. Les propriétés suivantes sont **équivalentes** :

- a est une racine de multiplicité m .
- Pour tout $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $P^{(k)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

PROPOSITION**nombre de racines**

Tout polynôme réel de degré n , non nul, a au plus n racines comptées avec multiplicité.

Méthode. La proposition précédente donne une méthode particulièrement efficace pour justifier qu'un polynôme est nul.

Il suffit de justifier l'un des énoncés suivants :

- ou
- le polynôme admet une infinité de racines;
 - le polynôme admet strictement plus de racines (comptées avec multiplicité) que son degré.

PROPOSITION**factorisation dans le cas réel**

Tout polynôme réel P s'écrit sous la forme

$$P(x) = \lambda(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_s) \cdot R_1(x) \cdots R_r(x),$$

- avec :
- λ le coefficient dominant de P .
 - $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1, s \rrbracket}$ les racines réelles de P .
 - pour tout indice $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, R_i est un polynôme réel de degré 2 sans racines réelles (c'est-à-dire de discriminant strictement négatif).

Formule de Taylor**THÉORÈME****formule de Taylor**

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[x]$ et $a \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Généralités

- Pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, une matrice de taille (n, p) est une application de $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \rightarrow \mathbb{R}$. On précise cette application sous forme d'un tableau à n lignes et p colonnes.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix}.$$

- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de taille (n, p) à coefficients dans \mathbb{R} .

DÉFINITION

opérations matricielles

- **La somme.**

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit la somme $A + B$ par la formule

$$C = A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j},$$

où $a_{i,j}$, $b_{i,j}$ et $c_{i,j}$ désignent le coefficient en position (i, j) de A , B et C .

- **Multipliation par un réel.**

On définit λA par

$$\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad d_{i,j} = \lambda \times a_{i,j},$$

où $d_{i,j}$ est le coefficient (i, j) de λA .

- **Produit matriciel.**

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. On définit le produit matriciel AB par la formule

$$C = AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^p a_{i,k} b_{k,j}.$$

- **La transposition.**

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit la transposée de la matrice A , notée tA , par

$$B = {}^tA = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad b_{i,j} = a_{j,i}.$$

PROPOSITION

règles de calculs

- Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $C = \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$.
 → Le produit matriciel est associatif, c'est-à-dire $(AB)C = A(BC)$.
 → De plus, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda A)B = \lambda(AB), \quad A(\lambda B + \mu B') = \lambda AB + \mu AB' \quad \text{et} \quad (\lambda A + \mu A')B = \lambda AB + \mu A'B.$$

- Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$${}^t({}^tA) = A, \quad {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB, \quad {}^t(AC) = {}^tC {}^tA.$$

DÉFINITION

matrices particulières

On dit qu'une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est

- **diagonale** si $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0$;
- **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$;
- **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2, i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0$;
- **symétrique** si ${}^tA = A$;
- **antisymétrique** si ${}^tA = -A$.

$$\begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

matrice triangulaire supérieure

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

matrice triangulaire inférieure

Lien avec les systèmes linéaires

Soit \mathcal{S} un système linéaire à n équations et p inconnues de second membre $b = (b_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ et de coefficients $a = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathbb{R}^{np}$.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

Rappels

On introduit les matrices rectangulaire et colonnes

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}).$$

PROPOSITION

écriture matricielle d'un système linéaire

Avec les notations précédentes,

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ est solution de } S \text{ si et seulement si } AX = B.$$

Inversibilité

DÉFINITION

inverse d'une matrice

Une matrice carrée A est dite inversible s'il existe une matrice B telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n.$$

La matrice B est unique, elle est notée A^{-1} , l'inverse de A .

Remarques. • On démontre qu'il suffit de trouver une matrice B telle que $AB = I_n$ ou $BA = I_n$.
• En reprenant les notations de la proposition précédente, lorsque $p = n$ et A est inversible, il y a une unique solution au système S obtenue à l'aide de $X = A^{-1}B$.

PROPOSITION

produit de matrices inversibles

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A et B sont inversibles alors le produit AB l'est aussi et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

PROPOSITION

inversibilité et résolution d'un système linéaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont **équivalentes**,

- A est inversible;
- Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2, \quad AX = Y \Leftrightarrow X = BY.$

Dans ce cas, B est l'inverse de A .

Remarque. La proposition précédente justifie la méthode de calcul de l'inverse à l'aide d'une résolution d'un système linéaire par un pivot de Gauss.

PROPOSITION**cas triangulaire et diagonale**

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire.

A est inversible si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls.

Dans le cas où A est diagonale, on peut préciser l'inverse

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{bmatrix} \text{ alors } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1/d_n \end{bmatrix}.$$

PROPOSITION**inverse d'une matrice de taille 2**

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $\det(A) = ad - bc$. Alors

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Dans ce cas, l'inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Puissances de matrices**DÉFINITION****puissances**

Les **puissances d'une matrice** carrée de taille n , notée A , sont les matrices

$$A^p = \underbrace{A \times \dots \times A}_{p \text{ fois}} \quad \text{où } p \in \mathbb{N}^*.$$

Précisons que, par convention, $A^0 = I_n$.

PROPOSITION**formule du Binôme dans le cas matriciel**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A et B commutent ($AB = BA$). Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}.$$

Attention. Il faut être attentif au choix de son **pivot** pour être sûr de faire apparaître un nouveau zéro, sinon le processus ne s'arrête pas. On commence donc par mettre des zéros sur la première colonne du système, puis sur la seconde, etc.

• **Deuxième étape.** On résout le système triangulaire. On a $z = 2$, puis $3y = 4 - 2z = 0$, c'est-à-dire $y = 0$, puis $2x = 4z - y = 8$, d'où $x = 4$. Finalement, il y a un *unique* triplet solution : $S_1 = \{(4, 0, 2)\}$.

Aucune solution

$$S_2 : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y + 5z = 2 \\ 2x - y + 4z = 3 \end{cases} \begin{matrix} \xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \\ \end{matrix} \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2y + 4z = 0 \\ y + 2z = -1. \end{cases}$$

En effectuant $L_2 - 2L_3$, on trouve $0 = 2$. Absurde, il n'y a donc pas de solution : $S_2 = \emptyset$.

Attention. Il faut toujours indiquer au correcteur les opérations effectuées.

Une infinité de solutions

$$S_3 : \begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \begin{matrix} \xleftrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_1]{} \\ \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + 3y - z = -1 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases} \begin{matrix} \xleftrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \\ \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ -y - 7z = -5 \\ -2y - 14z = -10 \end{cases} \begin{matrix} \xleftrightarrow[L_3 = 2 \cdot L_2]{} \\ \end{matrix} \begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ -y - 7z = -5. \end{cases}$$

On exprime alors les inconnues x et y en fonction de z vu comme paramètre. Il y a une *infinité* de solutions données par

$$S_3 = \{(11z - 8, 5 - 7z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}.$$

Espaces vectoriels

Pour résumer, un espace vectoriel E est un ensemble muni de 2 lois « + » et « · » telles que :

- E est stable par multiplication par un nombre : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in E, \lambda \cdot u \in E$.
- E est stable par somme : $\forall u \in E, \forall v \in E, u + v \in E$.
- il y a de « bonnes règles de calcul » entre les lois « + » et « · ».

Par exemple :

- $\forall u \in E, 0 \cdot u = 0_E$ (le vecteur nul);
- $\forall u \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \times \mu) \cdot u$.
- $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ et $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot u = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $u = 0_E$;
- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \forall (u, v) \in E^2 :$

$$\begin{cases} \text{Si } \lambda \neq 0 \text{ alors } & \lambda \cdot u = \lambda \cdot v \Rightarrow u = v; \\ \text{Si } u \neq 0_E \text{ alors } & \lambda \cdot u = \mu \cdot u \Rightarrow \lambda = \mu. \end{cases}$$

Les éléments de E sont des **vecteurs**.

PROPOSITION

exemples de référence

- \mathbb{R}^n est un espace vectoriel avec les lois + et · définies par

$$\forall u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \forall v = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

$$u + v = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot u = (\lambda \times x_1, \dots, \lambda \times x_n).$$

- L'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices de taille (n,p) est un espace vectoriel pour les lois usuelles.
- L'ensemble des applications d'un intervalle I à valeurs dans \mathbb{R} est un espace vectoriel.
- Les ensembles $\mathbb{R}[x]$ et $\mathbb{R}_n[x]$ respectivement des applications polynomiales et des applications polynomiales de degré au plus n sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles.
- L'ensemble $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ des applications d'un ensemble I à valeurs dans \mathbb{R} est un espace vectoriel pour les lois usuelles.

Attention. Un espace vectoriel n'est jamais vide.

Combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels

Dans la suite, une famille finie de vecteurs de E est la donnée d'une liste finie (u_1, u_2, \dots, u_n) de vecteurs de E . Le cardinal de la famille est alors le nombre de vecteurs.

DÉFINITION

combinaison linéaire

Soit (u_1, \dots, u_n) une famille finie de vecteurs de E .

On appelle **combinaison linéaire** des vecteurs u_1, \dots, u_n , tout vecteur v s'écrivant

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i \quad \text{avec pour tout } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

DÉFINITION

sous-espaces vectoriels

Soient E un espace vectoriel et F une partie de E . F est un **sous-espace vectoriel** de E si

- F est non vide;
- F est stable par somme, c'est-à-dire : $\forall (u, v) \in F^2, \quad u + v \in F$;
- F est stable par multiplication par un nombre, c'est-à-dire : $\forall u \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \cdot u \in F$.

Remarque. Les sous-espaces vectoriels sont les parties (non vides) de E stables par combinaisons linéaires.

Méthodes. Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel, on se contente de vérifier que pour tout nombre λ et tous vecteurs u, v de F , $\lambda \cdot u + v \in F$ et $F \neq \emptyset$. Pour le second point, il suffit d'exhiber un élément de F , le plus simple étant 0_E .

De plus, on démontre que tout sous-espace vectoriel est un espace vectoriel. Donc, en pratique, lorsqu'on souhaite prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel, on montre que l'ensemble en question est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}[x], \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}))$.

PROPOSITION

intersection de sous-espaces

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

Alors l'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E .

Attention. En général, c'est faux pour la réunion.

DÉFINITION

sous-espace vectoriel engendré par une partie finie

Soient E un espace vectoriel et X une partie finie de E . L'**espace vectoriel engendré par X** est défini par l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de X . On le note $\text{Vect}(X)$.

Autrement dit, si $X = \{u_1, \dots, u_n\}$, alors

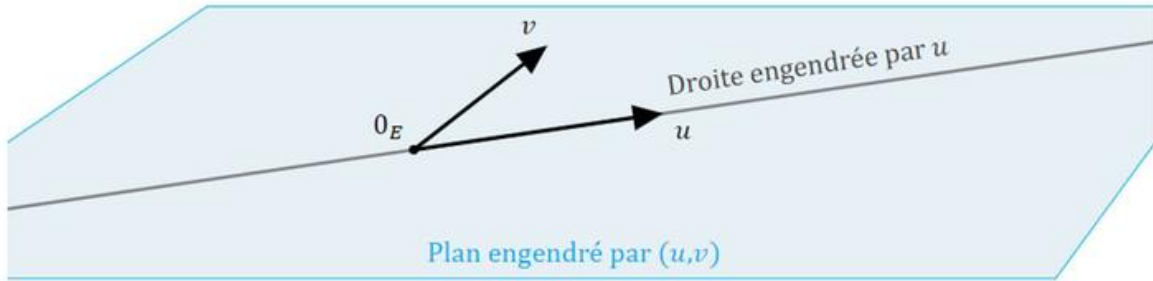
$$\text{Vect}(X) = \left\{ v \in E \mid \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i \right\}.$$

Rappels

Remarque. Comme son nom l'indique, $\text{Vect}(X)$ est un sous-espace vectoriel de E . En particulier, il contient le vecteur nul.

Vocabulaire. • Un espace vectoriel engendré par un vecteur non nul est une **droite vectorielle**.

• Un espace vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires est un **plan vectoriel**.



Pour rappel, deux vecteurs u, v sont **non colinéaires** s'ils sont non nuls et il n'existe pas de réel λ tel que $u = \lambda \cdot v$.

Familles génératrices, libres et bases

DÉFINITION

famille libre finie

Soit E un espace vectoriel et $m \in \mathbb{N}^*$, on dit que la famille $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_m)$ de vecteurs de E est une **famille libre** si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire à coefficients nuls. Autrement dit,

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \lambda_i = 0 \right).$$

Remarque. Soit $(u, v) \in E^2$. La famille (u, v) est libre si et seulement si les vecteurs u et v sont non colinéaires.

Exemple. Dans les cas des polynômes : une famille fine (Q_1, \dots, Q_r) de $\mathbb{R}[x]$ est une famille libre si elle est de **degrés échelonnés**. C'est-à-dire,

$$\deg(Q_1) < \deg(Q_2) < \dots < \deg(Q_r).$$

DÉFINITION

famille génératrice finie

Soit $\mathcal{G} = (u_1, \dots, u_p)$ une famille finie de vecteurs de E .

On dit que \mathcal{G} est une **famille génératrice** de E , si tout vecteur de E peut s'obtenir comme combinaison linéaire à partir des vecteurs de \mathcal{G} . Autrement dit si,

$$\text{Pour tout vecteur } v \in E, \text{ il existe } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ tels que } v = \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot u_i.$$

Remarque. Sous forme condensée, \mathcal{G} est génératrice de E si $\text{Vect}(\mathcal{G}) = E$.

DÉFINITION

base

On appelle **base** d'un espace vectoriel E , toute famille libre et génératrice de E .

Exemples.

Les bases canoniques de \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- La famille $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec 1 en i -ième position est une base de \mathbb{R}^n .
- La famille $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
- La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Pour rappel, la matrice élémentaire $E_{i,j}$ est la matrice ne contenant que des 0, sauf un 1 en position (i,j) .

$$E_{i,j} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & & j & & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} = E_{i,j}.$$

Coordonnées dans une base

PROPOSITION

coordonnées d'un vecteur dans une base

Soient E un espace vectoriel et $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille finie de E à n éléments. Les propriétés suivantes sont **équivalentes**.

- \mathcal{B} est une base de E ;
- Pour tout vecteur v de E ,
il existe un unique n -uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = \sum_{i=1}^n x_i \cdot u_i$.

Dans ce cas, (x_1, \dots, x_n) sont les **coordonnées de v dans la base \mathcal{B}** .

DÉFINITION

matrice colonne des coordonnées d'un vecteur

Soit E un espace vectoriel de dimension finie dont $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base.

Soit $u \in E$ dont (x_1, \dots, x_n) sont les coordonnées dans la base \mathcal{B} . On définit la **matrice colonne des coordonnées** de u dans la base \mathcal{B} par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Une **suite réelle** est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Il existe principalement deux manières de définir une suite :

- De manière **explicite**. On donne une formule générale. Exemples :

$$(3^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad (\cos(n+1))_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left(\frac{n^4 + 3n + 1}{4n^2 + 1} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

- De manière **récurive**. Le calcul du n -ième terme u_n suppose la connaissance des termes antérieurs u_k pour $k < n$. Par exemple, la suite de FIBONACCI est définie par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Ainsi les premiers termes sont 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.

Les exemples qui suivent sont de type récursif.

Suites arithmétiques et géométriques

La suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ et de premier terme u_0 est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

On a par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = nr + u_0.$$

La suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ et de premier terme u_0 est la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n.$$

On a par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0.$$

Suites arithmético-géométriques

Une suite u est dite arithmético-géométrique s'il existe deux réels α, β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \alpha u_n + \beta.$$

Rappelons la méthode pour obtenir la formule explicite d'une telle suite.

Prenons l'exemple de : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot u_n - 1.$

I - Tout d'abord, on calcule « le point fixe » ℓ de la relation de récurrence obtenu en remplaçant chaque terme par ℓ :

$$\ell = \frac{1}{2}\ell - 1 \quad \Rightarrow \quad \ell = -2.$$

II - Puis, on introduit la suite auxiliaire : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - \ell.$

On constate alors que la suite v est une suite géométrique de raison $1/2$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}u_n - 1 + 2 = \frac{1}{2}(u_n + 2) = \frac{1}{2}v_n.$$

v s'écrit donc sous la forme : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{v_0}{2^n} = \frac{u_0 - \ell}{2^n} = \frac{3}{2^n}.$

III - Finalement, la formule explicite est :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = v_n + \ell = \frac{3}{2^n} - 2.$$

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Une suite réelle récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite pour laquelle

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \alpha u_{n+1} + \beta u_n.$$

On associe l'équation dite **caractéristique**

$$x^2 = \alpha x + \beta \quad \text{d'inconnue } x \in \mathbb{R}.$$

PROPOSITION

formule explicite

Notons $\Delta = \alpha^2 + 4\beta$, le discriminant de l'équation caractéristique.

- Si $\Delta > 0$, alors il y a deux racines réelles distinctes x_1, x_2 et

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n.$$

- Si $\Delta = 0$, alors il y a une racine double x_0 et

$$\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda + \mu n)x_0^n.$$

Les définitions

DÉFINITION

suite majorée, minorée et bornée

Une suite réelle u est dite

- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$;
- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$;
- **bornée** si elle est minorée et majorée. Il existe $K \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq K$.

Attention. Les réels m et M sont indépendants de n .

DÉFINITION

suite croissante, décroissante, monotone

Une suite réelle u est dite

- **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$;
- **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$;
- **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

DÉFINITION

limites d'une suite

• Une suite $(u_n)_n$ **converge vers un réel ℓ** si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient les termes u_n pour tous les indices n , sauf pour un nombre fini d'entre eux. On dit aussi que la suite admet une limite finie.

Si la limite existe, elle est unique. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

• Une suite $(u_n)_n$ **tend vers $+\infty$** si tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (avec $a \in \mathbb{R}$), contient les termes u_n pour tous les indices n , sauf pour un nombre fini d'entre eux.

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou encore $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

Remarques. • La définition s'adapte au cas $u_n \rightarrow -\infty$.

• On peut traduire la définition $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ avec des quantificateurs.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, (p \geq n_0 \Rightarrow |u_p - \ell| < \varepsilon).$$

• On montre qu'une suite convergente vers une limite finie est bornée.

PROPOSITION**relation d'ordre et limites**

Considérons deux suites u et v convergentes telles que pour tout entier n , $u_n \leq v_n$. Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Limites et opérations algébriques

Rappelons dans deux tableaux le comportement de $u + v$ et uv lorsque l'une au moins des deux suites à une limite infinie. FI signifie que la forme est indéterminée. Le signe du produit s'obtient par la règle des signes. Enfin ℓ appartient à \mathbb{R} .

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	0
$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n v_n)$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI

Exemples de limites

À partir des limites de fonctions usuelles, on démontre que pour $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

- Si $\ell \in \mathbb{R}$: $e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^\ell$, $\sin(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sin(\ell)$ et $\cos(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \cos(\ell)$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell^\alpha$ et $\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(\ell)$.
- Si $\ell = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$.
- Si $\ell = +\infty$, $e^{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\ln(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- On ne peut pas conclure directement sur les limites de $(\cos(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\sin(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

PROPOSITION**croissances comparées et factorielle**

Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{n^\alpha}{\exp(\beta n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, $\frac{\ln(n)^\alpha}{n^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{\exp(an)}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Théorèmes de convergences

PROPOSITION

Soit u une suite telle que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une limite commune $\ell \in \mathbb{R}$. Alors u converge aussi vers ℓ .

THÉORÈME

d'encadrement

Considérons trois suites réelles u , v et w .

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{Les suites } u \text{ et } w \text{ convergent vers une même limite } \ell, \\ \rightarrow \text{Pour tout entier } n \text{ à partir d'un certain rang, } u_n < v_n < w_n. \end{array} \right.$

Alors la suite v converge vers ℓ .

Remarque. On parle aussi de théorème des gendarmes.

PROPOSITION

minoration

Considérons deux suites réelles u et v .

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n; \\ \rightarrow u \text{ tend vers } +\infty; \end{array} \right.$ Alors la suite v tend vers $+\infty$.

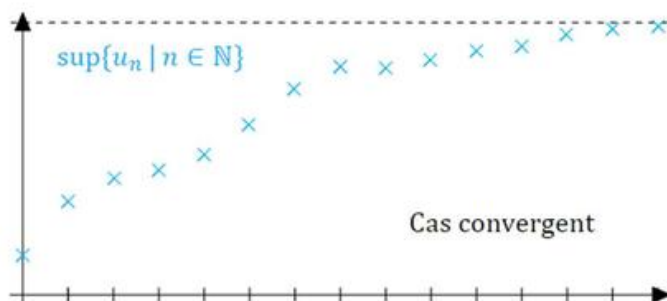
THÉORÈME

de convergence monotone

Soit u une suite réelle croissante. Les phrases suivantes sont équivalentes :

- la suite converge vers une limite finie ;
- la suite est majorée.

Sinon, la suite tend vers $+\infty$.



Remarque. De même, si u est une suite décroissante :

u converge vers une limite finie si et seulement si elle est minorée. Sinon, elle tend vers $-\infty$.

THÉORÈME

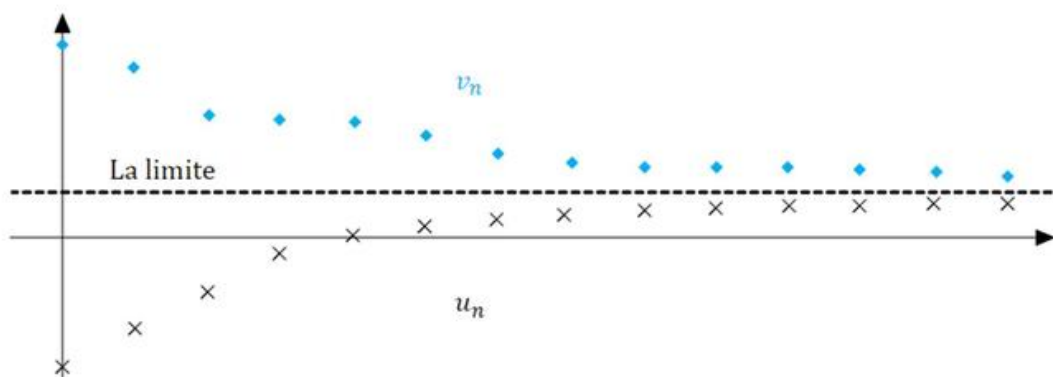
suites adjacentes

Considérons deux suites u et v .

- Si
- u est croissante et v est décroissante à partir d'un certain rang n_0 et si
 - la différence $u - v$ tend vers 0,

alors les suites u et v , dites **adjacentes**, convergent vers une même limite ℓ .

Pour tout $n \geq n_0$: $u_n \leq \ell \leq v_n$.



DÉFINITION**limite finie en un point**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un élément de I ou une extrémité de I .

On dit que f admet une **limite finie** $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap I$, $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$. On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Remarque. De même, on peut définir les limites à gauche et à droite.

PROPOSITION**limites à gauche et à droite**

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et x_0 un élément de I à l'exclusion des extrémités.

f admet une limite en x_0 si et seulement si la limite à droite et à gauche existent et sont égales.

DÉFINITION**limite infinie en un point**

Soit f une fonction définie sur $J =]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

• On dit que f admet $+\infty$ **pour limite** en x_0 si pour tout réel A , il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap J$, $f(x) \geq A$.

• De même, on dit que f admet $-\infty$ **pour limite** en x_0 si pour tout réel B , il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\cap J$, $f(x) \leq B$.

Remarque. On adapte les définitions pour des limites lorsque $x \rightarrow +\infty$ ou $x \rightarrow -\infty$.

PROPOSITION**croissance de la limite**

Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{Pour tout } x \in I, \quad f(x) \leq g(x); \\ \rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell \quad \text{et} \quad g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \ell'; \end{array} \right. \quad \text{Alors} \quad \ell \leq \ell'.$

Dans la suite, I est un intervalle et \bar{I} désigne I complété avec les extrémités.

Théorèmes de convergence

THÉORÈME

composition de limites

Soient $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$, $y_0 \in \bar{J} \cup \{\pm\infty\}$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\left(f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} y_0 \quad \text{et} \quad g(y) \underset{y \rightarrow y_0}{\rightarrow} \ell \right) \Rightarrow g \circ f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} \ell.$$

THÉORÈME

existence de la limite par minoration et encadrement

• Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I} \cup \{\pm\infty\}$.

Si $\left| \begin{array}{l} \rightarrow \text{Pour tout } x \in I, \quad f(x) \leq g(x); \\ \rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} +\infty; \end{array} \right.$

Alors $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} +\infty$.

• Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Si $\left| \begin{array}{l} \rightarrow \text{Pour tout } x \in I, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x); \\ \rightarrow f(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} \ell \quad \text{et} \quad h(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} \ell; \end{array} \right.$

Alors g a une limite en x_0 et $g(x) \underset{x \rightarrow x_0}{\rightarrow} \ell$.

THÉORÈME

de limite monotone (ou de convergence monotone)

Soient $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in]a, b[$. Si f est croissante, alors

• f admet en x_0 une limite finie à gauche et une limite finie à droite avec

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

• f admet une limite finie en a si et seulement si f est minorée. Sinon, $f(x) \underset{x \rightarrow a^+}{\rightarrow} -\infty$.

• f admet une limite finie en b si et seulement si f est majorée. Sinon, $f(x) \underset{x \rightarrow b^-}{\rightarrow} +\infty$.

Remarque. Le théorème s'adapte au cas des fonctions décroissantes.

THÉORÈME

limites usuelles/ croissances comparées

• $\frac{\sin x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$, $\frac{e^x - 1}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$, $\frac{\ln(1+x)}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 1$ et $\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{1}{2}$.

• Pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, $\frac{x^\alpha}{\exp(\beta x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$, $\frac{\ln(x)^\alpha}{x^\beta} \underset{x \rightarrow +\infty}{\rightarrow} 0$ et $x^\alpha \ln(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 0$.

Définitions et premières propriétés

Dans la suite I désigne un intervalle ou une réunion d'intervalles de \mathbb{R} .

DÉFINITION

continuité en un point a , continuité sur I

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$, f est **continue en a** si f admet une limite en a et

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

On dit que f est **continue sur I** si f est continue en tout point de I .

Remarque. Soient I un intervalle et $a \in I$. Si a n'est pas un des bords de I , f est continue en a si et seulement si la limite à gauche et à droite existent et valent $f(a)$.

PROPOSITION

opérations usuelles

- Soient f_1 et f_2 deux fonctions de I dans \mathbb{R} , et soit $a \in I$.
 - Si f_1 et f_2 sont continues en a , alors $f_1 + f_2$ aussi.
 - Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et f_1 est continue en a , alors $\lambda \cdot f_1$ aussi.
 - Si f_1 et f_2 sont continues en a , alors $f_1 \cdot f_2$ aussi.
- Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow J$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$.
Si f continue en a et g continue en $f(a) = b$, alors $g \circ f$ est continue en a .
- Soit f continue sur I . Si f ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{f}$ est bien définie et continue sur I .

DÉFINITION

prolongement par continuité

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est **prolongeable par continuité** en a si la limite en a à droite existe et demeure finie. On convient alors de poser $\tilde{f} : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = f(x) \quad \text{si } x \in]a, b[\quad \text{et} \quad \tilde{f}(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

De sorte que \tilde{f} soit continue en a .

Remarque. De même, on définit le prolongement à gauche ou sur un intervalle époinché $I \setminus \{a\}$.

Théorèmes généraux

THÉORÈME

des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Alors pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarque. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ avec I un intervalle de \mathbb{R} . Notons $f(I)$, l'ensemble des images de f ,

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I, y = f(x)\} = \{f(x) ; x \in I\}.$$

Le théorème précédent affirme que $f(I)$ est un intervalle.

THÉORÈME

image d'un segment

Pour toute application continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ où I est un segment de \mathbb{R} , l'image $f(I)$ est aussi un segment. Alors, f admet un minimum et un maximum et

$$f(I) = \left[\min_I f, \max_I f \right].$$

Remarque. On dit alors que f est bornée et atteint ses bornes. Il existe α, β tels que

$$\forall x \in I, f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta).$$

THÉORÈME

de la bijection

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I définit une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation.

Exemple. La fonction tangente sur $] -\pi/2, \pi/2[$ est strictement croissante, continue avec

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow (\pi/2)^-}{\rightarrow} +\infty \quad \text{et} \quad \tan(x) \underset{x \rightarrow (-\pi/2)^+}{\rightarrow} -\infty.$$

D'après le théorème de la bijection, on peut définir l'application arctangente $\mathbb{R} \rightarrow] -\pi/2, \pi/2[$ comme la réciproque de la restriction de tangente à $] -\pi/2, \pi/2[$.

Rappel. Le graphe de l'application réciproque f^{-1} s'obtient par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$ à partir du graphe de f .

PROPOSITION

continuité et suite

Soient $a \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue en a . Pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I ,

$$\left(u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} a \right) \Rightarrow \left(f(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} f(a) \right).$$

Définitions et règles de calculs

DÉFINITION

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

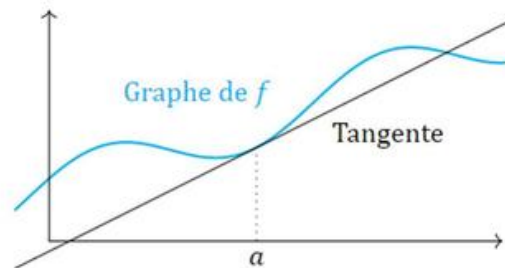
- f est **dérivable en a** si le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie en a . Si cette dernière existe, elle est unique et notée $f'(a)$.
- f est **dérivable sur I** si elle est dérivable pour tout réel de I . Ainsi, on définit la fonction dérivée par

$$f' : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbb{R} \\ a & \mapsto f'(a). \end{cases}$$

- Graphiquement, f est dérivable en a s'il existe une tangente à la courbe. L'équation de la tangente est alors

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

- Le terme $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est le taux d'accroissement de f entre a et x .



PROPOSITION

règles de calculs

Soient f et g deux fonctions dérivables en a et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Les fonctions $\lambda \cdot f$ et $f + g$ sont dérivables en a avec

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a) \quad \text{et} \quad (f + g)'(a) = f'(a) + g'(a).$$

- La fonction produit $f \cdot g$ est dérivable en a avec

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- Si $g(a) \neq 0$, la fonction f/g est définie dans un voisinage de a et dérivable en a avec

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

THÉORÈME

composition

Soient $f : I \rightarrow J$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ où I et J sont deux intervalles de \mathbb{R} .

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow f \text{ dérivable en } a \text{ et} \\ \rightarrow g \text{ est dérivable en } b = f(a), \end{array} \right.$

alors $g \circ f$ est dérivable en a avec $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.

THÉORÈME

application réciproque

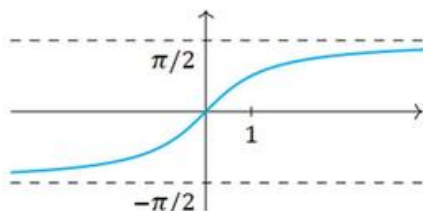
Soient $f : I \rightarrow J$, $a \in I$ et $b = f(a)$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow f \text{ est bijective et} \\ \rightarrow f \text{ est dérivable en } a \text{ avec } f'(a) \neq 0, \end{array} \right.$

alors f^{-1} est dérivable en b avec $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Application. La fonction arctangente est définie et dérivable sur \mathbb{R} et à valeurs dans $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



THÉORÈME

développement limité à l'ordre 1

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Les propriétés suivantes sont **équivalentes**.

- f est dérivable en a et $\lambda = f'(a)$;
- f admet un développement limité à l'ordre 1 en a .
C'est-à-dire, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + (x - a)\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

Théorèmes généraux

THÉORÈME

extrema - condition nécessaire

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si

- f admet un extremum local en a ,
- f est dérivable en a , et
- a appartient à un intervalle ouvert inclus dans I ,

alors $f'(a) = 0$.

Vocabulaire. On parle de point critique lorsque $f'(a) = 0$.

Remarque. La réciproque est fautive : tout point critique ne donne pas un extremum. $x \mapsto x^3$ en 0 fournit un contre-exemple.

THÉORÈME

de Rolle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Si

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$, et
- $f(a) = f(b)$,

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

THÉORÈME

égalité des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Si

- f est continue sur $[a, b]$ et
- f est dérivable sur $]a, b[$,

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

THÉORÈME

inégalité des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ avec $a < b$.

Si

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$, et
- f' est bornée par $m = \inf_{x \in]a, b[} f'(x)$ et $M = \sup_{x \in]a, b[} f'(x)$,

alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$.

THÉORÈME**variations et dérivée**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable où I est un intervalle de \mathbb{R} .

- Si f est de dérivée nulle sur I alors f est une application constante.
- Les propriétés suivantes sont équivalentes
 - f est croissante sur I ;
 - $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$.
- De même, f est décroissante sur I si et seulement si $f'(a) \leq 0$ pour tout $a \in I$.

Remarques. • Il ne faut pas oublier la condition « I est un intervalle ».

- L'équivalence devient fausse dans le cas de la stricte monotonie. L'énoncé suivant est alors pratique.

PROPOSITION**stricte monotonie**

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I .

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow f' \text{ est positive sur } I \text{ et} \\ \rightarrow f' \text{ ne s'annule qu'en un nombre fini de points,} \end{array} \right.$

alors f est strictement croissante sur I .

Le cas des fonctions de classe \mathcal{C}^1

Dans la suite, on dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I si f est dérivable et la fonction dérivée f' est continue sur I .

THÉORÈME**prolongement de classe \mathcal{C}^1**

Soient I un intervalle et $a \in I$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow f \text{ est une fonction de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \setminus \{a\} \text{ et continue en } a, \text{ et} \\ \rightarrow f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$

alors f est de classe \mathcal{C}^1 sur I et $f'(a) = \ell$.

Intégrales et aires

DÉFINITION

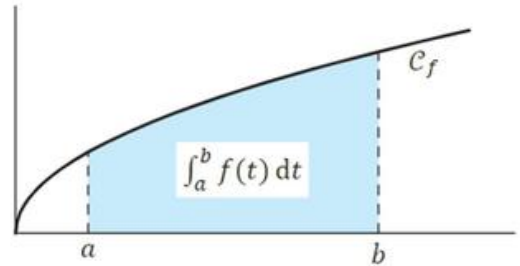
Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, positive et $a, b \in I$.

L'intégrale de f de a à b est l'aire de la partie délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$, $x = b$.

On la note

$$\int_a^b f(t) dt.$$

intégrale et aire



DÉFINITION

sommes de Riemann

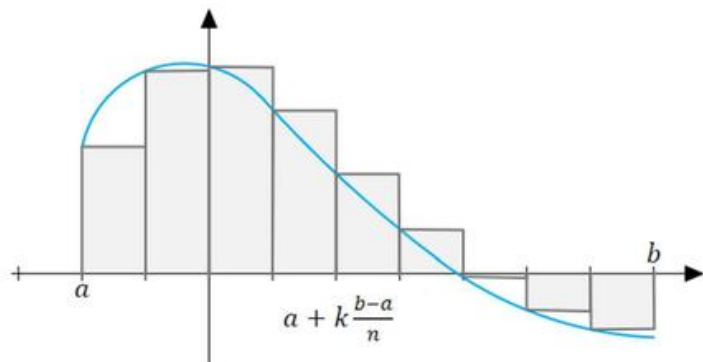
Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et n un entier naturel non nul. Les sommes de Riemann d'ordre n associées à f sur $[a, b]$ sont

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la quantité

$$\frac{b-a}{n} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$$

représente l'aire du rectangle de hauteur $f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right)$ et de base $\frac{b-a}{n}$. Ainsi, $S_n(f)$ désigne la somme des aires des rectangles.



Plus n est grand, plus les rectangles épousent la forme de la courbe. À la limite, on retrouve l'intégralité de la courbe.

THÉORÈME

convergence des sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Les suites $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(T_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

Primitives

DÉFINITION

primitive

On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admet une **primitive** $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ si F est dérivable sur I et

$$F' = f.$$

Fonction	Intervalle de définition	Expression des primitives, $C \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	\mathbb{R}_-^* ou \mathbb{R}_+^*	$\ln(x) + C$
exp	\mathbb{R}	$e^x + C$
ln	\mathbb{R}_+^*	$x \ln(x) - x + C$
sin	\mathbb{R}	$-\cos(x) + C$
cos	\mathbb{R}	$\sin(x) + C$
tan	$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$-\ln \cos(x) + C$
$x \mapsto \frac{1}{a^2 + x^2}, a \in \mathbb{R}^*$	\mathbb{R}	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$

Rappels

Remarque. Soient f une fonction continue sur un intervalle I et F_1, F_2 deux primitives de f , alors, il existe un réel C tel que

$$\forall x \in I, \quad F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Fixons $a \in I$. Alors pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive de f telle que $F(a) = y_0$.

PROPOSITION

intégrale d'une fonction

Si f est continue sur un intervalle I , pour tous $a, b \in I$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

où F est une primitive de f .

Remarques. • Cette égalité est indépendante du choix de la primitive.

- Dans ce cas,

l'application $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a .

PROPOSITION

relation de Chasles

Soit $(a, b, c) \in I^3$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

PROPOSITION

croissance

Soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$. Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, deux fonctions continues telles que

$$\forall t \in [a, b], \quad f(t) \leq g(t).$$

Alors,

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

Remarques. • On en déduit l'inégalité triangulaire.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$.

$$\text{Si } a < b \text{ alors } \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

- La proposition précédente est une conséquence de la positivité de l'intégrale. Si f est continue, positive avec $a < b$ alors

$$\int_a^b f(t) dt > 0.$$

La proposition suivante précise le cas d'égalité.

PROPOSITION

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ est continue sur } [a,b], \\ \rightarrow f \text{ est positive sur } [a,b], \\ \rightarrow \int_a^b f(t) dt = 0, \end{array} \right.$ alors f est nulle sur $[a,b]$.

Calculs des intégrales

Pour calculer une intégrale, on utilise principalement trois méthodes. La recherche directe d'une primitive (voir tableau), l'intégration par parties et le changement de variable.

THÉORÈME**intégration par parties**

Considérons deux fonctions $u, v : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt.$$

THÉORÈME**changement de variables**

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} et $a, b \in J$. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : J \rightarrow I$ de classe \mathcal{C}^1 . Alors,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Application. Soit f continue sur $I = [-a, a]$. À l'aide du changement de variable $u = -t$, on prouve :

- Si f est une fonction paire sur I , alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
- Si f est une fonction impaire sur I , alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue est incertaine. On regroupe l'ensemble de tous les résultats possibles dans un ensemble Ω , appelé **l'univers des possibles**. Dans ce chapitre, Ω est un ensemble fini. Un **événement** A est une partie de Ω , c'est-à-dire $A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

DÉFINITION**probabilité sur un univers fini**

Une **probabilité** est une application \mathbb{P} à valeurs réelles définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant

$$\rightarrow \mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1];$$

$$\rightarrow \mathbb{P}(\Omega) = 1;$$

$$\rightarrow \mathbb{P} \text{ est } \mathbf{additive} : \text{pour tous événements incompatibles } A \text{ et } B \text{ (c'est-à-dire, } A \cap B = \emptyset),$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

La donnée du triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ définit un **espace probabilisé**.

Vocabulaire. Si $\mathbb{P}(A) = 0$, on dit que A est **négligeable**. Si $\mathbb{P}(A) = 1$, on dit que A est **presque sûr**.

Remarque. On a directement à partir de la définition : pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\bullet \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \quad \bullet \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \bullet A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

Un cas important. On dit qu'il y a **équiprobabilité** dans le cas où les événements élémentaires ont tous la même probabilité. Si $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ avec les éléments deux à deux distincts, alors la condition

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \text{ et l'additivité impose } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)} = \frac{1}{n},$$

$$\text{et plus généralement, } \forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

THÉORÈME**formule du crible**

Considérons trois événements A, B et C , alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$$\text{et } \mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

DÉFINITION**probabilité conditionnelle**

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Soit $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.

La **probabilité conditionnelle** de B sachant A est

$$\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Remarque. À partir de la définition, on prouve une première **formule de Bayes**.

$$\text{Si } \mathbb{P}(A) \neq 0 \text{ et } \mathbb{P}(B) \neq 0, \text{ alors } \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B) \cdot \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} \quad (\bullet).$$

PROPOSITION

formule des probabilités composées

Soient $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ des événements d'un espace probabilisé vérifiant $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$.
Alors $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \dots \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$.

- Un **système complet d'événements** d'un univers fini Ω est une famille finie $(A_n)_{n \in I}$ telle que

$$(\forall (i, j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \quad \text{et} \quad \bigcup_{n \in I} A_n = \Omega.$$

THÉORÈME

formule des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ un système complet d'événements non négligeables. Alors, pour tout événement B

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B) = \mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}_{A_1}(B) + \dots + \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}_{A_n}(B).$$

En reprenant la relation (\bullet) et la formule des probabilités totales, on obtient directement :

THÉORÈME

formule de Bayes (ou de probabilité des causes)

Soit $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ un système complet d'événements non négligeables.

$$\text{Pour } B \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ avec } \mathbb{P}(B) \neq 0, \quad \mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_k) \cdot \mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}_{A_i}(B)}.$$

DÉFINITION

indépendance

- Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$, on dit que A et B sont **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.
- A_1, A_2, \dots, A_n sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie non vide I de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Loi d'une variable aléatoire

DÉFINITION variable aléatoire réelle définie sur un univers fini

Étant donné un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, une **variable aléatoire réelle définie sur un univers fini** Ω est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Notation. Dans la suite, $X(\Omega)$ est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire.

PROPOSITION système complet associé à une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$. Alors

$$([X = x])_{x \in X(\Omega)} \text{ est un système complet d'événements.}$$

• Ω étant un univers fini, $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de \mathbb{R} . La **loi de probabilité** de X est la donnée de $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ (où les valeurs x_i sont deux à deux distinctes) et des valeurs

$$\mathbb{P}(X = x_1), \mathbb{P}(X = x_2), \dots, \mathbb{P}(X = x_m),$$

En particulier,

$$\sum_{i=1}^m \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

• On dit que deux variables aléatoires X et Y sont **égales en loi** si $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$ et

$$\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(Y = x_i).$$

Espérance et variance

DÉFINITION espérance sur un univers fini

Soit X une variable aléatoire réelle et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$. L'**espérance** de X est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) = \sum_{k=1}^m x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

THÉORÈME**de transfert**

Soit X une variable aléatoire et $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^m \varphi(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Remarque. Le théorème de transfert permet le calcul de $\mathbb{E}(\varphi(X))$ en utilisant φ et la loi de X sans passer par la loi de $\varphi(X)$.

PROPOSITION**propriétés de l'espérance**

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé

- **linéarité** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
- **croissance** Si $X \leq Y$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.

DÉFINITION**variance et écart-type**

Soit X une variable aléatoire.

- On appelle **variance** d'une variable aléatoire X , la quantité $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$.
- On appelle **écart-type** de X , la quantité $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Remarques. $\sigma(X)$ est bien défini car $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geq 0$. Donc, par croissance de l'espérance, $\mathbb{V}(X) \geq 0$.

L'écart-type permet de quantifier les écarts par rapport à la moyenne. Un écart-type fort traduit un « grand éloignement » des valeurs de X par rapport à sa moyenne.

PROPOSITION**propriétés de la variance**

Soit X une variable aléatoire finie.

- $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si X est une application presque sûrement constante;
- Pour tous réels a, b ,

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X) \quad ; \quad \sigma(aX + b) = |a| \sigma(X).$$

Une variable aléatoire X est dite **centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$. Elle est dite **réduite** si $\sigma(X) = 1$.

Soit X une variable aléatoire. La variable aléatoire $Y = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée, réduite.

En pratique, on calcule la variance avec :

THÉORÈME**formule de KOENIG-HUYGENS**

Soit X une variable aléatoire, $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.

Dans la suite, Ω est un univers fini et X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Variable aléatoire certaine

X est une **variable aléatoire certaine**, ou **presque sûrement constante** s'il existe un réel c tel que $\mathbb{P}(X = c) = 1$. Alors, $\mathbb{E}(X) = c$ et $\mathbb{V}(X) = 0$.

Loi de Bernoulli

DÉFINITION

loi de Bernoulli

Soit $p \in [0, 1]$. La variable aléatoire X suit une **loi de BERNOULLI**, noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(X = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

Exemple. Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ alors la fonction indicatrice $\mathbf{1}_A$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

PROPOSITION

espérance et variance d'une loi de Bernoulli

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathbb{V}(X) = pq$.

Exemples de modélisation.

- Le résultat d'un lancer d'une pièce de monnaie équilibrée (1 pour pile, 0 face) suit une loi $\mathcal{B}(1/2)$.
- Plus généralement, la variable aléatoire associée à une expérience aléatoire ayant seulement deux issues (0 pour échec, 1 pour succès) suit une loi $\mathcal{B}(p)$ où p est la probabilité de succès.

Loi binomiale

DÉFINITION

loi binomiale

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$. On dit que X suit la **loi binomiale** de paramètres n et p , notée $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ si

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

PROPOSITION**espérance et variance d'une loi binomiale**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, $\mathbb{E}(X) = np$ et $\mathbb{V}(X) = npq$.

Exemples de modélisation.

- On lance n fois un dé et X compte le nombre de « 6 » obtenus. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,1/6)$.
- Plus généralement, lorsqu'on répète n expériences de Bernoulli (à deux issues : succès/échec) identiques, mutuellement indépendantes, dont la probabilité de succès est p , la variable X qui compte le nombre de succès suit alors une loi binomiale de paramètre (n,p) .

Loi uniforme**DÉFINITION****loi discrète uniforme**

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ avec $a < b$.

La variable aléatoire X suit une **loi discrète uniforme sur** $\llbracket a,b \rrbracket$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$, si

$$X(\Omega) = \llbracket a,b \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket a,b \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$

Remarque. Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$ avec $n = b - a + 1$, alors $Y = X + a - 1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a,b \rrbracket)$.

PROPOSITION**espérance et variance d'une loi uniforme**

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n \rrbracket)$, $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

Exemples de modélisation.

- Le résultat d'un lancer d'un dé équilibré à 6 faces suit une loi uniforme sur $\llbracket 1,6 \rrbracket$.
- Une urne contenant n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n . On tire au hasard une boule. Le numéro obtenu suit une loi uniforme sur $\llbracket 1,n \rrbracket$.

Généralités

Soit $\mathcal{F} = (u_1, \dots, u_n)$ une famille d'un espace vectoriel E .

- \mathcal{F} est libre est si la seule combinaison linéaire nulle est la combinaison linéaire à coefficients nuls.

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m, \quad \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \cdot u_i = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \lambda_i = 0 \right).$$

- \mathcal{F} est génératrice si tout vecteur de E peut s'obtenir comme combinaison linéaire à partir des vecteurs de \mathcal{F} . Autrement dit si,

$$\text{Pour tout vecteur } v \in E, \text{ il existe } \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ tels que } v = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot u_i.$$

- \mathcal{F} est une base, si elle est à la fois libre et génératrice.

DÉFINITION

dimension finie ou infinie

On dit qu'un espace vectoriel est de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Si ce n'est pas le cas, on dit qu'il est de **dimension infinie**.

THÉORÈME

de la base incomplète

Soient E de dimension finie, $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre et \mathcal{G} une famille génératrice de E . Il existe f_1, \dots, f_m des vecteurs de \mathcal{G} tels que la famille $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_m)$ soit une base de E .

Remarque. On en déduit que tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.

THÉORÈME

définition de la dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé la **dimension de l'espace vectoriel**, notée $\dim(E)$.

Exemples.

- \mathbb{R}^n , $\mathbb{R}_n[x]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

→ $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

La base canonique de \mathbb{R}^n est $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ avec le 1 en i -ème position;

→ $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.

La base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$ est $(1, x, \dots, x^n)$.

→ $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = n \times p$.

La famille des matrices élémentaires $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- L'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ est de dimension infinie.

PROPOSITION**cardinal d'une famille libre/génératrice**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et \mathcal{L}, \mathcal{G} deux familles.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \mathcal{L} \text{ est une famille libre,} \\ \rightarrow \mathcal{G} \text{ est une famille génératrice,} \end{array} \right.$

alors $\text{card}(\mathcal{L}) \leq \dim(E)$ et $\dim(E) \leq \text{card}(\mathcal{G})$.

PROPOSITION**cas d'égalité**

Soit E un espace de dimension finie.

- Une famille libre \mathcal{L} de cardinal $\dim(E)$ est une base.
- Une famille génératrice \mathcal{G} de cardinal $\dim(E)$ est une base.

Méthode. Lorsqu'on connaît la dimension n d'un espace vectoriel E , alors pour montrer qu'une famille de n vecteurs de E est une base de E , on utilise, dans la plupart des cas, le premier point. On montre donc la famille est libre.

Dimension d'un sous-espace vectoriel**PROPOSITION****inclusion**

Soit E un espace vectoriel.

- Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E est de dimension finie.

Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E de dimension finie.

- Si $F \subset G$, alors $\dim(F) \leq \dim(G)$.
- Si $F \subset G$ et $\dim(F) = \dim(G)$, alors $F = G$.

Remarque. Le dernier énoncé est particulièrement utile pour établir des égalités entre espaces.

DÉFINITION**rang d'une famille**

Soit $(\varepsilon_i)_{i \in I}$ une famille finie d'un espace vectoriel. **Le rang de la famille** est la dimension de l'espace engendré par celle-ci :

$$\text{rg}((\varepsilon_i)_{i \in I}) = \dim(\text{Vect}(\varepsilon_i)_{i \in I}).$$

Exemple. Le rang d'une famille constituée de deux vecteurs est :

- 0 si les deux vecteurs sont nuls ;
- 1 si l'un des deux vecteurs est non nul et que les deux sont colinéaires ;
- 2 si les deux vecteurs sont non colinéaires.

Compléments sur les espaces vectoriels

Sommes et supplémentaires

DÉFINITION

somme de sous-espaces, somme directe

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

- Le **sous-espace somme** est défini par

$$F + G = \{u + v \mid (u, v) \in F \times G\}.$$

- On dit que F et G sont en **somme directe**, notée $F \oplus G$, si

$$F \cap G = \{0_E\}.$$

Remarque. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant F et G .

PROPOSITION

unicité de la décomposition

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont **équivalentes**.

- F et G sont en somme directe.
- Tout vecteur $u \in F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$u = u_F + u_G \quad \text{avec} \quad u_F \in F, \quad u_G \in G.$$

DÉFINITION

supplémentaire

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

On dit que F et G sont **supplémentaires** si tout vecteur de E se décompose de façon unique en une somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G . C'est-à-dire

$$\forall w \in E, \quad \exists!(u, v) \in F \times G, \quad w = u + v.$$

Attention. Il n'y a pas unicité du supplémentaire.

Il ne faut pas confondre supplémentaire et complémentaire.

Remarque. La méthode Analyse-Synthèse est particulièrement adaptée à cette définition.

PROPOSITION**caractérisation des supplémentaires**

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E . Les propriétés suivantes sont **équivalentes**.

- F et G sont supplémentaires;
- $F \cap G = \{0_E\}$ et $F + G = E$.

On a donc : F et G sont supplémentaires si et seulement si $F \oplus G = E$.

Précisions en dimension finie**PROPOSITION****existence d'un supplémentaire**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

PROPOSITION**cas de la somme directe**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .
Si F et G sont en somme directe, alors

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G).$$

Remarque. Soient $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{B}_G = (f_1, \dots, f_r)$ des bases respectivement de F et G .

- Si F et G sont en somme directe, alors $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_r)$ est une base de $F \oplus G$.
- La réciproque, moins utilisée, est aussi vraie.

THÉORÈME**formule de Grassmann**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors,

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).$$

PROPOSITION**caractérisation des supplémentaires**

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .
Les trois énoncés suivants sont **équivalents**.

- F et G sont supplémentaires;
- $F + G = E$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$;
- $F \cap G = \{0_E\}$ et $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

Généralités

DÉFINITION

application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels. Une application $\varphi : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** si

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) \quad \text{et} \quad \varphi(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot \varphi(v).$$

Règles de calculs. Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors

- $\varphi(0_E) = 0_F$.
- Pour tout $(u, v) \in E$, $\varphi(u - v) = \varphi(u) - \varphi(v)$.
- Pour tous $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot u_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \cdot \varphi(u_k)$.

DÉFINITION

noyau et image

Le noyau et l'image d'une application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ sont définis par

$$\text{Ker}(\varphi) = \{u \in E \mid \varphi(u) = 0_F\} \quad \text{et} \quad \text{Im}(\varphi) = \varphi(E) = \{v \in F \mid \exists u \in E, \varphi(u) = v\}.$$

Remarque. L'image et le noyau sont deux sous-espaces vectoriels respectivement de E et de F .

THÉORÈME

injectivité et noyau

Une application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ est injective si et seulement si $\text{Ker}(\varphi) = \{0_E\}$.

Remarque. Rappelons qu'une application $\varphi : E \rightarrow F$ est surjective si et seulement si $\text{Im}(\varphi) = F$.

Les espaces $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$

PROPOSITION

structure de $\mathcal{L}(E, F)$

Soient E et F deux espaces vectoriels.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F , noté $\mathcal{L}(E, F)$, muni des lois usuelles

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{L}(E, F), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi + \psi : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ u & \mapsto & \varphi(u) + \psi(u) \end{cases} \quad \text{et} \quad \lambda \cdot \varphi : \begin{cases} E & \rightarrow & F \\ u & \mapsto & \lambda \cdot \varphi(u) \end{cases}$$

est un espace vectoriel.

PROPOSITION**composition**

Soient E, F, G trois espaces vectoriels et $\varphi : E \rightarrow F, \psi : F \rightarrow G$ deux applications linéaires. La composée $\psi \circ \varphi : E \rightarrow G$ est une application linéaire.

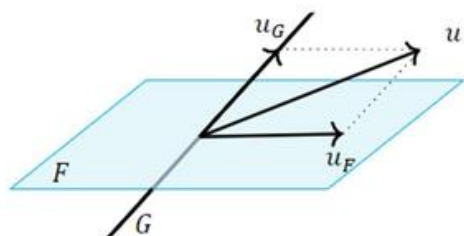
Vocabulaire. • On dit que deux endomorphismes φ, ψ **commutent** si $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi$.

- Lorsqu'une application linéaire $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective, on parle d'**isomorphisme**. Dans ce cas, on montre que son application réciproque φ^{-1} est linéaire.
- Lorsque $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note simplement $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$.
- Si φ est un endomorphisme de E , $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi, \varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi \dots$ sont parfaitement définies et linéaires. Les **puissances** de φ sont les applications linéaires :

$$\varphi^0 = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \varphi^n = \underbrace{\varphi \circ \dots \circ \varphi}_{n \text{ fois}}$$

Projecteurs**DÉFINITION****projecteur**

Soient E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires.



Ainsi, pour tout $u \in E$, il existe une unique décomposition $u = u_F + u_G$ où $(u_F, u_G) \in F \times G$. On pose

$$p : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ u & \mapsto & u_F. \end{cases}$$

Cette application est linéaire, elle est appelée le **projecteur** sur F parallèlement à G .

Remarque. On montre alors que p est un projecteur sur $F = \text{Im}(p)$ parallèlement à $G = \text{Ker}(p)$. En particulier, le noyau et l'image d'un projecteur sont supplémentaires dans E .

$$\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E.$$

Pour déterminer $\text{Im}(p)$, on peut remarquer que, pour les projecteurs,

$$\text{Im}(p) = \{u \in E \mid p(u) = u\} = \text{Ker}(p - \text{id}_E).$$

THÉORÈME**caractérisation d'un projecteur**

Soit $p : E \rightarrow E$ une application. Les propriétés suivantes sont **équivalentes**.

- p est un projecteur;
- p est linéaire et $p \circ p = p$.

Applications linéaires en dimension finie

Dans toute cette partie, E et F sont deux espaces vectoriels avec E de dimension finie.

Familles d'images de vecteurs

PROPOSITION

image et base

Soit f une application linéaire de E dans F .

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors $\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n)) = \text{Im}(f)$.

PROPOSITION

injectivité/surjectivité et famille libre/génératrice

Soit f une application linéaire de E dans F .

- Si f est injective et (e_1, \dots, e_p) une famille libre de E ,
alors la famille image $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille libre de F .
- Si f est surjective et (e_1, \dots, e_m) une famille génératrice de E ,
alors la famille image $(f(e_1), \dots, f(e_m))$ est une famille génératrice de F .

THÉORÈME

image d'une base

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

Si (e_1, \dots, e_n) est une base de E et (v_1, \dots, v_n) une famille de F , alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad f(e_i) = v_i.$$

Retenons l'idée suivante :

Se donner une application linéaire $E \rightarrow F$ revient à se donner les images d'une base de E .

Formule du rang et corollaires

DÉFINITION

rang d'une application linéaire

Le **rang** d'une application linéaire f est défini, lorsque cela a un sens, par

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im}(f)).$$

Remarque. Si E est de dimension finie alors le rang est bien défini. De plus, si $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une base de E , alors le rang de f est le rang de la famille $(f(e_i))_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$.

THÉORÈME

formule du rang

Soient E, F deux espaces vectoriels avec E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f) = \dim(E).$$

Rappel. $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ et surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$. La formule du rang donne alors la proposition suivante.

PROPOSITION

rang et injectivité/surjectivité/bijektivité

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On a les **équivalences** :

- f est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E)$.
- f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$.
- f est bijective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.

Remarque. Une solution pour montrer qu'un espace vectoriel E est de dimension finie et obtenir sa dimension est d'établir un isomorphisme entre E et un espace de dimension finie connue.

Par exemple, si E est l'espace vectoriel des suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2, alors on montre que $f : u \in E \mapsto (u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme. Donc $\dim(E) = 2$.

La proposition précédente se simplifie dans le cas où $E = F$.

PROPOSITION

cas des endomorphismes

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E .

Les énoncés suivants sont **équivalents**.

- f est injective;
- f est surjective;
- f est bijective.

Rappels

Matrices d'une famille, d'une application linéaire

Si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un espace vectoriel E , alors pour tout vecteur u de E , il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$u = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Dans ce cas, (x_1, \dots, x_n) sont les **coordonnées de u dans la base \mathcal{B}** . On définit la **matrice colonne des coordonnées de u dans la base \mathcal{B}** par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Généralisation. Soient $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ une famille de vecteurs de E et \mathcal{B} une base de E .

Pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $(x_{1,k}, x_{2,k}, \dots, x_{n,k})$ les coordonnées de f_k dans la base \mathcal{B} .

On appelle **matrice de la famille \mathcal{F} dans la base \mathcal{B}** , notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$, la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de \mathcal{F} dans la base \mathcal{B} :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \dots & x_{1,p} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x_{n-1,p} \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p-1} & x_{n,p} \end{bmatrix}.$$

DÉFINITION

cas particulier des matrices de passages

Considérons deux bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de E .

La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est appelée **matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{B}'** . On la note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

Application. Soit u un vecteur de E dont $U_{\mathcal{B}}$ et $U_{\mathcal{B}'}$ sont les matrices colonnes des coordonnées respectivement dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' alors

$$U_{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} U_{\mathcal{B}'}$$

DÉFINITION

matrice d'une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$, \mathcal{B}_F deux bases respectives de E et F . La **matrice de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ relativement aux bases \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F** est la matrice de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ dans la base \mathcal{B}_F :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)).$$

Elle est notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$.

Remarques. • La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$ a $\dim(E)$ colonnes et $\dim(F)$ lignes.

• Dans le cas d'un endomorphisme ($E = F$), on peut choisir $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$. On note simplement $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(f)$ au lieu de $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_E}(f)$.

Exemples. • La matrice de l'application identité $\text{Mat}_{\mathcal{B}_E}(\text{id}_E)$ est la matrice identité I_p .
 • Par contre, pour \mathcal{B} et \mathcal{B}' , deux bases de E , on retrouve

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\text{id}_E) = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Attention. L'ordre des indices n'est pas le même pour la matrice de passage et la matrice de l'identité.

THÉORÈME

isomorphisme

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie (notées respectivement p et n) et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F .

L'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{L}(E,F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \end{cases}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Rappel. Un isomorphisme est une application linéaire bijective.

Conséquences.

• À toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ correspond une unique application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n dont A soit la matrice dans les bases canoniques.

Elle est appelée **l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A** .

• En dimension finie, il ne peut avoir d'isomorphisme si la dimension de l'espace de départ ne coïncide pas avec la dimension de l'espace d'arrivée. Ainsi, l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F est aussi de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = pn = \dim(E) \times \dim(F).$$

Lien avec la multiplication matricielle

THÉORÈME

image d'un vecteur

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$.
 Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $u \in E$.

Si on note $\left| \begin{array}{l} \rightarrow U \text{ la matrice colonne des coordonnées de } u \text{ dans la base } \mathcal{B}_E, \\ \rightarrow V \text{ la matrice colonne des coordonnées de } f(u) \text{ dans la base } \mathcal{B}_F, \\ \rightarrow A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f), \text{ la matrice de l'application } f \text{ dans les bases } \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \end{array} \right.$

alors $AU = V$.

THÉORÈME

produit et composition

Soient E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$.
 Soient $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$. Alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f).$$

THÉORÈME

inversibilité et isomorphisme

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ deux bases respectives de E et F . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est un isomorphisme;
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$ est une matrice inversible.

Dans ce cas,
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(f^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)^{-1}.$$

Noyau, image et rang

DÉFINITION

noyau et image d'une matrice

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on définit

- **Le noyau,**

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0_{n,1}\}.$$

- **L'image,**

$$\text{Im}(A) = \{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid \exists X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), AX = Y\}.$$

- **Le rang** de A , noté $\text{rg}(A)$, est le rang de la famille de ses vecteurs colonnes dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Autrement dit, si $A = [C_1 \ C_2 \ \dots \ C_p]$ alors

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)).$$

Remarques. • On a toujours $\text{rg}(A) \leq p$.

- Le rang est invariant par transposition, autrement dit

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \quad \text{rg}(A) = \text{rg}({}^tA).$$

En particulier, on a aussi $\text{rg}(A) \leq n$.

PROPOSITION

rang d'une matrice et d'une application linéaire

Soient E, F deux espaces vectoriels de dimension finie et de bases respectives $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(f)$. Alors,

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(f).$$

Conséquences. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

À l'aide de la formule du rang et ses corollaires, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- A est inversible;
- $\text{rg}(A) = n$;
- $\text{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$.

Puissances, polynômes d'endomorphismes et de matrices

Rappelons que pour un endomorphisme f de E , les applications $f^2 = f \circ f$, $f^3 = f \circ f \circ f \dots$ sont parfaitement définies et linéaires. Les **puissances** de f sont les applications linéaires :

$$f^0 = \text{id}_E \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

Remarque. Comme pour les matrices, il existe une version de la formule du binôme de Newton dans le cas des endomorphismes.

Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ qui *commutent*. Alors pour tout entier naturel p ,

$$(f + g)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} f^i \circ g^{p-i}.$$

DÉFINITION

polynôme de matrice, d'endomorphisme

Soit $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme.

• Le **polynôme de matrice** $P(A)$ est défini par $P(A) = \sum_{i=0}^n a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Un polynôme P est **annulateur** de A si $P(A) = 0_n$.

• Le **polynôme d'endomorphisme** $P(f)$ est défini par $P(f) = \sum_{i=0}^n a_i f^i \in \mathcal{L}(E)$.

Un polynôme P est **annulateur** de f si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

PROPOSITION

Polynôme d'endomorphisme, de matrice

Soient E un espace vectoriel de dimension finie dont \mathcal{B} est une base et f un endomorphisme de E .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^k = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^k).$$

Plus généralement, pour tout $P \in \mathbb{R}[x]$,

$$P(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(f)).$$

Négligeable

Soient u et v deux suites réelles.

Si la suite v n'est pas nulle à partir d'un certain rang, prouver que u est négligeable devant v revient à montrer

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

On note $u_n = o(v_n)$, ou éventuellement $u_n = o_{+\infty}(v_n)$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$.

Exemples. Si $0 < a < b$, alors $a^n = o(b^n)$. Soient $q \in \mathbb{R}$, α et $\beta \in \mathbb{R}^+$.

$$|q| < 1 \Rightarrow q^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad \text{et} \quad |q| > 1 \Rightarrow n^\beta = o(q^n).$$

PROPOSITION

croissances comparées et factorielle

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{+2}$, $n^\alpha = o(\exp(\beta n))$, $\ln(n)^\alpha = o(n^\beta)$ et $\exp(an) = o(n!)$.

PROPOSITION

règles de calcul

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quatre suites réelles et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $u_n = o(v_n)$, alors $\lambda u_n = o(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et si $\lambda \neq 0$, alors $u_n = o(\lambda v_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(x_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n x_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$.

Équivalents

Soient u et v deux suites réelles.

Si la suite v n'est pas nulle à partir d'un certain rang, prouver que u est équivalent à v revient à montrer

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

On note $u_n \sim v_n$, ou $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} o(v_n)$.

PROPOSITION**équivalents usuels**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors

$$\ln(1 + u_n) \sim u_n, \quad e^{u_n} - 1 \sim u_n, \quad (1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n,$$

$$\sin(u_n) \sim u_n, \quad 1 - \cos(u_n) \sim \frac{u_n^2}{2} \quad \text{et} \quad \tan(u_n) \sim u_n.$$

Remarque. Ces équivalents découlent des limites usuelles sur les fonctions.

Attention. Il ne faut pas oublier la condition $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

PROPOSITION**produit, inverse, élévation à la puissance**

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quatre suites.

Si $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$.

Alors

- $a_n c_n \sim b_n d_n$.
- Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $a_n^\alpha \sim b_n^\alpha$.
- Si $c_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $d_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et

$$\frac{1}{c_n} \sim \frac{1}{d_n} \quad \text{et} \quad \frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{d_n}.$$

Attention. Il faut être très prudent avec les sommations et les compositions d'équivalents.

Équivalence et négligeabilité**PROPOSITION****équivalence et négligeabilité**

Soient u et v deux suites réelles. Alors, $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$.

Exemple. $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$ donne $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

PROPOSITION

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites réelles.

- Si $u_n \sim v_n$ et si $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ et si $w_n = o(v_n)$, alors $w_n = o(u_n)$.

Négligeable

Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Si g ne s'annule pas, prouver que f est **négligeable devant g en a** revient à montrer que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 0.$$

On note $f \underset{a}{=} o(g)$.

Exemples. • $f \underset{a}{=} o(1)$ si et seulement si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\rightarrow} 0$.

• $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $a \in I$ si et seulement si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) \underset{a}{=} f(a) + o(1).$$

• Si f est dérivable en a , alors $f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x - a) + o(x - a)$.

PROPOSITION

croissances comparées

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_*^{+2}$,

$$x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x}), \quad \ln(x)^\alpha \underset{+\infty}{=} o(x^\beta) \quad \text{et} \quad \ln(x) \underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right).$$

PROPOSITION

règles de calcul

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$.
- Si $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$ et si $\lambda \neq 0$, alors $f \underset{a}{=} o(g)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$, alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$, alors $fh \underset{a}{=} o(gh)$.

Équivalents

Si g ne s'annule pas, prouver que f est **équivalent** à g en a revient à montrer que $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} 1$.
On note $f \underset{a}{\sim} g$.

Attention. Certaines opérations ne sont pas stables par équivalence.

- La somme : $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2 \not\Rightarrow f_1 + f_2 \underset{a}{\sim} g_1 + g_2$.
- La composition : $f \underset{a}{\sim} g \not\Rightarrow h \circ f \underset{a}{\sim} h \circ g$.

PROPOSITION

équivalents usuels

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x, \quad \ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x, \quad 1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \tan(x) \underset{0}{\sim} x.$$

PROPOSITION

produit, puissance et quotient

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $fh \underset{a}{\sim} gh$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$, alors $f^\beta \underset{a}{\sim} g^\beta$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et que f et g ne s'annulent pas sur un voisinage de a , alors $\frac{1}{f} \underset{a}{\sim} \frac{1}{g}$.

Équivalence et négligeabilité

PROPOSITION

équivalence et négligeabilité

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et f, g deux fonctions définies sur un voisinage de a .

$$f \underset{a}{\sim} g \iff f - g \underset{a}{=} o(g).$$

PROPOSITION

liens entre équivalence et négligeabilité

Soient f, g et h trois fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $f \underset{a}{=} o(h)$, alors $g \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et si $h = \underset{a}{=} o(g)$, alors $h \underset{a}{=} o(f)$.
- Si $g \underset{a}{=} o(f)$, alors $f + g \underset{a}{\sim} f$.

DÉFINITION

série numérique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. La **série** associée à $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On dit que la série converge si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie.

Attention. Il ne faut pas confondre

- $\sum u_n$: la série de terme général u_n ;
- $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$: la somme partielle d'ordre n de la série ;
- $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$: la somme de la série, i.e. sous réserve de convergence, la limite des sommes partielles ;
- $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$: le reste d'ordre n de la série si cette dernière est convergente.

Remarques. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = S_n - S_{n-1}$.

- Si la série de terme général u_n converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

La série $\sum 1/n$ montre que la réciproque est fautive.

- Soient u et v deux suites réelles telles que les séries de termes généraux u_n et v_n convergent. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge et

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=n_0}^{+\infty} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k + \mu \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

THÉORÈME

convergence absolue

On dit que la série de terme général u_n **converge absolument** si la série de terme général $|u_n|$ converge. Si une série converge absolument, alors elle converge.

Remarque. La réciproque est fautive.

Séries de références

THÉORÈME

séries géométriques, série exponentielle

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Les séries de terme généraux x^k , kx^{k-1} et $k(k-1)x^{k-2}$ sont convergentes si et seulement si $|x| < 1$. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

- Pour tout réel x , la série de terme général $\frac{x^k}{k!}$ est convergente et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$.

THÉORÈME

série de Riemann

On appelle **série de Riemann**, une série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Cette série est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Critères de convergence pour les séries à termes positifs

PROPOSITION

critère de comparaison

Soient u et v deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang, $0 \leq u_n < v_n$.

- Si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n aussi.
- Si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n aussi.

THÉORÈME

critères de négligeabilité et d'équivalence

Soient u et v deux suites réelles.

- Si $\left| \begin{array}{l} \rightarrow u_n = o(v_n) \\ \rightarrow v \text{ est positive à partir d'un certain rang} \\ \rightarrow \text{la série de terme général } v_n \text{ converge,} \end{array} \right.$

alors la série de terme général u_n converge.

- Si $\left| \begin{array}{l} \rightarrow u_n \sim v_n \\ \rightarrow v \text{ est positive à partir d'un certain rang,} \end{array} \right.$

alors les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Remarque. On a des critères analogues si v est négative à partir d'un certain rang.

Définitions et règles de calculs

DÉFINITION

intégrale généralisée en b

Soit f une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$.

L'intégrale généralisée (ou impropre) de f sur $]a, b[$ est notée $\int_a^b f(t) dt$. Elle est dite **convergente** si $\int_a^x f(t) dt$ admet une limite finie lorsque x tend vers b avec $x < b$. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \int_a^x f(t) dt.$$

Si la limite n'existe pas ou qu'elle est infinie, l'intégrale est dite **divergente**.

Remarques. • La définition s'étend aux fonctions continues sur $]a, b]$ avec $-\infty \leq a < b < +\infty$.

• Si f est une fonction continue sur un intervalle $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

L'intégrale généralisée de f sur $]a, b[$ est notée $\int_a^b f(t) dt$. Elle est dite **convergente** si pour un réel $c \in]a, b[$, les intégrales généralisées $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont convergentes. Dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

• Sous réserve de convergence, les propriétés de linéarité, de croissance de l'intégrale, l'inégalité triangulaire et la relation de Chasles sont encore valables. Par contre, pour effectuer une intégration par parties, on se ramène à un segment.

THÉORÈME

changement de variable

Soit f continue sur un intervalle $]a, b[$.

Si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection croissante de classe \mathcal{C}^1 , alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(u) du$ et $\int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt$ sont de même nature. Dans le cas de convergence,

$$\int_a^b f(u) du = \int_\alpha^\beta \varphi'(t) f(\varphi(t)) dt.$$

Convergence absolue

DÉFINITION

$\int_a^b f(t) dt$ est dite **absolument convergente** si $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

THÉORÈME

convergence absolue

Si $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Critères de convergence

À l'aide du théorème de convergence monotone, on montre que, pour $f : [a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si l'application $x \in [a; b[\mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

PROPOSITION

critère de comparaison et de négligeabilité

Soient f, g deux fonctions continues définies sur $[a, b[$.

- Si
 - $\rightarrow f$ et g sont positives,
 - \rightarrow pour tout $x \in [a, b[$, $f(x) \leq g(x)$,
 - $\rightarrow \int_a^b g(t) dt$ est convergente,
 alors $\int_a^b f(t) dt$ est aussi convergente.
- Si
 - $\rightarrow g$ est positive sur un voisinage de b ;
 - $\rightarrow f \underset{b^-}{\equiv} o(g)$;
 - $\rightarrow \int_a^b g(t) dt$ est convergente,
 alors $\int_a^b f(t) dt$ est aussi convergente.

PROPOSITION

critère d'équivalence

Soient f, g deux applications continues définies sur $[a, b[$.

- Si
 - $\rightarrow f$ et g sont de signe constant sur un voisinage de b ,
 - $\rightarrow f \underset{b^-}{\sim} g$,

alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont de même nature.

Remarque. En pratique, on compare souvent aux **intégrales de Riemann**.

- L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente en 0 si et seulement si $\alpha < 1$;
- L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

On définit la dérivée n -ième par récurrence.

DÉFINITION**dérivée d'ordre supérieur sur I , en a**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

- f est n fois dérivable sur I si la dérivée $(n-1)$ -ième est dérivable. On note

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})' \quad \text{et} \quad f^{(0)} = f.$$

- De plus, f est n fois dérivable en a si f est $n-1$ fois dérivable dans un voisinage de a et $f^{(n-1)}$ est dérivable en a .

Remarque. La dérivée $(n+1)$ -ième d'une fonction polynomiale de degré au plus n est nulle.

Notation. Pour $n \in \mathbb{N}$,

- $\mathcal{D}^n(I)$ est l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I ;
- $\mathcal{C}^n(I)$ est l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur I et dont la dérivée n -ième est continue;
- $\mathcal{C}^\infty(I)$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables sur I .

Par exemple, les fonctions polynomiales ainsi que la fonction exponentielle appartiennent à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

On a la suite d'inclusions :

$$\mathcal{C}^\infty(I) \subset \dots \subset \mathcal{D}^{n+1}(I) \subset \mathcal{C}^n(I) \subset \mathcal{D}^n(I) \subset \dots \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I).$$

THÉORÈME**linéarité - formule de Leibniz**

Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur I et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors la somme $\lambda f + \mu g$ et le produit $f \cdot g$ sont aussi n fois dérivables sur I avec

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

et

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Remarque. Si f est n fois dérivable sur I et si f ne s'annule pas sur I , alors $\frac{1}{f}$ est n fois dérivable sur I .

THÉORÈME**composition**

Soient I, J deux intervalles de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ tels que $f(I) \subset J$.

Si f et g sont n fois dérivables (respectivement sur I et J), alors $g \circ f$ est n fois dérivable sur I .

THÉORÈME**formule de Taylor avec reste intégral**

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ et $a \in I$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in I$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Exemple. Si on applique cette formule à une fonction polynomiale P (de classe \mathcal{C}^∞) où $n > \deg(P)$,

$$P(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

THÉORÈME**inégalité de Taylor-Lagrange**

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, $a, x \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Si $|f^{(n+1)}|$ est majorée sur I , on a

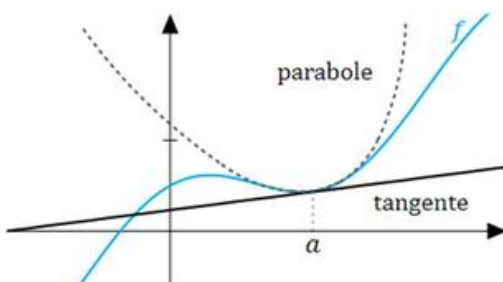
$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \leq \sup_{t \in [x,a] \cup [a,x]} |f^{(n+1)}(t)| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Application. On démontre que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

THÉORÈME**formule de Taylor-Young**

Soient $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$. On a, au voisinage de a ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n).$$

**Exemples.**

- $n = 1$

équation de la tangente

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}^{\text{équation de la tangente}} + o(x-a).$$

- $n = 2$

équation d'une parabole si $f''(a) \neq 0$

$$f(x) = \overbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}^{\text{équation d'une parabole si } f''(a) \neq 0} + o((x-a)^2).$$

Généralités

DÉFINITION

développement limité d'ordre n en x_0

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

On dit que f possède un **développement limité d'ordre n en x_0** (abrégé par $DL_n(x_0)$) s'il existe $n + 1$ réels a_0, a_1, \dots, a_n et une application $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \quad \text{et} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0.$$

Autrement dit, f admet un $DL_n(x_0)$ s'il existe $P_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x_0}{\equiv} P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n).$$

Exemples. • Lorsque f est dérivable en x_0 alors f admet un $DL_1(x_0)$ et

$$f(x) \underset{x_0}{\equiv} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0).$$

• Plus généralement, si $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$, alors, d'après la formule de Taylor-Young, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité à l'ordre n en tout point de I .

Par le changement de variable $h = x - x_0$, on obtient

$$f(x_0 + h) \underset{0}{\equiv} f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + o(h^n).$$

• Dans la suite, P_n sera la partie régulière du développement limité.

THÉORÈME

unicité du développement limité

Si on peut trouver $(a_i)_{i=0, \dots, n}$ et $(b_i)_{i=0, \dots, n}$ tels que pour tout réel x dans un voisinage de x_0 ,

$$f(x) \underset{x_0}{\equiv} \sum_{i=0}^n a_i (x - x_0)^i + o((x - x_0)^n) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x_0}{\equiv} \sum_{i=0}^n b_i (x - x_0)^i + o((x - x_0)^n),$$

alors pour tout indice i ,

$$a_i = b_i.$$

PROPOSITION

combinaison linéaire

Si f et g , définies sur un voisinage de x_0 , admettent un $DL_n(x_0)$ de partie régulière respective P_n et Q_n alors $\lambda f + \mu g$ admet un $DL_n(x_0)$ de partie régulière $\lambda P_n + \mu Q_n$ (où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

PROPOSITION

produit

Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de 0 admettant un $DL_n(0)$ de partie régulière respective P_n et Q_n , alors $f \cdot g$ admet un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est la troncature à l'ordre n du produit $P_n \cdot Q_n$ (c'est-à-dire que l'on ne gardera que les termes de degré inférieur ou égal à n).

Attention. Cet énoncé n'est valable qu'au voisinage de 0. Dans les autres cas, pour un voisinage de x_0 , on effectue un changement de variable préalable $h = x - x_0$.

Développements limités usuels au voisinage de 0

Soit $n \in \mathbb{N}$.

• DLs, fractions et puissances

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n);$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n).$$

Exemple. On obtient le développement limité d'ordre 4 de $\sqrt{1+x}$ en utilisant le premier développement limité avec $\alpha = 1/2$:

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + o(x^5).$$

• DLs, exponentielle et logarithme

$$e^x \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + o(x^n).$$

• DLs des fonctions trigonométriques

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \quad \text{et} \quad \sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6).$$

Généralisations :

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

Allure du graphe d'une fonction au voisinage d'un point

Partons d'une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Soit $a \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Young, pour tout x dans un voisinage de a ,

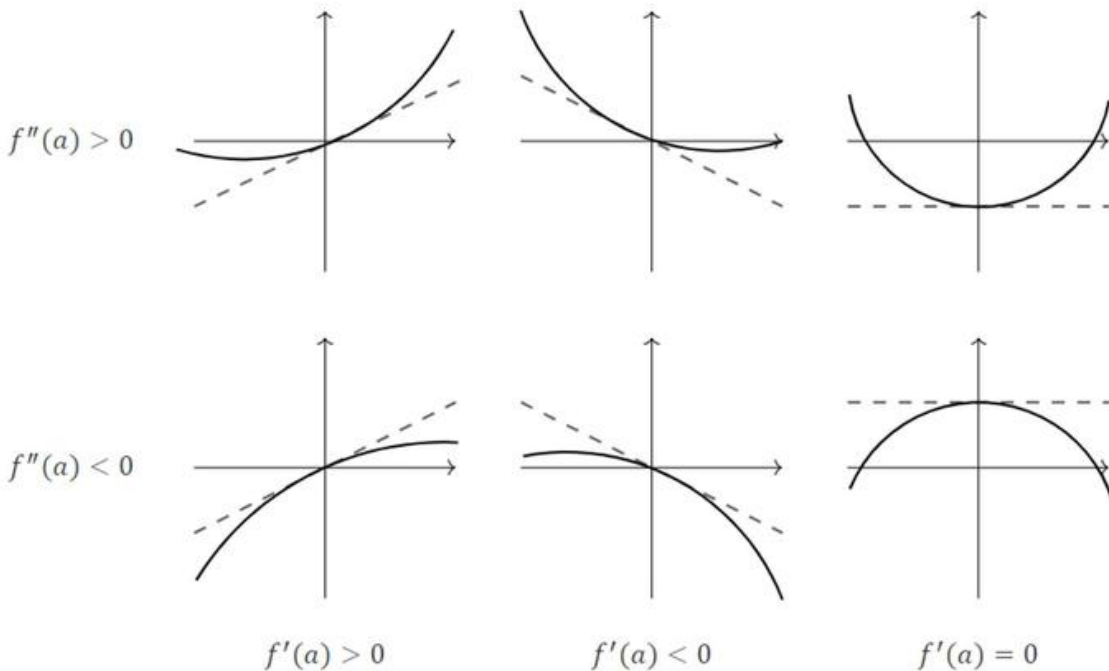
$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + o_a((x - a)^2).$$

Graphiquement, au voisinage de a , la courbe représentative de f est « proche » de la courbe d'équation

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

Lorsque $f''(a) \neq 0$, la courbe est une parabole.

Distinguons suivant le signe de $f'(a)$ et $f''(a)$. En gras, la parabole, en pointillés, la tangente.



Extrema

THÉORÈME

existence d'un maximum et d'un minimum

Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans \mathbb{R} .

L'ensemble image $f([a,b]) = \{f(x) ; x \in [a,b]\}$ est un segment $[m,M]$. En particulier, le minimum et le maximum de f sont bien définis. On note alors

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

THÉORÈME

extremum et point critique

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Si

- f admet un extremum local en a ;
- a appartient à un intervalle ouvert dans I ;
- f est dérivable en a .

Alors $f'(a) = 0$.

On dit alors que a est un **point critique** de f .

Remarques. • Il faut bien distinguer les hypothèses sur l'intervalle de définition de f .

→ Dans le premier théorème, I est un intervalle fermé et bornée (segment).

→ Dans le second, on se place sur un ouvert.

• Pour déterminer les éventuels extrema sur un ouvert, on calcule, dans un premier temps, les points critiques. Dans un deuxième temps, on vérifie si ces derniers sont bien des extrema locaux ou non, des extrema globaux ou non.

THÉORÈME

condition suffisante pour un extremum

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a appartenant à un intervalle ouvert inclus dans I .

On suppose que a est un point critique de la fonction et $f''(a) \neq 0$.

Alors la fonction admet un extremum local en a . Plus précisément :

- Si $f''(a) > 0$ alors f admet un **minimum local** en a .
- Sinon $f''(a) < 0$ alors f admet un **maximum local** en a .

Remarque. Nous renvoyons aux graphes de la page précédente pour une illustration de ces résultats.

Convexité, concavité

DÉFINITION

fonctions convexes/concaves

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est une fonction **convexe** si

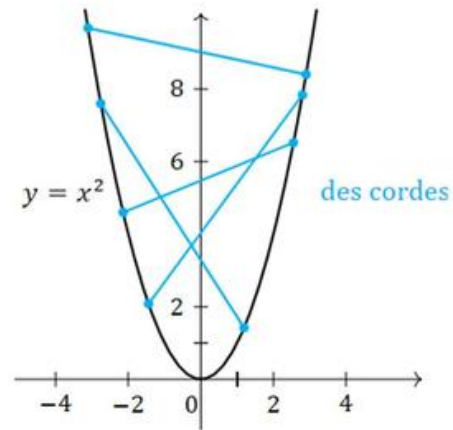
$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall (t_1,t_2) \in [0,1]^2 \quad \text{tels que} \quad t_1 + t_2 = 1, \quad f(t_1x + t_2y) \leq t_1f(x) + t_2f(y).$$

- f est une fonction **concave** si

$$\forall (x,y) \in I^2, \quad \forall (t_1,t_2) \in [0,1]^2 \quad \text{tels que} \quad t_1 + t_2 = 1, \quad f(t_1x + t_2y) \geq t_1f(x) + t_2f(y).$$

Remarques.

- La fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. On peut donc se limiter à des énoncés dans le cas convexe.
- Le graphe d'une fonction convexe (respectivement concave) est en dessous (respectivement au-dessus) de n'importe laquelle de ses cordes.
- Ci-contre, la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$ est convexe.



THÉORÈME

généralisation de l'inégalité de convexité

Considérons une fonction convexe $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \quad \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n, \quad \text{tels que} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1,$$

on a

$$f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

THÉORÈME

caractérisation des fonctions convexes \mathcal{C}^1

Soit f une application de classe \mathcal{C}^1 d'un intervalle I dans \mathbb{R} . Les propriétés suivantes sont **équivalentes**.

- f est convexe sur I .
- f' est une fonction croissante.
- La courbe représentative de f est située au-dessus de chacune de ses tangentes. C'est-à-dire, $\forall a \in I, \quad \forall x \in I, \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Exemples. \exp' et \ln' sont respectivement croissante et décroissante, les fonctions exponentielle et logarithme sont respectivement convexe et concave. En considérant les tangentes en 0 et 1, on démontre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \ln(t) \leq t - 1.$$

THÉORÈME**caractérisation des fonctions convexes \mathcal{C}^2**

Soit f une application de classe \mathcal{C}^2 d'un intervalle I dans \mathbb{R} . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- f est convexe sur I ;
- f'' est une fonction positive.

THÉORÈME**condition suffisante pour un minimum global**

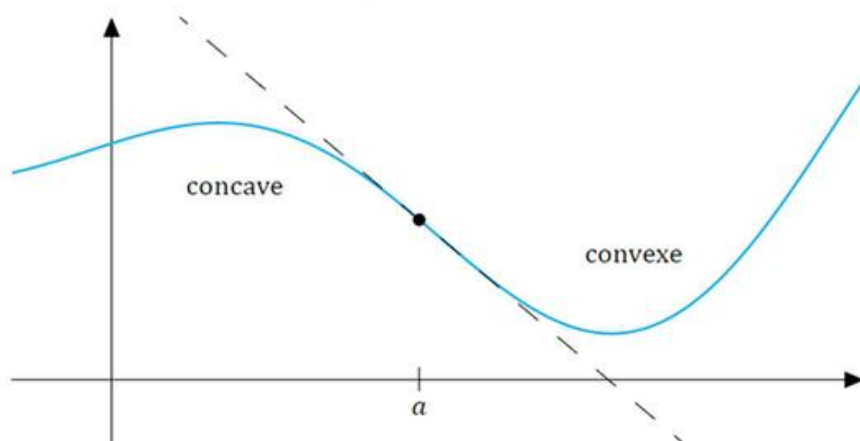
Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et a appartenant à un intervalle ouvert inclus dans I .

- | | |
|----|--|
| Si | <ul style="list-style-type: none"> → f est convexe; → f est dérivable en a; → a est un point critique ($f'(a) = 0$); |
|----|--|

Alors, f admet un minimum global en a .

Remarque. On pourra comparer ce résultat avec le troisième énoncé de ce rappel de cours (condition suffisante pour un extremum). La convexité permet d'avoir un résultat global.

Lorsqu'il y a un changement de convexité, on parle de point d'inflexion.

**DÉFINITION****point d'inflexion**

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2(I)$ et a un point intérieur à I .

On dit que a est un **point d'inflexion** si $f''(a) = 0$ et qu'il y a un changement de signe de f'' au voisinage de a .

Ce chapitre complète le chapitre 17 (rappel page 600) et l'étend au cas où l'univers des possibles Ω est infini.

Définitions

On représente le résultat d'une expérience aléatoire comme un élément ω de l'ensemble Ω de tous les résultats possibles.

Dans la suite, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est un ensemble des événements.

- $\Omega \in \mathcal{A}$.
- \mathcal{A} est stable par passage au complémentaire : $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
- \mathcal{A} est stable par union et intersection finie ou dénombrable : si I est fini ou dénombrable et si pour tout $i \in I, A_i \in \mathcal{A}$, alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}.$$

DÉFINITION

l'application probabilité

Soient Ω , un univers des possibles et \mathcal{A} un ensemble d'événements.

Une **probabilité** est une application \mathbb{P} réelle définie sur \mathcal{A} vérifiant les conditions suivantes.

- $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$;
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- \mathbb{P} est σ -additive :
Pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ finie ou dénombrable d'événements deux à deux disjoints,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A)$ est appelée **la probabilité de l'événement A** .

Remarque. Dans le cas où l'ensemble des indices I est dénombrable (par exemple, \mathbb{N}), la définition suppose la convergence de la série $\sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$.

Vocabulaire. • La donnée d'un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où Ω est un univers des possibles, \mathcal{A} un ensemble d'événements sur Ω et \mathbb{P} une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) , définit un **espace probabilisé**.

- Un événement de probabilité nulle est dit **négligeable**.
- Un événement de probabilité 1 est dit **presque-sûr**.

Les théorèmes

THÉORÈME

de la limite monotone

Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'événements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** pour l'inclusion (c'est-à-dire, $\forall i \in \mathbb{N}, A_i \subset A_{i+1}$),

Alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

- Si la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** pour l'inclusion ($\forall i \in \mathbb{N}, B_{i+1} \subset B_i$),

Alors,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(B_n).$$

Conséquence. Si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'événements alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n C_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} C_k\right) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n C_k\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} C_k\right).$$

Les définitions et formules vues au premier semestre s'étendent au cas général.

Définition de la probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées ... Voir page 600

Remarque. Si A est un événement non négligeable, alors $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_A)$ est un espace probabilisé.

THÉORÈME

formules des probabilités totales

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B ,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n \cap B) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}_{A_n}(B).$$

THÉORÈME

formules de Bayes (ou de probabilité des causes)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements non négligeables. Pour tout événement B ,

$$\mathbb{P}_B(A_k) = \frac{\mathbb{P}(A_k \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_k) \cdot \mathbb{P}_{A_k}(B)}{\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(B)}.$$

DÉFINITION

suite infinie d'événements mutuellement indépendants

Une suite infinie d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **mutuellement indépendante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(A_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une suite finie d'événements mutuellement indépendants.

Variable discrète et loi

DÉFINITION

variable aléatoire discrète

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une **variable aléatoire discrète** est une application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $X(\Omega) = \{x_i ; i \in I\}$ où I est une partie finie ou infinie de \mathbb{N} ;
- pour tout $i \in I$, $[X = x_i]$ est un événement.

Vocabulaire. Donner la **loi** d'une variable aléatoire (v.a) X signifie donner l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X et pour chaque $x \in X(\Omega)$, la probabilité $\mathbb{P}(X = x)$.

Remarque. À une v.a discrète X est associé le système complet d'événements $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$.

En particulier, il vient

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

DÉFINITION

indépendance

• Soient X et Y deux v.a discrètes sur un même espace probabilisé. On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y).$$

• Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont **mutuellement indépendantes** si

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n [X = x_i]\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i).$$

Espérance et variance

DÉFINITION

espérance

Soit X une variable aléatoire dénombrable. On note $X(\Omega) = \{x_k ; k \in \mathbb{N}^*\}$. X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $x_k \mathbb{P}(X = x_k)$ est absolument convergente. Alors on définit l'espérance de X par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \mathbb{P}(X = x_k).$$

Remarques. • Cette somme est indépendante du choix de l'indexation.

• L'espérance est linéaire.

Pour tous réels λ, μ , toutes v.a X et Y admettant une espérance, $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y).$$

PROPOSITION

existence par domination

Soient X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur un même espace probabilisé.

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow 0 \leq |X| \leq Y, \\ \rightarrow Y \text{ admet une espérance,} \end{array} \right.$$

alors, X admet une espérance et $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(Y)$.

Attention. Il ne faut pas confondre l'énoncé précédent avec la propriété de croissance de l'espérance

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow X \text{ admet une espérance;} \\ \rightarrow Y \text{ admet une espérance;} \\ \rightarrow X \leq Y \end{array} \right. \quad \text{alors } \mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

THÉORÈME

formule de transfert

Soit X une v.a discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_k; k \in I\}$.

Soit g définie sur $X(\Omega)$. La variable aléatoire $g(X)$ possède une espérance si et seulement si la série de terme général $g(x_k) \mathbb{P}(X = x_k)$ est absolument convergente, et dans ce cas

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_{k \in I} g(x_k) \mathbb{P}(X = x_k).$$

DÉFINITION

variance

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La **variance** de X est, sous réserve de convergence, définie par

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

PROPOSITION

propriétés et formule de Koenig-Huygens

Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ possédant une variance.

- Une variable aléatoire est presque sûrement constante si et seulement si sa variance est nulle.
- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X).$$

- Formule de Koenig-Huygens

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Rappels

Conséquence. Soit X une v.a discrète admettant une espérance. Notons $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$, l'écart-type.

Alors $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une v.a centrée réduite.

C'est-à-dire, une v.a d'espérance nulle et de variance 1.

Méthode. En général, on calcule la variance à l'aide de la formule de Kœnig-Huygens.

→ Avant la variance, on calcule l'espérance, puis $\mathbb{E}(X)^2$.

→ À l'aide du théorème de transfert, sous réserve de convergence absolue, on calcule

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k \in I} x_k^2 \mathbb{P}(X = x_k).$$

Fonction de répartition

DÉFINITION

fonction de répartition

La fonction F_X définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$$

est la **fonction de répartition** de la variable aléatoire X .

PROPOSITION

propriétés de la fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle et F_X sa fonction de répartition. Alors,

- F_X est croissante.
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} F_X(t) = 1$.
- Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $\mathbb{P}(X \in]a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$.

Cette page complète le rappel sur les lois usuelles finies, page 604.

DÉFINITION**loi géométrique $\mathcal{G}(p)$**

Soit $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$.

On dit que la variable aléatoire X suit une **loi géométrique** de paramètre p , notée $\mathcal{G}(p)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1}p = q^{k-1}p.$$

PROPOSITION**espérance et variance de $\mathcal{G}(p)$**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors X admet une espérance et une variance avec

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Modélisation. Une loi géométrique modélise un premier temps d'arrêt.

Si X renvoie le rang du premier succès dans une succession d'expériences de Bernoulli identiques, mutuellement indépendantes, alors X suit une loi géométrique où p est la probabilité de succès d'une expérience de Bernoulli.

DÉFINITION**loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$**

Soit λ un réel strictement positif.

On dit que la variable aléatoire X suit **une loi de Poisson** de paramètre λ , notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

PROPOSITION**espérance et variance de $\mathcal{P}(\lambda)$**

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors X admet une espérance et une variance avec

$$\mathbb{E}(X) = \lambda \quad \text{et} \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Modélisation. On utilise souvent la loi de Poisson pour dénombrer les « événements rares ».

Lois, lois marginales, indépendance

DÉFINITION

loi d'un couple

La loi (*conjointe*) d'un couple (X, Y) de variables aléatoires discrètes, c'est la donnée de la valeur de $\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

DÉFINITION

indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On dit que X et Y sont **indépendantes** si, pour tout couple $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \mathbb{P}(X = x) \cdot \mathbb{P}(Y = y).$$

Les lois de X et Y sont appelées **lois marginales**. Elles s'obtiennent à partir de la loi du couple en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y])$$

Une formule analogue donne la loi de Y .

Attention. Les lois marginales de X et Y ne permettent pas de retrouver la loi du couple.

Par exemple, soient X et Y deux variables de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Voici trois exemples donnant trois lois de couples différentes :

- 1) X et Y indépendantes; 2) $Y = X$; 3) $Y = 1 - X$.

Par contre si X et Y sont indépendantes, la loi du couple (X, Y) est connue.

Calculs d'espérance

La loi conjointe des deux variables permet le calcul, lorsqu'elle existe de l'espérance de $g(X, Y)$.

THÉORÈME

de transfert pour un couple de variables

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, et soit g une fonction à valeurs réelles définie sur le sous-ensemble $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ de \mathbb{R}^2 . Sous réserve de convergence absolue,

$$\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} g(x, y) \cdot \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]).$$

Voici deux applications de ce théorème.

THÉORÈME**linéarité de l'espérance**

Soient X et Y deux variables aléatoires, et soient λ et μ deux réels.
Si X et Y admettent une espérance, alors $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mu \mathbb{E}(Y).$$

THÉORÈME**espérance d'un produit de variables indépendantes**

Soient X et Y deux variables aléatoires.

Si X et Y | $\begin{array}{l} \rightarrow \text{admettent une espérance et} \\ \rightarrow \text{sont indépendantes,} \end{array}$

alors $X \cdot Y$ admet une espérance et $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$.

Loi d'une somme, exemples

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires.

Soit $Z = X + Y$. Alors $Z(\Omega) = \{x + y \mid (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)\}$. Pour tout $z \in Z(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ x+y=z}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = y]) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z-x \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}([X = x] \cap [Y = z - x]).$$

Si les variables X et Y sont indépendantes, alors la loi de Z est donnée par la formule du **produit de convolution discret**. Pour tout $z \in Z(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(Z = z) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z-x \in Y(\Omega)}} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = z - x).$$

THÉORÈME**stabilité des lois binomiale et de Poisson**

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes, supposées indépendantes.

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ et que $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ pour deux entiers m et n et pour un même réel $p \in [0, 1]$, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m + n, p).$$

- Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ pour deux réels strictement positifs λ et μ , alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

Loi du maximum, du minimum

Pour déterminer la loi de $\max(X, Y)$, on passe par la fonction de répartition.

Pour la loi du $T = \min(X, Y)$, on passe par la fonction d'anti-répartition ($\mathbb{P}(T > x)$).

>>> Voir exercice 6 du chapitre 34.

Convergences et approximations

Inégalités

PROPOSITION

inégalité de Markov

Soit Z une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow Z \text{ est positive,} \\ \rightarrow Z \text{ admet une espérance,} \end{array} \right.$

alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_*^+$,
$$\mathbb{P}(Z > \lambda) < \frac{\mathbb{E}(Z)}{\lambda}.$$

Remarque. Cette inégalité s'applique à toute variable aléatoire positive possédant une espérance. Elle peut se révéler bonne si Z prend des valeurs proches de λ . On a même égalité lorsque Z est la variable certaine égale à λ . Mais elle peut aussi donner une majoration par un réel plus grand que 1.

Conséquence. En considérant la variable $Z = (X - \mathbb{E}(X))^2$, on en déduit :

PROPOSITION

inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si X admet une variance, alors

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) < \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Remarque. Par passage au complémentaire, on obtient

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_*^+, \quad \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$

Théorèmes de convergence

THÉORÈME

loi faible des grands nombres

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Si
- les variables X_n sont mutuellement indépendantes,
 - et de même loi,
 - admettant une espérance m et une variance,

alors, si on note $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbb{P}(|\bar{X}_n - m| \geq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Remarque. Ce théorème est une conséquence directe de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Application. Considérons une expérience aléatoire, et un événement A de probabilité théorique p associé à cette expérience. Répétons une infinité de fois l'expérience de manière indépendante. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons X_i la v.a égale à 1 (resp. 0) en cas de succès (resp. échec) à la i -ème étape.

$\bar{X}_n = \frac{\text{Nbre de succès sur } n \text{ étapes}}{n : \text{le nombre d'étapes}}$ est la fréquence empirique d'apparition de l'événement A .

D'après la loi faible des grands nombres,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}(|\bar{X}_n - p| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

C'est une première formulation mathématique de l'approche intuitive de la probabilité d'un événement comme « limite » des fréquences empiriques.

Un énoncé plus général sera vu en seconde année : la loi forte des grands nombres.

Donnons maintenant un second énoncé de convergence de variables aléatoires.

THÉORÈME

convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires binomiales $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$.

Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k) \quad \text{où } X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda).$$

ECG-1

Colles de mathématiques approfondies

Depuis la rentrée 2021, les anciennes classes prépas ECE et ECS (ECE étant appelée la *voie économique* et ECS la *voie scientifique*) sont remplacées par une seule classe ECG (G pour général).

Suivant les classes proposées par les lycées, les étudiants peuvent maintenant suivre deux cours de mathématiques (et passer les épreuves correspondantes le jour du concours) : mathématiques appliquées et mathématiques approfondies.

Cet ouvrage correspond au cours de **maths approfondies** de première année.

Les 385 exercices de cet ouvrage, qui sont typiquement des exercices pouvant être posés en interrogations orales (les fameuses « colles », aussi orthographiées « khôles »), sont répartis en trois catégories :

- **Les exercices de calcul**, comme leur nom l'indique, entraînent l'étudiant aux techniques calculatoires.
- **Les exercices axés sur le raisonnement** requièrent plutôt des démonstrations mathématiques.
- **Les exercices avec questions ouvertes** demandent à l'étudiant de faire preuve de davantage d'initiatives.

Chaque exercice est **entièrement corrigé**, parfois de plusieurs manières.

En fin d'ouvrage, le lecteur trouvera des **rappels de cours détaillés** couvrant tout le programme.

www.editions-ellipses.fr

