

MODULO

É Q U A T I O N S DIFFÉRENTIELLES

2^e ÉDITION



WILLIAM E. BOYCE | RICHARD C. DIPRIMA
Adaptation DONATIEN N'DRI



É Q U A T I O N S DIFFÉRENTIELLES

2^e ÉDITION

WILLIAM E. BOYCE

Institut polytechnique de Rensselaer

RICHARD C. DIPRIMA

Institut polytechnique de Rensselaer

Adaptation DONATIEN N'DRI

École polytechnique de Montréal

Révision scientifique SÉBASTIEN BERTRAND

Université du Québec à Trois-Rivières



MODULO

Équations différentielles

2^e édition

Traduction et adaptation de : *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 10th Edition de William E. Boyce et Richard C. DiPrima © 2012 John Wiley & Sons, Inc. (ISBN 978-0-470-45831-0)

© 2015 Groupe Modulo Inc.

© 2002 Les Éditions de la Chenelière inc.

Conception éditoriale : Éric Mauras

Édition : Renée Théorêt

Coordination : Jean-Pascal Baillie et Olivier Rolko

Révision linguistique et correction d'épreuves : Ginette Gratton

Conception graphique : Josée Bégin

Adaptation de la conception graphique originale : Marguerite Gouin

Conception de la couverture : INSPIRE DESIGN

Remerciements

L'Éditeur tient à remercier sincèrement Juan Carlos Bustamante, de l'Université de Sherbrooke, Marlène Frigon, de l'Université de Montréal, et Robert Bédard, de l'Université du Québec à Montréal, pour leurs précieux conseils lors de l'évaluation du manuel. Merci également à Sébastien Bertrand, de l'Université du Québec à Trois-Rivières, pour avoir assuré la révision scientifique de l'ouvrage.

Source iconographique

Couverture : stocksolutions/Shutterstock.com.

Le matériel complémentaire mis en ligne dans notre site Web est réservé aux résidents du Canada, et ce, à des fins d'enseignement uniquement.

L'achat en ligne est réservé aux résidents du Canada.

Catalogage avant publication de Bibliothèque et Archives nationales du Québec et Bibliothèque et Archives Canada

Boyce, William E.

[Elementary differential equations and boundary value problems.
Français]

Équations différentielles

2^e édition.

Traduction de la 10^e édition de : Elementary differential equations and boundary value problems.
Comprend un index.

ISBN 978-2-89732-014-0

1. Équations différentielles – Manuels d'enseignement supérieur.

2. Problèmes aux limites – Manuels d'enseignement supérieur I. DiPrima, Richard C. II. N'Dri, Kouakou Donatien, 1968- III. Titre. IV. Titre : Elementary differential equations and boundary value problems. Français.

QA371.B6914 2015

515'.35

C2015-940614-5

MODULO

5800, rue Saint-Denis, bureau 900
Montréal (Québec) H2S 3L5 Canada

Téléphone : 514 273-1066

Télécopieur : 514 276-0324 ou 1 800 814-0324

info.modulo@tc.tc

TOUS DROITS RÉSERVÉS.

Toute reproduction du présent ouvrage, en totalité ou en partie, par tous les moyens présentement connus ou à être découverts, est interdite sans l'autorisation préalable de Groupe Modulo Inc.

Toute utilisation non expressément autorisée constitue une contrefaçon pouvant donner lieu à une poursuite en justice contre l'individu ou l'établissement qui effectue la reproduction non autorisée.

ISBN 978-2-89732-014-0

Dépôt légal : 2^e trimestre 2015

Bibliothèque et Archives nationales du Québec

Bibliothèque et Archives Canada

Imprimé au Canada

1 2 3 4 5 M 19 18 17 16 15

Nous reconnaissons l'aide financière du gouvernement du Canada par l'entremise du Fonds du livre du Canada (FLC) pour nos activités d'édition.

Les auteurs

William E. Boyce a obtenu son baccalauréat en mathématiques au Collège Rhodes et sa maîtrise et son doctorat en mathématiques à l'Université Carnegie-Mellon. Il est membre de l'American Mathematical Society, de la Mathematical Association of America et de la Society of Industrial and Applied Mathematics. Il a reçu le titre de Edward P. Hamilton Distinguished Professor Emeritus of Science Education à Rensselaer. Il a écrit de nombreux articles sur les problèmes de valeur limite et sur les équations différentielles aléatoires et leurs applications. Il est l'auteur de divers ouvrages, dont deux sur les équations différentielles, et le coauteur (avec M. H. Holmes, J. G. Ecker et W. L. Siegman) d'un manuel sur l'utilisation de Maple dans l'étude du calcul différentiel et intégral. Il a également écrit, en collaboration avec R. L. Borrelli et C. S. Coleman, le manuel *Differential Equations Laboratory Workbook* (Wiley, 1992) auquel a été attribué le prix EDUCOM Best Mathematics Curricular Innovation en 1993. Le professeur Boyce était membre du NSF-sponsored CODEE (Consortium for Ordinary Differential Equations Experiments) qui a élaboré *ODE Architect*. Il a également collaboré à la réforme de l'enseignement des mathématiques. Entre autres, il a lancé le projet « Computers in Calculus » à Rensselaer, appuyé en partie par la NSF. En 1991, il a reçu le William H. Wiley Distinguished Faculty Award remis par l'Institut polytechnique de Rensselaer.

Richard C. DiPrima (décédé) a obtenu sa licence, sa maîtrise et son doctorat en mathématiques à l'Université Carnegie-Mellon. Il s'est joint à la faculté de l'Institut polytechnique de Rensselaer après avoir effectué des recherches au Massachusetts Institute of Technology (MIT), à l'Université Harvard et à la Hughes Aircraft. Il a été titulaire du Eliza Ricketts Foundation Professorship of Mathematics à Rensselaer et a été *fellow* de l'American Society of Mechanical Engineers, de l'American Academy of Mechanics et de l'American Physical Society. Il a aussi été membre de l'American Mathematical Society, de la Mathematical Association of America et de la Society of Industrial and Applied Mathematics. Il a été directeur du département des sciences mathématiques à Rensselaer, président de la Society of Industrial and Applied Mathematics et membre du comité exécutif de l'Applied Mechanics Division de l'ASME. En 1980, il a reçu le William H. Wiley Distinguished Faculty Award remis par l'Institut polytechnique de Rensselaer. Il a également reçu des bourses de recherche Fulbright en 1964-1965 et en 1983, et une bourse de recherche Guggenheim en 1982-1983. Il a été l'auteur de nombreux articles techniques sur la stabilité hydrodynamique et la théorie de la lubrification ainsi que de deux manuels sur les équations différentielles et les problèmes de valeur limite. Le professeur DiPrima est décédé le 10 septembre 1984.

Avant-propos

Cet ouvrage a été rédigé du point de vue d'un mathématicien dont l'intérêt pour les équations différentielles est parfois complètement théorique, parfois plutôt pratique, et la plupart du temps entre les deux. Nous avons cherché à élaborer un exposé solide et précis (mais non abstrait) sur la théorie élémentaire des équations différentielles tout en insistant sur les méthodes de résolution et l'analyse des solutions.

Ce manuel s'adresse d'abord aux étudiants du 1^{er} cycle en mathématiques, en sciences ou en ingénierie, lesquels suivent généralement un cours sur les équations différentielles pendant leur première ou deuxième année d'études. En guise de préalable, il est essentiel que les étudiants aient acquis une connaissance pratique du calcul différentiel et intégral durant un cours de deux ou trois sessions (ou l'équivalent).

Un bon manuel doit pouvoir s'adapter à diverses stratégies d'enseignement. Cela implique au moins deux choses. Premièrement, le professeur doit pouvoir choisir les sujets qu'il désire traiter et l'ordre dans lequel il souhaite le faire. Deuxièmement, le manuel doit être utile aux étudiants qui ont accès à une grande variété de technologies.

Le présent manuel permet cette souplesse, car nous nous sommes efforcés, dans la mesure du possible, de rendre chaque chapitre indépendant l'un de l'autre. Ainsi, après avoir enseigné les résultats élémentaires des trois premiers chapitres (soit les sections 1.1 à 1.3, 2.1 à 2.5 et 3.1 à 3.6), le professeur pourra choisir l'ordre dans lequel il présentera les différents sujets à l'étude et la façon dont il veut les analyser. En effet, les chapitres 4 à 8 sont essentiellement indépendants les uns des autres. Il y a donc de nombreuses façons d'organiser la matière.

En ce qui a trait à la technologie, nous soulignons à plusieurs reprises dans le manuel que les ordinateurs sont extrêmement utiles dans l'étude des équations différentielles et de leurs solutions et qu'un tel traitement est fort approprié pour de nombreux problèmes. Cependant, le contenu du manuel est indépendant de toute plateforme matérielle ou d'un logiciel particulier.

En effet, les ordinateurs sont fort utiles pour au moins trois raisons dans un cours sur les équations différentielles. Premièrement, ils permettent de traiter rapidement de grandes quantités de nombres et de générer ainsi des approximations numériques justes des solutions. Deuxièmement, ils permettent de réaliser des manipulations symboliques qui seraient longues et fastidieuses si elles étaient faites à la main. Finalement, et c'est peut-être le plus important, ils permettent de transposer les résultats de calculs numériques ou symboliques sous une forme graphique, ce qui permet de visualiser facilement le comportement des solutions. Les problèmes spécialement marqués du symbole  font généralement appel à une ou plusieurs de ces fonctions. Toutefois, le symbole  ne sert que de guide. En effet, bon nombre des problèmes identifiés par ce symbole peuvent être résolus, du moins en partie, sans support informatique, et on peut utiliser un ordinateur pour résoudre efficacement de nombreux problèmes qui n'affichent pas ce symbole.

Du point de vue de l'étudiant, les problèmes donnés en travaux pratiques et qui sont matière à examen sont au cœur de ce cours. Nous croyons que la caractéristique la plus remarquable de ce manuel est le nombre de problèmes (de même que leur variété et leur étendue) qu'il contient : il y a beaucoup de problèmes faciles, d'autres relativement difficiles et certains assez ouverts pour servir de base à des projets étudiants. Le manuel comprend beaucoup plus de problèmes qu'il n'est possible d'en résoudre dans un cours. Cela permet au professeur de personnaliser son cours de plusieurs façons afin d'atteindre ses propres objectifs et de répondre aux besoins des étudiants.

Les équations différentielles servent avant tout à étudier des processus physiques et à les modéliser. Même les équations différentielles les plus simples sont issues de modèles physiques

concrets comme la croissance et la décroissance exponentielles, les systèmes masse-ressort ou les circuits électriques. On réussit généralement à comprendre un processus naturel complexe en combinant des modèles plus simples ou en se basant sur ceux-ci. Voilà pourquoi nous croyons qu'il faut d'abord connaître de façon approfondie ces modèles, les équations qui les décrivent ainsi que leurs solutions pour en arriver à résoudre des problèmes complexes.

Nous décrivons en détail la démarche de modélisation dans les sections 1.1, 1.2 et 2.5. Des constructions soignées de modèles apparaissent aussi dans les sections 2.6 et 3.8, ainsi que dans les annexes du chapitre 8. Des équations différentielles obtenues grâce à la démarche de modélisation apparaissent fréquemment tout au long du manuel, surtout dans les ensembles de problèmes.

Dans le présent manuel, nous accordons une grande attention aux applications et à la modélisation mathématique parce que nous voulons convaincre l'étudiant que cette modélisation mène souvent à des équations différentielles qui servent à analyser des problèmes dans une grande variété de domaines. Nous voulons ainsi souligner que les connaissances mathématiques sont transposables : quand on maîtrise bien une méthode de résolution particulière, on peut l'appliquer dans tout autre domaine qui requiert une équation différentielle.

Pour résoudre des problèmes qui sortent de l'ordinaire, on doit souvent recourir à une variété d'outils tant analytiques que numériques, et combiner le papier et le crayon avec l'ordinateur. Les résultats et les graphiques quantitatifs, souvent produits par un ordinateur, servent à illustrer et à clarifier des conclusions qui pourraient être embrouillées par des expressions analytiques complexes. Également, pour appliquer une procédure numérique efficace, on doit réaliser une bonne analyse préliminaire. Une telle analyse a pour but de déterminer les caractéristiques qualitatives de la solution afin d'orienter les calculs, d'étudier les cas limites ou spéciaux ou de découvrir les intervalles des variables ou des paramètres qui peuvent requérir une attention particulière. Par conséquent, pour résoudre un problème complexe, les étudiants ont intérêt à se rendre compte qu'ils doivent mener une bonne analyse, effectuer des calculs et choisir avec discernement l'outil le plus approprié. Ils doivent aussi être conscients que les résultats peuvent être présentés sous différentes formes.

Nous croyons qu'il est important que les étudiants comprennent que la solution d'une équation différentielle n'est pas une fin en soi. On résout plutôt l'équation dans le but d'obtenir un aperçu du comportement ou du processus que l'équation modélise. Ainsi, nous avons inséré dans le texte de nombreux problèmes et exemples qui invitent à tirer des conclusions au sujet de la solution. Parfois, il s'agit de trouver la valeur de la variable indépendante pour laquelle la solution possède une certaine propriété ou de déterminer le comportement à long terme de la solution. D'autres problèmes demandent de décrire l'effet des variations d'un paramètre ou de déterminer la valeur critique d'un paramètre pour laquelle la solution subit un changement important. De tels problèmes apparaissent typiquement dans l'application des équations différentielles et, en fonction des objectifs du cours, le professeur peut proposer un petit ou un grand nombre de ces problèmes à ses étudiants.

William E. Boyce
Grafton, New York
Le 13 mars 2012

Modifications apportées à cette 2^e édition

- Dans plusieurs chapitres, nous avons développé ou réécrit les dérivations et les démonstrations de façon à fournir plus de détails.
- Sous la forme d'un théorème, dans les sections 3.3 et 5.4, nous avons montré que les parties réelles et imaginaires de la solution complexe d'un problème à valeurs réelles sont aussi des solutions.
- Dans la section 5.8, nous avons développé la discussion des vecteurs propres généralisés tant dans le corps du texte que dans les problèmes.
- Tout au long du manuel, nous avons ajouté des problèmes et nous en avons révisé certains autres.
- Nous avons modifié la plupart des figures, principalement en ajoutant de la couleur pour rendre plus évidente leur caractéristique essentielle. Nous avons également amélioré de nombreuses légendes de façon que le lecteur voie clairement l'objectif de la figure sans devoir examiner le texte qui l'entoure.
- Nous avons ajouté plusieurs notes historiques en bas de page et nous en avons développé d'autres.
- Dans les sections 5.10 et 5.11, nous avons abordé quelques sujets nouveaux comme la stabilité des systèmes d'équations différentielles et la linéarisation des systèmes non linéaires. Dans la section 8.1, nous avons rédigé une brève classification des équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants.
- Plutôt que de les présenter sommairement dans les problèmes, nous avons développé dans le corps du texte les sujets suivants :
 - les équations différentielles homogènes du premier ordre (dans la section 2.1);
 - l'équation de Bernoulli (dans la section 2.3);
 - les équations non linéaires du deuxième ordre réductibles à des équations du premier ordre (dans la section 3.1).

Table des matières

Chapitre 1 Introduction	1
1.1 Quelques modèles mathématiques importants – les champs de direction	1
1.2 Les solutions à quelques équations différentielles	9
1.3 La classification des équations différentielles	17
1.4 Quelques remarques historiques	23
Chapitre 2 Les équations différentielles du premier ordre	27
2.1 Les équations à variables séparables	27
2.2 Les équations exactes et les facteurs intégrants	37
2.3 Les équations linéaires et l'équation de Bernoulli	44
2.4 Les différences entre les équations linéaires et non linéaires	57
2.5 La modélisation mathématique et les équations du premier ordre	65
2.6 Les équations autonomes et les dynamiques des populations	81
Chapitre 3 Les équations linéaires du deuxième ordre	97
3.1 Généralités sur les équations différentielles du deuxième ordre	97
3.2 Les équations homogènes à coefficients constants	101
3.3 La théorie des équations homogènes linéaires du deuxième ordre	107
3.4 Les racines complexes de l'équation caractéristique	118
3.5 Les racines de multiplicité deux – la réduction d'ordre	126
3.6 Les équations non homogènes – la méthode des coefficients indéterminés	134
3.7 La méthode de variation des paramètres	143
3.8 Les oscillations mécaniques et les circuits électriques	149
3.9 Les oscillations forcées	162
Chapitre 4 Les équations linéaires d'ordre supérieur	175
4.1 La théorie générale des équations linéaires d'ordre n	175
4.2 Les équations homogènes à coefficients constants	181
4.3 La méthode des coefficients indéterminés	189
4.4 La méthode de variation des paramètres	193
Chapitre 5 Les systèmes d'équations linéaires du premier ordre	197
5.1 Introduction	197
5.2 Résultats élémentaires sur les matrices	205
5.3 Les systèmes d'équations algébriques linéaires	213
5.4 La théorie fondamentale sur les systèmes d'équations linéaires du premier ordre	224
5.5 Les systèmes linéaires homogènes à coefficients constants	229
5.6 Les valeurs propres complexes	239
5.7 Les matrices fondamentales	251
5.8 Les valeurs propres multiples	259
5.9 Les systèmes linéaires non homogènes	268
5.10 Le plan de phase – les systèmes linéaires	276
5.11 Les équations différentielles non linéaires et la stabilité	287

Chapitre 6 Les transformées de Laplace	303
6.1 Définition de la transformée de Laplace	303
6.2 La solution aux problèmes de valeur initiale	310
6.3 Les fonctions unités échelons	321
6.4 Les équations différentielles avec des fonctions discontinues	328
6.5 Les fonctions impulsion	335
6.6 Le produit de convolution	341
Chapitre 7 Les solutions en série aux équations linéaires du deuxième ordre	349
7.1 Rappel sur les séries de puissances	349
7.2 Les solutions en série près d'un point ordinaire – première partie	355
7.3 Les solutions en série près d'un point ordinaire – deuxième partie	364
7.4 Les équations d'Euler – les points singuliers réguliers	371
7.5 Les solutions en série près d'un point singulier régulier – première partie	379
7.6 Les solutions en série près d'un point singulier régulier – deuxième partie	385
7.7 L'équation de Bessel	392
Chapitre 8 Les équations aux dérivées partielles et les séries de Fourier	403
8.1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles	403
8.2 Les problèmes de valeur limite en deux points	407
8.3 Les séries de Fourier	413
8.4 Le théorème de convergence de Fourier	423
8.5 Les fonctions paires et impaires	429
8.6 La conduction de la chaleur dans une tige	437
8.7 Quelques problèmes additionnels sur la conduction de la chaleur	444
8.8 L'équation d'onde – la corde vibrante	453
8.9 L'équation de Laplace	466
Annexe A L'équation de la conduction de la chaleur	475
Annexe B L'équation d'onde	478
Réponses aux problèmes	481
Index	530
Aide-mémoire	536

Introduction

Dans ce chapitre, nous aborderons l'étude des équations différentielles selon différents points de vue. Deux problèmes seront d'abord introduits pour illustrer certaines idées fondamentales sur lesquelles nous reviendrons pour les étudier en détail. Ensuite, nous verrons comment classer les équations afin d'établir une structure organisationnelle pour ce manuel. Finalement, nous présenterons quelques tendances et personnages importants dans le cadre du développement historique du sujet. L'étude des équations différentielles a attiré l'attention de plusieurs grands mathématiciens du monde entier au cours des trois derniers siècles. Néanmoins, les équations différentielles demeurent encore aujourd'hui un sujet de recherche de pointe et elles laissent de nombreuses questions d'intérêt sans réponse.

1.1 Quelques modèles mathématiques importants – les champs de direction

Avant d'amorcer l'étude des équations différentielles, il convient de se faire une idée des avantages apportés par le contenu de ce cours. Pour certains étudiants, l'intérêt intrinsèque du sujet est une motivation suffisante mais, pour la plupart, c'est l'application de cette matière à d'autres domaines qui rend cette étude intéressante.

Bon nombre de principes et de lois qui sous-tendent le comportement du monde naturel sont des énoncés ou des relations mettant en jeu des taux exprimant la variation ou le rapport entre deux grandeurs. En termes mathématiques, ces relations sont des équations et ces taux sont des dérivées. Les équations qui impliquent des dérivées sont appelées **équations différentielles**. Par conséquent, il est préférable d'avoir des connaissances en équations différentielles si on veut comprendre et étudier des problèmes portant, par exemple, sur la mécanique des fluides, le flux d'un courant dans un circuit électrique, la dissipation de la chaleur dans un objet solide, la propagation et la détection d'ondes sismiques ou encore l'augmentation ou la diminution de la taille d'une population.

Une équation différentielle qui décrit un processus physique est un **modèle mathématique** du processus. Plusieurs modèles seront introduits tout au long de ce manuel. Dans la présente section, deux modèles impliquant des équations faciles à résoudre sont présentés. Il convient de souligner que même les équations différentielles les plus simples constituent des modèles utiles pour décrire d'importants processus physiques.

Exemple 1

Un objet en chute libre

Supposez qu'un objet est en chute libre dans l'atmosphère près du niveau de la mer. Formulez une équation différentielle décrivant ce mouvement.

On commence par représenter différentes quantités pertinentes pour ce problème à l'aide de lettres. Puisque le mouvement évolue dans un certain intervalle de temps, on utilise t pour noter le

► temps. Ensuite, on utilise v pour représenter la vitesse de l'objet. Comme la vitesse variera en fonction du temps, on considère v comme une fonction de t . En d'autres mots, t est la variable indépendante et v la variable dépendante. Le choix des unités de mesure est arbitraire, et rien dans l'énoncé du problème n'indique les unités appropriées. Donc, on est libre de faire un choix raisonnable. Pour être plus précis, on mesure le temps t en secondes et la vitesse v en mètres par seconde. De plus, on suppose que v est positif vers le sol.

La loi physique qui régit le mouvement des objets est la deuxième loi de Newton. Selon cette loi, la masse d'un objet multipliée par son accélération est égale à la force nette agissant sur l'objet. En termes mathématiques, on exprime cette loi par l'équation

$$F = ma. \quad (1)$$

Dans cette équation, m est la masse de l'objet, a son accélération et F la force nette exercée sur l'objet. Afin d'obtenir des unités cohérentes, on mesure m en kilogrammes, a en mètres par seconde carrée et F en newtons. Bien sûr, a est relié à v selon l'équation $a = dv/dt$. Donc, on peut réécrire l'équation (1) sous la forme :

$$F = m(dv/dt). \quad (2)$$

Maintenant, considérons la force qui agit sur l'objet quand il tombe. La gravité exerce une force égale au poids de l'objet, soit mg où g est l'accélération due à la gravité. Avec les unités choisies, on a déterminé de manière expérimentale que g est environ égale à $9,8 \text{ m/s}^2$ près de la surface de la Terre. Il existe aussi une force due à la résistance de l'air (la force de traînée), qui est plus difficile à modéliser, mais le propos de cet exemple n'est pas de discuter en détail de force. Cependant, on suppose souvent que celle-ci est proportionnelle à la vitesse. Ainsi, la force de traînée est de magnitude γv où γ est une constante appelée le coefficient de traînée.

Pour décrire la force nette F , on doit se rappeler que la gravité agit toujours vers le bas (elle est alors positive), tandis que la traînée agit vers le haut (elle est alors négative), comme le montre la figure 1.1.1. Par conséquent,

$$F = mg - \gamma v \quad (3)$$

et l'équation (2) devient

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v. \quad (4)$$

L'équation (4) est un modèle mathématique du comportement d'un objet en chute libre dans l'atmosphère près du niveau de la mer. Il faut noter que le modèle contient les trois constantes m , g et γ . Les constantes m et γ dépendent largement de l'objet en chute libre et, en général, elles diffèrent selon l'objet. On les appelle des paramètres, car elles peuvent prendre diverses valeurs selon le contexte. D'un autre côté, la valeur de g est la même pour tous les objets.

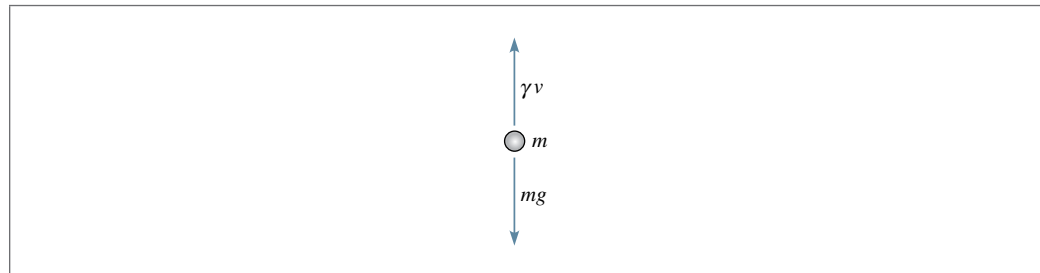


Figure 1.1.1 Schéma d'application des forces s'exerçant sur un objet en chute libre.

Pour résoudre l'équation (4), on doit trouver une fonction $v = v(t)$ qui satisfait à l'équation. Ce processus sera présenté dans la prochaine section. Pour le moment, considérons ce qu'on peut apprendre sur les solutions sans même les identifier. La tâche est légèrement simplifiée si on assigne des valeurs spécifiques à m et à γ , mais la démarche est la même, peu importe les valeurs choisies. Donc, on suppose que $m = 10 \text{ kg}$ et que $\gamma = 2 \text{ kg/s}$. Si les unités pour γ semblent

particulières, il convient de se rappeler que γv doit admettre comme unités des $\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$. Ainsi, on peut réécrire l'équation (4) comme

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}. \quad (5)$$

Exemple 2

Un objet en chute libre (suite)

Étudiez le comportement des solutions à l'équation (5) sans les trouver.

Commençons par observer l'équation (5) d'un point de vue géométrique. Supposons que v a une certaine valeur. Ensuite, en évaluant le second membre (à droite) de l'équation (5), on peut trouver la valeur correspondante de dv/dt . Par exemple, si $v = 40$, alors $dv/dt = 1,8$. Cela signifie que la pente d'une solution $v = v(t)$ a la valeur 1,8 en tout point où $v = 40$. On peut présenter cette information sous la forme d'un graphe dans le plan tv en traçant de courts segments de droite ou des flèches ayant une pente de 1,8 en différents points sur la droite $v = 40$. De la même manière, si $v = 50$, alors $dv/dt = -0,2$. Donc, on trace des segments de droite ayant une pente de $-0,2$ en différents points sur la droite $v = 50$. On obtient la figure 1.1.2 en procédant de la même manière avec d'autres valeurs de v . La figure 1.1.2 est un exemple de ce qu'on appelle un **champ de direction** ou un **champ de pente**.

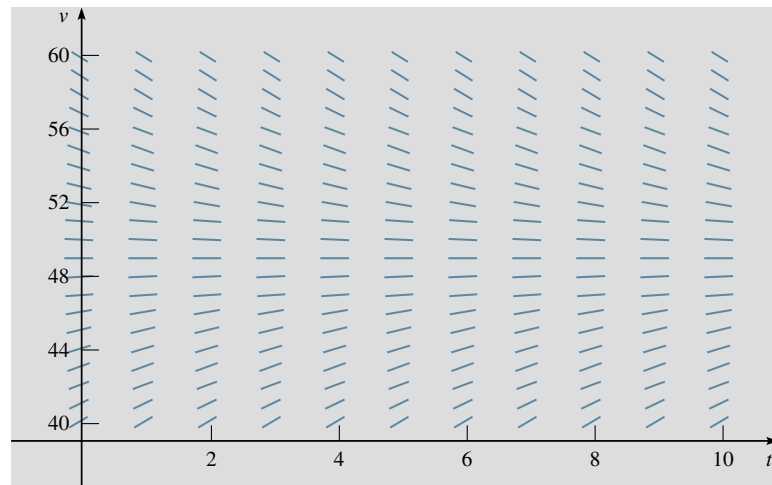


Figure 1.1.2 Champ de direction pour l'équation (5) : $dv/dt = 9,8 - (v/5)$.

L'importance de la figure 1.1.2 réside dans le fait que chaque segment de droite est une droite tangente au graphe d'une solution à l'équation (5). Ainsi, même si on n'a pas trouvé de solution et qu'aucun graphique de solution n'apparaît dans la figure, on peut néanmoins tirer des conclusions qualitatives sur le comportement des solutions. Par exemple, si v est inférieure à une certaine valeur critique, alors tous les segments de droite ont des pentes positives, et la vitesse de l'objet augmente à mesure qu'il tombe en chute libre. D'un autre côté, si v est supérieure à la valeur critique, alors les segments de droite ont des pentes négatives, et l'objet ralentit à mesure qu'il tombe en chute libre. Quelle est cette valeur de v qui sépare les objets dont la vitesse augmente de ceux dont la vitesse diminue ? En se reportant une fois de plus à l'équation (5), on doit se demander quelle valeur de v fera en sorte que dv/dt soit nulle. La réponse est $v = (5)(9,8) = 49$ m/s.

En fait, la fonction constante $v(t) = 49$ est une solution à l'équation (5). Pour vérifier cet énoncé, on pose $v(t) = 49$ dans l'équation (5) et on note que chaque membre de l'équation est égal à zéro. Puisque la solution ne change pas avec le temps, on dit que $v(t) = 49$ est une **solution d'équilibre**. Il s'agit de la solution qui correspond à un équilibre entre la gravité et la traînée. À la figure 1.1.3 de la page suivante, on montre la solution d'équilibre $v(t) = 49$ superposée au champ de direction. À partir de cette figure, on peut tirer une autre conclusion, à savoir que toutes les autres solutions semblent converger vers la solution d'équilibre quand t augmente.

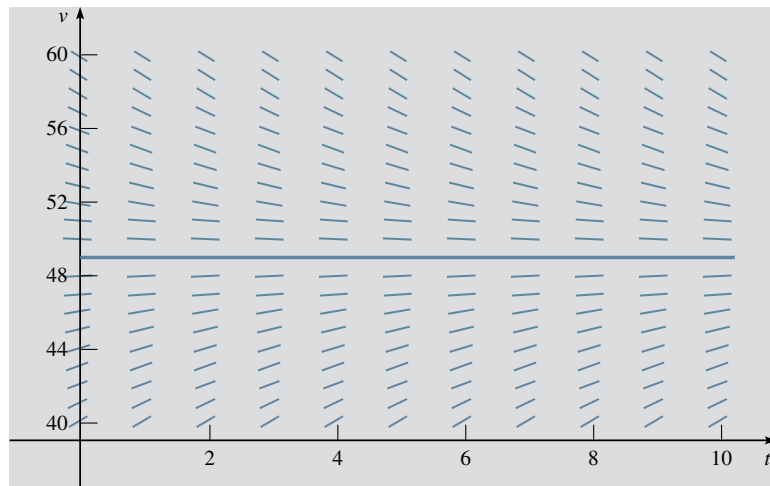


Figure 1.1.3 Champ de direction et solution d'équilibre pour l'équation (5): $dv/dt = 9,8 - (v/5)$.

On peut utiliser l'approche illustrée dans l'exemple 2 avec l'équation (4), plus générale, où les paramètres m et γ sont des nombres positifs non spécifiés. Les résultats sont essentiellement identiques à ceux de l'exemple 2. La solution d'équilibre à l'équation (4) est $v(t) = mg/\gamma$. Les solutions qui se trouvent au-dessous de la solution d'équilibre augmentent avec le temps, celles qui se trouvent au-dessus diminuent avec le temps et toutes ces solutions s'approchent de la solution d'équilibre quand t croît.

Les champs de direction Les champs de direction sont des outils pratiques dans l'étude des solutions aux équations différentielles de la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (6)$$

où f est une fonction qui dépend des variables t et y . Cette fonction est parfois appelée la **fonction de taux**. L'équation de l'exemple 2 est plus simple, car elle contient f , qui est une fonction de la variable dépendante seulement. On peut tracer un champ de direction pour des équations de la forme générale (6) en évaluant f en chaque point d'une grille rectangulaire composée d'au moins quelques centaines de points. Ensuite, en chaque point de la grille, on trace un court segment de droite dont la pente est la valeur de f en ce point. Ainsi, chaque segment de droite est tangent au graphe de la solution passant par ce point. Un champ de direction tracé sur une grille assez fine offre une bonne image du comportement général des solutions à une équation différentielle. La construction d'un champ de direction représente souvent une première étape utile dans l'étude d'une équation différentielle.

Deux observations méritent d'être mentionnées. Premièrement, pour tracer un champ de direction, il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation (6), mais il faut évaluer plusieurs fois la fonction $f(t, y)$ donnée. On peut alors aisément tracer un champ de direction, même pour des équations qui sont assez difficiles à résoudre. Deuxièmement, l'évaluation répétée d'une fonction est une tâche qui nécessite l'utilisation d'un ordinateur. En général, celui-ci devrait être utilisé pour tracer un champ de direction. Tous les champs de direction illustrés dans le présent manuel ont été tracés à l'aide d'un ordinateur.

Les mulots et les hiboux Voici un autre exemple assez différent. On considère une population de mulots qui habite une certaine région rurale. En l'absence de prédateurs, on suppose que la population de mulots augmente à un taux proportionnel à la population actuelle. Cette hypothèse n'est pas une loi de physique bien définie (comparativement à la loi de Newton dans

l'exemple 1), mais il s'agit d'une hypothèse¹ initiale courante dans l'étude de la croissance d'une population. Si on note le temps t et la population de mulots $p(t)$, alors on peut exprimer l'hypothèse sur la croissance de la population par l'équation

$$\frac{dp}{dt} = rp, \quad (7)$$

où le facteur de proportionnalité r est le **taux de croissance**. Si on suppose que le temps est mesuré en mois et que le taux de croissance r a la valeur de 0,5/mois, alors chaque terme de l'équation (7) admet comme unités le nombre de mulots par mois.

Maintenant, on suppose que des hiboux vivent dans la même région et qu'ils tuent 15 mulots par jour. Pour ajouter cette information au modèle, on doit inclure un autre terme à l'équation différentielle (7). On obtient alors

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450. \quad (8)$$

On doit noter que le terme correspondant à la prédation est -450 plutôt que -15 , car le temps est mesuré en mois et on veut un taux de prédation mensuel.

Exemple 3

Étudiez graphiquement les solutions à l'équation (8).

La figure 1.1.4 présente un champ de direction pour l'équation (8). À partir de la figure ou directement à partir de l'équation (8), on peut voir que dp/dt est positive pour des valeurs suffisamment grandes de p . Donc, les solutions sont croissantes. D'un autre côté, pour de petites valeurs de p , l'inverse se produit. Une fois de plus, la valeur critique de p qui sépare les solutions croissantes des solutions décroissantes est celle pour laquelle dp/dt est nulle. En posant dp/dt égale à zéro dans l'équation (8) puis en faisant la résolution afin de trouver p , on obtient la solution d'équilibre $p(t) = 900$ pour laquelle le terme exprimant la croissance et le terme exprimant la prédation dans l'équation (8) sont parfaitement équilibrés. La figure 1.1.4 illustre aussi la solution d'équilibre.

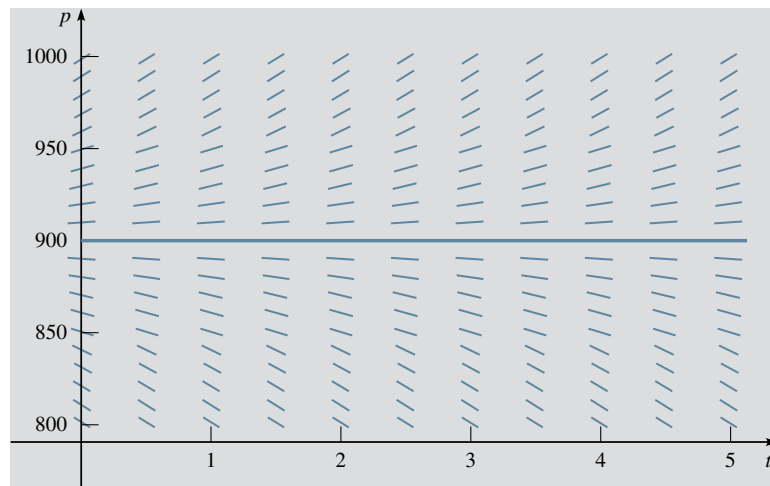


Figure 1.1.4 Champ de direction pour l'équation (8): $dp/dt = 0,5p - 450$.

Comparons cet exemple avec l'exemple 2. On note que dans les deux cas, la solution d'équilibre sépare les solutions croissantes des solutions décroissantes. Cependant, dans l'exemple 2, les solutions convergent vers la solution d'équilibre ou elles sont attirées par elle, tandis que dans l'exemple 3, les solutions divergent de la solution d'équilibre ou elles sont repoussées par elle. Dans les deux cas, la solution d'équilibre est très importante pour comprendre le comportement des solutions à l'équation différentielle. Au fil du temps, un observateur pourrait voir des populations beaucoup plus grandes ou beaucoup plus petites que la population d'équilibre, mais la solution d'équilibre elle-même ne sera pas, dans les faits, observée. Quoi qu'il en soit, dans les deux cas, la solution d'équilibre est très importante pour comprendre le comportement des solutions à l'équation différentielle.

1. On discute un meilleur modèle de croissance de la population à la section 2.6.

Une version plus générale de l'équation (8) est

$$\frac{dp}{dt} = rp - k, \quad (9)$$

où le taux de croissance r et le taux de prédation k sont deux paramètres. Les solutions à cette équation se comportent de manière semblable à celles de l'équation (8). La solution d'équilibre à l'équation (9) est $p(t) = k/r$. Les solutions qui se trouvent au-dessus de la solution d'équilibre sont croissantes, tandis que celles qui se trouvent au-dessous sont décroissantes.

Il convient de rappeler que les deux modèles discutés dans la présente section ont leurs limites. Le modèle (5) de l'objet en chute libre n'est plus valide dès que l'objet touche le sol ou que quelque chose ralentit ou arrête sa chute (l'objet n'étant alors plus en chute libre). Le modèle de population (8) finit par prédire des quantités négatives de mulots (si $p < 900$) ou des quantités très grandes (si $p > 900$). Ces deux prédictions n'étant pas réalistes, ce modèle devient inacceptable après un intervalle de temps assez court.

La construction de modèles mathématiques Lorsqu'on applique des équations différentielles à des domaines dans lesquels elles sont utiles, il est d'abord nécessaire de formuler l'équation différentielle appropriée qui décrit ou modélise le problème étudié. Dans la présente section, on a observé deux exemples de ce processus de modélisation, l'un tiré de la physique et l'autre de l'écologie. Lorsque vous construirez vous-même des modèles mathématiques, vous devrez reconnaître que chaque problème est différent et qu'une bonne modélisation n'est pas une habileté qu'on peut réduire à l'observation d'un ensemble de règles spécifiques. En effet, la construction d'un modèle efficace est parfois la partie la plus difficile du problème. Voici donc la liste des étapes qui font partie du processus :

1. Déterminez la variable indépendante et la variable dépendante et assignez-leur des lettres pour les représenter. La variable indépendante est souvent le temps.
2. Choisissez les unités de mesure pour chaque variable. Dans un sens, le choix des unités est arbitraire, mais certains choix peuvent être plus judicieux que d'autres. Par exemple, on choisit de mesurer le temps en secondes dans l'exemple de l'objet en chute libre et en mois dans l'exemple sur la population des mulots.
3. Expliquez le principe de base qui sous-tend ou régit le problème étudié. Il peut s'agir d'une loi de physique très connue, comme la loi du mouvement de Newton, ou d'une hypothèse plus spéculative basée sur votre propre expérience ou vos observations. Dans tous les cas, cette étape risque de ne pas être purement mathématique, mais elle exige la connaissance du domaine d'application du problème.
4. Exprimez le principe ou la loi en fonction des variables choisies à l'étape 1. Cette opération est parfois plus facile à dire qu'à faire. Elle peut exiger l'introduction de constantes ou de paramètres (comme le coefficient de traînée de l'exemple 1) et la détermination des valeurs appropriées pour ceux-ci. Ou encore, l'opération peut exiger qu'on utilise des variables auxiliaires ou intermédiaires qui doivent alors être reliées aux variables primaires.
5. Assurez-vous que chaque terme de l'équation admet les mêmes unités physiques. Dans le cas contraire, l'équation est erronée et vous devez tenter de la corriger. Si les unités concordent, alors l'équation est au moins cohérente sur le plan des unités, bien qu'elle puisse avoir d'autres défauts que ce test ne révèle pas.
6. Dans les problèmes considérés ici, le résultat de l'étape 4 est une équation différentielle. Celle-ci constitue le modèle mathématique souhaité. Rappelez-vous, cependant, que dans des problèmes plus complexes, le modèle mathématique résultant peut être beaucoup plus complexe et contenir un système de plusieurs équations différentielles, par exemple.

Problèmes

- Pour les problèmes 1 à 6, tracez un champ de direction pour l'équation différentielle. En vous basant sur le champ de direction, déterminez le comportement de y quand $t \rightarrow \infty$. Si ce comportement dépend de la valeur initiale de y quand $t \rightarrow \infty$, décrivez cette dépendance.

Ⓢ 1. $y' = 3 - 2y$

Ⓢ 2. $y' = 2y - 3$

Ⓢ 3. $y' = 3 + 2y$

Ⓢ 4. $y' = -1 - 2y$

Ⓢ 5. $y' = 1 + 2y$

Ⓢ 6. $y' = y + 2$

- Pour les problèmes 7 à 10, écrivez une équation différentielle de la forme $dy/dt = ay + b$ dont les solutions ont le comportement souhaité quand $t \rightarrow \infty$.

7. Toutes les solutions s'approchent de $y = 3$.

8. Toutes les solutions s'approchent de $y = 2/3$.

9. Toutes les autres solutions divergent de $y = 2$.

10. Toutes les autres solutions divergent de $y = 1/3$.

- Pour les problèmes 11 à 14, tracez un champ de direction pour l'équation différentielle. En vous basant sur le champ de direction, déterminez le comportement de y quand $t \rightarrow \infty$. Si ce comportement dépend de la valeur initiale de y quand $t = 0$, décrivez cette dépendance. Vous devez noter que dans ces problèmes, les équations ne sont pas de la forme $y' = ay + b$ et le comportement de leurs solutions est plus compliqué que celui des équations de la présente section.

Ⓢ 11. $y' = y(4 - y)$

Ⓢ 12. $y' = -y(5 - y)$

Ⓢ 13. $y' = y^2$

Ⓢ 14. $y' = y(y - 2)^2$

- Considérez les équations différentielles ci-dessous, dont certaines ont produit les champs de direction des figures 1.1.5 à 1.1.10. Pour les problèmes 15 à 20, indiquez l'équation différentielle qui correspond au champ de direction donné.

a) $y' = 2y - 1$

b) $y' = 2 + y$

c) $y' = y - 2$

d) $y' = y(y + 3)$

e) $y' = y(y - 3)$

f) $y' = 1 + 2y$

g) $y' = -2 - y$

h) $y' = y(3 - y)$

i) $y' = 1 - 2y$

j) $y' = 2 - y$

15. Le champ de direction de la figure 1.1.5.

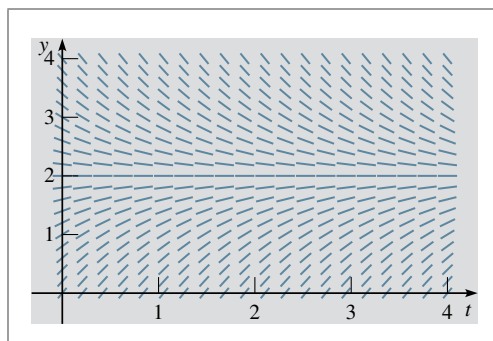


Figure 1.1.5 Problème 15.

16. Le champ de direction de la figure 1.1.6.

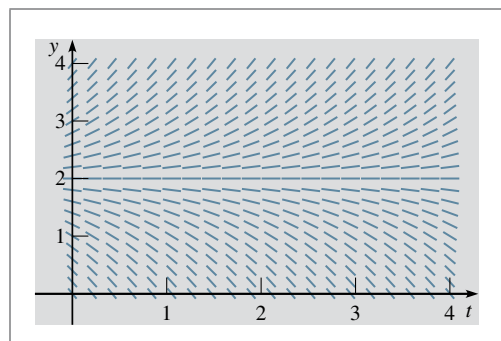


Figure 1.1.6 Problème 16.

17. Le champ de direction de la figure 1.1.7.

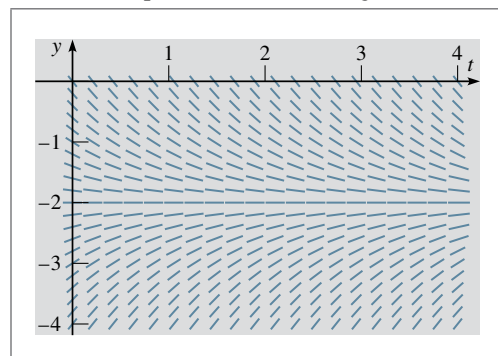


Figure 1.1.7 Problème 17.

18. Le champ de direction de la figure 1.1.8.

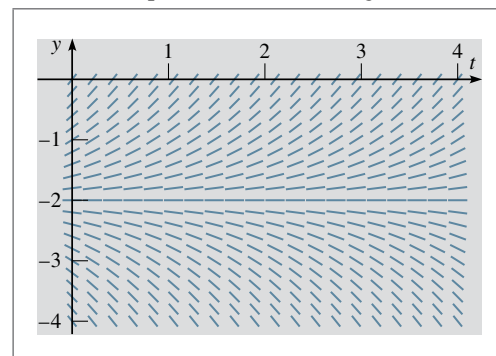


Figure 1.1.8 Problème 18.

19. Le champ de direction de la figure 1.1.9.

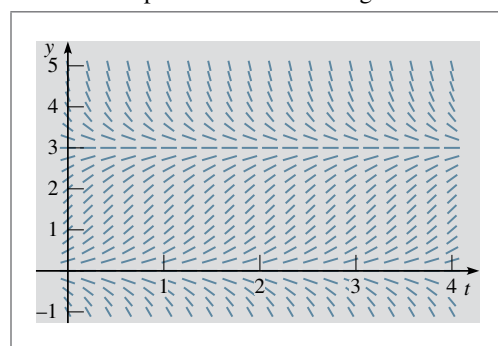


Figure 1.1.9 Problème 19.

20. Le champ de direction de la figure 1.1.10.

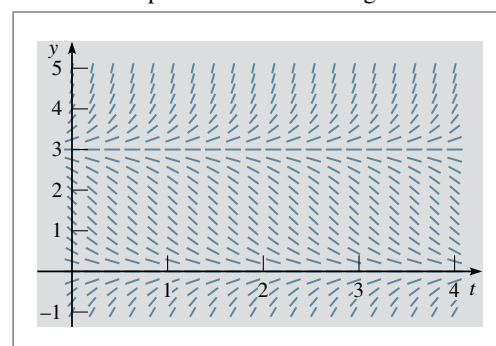


Figure 1.1.10 Problème 20.

21. Un étang comprend au départ 1 000 000 gal d'eau et une quantité inconnue d'un produit chimique indésirable. De l'eau contenant 0,01 g de ce produit chimique par gallon s'écoule dans l'étang à un taux de 300 gal/min. Le mélange sort de l'étang au même taux, donc la quantité d'eau présente dans l'étang reste constante. Supposez que le produit chimique est réparti uniformément dans l'étang.
- Posez une équation différentielle dont la solution exprime la quantité de produit chimique présente dans l'étang au temps t .
 - Quelle quantité de produit chimique se trouvera dans l'étang après une très longue période? Cette quantité limite dépend-elle de la quantité qui s'y trouvait au départ?
22. Une goutte de pluie sphérique s'évapore à un taux proportionnel à sa surface. Posez une équation différentielle pour le volume de la goutte de pluie en fonction du temps.
23. La loi du refroidissement de Newton énonce que la température d'un objet varie selon un taux proportionnel à la différence entre la température de l'objet lui-même et la température de son environnement (la température de l'air ambiant dans la plupart des cas).
- Supposez que la température ambiante est de 70°F et que le taux constant est $0,05\text{ (min)}^{-1}$. Posez une équation différentielle exprimant la température de l'objet au temps t . Notez que l'équation différentielle est la même, que la température de l'objet soit au-dessus ou au-dessous de la température ambiante.
24. Un médicament est administré par intraveineuse à un patient d'un hôpital. Un fluide contenant 5 mg/cm^3 de ce médicament s'infiltre dans le sang du patient à un taux de $100\text{ cm}^3/\text{h}$. Le médicament est soit absorbé par les tissus corporels, soit éliminé du sang à un taux proportionnel à la quantité présente, et ce, à un taux constant de $0,4\text{ (h)}^{-1}$.
- En supposant que le médicament est toujours distribué uniformément dans le sang du patient, posez une équation différentielle exprimant la quantité de médicament présente dans le sang au temps t .
 - Quelle quantité de médicament est présente dans le sang après une longue période?

- 25. Pour un petit objet qui tombe lentement en chute libre, l'hypothèse selon laquelle la force de traînée est proportionnelle à la vitesse s'applique. Pour un plus gros objet qui tombe plus rapidement, on suppose que la force de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse².
- Posez une équation différentielle exprimant la vitesse d'un objet en chute libre de masse m si la force de traînée est proportionnelle au carré de la vitesse.
 - Déterminez la vitesse limite après une longue période.
 - Si $m = 10$ kg, trouvez le coefficient de traînée de sorte que la vitesse limite soit de 49 m/s.
 - En utilisant les données fournies à la partie c), tracez un champ de direction et comparez-le avec celui de la figure 1.1.3.
- Pour les problèmes 26 à 33, tracez un champ de direction pour l'équation différentielle. En vous basant sur le champ de direction, déterminez le comportement de y quand $t \rightarrow \infty$. Si ce comportement dépend de la valeur initiale de y lorsque $t = 0$, décrivez cette dépendance. Vous devez noter que les seconds membres de ces équations dépendent de t et de y . Par conséquent, leurs solutions peuvent être plus complexes que celles de la présente section.
26. $y' = -2 + t - y$ 27. $y' = te^{-2t} - 2y$
 28. $y' = e^{-t} + y$ 29. $y' = t + 2y$
 30. $y' = 3 \sin t + 1 + y$ 31. $y' = 2t - 1 - y^2$
 32. $y' = -(2t + y)/2y$ 33. $y' = \frac{1}{6}y^3 - y - \frac{1}{3}t^2$

1.2 Les solutions à quelques équations différentielles

Dans la section précédente, on a obtenu les équations différentielles

$$m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v \quad (1)$$

et

$$\frac{dp}{dt} = rp - k. \quad (2)$$

Ces équations modélisent respectivement le déplacement d'un objet en chute libre et l'évolution de la taille d'une population de mulots chassée par des hiboux. Elles admettent la forme générale

$$\frac{dy}{dt} = ay - b, \quad (3)$$

où a et b sont deux constantes. On a tiré des conclusions qualitatives sur le comportement des solutions aux équations (1) et (2) en considérant les champs de direction. Cependant, pour répondre aux questions de nature quantitative, on doit trouver les solutions elles-mêmes. Une façon de procéder est décrite ci-après.

Exemple 1

Les mulots et les hiboux (suite)

Considérez l'équation

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450, \quad (4)$$

qui décrit l'interaction de certaines populations de mulots et de hiboux (voir l'équation (8) à la section 1.1). Trouvez les solutions à cette équation.

2. Voir l'article suivant : Lyle N. Long et Howard Weiss, « The Velocity Dependence of Aerodynamics Drag : A Primer for Mathematicians », *Amer. Math. Monthly*, vol. 106, n° 2, 1999, p. 127-135.

► Pour résoudre l'équation (4), on doit trouver les fonctions $p(t)$ qui, lorsqu'on les substitue dans l'équation, permettent de la réduire à une identité évidente. Voici une façon de procéder. Premièrement, on réécrit l'équation (4) sous la forme

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450, \quad (5)$$

ou, si $p \neq 900$,

$$\frac{dp/dt}{p-900} = \frac{1}{2}. \quad (6)$$

Puisque, selon la règle de la dérivée en chaîne, le premier membre de l'équation (6) est la dérivée de $\ln |p-900|$ par rapport à t , on a

$$\frac{d}{dt} \ln |p-900| = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Ensuite, en intégrant les deux membres de l'équation (7), on obtient

$$\ln |p-900| = \frac{t}{2} + C, \quad (8)$$

où C est une constante d'intégration. Par conséquent, en prenant l'exponentielle des deux membres de l'équation (8), on obtient

$$|p-900| = e^{(t/2)+C} = e^C e^{t/2}, \quad (9)$$

ou

$$p-900 = \pm e^C e^{t/2}, \quad (10)$$

et finalement,

$$p = 900 + ce^{t/2}, \quad (11)$$

où $c = \pm e^C$ est aussi une constante arbitraire (non nulle). On note que la fonction constante $p = 900$ est aussi une solution à l'équation (5) et qu'elle fait partie de l'expression (11) si on pose c égale à zéro. La figure 1.2.1 illustre les graphiques de l'équation (11) pour différentes valeurs de c .

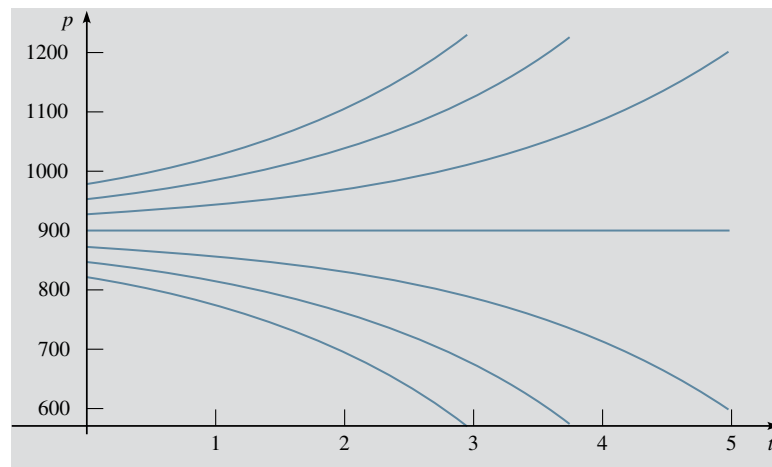


Figure 1.2.1 Graphiques de l'équation $p = 900 + ce^{t/2}$ pour différentes valeurs de c . Il s'agit des solutions de $dp/dt = 0,5p - 450$.

Dans ces graphiques, on trouve les caractéristiques déjà observées en se basant sur le champ de direction de la figure 1.1.4. Par exemple, les solutions qui se trouvent dans un membre ou l'autre de la solution d'équilibre $p = 900$ ont tendance à diverger de cette solution.

Dans l'exemple 1, on a trouvé une infinité de solutions à l'équation différentielle (4), ce qui correspond à l'infinité de valeurs que la constante arbitraire c de l'équation (11) peut admettre. Ceci reflète ce qui se produit quand on résout une équation différentielle. La méthode de résolution implique une intégration qui introduit une constante arbitraire dont les valeurs possibles engendrent un ensemble infini de solutions.

En général, on cherche à considérer un seul élément de l'ensemble infini de solutions en précisant la valeur de la constante arbitraire. Le plus souvent, on y arrive indirectement en précisant au préalable un point qui doit appartenir à la courbe-solution. Par exemple, pour déterminer la constante c dans l'équation (11), la population doit avoir une taille spécifique à un certain temps, par exemple la valeur 850 au temps $t = 0$. En d'autres mots, le graphique de la solution doit passer par le point $(0, 850)$. Symboliquement, on peut exprimer cette condition ainsi :

$$p(0) = 850. \quad (12)$$

Ensuite, en posant $t = 0$ et $p = 850$ dans l'équation (11), on obtient

$$850 = 900 + c.$$

Par conséquent, $c = -50$ et, en insérant cette valeur dans l'équation (11), on obtient la solution

$$p = 900 - 50e^{t/2}. \quad (13)$$

La condition additionnelle (12) qu'on a utilisée pour déterminer c est un exemple de **condition initiale**. L'équation différentielle (4) et la condition initiale (12) constituent un **problème de valeur initiale**.

Maintenant, on considère le problème général constitué de l'équation différentielle (3)

$$\frac{dy}{dt} = ay - b$$

avec la condition initiale

$$y(0) = y_0, \quad (14)$$

où y_0 est une valeur spécifique. On peut résoudre ce problème selon la même méthode que celle qui a été utilisée à l'exemple 1. Si $a \neq 0$ et $y \neq b/a$, alors on peut réécrire l'équation (3) comme

$$\frac{dy/dt}{y - (b/a)} = a. \quad (15)$$

En intégrant les deux membres, on obtient

$$\ln|y - (b/a)| = at + C, \quad (16)$$

où C est une constante arbitraire. Ensuite, en prenant l'exponentielle des deux membres de l'équation (16) et en isolant y , on obtient

$$y = (b/a) + ce^{at}, \quad (17)$$

où $c = \pm e^C$ est aussi une constante arbitraire. On note que $c = 0$ correspond à la solution d'équilibre $y = b/a$. Finalement, la condition initiale (14) implique $c = y_0 - (b/a)$. Donc, la solution au problème de valeur initiale (3) avec la condition initiale (14) est

$$y = (b/a) + [y_0 - (b/a)]e^{at}. \quad (18)$$

Pour $a \neq 0$, l'expression (17) renferme toutes les solutions possibles à l'équation (3). Une telle expression est appelée **solution générale**. La représentation géométrique de la solution générale (17) est un ensemble infini de courbes appelées **courbes-solutions**. Chaque courbe-solution est associée à une valeur particulière de c et correspond au graphique de la solution correspondant à cette valeur de c . Satisfaire à une condition initiale revient à déterminer la courbe-solution passant par le point initial donné.

Pour relier la solution (18) à l'équation (2) qui modélise la population de mulots, on doit remplacer a par le taux de croissance r et b par le taux de prédation k . Donc, la solution (18) devient

$$p = (k/r) + [p_0 - (k/r)]e^{rt} \quad (19)$$

où p_0 est la taille initiale de la population de mulots. La solution (19) confirme les conclusions déduites en se basant sur le champ de direction et sur l'exemple 1. Si $p_0 = k/r$, alors, de l'équation (19), il s'ensuit que $p = k/r$ pour tout t ; il s'agit de la solution constante ou solution d'équilibre. Si $p_0 = k/r$, alors le comportement de la solution dépend du signe du coefficient $p_0 - (k/r)$ dans le terme exponentiel de l'équation (19). Si $p_0 > k/r$, alors p croît de manière exponentielle avec t . Par contre, si $p_0 < k/r$, alors p décroît et tend vers zéro, ce qui correspond à l'extinction de la population de mulots. Les valeurs négatives de p , bien qu'elles soient admissibles dans l'expression (19), n'admettent aucun sens dans le contexte de ce problème particulier.

Pour écrire l'équation (1) de l'objet en chute libre sous la forme (3), on remplace a par $-\gamma/m$ et b par $-g$. En effectuant ces substitutions dans la solution (18), on obtient

$$v = (mg/\gamma) + [v_0 - (mg/\gamma)]e^{-\gamma t/m}, \quad (20)$$

où v_0 est la vitesse initiale. Une fois de plus, cette solution confirme les conclusions déduites à la section 1.1 en se basant sur le champ de direction. Il existe une solution d'équilibre ou solution constante $v = mg/\gamma$, et toutes les autres solutions tendent vers cette solution d'équilibre. La vitesse de convergence vers la solution d'équilibre est déterminée par l'exposant $-\gamma/m$. Ainsi, pour une masse donnée m , la vitesse s'approche plus rapidement de la solution d'équilibre à mesure que le coefficient de traînée γ augmente.

Exemple 2

Un objet en chute libre (suite)

Comme dans l'exemple 2 de la section 1.1, supposez que l'on considère un objet en chute libre de masse $m = 10$ kg et un coefficient de traînée $\gamma = 2$ kg/s. Alors, l'équation du mouvement (1) devient

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - \frac{v}{5}. \quad (21)$$

Supposez maintenant qu'on laisse tomber cet objet d'une hauteur de 300 m. Trouvez la vitesse de cet objet au temps t . Combien de temps l'objet prendra-t-il pour atteindre le sol et quelle sera sa vitesse au moment de l'impact ?

La première étape consiste à définir une condition initiale appropriée pour l'équation (21). Puisqu'on laisse tomber l'objet, sa vitesse initiale est de zéro ; alors on pose comme condition initiale

$$v(0) = 0. \quad (22)$$

On peut trouver la solution à l'équation (21) en substituant les valeurs des coefficients dans la solution (2), mais on résout plutôt l'équation (21) de manière directe. Premièrement, si $v \neq 49$, on réécrit l'équation comme

$$\frac{dv/dt}{v - 49} = -\frac{1}{5}. \quad (23)$$

En intégrant les deux membres de l'équation, on obtient

$$\ln|v - 49| = -\frac{t}{5} + C, \quad (24)$$

et la solution générale à l'équation (21) est

$$v = 49 + ce^{-t/5}, \quad (25)$$

où c est une constante arbitraire. Pour déterminer c , on pose $t = 0$ et $v = 0$ dans l'équation (25). Il en découle que $c = -49$. Ensuite, la solution au problème de valeur initiale (21), si on tient compte de la condition initiale (22), devient

$$v = 49(1 - e^{-t/5}). \quad (26)$$

► L'équation (26) donne la vitesse de l'objet en chute libre en tout temps (avant qu'il n'atteigne le sol, bien entendu).

La figure 1.2.2 présente les graphiques de la solution (25) pour différentes valeurs de c , la solution (26) étant indiquée par la courbe en noir. Il est clair que toutes les solutions tendent vers la solution d'équilibre $v = 49$. Ceci confirme les conclusions déduites à la section 1.1 en se basant sur les champs de direction des figures 1.1.2 et 1.1.3.

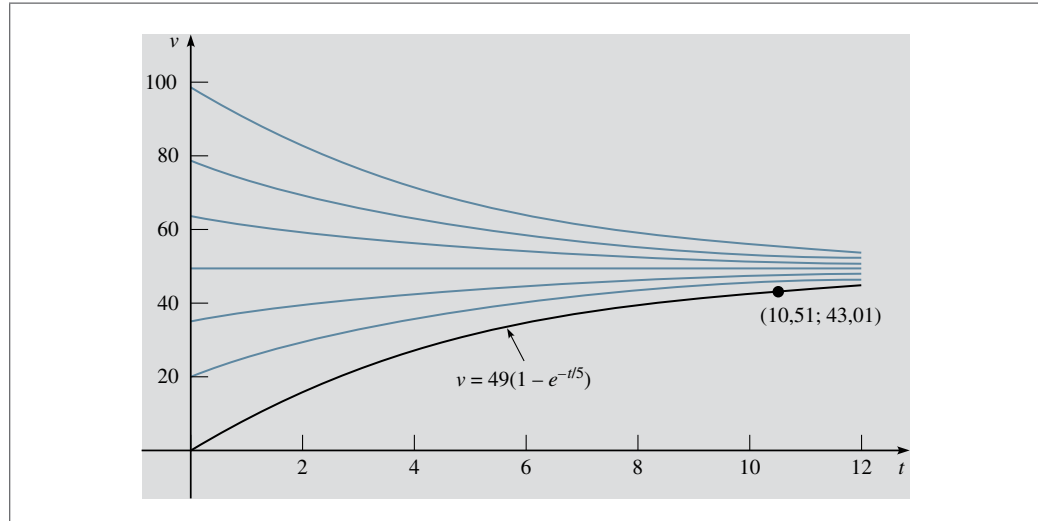


Figure 1.2.2 Graphiques de la solution (25), $v = 49 + ce^{-t/5}$, pour différentes valeurs de c . La courbe noire correspond à la condition initiale $v(0) = 0$.

Pour trouver la vitesse de l'objet quand il atteint le sol, on doit connaître le temps auquel l'impact se produit. En d'autres mots, on doit déterminer le temps que l'objet prendra pour parcourir 300 m. Pour ce faire, on note que la distance x parcourue par l'objet est reliée à sa vitesse v selon l'équation $v = dx/dt$ ou

$$\frac{dx}{dt} = 49(1 - e^{-t/5}). \quad (27)$$

Par conséquent,

$$x = 49t + 245e^{-t/5} + c, \quad (28)$$

où c est une constante arbitraire. L'objet commence à chuter au temps $t = 0$. Donc, on sait que $x = 0$ quand $t = 0$. À partir de l'équation (28), il s'ensuit que $c = -245$. Alors, la distance parcourue par l'objet dans sa chute au temps t est donnée par

$$x = 49t + 245e^{-t/5} - 245. \quad (29)$$

Soit T le temps auquel l'objet touche le sol. Alors, $x = 300$ quand $t = T$. En posant ces valeurs dans l'équation (29), on obtient l'équation

$$49T + 245e^{-T/5} - 545 = 0. \quad (30)$$

On peut facilement calculer une approximation de la valeur de T satisfaisant à l'équation (30) à l'aide d'une méthode numérique sur une calculatrice scientifique ou un ordinateur. On obtient alors $T \approx 10,51$ s. À ce temps, la vitesse correspondante v_T à partir de l'équation (26) est $v_T \approx 43,01$ m/s. Le point $(10,51; 43,01)$ est aussi identifié dans la figure 1.2.2.

Quelques remarques additionnelles sur la modélisation mathématique Jusqu'à maintenant, on a établi un lien entre la discussion sur les équations différentielles et les modèles mathématiques concernant un objet en chute libre et une relation hypothétique entre des mulots et des hiboux. La construction de ces modèles semble plausible, mais on doit se rappeler que le dernier test d'un modèle mathématique consiste à vérifier si les prédictions concordent avec

les observations ou les résultats expérimentaux. On ne dispose pas ici d'observations ou de résultats expérimentaux réels qu'on peut utiliser à des fins de comparaison. Toutefois, il existe plusieurs sources de désaccords possibles.

Dans le cas de l'objet en chute libre, le principe physique sous-jacent (la loi du mouvement de Newton) est bien établi et largement applicable. Cependant, l'hypothèse selon laquelle la force de traînée est proportionnelle à la vitesse est moins certaine. Même si cette hypothèse est correcte, la détermination du coefficient de traînée γ par des mesures directes présente des difficultés. En effet, on trouve parfois indirectement le coefficient de traînée, par exemple, en mesurant le temps de la chute à partir d'une hauteur donnée, puis en calculant la valeur de γ qui permet de prédire ce temps.

Le modèle de la population de mulots comporte beaucoup d'incertitude. La détermination du taux de croissance r et du taux de prédation k dépend des observations effectuées sur les tailles des populations réelles qui sont sujettes à des variations considérables. L'hypothèse selon laquelle r et k sont des constantes est aussi discutable. Par exemple, un taux de prédation constant devient plus difficile à maintenir quand la population diminue. De plus, le modèle prédit qu'une population supérieure à la valeur d'équilibre augmentera de manière exponentielle. Ceci diverge du comportement des tailles des populations réelles. Pour en savoir davantage sur le sujet, reportez-vous à la discussion à la section 2.6.

Même si un modèle mathématique est incomplet ou en quelque sorte inexact, il peut néanmoins servir à illustrer les caractéristiques qualitatives du problème étudié. Le modèle peut aussi être valable dans certaines circonstances précises. Par conséquent, il convient de toujours utiliser le bon sens quand il est question de construire des modèles mathématiques et d'utiliser les prédictions qui en découlent.

Si les différences entre les observations réelles et les prédictions d'un modèle mathématique sont trop importantes, vous devez alors penser à perfectionner le modèle, à faire des observations plus soignées, ou peut-être les deux. Il y a presque toujours un compromis à faire entre l'exactitude et la simplicité. Ces deux qualités sont recherchées, mais un gain de l'une entraîne généralement une perte de l'autre. Cependant, même si un modèle mathématique est incomplet ou quelque peu inexact, il peut néanmoins servir à expliquer les caractéristiques qualitatives du problème étudié. Il peut aussi donner des résultats satisfaisants dans certaines circonstances, mais pas dans d'autres. Par conséquent, vous devriez toujours faire preuve d'un jugement sûr et de bon sens quand vous devez construire des modèles mathématiques et utiliser les prédictions qui en découlent.

Problèmes

1. Résolvez chacun des problèmes de valeur initiale suivants et tracez le graphique des solutions pour différentes valeurs de y_0 . Ensuite, décrivez brièvement en quoi les solutions se ressemblent ou diffèrent les unes des autres.

- a) $dy/dt = -y + 5$, $y(0) = y_0$
- b) $dy/dt = -2y + 5$, $y(0) = y_0$
- c) $dy/dt = -2y + 10$, $y(0) = y_0$

2. Suivez les instructions données au problème 1 pour résoudre les problèmes de valeur initiale :

- a) $dy/dt = y - 5$, $y(0) = y_0$
- b) $dy/dt = 2y - 5$, $y(0) = y_0$
- c) $dy/dt = 2y - 10$, $y(0) = y_0$

3. Considérez l'équation différentielle

$$dy/dt = -ay + b,$$

où a et b sont deux nombres positifs.

- a) Résolvez l'équation différentielle.
- b) Tracez le graphique de la solution sous diverses conditions initiales.

- c) Décrivez en quoi les solutions changent sous chacune des conditions initiales suivantes :
- a augmente.
 - b augmente.
 - a et b augmentent, mais le ratio b/a demeure le même.
4. Considérez l'équation différentielle $dy/dt = ay - b$.
- Trouvez la solution d'équilibre y_e .
 - Posez $Y(t) = y - y_e$; par conséquent, $Y(t)$ représente l'écart par rapport à la solution d'équilibre. Trouvez l'équation différentielle satisfaite par $Y(t)$.
5. **Coefficients indéterminés** Voici une autre manière de résoudre l'équation
- $$dy/dt = ay - b. \quad (i)$$
- a) Résolvez l'équation plus simple
- $$dy/dt = ay. \quad (ii)$$
- Notez la solution $y_1(t)$.
- Vous devez noter que la seule différence entre les équations (i) et (ii) est la constante $-b$ dans l'équation (i). Par conséquent, on peut supposer que les solutions à ces deux équations ne diffèrent que par une constante. Mettez cette hypothèse à l'épreuve en tentant de trouver une constante k de sorte que $y = y_1(t) + k$ soit une solution à l'équation (i).
 - Comparez la solution de la partie b) avec la solution donnée dans le manuel pour l'équation (17).
Remarque : On peut aussi utiliser cette méthode dans certains cas où la constante b est remplacée par une fonction $g(t)$. Vous y parviendrez si vous pouvez déterminer la forme générale de la solution. Cette méthode est décrite en détail à la section 3.6 concernant les équations du deuxième ordre.
6. Utilisez la méthode présentée au problème 5 pour résoudre l'équation
- $$dy/dt = -ay + b.$$
7. La population de mulots de l'exemple 1 satisfait à l'équation différentielle
- $$dp/dt = 0,5p - 450.$$
- Trouvez le temps auquel la population s'éteint si $p(0) = 850$.
 - Trouvez le temps de l'extinction si $p(0) = p_0$, où $0 < p_0 < 900$.
 - Trouvez la population initiale p_0 si la population doit s'éteindre au bout d'un an.
8. Considérez une population p de mulots qui augmente à un taux proportionnel à la population actuelle, de sorte que $dp/dt = rp$.
- Trouvez la constante de vitesse r si la population double en 30 jours.
 - Trouvez r si la population double en N jours.
9. L'objet en chute libre de l'exemple 2 satisfait au problème de valeur initiale
- $$dv/dt = 9,8 - (v/5), \quad v(0) = 0.$$
- Trouvez le temps qui doit s'écouler pour que l'objet atteigne 98 % de sa vitesse limite.
 - Quelle distance l'objet a-t-il parcourue au temps trouvé à la partie a) ?
10. Modifiez l'exemple 2 en considérant que l'objet en chute libre n'est pas soumis à la résistance de l'air.
- Écrivez le problème de valeur initiale modifié.
 - Déterminez le temps nécessaire pour que l'objet atteigne le sol.
 - Déterminez la vitesse de l'objet au moment de l'impact.
11. Considérez l'objet en chute libre d'une masse de 10 kg de l'exemple 2, mais supposez maintenant que la traînée est proportionnelle au carré de la vitesse.
- Si la vitesse limite est de 49 m/s (la même que dans l'exemple 2), montrez que l'équation du mouvement devient

$$dv/dt = [(49)^2 - v^2]/245.$$

Voyez aussi le problème 25 de la section 1.1.

- b) Si $v(0) = 0$, trouvez une expression pour $v(t)$ au temps t .
- c) Représentez graphiquement votre solution de la partie b) et la solution (26) de l'exemple 2 dans le même plan cartésien.
- d) En vous appuyant sur vos graphiques de la partie c), comparez l'effet d'une traînée quadratique avec l'effet d'une traînée linéaire.
- e) Trouvez la distance $x(t)$ parcourue par l'objet durant le temps t .
- f) Trouvez le temps T qu'il faut à l'objet pour chuter de 300 m.
12. Une matière radioactive, comme l'isotope 234 du thorium, se désintègre à un taux proportionnel à la quantité présente. Si $Q(t)$ est la quantité présente au temps t , alors $dQ/dt = -rQ$, où $r > 0$ est le taux de désintégration.
- a) Si 100 mg de thorium 234 se désintègrent jusqu'à 82,04 mg en 1 semaine, déterminez le taux de désintégration r .
- b) Trouvez une expression pour exprimer la quantité de thorium 234 présente au temps t .
- c) Trouvez le temps nécessaire à la disparition de la moitié de la quantité initiale de thorium 234.
13. La **demi-vie** d'une matière radioactive est le temps nécessaire à la disparition de la moitié de la valeur initiale d'une quantité de cette matière. Montrez que, pour toute matière radioactive qui se désintègre selon l'équation $Q' = -rQ$, la demi-vie τ et le taux de désintégration r satisfont à l'équation $r\tau = \ln 2$.
14. Le radium 226 a une demi-vie de 1620 ans. Trouvez la période au bout de laquelle une quantité donnée de cette matière est réduite du quart.
15. D'après la loi du refroidissement de Newton (voir le problème 23 de la section 1.1), la température $u(t)$ d'un objet satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = -k(u - T),$$

où T est la température ambiante constante et k est une constante positive. Supposez que la température initiale de l'objet est $u(0) = u_0$.

- a) Trouvez la température de l'objet au temps t .
- b) Posez τ , le temps au bout duquel la différence de température initiale $u_0 - T$ a été réduite de moitié. Trouvez la relation entre k et τ .
16. Supposez qu'un immeuble perd de la chaleur conformément à la loi du refroidissement de Newton (voir le problème 15) et que le taux constant k a une valeur de $0,15 \text{ h}^{-1}$. Supposez que la température intérieure est de 70°F lorsque le système de chauffage tombe en panne. Si la température extérieure est de 10°F , en combien de temps la température intérieure atteindra-t-elle 32°F ?
17. Considérez un circuit électrique contenant un condensateur, une résistance et une pile (voir la figure 1.2.3). La charge $Q(t)$ sur le condensateur satisfait à l'équation³

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V,$$

où R est la résistance, C la capacitance et V la tension constante fournie par la pile.

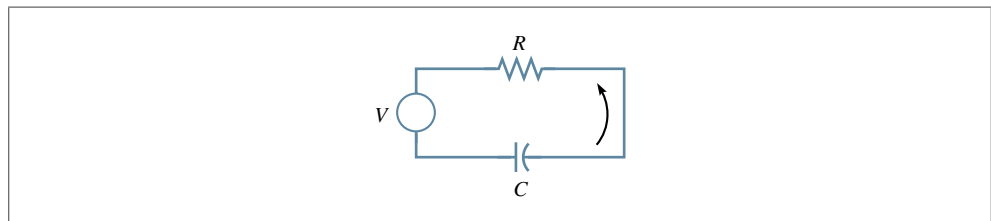


Figure 1.2.3 Circuit électrique correspondant au problème 17.

3. Cette équation découle des lois de Kirchhoff, qui seront discutées à la section 3.8.

-
- a) Si $Q(0) = 0$, trouvez $Q(t)$ au temps t , puis tracez le graphique de Q en fonction de t .
 - b) Trouvez la valeur limite Q_L vers laquelle $Q(t)$ tend après une longue période.
 - c) Supposez que $Q(t_1) = Q_L$ et qu'on retire la pile du circuit au temps $t = t_1$. Trouvez $Q(t)$ lorsque $t > t_1$ et tracez son graphique.
- Ⓢ 18. Au départ, un étang contenant 1 000 000 gal d'eau ne contient aucun produit chimique indésirable (voir le problème 21 de la section 1.1). De l'eau contenant 0,01 g/gal de produit chimique s'écoule dans l'étang à un taux de 300 gal/h, et l'eau s'écoule de l'étang au même taux.
- a) Soit $Q(t)$ la quantité de produit chimique dans l'étang au temps t . Posez un problème de valeur initiale pour déterminer $Q(t)$.
 - b) Résolvez le problème de la partie a) pour déterminer $Q(t)$. Quelle quantité de produit chimique se trouve dans l'étang au bout d'un an ?
 - c) Au bout d'un an, on retire la source du produit chimique de l'étang. Depuis, de l'eau pure coule dans l'étang et le mélange en sort au même taux qu'avant. Posez un problème de valeur initiale qui décrit cette nouvelle situation.
 - d) Résolvez le problème de valeur initiale de la partie c). Quelle quantité de produit chimique reste-t-il dans l'étang après une année additionnelle (2 ans depuis le début du problème) ?
 - e) Combien de temps faut-il pour que $Q(t)$ soit réduit à 10 g ?
 - f) Tracez le graphique de $Q(t)$ en fonction de t sur une période de 3 ans.
19. Votre piscine de 60 000 gal d'eau a été contaminée par 5 kg de teinture non toxique qui laisse aux baigneurs un affreux film vert sur la peau. Le système de filtration de la piscine aspire l'eau de la piscine, retire la teinture et retourne l'eau dans la piscine à un taux de 200 gal/min.
- a) Posez un problème de valeur initiale décrivant le processus de filtration. Soit $q(t)$ la quantité de teinture dans la piscine au temps t .
 - b) Résolvez le problème posé à la partie a).
 - c) Vous avez invité une dizaine d'amis à venir se baigner chez vous et ils doivent arriver dans 4 heures. Vous avez aussi déterminé que l'effet de la teinture n'est pas perceptible si sa concentration est inférieure à 0,02 g/gal. Votre système de filtration est-il capable de réduire la concentration de teinture à ce niveau en l'espace de 4 heures ?
 - d) Trouvez le temps T au bout duquel la concentration de teinture atteint d'abord la valeur de 0,02 g/gal.
 - e) Trouvez le taux d'écoulement suffisant pour obtenir une concentration de 0,02 g/gal en 4 heures.

1.3 La classification des équations différentielles

Ce manuel a pour principal objectif de discuter certaines propriétés des solutions aux équations différentielles et de décrire diverses méthodes qui se sont révélées efficaces dans la recherche de solutions ou de calculs de leurs approximations. Afin de structurer notre présentation, nous allons décrire quelques méthodes de classification des équations différentielles.

Les équations différentielles ordinaires et les équations aux dérivées partielles Une des classifications les plus simples consiste à déterminer si la fonction inconnue dépend d'une seule variable ou de plusieurs. Dans le premier cas, seules les dérivées ordinaires apparaissent dans l'équation différentielle : il s'agit alors d'une **équation différentielle ordinaire**. Dans le second cas, les dérivées sont des dérivées partielles : il s'agit alors d'une **équation aux dérivées partielles**.

Toutes les équations différentielles discutées dans les sections précédentes sont des équations différentielles ordinaires. Voici un autre exemple d'équation différentielle ordinaire :

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t), \quad (1)$$

pour la charge $Q(t)$ appliquée sur le condensateur d'un circuit muni d'une capacitance C , d'une résistance R et d'une inductance L . On construira cette équation dans la section 3.8. Des exemples typiques d'équations aux dérivées partielles sont l'équation de la chaleur

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad (2)$$

et l'équation d'onde

$$a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Ici α^2 et a^2 sont des constantes. L'équation de la chaleur décrit la conduction de la chaleur dans un corps solide, et l'équation d'onde apparaît dans plusieurs problèmes impliquant la propagation d'une onde dans un solide ou dans un fluide. On doit noter que dans les équations (2) et (3), la variable dépendante u est fonction de deux variables indépendantes x et t .

Les systèmes d'équations différentielles Une autre classification des équations différentielles est basée sur le nombre de fonctions inconnues. Si une seule fonction doit être déterminée, alors une seule équation suffit. Cependant, si au moins deux fonctions sont inconnues, alors un système d'équations est nécessaire. Par exemple, les équations de Lotka-Volterra (ou du modèle prédateur-proie) sont importantes dans la modélisation écologique. Elles sont de la forme

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - \alpha xy \\ dy/dt &= -cy + \gamma xy, \end{aligned} \quad (4)$$

où $x(t)$ et $y(t)$ sont les populations respectives des deux espèces (les proies et les prédateurs). Les valeurs des constantes a , α , c et γ sont basées sur des observations empiriques et dépendent des espèces particulières étudiées. On discutera des systèmes d'équations au chapitre 5. Dans certains domaines d'application, les systèmes contiennent un grand nombre d'équations.

L'ordre L'ordre d'une équation différentielle est l'ordre de la dérivée la plus élevée apparaissant dans l'équation. Les équations des sections précédentes sont toutes des équations du premier ordre, tandis que l'équation (1) est une équation du deuxième ordre. Les équations (2) et (3) sont des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. De façon plus générale, l'équation

$$F[t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)] = 0 \quad (5)$$

est une équation différentielle ordinaire du n -ième ordre. L'équation (5) exprime une relation entre la variable indépendante t et les valeurs de la fonction u et ses n premières dérivées u' , u'' , $\dots$, $u^{(n)}$. En équations différentielles, il est approprié et habituel d'écrire y pour $u(t)$, et y' , y'' , $\dots$, $y^{(n)}$ pour désigner $u'(t)$, $u''(t)$, $\dots$, $u^{(n)}(t)$. Ainsi, on écrit l'équation (5) comme

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (6)$$

Par exemple,

$$y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4 \quad (7)$$

est une équation différentielle du troisième ordre où $y = u(t)$. On utilisera parfois d'autres lettres au lieu de t et de y pour exprimer les variables indépendante et dépendante.

On suppose qu'il est toujours possible de résoudre une équation différentielle ordinaire donnée en fonction de la dérivée la plus élevée. Ainsi, on obtient

$$y^{(n)} = f(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \quad (8)$$

Ici, seules les équations de la forme (8) seront abordées. Cette décision permet d'éviter l'ambiguïté risquant de survenir quand une équation de la forme (6) peut correspondre à diverses équations de la forme (8). Par exemple, l'équation

$$(y')^2 + ty' + 4y = 0 \quad (9)$$

mène aux deux équations

$$y' = \frac{-t + \sqrt{t^2 - 16y}}{2} \quad \text{ou} \quad y' = \frac{-t - \sqrt{t^2 - 16y}}{2}. \quad (10)$$

Les équations linéaires et les équations non linéaires Une classification très importante des équations différentielles consiste à déterminer si elles sont linéaires ou non linéaires. L'équation différentielle ordinaire

$$F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

est **linéaire** si F est une fonction linéaire des variables $y, y', \dots, y^{(n)}$. Une définition semblable s'applique aux équations aux dérivées partielles. Ainsi, l'équation différentielle ordinaire linéaire générale d'ordre n est

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = g(t). \quad (11)$$

La plupart des équations présentées jusqu'à maintenant étaient linéaires. Les équations des sections 1.1 et 1.2 qui décrivent un objet en chute libre et une population de mulots en sont des exemples. De même, dans la présente section, l'équation (1) est une équation différentielle ordinaire linéaire et les équations (2) et (3) sont des équations aux dérivées partielles linéaires. Une équation qui n'est pas de la forme (11) est une **équation non linéaire**. L'équation (7) est non linéaire à cause de la présence du terme yy' . De même, chaque équation du système (4) est non linéaire à cause des termes comportant un produit xy .

Le pendule oscillant est un problème simple en physique qui donne lieu à une équation différentielle non linéaire. En effet, l'angle θ d'un pendule oscillant (de longueur L) (voir la figure 1.3.1) satisfait à l'équation (voir les problèmes 29 à 31)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0. \quad (12)$$

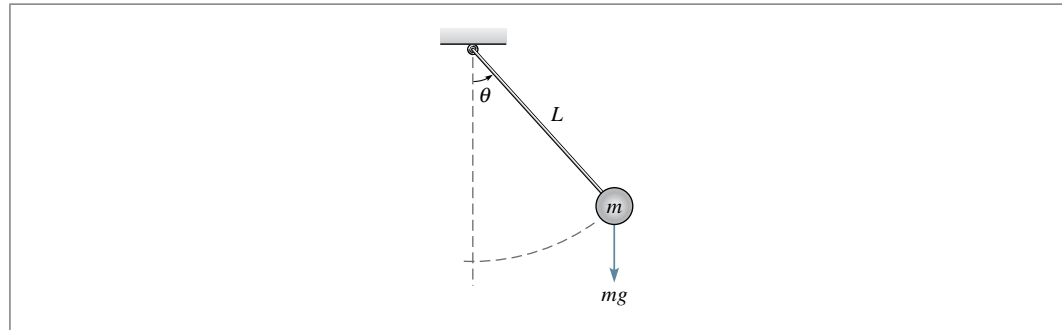


Figure 1.3.1 Les oscillations d'un pendule.

La présence du terme $\sin \theta$ rend l'équation (12) non linéaire.

La théorie et les méthodes mathématiques pour résoudre des équations linéaires sont très élaborées. Par opposition, pour les équations non linéaires, la théorie est plus compliquée et les méthodes de résolution sont moins satisfaisantes. Heureusement, de nombreux problèmes importants mènent à des équations différentielles ordinaires linéaires ou peuvent être réduits, par approximation, à des équations linéaires. Par exemple, dans le cas du pendule, si l'angle θ est petit, alors $\sin \theta \cong \theta$ et on peut approximer l'équation (12) par l'équation linéaire

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0. \quad (13)$$

Cette méthode d'approximation d'une équation non linéaire par une équation linéaire s'appelle la **linéarisation**. Cette façon de traiter les équations non linéaires est extrêmement efficace.

Néanmoins, il existe de nombreux phénomènes physiques qui ne peuvent pas être représentés adéquatement à l'aide d'équations linéaires.

Pour étudier ces phénomènes, on doit donc considérer les équations non linéaires. Dans un manuel de base, on met naturellement l'accent sur les éléments les plus simples. Ainsi, la plus grande partie de ce manuel est consacrée aux équations linéaires et à différentes méthodes permettant de les résoudre. Toutefois, certaines sections des chapitres 2, 3 et 5 portent sur les équations non linéaires. S'il y a lieu, nous expliquerons pourquoi les équations non linéaires sont généralement plus difficiles à résoudre et pourquoi de nombreuses techniques permettant de résoudre des équations linéaires ne peuvent être appliquées aux équations non linéaires.

Les solutions Une **solution** à l'équation différentielle ordinaire (8) dans l'intervalle $\alpha < t < \beta$ est une fonction ϕ telle que $\phi, \phi', \dots, \phi^{(n)}$ existent et satisfont à

$$\phi^{(n)}(t) = f[t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)] \quad (14)$$

quel que soit t dans $\alpha < t < \beta$. À moins d'indication contraire, on suppose que la fonction f dans l'équation (8) est une fonction scalaire et on désire obtenir des solutions à valeurs réelles $y = \phi(t)$.

On doit se rappeler que, dans la section 1.2, on a trouvé les solutions à certaines équations par intégration directe. Par exemple, on a vu que l'équation

$$\frac{dp}{dt} = 0,5p - 450 \quad (15)$$

admet comme solution

$$p = 900 + ce^{t/2}, \quad (16)$$

où c est une constante arbitraire. Il n'est pas toujours aussi facile de trouver les solutions aux équations différentielles. Cependant, si on trouve une fonction qui peut être la solution potentielle à une équation donnée, il est en général assez facile de déterminer si c'est le cas en substituant la fonction dans l'équation. Par exemple, on peut montrer que la fonction $y_1(t) = \cos t$ est une solution à

$$y'' + y = 0 \quad (17)$$

quel que soit t . Afin de confirmer cette assertion, on doit noter que $y_1'(t) = -\sin t$ et que $y_1''(t) = -\cos t$. Par conséquent, $y_1''(t) + y_1(t) = 0$. De même, on peut aisément vérifier que $y_2(t) = \sin t$ est aussi une solution à l'équation (17). Bien sûr, cette méthode ne permet pas de résoudre plusieurs équations différentielles, car il existe beaucoup trop de fonctions pour qu'on puisse trouver la bonne solution en faisant un choix arbitraire. Néanmoins, il faut comprendre qu'on peut vérifier si une solution proposée est appropriée en la substituant dans l'équation différentielle. Pour n'importe quel problème, cette vérification devrait être appliquée.

Des questions importantes En ce qui concerne les équations (15) et (17), bien qu'on puisse vérifier si certaines fonctions simples en sont des solutions, il n'existe généralement pas de solutions faciles à trouver. Par conséquent, on doit se poser la question fondamentale suivante : existe-t-il toujours une solution pour une équation de la forme (8) ? La réponse est « non ». Le fait d'écrire une équation sous la forme (8) n'assure pas nécessairement l'existence d'une fonction $y = \phi(t)$ qui satisfait à cette équation. Donc, comment peut-on savoir si une équation particulière admet une solution ? La réponse réside dans les théorèmes énonçant que sous certaines conditions relatives à la fonction f dans l'équation (8), l'équation admet toujours des solutions. Cependant, cette question n'est pas purement mathématique pour au moins deux raisons. Premièrement, si un problème n'admet aucune solution, on aimerait le savoir avant d'investir inutilement du temps et des efforts pour le résoudre. De plus, si un phénomène physique est modélisé mathématiquement par une équation différentielle, alors l'équation doit admettre une solution. Dans le cas contraire, on doit conclure que la modélisation est erronée. Ainsi, un ingénieur ou un scientifique doit vérifier si un modèle mathématique est valable.

Deuxièmement, si on suppose qu'une équation différentielle admet au moins une solution, on doit se demander combien elle en admet et quelles conditions additionnelles doivent être précisées pour obtenir une solution particulière. Il s'agit de la question de l'unicité. En général, les solutions aux équations différentielles contiennent une ou plusieurs constantes d'intégration, comme c'est le cas de la solution (16) à l'équation (15). L'équation (16) décrit une infinité de fonctions correspondant à une infinité de choix possibles pour la constante c . Comme on l'a vu à la section 1.2, si p est précisé en un temps t , cette condition déterminera une valeur spécifique pour c . On n'a pas encore écarté la possibilité que l'équation (15) puisse admettre d'autres solutions qui admettent aussi la valeur de p au temps t . La question de l'unicité a également des implications pratiques. Si on arrive à trouver la solution à un problème donné et si on sait que le problème admet une solution unique, on peut alors être certain d'avoir complètement résolu ce problème. Si l'existence d'autres solutions était possible, on devrait continuer de les chercher.

Voici une troisième question importante : étant donné une équation différentielle de la forme (8), peut-on déterminer une solution et, si c'est possible, de quelle façon ? Bien sûr, si on trouve une solution à l'équation, on vient par le fait même de résoudre le problème d'existence d'une solution. Cependant, si on ne connaît aucun théorème confirmant l'existence de solutions, on pourrait utiliser un ordinateur pour trouver une approximation numérique d'une « solution » inexistante. D'un autre côté, même si on sait qu'une solution existe, il est possible qu'on ne puisse pas exprimer cette solution en termes de fonctions élémentaires, c'est-à-dire à l'aide de fonctions polynomiales, trigonométriques, exponentielles, logarithmiques ou hyperboliques. Malheureusement, c'est le cas pour la plupart des équations différentielles. Par conséquent, bien qu'on étudie surtout des méthodes élémentaires servant à trouver des solutions à des problèmes simples, on doit aussi considérer des méthodes plus générales permettant de résoudre des problèmes plus difficiles.

L'utilisation d'un ordinateur pour résoudre les équations différentielles L'ordinateur est un outil extrêmement utile dans l'étude des équations différentielles. Pendant de nombreuses années, on l'a utilisé dans l'application d'algorithmes numériques pour obtenir des approximations numériques des solutions aux équations différentielles. Actuellement, ces algorithmes ont été ramenés à un niveau de généralité et d'efficacité très élevé. Quelques instructions, rédigées dans un langage de programmation évolué et exécutées (souvent en quelques secondes) sur un ordinateur d'un prix accessible, suffisent pour résoudre numériquement beaucoup d'équations différentielles. Des programmes plus sophistiqués sont aussi disponibles. Ces programmes permettent de résoudre des systèmes complexes et comportent des fonctions indicatrices qui avertissent l'utilisateur d'éventuels problèmes à mesure que ces derniers adviennent.

Les résultats d'un algorithme numérique produisent une table de valeurs qui énumère les valeurs sélectionnées de la variable indépendante et les valeurs correspondantes de la variable dépendante. Avec un logiciel approprié, il est facile de représenter graphiquement la solution à une équation différentielle, peu importe que la solution ait été trouvée numériquement ou qu'elle soit le résultat d'une méthode analytique quelconque. Une telle représentation graphique est souvent beaucoup plus révélatrice et plus utile pour comprendre et interpréter la solution à une équation différentielle qu'une table de valeurs ou une formule analytique compliquée.

Un autre aspect utile de l'ordinateur dans l'étude des équations différentielles est la disponibilité de logiciels extrêmement puissants pouvant exécuter une grande variété d'opérations mathématiques. On peut citer notamment Maple, Derive, Mathematica et MATLAB. Ils peuvent exécuter des calculs numériques très complexes et offrent des fonctions graphiques polyvalentes. De plus, Maple et Mathematica offrent des fonctions analytiques très élaborées. Par exemple, ils peuvent effectuer les étapes analytiques nécessaires dans la résolution de nombreuses équations différentielles, souvent en réponse à une simple commande. Un étudiant qui prévoit étudier les équations différentielles en profondeur devrait se familiariser avec au moins un de ces logiciels et explorer ses nombreuses possibilités.

Ces ressources informatiques ont un effet sur la manière selon laquelle on devrait étudier les équations différentielles. Pour maîtriser l'utilisation des équations différentielles, il

est essentiel de comprendre le fonctionnement des méthodes de résolution, ce qui n'est possible qu'en explorant un nombre suffisant d'exemples de manière approfondie. Cependant, il convient de confier les tâches routinières (souvent répétitives) à un ordinateur, ce qui permet de se concentrer sur la formulation du problème et l'interprétation de la solution. En fait, il faudrait toujours essayer d'utiliser les meilleurs outils et méthodes disponibles pour chaque tâche. La combinaison des méthodes numériques, graphiques et analytiques permet de mieux comprendre le comportement de la solution et le processus modélisé de chaque problème. On doit se rappeler que certaines tâches s'effectuent mieux sur papier, tandis que d'autres nécessitent l'utilisation d'une calculatrice ou d'un ordinateur. Le choix d'une combinaison judicieuse de ces outils relève du bon sens.

Problèmes

- Pour les problèmes 1 à 6, déterminez l'ordre de l'équation différentielle, puis précisez si elle est linéaire ou non linéaire.

1. $t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 2y = \sin t$

2. $(1 + y^2) \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + y = e^t$

3. $\frac{d^4 y}{dt^4} + \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$

4. $\frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$

5. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \sin(t + y) = \sin t$

6. $\frac{d^3 y}{dt^3} + t \frac{dy}{dt} + (\cos^2 t)y = t^3$

- Pour les problèmes 7 à 14, vérifiez si la fonction est une solution à l'équation différentielle.

7. $y'' - y = 0$; $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = \cosh t$

8. $y'' + 2y' - 3y = 0$; $y_1(t) = e^{-3t}$, $y_2(t) = e^t$

9. $ty' - y = t^2$; $y = 3t + t^2$

10. $y^{(4)} + 4y''' + 3y = t$; $y_1(t) = t/3$, $y_2(t) = e^{-t} + t/3$

11. $2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{1/2}$, $y_2(t) = t^{-1}$

12. $t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{-2}$, $y_2(t) = t^{-2} \ln t$

13. $y'' + y = \sec t$, $0 < t < \pi/2$; $y = (\cos t) \ln \cos t + t \sin t$

14. $y' - 2ty = 1$; $y = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2}$

- Pour les problèmes 15 à 18, déterminez les valeurs de r pour lesquelles l'équation différentielle admet des solutions de la forme $y = e^{rt}$.

15. $y' + 2y = 0$

16. $y'' - y = 0$

17. $y'' + y' - 6y = 0$

18. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

- Pour les problèmes 19 et 20, déterminez les valeurs de r pour lesquelles l'équation différentielle admet des solutions de la forme $y = t^r$ pour $t > 0$.

19. $t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0$

20. $t^2 y'' - 4ty' + 4y = 0$

- Pour les problèmes 21 à 24, déterminez l'ordre de l'équation aux dérivées partielles, puis précisez si elle est linéaire ou non linéaire. Les dérivées partielles sont indiquées à l'aide d'indices.

21. $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

22. $u_{xx} + u_{yy} + uu_x + uu_y + u = 0$

23. $u_{xxxx} + 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$

24. $u_t + uu_x = 1 + u_{xx}$

- Pour les problèmes 25 à 28, vérifiez si la fonction est une solution à l'équation aux dérivées partielles.

25. $u_{xx} + u_{yy} = 0$; $u_1(x, y) = \cos x \cosh y$, $u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

26. $\alpha^2 u_{xx} = u_t$; $u_1(x, t) = e^{-\alpha^2 t} \sin x$, $u_2(x, t) = e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x$, λ une constante
27. $a^2 u_{xx} = u_{tt}$; $u_1(x, t) = \sin \lambda x \sin \lambda at$, $u_2(x, t) = \sin(x - at)$, λ une constante
28. $\alpha^2 u_{xx} = u_t$; $u = (\pi/t)^{1/2} e^{-x^2/4\alpha^2 t}$, $t > 0$
29. Suivez les étapes décrites ci-après pour obtenir l'équation du mouvement d'un pendule, soit l'équation (12) de la présente section. Supposez que la tige est rigide et de poids négligeable, que la masse est concentrée en un point et qu'il n'y a pas de friction ou de traînée dans tout le système.
- Supposez que la masse est déplacée en une position arbitraire, indiquée par l'angle θ . Tracez un schéma d'équilibre illustrant les forces qui agissent sur la masse.
 - Appliquez la loi du mouvement de Newton dans la direction tangentielle à l'arc circulaire sur lequel la masse se déplace. La force de traction dans la tige n'intervient alors pas dans l'équation. Vous devez trouver la composante de la force de gravitation dans la direction tangentielle. De plus, l'accélération linéaire, par opposition à l'accélération angulaire, est de $Ld^2\theta/dt^2$, où L est la longueur de la tige.
 - Simplifiez le résultat de la partie b) pour obtenir l'équation (12).
30. Une autre façon d'arriver à l'équation du pendule (12) est basée sur le principe de la conservation de l'énergie.
- Montrez que l'énergie cinétique T du pendule en mouvement est donnée par

$$T = \frac{1}{2} mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$
 - Montrez que l'énergie potentielle V du pendule, par rapport à sa position au repos, est donnée par

$$V = mgL(1 - \cos \theta).$$
 - Selon le principe de la conservation de l'énergie, l'énergie totale $E = T + V$ est constante. Calculez dE/dt , posez cette expression égale à zéro, puis montrez que l'équation résultante se simplifie en l'équation (12).
31. Une troisième façon d'arriver à l'équation du pendule dépend du principe du moment angulaire : le taux de variation du moment angulaire autour d'un point quelconque est égal au moment externe net autour de ce point.
- Montrez que le moment angulaire M , ou moment cinétique, autour du point d'appui est donné par $M = mL^2 d\theta/dt$.
 - Posez dM/dt égal au moment de la force gravitationnelle et montrez que l'équation résultante se simplifie en l'équation (12). Notez que les moments positifs sont orientés dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

1.4 Quelques remarques historiques

Si on ne possède pas de notions sur les équations différentielles et leurs méthodes de résolution, il est difficile de réaliser l'importance de cette branche des mathématiques. De plus, comme le développement des équations différentielles est étroitement lié à celui, en général, des mathématiques, on ne peut l'en dissocier. Dans une perspective historique, nous discutons ici des principales tendances de cette branche et de ses initiateurs les plus reconnus. Les notes en bas de page réparties un peu partout dans le manuel et les références à la fin de chaque chapitre contiennent d'autres données historiques.

Le sujet des équations différentielles a vu le jour grâce aux études en calcul différentiel et intégral menées par Isaac Newton (1642-1727) et Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) au XVII^e siècle. Newton a grandi dans la campagne anglaise, il a étudié au Trinity College, à Cambridge, puis il y est devenu professeur de mathématiques en 1669. Ses découvertes sur le

calcul différentiel et intégral et sur les lois fondamentales de la mécanique remontent à 1665. Il les a communiquées à ses amis mais, comme Newton était très sensible à la critique, il n'a commencé à publier ses résultats qu'en 1687 avec la parution de son ouvrage célèbre, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*. Bien que Newton ait peu étudié les équations différentielles comme telles, ses travaux sur le calcul différentiel et intégral et ses justifications des principes de base en mécanique ont constitué les fondements de leurs applications au XVIII^e siècle. Ces bases ont ensuite été reprises particulièrement par Euler. Newton a classifié les équations différentielles du premier ordre selon les formes $dy/dx = f(x)$, $dy/dx = f(y)$ et $dy/dx = f(x, y)$. Pour ce qui est de la dernière équation, il a élaboré une méthode de résolution faisant appel à une série infinie quand $f(x, y)$ est un polynôme en x et en y . Newton a cessé ses recherches actives en mathématiques au début des années 1690. Toutefois, à diverses occasions, il a résolu quelques problèmes qu'on lui présentait en guise de défi et il a travaillé à la révision et à la publication de résultats de recherche obtenus beaucoup plus tôt. En 1696, Newton est nommé inspecteur de la Monnaie. Il démissionne de son poste de professeur quelques années plus tard. En 1703, il est élu président de la Royal Society, fonction qu'il occupera jusqu'à sa mort. Il a été inhumé à l'abbaye de Westminster.

Gottfried Wilhelm Leibniz est né à Leipzig, en Allemagne. Il a obtenu son doctorat en philosophie à l'âge de 20 ans à l'Université d'Altdorf. Tout au long de sa vie, il a poursuivi des études dans différents domaines. Il était avant tout un autodidacte, son intérêt pour les mathématiques s'étant développé quand il était dans la vingtaine. Leibniz en est arrivé seul aux résultats fondamentaux du calcul différentiel et intégral, bien qu'un peu plus tard que Newton. Toutefois, il a été le premier à les publier en 1684. Leibniz était conscient de la nécessité d'une notation mathématique rigoureuse, et on lui doit la notation dy/dx pour la dérivée et le symbole d'intégration. Il a découvert la méthode de séparation des variables (voir la section 2.1) en 1691, la réduction des équations homogènes à des équations à variables séparables (voir la section 2.1) en 1691 également et la démarche permettant de résoudre des équations linéaires du premier ordre (voir la section 2.3) en 1694. Il a passé sa vie comme ambassadeur et conseiller de nombreuses familles royales allemandes, ce qui lui a permis de voyager et d'entretenir une importante correspondance avec d'autres mathématiciens, surtout avec les frères Bernoulli. Grâce à cette correspondance, il a résolu de nombreux problèmes en équations différentielles au cours de la dernière partie du XVII^e siècle.

Les frères Jacques (1654-1705) et Jean (1667-1748) Bernoulli, originaires de Bâle, ont largement contribué à élaborer des méthodes de résolution des équations différentielles et à élargir leurs champs d'application. Jacques est devenu professeur de mathématiques à Bâle en 1687, et Jean a été nommé au même poste à la mort de son frère en 1705. Les deux hommes étaient querelleurs, jaloux et souvent mêlés à des disputes, particulièrement entre eux. Néanmoins, ils ont tous deux accompli de grandes réalisations dans diverses branches des mathématiques. À partir du calcul différentiel et intégral, ils ont résolu plusieurs problèmes en mécanique en les formulant en termes d'équations différentielles. Par exemple, Jacques Bernoulli a résolu l'équation différentielle $y' = [a^3/(b^2y - a^3)]^{1/2}$ en 1690, et il a utilisé dans le même exposé le mot « intégral » pour la première fois dans son sens moderne. En 1694, Jean Bernoulli a réussi à résoudre l'équation $dy/dx = y/ax$. Un problème auquel les deux frères ont collaboré et qui est devenu la source de nombreuses frictions entre eux est celui qui porte sur le brachistochrone (voir le problème 32 à la section 2.5). Le problème du brachistochrone a aussi été résolu par Leibniz et Newton. On prétend que Newton a reçu le problème tard dans l'après-midi après une épuisante journée au Mint et qu'il l'a résolu le soir même. Il a publié la solution anonymement mais, en la voyant, Jean Bernoulli s'est exclamé : « Ah, je reconnais le lion à sa griffe. »

Daniel Bernoulli (1700-1782), fils de Jean, a émigré à Saint-Petersbourg alors qu'il était encore jeune pour rejoindre la nouvelle Académie de Saint-Petersbourg, mais il est retourné à Bâle en 1733 comme professeur de botanique, puis de physique. Il s'intéressait avant tout aux équations aux dérivées partielles et à leurs applications. Par exemple, on lui attribue l'équation de Bernoulli en mécanique des fluides. Il a aussi été le premier à aborder les fonctions qui, un siècle plus tard, ont été nommées les « fonctions de Bessel » (voir la section 7.7).

Le plus grand mathématicien du XVIII^e siècle, Léonard Euler (1707-1783), a grandi près de Bâle et était un élève de Jean Bernoulli. Il a suivi son ami Daniel Bernoulli à Saint-Petersbourg en 1727. Pendant le reste de sa vie, il a collaboré avec l'Académie de Saint-Petersbourg (1727-1741 et 1766-1783) et l'Académie de Berlin (1741-1766). Euler a été le mathématicien le plus prolifique de tous les temps. Son œuvre comporte plus de 70 gros volumes. Il s'intéressait à tous les domaines des mathématiques et à de nombreux champs d'application. Même s'il a été aveugle durant les 17 dernières années de sa vie, il a poursuivi son travail jusqu'au jour de sa mort. Sa formulation des problèmes de mécanique en langage mathématique et l'élaboration de méthodes pour les résoudre sont dignes d'intérêt. Lagrange a dit du travail d'Euler en mécanique que c'était là «le premier grand travail dans lequel on applique l'analyse à la science du mouvement». Euler a aussi déterminé la condition permettant de vérifier l'exactitude des équations différentielles du premier ordre (voir la section 2.2) entre 1734 et 1735. Il a développé la théorie des facteurs intégrants (voir la section 2.2) dans le même exposé, et il a trouvé la solution générale aux équations linéaires homogènes à coefficients constants (voir les sections 3.5, 3.6, 3.7 et 4.2) en 1743. Euler a appliqué ces derniers résultats aux équations non homogènes en 1750 et 1751. Vers 1750, il a fréquemment utilisé des séries de puissances (voir le chapitre 7) pour résoudre des équations différentielles. Il a aussi proposé une méthode numérique en 1768 et en 1769, il a beaucoup travaillé sur les équations aux dérivées partielles et il a proposé le premier traitement systématique du calcul des variations.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) est devenu professeur de mathématiques à Turin, sa ville natale, à l'âge de 19 ans. Il a succédé à Euler à la présidence de l'Académie de Berlin en 1766, puis il a adhéré à l'Académie de Paris en 1787. Il est surtout connu pour son ouvrage monumental, *Mécanique analytique*, publié en 1788, un traité élégant et détaillé sur la mécanique newtonienne. En ce qui concerne les équations différentielles élémentaires, Lagrange a démontré, entre 1762 et 1765, que la solution générale à une équation différentielle homogène linéaire du n -ième ordre est une combinaison linéaire de n solutions indépendantes (voir les sections 3.3, 3.4 et 4.1). Plus tard, entre 1774 et 1775, il a élaboré en profondeur la méthode de variation des paramètres (voir les sections 3.7 et 4.4). Lagrange est aussi connu pour son travail important sur les équations aux dérivées partielles et sur le calcul des variations.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827) a grandi en Normandie, mais il a déménagé à Paris en 1768, où il a vite fait sa marque dans les cercles scientifiques, gagnant une élection à l'Académie des sciences en 1733. Il excellait dans le domaine de la mécanique céleste. Son plus important ouvrage, le *Traité de mécanique céleste*, a été publié en cinq volumes entre 1799 et 1825. L'équation de Laplace est fondamentale dans de nombreuses branches en physique mathématique, et Laplace l'a approfondie en ce qui concerne l'attraction gravitationnelle. On a donné le nom de ce mathématicien et physicien à la transformée de Laplace (voir le chapitre 6), même si son efficacité à résoudre des équations différentielles n'a été reconnue que beaucoup plus tard.

Vers la fin du XVIII^e siècle, on a découvert de nombreuses méthodes élémentaires pour résoudre des équations différentielles ordinaires. Au XIX^e siècle, on s'est intéressé à l'étude de questions théoriques d'existence et d'unicité et au développement de méthodes moins élémentaires comme celles qui sont basées sur les développements en séries (voir le chapitre 7). Ces méthodes trouvent leur application naturelle dans le plan complexe. Par conséquent, elles ont contribué au développement plus ou moins simultané de la théorie des fonctions analytiques complexes. Jusqu'à un certain point, ces méthodes ont aussi stimulé ce développement. De plus, on a commencé à étudier en profondeur les équations aux dérivées partielles quand on a compris leur rôle primordial en physique mathématique. À ce propos, plusieurs fonctions apparaissant comme des solutions à certaines équations différentielles ordinaires ressortaient de façon répétitive et ont fait l'objet de recherches approfondies. Connues collectivement comme des fonctions transcendentes supérieures, bon nombre d'entre elles portent le nom de mathématiciens tels que Bessel, Legendre, Hermite, Chebyshev et Hankel.

Les équations différentielles pour lesquelles on ne pouvait trouver de solution à l'aide de méthodes analytiques ont mené à l'étude de méthodes d'approximations numériques. Vers 1900,

on a conçu des méthodes d'intégration numérique assez efficaces, mais leur mise en application a été restreinte parce qu'il fallait exécuter les calculs à la main. Au cours des 50 dernières années, l'avènement des ordinateurs, de plus en plus puissants et polyvalents, a permis d'élargir l'étendue des problèmes qu'on peut maintenant aborder à l'aide de méthodes numériques.

Durant cette période, on a développé des intégrateurs très sophistiqués, robustes et accessibles. Des versions conçues pour les ordinateurs personnels permettent aux étudiants de résoudre un grand nombre de problèmes.

Une autre caractéristique de l'étude des équations différentielles au xx^e siècle a été la création de méthodes géométriques ou topologiques, surtout pour les équations non linéaires. Ces méthodes ont pour objectif d'expliquer au moins le comportement qualitatif des solutions d'un point de vue géométrique et analytique. Si on a besoin de plus d'information, on peut en général l'obtenir à l'aide de méthodes numériques. Au cours des dernières années, ces deux tendances ont évolué simultanément. Les ordinateurs, et surtout l'infographie, ont donné un nouvel élan à l'étude des systèmes d'équations différentielles non linéaires. La découverte de phénomènes inattendus tels que les systèmes chaotiques, les attracteurs étranges et les fractals font l'objet d'études approfondies. Ils ouvrent de nouvelles perspectives importantes dans une variété d'applications. Même si nos connaissances sur le sujet sont importantes, les équations différentielles, au xxi^e siècle, demeurent une source fertile de problèmes fascinants et irrésolus.

Références

Les logiciels conçus pour étudier les équations différentielles évoluent trop rapidement pour qu'on puisse donner des références précises dans un manuel comme celui-ci. Une bonne source d'information est disponible dans les sections «Software Review» et «Computer Corner» de la revue *The College Mathematics Journal*, publiée par la Mathematical Association of America.

- Par ailleurs, il existe de nombreux ouvrages qui traitent de l'utilisation de logiciels de calcul symbolique pour les équations différentielles. Les ouvrages suivants sont associés au présent manuel, bien qu'on puisse aussi les utiliser indépendamment :
 CHEUNG, C.-K., G. E. KEOUGH, R. H. GROSS et C. LANDRAITIS. *Getting Started with Mathematica*, 3^e édition, New York, Wiley, 2009.
 MEADE, D. B., M. MAY, C.-K. CHEUNG et G. E. KEOUGH. *Getting Started with Maple*, 3^e édition, New York, Wiley, 2009.
- Pour des lectures plus approfondies concernant l'histoire des mathématiques, reportez-vous à des livres comme ceux qui sont énumérés ci-dessous :
 BOYER, C. B. et U. C. MERZBACH. *A History of Mathematics*, 2^e édition, New York, Wiley, 1989.
 KLINE, M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, 3 vol., New York, Oxford University Press, 1990.
- L'ouvrage suivant est un complément utile sur les premiers développements des équations différentielles :
 INCE, E. L. *Ordinary Differential Equations*, Londres, Longmans, Green, 1927 ; New York, Dover, 1956.
- Voici une source encyclopédique d'information sur la vie et les réalisations des mathématiciens d'autrefois :
 GILLESPIE, C. C. (sous la direction de). *Dictionary of Scientific Biography*, 15 vol., New York, Scribner's, 1971.
 KOERTGE, N. (sous la direction de). *New Dictionary of Scientific Biography*, 8 vol., New York, Scribner's, 2007.
 KOERTGE, N. (sous la direction de). *Complete Dictionary of Scientific Biography*, New York, Scribner's, 2007 [livre numérique].

Les équations différentielles du premier ordre

Ce chapitre portera sur les équations différentielles du premier ordre du type

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad (1)$$

où f est une fonction de deux variables donnée. Toute fonction différentiable $y = \phi(t)$ qui satisfait à cette équation quel que soit t dans un certain intervalle s'appelle une solution. On aura pour objectif de déterminer si de telles fonctions existent et, le cas échéant, de développer des méthodes pour les trouver. Malheureusement, pour une fonction arbitraire f , il n'y a pas de méthode générale pour résoudre l'équation en termes de fonctions élémentaires. On décrira plutôt diverses méthodes, chacune étant applicable à une certaine sous-classe d'équations du premier ordre dont les plus importantes sont les équations à variables séparables (voir la section 2.1), les équations exactes (voir la section 2.2) et les équations linéaires (voir la section 2.3). On discutera de questions théoriques portant sur l'existence et l'unicité des solutions. Dans la section 2.4, on décrira certaines applications importantes des équations différentielles du premier ordre.

2.1 Les équations à variables séparables

Dans la section 1.2, nous avons utilisé une intégration directe pour résoudre des équations linéaires du premier ordre de la forme

$$\frac{dy}{dt} = ay + b, \quad (2)$$

où a et b sont des constantes. Maintenant, nous démontrerons que cette méthode s'applique à une classe d'équations beaucoup plus grande. Dans cette section, nous utiliserons x plutôt que t pour noter la variable indépendante. Nous procéderons ainsi pour deux raisons. D'abord, différentes lettres sont souvent utilisées pour noter les variables d'une équation différentielle. C'est pourquoi on ne devrait pas prendre l'habitude de toujours se servir des mêmes lettres. En particulier, x est souvent utilisé comme variable indépendante. Par ailleurs, nous réserverons t pour un autre usage qui sera expliqué plus loin dans la présente section.

La forme générale de l'équation différentielle du premier ordre est

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (3)$$

Ici, on considérera une sous-classe d'équations du premier ordre que l'on peut intégrer directement.

Afin de déterminer cette classe d'équations, on considère le cas où on peut écrire l'équation (3) sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = G(x)H(y), \quad (4)$$

où G est une fonction qui dépend seulement de x et H est une fonction qui dépend seulement de y . Sous l'hypothèse que $H(y) \neq 0$ et en posant $M(x) = -G(x)$ et $N(y) = \frac{1}{H(y)}$, on peut réécrire l'équation (2) sous la forme

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (5)$$

Une telle équation est une **équation à variables séparables**, car si on l'écrit sous la forme différentielle

$$M(x) dx + N(y) dy = 0, \quad (6)$$

alors les termes contenant chaque variable peuvent être séparés par le signe d'égalité. La forme différentielle (6) est aussi symétrique et tend à réduire la distinction entre la variable indépendante et la variable dépendante.

Note : Une équation différentielle d'ordre 1 de variable indépendante x et de variable dépendante y est dite à variables séparables si on peut la réécrire sous l'une des trois formes suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= G(x)H(y) \\ M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} &= 0 \\ M(x) dx + N(y) dy &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 1

Montrez que l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2} \quad (7)$$

est une équation à variables séparables, puis trouvez une équation correspondant à ses courbes-solutions.

En posant $G(x) = x^2$ et $H(y) = \frac{1}{1-y^2}$, on écrit l'équation (7) sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = G(x)H(y).$$

Cette équation est de la forme (4) et, par conséquent, il s'agit d'une équation à variables séparables.

Si on écrit l'équation (7) ainsi :

$$-x^2 + (1-y^2) \frac{dy}{dx} = 0, \quad (8)$$

cette équation est alors de la forme (5) et, par conséquent, il s'agit d'une équation à variables séparables. Ensuite, on note que le premier terme de l'équation (8) est la dérivée de $-x^3/3$ et que le deuxième terme est la dérivée par rapport à x de $y - y^3/3$ (si on applique la règle de la dérivée en chaîne). Alors, on peut écrire l'équation (8) comme

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{3} \right) + \frac{d}{dx} \left(y - \frac{y^3}{3} \right) = 0,$$

ou

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{x^3}{3} + y - \frac{y^3}{3} \right) = 0.$$

► Et donc

$$-x^3 + 3y - y^3 = c \quad (9)$$

(où c est une constante arbitraire) est une équation décrivant les courbes-solutions de l'équation (7). La figure 2.1.1 illustre un champ de direction et différentes courbes-solutions. On peut trouver l'équation de la courbe-solution passant par un point particulier (x_0, y_0) en substituant respectivement x_0 et y_0 à x et y dans l'équation (9) et en déterminant la valeur correspondante de c . Toute fonction différentiable $y = \phi(x)$ qui satisfait à l'équation (9) est une solution à l'équation (7).

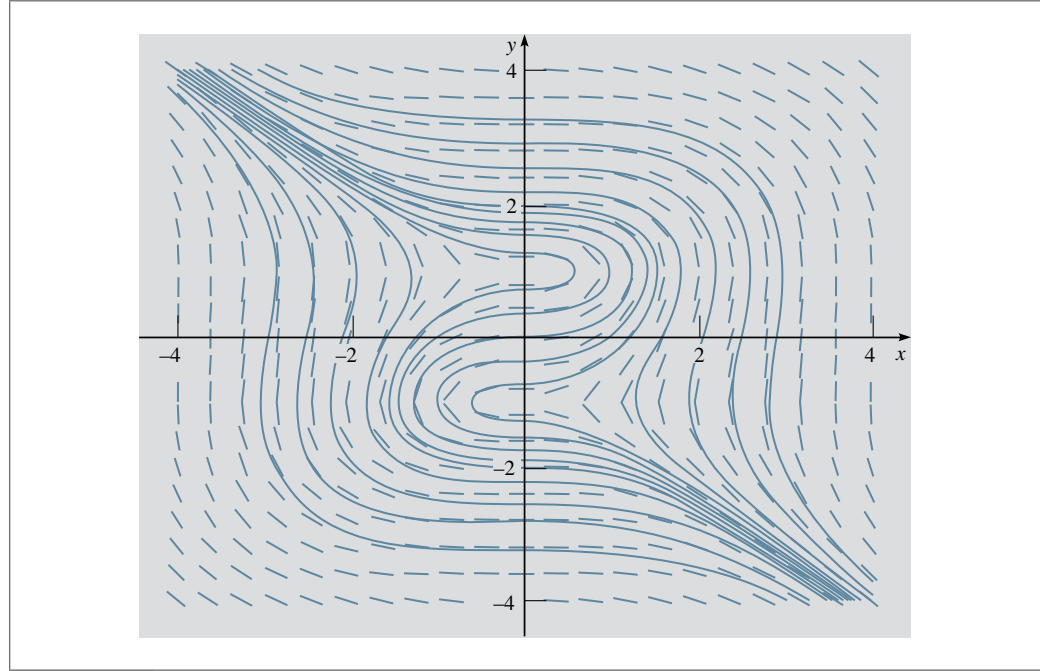


Figure 2.1.1 Champ de direction et courbes-solutions de $y' = x^2/(1 - y^2)$.

Essentiellement, on peut suivre la même démarche avec n'importe quelle équation à variables séparables. Si on revient à l'équation (5), on suppose que H_1 et H_2 sont des fonctions telles que

$$H'_1(x) = M(x), \quad H'_2(y) = N(y); \quad (10)$$

alors, l'équation (5) devient

$$H'_1(x) + H'_2(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (11)$$

En vertu de la règle de la dérivée en chaîne, on a

$$H'_2(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} H_2(y). \quad (12)$$

Par conséquent, l'équation (11) devient

$$\frac{d}{dx} [H_1(x) + H_2(y)] = 0. \quad (13)$$

En intégrant l'équation (13), on obtient

$$H_1(x) + H_2(y) = c, \quad (14)$$

où c est une constante arbitraire. Toute fonction différentiable $y = \phi(x)$ qui satisfait à l'équation (14) est une solution à l'équation (5). En d'autres mots, l'équation (14) définit la solution sous forme implicite. Les fonctions H_1 et H_2 sont respectivement des intégrales indéfinies de M

et de N . En pratique, on obtient généralement l'équation (14) à partir de l'équation (6) en intégrant le premier terme par rapport à x et le deuxième terme par rapport à y .

En plus de l'équation différentielle, si on ajoute une condition initiale

$$y(x_0) = y_0, \quad (15)$$

alors la solution à l'équation (5) qui satisfait à cette condition est obtenue en posant $x = x_0$ et $y = y_0$ dans l'équation (14). On obtient

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0). \quad (16)$$

En posant cette valeur de c dans l'équation (13) et en notant que

$$H_1(x) - H_1(x_0) = \int_{x_0}^x M(s) ds, \quad H_2(y) - H_2(y_0) = \int_{y_0}^y N(s) ds,$$

on obtient

$$\int_{x_0}^x M(s) ds + \int_{y_0}^y N(s) ds = 0. \quad (17)$$

L'équation (17) définit implicitement la solution à l'équation différentielle (5) qui satisfait à la condition initiale (15). Afin de déterminer une formule explicite pour la solution, on doit résoudre l'équation (17) pour trouver y en fonction de x . Malheureusement, il est souvent impossible de le faire de manière analytique ; dans de tels cas, on doit recourir à des méthodes numériques pour trouver des valeurs approximatives pour y qui correspondent à des valeurs spécifiques de x .

Exemple 2

Résolvez le problème de valeur initiale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1, \quad (18)$$

puis déterminez l'intervalle dans lequel la solution existe.

On peut écrire l'équation différentielle comme suit :

$$2(y-1) dy = (3x^2 + 4x + 2) dx.$$

En intégrant le premier membre par rapport à y et le second membre par rapport à x , on obtient

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c, \quad (19)$$

où c est une constante arbitraire. Pour déterminer la solution qui satisfait à la condition initiale, on pose $x = 0$ et $y = -1$ dans l'équation (19) et on obtient $c = 3$. Ainsi, la solution au problème de valeur initiale est donnée sous forme implicite par

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3. \quad (20)$$

Pour obtenir la solution sous forme explicite, on doit réécrire l'équation (20) avec y en fonction de x . Cette démarche est simple, car l'équation (20) est quadratique en y et on obtient

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}. \quad (21)$$

L'équation (21) donne deux solutions à l'équation différentielle. Cependant, une seule solution satisfait à la condition initiale donnée. Il s'agit de la solution qui correspond au signe négatif de l'équation (21). Par conséquent, on obtient finalement

$$y = \phi(x) = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} \quad (22)$$

comme solution au problème de valeur initiale (18). Il faut noter que si on avait choisi par erreur le signe positif dans l'équation (21), on aurait alors obtenu la solution à l'équation différentielle qui satisfait à la condition initiale $y(0) = 3$. Finalement, pour déterminer l'intervalle dans lequel la solution (22) est valide, on doit trouver l'intervalle dans lequel l'expression sous la racine est positive. La seule racine réelle de cette expression est $x = -2$. Donc, l'intervalle recherché est $x > -2$. La figure 2.1.2 illustre la solution au problème de valeur initiale et d'autres courbes-solutions à l'équation différentielle. Il faut

- noter que la limite de l'intervalle de validité de la solution (21) est déterminée par le point $(-2, 1)$, où la droite tangente est verticale. La courbe noire passe par le point $(0, -1)$ et est donc la solution au problème de valeur initiale (18). Notez que la limite de l'intervalle de validité de la solution (22) est déterminée par le point $(-2, 1)$, où la droite tangente est verticale.

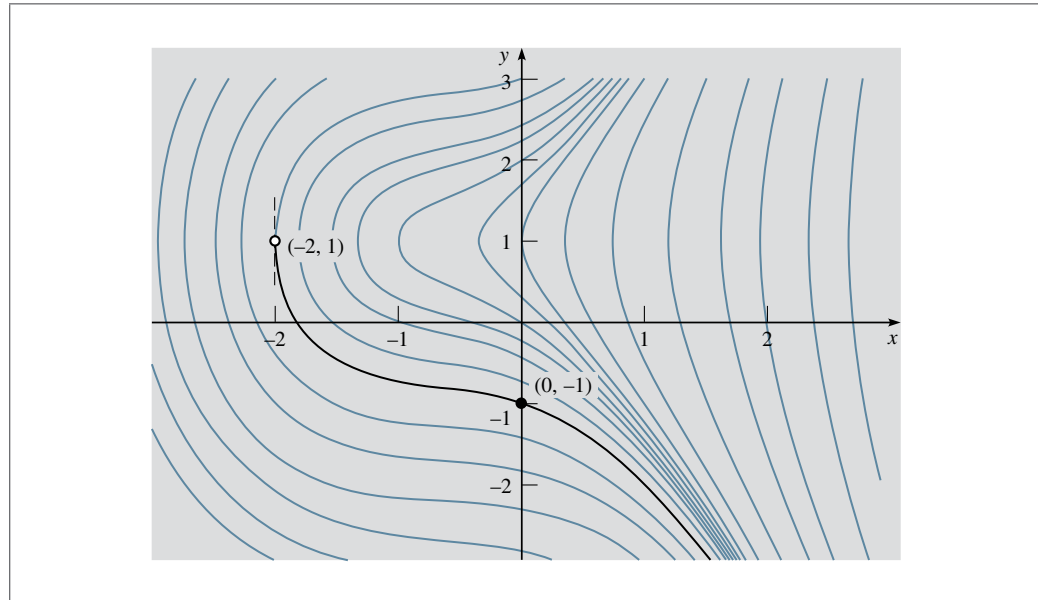


Figure 2.1.2 Courbes-solutions de $y' = (3x^2 + 4x + 2)/(2(y - 1))$; la solution de la valeur initiale $y(0) = -1$ est donnée sur la courbe noire et est valide pour $x > -2$.

Exemple 3

Résolvez l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3} \quad (23)$$

et représentez graphiquement plusieurs courbes-solutions. Trouvez aussi la solution qui passe par le point $(0, 1)$ et déterminez son intervalle de validité.

En récrivant l'équation (23) sous la forme

$$(4 + y^3) dy = (4x - x^3) dx,$$

en intégrant le premier membre par rapport à y et le second membre par rapport à x , en multipliant par 4, puis en réarrangeant les termes, on obtient

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = c, \quad (24)$$

où c est une constante arbitraire. Toute fonction différentiable $y = \phi(x)$ qui satisfait à l'équation (24) est une solution à l'équation différentielle (23). Les courbes-solutions de l'équation (24) pour diverses valeurs de c sont illustrées dans la figure 2.1.3, à la page suivante.

Pour trouver la solution particulière qui passe par le point $(0, 1)$, on pose $x = 0$ et $y = 1$ dans l'équation (24), ce qui permet d'obtenir $c = 17$. Par conséquent, la solution en question est donnée implicitement par

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = 17. \quad (25)$$

Cette solution est représentée par la courbe noire dans la figure 2.1.3. Son intervalle de validité s'étend de chaque côté du point initial tant que la fonction demeure différentiable. D'après la figure, on voit que l'intervalle se termine quand on atteint les points où la droite tangente est verticale. Il s'ensuit de l'équation différentielle (23) que ces points sont les points où $4 + y^3 = 0$, ou $y = (-4)^{1/3} \approx -1,5874$. D'après l'équation (25), les valeurs correspondantes de x sont $x \approx \pm 3,3488$. Ces points sont indiqués dans le graphique de la figure 2.1.3.

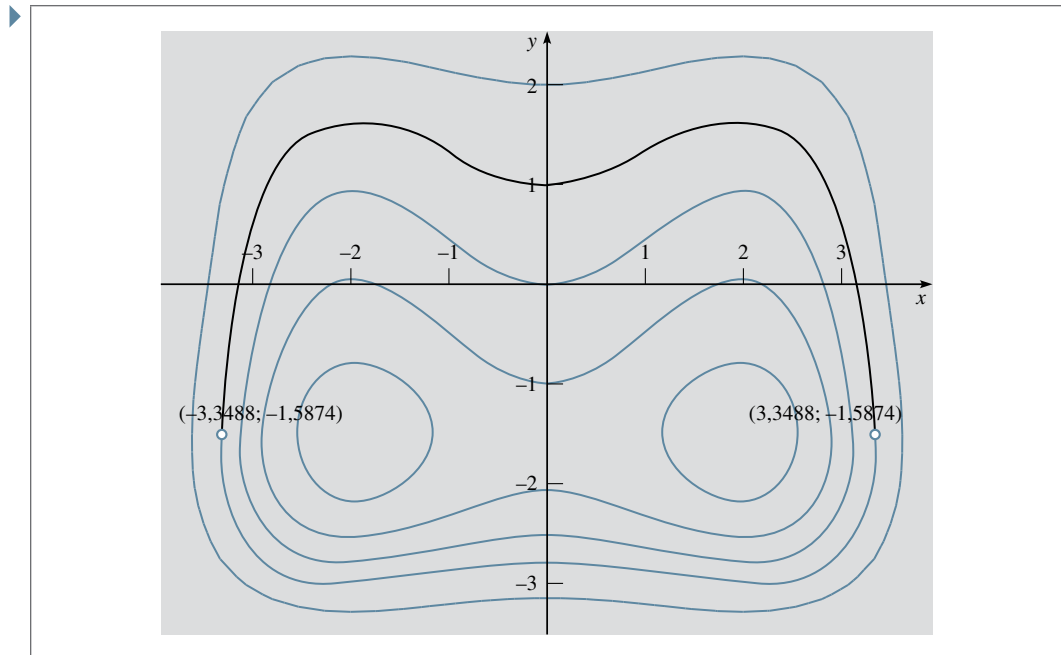


Figure 2.1.3 Les courbes-solutions de $y' = (4x - x^3)/(4 + y^3)$. La solution qui passe par le point $(0, 1)$ est illustrée par la courbe noire.

Note 1 : Parfois, une équation de la forme (3)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

admet une solution constante $y = y_0$. Une telle solution est généralement facile à trouver, car si $f(x, y_0) = 0$ pour une valeur quelconque y_0 et pour toutes les valeurs de x , alors la fonction constante $y = y_0$ est une solution à l'équation différentielle (2). Par exemple, l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y-3)\cos x}{1+2y^2} \quad (26)$$

admet la solution constante $y = 3$. D'autres solutions à cette équation peuvent être trouvées en séparant les variables et en intégrant les membres de l'équation.

Note 2 : On peut parfois faciliter l'étude d'une équation non linéaire du premier ordre en considérant x et y comme des fonctions d'une troisième variable t . Alors, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \quad (27)$$

Si l'équation différentielle est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x, y)}{G(x, y)}, \quad (28)$$

et si on compare les numérateurs et les dénominateurs des équations (27) et (28), on obtient le système d'équations

$$dx/dt = G(x, y), \quad dy/dt = F(x, y). \quad (29)$$

À première vue, il peut sembler invraisemblable de vouloir simplifier un problème en remplaçant une seule équation par deux autres. Toutefois, dans certains cas, le système (29) se prête mieux à l'examen que la simple équation (28). L'étude des systèmes d'équations différentielles sera abordée au chapitre 5.

Remarque : Dans l'exemple 2, il n'était pas difficile d'exprimer explicitement y en fonction de x et de déterminer l'intervalle exact dans lequel la solution existe. Cependant, cette situation est exceptionnelle et souvent, il est préférable de laisser la solution sous une forme implicite, comme dans les exemples 1 et 3. Ainsi, dans les problèmes ci-dessous et dans les autres chapitres de cet ouvrage, l'expression « résolvez l'équation différentielle suivante » signifiera toujours de trouver la solution de manière explicite s'il est raisonnable de le faire ou, dans le cas contraire, de trouver une forme implicite.

Les équations homogènes de la forme $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ Ici on considère une sous-classe d'équations différentielles du premier ordre que l'on peut transformer en équations différentielles à variables séparables.

Soit l'équation différentielle de variable indépendante x de la forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \quad (30)$$

Si on peut exprimer le membre de droite de l'équation (30) comme une fonction qui dépend du quotient y/x , alors on dit que l'équation est « homogène » de la forme

$$\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right). \quad (31)$$

On peut toujours transformer de telles équations en équations à variables séparables en effectuant un changement de variable approprié. Avant de passer à la résolution de ce type d'équations, nous allons présenter une approche pour les identifier.

Voyons tout d'abord la définition de la **fonction homogène de degré n** . Une fonction f de variables x et y est dite homogène de degré n si $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$

Remarque : Si les fonctions M et N sont homogènes de même degré, alors l'équation différentielle sous la forme

$$M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

est homogène.

Pour prouver ce résultat, on note d'abord que les fonctions M et N sont homogènes de degré n . Par conséquent, on a $M(tx, ty) = t^n M(x, y)$ et $N(tx, ty) = t^n N(x, y)$.

En posant $t = \frac{1}{x}$, on a

$$M\left(\frac{x}{x}, \frac{y}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^n M(x, y) \Rightarrow M(x, y) = x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right).$$

De façon similaire, on a $N(x, y) = x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right)$.

À partir de ces résultats, l'équation différentielle $M(x, y) + N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$ devient

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{x^n M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{x^n N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = -\frac{M\left(1, \frac{y}{x}\right)}{N\left(1, \frac{y}{x}\right)} = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

ce qui complète la preuve.

Pour résoudre l'équation (30), on introduit une nouvelle variable dépendante v telle que $v = \frac{y}{x}$ ou $y = xv(x)$. Après dérivation, on obtient une nouvelle expression de dy/dx en fonction de x , de v et de dv/dx :

$$\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}.$$

En remplaçant la nouvelle expression de dy/dx dans l'équation différentielle (31), on obtient

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right) = g(v)$$

ou

$$v - g(v) + x \frac{dv}{dx} = 0. \quad (32)$$

Si on suppose que $v - g(v) \neq 0$, et en divisant les deux membres de l'équation (32) par $x(v - g(v))$, on obtient l'équation à variables séparables

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{v - g(v)} \frac{dv}{dx} = 0.$$

On peut résoudre cette dernière équation par intégration directe pour déterminer v en fonction de x , puis en remplaçant v par y/x , on obtient y , la solution de l'équation originale.

Exemple 4

Résolvez l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 4x}{x - y}. \quad (33)$$

En divisant le numérateur et le dénominateur du membre de droite de l'équation (33) par x , on peut la réécrire sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(y/x) - 4}{1 - (y/x)} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

et, par conséquent, l'équation (33) est homogène.

Soit $v = y/x$ ou $y = xv(x)$, on a par dérivation $\frac{dy}{dx} = v + x \frac{dv}{dx}$.

Ainsi, l'équation (33) devient

$$v + x \frac{dv}{dx} = \frac{v - 4}{1 - v}$$

ou

$$v - \frac{v - 4}{1 - v} + x \frac{dv}{dx} = 0$$

ou encore

$$\frac{v^2 - 4}{v - 1} + x \frac{dv}{dx} = 0. \quad (34)$$

On vérifie aisément que les fonctions constantes $v = \pm 2$ sont des solutions de l'équation différentielle en v . Par conséquent, $y = \pm 2x$ sont des solutions triviales à l'équation (33). Pour trouver d'autres solutions, on suppose que $v^2 - 4 \neq 0$ ($v \neq \pm 2$), et on divise l'équation (34) par $x \left(\frac{v^2 - 4}{1 - v} \right)$ pour obtenir l'équation à variables séparables

$$\frac{1}{x} + \frac{v - 1}{v^2 - 4} \frac{dv}{dx} = 0,$$

dont la solution est donnée sous la forme implicite par

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{(v - 1) dv}{v^2 - 4} = 0. \quad (35)$$

Pour calculer $\int \frac{(v - 1) dv}{v^2 - 4}$, on utilise le développement en fractions partielles

$$\frac{v - 1}{v^2 - 4} = \frac{v - 1}{(v - 2)(v + 2)} = \frac{a}{v - 2} + \frac{b}{v + 2} = \frac{a(v + 2) + b(v - 2)}{v^2 - 4}, \quad (36)$$

► où il faut déterminer les coefficients a et b . En égalisant les numérateurs des second et quatrième termes de l'équation (36), on obtient

$$v - 1 = a(v + 2) + b(v - 2)$$

et cette équation doit être valide quel que soit v . En particulier, en posant $v = 2$, on obtient $a = 1/4$. De la même manière, en posant $v = -2$, on trouve $b = 3/4$. On a ainsi

$$\frac{v-1}{v^2-4} = \frac{1}{4} \frac{1}{v-2} + \frac{3}{4} \frac{1}{v+2}.$$

L'équation (34) devient ainsi

$$\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{4} \int \frac{dv}{v-2} + \frac{3}{4} \int \frac{dv}{v+2} = 0.$$

Par conséquent,

$$\ln |x| + \frac{1}{4} \ln |v-2| + \frac{3}{4} \ln |v+2| = C$$

ou

$$\frac{1}{4} (\ln |v-2| + 3 \ln |v+2|) = C - \ln |x|$$

ou encore

$$\ln (|v+2|^3 |v-2|) = 4C + \ln \left(\frac{1}{x^4} \right)$$

et donc

$$|v+2|^3 |v-2| = \frac{e^{4C}}{x^4},$$

où C est une constante arbitraire.

En remplaçant v par y/x , on obtient

$$\frac{|y+2x|^3 |y-2x|}{x^4} = \frac{e^{4C}}{x^4}.$$

Finalement, la solution est donnée sous la forme implicite par

$$|y+2x|^3 |y-2x| = c,$$

où $c = e^{4C}$ est aussi une constante arbitraire.

Problèmes

■ Pour les problèmes 1 à 8, résolvez l'équation différentielle.

1. $y' = x^2/y$

2. $y' = x^2/y(1+x^3)$

3. $y' + y^2 \sin x = 0$

4. $y' = (3x^2 - 1)/(3 + 2y)$

5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$

6. $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$

7. $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^{-y}}$

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1 + y^2}$

► ■ Pour les problèmes 9 à 20, procédez comme suit.

a) Trouvez la solution au problème de valeur initiale sous forme explicite.

b) Tracez le graphique de la solution.

c) Déterminez (au moins approximativement) l'intervalle dans lequel la solution est définie.

Ⓢ 9. $y' = (1 - 2x)y^2$, $y(0) = -1/6$

Ⓢ 10. $y' = (1 - 2x)/y$, $y(1) = -2$

Ⓢ 11. $x dx + ye^{-x} dy = 0$, $y(0) = 1$

Ⓢ 12. $dr/d\theta = r^2/\theta$, $r(1) = 2$

Ⓢ 13. $y' = 2x/(y + x^2y)$, $y(0) = -2$

Ⓢ 14. $y' = xy^3(1 + x^2)^{-1/2}$, $y(0) = 1$

Ⓢ 15. $y' = 2x/(1 + 2y)$, $y(2) = 0$

Ⓢ 16. $y' = x(x^2 + 1)/4y^3$, $y(0) = -1/\sqrt{2}$

Ⓢ 17. $y' = (3x^2 - e^x)/(2y - 5)$, $y(0) = 1$

Ⓢ 18. $y' = (e^{-x} - e^x)/(3 + 4y)$, $y(0) = 1$

Ⓢ 19. $\sin 2x dx + \cos 3y dy = 0$, $y(\pi/2) = \pi/3$

Ⓢ 20. $y^2(1 - x^2)^{1/2} dy = \arcsin x dx$, $y(0) = 0$

■ On peut obtenir certains résultats demandés dans les problèmes 21 à 28 soit en résolvant de manière analytique les équations données, soit en traçant le graphique des approximations numériques des solutions. Essayez de vous faire une opinion sur les avantages et les inconvénients de chaque approche.

Ⓢ 21. Résolvez le problème de valeur initiale

$$y' = (1 + 3x^2)/(3y^2 - 6y), \quad y(0) = 1$$

puis déterminez l'intervalle dans lequel la solution est valide.

Suggestion: Pour trouver l'intervalle de définition, recherchez les points où la courbe-solution admet une tangente verticale.

Ⓢ 22. Résolvez le problème de valeur initiale

$$y' = 3x^2/(3y^2 - 4), \quad y(1) = 0$$

puis déterminez l'intervalle dans lequel la solution est valide.

Suggestion: Pour trouver l'intervalle de définition, recherchez les points où la courbe-solution admet une tangente verticale.

Ⓢ 23. Résolvez le problème de valeur initiale

$$y' = 2y^2 + xy^2, \quad y(0) = 1$$

puis déterminez où la solution atteint sa valeur minimale.

Ⓢ 24. Résolvez le problème de valeur initiale

$$y' = (2 - e^x)/(3 + 2y), \quad y(0) = 0$$

puis déterminez où la solution atteint sa valeur maximale.

Ⓢ 25. Résolvez le problème de valeur initiale

$$y' = 2 \cos 2x/(3 + 2y), \quad y(0) = -1$$

puis déterminez où la solution atteint sa valeur maximale.

Ⓢ 26. Résolvez le problème de valeur initiale

$$y' = 2(1 + x)(1 + y^2), \quad y(0) = 0$$

puis déterminez où la solution atteint sa valeur minimale.

Ⓢ 27. Considérez le problème de valeur initiale

$$y' = ty(4 - y)/3, \quad y(0) = y_0$$

a) Déterminez en quoi le comportement de la solution dépend de la valeur initiale y_0 lorsque t augmente.

b) Supposez que $y_0 = 0,5$. Trouvez le temps T auquel la solution atteint pour la première fois la valeur 3,98.

► 28. Considérez le problème de valeur initiale

$$y' = ty(4 - y)/(1 + t), \quad y(0) = y_0 > 0.$$

- a) Déterminez comment la solution se comporte lorsque $t \rightarrow \infty$.
- b) Si $y_0 = 2$, trouvez le temps T auquel la solution atteint pour la première fois la valeur 3,99.
- c) Trouvez l'ensemble des valeurs initiales pour lesquelles la solution se situe dans l'intervalle $3,99 < y < 4,01$ au temps $t = 2$.

29. Résolvez l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ay + b}{cy + d},$$

où a, b, c et d sont des constantes.

■ Pour les problèmes 30 à 37, procédez comme suit.

- a) Montrez que l'équation est homogène.
- b) Résolvez l'équation différentielle.
- c) Tracez un champ de direction et quelques courbes-solutions. Vous devez vous rappeler que le second membre d'une équation différentielle homogène dépend seulement du quotient y/x . Cela signifie que les courbes-solutions ont la même pente en tout point sur toute droite donnée qui passe par l'origine, même si la pente change d'une droite à l'autre. Par conséquent, le champ de direction et les courbes-solutions sont symétriques par rapport à l'origine. Votre graphique met-il en évidence cette propriété de symétrie ?

30. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$

31. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

32. $\frac{dy}{dx} = \frac{4y - 3x}{2x - y}$

33. $\frac{dy}{dx} = -\frac{4x + 3y}{2x + y}$

34. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y}$

35. $(x^2 + 3xy + y^2) dx - x^2 dy = 0$

36. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$

37. $\frac{dy}{dx} = \frac{3y^2 - x^2}{2xy}$

2.2 Les équations exactes et les facteurs intégrants

Pour les équations du premier ordre, il existe des méthodes d'intégration qu'on peut appliquer à différentes classes de problèmes. Les plus importantes sont les équations à variables séparables qu'on a vues précédemment. Dans la présente section, nous allons considérer une classe d'équations appelées **équations exactes** pour lesquelles il existe également une méthode de résolution bien définie. Cependant, il faut se rappeler que les équations du premier ordre qu'on peut résoudre à l'aide de méthodes d'intégration élémentaires sont particulières. La plupart des équations du premier ordre ne peuvent être résolues de cette manière.

Exemple 1

Résolvez l'équation différentielle

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0. \quad (1)$$

L'équation n'est pas à variables séparables, donc la méthode qui convient à ce type d'équations n'est pas applicable dans ce cas. Cependant, on note que la fonction $\psi(x, y) = x^2 + xy^2$ admet la propriété selon laquelle

$$2x + y^2 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad 2xy = \frac{\partial \psi}{\partial y}. \quad (2)$$

▶ Par conséquent, on peut réécrire l'équation différentielle comme suit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0. \quad (3)$$

Supposons que y est une fonction de x . En appliquant la règle de la dérivée en chaîne, on peut écrire l'équation (3) sous la forme équivalente

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0. \quad (4)$$

Par conséquent,

$$\psi(x, y) = x^2 + xy^2 = c, \quad (5)$$

où c est une constante arbitraire, est une équation qui définit les solutions à l'équation (1) de manière implicite.

Pour résoudre l'équation (1), la principale étape consistait à reconnaître qu'il existe une fonction ψ satisfaisant à l'équation (2). De manière plus générale, posons l'équation suivante :

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0. \quad (6)$$

Supposons qu'on puisse déterminer une fonction ψ telle que

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = M(x, y), \quad \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \quad (7)$$

et telle que $\psi(x, y) = c$ définit $y = \phi(x)$ de manière implicite comme une fonction différentiable de x . Alors,

$$M(x, y) + N(x, y)y' = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\psi[x, \phi(x)]$$

et l'équation différentielle (6) devient

$$\frac{d}{dx}\psi[x, \phi(x)] = 0. \quad (8)$$

Dans ce cas, on dit que l'équation (6) est **exacte**. Les solutions à l'équation (6), ou l'équation équivalente (8), sont données implicitement par

$$\psi(x, y) = c, \quad (9)$$

où c est une constante arbitraire.

Dans l'exemple 1, il a été relativement facile de voir que l'équation différentielle était exacte et de déterminer sa solution en reconnaissant, du moins implicitement, la fonction auxiliaire ψ .

Pour des équations plus compliquées, il ne sera peut-être pas possible de le faire si facilement. Comment peut-on savoir si une équation donnée est exacte, et si elle l'est, comment peut-on déterminer la fonction $\psi(x, y)$? Le théorème ci-dessous répond à la première question et sa démonstration fournit un moyen de répondre à la seconde.

Théorème 2.2.1

Soit les fonctions M , N , M_y et N_x , où les indices indiquent des dérivées partielles, continues dans la région rectangulaire¹ R : $\alpha < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$. Alors, l'équation (6),

$$M(x, y) + N(x, y)y' = 0,$$

1. Il n'est pas essentiel que la région soit rectangulaire ; il suffit qu'elle soit simplement connexe, c'est-à-dire que la région n'ait pas de trou à l'intérieur. Par exemple, les régions rectangulaires ou circulaires sont simplement connexes, mais une région annulaire ne l'est pas. On peut trouver plus d'information à ce sujet dans des manuels d'analyse.

est une équation différentielle exacte dans R si et seulement si

$$M_y(x, y) = N_x(x, y) \quad (10)$$

en tout point de R . Cela signifie qu'il existe une fonction ψ satisfaisant aux équations (7),

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y),$$

si et seulement si M et N satisfont à l'équation (10).

La preuve de ce théorème comprend deux parties. Premièrement, on montre que s'il y a une fonction ψ telle que les équations (7) sont vérifiées, alors il s'ensuit que l'équation (10) est satisfaite. En calculant M_y et N_x à partir des équations (7), on obtient

$$M_y(x, y) = \psi_{xy}(x, y), \quad N_x(x, y) = \psi_{yx}(x, y). \quad (11)$$

Puisque M_y et N_x sont continues, il s'ensuit que ψ_{xy} et ψ_{yx} sont aussi continues. Cela nous assure de leur égalité, et l'équation (10) en découle.

Maintenant, on montre que si M et N satisfont à l'équation (10), alors l'équation (6) est exacte. La démonstration est basée sur la construction d'une fonction ψ qui satisfait aux équations (7),

$$\psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \psi_y(x, y) = N(x, y).$$

En intégrant la première des équations (7) en fonction de x et en considérant y constant, on obtient

$$\psi(x, y) = Q(x, y) + h(y), \quad (12)$$

où $Q(x, y)$ est une fonction différentiable quelconque telle que $\partial Q(x, y)/\partial x = M(x, y)$. Par exemple, on peut choisir

$$Q(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y) ds, \quad (13)$$

où x_0 est une certaine constante spécifiée dans l'intervalle $\alpha < x_0 < \beta$. La fonction h dans l'équation (12) est une fonction différentiable arbitraire de y et joue le rôle de la constante arbitraire. Maintenant, on doit montrer qu'il est toujours possible de choisir $h(y)$ de sorte que la seconde des équations (7) est satisfaite, c'est-à-dire que $\psi_y = N$. En dérivant l'équation (12) par rapport à y et en posant le résultat égal à $N(x, y)$, on obtient

$$\psi_y(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) + h'(y) = N(x, y).$$

Puis, en isolant $h'(y)$, on obtient

$$h'(y) = N(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y). \quad (14)$$

Pour déterminer $h(y)$ à partir de l'équation (14), le membre de droite de l'équation, malgré son apparence, doit être une fonction de y seulement. Une façon d'établir ce fait consiste à montrer que sa dérivée par rapport à x est nulle. Par conséquent, on dérive le membre de droite de l'équation (14) par rapport à x et on obtient

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y). \quad (15)$$

En inversant l'ordre de dérivation du second terme de l'équation (15), on obtient

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y),$$

ou, puisque $\partial Q/\partial x = M$,

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial M}{\partial y}(x, y),$$

qui est nul en vertu de l'équation (10). Par conséquent, malgré son apparence, le membre de droite de l'équation (14) ne dépend pas, en fait, de x . Ensuite, on détermine $h(y)$ en intégrant l'équation (14) et, après avoir substitué cette fonction dans l'équation (12), on obtient la fonction requise $\psi(x, y)$. Cela termine la démonstration du théorème 2.2.1.

Il est possible d'obtenir une expression explicite pour $\psi(x, y)$ en termes d'intégrales (voir le problème 17), mais pour résoudre des équations exactes spécifiques, il est généralement plus facile de simplement répéter le procédé utilisé dans la démonstration précédente. Autrement dit, on intègre $\psi_x = M$ par rapport à x , en incluant une fonction arbitraire $h(y)$ plutôt qu'une constante arbitraire, puis on dérive le résultat par rapport à y et on pose ce résultat égal à N . Enfin, on utilise cette dernière équation pour déterminer $h(y)$. L'exemple ci-dessous illustre cette démarche.

Exemple 2

Résolvez l'équation différentielle

$$(y \cos x + 2xe^y) + (\sin x + x^2e^y - 1)y' = 0. \quad (16)$$

Il est facile de voir que

$$M_y(x, y) = \cos x + 2xe^y = N_x(x, y).$$

Donc, l'équation est exacte. Ainsi, il existe une fonction $\psi(x, y)$ telle que

$$\psi_x(x, y) = y \cos x + 2xe^y,$$

$$\psi_y(x, y) = \sin x + x^2e^y - 1.$$

En intégrant la première de ces équations, on obtient

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2e^y + h(y). \quad (17)$$

En posant $\psi_y = N$, on obtient

$$\psi_y(x, y) = \sin x + x^2e^y + h'(y) = \sin x + x^2e^y - 1.$$

Par conséquent, $h'(y) = -1$ et $h(y) = -y$. On peut omettre la constante d'intégration puisque toute solution particulière à l'équation différentielle précédente est satisfaisante (on n'a pas besoin de la solution la plus générale possible). En faisant la substitution de $h(y)$ dans l'équation (17), on obtient

$$\psi(x, y) = y \sin x + x^2e^y - y.$$

Ainsi, les solutions à l'équation (16) sont données implicitement par

$$y \sin x + x^2e^y - y = c. \quad (18)$$

Exemple 3

Résolvez l'équation différentielle

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0. \quad (19)$$

Ici,

$$M_y(x, y) = 3x + 2y, \quad N_x(x, y) = 2x + y;$$

puisque $M_y \neq N_x$, l'équation donnée n'est pas exacte. Pour se convaincre qu'on ne peut pas la résoudre à l'aide de la démarche décrite précédemment, cherchons une fonction ψ telle que

$$\psi_x(x, y) = 3xy + y^2, \quad \psi_y(x, y) = x^2 + xy. \quad (20)$$

En intégrant la première des équations (20), on obtient

$$\psi(x, y) = \frac{3}{2}x^2y + xy^2 + h(y), \quad (21)$$

où h est une fonction arbitraire de y seulement. Pour satisfaire à la deuxième des équations (20), on

► calcule ψ_y à partir de l'équation (21) et on le pose égal à N pour obtenir

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy + h'(y) = x^2 + xy$$

ou

$$h'(y) = -\frac{1}{2}x^2 - xy. \quad (22)$$

Puisque le second membre de l'équation (22) dépend de x et de y , il est impossible de résoudre cette équation pour déterminer $h(y)$. Ainsi, il n'y a pas de fonction $\psi(x, y)$ qui satisfait aux deux équations (20).

Les facteurs intégrants Parfois, on peut convertir une équation différentielle qui n'est pas exacte en une équation exacte en la multipliant par un facteur intégrant approprié. Afin de généraliser cela, multiplions l'équation

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (23)$$

par une fonction μ , puis essayons de choisir μ de sorte que l'équation résultante

$$\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy = 0 \quad (24)$$

soit exacte. Selon le théorème 2.2.1, l'équation (24) est exacte si et seulement si

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x. \quad (25)$$

Puisque M et N sont des fonctions données, l'équation (25) permet d'établir que le facteur intégrant μ doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0. \quad (26)$$

Si on peut trouver une fonction μ qui satisfait à l'équation (26), alors l'équation (24) sera exacte. On pourra alors obtenir la solution à l'équation (24) à l'aide de la méthode décrite dans la première partie de cette section. La solution trouvée de cette manière satisfera également à l'équation (23), puisqu'on peut annuler le facteur intégrant μ de l'équation (24).

Une équation aux dérivées partielles de la forme (26) peut admettre plus d'une solution. Dans ce cas, il est possible d'utiliser n'importe quelle solution comme facteur intégrant de l'équation (23). L'exemple 4 à la page suivante illustre cette caractéristique de non-unicité du facteur intégrant.

Malheureusement, l'équation (26), qui permet de déterminer le facteur intégrant μ , est en général aussi difficile à résoudre que l'équation originale (23). Par conséquent, alors qu'en principe les facteurs intégrants sont des outils utiles pour résoudre des équations différentielles, en pratique, on n'arrive à les déterminer que dans des cas particuliers. Les situations les plus importantes où on peut trouver des facteurs intégrants simples se produisent quand μ est une fonction d'une des variables x ou y seulement mais non des deux. Déterminons maintenant les conditions pour M et N garantissant que l'équation (23) a un facteur intégrant μ qui dépend de x seulement. En supposant que μ est une fonction de x seulement, on a

$$(\mu M)_y = \mu M_y, \quad (\mu N)_x = \mu N_x + N \frac{d\mu}{dx}.$$

Ainsi, si $(\mu M)_y$ doit évaluer $(\mu N)_x$, il est nécessaire que

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N} \mu. \quad (27)$$

Si $(M_y - N_x)/N$ est une fonction de x seulement, alors il y a un facteur intégrant μ qui dépend aussi de x seulement. Aussi, on peut trouver $\mu(x)$ en résolvant l'équation (27), qui est à variables séparables.

On peut utiliser une démarche semblable pour déterminer une condition sous laquelle l'équation (23) a un facteur intégrant qui dépend de y seulement (voir le problème 23).

Exemple 4

Trouvez un facteur intégrant pour l'équation

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0 \quad (19)$$

puis résolvez l'équation.

Dans l'exemple 3, on a montré que cette équation n'est pas exacte. Maintenant, déterminons si elle a un facteur intégrant qui dépend de x seulement. En calculant la quantité $(M_y - N_x)/N$, on trouve que

$$\frac{M_y(x, y) - N_x(x, y)}{N(x, y)} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{1}{x}. \quad (28)$$

Ainsi, il y a un facteur intégrant μ qui est une fonction de x seulement et qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{\mu}{x}. \quad (29)$$

Par conséquent,

$$\mu(x) = x. \quad (30)$$

En multipliant l'équation (19) par ce facteur intégrant, on obtient

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0. \quad (31)$$

La dernière équation est exacte et il est facile de montrer que ses solutions sont données implicitement par

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = c. \quad (32)$$

On peut aussi trouver facilement les solutions sous une forme explicite puisque l'équation (32) est quadratique en y .

De plus, on peut vérifier qu'un deuxième facteur intégrant de l'équation (19) est

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xy(2x + y)},$$

et qu'on obtient la même solution, mais beaucoup plus difficilement, si on utilise ce facteur intégrant (voir le problème 32).

Problèmes

■ Déterminez si les équations des problèmes 1 à 12 sont exactes. Si c'est le cas, trouvez la solution.

1. $(2x + 3) + (2y - 2)y' = 0$

2. $(2x + 4y) + (2x - 2y)y' = 0$

3. $(3x^2 - 2xy + 2) dx + (6y^2 - x^2 + 3) dy = 0$

4. $(2xy^2 + 2y) + (2x^2y + 2x)y' = 0$

5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax + by}{bx + cy}$

6. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax - by}{bx - cy}$

7. $(e^x \sin y - 2y \sin x) dx + (e^x \cos y + 2 \cos x) dy = 0$

8. $(e^x \sin y + 3y) dx - (3x - e^x \sin y) dy = 0$

9. $(ye^{xy} \cos 2x - 2e^{xy} \sin 2x + 2x) dx + (xe^{xy} \cos 2x - 3) dy = 0$

10. $(y/x + 6x) dx + (\ln x - 2) dy = 0, \quad x > 0$

11. $(x \ln y + xy) dx + (y \ln x + xy) dy = 0; \quad x > 0, \quad y > 0$

12. $\frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{y dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$

■ Pour les problèmes 13 et 14, résolvez le problème de valeur initiale et déterminez approximativement l'intervalle où la solution est valide.

13. $(2x - y) dx + (2y - x) dy = 0, \quad y(1) = 3$

14. $(9x^2 + y - 1) dx - (4y - x) dy = 0, \quad y(1) = 0$

- ■ Pour les problèmes 15 et 16, trouvez la valeur de b pour laquelle l'équation est exacte, puis résolvez-la en utilisant cette valeur de b .

15. $(xy^2 + bx^2y) dx + (x + y)x^2 dy = 0$

16. $(ye^{2xy} + x) dx + bxe^{2xy} dy = 0$

17. Supposez que l'équation (6) satisfait aux exigences du théorème 2.2.1 dans un rectangle R et est, par conséquent, exacte. Montrez qu'une fonction possible $\psi(x, y)$ est

$$\psi(x, y) = \int_{x_0}^x M(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y N(x, t) dt,$$

où (x_0, y_0) est un point de R .

18. Montrez que toute équation à variables séparables

$$M(x) + N(y)y' = 0$$

est également exacte.

- Montrez que les équations des problèmes 19 à 22 ne sont pas exactes, mais qu'elles le deviennent quand on les multiplie par le facteur intégrant indiqué. Ensuite, résolvez les équations.

19. $x^2y^3 + x(1 + y^2)y' = 0$, $\mu(x, y) = 1/xy^3$

20. $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right) dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right) dy = 0$, $\mu(x, y) = ye^x$

21. $y dx + (2x - ye^y) dy = 0$, $\mu(x, y) = y$

22. $(x + 2) \sin y dx + x \cos y dy = 0$, $\mu(x, y) = xe^x$

23. Montrez que si $(Nx - M_y)/M = Q$, où Q est une fonction de y seulement, alors l'équation différentielle

$$M + Ny' = 0$$

a un facteur intégrant de la forme

$$\mu(y) = \exp \int Q(y) dy.$$

24. Montrez que si $(N_x - M_y)/(xM - yN) = R$, où R dépend de la quantité xy seulement, alors l'équation différentielle

$$M + Ny' = 0$$

a un facteur intégrant de la forme $\mu(xy)$. Trouvez une formule générale afin d'exprimer ce facteur intégrant.

- Pour les problèmes 25 à 31, trouvez un facteur intégrant et résolvez l'équation donnée.

25. $(3x^2y + 2xy + y^3) dx + (x^2 + y^2) dy = 0$

26. $y' = e^{2x} + y - 1$

27. $dx + (x/y - \sin y) dy = 0$

28. $y dx + (2xy - e^{-2y}) dy = 0$

29. $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) dy = 0$

30. $[4(x^3/y^2) + (3/y)] dx + [3(x/y^2) + 4y] dy = 0$

31. $\left(3x + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right) \frac{dy}{dx} = 0$

Remarque : Reportez-vous au problème 24.

32. Résolvez l'équation différentielle

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

en utilisant le facteur intégrant $\mu(x, y) = [xy(2x + y)]^{-1}$. Vérifiez si la solution est la même que celle qui a été obtenue dans l'exemple 4 avec un facteur intégrant différent.

2.3 Les équations linéaires et l'équation de Bernoulli

Soit l'équation différentielle de la forme

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (1)$$

où f est une fonction de deux variables donnée.

Si la fonction f dans l'équation (1) est linéairement dépendante de la variable dépendante y , alors l'équation (1) est une équation linéaire du premier ordre. Dans les sections 1.1 et 1.2, on a discuté un type restreint d'équations linéaires du premier ordre où les coefficients étaient constants. Voici un exemple typique :

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b, \quad (2)$$

où a et b sont des constantes données. Comme on l'a déjà vu, c'est une équation de cette forme qui permet de décrire le mouvement d'un objet en chute libre dans l'atmosphère. Maintenant, on considère l'équation linéaire du premier ordre la plus générale, qu'on obtient en remplaçant les coefficients a et b de l'équation (2) par des fonctions arbitraires de t . Habituellement, on écrit l'équation linéaire du premier ordre sous la forme normalisée

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad (3)$$

où p et g sont des fonctions données de la variable indépendante t .

Parfois, il est plus pratique d'écrire l'équation sous la forme

$$P(t)\frac{dy}{dt} + Q(t)y = G(t), \quad (4)$$

où P , Q et G sont donnés. Évidemment, tant que $P(t) \neq 0$, on peut convertir l'équation (4) en l'équation (3) en la divisant par $P(t)$.

Dans certains cas, il est possible de résoudre facilement une équation linéaire du premier ordre en intégrant l'équation, comme dans l'exemple suivant.

Exemple 1

Résolvez l'équation différentielle

$$(4 + t^2)\frac{dy}{dt} + 2ty = 4t. \quad (5)$$

Le membre de gauche de l'équation (5) est une combinaison linéaire de dy/dt et de y , une combinaison qui apparaît également dans la règle du calcul différentiel et intégral permettant de dériver un produit. En fait,

$$(4 + t^2)\frac{dy}{dt} + 2ty = \frac{d}{dt}[(4 + t^2)y];$$

il s'ensuit qu'on peut réécrire l'équation (5) sous la forme

$$\frac{d}{dt}[(4 + t^2)y] = 4t. \quad (6)$$

Par conséquent, même si y est inconnu, on peut intégrer les deux membres de l'équation (6) par rapport à t , obtenant ainsi

$$(4 + t^2)y = 2t^2 + c, \quad (7)$$

où c est une constante d'intégration arbitraire. En isolant y , on obtient

$$y = \frac{2t^2}{4 + t^2} + \frac{c}{4 + t^2}. \quad (8)$$

Cette solution est la solution générale à l'équation (5).

Malheureusement, la plupart des équations linéaires du premier ordre ne peuvent pas être résolues par la méthode illustrée dans l'exemple 1, car leurs membres de gauche ne sont pas des dérivées du produit de y et d'une autre fonction. Cependant, Leibniz a découvert qu'en multipliant l'équation différentielle par une certaine fonction $\mu(t)$, on peut la convertir en une équation qu'on peut intégrer facilement en utilisant la règle du produit des dérivées, comme dans l'exemple 1. La fonction $\mu(t)$ s'appelle un **facteur intégrant** et notre tâche principale consiste à trouver une façon de la déterminer pour une équation donnée. Nous montrerons d'abord la façon d'utiliser cette méthode à l'aide d'un exemple, puis nous l'appliquerons à une équation linéaire générale du premier ordre écrite sous la forme standard (3).

Exemple 2

Trouvez la solution générale à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}. \quad (9)$$

Tracez quelques courbes-solutions représentatives ; autrement dit, représentez graphiquement les solutions correspondant à plusieurs valeurs de la constante arbitraire c . Trouvez aussi la solution particulière dont le graphique contient le point $(0, 1)$.

La première étape consiste à multiplier l'équation (9) par une fonction $\mu(t)$, encore indéterminée ; par conséquent,

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\mu(t)y = \frac{1}{2}\mu(t)e^{t/3}. \quad (10)$$

La question est maintenant de savoir si on peut choisir $\mu(t)$ de façon que le membre de gauche de l'équation (10) soit la dérivée du produit $\mu(t)y$. Pour toute fonction différentiable $\mu(t)$, on a

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t) \frac{dy}{dt} + \frac{d\mu(t)}{dt}y. \quad (11)$$

Par conséquent, le membre de gauche de l'équation (10) et le membre de droite de l'équation (11) sont identiques, à condition de choisir $\mu(t)$ de façon à satisfaire à

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = \frac{1}{2}\mu(t). \quad (12)$$

Notre recherche d'un facteur intégrant sera fructueuse si on peut trouver une solution à l'équation (12). Peut-être pouvez-vous nommer facilement une fonction qui satisfait à l'équation (12) : quelle fonction bien connue du calcul différentiel et intégral a une dérivée égale à une demi-fois la fonction initiale ? De façon plus systématique, réécrivez l'équation (12) sous la forme

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = \frac{1}{2},$$

qui est équivalente à

$$\frac{d}{dt} \ln |\mu(t)| = \frac{1}{2}. \quad (13)$$

Il s'ensuit alors que

$$\ln |\mu(t)| = \frac{1}{2}t + C,$$

ou

$$\mu(t) = ce^{t/2}. \quad (14)$$

La fonction $\mu(t)$ donnée par l'équation (14) est un facteur intégrant de l'équation (9). Puisque nous n'avons pas besoin du facteur intégrant le plus général, on peut poser c égal à 1 dans l'équation (14) et utiliser $\mu(t) = e^{t/2}$.

On revient maintenant à l'équation (9), on la multiplie par le facteur intégrant $e^{t/2}$ et on obtient

$$e^{t/2} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{2} e^{t/2} y = \frac{1}{2} e^{5t/6}. \quad (15)$$

Grâce à notre choix de facteur intégrant, le membre de gauche de l'équation (15) est la dérivée de $e^{t/2}y$; donc, l'équation (15) devient

$$\frac{d}{dt}(e^{t/2}y) = \frac{1}{2} e^{5t/6}. \quad (16)$$

En intégrant les deux membres de l'équation (16), on obtient

$$e^{t/2}y = \frac{3}{5} e^{5t/6} + c, \quad (17)$$

où c est une constante arbitraire. Enfin, en résolvant l'équation (17) pour trouver y , on obtient la solution générale à l'équation (9), à savoir,

$$y = \frac{3}{5} e^{t/3} + c e^{-t/2}. \quad (18)$$

Pour trouver la solution qui passe par le point $(0, 1)$, on pose $t = 0$ et $y = 1$ dans l'équation (18), obtenant ainsi $1 = (3/5) + c$. Par conséquent, $c = 2/5$ et la solution désirée est

$$y = \frac{3}{5} e^{t/3} + \frac{2}{5} e^{-t/2}. \quad (19)$$

La figure 2.3.1 montre les graphiques de l'équation (18) pour plusieurs valeurs de c , avec un champ de direction en arrière-plan. La solution qui satisfait à $y(0) = 1$ est représentée par la courbe noire.

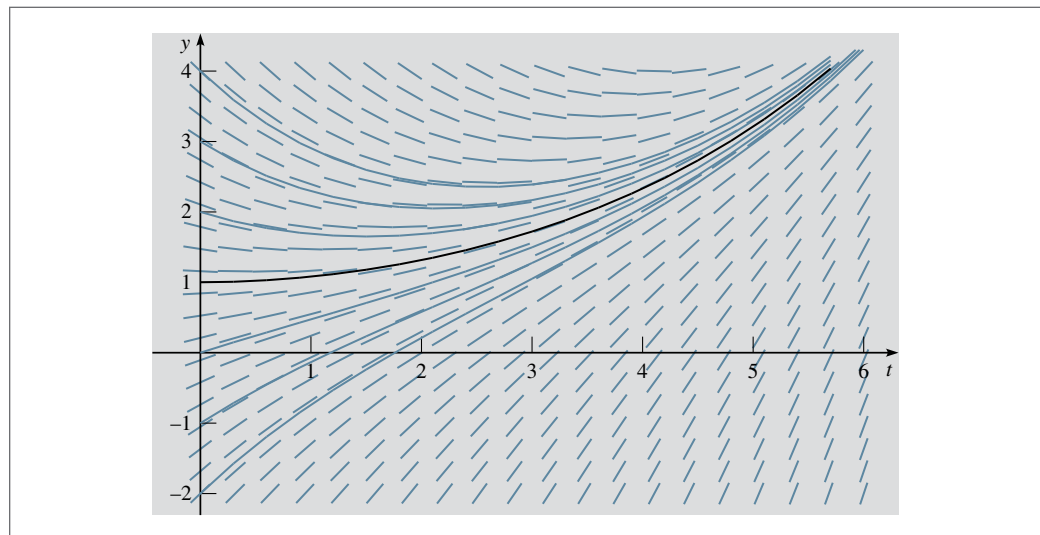


Figure 2.3.1 Champ de direction et courbes-solutions de $y' + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}$; la courbe noire passe par le point $(0, 1)$.

Étendons maintenant la méthode des facteurs intégrants aux équations de la forme

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t), \quad (20)$$

où a est une constante donnée et $g(t)$ est une fonction donnée. En procédant comme dans l'exemple 2, on constate que le facteur intégrant $\mu(t)$ doit satisfaire à

$$\frac{d\mu}{dt} = a\mu, \quad (21)$$

plutôt qu'à l'équation (12). Par conséquent, le facteur intégrant est $\mu(t) = e^{at}$. En multipliant l'équation (20) par $\mu(t)$, on obtient

$$e^{at} \frac{dy}{dt} + ae^{at}y = e^{at}g(t),$$

ou

$$\frac{d}{dt}(e^{at}y) = e^{at}g(t). \quad (22)$$

En intégrant les deux membres de l'équation (22), on obtient

$$e^{at}y = \int e^{at}g(t) dt + c, \quad (23)$$

où c est une constante arbitraire. Pour de nombreuses fonctions simples $g(t)$, on peut évaluer l'intégrale de l'équation (23) et exprimer la solution y en termes de fonctions élémentaires, comme dans l'exemple 2. Toutefois, pour des fonctions plus compliquées $g(t)$, il est nécessaire de laisser la solution sous la forme intégrale. Dans ce cas,

$$y = e^{-at} \int_{t_0}^t e^{as}g(s) ds + ce^{-at}. \quad (24)$$

Notez que dans l'équation (24), nous avons utilisé s pour noter la variable d'intégration afin de la distinguer de la variable indépendante t et nous avons choisi une valeur pratique t_0 comme limite inférieure d'intégration.

Exemple 3

Résolvez l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t \quad (25)$$

et tracez les graphiques de différentes solutions. Trouvez le point initial sur l'axe des y qui sépare les solutions qui ont une forte croissance de celles qui ont une forte décroissance lorsque $t \rightarrow \infty$.

Puisque le coefficient de y est -2 , le facteur intégrant pour l'équation (25) est $\mu(t) = e^{-2t}$. En multipliant l'équation différentielle par $\mu(t)$, on obtient

$$\frac{d}{dt}(e^{-2t}y) = 4e^{-2t} - te^{-2t}. \quad (26)$$

Alors, en intégrant les deux membres de cette équation, on obtient

$$e^{-2t}y = -2e^{-2t} + \frac{1}{2}te^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + c,$$

où on a utilisé la méthode d'intégration par parties sur le dernier terme de l'équation (26). Ainsi, la solution générale à l'équation (25) est

$$y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + ce^{2t}. \quad (27)$$

La figure 2.3.2 à la page suivante présente les graphiques de la solution (27) pour différentes valeurs de c . Le comportement de la solution pour de grandes valeurs de t est déterminé par le terme ce^{2t} . Si $c \neq 0$, alors la solution admet une forte croissance ou une forte décroissance exponentielle, selon le signe de c . Ainsi, les solutions divergent quand t augmente. La frontière séparant les solutions qui croissent de celles qui décroissent se situe en $c = 0$. Si on pose $c = 0$ dans l'équation (27) et qu'on pose $t = 0$, on trouve $y = -7/4$. Il s'agit du point de séparation sur l'axe des y qu'on recherchait. Il faut noter que pour cette valeur initiale, la solution est $y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t$; la solution croît (mais pas de manière exponentielle).

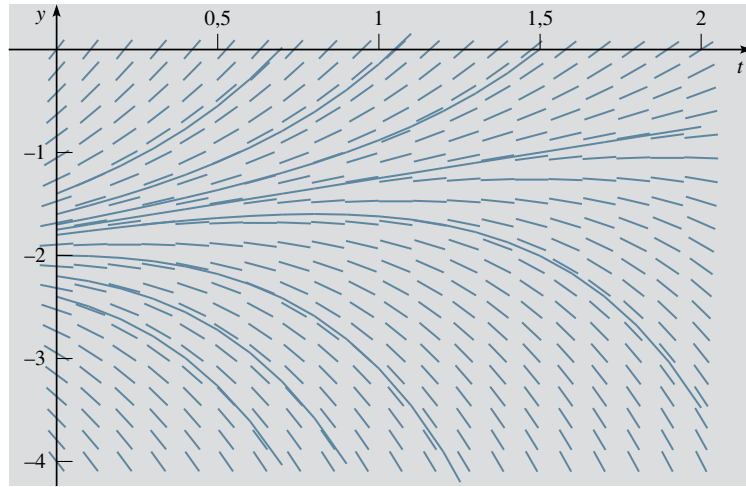


Figure 2.3.2 Courbes-solutions pour $y' - 2y = 4 - t$.

Les exemples 2 et 3 sont des cas particuliers de l'équation (20)

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t),$$

dont les solutions sont obtenues à l'aide de l'équation générale

$$y = e^{-at} \int e^{as} g(s) ds + ce^{-at}.$$

Les solutions convergent si $a > 0$ (voir l'exemple 2) et elles divergent si $a < 0$ (voir l'exemple 3). Cependant, contrairement aux équations considérées dans les sections 1.1 et 1.2, l'équation (20) n'a pas de solution d'équilibre.

L'étape finale consiste à étendre la méthode des facteurs intégrants à l'équation linéaire du premier ordre (3)

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t),$$

où p et g sont des fonctions données.

En posant $M(t, y) = p(t)y(t) - g(t)$ et $N(t, y) = 1$, on peut réécrire l'équation (3) sous la forme

$$M(t, y) + N(t, y) \frac{dy}{dt} = 0. \quad (28)$$

L'équation (3) sous la forme (28) n'est pas exacte, car $\frac{\partial M}{\partial y} = p(t) \neq \frac{\partial N}{\partial t} = 0$. Maintenant, en nous servant de l'équation (26) de la section 2.2, déterminons si elle a un facteur intégrant qui dépend de t seulement. En calculant la quantité $(M_y - N_t)/N$, on trouve

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N(t, y)} = \frac{p(t) - 0}{1} = p(t).$$

Ainsi, il y a un facteur intégrant μ qui dépend seulement de t et qui satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d\mu(t)}{dt} = p(t)\mu(t). \quad (29)$$

Si on suppose temporairement que $\mu(t)$ est positive, alors on obtient

$$\frac{d\mu(t)/dt}{\mu(t)} = p(t),$$

et, par conséquent,

$$\ln \mu(t) = \int p(t) dt + k.$$

En donnant à la constante arbitraire k la valeur zéro, on obtient l'expression la plus simple possible pour μ , soit

$$\mu(t) = \exp \int p(t) dt. \quad (30)$$

Il faut noter que $\mu(t)$ est positive pour tout t , comme on l'a supposé.

Si on multiplie l'équation (3) par la fonction $\mu(t)$, on obtient

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t). \quad (31)$$

En se servant de l'équation (29), on constate que le premier membre de l'équation (31) est la dérivée du produit $\mu(t)y$. L'équation (31) devient

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t). \quad (32)$$

Ainsi,

$$\mu(t)y = \int \mu(s)g(s) ds + c.$$

Donc, la solution générale à l'équation (3) est

$$y = \frac{\int \mu(s)g(s) ds + c}{\mu(t)}. \quad (33)$$

Il faut noter que pour trouver la solution résultant de l'équation (33), deux intégrations sont nécessaires : une pour obtenir $\mu(t)$ à partir de l'équation (30) et l'autre pour obtenir y à partir de l'équation (33).

Exemple 4

Résolvez le problème de valeur initiale

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad (34)$$

$$y(1) = 2. \quad (35)$$

En réécrivant l'équation (34) sous la forme (normalisée) standard (3), on obtient

$$y' + (2/t)y = 4t. \quad (36)$$

Donc, $p(t) = 2/t$ et $g(t) = 4t$. Pour résoudre l'équation (36), on calcule d'abord le facteur intégrant $\mu(t)$. On obtient

$$\mu(t) = \exp \int \frac{2}{t} dt = e^{2 \ln |t|} = t^2. \quad (37)$$

En multipliant l'équation (36) par $\mu(t) = t^2$, on a

$$t^2 y' + 2ty = (t^2 y)' = 4t^3,$$

et, par conséquent,

$$t^2 y = t^4 + c,$$

▶ où c est une constante arbitraire. Il s'ensuit que

$$y = t^2 + \frac{c}{t^2} \quad (38)$$

est la solution générale à l'équation (34). La figure 2.3.3 présente les courbes-solutions à l'équation (34) pour différentes valeurs de c . Afin de satisfaire à la condition initiale (35), on doit choisir $c = 1$. Ainsi,

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0 \quad (39)$$

est la solution au problème de valeur initiale (34), (35). Cette solution, représentée par la courbe en gras, est illustrée à la figure 2.3.3. Il faut noter qu'elle est non bornée et qu'elle admet comme asymptote la partie positive de l'axe des y quand $t \rightarrow 0$ par la droite. Il s'agit d'une conséquence de la discontinuité infinie du coefficient $p(t)$ à l'origine. La fonction $y = t^2 + (1/t^2)$ pour $t < 0$ ne fait pas partie de la solution à ce problème de valeur initiale.

Cet exemple est le premier pour lequel il n'y a aucune solution pour certaines valeurs de t . Une fois de plus, ce résultat est dû à la discontinuité infinie de $p(t)$ en $t = 0$, qui restreint la solution à l'intervalle $0 < t < \infty$.

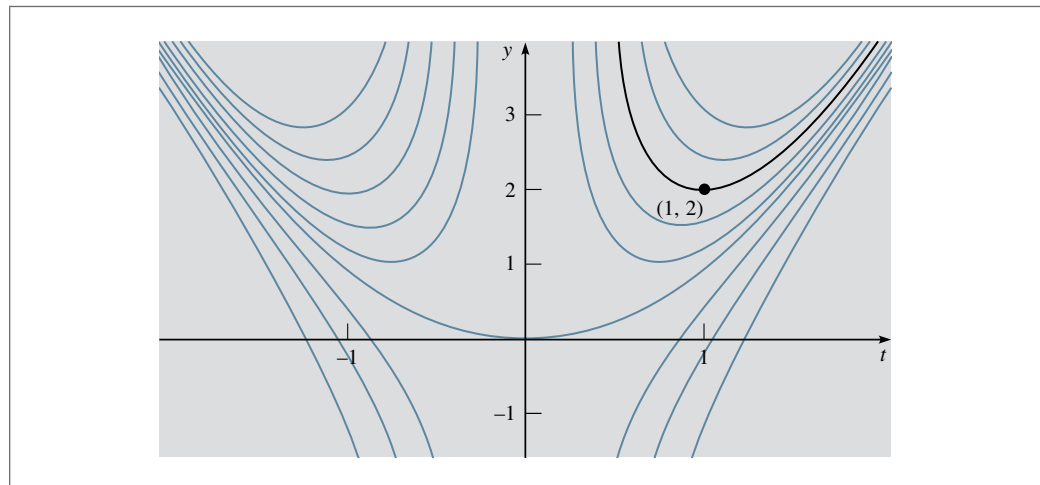


Figure 2.3.3 Courbes-solutions pour $ty' + 2y = 4t^2$; la courbe noire passe à travers le point $(1, 2)$.

En observant de nouveau la figure 2.3.3, on remarque que certaines solutions (celles pour lesquelles $c > 0$) admettent comme asymptote la partie positive de l'axe des y quand $t \rightarrow 0$ par la droite, tandis que d'autres solutions (pour lesquelles $c < 0$) admettent comme asymptote la partie négative de l'axe des y . La solution pour laquelle $c = 0$, soit $y = t^2$, demeure bornée et même différentiable en $t = 0$. Si on généralise la condition initiale (35) à

$$y(1) = y_0, \quad (40)$$

alors $c = y_0 - 1$. La solution (39) devient alors

$$y = t^2 + \frac{y_0 - 1}{t^2}, \quad t > 0. \quad (41)$$

Comme dans l'exemple 3, il s'agit d'un cas où il y a une valeur initiale critique, soit $y_0 = 1$, qui sépare les solutions se comportant de deux manières bien différentes.

Exemple 5

Résolvez le problème de valeur initiale

$$2y' + ty = 2, \quad (42)$$

$$y(0) = 1. \quad (43)$$

► Pour réécrire l'équation différentielle (42) sous la forme standard (3), on doit la diviser par 2, ce qui donne

$$y' + (t/2)y = 1. \quad (44)$$

Par conséquent, $p(t) = t/2$ et le facteur intégrant est $\mu(t) = \exp(t^2/4)$. Ensuite, on multiplie l'équation (44) par $\mu(t)$, de façon que

$$e^{t^2/4} y' + \frac{t}{2} e^{t^2/4} y = e^{t^2/4}. \quad (45)$$

Le membre de gauche de l'équation (45) est la dérivée de $e^{t^2/4} y$; donc, en intégrant les deux membres de l'équation (45), on obtient

$$e^{t^2/4} y = \int e^{t^2/4} dt + c. \quad (46)$$

On ne peut pas évaluer l'intégrale du membre de droite de l'équation (46) en termes des fonctions élémentaires habituelles, alors on la laisse non évaluée. Cependant, en choisissant le point $t = 0$ comme limite inférieure d'intégration, on peut remplacer l'équation (46) par

$$e^{t^2/4} y = \int_0^t e^{s^2/4} ds + c, \quad (47)$$

où c est une constante arbitraire. Il s'ensuit alors que la solution générale y à l'équation (42) est donnée par

$$y = e^{-t^2/4} \int_0^t e^{s^2/4} ds + c e^{-t^2/4}. \quad (48)$$

La condition initiale (43) exige que $c = 1$.

L'objectif principal de cet exemple est de montrer que parfois la solution doit être laissée en termes d'intégrale. Cela ne constitue généralement tout au plus qu'un simple désagrément et non pas un obstacle sérieux. Pour une valeur donnée de t , l'intégrale de l'équation (48) est une intégrale définie et on peut en déterminer une approximation au degré de précision désiré en utilisant des intégrateurs numériques facilement accessibles. En répétant cette démarche pour de nombreuses valeurs de t et en représentant graphiquement les résultats, on peut obtenir le graphique d'une solution. On peut aussi utiliser une méthode d'approximation numérique, qui part directement de l'équation différentielle et ne nécessite aucune expression pour la solution. Des logiciels tels que Maple et Mathematica exécutent facilement de tels procédés et produisent les graphiques des solutions à des équations différentielles.

La figure 2.3.4 présente les graphiques de la solution (48) pour plusieurs valeurs de c . D'après la figure, il semble vraisemblable de supposer que toutes les solutions s'approchent d'une limite lorsque $t \rightarrow \infty$. On peut trouver cette limite de façon analytique (voir le problème 32).

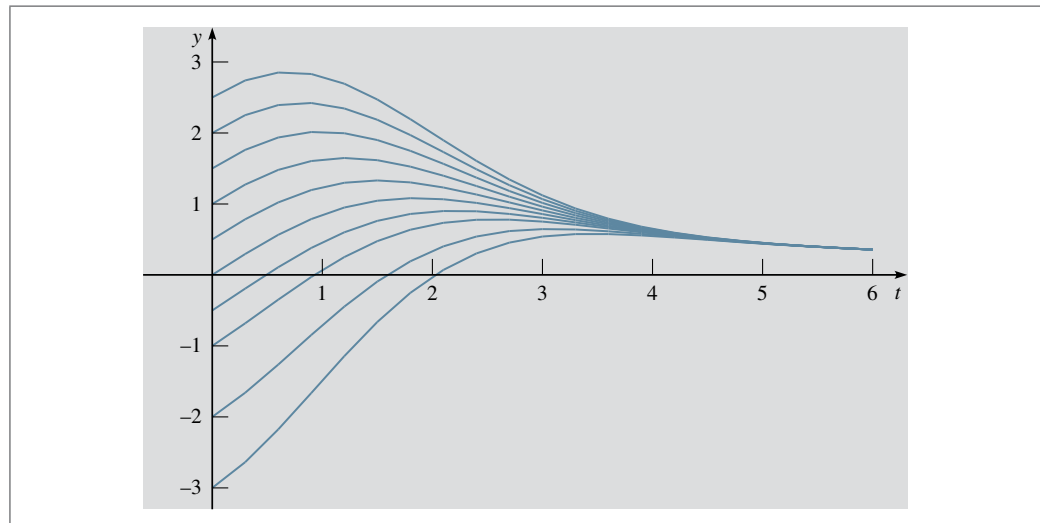


Figure 2.3.4 Courbes-solutions de $2y' + ty = 2$.

Les équations de Bernoulli Parfois, un changement de variable permet de résoudre une équation non linéaire en la transformant en une équation linéaire. Une équation de ce type est de la forme

$$y' + p(t)y = q(t)y^a,$$

où a est un paramètre réel. Elle est dite une **équation de Bernoulli** en hommage à Jacques Bernoulli.

Pour $a = 0$ ou $a = 1$, l'équation est linéaire. Pour $a \neq 0, 1$, l'équation est non linéaire. Dans ce cas le changement de variable $v = y^{1-a}$ réduit l'équation de Bernoulli à une équation linéaire. Leibniz a trouvé cette méthode de résolution en 1696.

On introduit une nouvelle variable dépendante v telle que $v(t) = (y(t))^{1-a}$. Par dérivation, on a

$$v' = (1-a)y^{-a}y'. \quad (49)$$

De l'équation de Bernoulli, on a

$$y' = -p(t)y + q(t)y^a.$$

En remplaçant l'expression de $y'(t)$ dans l'équation (49), on obtient

$$v' = (1-a)y^{-a}(-p(t)y + q(t)y^a) = -(1-a)p(t)y^{1-a} + (1-a)q(t).$$

Sachant que $v = y^{1-a}$, on obtient l'équation linéaire

$$v' + (1-a)p(t)v = (1-a)q(t).$$

On peut résoudre la dernière équation pour trouver $v(t)$, puis, en remplaçant v par y^{1-a} , on obtient la solution de l'équation de Bernoulli.

Exemple 6

Résolvez le problème de valeur initiale

$$y' - \frac{y}{t} = -y^3, \quad y(1) = 1. \quad (50)$$

Il s'agit d'une équation de Bernoulli avec $p(t) = -\frac{1}{t}$, $q(t) = -1$ et $a = 3$. On pose $v = y^{1-3} = y^{-2}$ et on en déduit que $v' = -2y^{-3}y'$. À partir de l'équation de Bernoulli, on a $y' = \frac{y}{t} - y^3$; il en découle que

$$v' = -2y^{-3}y' = -2y^{-3}\left(\frac{y}{t} - y^3\right) = -\frac{2}{t}y^{-2} + 2.$$

Sachant que $v = y^{-2}$, on obtient l'équation linéaire

$$v' + \frac{2}{t}v = 2. \quad (51)$$

Pour résoudre cette équation, on calcule d'abord le facteur intégrant $\mu(t)$. On obtient

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln|t|} = t^2.$$

En multipliant l'équation (51) par $\mu(t) = t^2$, on a

$$t^2v' + 2tv = (t^2v)' = 2t^2.$$

Par conséquent,

$$t^2v = \frac{2}{3}t^3 + c,$$

où c est une constante arbitraire.

► Il s'ensuit que

$$v = \frac{2}{3}t + \frac{c}{t^2} = \frac{2t^3 + 3c}{3t^2}$$

est la solution de l'équation (51).

Sachant que $y^{-2} = v = \frac{2t^3 + 3c}{3t^2}$, on en déduit que

$$y = \pm \sqrt{\frac{3t^2}{2t^3 + 3c}}.$$

Afin de satisfaire à la condition initiale $y(1) = 1$, on prend la solution qui correspond au signe positif et on en déduit que $c = \frac{1}{3}$. Ainsi,

$$y = \sqrt{\frac{3t^2}{2t^3 + 1}}$$

est la solution du problème de valeur initiale (50).

Problèmes

■ Pour les problèmes 1 à 12, procédez comme suit.

- Construisez un champ de direction pour l'équation différentielle.
- À partir d'un examen attentif du champ de direction, décrivez comment les solutions se comportent lorsque t augmente.
- Trouvez la solution générale à l'équation différentielle et utilisez-la pour déterminer le comportement des solutions quand $t \rightarrow \infty$.

Ⓢ 1. $y' + 3y = t + e^{-2t}$

Ⓢ 2. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$

Ⓢ 3. $y' + y = te^{-t} + 1$

Ⓢ 4. $y' + (1/t)y = 3 \cos 2t, \quad t > 0$

Ⓢ 5. $y' - 2y = 3e^t$

Ⓢ 6. $ty' + 2y = \sin t, \quad t > 0$

Ⓢ 7. $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$

Ⓢ 8. $(1 + t^2)y' + 4ty = (1 + t^2)^{-2}$

Ⓢ 9. $2y' + y = 3t$

Ⓢ 10. $ty' - y = t^2 e^{-t}$

Ⓢ 11. $y' + y = 5 \sin 2t$

Ⓢ 12. $2y' + y = 3t^2$

■ Pour les problèmes 13 à 20, trouvez la solution au problème de valeur initiale.

13. $y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$

14. $y' + 2y = te^{-2t}, \quad y(1) = 0$

15. $ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad t > 0$

16. $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$

17. $y' - 2y = e^{2t}, \quad y(0) = 2$

18. $ty' + 2y = \sin t, \quad y(\pi/2) = 1, \quad t > 0$

19. $t^3 y' + 4t^2 y = e^{-t}, \quad y(-1) = 0, \quad t < 0$

20. $ty' + (t + 1)y = t, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 0$

■ Pour les problèmes 21 à 23, procédez comme suit.

- Construisez un champ de direction pour l'équation différentielle. Comment les solutions semblent-elles se comporter quand t augmente? Le comportement dépend-il du choix de la valeur initiale de a ? Soit a_0 la valeur de a pour laquelle la transition d'un type de comportement à un autre se produit. Estimez la valeur de a_0 .
- Résolvez le problème de valeur initiale et trouvez exactement la valeur critique de a_0 .
- Décrivez le comportement de la solution correspondant à la valeur initiale de a_0 .

Ⓢ 21. $y' - \frac{1}{2}y = 2 \cos t, \quad y(0) = a$

② 22. $2y' - y = e^{t/3}, \quad y(0) = a$

② 23. $3y' - 2y = e^{-\pi t/2}, \quad y(0) = a$

■ Pour les problèmes 24 à 26, procédez comme suit.

a) Construisez un champ de direction pour l'équation différentielle. Comment les solutions semblent-elles se comporter quand $t \rightarrow 0$? Le comportement dépend-il du choix de la valeur initiale a ? Soit a_0 la valeur de a pour laquelle la transition d'un type de comportement à un autre se produit. Estimez la valeur de a_0 .

b) Résolvez le problème de valeur initiale et trouvez exactement la valeur critique de a_0 .

c) Décrivez le comportement de la solution correspondant à la valeur initiale de a_0 .

② 24. $ty' + (t+1)y = 2te^{-t}, \quad y(1) = a, \quad t > 0$

② 25. $ty' + 2y = (\sin t)/t, \quad y(-\pi/2) = a, \quad t < 0$

② 26. $(\sin t)y' + (\cos t)y = e^t, \quad y(1) = a, \quad 0 < t < \pi$

② 27. Considérez le problème de valeur initiale

$$y' + \frac{1}{2}y = 2 \cos t, \quad y(0) = -1.$$

Trouvez les coordonnées du premier maximum local de la solution pour $t > 0$.

② 28. Considérez le problème de valeur initiale

$$y' + \frac{2}{3}y = 1 - \frac{1}{2}t, \quad y(0) = y_0.$$

Trouvez la valeur de y_0 pour laquelle la solution touche mais ne croise pas l'axe des t .

② 29. Considérez le problème de valeur initiale

$$y' + \frac{1}{4}y = 3 + 2 \cos 2t, \quad y(0) = 0.$$

a) Trouvez la solution à ce problème de valeur initiale et décrivez son comportement pour une valeur élevée de t .

b) Déterminez la valeur de t pour laquelle la solution croise pour la première fois la droite $y = 12$.

30. Trouvez la valeur de y_0 pour laquelle la solution au problème de valeur initiale

$$y' - y = 1 + 3 \sin t, \quad y(0) = y_0$$

demeure bornée lorsque $t \rightarrow \infty$.

31. Considérez le problème de valeur initiale

$$y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, \quad y(0) = y_0.$$

Trouvez la valeur de y_0 qui sépare les solutions qui croissent quand $t \rightarrow \infty$ de celles qui décroissent. Comment la solution qui correspond à cette valeur critique de y_0 se comporte-t-elle quand $t \rightarrow \infty$?

32. Montrez que toutes les solutions à $2y' + ty = 2$ (l'équation (42) dans le texte) s'approchent d'une limite lorsque $t \rightarrow \infty$ et déterminez cette valeur limite.

Suggestion: Considérez la solution générale, l'équation (48), et appliquez la règle de L'Hospital au premier terme.

33. Montrez que si a et λ sont des constantes positives et que b est un nombre réel, alors toute solution à l'équation

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

admet la propriété voulant que $y \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Suggestion: Il convient de considérer séparément les situations où $a = \lambda$ et celles où $a \neq \lambda$.

■ Pour les problèmes 34 à 37, construisez une équation différentielle linéaire du premier ordre dont les solutions ont le comportement requis lorsque $t \rightarrow \infty$. Ensuite, résolvez votre équation et vérifiez que les solutions ont effectivement la propriété précisée.

34. Toutes les solutions ont comme limite 3 lorsque $t \rightarrow \infty$.
35. Toutes les solutions admettent comme asymptote la droite $y = 3 - t$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
36. Toutes les solutions admettent comme asymptote la droite $y = 2t - 5$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
37. Toutes les solutions s'approchent de la courbe $y = 4 - t^2$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
38. **La variation des paramètres** Considérez la méthode suivante pour résoudre l'équation linéaire générale du premier ordre :

$$y' + p(t)y = g(t). \quad (\text{i})$$

- a) Si $g(t)$ est identiquement nulle, montrez que la solution est

$$y = A \exp \left[- \int p(t) dt \right], \quad (\text{ii})$$

où A est une constante.

- b) Si $g(t)$ n'est pas identiquement nulle, supposez que la solution est de la forme

$$y = A(t) \exp \left[- \int p(t) dt \right], \quad (\text{iii})$$

où A est une fonction de t . En posant cette expression dans l'équation différentielle, montrez que $A(t)$ doit satisfaire à la condition

$$A'(t) = g(t) \exp \left[\int p(t) dt \right]. \quad (\text{iv})$$

- c) Trouvez $A(t)$ à partir de l'équation (iv). Ensuite, posez $A(t)$ dans l'équation (iii) et déterminez y . Vérifiez que la solution obtenue de cette manière coïncide avec celle de l'équation (30). On appelle cette technique la **variation des paramètres**. Cette dernière est discutée en détail à la section 3.7 qui porte sur les équations linéaires du deuxième ordre.

- Pour les problèmes 39 à 42, utilisez la méthode qui a servi au problème 38 afin de résoudre l'équation différentielle.

39. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$

40. $y' + (1/t)y = 3 \cos 2t, \quad t > 0$

41. $ty' + 2y = \sin t, \quad t > 0$

42. $2y' + y = 3t^2$

- Les problèmes 43 à 46 portent sur les équations de Bernoulli. Trouvez la solution générale de chacune de ces équations.

43. $t^2 y' + 2ty - y^3 = 0, \quad t > 0$

44. $y' = ry - ky^2, \quad r > 0 \text{ et } k > 0$. Cette équation est importante dans l'étude des dynamiques de population. On discutera ce sujet plus en détail à la section 2.5.

45. $y' = \epsilon y - \sigma y^3, \quad \epsilon > 0 \text{ et } \sigma > 0$. On utilise cette équation dans l'étude de la stabilité de l'écoulement d'un fluide.

46. $dy/dt = (\Gamma \cos t + T)y - y^3$, où Γ et T sont des constantes. On utilise aussi cette équation dans l'étude de la stabilité de l'écoulement d'un fluide.

Problèmes supplémentaires

Une des difficultés qui se posent dans la résolution des équations du premier ordre est l'existence de diverses méthodes de résolution, chacune d'elles pouvant servir à un certain type d'équations. Savoir choisir la méthode de résolution appropriée pour une équation est une habileté parfois longue à maîtriser. Les problèmes suivants permettent de vous exercer à déterminer la ou les méthodes applicables à une équation donnée.

■ Pour les problèmes 1 à 32, résolvez l'équation différentielle. Si une condition initiale est précisée, trouvez aussi la solution qui satisfait à la condition.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - 2y}{x}$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + \cos x}{2 - \sin y}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{3 + 3y^2 - x}, \quad y(0) = 0$
4. $\frac{dy}{dx} = 3 - 6x + y - 2xy$
5. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + y^2 + 1}{x^2 + 2xy}$
6. $x \frac{dy}{dx} + xy = 1 - y, \quad y(1) = 0$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3 + 1}{y(2 + 3y)}$
8. $x \frac{dy}{dx} + 2y = \frac{\sin x}{x}, \quad y(2) = 1$
9. $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + 1}{x^2 + 2y}$
10. $(x^2y + xy - y) + (x^2y - 2x^2) \frac{dy}{dx} = 0$
11. $(x^2 + y) + (x + e^y) \frac{dy}{dx} = 0$
12. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{1 + e^x}$
13. $\frac{dy}{dx} = 1 + 2x + y^2 + 2xy^2$
14. $(x + y) + (x + 2y) \frac{dy}{dx} = 0, \quad y(2) = 3$
15. $(e^x + 1) \frac{dy}{dx} = y - ye^x$
16. $\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x} \cos y - e^{2y} \cos x}{-e^{-x} \sin y + 2e^{2y} \sin x}$
17. $\frac{dy}{dx} = e^{2x} + 3y$
18. $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x^2 - 2x}, \quad y(0) = 3$
19. $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 2y - y^3}{2x + 3xy^2}$
20. $y' = e^{x+y}$
21. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y^2 + 6xy - 4}{3x^2 + 4xy + 3y^2} = 0$
22. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 1}{y^2 + 1}, \quad y(-1) = 1$
23. $t \frac{dy}{dt} + (t + 1)y = e^{2t}$
24. $2 \sin y \sin x \cos x + \cos y \sin^2 x \frac{dy}{dx} = 0$
25. $\left(2 \frac{x}{y} - \frac{y}{x^2 + y^2}\right) + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{x^2}{y^2}\right) \frac{dy}{dx} = 0$
26. $xy' = y + xe^{y/x}$
27. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2y + y^3}$ Suggestion : Posez $u = x^2$.
28. $(2y + 3x) = -x \frac{dy}{dx}$
29. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$
30. $(3y^2 + 2xy) - (2xy + x^2) \frac{dy}{dx} = 0$
31. $\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2y + y^2}{2x^3 + 3xy}, \quad y(1) = -2$
32. $xy' + y - y^2e^{2x} = 0, \quad y(1) = 2$

33. Les équations de Riccati L'équation

$$\frac{dy}{dx} = q_1(t) + q_2(t)y + q_3(t)y^2$$

est appelée une équation de Riccati². Supposez qu'une solution particulière y_1 à cette équation est connue. On peut obtenir une solution plus générale contenant une constante arbitraire en effectuant la substitution

$$y = y_1(t) + \frac{1}{v(t)}.$$

2. Les équations de Riccati sont nommées ainsi en l'honneur de Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), un aristocrate vénitien, qui a refusé des nominations universitaires en Italie, en Autriche et en Russie afin de poursuivre ses études mathématiques à la maison, de façon individuelle. Riccati a étudié ces équations en profondeur. Toutefois, c'est Euler (en 1760) qui a découvert le résultat énoncé dans ce problème.

Montrez que $v(t)$ satisfait à l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{dv}{dt} = -(q_2 + 2q_3 y_1)v - q_3.$$

Notez que $v(t)$ ne contiendra qu'une seule constante arbitraire.

34. En utilisant la méthode décrite au problème 33 et la solution particulière donnée, résolvez les équations de Riccati suivantes.

a) $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2$, $y_1(t) = t$

b) $y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2$, $y_1(t) = \frac{1}{t}$

c) $\frac{dy}{dt} = \frac{2 \cos^2 t - \sin^2 t + y^2}{2 \cos t}$, $y_1(t) = \sin t$

35. La propagation d'une action unique dans une vaste population (par exemple, les conducteurs de voiture qui allument leurs phares à la tombée du jour) dépend souvent en partie de circonstances externes (la noirceur qui arrive) et en partie d'une tendance à imiter les personnes qui ont déjà accompli l'action en question. Dans ce cas, on peut décrire³ la proportion $y(t)$ de personnes qui ont accompli l'action à l'aide de l'équation

$$dy/dt = (1 - y)[x(t) + by], \quad (i)$$

où $x(t)$ mesure le stimulus externe et b est le coefficient d'imitation.

- a) Remarquez que l'équation (i) est une équation de Riccati et que $y_1(t) = 1$ en est une solution. Utilisez la transformation suggérée dans le problème 33 et trouvez une équation linéaire satisfaite par $v(t)$.
- b) Trouvez $v(t)$ dans le cas où $x(t) = at$, où a est une constante. Laissez votre réponse sous la forme d'une intégrale.

2.4 Les différences entre les équations linéaires et non linéaires

Jusqu'à maintenant, nous avons surtout démontré qu'il est possible d'utiliser les équations différentielles du premier ordre pour étudier différents types de problèmes en sciences de la nature. De plus, nous avons présenté des méthodes permettant de résoudre de telles équations, qu'elles soient à variables séparables, exactes linéaires ou linéaires. Maintenant, nous allons nous pencher sur des questions plus générales portant sur les équations différentielles et voir plus en détail en quoi les équations non linéaires diffèrent des équations linéaires.

L'existence et l'unicité des solutions Jusqu'ici, on a étudié plusieurs problèmes de valeur initiale, chacun d'eux ayant une solution et, apparemment, une seule. Maintenant, on doit déterminer si cette situation est vraie pour tous les problèmes de valeur initiale d'équations du premier ordre. En d'autres mots, est-ce que tout problème de valeur initiale possède exactement une solution ? Cette question est importante, même pour ceux qui ne sont pas mathématiciens. En étudiant un problème de physique, si on doit résoudre un problème de valeur initiale, on voudra sans doute savoir s'il existe une solution avant de consacrer du temps et des efforts à résoudre ce problème. De plus, si on trouve une solution, on voudra savoir s'il faut continuer à chercher d'autres solutions ou si cette solution est unique. En ce qui concerne les équations linéaires, le théorème fondamental à la page suivante permet de répondre à ces questions.

3. Voir Anatol Rapoport, « Contribution to the Mathematical Theory of Mass Behavior: I. The Propagation of Single Acts », *Bulletin of Mathematical Biophysics* 14 (1952), p. 159-169, et John Z. Hearon, « Note on the Theory of Mass Behavior », *Bulletin of Mathematical Biophysics* 17 (1955), p. 7-13.

Théorème 2.4.1

Si les fonctions p et g sont continues dans un intervalle ouvert $I: \alpha < t < \beta$ contenant le point $t = t_0$, alors il existe une unique fonction $y = \phi(t)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$y' + p(t)y = g(t) \quad (1)$$

quel que soit t dans l'intervalle I , et qui satisfait également à la condition initiale

$$y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

où y_0 est une valeur initiale donnée.

En fait, le théorème 2.4.1 énonce que le problème de valeur initiale donné admet une solution et que cette solution est unique. En d'autres mots, le théorème soutient à la fois l'existence et l'unicité de la solution au problème de valeur initiale (1), (2). De plus, il affirme que la solution existe dans n'importe quel intervalle I contenant le point initial t_0 où les coefficients p et g sont des fonctions continues. Ainsi, la solution peut être discontinue ou ne pas exister seulement en des points où au moins l'une de p ou g est discontinue. Il est souvent facile de déterminer de tels points.

On trouve en partie la démonstration de ce théorème dans la discussion de la section 2.3 qui mène à la formule (voir l'équation (33) de la section 2.3)

$$\mu(t)y = \int \mu(t)g(t) dt + c, \quad (3)$$

où

$$\mu(t) = \exp \int p(t) dt. \quad (4)$$

La démarche de la section 2.3 montre que si l'équation (1) admet une solution, alors elle doit être donnée par l'équation (3). En observant d'un peu plus près cette démarche, on peut aussi conclure que l'équation différentielle (1) doit effectivement avoir une solution. Puisque p est continu pour $\alpha < t < \beta$, il s'ensuit que μ est défini dans cet intervalle et qu'il s'agit d'une fonction différentiable non nulle. En multipliant l'équation (1) par $\mu(t)$, on obtient

$$[\mu(t)y]' = \mu(t)g(t). \quad (5)$$

Puisque μ et g sont continues, la fonction μg est intégrable et l'équation (3) découle de l'équation (5). De plus, l'intégrale de μg est différentiable. Donc y telle que donnée dans l'équation (3) existe et elle est différentiable dans l'intervalle $\alpha < t < \beta$. En substituant l'expression pour déterminer y de l'équation (3) dans l'équation (1) ou l'équation (5), on peut facilement vérifier que cette expression satisfait à l'équation différentielle dans l'intervalle $\alpha < t < \beta$. Finalement, la condition initiale (2) permet de déterminer la valeur unique de la constante c . Il n'existe donc qu'une seule solution au problème de valeur initiale, ce qui complète la démonstration.

L'équation (4) détermine le facteur intégrant $\mu(t)$ à un facteur multiplicatif près qui dépend de la borne inférieure de l'intégrale. Si on choisit cette borne inférieure égale à t_0 , alors

$$\mu(t) = \exp \int_{t_0}^t p(s) ds, \quad (6)$$

et il s'ensuit que $\mu(t_0) = 1$. En utilisant le facteur intégrant donné par l'équation (6) et en choisissant la borne inférieure de l'intégrale de l'équation (3) égale à t_0 , on obtient la solution générale à l'équation (1) sous la forme

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^t \mu(s)g(s) ds + c \right]. \quad (7)$$

Pour satisfaire à la condition initiale (2), on doit choisir $c = y_0$. Ainsi, la solution au problème de valeur initiale (1), (2) est

$$y = \frac{1}{\mu(t)} \left[\int_{t_0}^t \mu(s)g(s) ds + y_0 \right], \quad (8)$$

où $\mu(t)$ est donné par l'équation (6).

En revenant maintenant aux équations différentielles non linéaires, on doit remplacer le théorème 2.4.1 par un théorème plus général, comme celui qui suit.

Théorème 2.4.2

Si les fonctions f et $\partial f / \partial y$ sont continues dans un rectangle $\alpha < t < \beta$, $\gamma < y < \delta$ contenant le point (t_0, y_0) , alors il existe un intervalle $t_0 - h < t < t_0 + h$ contenu dans $\alpha < t < \beta$ pour lequel il existe une solution unique $y = \phi(t)$ concernant le problème de valeur initiale

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0. \quad (9)$$

Il faut noter que les hypothèses du théorème 2.4.2 se réduisent à celles du théorème 2.4.1 si l'équation différentielle est linéaire. Dans ce cas,

$$f(t, y) = -p(t)y + g(t) \text{ et } \partial f(t, y) / \partial y = -p(t).$$

Donc, la continuité de f et de $\partial f / \partial y$ équivaut à la continuité de p et de g . La démonstration du théorème 2.4.1 était relativement simple, car elle était basée sur l'expression (3) qui donne la solution à une équation linéaire quelconque. Il n'y a pas d'expression correspondante pour la solution à l'équation différentielle (9), ce qui rend la démonstration du théorème 2.4.2 beaucoup plus difficile. On en discute plus longuement et en profondeur dans des manuels d'équations différentielles plus avancés.

Il faut noter ici que les hypothèses du théorème 2.4.2 sont suffisantes pour garantir l'existence d'une solution unique au problème de valeur initiale (9) dans un intervalle $t_0 - h < t < t_0 + h$, mais elles ne sont pas nécessaires. Cela signifie que la conclusion peut s'appliquer sous des hypothèses un peu plus faibles sur la fonction f . En fait, on peut établir l'existence d'une solution (mais non son unicité) sur la seule base de la continuité de f .

Examinons maintenant quelques exemples.

Exemple 1

Utilisez le théorème 2.4.1 pour trouver l'intervalle dans lequel le problème de valeur initiale

$$ty' + 2y = 4t^2, \quad (10)$$

$$y(1) = 2 \quad (11)$$

admet une solution unique.

En réécrivant l'équation (10) sous la forme standard (1), on a

$$y' + (2/t)y = 4t.$$

Donc, $p(t) = 2/t$ et $g(t) = 4t$. Ainsi, pour cette équation, g est continu pour tout t , tandis que p est continu seulement pour $t < 0$ ou pour $t > 0$. L'intervalle $t > 0$ contient le point initial. Par conséquent, le théorème 2.4.1 garantit que le problème (10), (11) admet une solution unique dans l'intervalle $0 < t < \infty$. Dans l'exemple 4 de la section 2.3, on a trouvé que la solution à ce problème de valeur initiale était

$$y = t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t > 0. \quad (12)$$

On suppose maintenant que la condition initiale (11) est remplacée par $y(-1) = 2$. Alors, le théorème 2.4.1 soutient l'existence d'une solution unique pour $t < 0$. Comme on peut facilement le vérifier, la solution est une fois de plus donnée par l'équation (12), mais elle est maintenant valide dans l'intervalle $-\infty < t < 0$.

Exemple 2

Appliquez le théorème 2.4.2 au problème de valeur initiale

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad y(0) = -1. \quad (13)$$

Il faut noter qu'on ne peut pas appliquer le théorème 2.4.1 à ce problème, car l'équation différentielle est non linéaire. Pour appliquer le théorème 2.4.2, on observe que

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)^2}.$$

Ainsi, ces deux fonctions sont continues partout sauf sur la droite $y = 1$. Par conséquent, on peut tracer un rectangle autour du point initial $(0, -1)$ dans lequel f et $\partial f/\partial y$ sont continus. Ainsi, le théorème 2.4.2 garantit que le problème de valeur initiale admet une solution unique dans un intervalle autour de $x = 0$. Cependant, si on peut prolonger le rectangle infiniment dans les directions positive et négative de l'axe des x , cela ne signifie pas nécessairement que la solution existe pour tout x . En fait, le problème de valeur initiale (13) a été résolu dans l'exemple 2 de la section 2.1, et la solution existe seulement pour $x > -2$.

Supposons maintenant qu'on remplace la condition initiale par $y(0) = 1$. Le point initial se trouve maintenant sur la droite $y = 1$. On ne peut donc pas tracer autour de ce point un rectangle à l'intérieur duquel f et $\partial f/\partial y$ sont continus. Par conséquent, le théorème 2.4.2 ne révèle rien sur l'existence de solutions pour ce problème tel qu'il a été modifié. Cependant, si on sépare les variables et qu'on intègre (comme dans la section 2.1), on trouve

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + c.$$

De plus, si $x = 0$ et $y = 1$, alors $c = -1$. Finalement, en résolvant pour y , on obtient

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x}. \quad (14)$$

L'équation (14) définit deux fonctions qui satisfont à l'équation différentielle donnée pour $x > 0$ et à la condition initiale $y(0) = 1$.

Exemple 3

Considérez le problème de valeur initiale

$$y' = y^{1/3}, \quad y(0) = 0 \quad (15)$$

pour $t \geq 0$. Appliquez le théorème 2.4.2 à ce problème de valeur initiale, puis résolvez le problème.

La fonction $f(t, y) = y^{1/3}$ est continue partout, mais $\partial f/\partial y = y^{-2/3}/3$ n'est pas continu en $y = 0$. Ainsi, le théorème 2.4.2 ne s'applique pas et on ne peut pas en tirer de conclusion. Cependant, d'après la remarque qui suit le théorème 2.4.2, la continuité de f garantit l'existence de solutions mais non leur unicité.

Pour mieux comprendre la situation, on doit résoudre le problème, ce qui est assez facile puisque l'équation différentielle est à variables séparables. Ainsi, on a

$$y^{-1/3} dy = dt.$$

Donc,

$$\frac{3}{2} y^{2/3} = t + c$$

et

$$y = \left[\frac{2}{3}(t + c) \right]^{3/2}.$$

La condition initiale est satisfaite si $c = 0$. Donc,

$$y = \phi_1(t) = \left(\frac{2}{3}t \right)^{3/2}, \quad t \geq 0 \quad (16)$$

satisfait aux équations (15). D'un autre côté, la fonction

$$y = \phi_2(t) = -\left(\frac{2}{3}t \right)^{3/2}, \quad t \geq 0 \quad (17)$$

► est aussi une solution au problème de valeur initiale. De plus, la fonction

$$y = \psi(t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (18)$$

représente également une autre solution. Plus encore, il n'est pas difficile de démontrer que, pour un t_0 positif quelconque, les fonctions

$$y = \chi(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t < t_0 \\ \pm \left[\frac{2}{3}(t - t_0) \right]^{3/2}, & \text{si } t \geq t_0 \end{cases} \quad (19)$$

sont continues, différentiables (en particulier en $t = t_0$) et elles sont des solutions au problème de valeur initiale (15). Ainsi, ce problème admet un ensemble infini de solutions ; la figure 2.4.1 présente quelques-unes de ces solutions.

Comme on l'a déjà mentionné, le caractère non unique des solutions au problème (15) ne contredit pas le théorème d'existence et d'unicité, puisque le théorème ne s'applique pas si le point initial se situe sur l'axe des t . Cependant, si (t_0, y_0) est un point qui ne se trouve pas sur l'axe des t , alors le théorème garantit qu'il existe une solution unique à l'équation différentielle $y' = y^{1/3}$ passant par (t_0, y_0) .

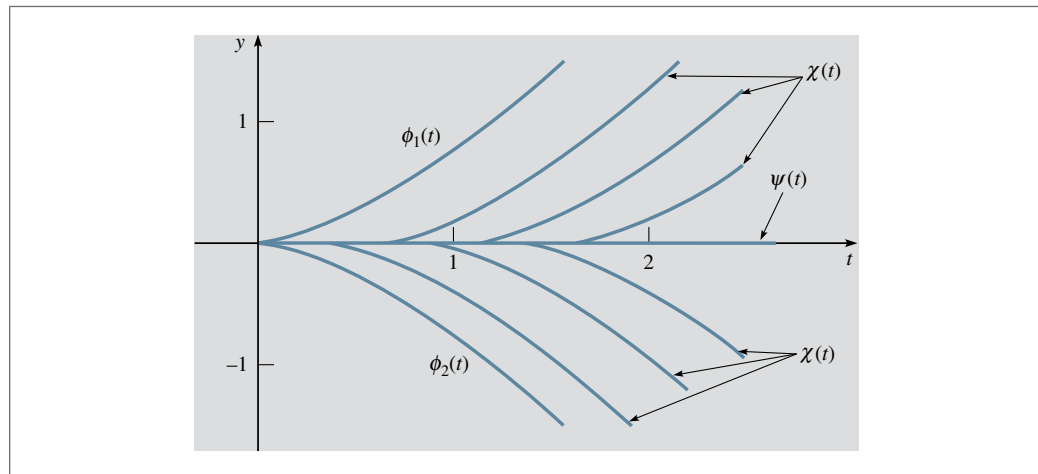


Figure 2.4.1 Différentes solutions au problème de valeur initiale $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$.

L'intervalle de définition Selon le théorème 2.4.1, la solution à une équation linéaire (1),

$$y' + p(t)y = g(t),$$

assujettie à la condition initiale $y(t_0) = y_0$, existe dans tout intervalle autour de $t = t_0$ où les fonctions p et g sont continues. Ainsi, les asymptotes verticales ou d'autres discontinuités dans la solution peuvent se produire seulement aux points de discontinuité de p ou de g . Par exemple, les solutions de l'exemple 1 (avec une seule exception) admettent comme asymptote l'axe des y , ce qui est dû à la discontinuité en $t = 0$ du coefficient $p(t) = 2/t$. Toutefois, aucune de ces solutions n'a d'autre point où elles n'existent pas et ne sont pas différentiables. La solution exceptionnelle montre que les solutions peuvent parfois demeurer continues même aux points de discontinuité des coefficients.

D'un autre côté, pour un problème de valeur initiale non linéaire qui satisfait aux hypothèses du théorème 2.4.2, l'intervalle dans lequel une solution existe peut être difficile à déterminer. La solution $y = \phi(t)$ existe assurément tant que le point $[t, \phi(t)]$ demeure à l'intérieur d'une région où les hypothèses du théorème 2.4.2 sont satisfaites. C'est ce qui permet de déterminer la valeur de h dans ce théorème. Cependant, puisque $\phi(t)$ n'est généralement pas connu, il peut être impossible de vérifier si le point $[t, \phi(t)]$ appartient à cette région. Dans tous les cas, l'intervalle à l'intérieur duquel une solution existe ne dépend pas de manière directe de la fonction f de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$. L'exemple à la page suivante illustre cette remarque.

Exemple 4

Résolvez le problème de valeur initiale

$$y' = y^2, \quad y(0) = 1, \quad (20)$$

puis déterminez l'intervalle dans lequel la solution existe.

Le théorème 2.4.2 garantit que ce problème admet une solution unique puisque $f(t, y) = y^2$ et $\partial f / \partial y = 2y$ sont continus partout. Pour trouver la solution, on sépare les variables et on intègre le résultat, où

$$y^{-2} dy = dt \quad (21)$$

d'où

$$-y^{-1} = t + c.$$

Ensuite, en résolvant pour déterminer y , on a

$$y = -\frac{1}{t + c}. \quad (22)$$

Pour satisfaire à la condition initiale, on doit choisir $c = -1$, donc

$$y = \frac{1}{1 - t} \quad (23)$$

est la solution au problème de valeur initiale. Évidemment, la solution est non bornée quand $t \rightarrow 1$. Par conséquent, la solution existe seulement dans l'intervalle $-\infty < t < 1$. Cependant, l'équation différentielle elle-même n'indiquait nullement que le point $t = 1$ était exceptionnel. De plus, si on remplace la condition initiale par

$$y(0) = y_0, \quad (24)$$

alors on doit choisir la constante c dans l'équation (22) pour que $c = -1/y_0$. Il s'ensuit que

$$y = \frac{y_0}{1 - y_0 t} \quad (25)$$

est la solution au problème de valeur initiale avec la condition initiale (24). Il faut noter que la solution (25) devient non bornée quand $t \rightarrow 1/y_0$ et, par conséquent, l'intervalle dans lequel la solution existe est $-\infty < t < 1/y_0$ si $y_0 > 0$, et est $1/y_0 < t < \infty$ si $y_0 < 0$. Cet exemple illustre une autre caractéristique des problèmes de valeur initiale pour des équations non linéaires : les singularités de la solution peuvent dépendre autant des conditions initiales que de la nature de l'équation différentielle.

La solution générale Une autre différence entre les équations linéaires et non linéaires réside dans le concept de solution générale. Pour une équation linéaire du premier ordre, on peut obtenir une solution qui contient une constante arbitraire, de laquelle toutes les solutions possibles découlent, en précisant des valeurs pour cette constante. Ce n'est pas le cas pour les équations non linéaires. Même si on peut trouver une solution qui contient une constante arbitraire, il peut exister d'autres solutions qu'on ne peut obtenir en donnant des valeurs à cette constante. Par exemple, pour l'équation différentielle $y' = y^2$ de l'exemple 4, l'expression de l'équation (22) contient une constante arbitraire, mais elle ne décrit pas toutes les solutions à l'équation différentielle. Pour le montrer, on observe que la fonction $y = 0$ pour tout t est une solution à l'équation différentielle, mais on ne peut pas l'obtenir à partir de l'équation (22) en assignant une valeur à c . Dans cet exemple, on pouvait s'attendre à rencontrer une telle situation car, pour réécrire l'équation différentielle initiale sous la forme (21), on devait supposer que y est différent de zéro. Cependant, l'existence de solutions additionnelles n'est pas inhabituelle pour les équations non linéaires. Le problème 22 en donne un exemple moins évident. En conséquence, on utilisera le terme solution générale seulement quand on discutera les équations linéaires.

Les solutions implicites On se rappelle qu'en ce qui concerne un problème de valeur initiale pour une équation linéaire du premier ordre, l'équation (8) fournit une solution explicite $y = \phi(t)$. Tant qu'on peut évaluer les intégrales nécessaires, on peut déterminer la valeur de la solution en tout point simplement en posant la valeur appropriée de t dans l'équation. Dans

le cas des équations non linéaires, la situation est beaucoup moins satisfaisante. En général, le mieux qu'on puisse espérer est de trouver une équation

$$F(t, y) = 0 \quad (26)$$

en t et en y qui sera satisfaite par la solution $y = \phi(t)$. Toutefois, ce résultat n'est atteint que pour des équations différentielles de types particuliers, dont les équations à variables séparables. On appelle l'équation (26) une **intégrale** ou une **intégrale première** de l'équation différentielle et, comme on l'a déjà noté, son graphique est une courbe-solution ou une famille de courbes-solutions. L'équation (26), en supposant qu'on puisse la trouver, définit implicitement la solution. Ainsi, pour chaque valeur de t , on doit résoudre l'équation (26) pour trouver la valeur correspondante de y . Si l'équation (26) est assez simple, on peut la résoudre pour déterminer y au moyen d'une méthode analytique et, ainsi, obtenir une formule explicite pour la solution. Cependant, cette démarche est souvent impossible et on devra recourir à des méthodes numériques afin de déterminer la valeur de y pour une valeur donnée de t . Quand on a calculé différents couples de valeurs de t et de y , il est souvent utile de les tracer sur un graphique puis de tracer la courbe-solution qui passe par ces couples. Ce travail peut être effectué à l'aide d'un ordinateur.

Les exemples 2, 3 et 4 sont des problèmes non linéaires pour lesquels il est facile d'obtenir une formule explicite permettant de déterminer la solution $y = \phi(t)$. D'un autre côté, les exemples 1 et 3 de la section 2.1 sont des cas où il est préférable de laisser la solution sous une forme implicite et d'utiliser des méthodes numériques pour l'évaluer pour des valeurs particulières de la variable indépendante. Cette dernière situation est la plus courante. À moins que la relation implicite ne soit quadratique en y ou qu'elle ait une autre forme simple particulière, il est peu probable qu'on puisse la résoudre de manière analytique. En fait, le plus souvent, il est même impossible de trouver une expression implicite pour la solution à une équation non linéaire du premier ordre.

La représentation graphique ou numérique des courbes-solutions Puisqu'il est difficile d'obtenir des solutions analytiques exactes aux équations différentielles non linéaires, les méthodes qui fournissent des solutions approchées ou d'autres renseignements qualitatifs sur les solutions prennent une plus grande importance. Dans la section 1.1, on a déjà décrit la façon de construire le champ de direction d'une équation différentielle. Le champ de direction peut souvent montrer la forme qualitative des solutions et peut aussi servir à déterminer les régions du plan des ty , où les solutions présentent des caractéristiques intéressantes qui méritent une étude analytique ou numérique plus détaillée. On discutera davantage des méthodes graphiques pour les équations du premier ordre dans la section 2.6.

Résumé Les équations linéaires $y' + p(t)y = g(t)$ admettent plusieurs propriétés remarquables qu'on peut résumer dans les énoncés suivants :

1. Si on suppose que les coefficients sont continus, une solution générale contenant une constante arbitraire existe. Cette solution inclut toutes les solutions à l'équation différentielle. On peut choisir une solution particulière qui satisfait à une condition initiale donnée en donnant une valeur appropriée à la constante arbitraire.
2. Il existe une expression pour représenter la solution, soit l'équation (7) ou l'équation (8). De plus, même si elle nécessite deux intégrations, cette expression donne explicitement la solution $y = \phi(t)$.
3. Le cas échéant, on peut déterminer les points de discontinuité ou les singularités de la solution (sans résoudre le problème) simplement en trouvant les points de discontinuité des coefficients. Ainsi, si les coefficients sont continus pour tout t , alors la solution existe et est continue pour tout t .

En général, aucun de ces énoncés n'est vrai pour les équations non linéaires. Même si une équation non linéaire peut admettre une solution impliquant une constante arbitraire, d'autres solutions peuvent exister. Il n'y a pas de formule générale pour les solutions aux équations non linéaires. Si on peut résoudre une équation non linéaire, on risque d'obtenir une équation qui

définit implicitement les solutions plutôt que sous forme explicite. Enfin, on ne peut généralement trouver les singularités des solutions aux équations non linéaires qu'en résolvant l'équation et en examinant la solution. Il est probable que les singularités dépendent de la condition initiale tout comme de l'équation différentielle.

Problèmes

- Pour les problèmes 1 à 6, déterminez (sans résoudre le problème) un intervalle dans lequel la solution au problème de valeur initiale existe avec certitude.

1. $(t-3)y' + (\ln t)y = 2t$, $y(1) = 2$
2. $t(t-4)y'' + (t-2)y' + y = 0$, $y(2) = 1$
3. $y' + (\tan t)y = \sin t$, $y(\pi) = 0$
4. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$, $y(-3) = 1$
5. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2$, $y(1) = -3$
6. $(\ln t)y' + y = \cot t$, $y(2) = 3$

- Pour les problèmes 7 à 12, définissez la région du plan des ty où les hypothèses du théorème 2.4.2 sont satisfaites.

7. $y' = \frac{t-y}{2t+5y}$
8. $y' = (1-t^2-y^2)^{1/2}$
9. $y' = \frac{\ln |ty|}{1-t^2+y^2}$
10. $y' = (t^2+y^2)^{3/2}$
11. $\frac{dy}{dt} = \frac{1+t^2}{3y-y^2}$
12. $\frac{dy}{dt} = \frac{(\cot t)y}{1+y}$

- Pour les problèmes 13 à 16, résolvez le problème de valeur initiale et déterminez comment l'intervalle dans lequel la solution existe dépend de la valeur initiale y_0 .

13. $y' = -4t/y$, $y(0) = y_0$
14. $y' = 2ty^2$, $y(0) = y_0$
15. $y' + y^3 = 0$, $y(0) = y_0$
16. $y' = t^2/y(1+t^3)$, $y(0) = y_0$

- Pour les problèmes 17 à 20, tracez un champ de direction et le graphique de différentes solutions à l'équation différentielle. Décrivez comment les solutions semblent se comporter quand t augmente et comment leur comportement dépend de la valeur initiale y_0 lorsque $t = 0$.

17. $y' = ty(3-y)$
18. $y' = y(3-ty)$
19. $y' = -y(3-ty)$
20. $y' = t-1-y^2$

21. Considérez le problème de valeur initiale $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$ de l'exemple 3 de la présente section.

- a) Existe-t-il une solution qui passe par le point $(1, 1)$? Le cas échéant, trouvez-la.
- b) Existe-t-il une solution qui passe par le point $(2, 1)$? Le cas échéant, trouvez-la.
- c) Considérez toutes les solutions possibles au problème de valeur initiale donné. Déterminez l'ensemble des valeurs de ces solutions en $t = 2$.

22. a) Vérifiez si $y_1(t) = 1-t$ et $y_2(t) = -t^2/4$ sont des solutions au problème de valeur initiale

$$y' = \frac{-t + (t^2 + 4y)^{1/2}}{2}, \quad y(2) = -1.$$

Où ces solutions sont-elles valides?

- b) Expliquez pourquoi l'existence de deux solutions au problème donné ne contredit pas la partie du théorème 2.4.2 portant sur l'unicité.
 - c) Montrez que $y = ct + c^2$, où c est une constante arbitraire, satisfait à l'équation différentielle de la partie a) pour $t \geq -2c$. Si $c = -1$, la condition initiale est aussi satisfaite et on obtient la solution $y = y_1(t)$. Montrez qu'aucun choix de c ne permet d'obtenir la deuxième solution $y = y_2(t)$.
23. a) Montrez que $\phi(t) = e^{2t}$ est une solution à $y' - 2y = 0$ et que $y = c\phi(t)$ est aussi une solution à cette équation pour toute valeur de la constante c .
- b) Montrez que $\phi(t) = 1/t$ est une solution à $y' + y^2 = 0$ pour $t > 0$, mais que $y = c\phi(t)$ n'est pas une solution à cette équation sauf si $c = 0$ ou $c = 1$. Il faut noter que l'équation de la présente partie est non linéaire, tandis que celle de la partie a) est linéaire.

24. Montrez que si $y = \phi(t)$ est une solution à $y' + p(t)y = 0$, alors $y = c\phi(t)$ est aussi une solution pour toute valeur de la constante c .

25. Soit $y = y_1(t)$ la solution à

$$y' + p(t)y = 0, \quad (\text{i})$$

et soit $y = y_2(t)$ la solution à

$$y' + p(t)y = g(t). \quad (\text{ii})$$

Montrez que $y = y_1(t) + y_2(t)$ est aussi une solution à l'équation.

26. a) Montrez qu'on peut écrire la solution (7) à l'équation linéaire générale (1) sous la forme

$$y = cy_1(t) + y_2(t), \quad (\text{i})$$

où c est une constante arbitraire. Déterminez les fonctions y_1 et y_2 .

b) Montrez que y_1 est une solution à l'équation différentielle

$$y' + p(t)y = 0, \quad (\text{ii})$$

qui correspond à $g(t) = 0$.

c) Montrez que y_2 est une solution à l'équation linéaire générale (1). On verra plus loin (par exemple à la section 3.6) que les solutions aux équations linéaires d'ordre plus élevé suivent un modèle semblable à l'équation (i).

■ **Les coefficients discontinus** Il arrive parfois que pour certaines équations différentielles, une des fonctions p et g (ou les deux) admet des discontinuités de type saut. Si t_0 est un tel point de discontinuité, alors on doit résoudre l'équation séparément pour $t < t_0$ et $t > t_0$. Après quoi, les deux solutions sont juxtaposées de sorte que y soit continu en t_0 . On y arrive en faisant un choix approprié de constantes arbitraires. Les deux problèmes suivants illustrent cette situation. Il faut noter que dans chaque cas, il est impossible de rendre y continu en t_0 .

27. Résolvez le problème de valeur initiale

$$y' + 2y = g(t), \quad y(0) = 0,$$

où

$$g(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & t > 1. \end{cases}$$

28. Résolvez le problème de valeur initiale

$$y' + p(t)y = 0, \quad y(0) = 1,$$

où

$$p(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

2.5 La modélisation mathématique et les équations du premier ordre

Les équations différentielles n'intéressent pas seulement les mathématiciens. On les utilise aussi pour étudier une grande variété de problèmes en physique, en biologie et en sciences sociales. Cela s'explique par le fait que les modèles mathématiques mènent à des équations qui relient les variables et les paramètres de ces problèmes.

Ces équations permettent souvent de faire des prédictions sur la manière dont un processus naturel se comportera dans différentes circonstances. Souvent, il est facile de faire varier les paramètres dans un modèle mathématique, mais sur une grande échelle, cela peut s'avérer long et coûteux dans un cadre expérimental. Néanmoins, la modélisation mathématique et l'expérience (ou l'observation) sont toutes les deux très importantes. Elles jouent en quelque sorte des rôles complémentaires dans la recherche scientifique. On valide les modèles mathématiques en comparant leurs prédictions avec les résultats expérimentaux. D'un autre côté, les analyses mathématiques peuvent suggérer les directions à explorer sur le plan expérimental et indiquer avec assez de précision les données expérimentales qui seront les plus utiles.

Dans les sections 1.1 et 1.2, nous avons formulé et étudié quelques modèles mathématiques simples. Nous commencerons par récapituler certaines des conclusions tirées dans ces sections, puis nous les généraliserons. Quel que soit le champ d'application spécifique, trois étapes précises se retrouvent constamment dans le processus de modélisation mathématique.

La construction du modèle Cette étape comprend la traduction d'une situation physique en termes mathématiques, souvent en suivant les étapes indiquées à la fin de la section 1.1. À ce stade, le problème le plus difficile réside probablement dans la détermination des principes physiques qui sont censés gouverner le processus. Par exemple, on a observé que dans certaines circonstances, la chaleur passe d'un corps chaud à un corps froid à un taux proportionnel à la différence de température, que les objets se déplacent conformément aux lois du mouvement de Newton et que des populations isolées d'insectes croissent à un taux proportionnel à leur population actuelle. Chacun de ces énoncés met en jeu un taux de variation (une dérivée) et, par conséquent, quand on exprime l'énoncé en termes mathématiques, il en résulte une équation différentielle. L'équation différentielle est un modèle mathématique du processus.

Il est important de réaliser que les équations mathématiques ne sont souvent qu'une description approximative du processus réel. Par exemple, les corps qui se déplacent à des vitesses comparables à celle de la lumière ne sont pas gouvernés par les lois de Newton ; les populations d'insectes ne croissent pas indéfiniment (comme on l'a énoncé précédemment) en raison des limites de leurs ressources en nourriture ; le transfert de chaleur subit l'influence de facteurs autres que la différence de température. On peut toutefois adopter le point de vue selon lequel les équations mathématiques décrivent exactement le fonctionnement d'un modèle physique simplifié qui a été construit pour réunir les caractéristiques les plus importantes du processus réel. Parfois, le processus de modélisation mathématique implique la substitution d'un processus discret à un processus continu. Par exemple, la taille d'une population d'insectes varie discrètement. Cependant, si la population est grande, on peut la considérer comme une variable continue et de même pour sa dérivée.

L'analyse du modèle Une fois le problème formulé en termes mathématiques, on doit résoudre une ou plusieurs équations différentielles ou, si ce n'est pas possible, en apprendre le plus possible sur les propriétés de la solution. Il peut arriver que le côté mathématique soit relativement difficile et dans ce cas, on peut fournir d'autres approximations à cette étape pour rendre le problème mathématiquement résoluble. Par exemple, on peut remplacer une équation non linéaire par une équation linéaire permettant de l'approximer. On peut aussi remplacer un coefficient qui varie lentement par une constante. Naturellement, on doit examiner toute approximation de ce genre d'un point de vue physique pour s'assurer que le problème mathématique simplifié reflète encore les caractéristiques essentielles du processus physique étudié. En même temps, une connaissance approfondie de la physique du problème peut suggérer des approximations mathématiques raisonnables qui en faciliteront l'analyse mathématique. Cette interaction entre un phénomène physique et la connaissance des techniques mathématiques et de leurs limites caractérise bien les mathématiques appliquées. De plus, elle est indispensable pour construire des modèles mathématiques utiles de processus physiques complexes.

La comparaison avec l'expérience ou l'observation Finalement, après avoir obtenu la solution (ou du moins de l'information sur celle-ci), on doit interpréter cette information en tenant compte du contexte dans lequel le problème a été soulevé. En particulier, on doit toujours vérifier si la solution mathématique semble physiquement raisonnable. Si c'est possible, on calcule les valeurs de la solution en des points choisis et on les compare avec des valeurs qui ont fait l'objet d'observations expérimentales. Ou encore, on peut se demander si le comportement de la solution, après une longue période de temps, est compatible avec les observations. On peut aussi examiner les solutions qui correspondent à des valeurs particulières des paramètres du problème. Bien sûr, le fait que la solution mathématique semble raisonnable ne garantit pas qu'elle soit bonne. Cependant, si les prédictions du modèle mathématique ne concordent pas avec les observations du système physique qu'il est censé décrire, on peut supposer que des erreurs ont été commises dans la résolution du problème mathématique, que le modèle mathématique lui-même a besoin d'être perfectionné ou qu'on doit refaire les observations plus minutieusement. Les exemples de cette section sont typiques de problèmes qui permettent d'établir des équations différentielles.

Exemple 1

Un mélange

Au temps $t = 0$, un réservoir contient Q_0 lb de sel dissous dans 100 gal d'eau (voir la figure 2.5.1). Supposez que de l'eau contenant 1/4 lb de sel par gallon se déverse dans le réservoir à un taux de r gal/min et que le mélange bien homogène s'écoule du réservoir au même taux. Posez le problème de valeur initiale qui décrit ce processus d'écoulement. Trouvez la quantité de sel $Q(t)$ dans le réservoir au temps t ainsi que la quantité limite Q_L présente après une très longue période. Si $r = 3$ et $Q_0 = 2Q_L$, trouvez le temps T auquel le niveau de sel se situe à moins de 2 % de Q_L . De plus, trouvez le taux d'écoulement nécessaire pour que T n'excède pas 45 min.

Supposons qu'aucune quantité de sel n'est créée ou détruite dans le réservoir. Par conséquent, toute variation de la quantité de sel est uniquement due aux entrées et aux sorties du liquide dans le réservoir. Plus précisément, le taux de variation du sel dans le réservoir dQ/dt sera égal au taux d'entrée du sel dans le réservoir moins le taux de sortie. On peut écrire cette équation sous la forme suivante :

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taux d'entrée} - \text{taux de sortie}. \quad (1)$$

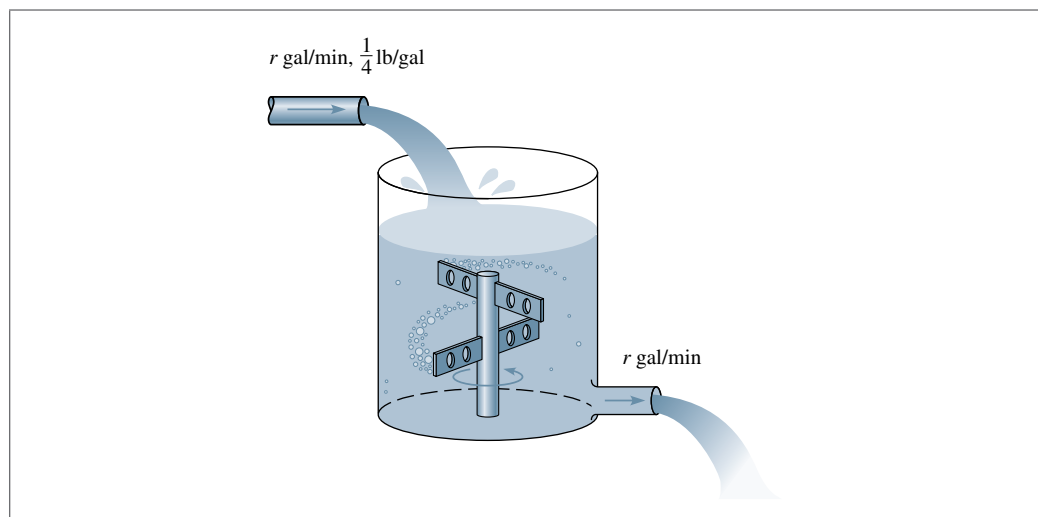


Figure 2.5.1 Réservoir d'eau de l'exemple 1.

Le taux auquel le sel entre dans le réservoir est la concentration équivalant à 1/4 lb/gal fois le taux d'écoulement r gal/min ou $(r/4)$ lb/min. Pour trouver le taux auquel le sel s'écoule du réservoir, on doit multiplier la concentration de sel dans le réservoir par le taux de sortie r gal/min. Puisque le taux

▶ d'entrée et le taux de sortie sont égaux, le volume d'eau dans le réservoir reste constant à 100 gal. De plus, comme le mélange est homogène, la concentration dans tout le réservoir est la même, soit $[Q(t)/100]$ lb/gal. Par conséquent, le taux auquel le sel sort du réservoir est de $[rQ(t)/100]$ lb/min. Ainsi, l'équation différentielle qui régit ce processus est

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100}. \quad (2)$$

La condition initiale est

$$Q(0) = Q_0. \quad (3)$$

Après avoir étudié le problème d'un point de vue physique, il est possible de prévoir que le mélange initial du réservoir sera éventuellement remplacé par le mélange qui s'y déverse et dont la concentration est de 1/4 lb/gal. Donc, on doit s'attendre à ce qu'en fin de compte, la quantité de sel dans le réservoir soit d'environ 25 lb. D'un point de vue géométrique, on peut arriver à la même conclusion en traçant un champ de direction pour l'équation (2) avec différentes valeurs positives de r .

Afin de résoudre analytiquement ce problème, il faut noter que l'équation (2) est à la fois linéaire et à variables séparables. En la réécrivant sous la forme habituelle d'une équation linéaire, on obtient

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}. \quad (4)$$

Le facteur intégrant est donc $e^{rt/100}$ et la solution générale est

$$Q(t) = 25 + ce^{-rt/100}, \quad (5)$$

où c est une constante arbitraire. Pour satisfaire à la condition initiale (3), on doit choisir $c = Q_0 - 25$. Ainsi, la solution au problème de valeur initiale (2), (3) est

$$Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-rt/100} \quad (6)$$

ou

$$Q(t) = 25(1 - e^{-rt/100}) + Q_0 e^{-rt/100}. \quad (7)$$

À partir de l'équation (6) ou (7), on peut voir que $Q(t) \rightarrow 25$ (lb) quand $t \rightarrow \infty$. Donc, la valeur limite Q_L est de 25, ce qui confirme notre intuition du point de vue physique. En interprétant la solution (7), on peut noter que le deuxième terme du second membre est la portion de sel initialement présente dans le réservoir qui reste au temps t , tandis que le premier terme donne la quantité de sel amenée dans le réservoir grâce au processus d'écoulement. La figure 2.5.2 présente les graphiques de la solution pour $r = 3$ et différentes valeurs de Q_0 .

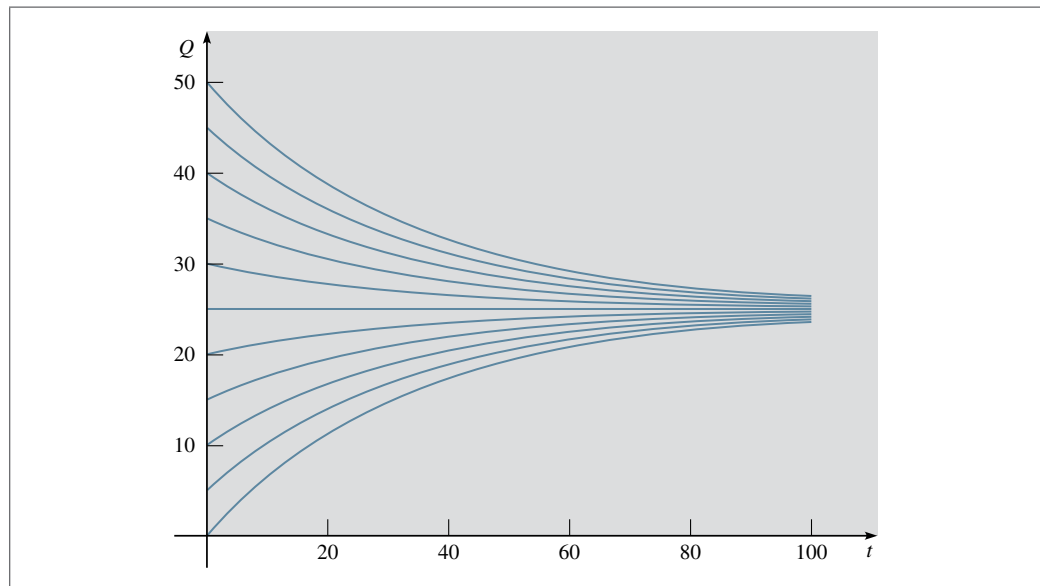


Figure 2.5.2 Solutions au problème de valeur initiale (2), (3) $dQ/dt = (r/4) - rQ/100$, $Q(0) = Q_0$ pour $r = 3$ et différentes valeurs de Q_0 .

► Maintenant, on suppose que $r = 3$ et que $Q_0 = 2Q_L = 50$. Alors, l'équation (6) devient

$$Q(t) = 25 + 25e^{-0,03t}. \quad (8)$$

Puisque 2 % de 25 vaut 0,5, on doit trouver le temps T auquel $Q(t)$ vaut 25,5. En posant $t = T$ et $Q = 25,5$ dans l'équation (8) et en résolvant pour trouver T , on obtient

$$T = (\ln 50)/0,03 \cong 130,4 \text{ (min)}. \quad (9)$$

Afin de déterminer r de sorte que $T = 45$, on revient à l'équation (6) et on pose $t = 45$, $Q_0 = 50$ et $Q(t) = 25,5$. Ensuite, on résout pour trouver r . Le résultat est

$$r = (100/45) \ln 50 \cong 8,69 \text{ gal/min}. \quad (10)$$

Puisque cet exemple est hypothétique, on ne remettra pas en question la validité du modèle. Si les taux d'écoulement sont tels qu'énoncés et si la concentration de sel dans le réservoir est uniforme, alors l'équation différentielle (1) décrit exactement le processus d'écoulement. Bien que cet exemple précis n'ait pas d'intérêt particulier, il est souvent important d'utiliser ce type de modèle pour résoudre des problèmes précis. Ces derniers peuvent porter sur la présence d'un polluant dans un lac ou d'un médicament dans un organe du corps humain, par exemple, plutôt que sur un réservoir d'eau salée. Dans de tels cas, les taux d'écoulement peuvent être difficiles à déterminer ou ils peuvent varier avec le temps. De la même manière, la concentration peut ne pas être uniforme dans certains cas. Finalement, les taux d'entrée et de sortie peuvent être différents, ce qui signifie qu'on doit aussi tenir compte de la variation de la quantité de liquide dans le problème.

Exemple 2

Les intérêts composés

Supposez qu'une somme d'argent est déposée dans une banque ou un fonds monétaire et rapporte des intérêts à un taux annuel r . La valeur $S(t)$ du placement au temps t est fonction de la fréquence à laquelle les intérêts sont composés de même que du taux d'intérêt. Les établissements financiers ont différentes politiques concernant la capitalisation : certains taux sont composés mensuellement, d'autres toutes les semaines et d'autres encore, tous les jours. Si on suppose que la capitalisation s'effectue de manière continue, alors on peut poser un problème de valeur initiale simple décrivant la croissance du placement.

Le taux de variation de la valeur du placement est de dS/dt et cette quantité est égale au taux auquel les intérêts croissent, soit le taux d'intérêt multiplié r fois par la valeur actuelle du placement $S(t)$. Ainsi,

$$dS/dt = rS \quad (11)$$

est l'équation différentielle qui régit ce processus. On suppose aussi que l'on connaît la valeur du placement en un temps particulier, soit

$$S(0) = S_0. \quad (12)$$

Alors, la solution au problème de valeur initiale (11), (12) permet d'obtenir le solde $S(t)$ dans le compte bancaire au temps t . Ce problème de valeur initiale est facilement résoluble, puisque l'équation différentielle (11) est à la fois linéaire et à variables séparables. En résolvant les équations (11) et (12), on trouve que

$$S(t) = S_0 e^{rt}. \quad (13)$$

Ainsi, un compte bancaire offrant des intérêts composés de manière continue croît de façon exponentielle.

Maintenant, on compare les résultats de ce modèle continu avec la situation où la capitalisation s'effectue à des intervalles de temps déterminés. Si les intérêts sont composés une fois par année, après t années, on a

$$S(t) = S_0(1 + r)^t.$$

- ▶ Si les intérêts sont composés deux fois par année, alors au bout de six mois, la valeur du placement est de $S_0[1 + (r/2)]$ et au bout de une année, elle est de $S_0[1 + (r/2)]^2$. Ainsi, après t années, on a

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{2} \right)^{2t}.$$

En général, si les intérêts sont composés m fois par année, alors

$$S(t) = S_0 \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt}. \quad (14)$$

La relation entre les formules (13) et (14) nous apparaît puisque nous savons que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_0 \left(1 + \frac{r}{m} \right)^{mt} = S_0 e^{rt}.$$

Le même modèle s'applique aussi bien à des placements plus généraux où les dividendes et peut-être même les gains en capital peuvent s'accumuler, comme les intérêts. Pour cette raison, on désignera dorénavant le taux de rendement par le symbole r .

Le tableau 2.5.1 illustre l'effet relié au changement de la fréquence de capitalisation pour un taux de rendement r de 8 %. Les deuxième et troisième colonnes sont calculées à partir de l'équation (14) pour des taux d'intérêt qui sont composés trimestriellement et quotidiennement, de façon respective, et la quatrième colonne est calculée à partir de l'équation (13) pour une capitalisation continue. Les résultats montrent que la fréquence de capitalisation n'est pas très importante dans la plupart des cas. Par exemple, pour une période de 10 ans, la différence entre les taux d'intérêt trimestriels et continus est de 17,50 \$ par 1000 \$ placés, soit moins de 2 \$ par année. La différence serait plus grande pour des taux de rendement plus élevés et moindre pour des taux plus bas. À partir de la première ligne du tableau, on voit que pour un taux de rendement de $r = 8\%$, le rendement annuel pour les taux d'intérêt trimestriels est de 8,24 % et pour des taux d'intérêt quotidiens ou continus, il est de 8,33 %.

Tableau 2.5.1 Croissance du capital à un taux de rendement de $r = 8\%$ pour divers modes de capitalisation

Années	$S(t)/S(t_0)$ à partir de l'équation (14)		$S(t)/S(t_0)$ à partir de l'équation (13)
	$m = 4$	$m = 365$	
1	1,0824	1,0833	1,0833
2	1,1717	1,1735	1,1735
5	1,4859	1,4918	1,4918
10	2,2080	2,2253	2,2255
20	4,8754	4,9522	4,9530
30	10,7652	11,0203	11,0232
40	23,7699	24,5239	24,5325

On revient au cas des taux d'intérêt qui sont composés de manière continue. Supposons que des dépôts ou des retraits sont effectués en cours de croissance des intérêts, des dividendes ou des gains en capital. Supposons aussi que les dépôts ou les retraits se font à un taux constant k . L'équation (11) est alors remplacée par

$$dS/dt = rS + k,$$

ou, sous forme standard,

$$dS/dt - rS = k, \quad (15)$$

où k est positif pour les dépôts et négatif pour les retraits.

L'équation (15) est linéaire et son facteur intégrant est de e^{-rt} . Donc, sa solution générale est

$$S(t) = ce^{rt} - (k/r),$$

- où c est une constante arbitraire. Pour satisfaire à la condition initiale (12), on doit choisir $c = S_0 + (k/r)$. Ainsi, la solution au problème de valeur initiale (15), (12) est

$$S(t) = S_0 e^{rt} + (k/r)(e^{rt} - 1). \quad (16)$$

Le premier terme de l'expression (16) est la partie de $S(t)$ qui est due au rendement accumulé sur la somme initiale S_0 , tandis que le deuxième terme est la partie qui est due au taux k de dépôt ou de retrait.

L'avantage d'énoncer le problème de cette manière générale sans utiliser de valeurs spécifiques pour S_0 , r ou k réside dans la généralité de la formule résultante (16) pour $S(t)$. Avec cette formule, on peut facilement comparer les résultats de différents programmes de placement ou de différents taux de rendement.

Par exemple, on suppose qu'une personne ouvre un compte de régime enregistré d'épargne-retraite (REER) à l'âge de 25 ans et que, par la suite, elle fait des placements annuels de 2000 \$ de manière continue. Si on suppose aussi un taux de rendement de 8 %, quel sera le solde du REER quand cette personne aura 65 ans ? On a $S_0 = 0$, $r = 0,08$ et $k = 2000$ \$ et il faut déterminer $S(40)$. À partir de l'équation (16), on a

$$S(40) = (25\,000)(e^{3.2} - 1) = 588\,313 \text{ \$}. \quad (17)$$

Il est intéressant de noter que la somme totale investie est de 80 000 \$. Donc, le surplus du 588 313 \$ provient de l'intérêt accumulé sur le placement. De plus, le solde après 40 ans dépend sensiblement du taux de rendement r . Par exemple, $S(40) = 508\,948$ \$ si $r = 0,075$ et $S(40) = 681\,508$ \$ si $r = 0,085$.

Maintenant, on examine les hypothèses posées dans ce modèle. Premièrement, on a supposé que le rendement est composé de manière continue et qu'un capital additionnel est aussi investi de manière continue. Aucune de ces hypothèses n'est vérifiée en réalité. On a également supposé que le taux de rendement r est constant pour toute la période visée alors qu'en fait, il risque de fluctuer considérablement. Bien qu'on ne puisse pas prédire avec certitude les taux futurs, on peut utiliser l'expression (16) pour déterminer l'effet approximatif de différentes projections de taux. On peut aussi considérer r et k dans l'équation (15) comme des fonctions de t plutôt que de les considérer comme des constantes. Dans ce cas, bien sûr, la solution sera beaucoup plus complexe que l'équation (16).

Par ailleurs, on peut utiliser le problème de valeur initiale (15), (12) et la solution (16) pour analyser d'autres situations financières incluant notamment les annuités, les hypothèques et les prêts personnels.

Exemple 3

Des produits chimiques dans un étang

Supposez qu'un étang contienne au départ 10 millions de gallons d'eau douce. De l'eau contenant un produit chimique se déverse dans l'étang à un taux de 5 millions de gallons par année et le mélange s'écoule de l'étang au même taux. La concentration $\gamma(t)$ de produits chimiques dans l'eau qui entre dans l'étang varie périodiquement avec le temps selon l'expression $\gamma(t) = 2 + \sin 2t$ g/gal. Construisez un modèle mathématique décrivant ce processus et déterminez la quantité de produits chimiques dans l'étang au temps t . Tracez le graphique de la solution et décrivez l'effet de la variation de la concentration du liquide déversé dans l'étang.

Puisque les débits d'entrée et de sortie d'eau sont les mêmes, la quantité d'eau dans l'étang reste constante à 10^7 gallons. Maintenant, on note t le temps (en années) et $Q(t)$ la quantité de produit chimique dans l'étang (en grammes). Cet exemple ressemble à l'exemple 1 et obéit au même principe d'entrée et de sortie. On a donc

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taux d'entrée} - \text{taux de sortie},$$

où le «taux d'entrée» et le «taux de sortie» expriment respectivement les taux auxquels le produit chimique entre dans l'étang et en sort. Le taux auquel le produit chimique entre dans l'étang est donné par

$$\text{taux d'entrée} = (5 \times 10^6) \text{ gal/an } (2 + \sin 2t) \text{ g/gal}. \quad (18)$$

La concentration de produit chimique dans l'étang est de $Q(t)/10^7$ g/gal. Donc, le taux de sortie est le suivant :

$$\text{taux de sortie} = (5 \times 10^6) \text{ gal/an } [Q(t)/10^7] \text{ g/gal} = Q(t)/2 \text{ g/an}. \quad (19)$$

▶ Ainsi, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dQ}{dt} = (5 \times 10^6)(2 + \sin 2t) - \frac{Q(t)}{2}, \quad (20)$$

où chaque terme est exprimé en grammes par année.

Pour faciliter la manipulation des coefficients, on peut introduire une nouvelle variable dépendante en posant $q(t) = Q(t)/10^6$ ou $Q(t) = 10^6 q(t)$. Cela signifie que $q(t)$ est mesuré en millions de grammes (ou tonnes métriques). Si on fait cette substitution dans l'équation (20), alors chaque terme contiendra le facteur 10^6 , lequel pourra être annulé. Si on transpose le terme contenant $q(t)$ dans le premier membre de l'équation, on obtient finalement

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{2}q = 10 + 5 \sin 2t. \quad (21)$$

Au départ, il n'y a pas de produit chimique dans l'étang, donc la condition initiale est

$$q(0) = 0. \quad (22)$$

L'équation (21) est linéaire et, bien que le second membre soit une fonction du temps, le coefficient de q est une constante. Ainsi, le facteur intégrant est $e^{t/2}$. En multipliant l'équation (21) par ce facteur et en intégrant l'équation résultante, on obtient la solution générale

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17} \cos 2t + \frac{10}{17} \sin 2t + ce^{-t/2}. \quad (23)$$

La condition initiale (22) exige que $c = -300/17$. Donc, la solution au problème de valeur initiale (21), (22) est

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17} \cos 2t + \frac{10}{17} \sin 2t - \frac{300}{17} e^{-t/2}. \quad (24)$$

La figure 2.5.3 illustre le graphique de la solution (24) et la droite $q = 20$. Le terme exponentiel de la solution est important quand t est petit, mais il diminue rapidement quand t augmente. Plus tard, la solution oscille autour du niveau constant $q = 20$ à cause des termes $\sin 2t$ et $\cos 2t$. Il faut noter que si le terme $\sin 2t$ n'était pas dans l'équation (21), alors $q = 20$ serait la solution d'équilibre de cette équation. Considérons l'adéquation de ce modèle mathématique. Ce modèle repose sur diverses hypothèses qui n'ont pas été énoncées de manière explicite. D'abord, on suppose que la quantité d'eau dans l'étang est entièrement contrôlée par les taux d'entrée et de sortie – et donc qu'aucune quantité n'est perdue par évaporation ou par suite d'une fuite dans le sol et qu'aucune quantité n'est ajoutée à cause de la pluie. De plus, on pose les mêmes hypothèses pour le produit chimique. Ce dernier entre dans l'étang et en sort, mais on suppose qu'aucune quantité n'est absorbée par les poissons ou d'autres organismes vivant dans l'étang. De plus, on suppose que la concentration de produit chimique dans l'étang est uniforme partout. En conséquence, l'exactitude des résultats obtenus à partir de ce modèle dépend fortement de la validité des hypothèses de simplification précitées.

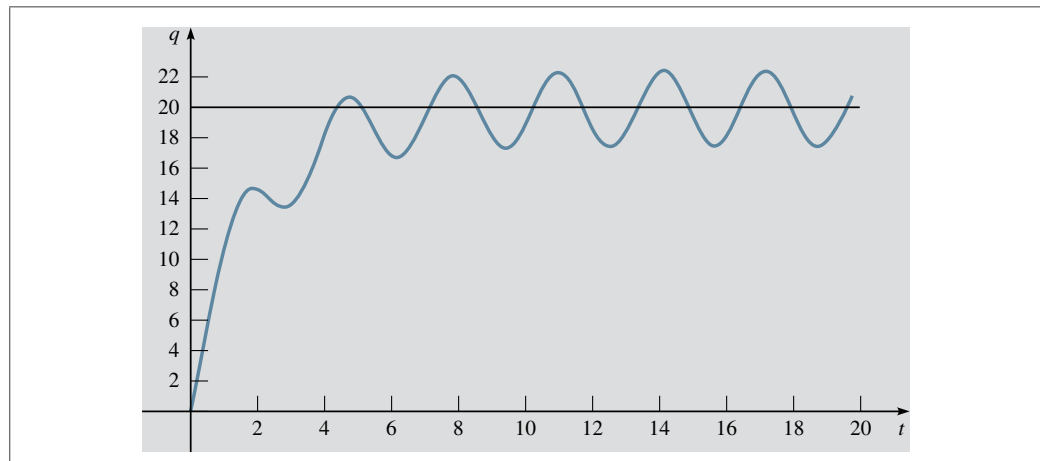


Figure 2.5.3 Solution au problème de valeur initiale (21), (22): $dq/dt + \frac{1}{2}q = 10 + 5 \sin 2t$, $q(0) = 0$.

Exemple 4

La vitesse de libération

Un corps de masse constante m est projeté de la Terre dans une direction perpendiculaire à la surface terrestre avec une vitesse initiale v_0 . Supposez qu'on néglige la résistance de l'air, mais qu'il faut tenir compte de la variation du champ de gravité de la Terre avec la distance. Trouvez une expression pour représenter la vitesse du corps. Trouvez aussi la vitesse initiale nécessaire pour que le corps atteigne une altitude maximale donnée ξ au-dessus de la surface terrestre et la plus petite vitesse initiale nécessaire pour que le corps ne revienne pas sur Terre ; cette dernière s'appelle la **vitesse de libération**.

Identifions la direction du mouvement de l'objet avec la partie positive de l'axe des x et posons $x = 0$ comme étant le point situé à la surface de la Terre (voir la figure 2.5.4). On a tracé la figure horizontalement pour se rappeler que la force de gravité est dirigée vers le centre de la Terre, laquelle n'est pas nécessairement dirigée vers le bas si on adopte le point de vue d'un objet éloigné de la surface terrestre.

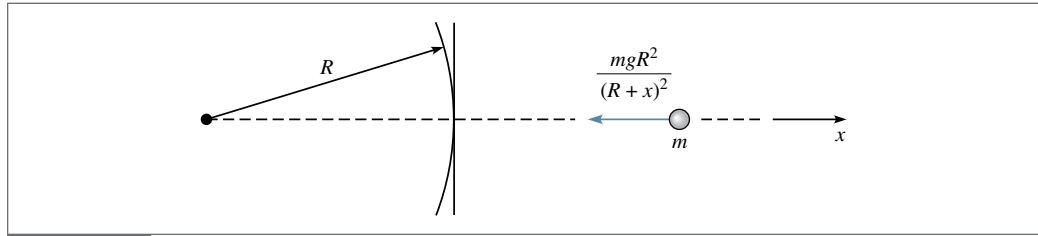


Figure 2.5.4 Un corps dans le champ de gravité de la Terre.

La force gravitationnelle qui agit sur le corps (son poids) est inversement proportionnelle au carré de la distance depuis le centre de la Terre, et elle est donnée par $w(x) = -k/(x+R)^2$, où k est une constante, R est le rayon de la Terre et le signe moins signifie que $w(x)$ est dirigée dans la direction négative de l'axe des x . On sait qu'à la surface terrestre, $w(0)$ est donnée par $-mg$, où g est l'accélération due à la gravité au niveau de la mer. Par conséquent, $k = mgR^2$ et

$$w(x) = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}. \quad (25)$$

Puisqu'il n'y a pas d'autre force qui agit sur le corps, l'équation du mouvement est

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{mgR^2}{(R+x)^2}, \quad (26)$$

et la condition initiale est

$$v(0) = v_0. \quad (27)$$

Malheureusement, l'équation (26) comprend trop de variables puisqu'elle dépend de t , de x et de v . Pour remédier à la situation, on peut éliminer t de l'équation (26) en considérant x , plutôt que t , comme la variable indépendante. On doit ensuite exprimer dv/dt en fonction de dv/dx à l'aide de la règle de la dérivée en chaîne. Ainsi,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx},$$

et l'équation (26) est remplacée par

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{gR^2}{(R+x)^2}. \quad (28)$$

L'équation (28) est à variables séparables mais elle est non linéaire. En séparant les variables et en intégrant, on obtient

$$\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{R+x} + c. \quad (29)$$

Puisque $x = 0$ lorsque $t = 0$, on peut remplacer la condition initiale (27) en $t = 0$ par la condition selon laquelle $v = v_0$ lorsque $x = 0$. Ainsi, $c = (v_0^2/2) - gR$ et

$$v = \pm \sqrt{v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{R+x}}. \quad (30)$$

- Il faut noter que l'équation (30) donne la vitesse en fonction de l'altitude plutôt qu'en fonction du temps. On doit choisir le signe positif si le corps s'élève, et le signe négatif s'il revient vers la Terre.

Pour déterminer l'altitude maximale ξ que le corps atteint, on pose $v = 0$ et $x = \xi$ dans l'équation (30), puis on résout pour trouver ξ . On obtient alors

$$\xi = \frac{v_0^2 R}{2gR - v_0^2}. \quad (31)$$

En résolvant l'équation (31) pour déterminer v_0 , on trouve la vitesse initiale nécessaire pour que le corps atteigne l'altitude ξ , soit

$$v_0 = \sqrt{2gR \frac{\xi}{R + \xi}}. \quad (32)$$

On trouve ensuite la vitesse de libération v_e en laissant $\xi \rightarrow \infty$. Par conséquent,

$$v_e = \sqrt{2gR}. \quad (33)$$

La valeur numérique de v_e est d'environ 6,9 mi/s (ou 11,1 km/s).

Le calcul de la vitesse de libération précédent ne tient pas compte de la résistance de l'air. Donc, la vitesse de libération réelle (incluant l'effet de la résistance de l'air) est en réalité plus élevée. D'un autre côté, la vitesse de libération réelle peut être réduite de manière significative si, avant d'être lancé, le corps est transporté à une distance considérable au-dessus du niveau de la mer. La force gravitationnelle et la force de friction sont ainsi réduites. La résistance de l'air, en particulier, diminue assez rapidement quand l'altitude croît. On doit se rappeler qu'il est souvent irréaliste de transmettre instantanément une trop grande vitesse initiale. Les engins spatiaux, par exemple, reçoivent leur accélération initiale en quelques minutes.

Problèmes

1. Considérez un réservoir utilisé dans certaines expériences hydrodynamiques. Après une expérience, le réservoir contient 200 L d'une solution ayant une concentration de 1 g/L de teinture. Pour préparer la prochaine expérience, le réservoir doit être rincé avec un jet d'eau qui s'écoule à un taux de 2 L/min; la solution homogène sort alors du réservoir au même taux. Trouvez le temps qui s'écoulera avant que la concentration dans le réservoir atteigne 1 % de sa valeur originale.
2. Un réservoir contient au départ 120 L d'eau pure. Un mélange contenant une concentration de γ g/L de sel se déverse dans le réservoir à un taux de 2 L/min, et le mélange homogène sort du réservoir au même taux. Trouvez une expression en fonction de γ pour la quantité de sel dans le réservoir au temps t . Trouvez aussi la quantité limite de sel présente dans le réservoir lorsque $t \rightarrow \infty$.
3. Un réservoir contient au départ 100 gal d'eau douce. On verse de l'eau contenant 1/2 lb de sel par gallon dans le réservoir à un taux de 2 gal/min, et le mélange sort du réservoir au même taux. Après 10 min, on arrête le processus. On verse de l'eau douce dans le réservoir à un taux de 2 gal/min, puis le mélange sort une fois de plus du réservoir au même taux. Trouvez la quantité de sel dans le réservoir au bout d'une période de 10 min additionnelle.
4. Un réservoir d'une capacité de 500 gal contient initialement 200 gal d'eau avec 100 lb de sel en solution. De l'eau contenant 1 lb de sel par gallon entre dans le réservoir à un taux de 3 gal/min, et le mélange sort du réservoir à un taux de 2 gal/min. Trouvez la quantité de sel dans le réservoir au temps t avant que le réservoir ne soit sur le point de déborder. Trouvez la concentration de sel (en livres par gallon) dans le réservoir au moment où il sera sur le point de déborder. Comparez cette concentration avec la concentration limite théorique qui s'appliquerait si le réservoir avait une capacité infinie.
- ⑤ 5. Un réservoir contient 100 gal d'eau et 50 oz de sel. De l'eau contenant une concentration de sel de $\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} \sin t\right)$ oz/gal se déverse dans le réservoir à un taux de 2 gal/min, et le mélange s'écoule du réservoir au même taux.
 - a) Trouvez la quantité de sel dans le réservoir au temps t .
 - b) Tracez le graphique de la solution pour une période suffisamment longue pour que le comportement limite soit visible.

- c) Le comportement à long terme de la solution est une oscillation autour d'un certain niveau constant. Quel est ce niveau ? Quelle est l'amplitude de l'oscillation ?
6. Supposez qu'un réservoir contenant un certain liquide possède une ouverture près du fond. Soit $h(t)$, la hauteur de la surface du liquide au-dessus de l'ouverture au temps t . Le principe de Torricelli⁴ énonce que la vitesse d'écoulement v à l'ouverture est égale à la vitesse d'une particule qui tombe en chute libre (sans traînée) à partir d'une hauteur h .
- a) Montrez que $v = \sqrt{2gh}$, où g est l'accélération due à la gravité.
- b) En posant l'égalité du taux d'écoulement et du taux de variation de la quantité de liquide dans le réservoir, montrez que $h(t)$ satisfait à l'équation

$$A(h) \frac{dh}{dt} = -\alpha a \sqrt{2gh}, \quad (i)$$

où $A(h)$ est l'aire de la section transversale du réservoir à la hauteur h et a est l'aire de l'ouverture. La constante α est un coefficient de contraction qui représente le fait que la section transversale de l'écoulement (régulier) est plus petite que a . La valeur de α pour l'eau est d'environ 0,6.

- c) Considérez un réservoir d'eau dont la forme est celle d'un cylindre droit et dont la hauteur atteint 3 m au-dessus de l'ouverture. Le rayon du réservoir est de 1 m et celui de l'ouverture circulaire est de 0,1 m. Si, au départ, le réservoir est plein d'eau, déterminez le temps qu'il faudra pour vider le réservoir jusqu'au niveau de l'ouverture.
7. Supposez qu'une personne investit une somme S_0 à un taux de rendement annuel r composé de manière continue.
- a) Trouvez le temps T nécessaire pour que la somme originale double de valeur en fonction de r .
- b) Déterminez T si $r = 7\%$.
- c) Trouvez le taux de rendement qu'on doit avoir pour que le placement initial double au bout de 8 ans.
8. Une jeune personne ne possédant aucun capital initial investit un montant k par année à un taux de rendement annuel de r . Supposez que les placements sont continus et que l'intérêt est composé de manière continue.
- a) Déterminez la somme $S(t)$ accumulée au temps t .
- b) Si $r = 7,5\%$, déterminez k pour que la personne possède 1 million de dollars au moment de sa retraite, dans 40 ans.
- c) Si $k = 2000$ \$ par année, déterminez le taux de rendement r qu'on doit avoir pour que la personne dispose de 1 million de dollars dans 40 ans.
9. Une diplômée universitaire emprunte 8000 \$ pour acheter une voiture. Le prêteur lui impute des intérêts à un taux annuel de 10%. En supposant que les intérêts sont composés de manière continue et que l'emprunteur effectue des paiements continus à un taux annuel constant k , déterminez le taux k nécessaire pour rembourser le prêt en trois ans. Déterminez aussi le montant des intérêts qui seront payés durant cette période de trois ans.
10. L'acheteur d'une maison ne peut pas se permettre des paiements hypothécaires de plus de 1500 \$ par mois. Supposez que le taux d'intérêt est de 6%, que l'intérêt est composé de manière continue et que les paiements sont aussi effectués de manière continue.
- a) Déterminez le montant maximal que cet acheteur peut se permettre d'emprunter pour une hypothèque de 20 ans et pour une hypothèque de 30 ans.
- b) Déterminez le montant total des intérêts payés durant la durée de l'hypothèque pour chacun des cas de la partie a).
11. L'acheteuse d'une maison désire emprunter 250 000 \$ à un taux d'intérêt de 6% pour financer son achat. Supposez que l'intérêt est composé de manière continue et que les paiements sont aussi effectués de manière continue.
- a) Déterminez le paiement mensuel qui permettra de rembourser ce prêt en 20 ans. Déterminez le paiement mensuel qui permettra de le rembourser en 30 ans.

4. Evangelista Torricelli (1608-1647), successeur de Galilée en tant que mathématicien de la cour de Florence, a publié ce principe en 1644. Il est aussi connu pour avoir conçu le premier baromètre au mercure et pour avoir apporté d'importantes contributions en géométrie.

- b) Déterminez le montant total des intérêts payés durant la durée de l'emprunt pour chacun des cas de la partie a).
12. Un diplômé universitaire récent emprunte 150 000 \$ à un taux d'intérêt de 6% pour acheter un condo. Prévoyant des augmentations salariales régulières, l'acheteur s'attend à faire des paiements à un taux mensuel de $800 + 10t$, où t est le nombre de mois depuis qu'il a contracté le prêt.
- a) En supposant qu'il peut respecter son calendrier de paiements, quand aura-t-il complètement remboursé son prêt?
- b) En respectant le même calendrier de paiements, quel est le montant maximal du prêt qu'il peut rembourser en exactement 20 ans?
13. Un des outils importants en recherche archéologique est la datation au carbone 14, un procédé élaboré par le chimiste américain Willard F. Libby⁵. Ce procédé permet de déterminer l'âge de certains restes de bois et de plantes et, par conséquent, l'âge des ossements d'animaux ou d'humains ou celui des artefacts ensevelis aux mêmes niveaux. La datation au carbone 14 est basée sur le fait que certains restes de bois ou de plantes contiennent des quantités résiduelles de carbone 14, un isotope radioactif du carbone. Cet isotope s'accumule durant la vie de la plante et commence à se désintégrer à sa mort. Puisque la demi-vie du carbone 14 est longue (environ 5730 années⁶), des quantités mesurables de carbone 14 demeurent après plusieurs milliers d'années. Si une minuscule fraction de la quantité initiale de carbone 14 est toujours présente, alors, grâce à des mesures appropriées prises en laboratoire, la proportion de la quantité initiale de carbone 14 restante peut être déterminée avec précision. Autrement dit, si $Q(t)$ est la quantité de carbone 14 au temps t et Q_0 est la quantité initiale, on peut déterminer le rapport $Q(t)/Q_0$, pour autant que cette quantité ne soit pas trop petite. Les techniques de mesure actuelles permettent l'utilisation de cette méthode pour des périodes allant jusqu'à 50 000 ans et plus.
- a) En supposant que Q satisfait à l'équation différentielle $Q' = -rQ$, déterminez la constante de désintégration r du carbone 14.
- b) Trouvez une expression représentant $Q(t)$ pour tout temps t , si $Q(0) = Q_0$.
- c) Supposez qu'on découvre des restes dont la quantité résiduelle actuelle de carbone 14 est de 20% de la quantité initiale. Déterminez l'âge de ces restes.
- ⊕ 14. Supposez qu'une population a un taux de croissance qui varie avec le temps et que la taille de cette population satisfait à l'équation différentielle
- $$dy/dt = (0,5 + \sin t)y/5.$$
- a) Si $y(0) = 1$, trouvez (ou évaluez) le temps τ au bout duquel la population aura doublé. Choisissez d'autres conditions initiales et déterminez si le temps de doublement τ dépend de la taille de la population initiale.
- b) Supposez que le taux de croissance est remplacé par sa valeur moyenne de $1/10$. Déterminez le temps de doublement τ dans ce cas.
- c) Supposez que le terme $\sin t$ de l'équation différentielle est remplacé par $\sin 2\pi t$. Ainsi, la variation du taux de croissance aurait une fréquence substantiellement plus élevée. Quel effet cette opération aurait-elle sur le temps de doublement τ ?
- d) Tracez le graphique des solutions obtenues dans les parties a), b) et c) dans un même plan.
- ⊕ 15. Supposez que la taille d'une population satisfait au problème de valeur initiale
- $$dy/dt = r(t)y - k, \quad y(0) = y_0,$$
- où le taux de croissance $r(t)$ est donné par $r(t) = (1 + \sin t)/5$ et où k est le taux de prédation.
- a) Supposez que $k = 1/5$. Tracez le graphique de y en fonction de t pour différentes valeurs de y_0 entre $1/2$ et 1 .
- b) Estimez la taille initiale critique y_c en dessous de laquelle la population s'éteindra.
- c) Choisissez d'autres valeurs de k et trouvez le y_c correspondant pour chacune.
- d) Utilisez les données que vous avez trouvées dans les parties a) et b) pour tracer le graphique de y_c en fonction de k .

5. Le chimiste américain Willard F. Libby (1908-1980) a élaboré la première méthode de datation au carbone 14 à partir de 1947. Il a reçu le prix Nobel de chimie en 1960 pour l'ensemble de ses travaux.

6. *McGraw-Hill Encyclopedia of Science and Technology*, 8^e édition, New York, McGraw-Hill, 1997, vol. 5, p. 48.

16. La loi du refroidissement de Newton énonce que la température d'un objet change à un taux proportionnel à la différence entre sa température et celle de son environnement. Supposez que la température d'une tasse de café est soumise à la loi du refroidissement de Newton. Si le café a une température de 200 °F quand on le verse dans une tasse et que, 1 min après, il a une température de 190 °F dans une pièce de 70 °F, déterminez le moment où le café atteint la température de 150 °F.
17. Le transfert de chaleur d'un corps à son environnement par le rayonnement, basé sur la loi de Stefan-Boltzmann⁷, est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = -\alpha(u^4 - T^4), \quad (i)$$

où $u(t)$ est la température absolue du corps au temps t , T est la température absolue de l'environnement et α est une constante qui dépend des paramètres physiques du corps. Toutefois, si u est beaucoup plus grand que T , on obtient une bonne approximation des solutions à l'équation (i) grâce à l'équation plus simple

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u^4. \quad (ii)$$

Supposez qu'un corps dont la température initiale est de 2000 K se trouve dans un milieu dont la température est de 300 K et que $\alpha = 2,0 \times 10^{-12} \text{ K}^{-3}/\text{s}$.

- Déterminez la température du corps au temps t en résolvant l'équation (ii).
 - Représentez graphiquement u en fonction de t .
 - Trouvez le temps τ auquel $u(\tau) = 600$, c'est-à-dire le double de la température ambiante. Jusqu'à ce temps, la marge d'erreur associée à l'utilisation de l'équation (ii) pour obtenir une approximation des solutions à l'équation (i) ne dépasse pas 1 %.
18. Considérez une boîte isolée (par exemple, un immeuble) dont la température interne est donnée par $u(t)$. Selon la loi du refroidissement de Newton, u satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{du}{dt} = -k[u - T(t)], \quad (i)$$

où $T(t)$ est la température ambiante (externe). Supposez que $T(t)$ varie de façon sinusoïdale; par exemple, supposez que $T(t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$.

- Résolvez l'équation (i) et exprimez $u(t)$ en fonction de t , k , T_0 , T_1 et ω . Remarquez qu'une partie de votre solution s'approche de zéro lorsque t devient grand; c'est ce qu'on appelle l'état transitoire. Le reste de la solution est appelé état stationnaire; on le note $S(t)$.
 - Supposez que t est mesuré en heures et que $\omega = \pi/12$, ce qui correspond à une période de 24 h pour $T(t)$. De plus, posez $T_0 = 60$ °F, $T_1 = 15$ °F et $k = 0,2/\text{h}$. Tracez les graphiques de $S(t)$ et de $T(t)$ en fonction de t dans le même plan cartésien. Utilisez votre graphique pour estimer l'amplitude R de la partie oscillante de $S(t)$. Estimez aussi le décalage τ entre les maximums correspondants de $T(t)$ et de $S(t)$.
 - Maintenant, soit k , T_0 , T_1 et ω des valeurs non précisées. Exprimez la partie oscillante de $S(t)$ sous la forme $R \cos[\omega(t - \tau)]$. Exprimez R et τ à l'aide des identités trigonométriques. Assignez à T_1 et à ω les valeurs indiquées à la partie b) et tracez les graphiques de R et de τ en fonction de k .
19. Considérez un lac de volume constant V contenant au temps t une quantité $Q(t)$ de polluant distribué de façon homogène avec une concentration $c(t)$, où $c(t) = Q(t)/V$. Supposez que de l'eau contenant une concentration k de polluant se déverse dans le lac à un taux r , et que l'eau s'écoule du lac au même taux. Supposez aussi qu'on ajoute des polluants directement dans le lac à un taux constant P . Il faut noter que ces suppositions ne tiennent pas compte d'un certain nombre de facteurs qui peuvent, dans certains cas, être importants. On peut citer l'ajout ou la perte d'eau dus aux pluies, à l'absorption et à l'évaporation; l'effet stratifiant des différences de température dans un lac profond; les irrégularités sur le littoral qui forment des baies abritées; le fait que les dépôts de polluants ne se constituent pas de manière uniforme dans tout le lac, mais (généralement) en des points isolés autour de sa périphérie. Les résultats de la page suivante devront être interprétés à la lumière de ces considérations.

7. Jozef Stefan (1835-1893), un professeur de physique à Vienne, a énoncé sa loi du rayonnement en se basant sur des données empiriques en 1879. Son étudiant Ludwig Boltzmann (1844-1906) l'a développée théoriquement à partir des principes de la thermodynamique en 1884. Boltzmann est mieux connu pour ses travaux d'avant-garde en mécanique statistique.

- a) Si au temps $t = 0$ la concentration de polluants est de c_0 , trouvez une expression pour la concentration $c(t)$ au temps t . Quelle est la concentration limite quand $t \rightarrow \infty$?
- b) Supposez que l'ajout de polluants dans le lac a cessé ($k = 0$ et $P = 0$ pour $t > 0$). Déterminez l'intervalle de temps T qui doit s'écouler avant que la concentration de polluants soit réduite à 50 % de sa valeur initiale. Faites de même avec une valeur initiale de 10 %.
- c) Le tableau 2.5.2 contient des données⁸ concernant plusieurs des Grands Lacs. À l'aide de ces données, déterminez à partir de la partie b) le temps T nécessaire pour réduire la contamination de chacun de ces lacs à 10 % de la valeur initiale.

Tableau 2.5.2 Volume et données de flux pour les Grands Lacs

Lac	V (km ³ × 10 ³)	r (km ³ /année)
Supérieur	12,2	65,2
Michigan	4,9	158
Érié	0,46	175
Ontario	1,6	209

20. On lance une balle d'une masse de 0,15 kg vers le haut à une vitesse initiale de 20 m/s du toit d'un édifice de 30 m. Ne tenez pas compte de la résistance de l'air.
- a) Trouvez l'altitude maximale que la balle atteint au-dessus du sol.
- b) En supposant que la balle évite l'édifice dans sa chute vers le sol, trouvez le moment où elle touchera le sol.
- c) Tracez les graphiques de la vitesse et de la position de la balle en fonction du temps.
21. Supposez que les conditions sont les mêmes qu'au problème 20, sauf qu'il y a une force due à la résistance de l'air de $|v|/30$, où la vitesse v est mesurée en mètres par seconde.
- a) Trouvez l'altitude maximale que la balle atteint au-dessus du sol.
- b) Trouvez le temps auquel la balle touche le sol.
- c) Tracez les graphiques de la vitesse et de la position par rapport au temps. Comparez les graphiques avec les graphiques correspondants du problème 20.
22. Supposez que les conditions sont les mêmes qu'au problème 20, sauf qu'il y a une force due à la résistance de l'air de $v^2/1325$, où la vitesse v est mesurée en mètres par seconde.
- a) Trouvez l'altitude maximale que la balle atteint au-dessus du sol.
- b) Trouvez le temps auquel la balle touche le sol.
- c) Tracez les graphiques de la vitesse et de la position par rapport au temps. Comparez les graphiques avec les graphiques correspondants des problèmes 20 et 21.
23. Un parachutiste pesant 180 lb (y compris le matériel) saute d'une altitude de 5000 pi. Il ouvre son parachute après 10 s de chute libre. Supposez que la force de la résistance de l'air est de $0,75|v|$ quand le parachute est fermé et de $12|v|$ quand le parachute est ouvert, où la vitesse v est mesurée en pieds par seconde.
- a) Trouvez la vitesse du parachutiste quand le parachute s'ouvre.
- b) Trouvez la distance parcourue avant que le parachute s'ouvre.
- c) Quelle est la vitesse limite v_L après l'ouverture du parachute?
- d) Déterminez pendant combien de temps le parachutiste se trouve dans les airs après l'ouverture du parachute.
- e) Tracez le graphique de la vitesse par rapport au temps depuis le début du saut jusqu'à ce que le parachutiste touche le sol.
24. Un chariot à fusée d'essai ayant une vitesse initiale de 150 mi/h est ralenti par un canal d'eau. Supposez que durant le freinage, l'accélération a est donnée par $a(v) = -\mu v^2$, où v est la vitesse et μ est une constante.

8. Ce problème est basé sur l'information contenue dans un tableau tiré de l'article suivant : RAINEY, R. H. « Natural Displacement of Pollution from the Great Lakes », *Science*, 155, 1967, p. 1242-1243.

- a) Comme dans l'exemple 4 du texte, utilisez la relation $dv/dt = v(dv/dx)$ pour exprimer l'équation du mouvement en fonction de v et de x .
- b) S'il faut une distance de 2000 pi pour ralentir le chariot à 15 mi/h, déterminez la valeur de μ .
- c) Trouvez le temps τ nécessaire pour ralentir le chariot à 15 mi/h.
25. Un corps d'une masse constante m est projeté verticalement vers le haut à une vitesse initiale de v_0 dans un milieu offrant une résistance de $k|v|$, où k est une constante. Ne tenez pas compte de la variation de la force gravitationnelle.
- a) Trouvez l'altitude maximale x_m que le corps atteint et le temps t_m au bout duquel il atteint cette altitude maximale.
- b) Montrez que si $kv_0/mg < 1$, alors on peut exprimer t_m et x_m sous la forme suivante :

$$t_m = \frac{v_0}{g} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right],$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right].$$

- c) Montrez que la quantité kv_0/mg n'a pas d'unités.
26. Un corps d'une masse m est projeté verticalement vers le haut à une vitesse initiale de v_0 dans un milieu ayant une résistance de $k|v|$, où k est une constante. Supposez que l'attraction gravitationnelle de la Terre est constante.
- a) Trouvez la vitesse $v(t)$ du corps en fonction du temps.
- b) Utilisez le résultat de la partie a) pour calculer la limite de $v(t)$ lorsque $k \rightarrow 0$, soit lorsque la résistance s'approche de zéro. Ce résultat est-il conforme avec la vitesse d'une masse m projetée vers le haut à une vitesse initiale de v_0 dans le vide ?
- c) Utilisez le résultat de la partie a) pour calculer la limite de $v(t)$ lorsque $m \rightarrow 0$, soit quand la masse s'approche de zéro.
27. Un corps qui chute dans un fluide relativement dense (de l'huile, par exemple) subit trois forces (voir la figure 2.5.5) : une force de résistance R , une poussée B et son poids w dû à la gravité. La poussée est égale au poids du fluide déplacé par l'objet. Pour un corps sphérique de rayon a qui se déplace lentement, la force de résistance est donnée par la loi de Stokes⁹, soit $R = 6\pi\mu a|v|$, où v est la vitesse du corps et μ est le coefficient de viscosité du fluide environnant.

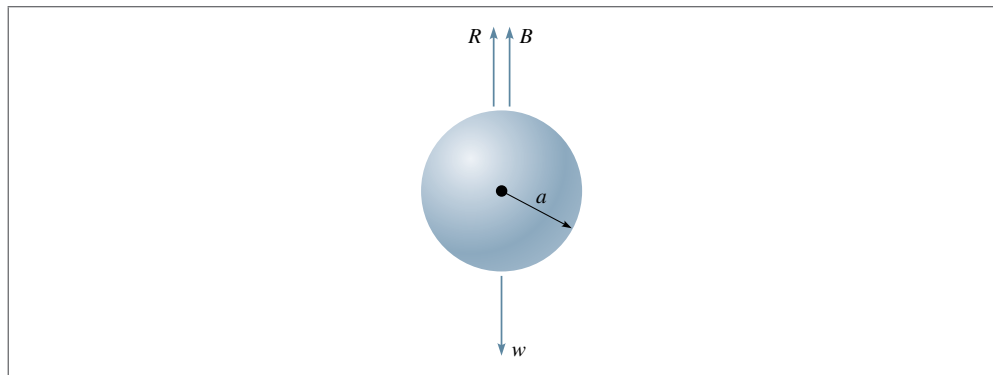


Figure 2.5.5 Corps chutant dans un fluide dense.

9. George Gabriel Stokes (1819-1903), professeur à Cambridge, a été l'un des plus éminents physiciens et spécialistes des mathématiques appliquées du XIX^e siècle. Les équations de base de la mécanique des fluides (les équations de Navier-Stokes) ont été nommées en partie en son honneur, et l'un des théorèmes fondamentaux du calcul vectoriel porte son nom. Il a aussi été l'un des pionniers dans l'utilisation des séries divergentes (asymptotiques), un sujet de grand intérêt et d'une grande importance aujourd'hui.

- a) Trouvez la vitesse limite d'une sphère pleine de rayon a et de densité ρ chutant librement dans un milieu de densité ρ' et de coefficient de viscosité μ .
- b) En 1910, le physicien américain Robert Andrews Millikan (1868-1953) a déterminé la charge d'un électron en étudiant le mouvement de minuscules gouttes d'huile en chute libre dans un champ électrique. Un champ de force E exerce une force Ee sur une gouttelette avec une charge e . Supposez que E a été corrigé de sorte que la gouttelette demeure stationnaire ($v = 0$) et que w et B soient tels que donnés à la page précédente. Trouvez une formule pour déterminer e . Robert Andrews Millikan a su déterminer la charge e d'un électron, soit $e = 4,803 \times 10^{-10}$ unités électrostatiques.
28. On laisse tomber une masse de 0,25 kg dans un milieu offrant une résistance de $0,2|v|$, où v est mesuré en mètres par seconde.
- a) Si on laisse tomber la masse d'une hauteur de 30 m, trouvez sa vitesse quand elle touche le sol.
- b) Si la masse doit atteindre une vitesse maximale de 10 m/s, trouvez la hauteur maximale de laquelle on peut la jeter.
- c) Supposez que la force résistante est de $k|v|$, où v est mesurée en mètres par seconde et k est une constante. Si on laisse tomber la masse d'une hauteur de 30 m et qu'elle doit toucher le sol à une vitesse maximale de 10 m/s, déterminez le coefficient de résistance k approprié.
29. Supposez qu'une fusée est lancée directement de la surface de la Terre à une vitesse initiale $v_0 = \sqrt{2gR}$, où R est le rayon de la Terre. Ne tenez pas compte de la résistance de l'air.
- a) Trouvez une expression pour représenter la vitesse v en fonction de la distance x à partir de la surface terrestre.
- b) Trouvez le temps nécessaire à la fusée pour parcourir 240 000 mi (la distance approximative de la Terre à la Lune). Supposez que $R = 4000$ mi.
30. Soit $v(t)$ et $w(t)$ les composantes horizontale et verticale de la vitesse d'une balle de baseball frappée avec un bâton. En l'absence de la résistance de l'air, v et w satisfont aux équations

$$dv/dt = 0, \quad dw/dt = -g.$$

- a) Montrez que

$$v = u \cos A, \quad w = -gt + u \sin A,$$

où u est la vitesse initiale de la balle et A est l'angle d'élévation initiale.

- b) Soit $x(t)$ et $y(t)$, qui sont respectivement les coordonnées horizontale et verticale de la balle au temps t . Si $x(0) = 0$ et que $y(0) = h$, trouvez $x(t)$ et $y(t)$ au temps t .
- c) Soit $g = 32 \text{ pi/s}^2$, $u = 125 \text{ pi/s}$ et $h = 3 \text{ pi}$. Tracez le graphique de la trajectoire de la balle pour différentes valeurs de l'angle A , c'est-à-dire tracez $x(t)$ et $y(t)$ de manière paramétrique.
- d) Supposez que le mur du champ extérieur se trouve à une distance L et qu'il a une hauteur H . Trouvez une relation entre u et A qui doit être satisfaite pour que la balle puisse franchir le mur.
- e) Supposez que $L = 350 \text{ pi}$ et que $H = 10 \text{ pi}$. En utilisant la relation obtenue en d), trouvez (ou estimez à partir d'un graphique) l'ensemble des valeurs de A qui correspondent à une vitesse initiale de $u = 110 \text{ pi/s}$.
- f) Pour $L = 350$ et $H = 10$, trouvez la vitesse initiale minimale u et l'angle optimal A correspondant pour lesquels la balle franchira le mur.
31. Un modèle plus réaliste (que celui du problème 30) d'une balle de baseball en vol comprend l'effet de la résistance de l'air. Dans ce cas, les équations du mouvement sont

$$dv/dt = -rv, \quad dw/dt = -g - rw,$$

où r est le coefficient de résistance.

- a) Déterminez $v(t)$ et $w(t)$ en fonction de la vitesse initiale u et de l'angle d'élévation initiale A .
- b) Trouvez $x(t)$ et $y(t)$ si $x(0) = 0$ et $y(0) = h$.
- c) Tracez le graphique de la trajectoire de la balle pour $r = 1/5$, $u = 125$, $h = 3$ et pour différentes valeurs de A . Comment les trajectoires diffèrent-elles de celles du problème 30, où $r = 0$?
- d) En supposant que $r = 1/5$ et que $h = 3$, trouvez la vitesse initiale minimale u et l'angle optimal A pour lesquels la balle franchira un mur qui se trouve à 350 pi de distance et qui a 10 pi de hauteur. Comparez ce résultat avec celui du problème 30 f).

► **32. Le problème du brachistochrone** Un des problèmes célèbres dans l'histoire des mathématiques est celui du brachistochrone. Il consiste à identifier la courbe le long de laquelle une particule glissera sans friction dans le moindre temps possible d'un point donné P à un autre point Q , le second point étant plus bas que le premier mais pas directement en dessous (voir la figure 2.5.6). Ce problème a été formulé par Jean Bernoulli en 1696 pour lancer un défi aux mathématiciens de son époque. Jean Bernoulli et son frère Jacques Bernoulli ainsi qu'Isaac Newton, Gottfried Leibniz et le Marquis de L'Hospital l'ont résolu. Le problème du brachistochrone a été important dans le développement des mathématiques, car il a permis de jeter les bases du calcul des variations.

En résolvant ce problème, considérez l'origine comme le point le plus haut P et orientez les axes comme à la figure 2.5.6. Le point le plus bas Q a les coordonnées (x_0, y_0) . Il est alors possible de montrer que la courbe de temps minimal est donnée par une fonction $y = \phi(x)$ qui satisfait à l'équation différentielle

$$(1 + y'^2) y = k^2, \quad (\text{i})$$

où k^2 est une constante positive qu'on déterminera plus loin.

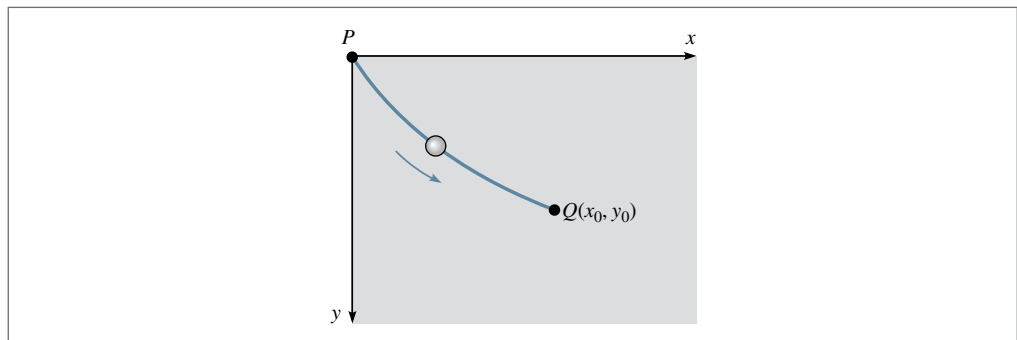


Figure 2.5.6 Brachistochrone.

- Résolvez l'équation (i) pour déterminer y' . Pourquoi est-il nécessaire de choisir la racine carrée positive ?
- Introduisez la nouvelle variable t à l'aide de la relation

$$y = k^2 \sin^2 t. \quad (\text{ii})$$

Montrez que l'équation trouvée à la partie a) prend alors la forme

$$2k^2 \sin^2 t \, dt = dx. \quad (\text{iii})$$

- Soit $\theta = 2t$. Montrez que la solution à l'équation (iii) pour laquelle $x = 0$ lorsque $y = 0$ est donnée par

$$x = k^2(\theta - \sin \theta)/2, \quad y = k^2(1 - \cos \theta)/2. \quad (\text{iv})$$

Les équations (iv) sont les équations paramétriques de la solution à l'équation (i) qui passe par le point $(0, 0)$. Le graphique des équations (iv) s'appelle une **cycloïde**.

- Si on choisit adéquatement la constante k , alors la cycloïde passera aussi par le point (x_0, y_0) et sera la solution au problème du brachistochrone. Trouvez k si $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$.

2.6 Les équations autonomes et les dynamiques des populations

Une classe importante d'équations du premier ordre comprend les équations où la variable indépendante n'apparaît pas explicitement. De telles équations sont dites **autonomes** et sont de la forme

$$dy/dt = f(y). \quad (1)$$

Nous discuterons de ces équations dans le contexte de l'étude de la croissance ou de la décroissance de la population d'une espèce donnée. Cette question est importante dans des domaines comme la médecine, l'écologie ou l'économie. D'autres exemples d'applications seront évoqués dans les problèmes, à la fin de la présente section. Il convient de se rappeler que dans les sections 1.1 et 1.2, nous avons déjà considéré le cas particulier de l'équation (1) où $f(y) = ay + b$.

Puisque l'équation (1) est à variables séparables, la discussion de la section 2.1 peut s'appliquer. Toutefois, notre objectif actuel est de montrer comment on peut utiliser des méthodes géométriques pour obtenir de l'information qualitative importante directement de l'équation différentielle, et ce, sans la résoudre. Les concepts de stabilité et d'instabilité des solutions aux équations différentielles seront très importants dans cette démarche. Nous avons déjà présenté ces idées au chapitre 1. Nous discuterons maintenant plus longuement ce sujet dans la présente section, et nous examinerons ces concepts en détail et dans un contexte plus général au chapitre 5.

La croissance exponentielle Soit $y = \phi(t)$ la taille de la population d'une espèce donnée au temps t . L'hypothèse la plus simple portant sur la variation de la population est que le taux de variation de y est proportionnel¹⁰ à la valeur actuelle de y , soit

$$dy/dt = ry, \quad (2)$$

où la constante de proportionnalité r s'appelle le **taux de croissance** ou le **taux de décroissance**, selon qu'elle est positive ou négative. Ici, on suppose que $r > 0$, donc que la population croît.

En résolvant l'équation (2) assujettie à la condition initiale

$$y(0) = y_0, \quad (3)$$

on obtient

$$y = y_0 e^{rt}. \quad (4)$$

Ainsi, le modèle mathématique décrit par le problème de valeur initiale (2), (3) avec $r > 0$ prédit que la population croîtra de manière exponentielle (voir la figure 2.6.1). Dans des conditions idéales, on a conclu que l'équation (4) est raisonnablement précise pour de nombreuses populations, du moins pendant des périodes de temps limitées. Cependant, il est évident que de telles conditions ne peuvent prévaloir indéfiniment. Il est possible qu'un espace limité, le manque de nourriture ou d'autres ressources réduiront le taux de croissance et mettront fin à la croissance exponentielle sans contrainte.

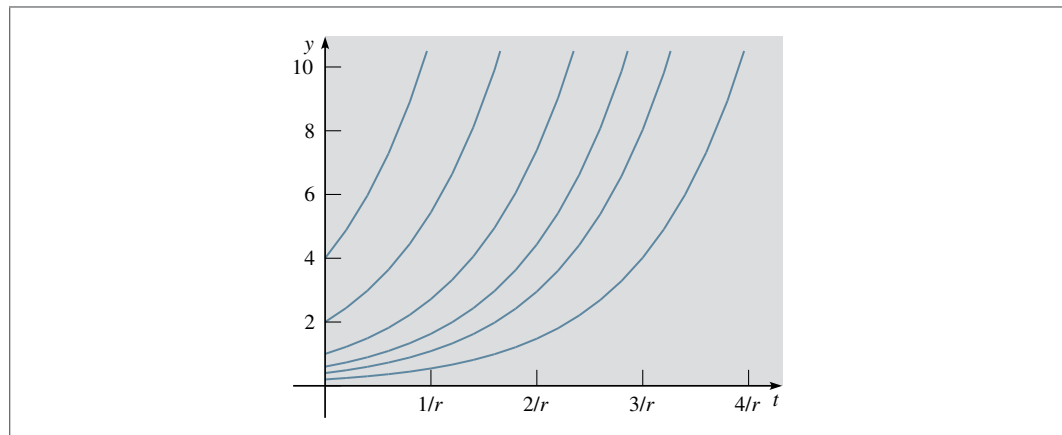


Figure 2.6.1 Croissance exponentielle: y en fonction de t pour $dy/dt = ry$.

10. Il semble que c'est l'économiste britannique Thomas Malthus (1766-1834) qui a observé le premier que de nombreuses populations biologiques croissent à un taux proportionnel à leur population. Son premier article sur les populations a été publié en 1798.

La croissance logistique Pour tenir compte du fait que le taux de croissance dépend de la taille de la population, on remplace la constante r dans l'équation (2) par une fonction $h(y)$. On obtient ainsi l'équation modifiée

$$dy/dt = h(y)y. \quad (5)$$

On choisit $h(y)$ de sorte que $h(y) \cong r > 0$ quand y est petit, que $h(y)$ diminue quand y devient plus grand et que $h(y) < 0$ quand y est suffisamment grand. La fonction la plus simple permettant de vérifier ces propriétés est $h(y) = r - ay$, où a est aussi une constante positive. En utilisant cette fonction dans l'équation (5), on obtient

$$dy/dt = (r - ay)y. \quad (6)$$

L'équation (6) est l'équation de Verhulst¹¹ ou l'**équation logistique**. Il est souvent plus approprié d'écrire l'équation logistique sous la forme équivalente

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y, \quad (7)$$

où $K = r/a$. La constante r s'appelle le **taux de croissance intrinsèque**, soit le taux de croissance en l'absence de facteurs contraignants. L'interprétation de la constante K se précisera sous peu.

Nous analyserons les solutions à l'équation (7) plus en détail plus loin dans cette section. Cependant, avant de le faire, nous vous montrerons des méthodes permettant de tracer facilement une esquisse qualitativement correcte des solutions. Les mêmes méthodes s'appliquent aussi à l'équation plus générale (1).

On recherche d'abord les solutions à l'équation (7) du type le plus simple, c'est-à-dire des fonctions constantes. Pour une telle solution, $dy/dt = 0$ pour tout t . Donc, toute solution constante à l'équation (7) doit satisfaire à l'équation algébrique

$$r(1 - y/K)y = 0.$$

Ainsi, les solutions constantes sont $y = \phi_1(t) = 0$ et $y = \phi_2(t) = K$. Ces solutions s'appellent des **solutions d'équilibre** à l'équation (7), car elles correspondent au cas où il n'y a aucun changement ou aucune variation dans la valeur de y lorsque t augmente. De la même manière, on peut trouver toutes les solutions d'équilibre à l'équation (1) générale en déterminant les racines de $f(y) = 0$. On appelle aussi les racines de $f(y)$ des **points critiques**.

Afin de visualiser d'autres solutions à l'équation (7) et de tracer leurs graphiques rapidement, on peut commencer par tracer le graphique de $f(y)$ en fonction de y . Dans le cas de l'équation (7), $f(y) = r(1 - y/K)y$, donc le graphique est la parabole illustrée à la figure 2.6.2, qui se trouve à la page suivante. Les points d'intersection avec l'axe des y sont $(0, 0)$ et $(K, 0)$, qui correspondent aux points critiques de l'équation (7), et le sommet de la parabole est $(K/2, rK/4)$. Il faut noter que $dy/dt > 0$ pour $0 < y < K$. Par conséquent, y est une fonction croissante de t quand y est à l'intérieur de cet intervalle. Dans la figure 2.6.2, on peut le voir près de l'axe des y par les flèches pointant vers la droite ou par les flèches pointant vers le haut dans la figure 2.6.3 a), à la page suivante. De la même manière, si $y > K$, alors $dy/dt < 0$. Ainsi, y est décroissante, comme l'indique la flèche pointant vers la gauche dans la figure 2.6.2 ou la flèche pointant vers le bas dans la figure 2.6.3 a).

11. P. F. Verhulst (1804-1849) est un mathématicien belge qui a introduit l'équation (6) comme modèle de croissance de la population humaine en 1838. Il l'a appelée la croissance logistique. Par conséquent, on appelle souvent l'équation (6) l'équation logistique. P. F. Verhulst a été incapable de vérifier l'exactitude de son modèle en raison des données de recensement inadéquates. Son modèle n'a attiré l'attention que plusieurs années plus tard. R. Pearl (1930) a démontré qu'il y avait une concordance raisonnable entre ce modèle et des données expérimentales pour les populations de *Drosophila melanogaster* (les mouches à fruits). G. F. Gause (1935) a fait de même pour les populations de *Paramecium* et de *Tribolium* (les insectes à farine).

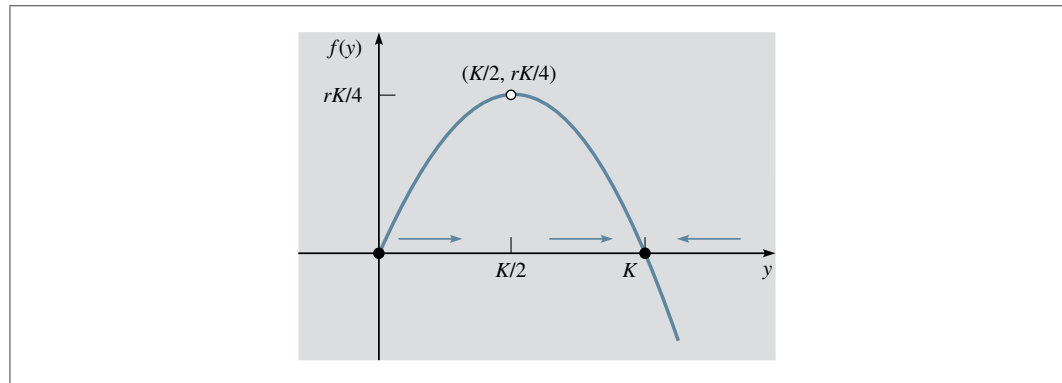


Figure 2.6.2 $f(y)$ en fonction de y pour $dy/dt = r(1 - y/K)y$.

Dans ce contexte, l'axe des y est souvent appelé la **ligne de phase** et il est reproduit selon son orientation la plus habituelle (verticale) dans la figure 2.6.3 a). Les points en $y = 0$ et $y = K$ sont les points critiques, ou les solutions d'équilibre. Les flèches indiquent de nouveau que y est croissant lorsque $0 < y < K$ et que y est décroissant lorsque $y > K$.

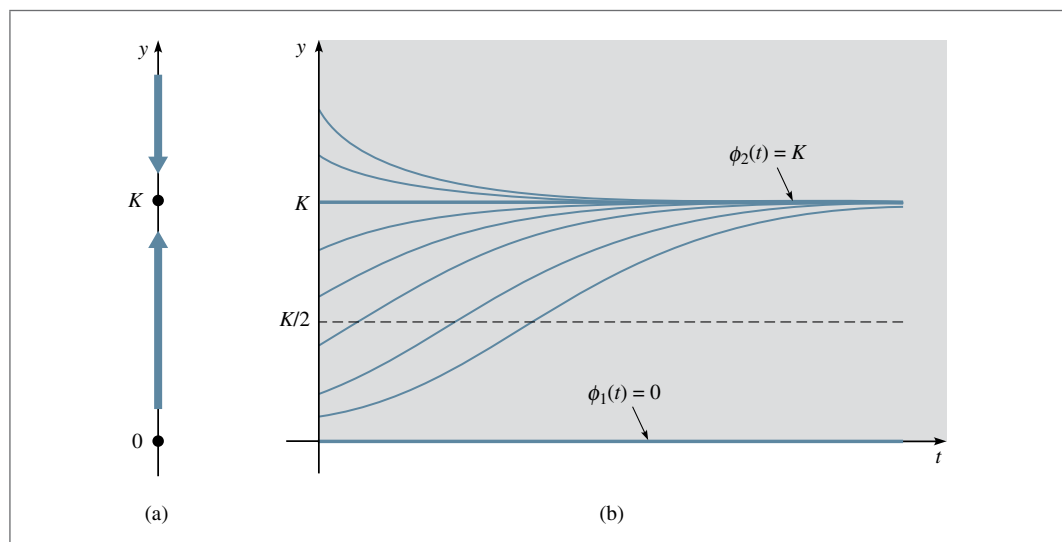


Figure 2.6.3 Croissance logistique: y en fonction de t pour $dy/dt = r(1 - y/K)y$.

De plus, on note que si y est proche de zéro ou de K , alors la pente $f(y)$ tend vers zéro, et les courbes-solutions sont relativement horizontales. Pour esquisser les graphiques des solutions à l'équation (7) dans le plan ty , on commence donc avec les solutions d'équilibre $y = 0$ et $y = K$; on trace ensuite d'autres courbes qui sont croissantes lorsque $0 < y < K$ et décroissantes lorsque $y > K$. On remarque que les courbes-solutions deviennent plus abruptes quand la valeur de y quitte le voisinage de zéro ou de K . Ces observations signifient que les graphiques des solutions à l'équation (7) doivent avoir la forme générale illustrée à la figure 2.6.3 b), peu importe les valeurs de r et de K .

La figure 2.6.3 b) semble montrer que d'autres solutions croisent la solution d'équilibre $y = K$, mais est-ce vraiment possible? Non, la partie concernant l'unicité du théorème 2.4.2, le théorème fondamental de l'existence et de l'unicité, énonce qu'une seule solution peut passer par un point donné dans le plan ty . Donc, même si d'autres solutions peuvent être asymptotiques à la solution d'équilibre lorsque $t \rightarrow \infty$, elles ne peuvent la croiser en aucun temps fini. Par conséquent, une solution qui débute dans l'intervalle $0 < y < K$ demeure dans cet intervalle en tout temps et c'est la même chose pour une solution qui débute dans l'intervalle $K < y < \infty$.

Dans le but de pousser l'étude un peu plus loin, il est possible de déterminer la concavité des courbes-solutions ainsi que les points d'inflexion en trouvant d^2y/dt^2 . À partir de l'équation différentielle (1), on obtient (à l'aide de la règle de la dérivée en chaîne)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} f(y) = f'(y) \frac{dy}{dt} = f'(y)f(y). \quad (8)$$

Le graphique de y en fonction de t est concave vers le haut quand $y'' > 0$, c'est-à-dire lorsque f et f' sont de même signe. De la même manière, le graphique est concave vers le bas quand $y'' < 0$, ce qui se produit lorsque f et f' sont de signes contraires. On peut facilement trouver les signes de f et de f' à partir du graphique de $f(y)$ en fonction de y . Les points d'inflexion peuvent se produire quand $f'(y) = 0$.

Dans le cas de l'équation (7), les solutions sont concaves vers le haut pour $0 < y < K/2$, où f est positive et croissante (voir la figure 2.6.2), donc lorsque f et f' sont toutes deux positives. Les solutions sont aussi concaves vers le haut pour $y > K$, où f est négative et décroissante (f et f' sont négatives). Pour $K/2 < y < K$, les solutions sont concaves vers le bas puisque à cet endroit, f est positive et décroissante, donc f est positive mais f' est négative. Il y a un point d'inflexion quand le graphique de y en fonction de t croise la droite $y = K/2$. Les graphiques de la figure 2.6.3 b) illustrent ces propriétés.

Finalement, puisque K est une borne supérieure qui est approchée mais jamais dépassée par les populations en croissance ayant commencé sous cette valeur, il est naturel de définir K comme le **niveau de saturation** ou la **capacité limite** pour l'espèce donnée.

Une comparaison des figures 2.6.1 et 2.6.3 b) révèle que les solutions à l'équation non linéaire (6) sont très différentes de celles à l'équation linéaire (1), du moins pour de grandes valeurs de t . Peu importe les valeurs de K , c'est-à-dire peu importe à quel point le terme non linéaire de l'équation (6) est petit, les solutions à cette équation s'approchent d'une valeur finie lorsque $t \rightarrow \infty$, tandis que les solutions à l'équation (1) croissent (de manière exponentielle) sans limite lorsque $t \rightarrow \infty$. Ainsi, même un infime terme non linéaire dans l'équation différentielle a un effet décisif sur la solution pour une grande valeur de t .

Dans bien des situations, l'information qualitative sur la solution $y = \phi(t)$ à l'équation (7), présentée dans la figure 2.6.3 b), est suffisante. On a obtenu toute cette information à partir du graphique de $f(y)$ en fonction de y , sans résoudre l'équation différentielle (7). Cependant, si on souhaite avoir une description plus détaillée de la croissance logistique (par exemple, si on désire connaître la valeur de la population en un temps particulier), alors on doit résoudre l'équation (7) qui satisfait à la condition initiale (3). En supposant que $y \neq 0$ et que $y \neq K$, on peut écrire l'équation (7) sous la forme

$$\frac{dy}{(1 - y/K)y} = r dt.$$

En décomposant en fractions partielles le premier membre de l'équation, on a

$$\left(\frac{1}{y} + \frac{1/K}{1 - y/K} \right) dy = r dt.$$

Ensuite, en intégrant les deux membres, on obtient

$$\ln |y| - \ln \left| 1 - \frac{y}{K} \right| = rt + c, \quad (9)$$

où c est une constante d'intégration qui doit être déterminée à partir de la condition initiale $y(0) = y_0$. On a déjà noté que si $0 < y_0 < K$, alors y demeure à l'intérieur de cet intervalle en tout temps. Ainsi, dans ce cas, on peut retirer les signes de valeurs absolues dans l'équation (9) puis, en prenant l'exponentielle des deux membres, on trouve

$$\frac{y}{1 - (y/K)} = Ce^{rt}, \quad (10)$$

où $C = e^c$. Pour satisfaire à la condition initiale $y(0) = y_0$, on doit choisir $C = y_0/[1 - (y_0/K)]$. En utilisant cette valeur pour C dans l'équation (10) et en faisant la résolution pour déterminer y , on obtient

$$y = \frac{y_0 K}{y_0 + (K - y_0)e^{-rt}}. \quad (11)$$

On a obtenu la solution (11) en supposant que $0 < y_0 < K$. Si $y_0 > K$, alors les détails permettant de résoudre l'équation (9) sont un peu différents et on laisse au lecteur le soin de montrer que l'équation (11) est également valide dans ce cas. Enfin, il faut noter que l'équation (11) contient aussi les solutions d'équilibre $y = \phi_1(t) = 0$ et $y = \phi_2(t) = K$ correspondant respectivement aux conditions initiales $y_0 = 0$ et $y_0 = K$.

On peut confirmer toutes les conclusions qualitatives auxquelles nous sommes arrivés plus tôt par un raisonnement géométrique en examinant la solution (11). En particulier, si $y_0 = 0$, alors l'équation (11) exige que $y(t) = 0$ quel que soit t . Si $y_0 > 0$ et si $t \rightarrow \infty$ dans l'équation (11), alors on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = y_0 K / y_0 = K.$$

Ainsi, pour chaque $y_0 > 0$, la solution s'approche asymptotiquement de la solution d'équilibre $y = \phi_2(t) = K$ (en fait, de manière exponentielle) lorsque $t \rightarrow \infty$. Par conséquent, on dit que la solution constante $\phi_2(t) = K$ est une **solution asymptotiquement stable** à l'équation (7) ou que le point $y = K$ est un point d'équilibre ou un point critique asymptotiquement stable. Cela signifie qu'après une longue période, la population est voisine du niveau de saturation K , peu importe la population initiale pourvu qu'elle soit positive. Comme on peut le voir dans la figure 2.6.3, toutes les solutions s'approchent de la solution d'équilibre beaucoup plus rapidement que la croissance de r .

D'un autre côté, la situation de la solution d'équilibre $y = \phi_1(t) = 0$ est très différente. Même les solutions qui commencent très proche de zéro croissent à mesure que t augmente et, comme on l'a vu, elles s'approchent de K lorsque $t \rightarrow \infty$. On dit que $\phi_1(t) = 0$ est une **solution d'équilibre instable** ou que $y = 0$ est un point d'équilibre instable ou un point critique. Cela signifie que la seule manière de garantir que la solution demeure proche de zéro est de s'assurer que sa valeur initiale est exactement égale à zéro.

Exemple 1

On a appliqué le modèle logistique à la croissance naturelle de la population de flétans dans certaines régions de l'océan Pacifique¹². Soit y , mesurée en kilogrammes, la masse totale (ou biomasse) de la population de flétans au temps t . On estime que les paramètres de l'équation logistique ont les valeurs $r = 0,71$ par année et que $K = 80,5 \times 10^6$ kg. Si la biomasse initiale est de $y_0 = 0,25K$, trouvez la biomasse au bout de 2 ans. Trouvez aussi le temps τ pour lequel $y(\tau) = 0,75K$.

Il est approprié d'exprimer la solution (11) par rapport à la capacité limite K . Ainsi, on écrit l'équation (11) sous la forme

$$\frac{y}{K} = \frac{y_0 K}{(y_0/K) + [1 - (y_0/K)]e^{-rt}}. \quad (12)$$

En utilisant les données du problème, on trouve

$$\frac{y(2)}{K} = \frac{0,25}{0,25 + 0,75e^{-1,42}} \cong 0,5797.$$

Par conséquent, $y(2) \cong 46,7 \times 10^6$ kg.

12. Le livre de Colin W. Clark (*voir les références à la fin du chapitre*) est une bonne source d'information. Il porte sur la dynamique et l'économie des populations qu'implique l'usage efficace d'une ressource renouvelable, notamment par le biais de la pêche.

► Pour trouver τ , on peut d'abord résoudre l'équation (12) pour déterminer t . On obtient

$$e^{-rt} = \frac{(y_0/K)[1 - (y/K)]}{(y/K)[1 - (y_0/K)]},$$

et, par conséquent,

$$t = -\frac{1}{r} \ln \frac{(y_0/K)[1 - (y/K)]}{(y/K)[1 - (y_0/K)]}. \quad (13)$$

En utilisant les valeurs données de r et de y_0/K et en posant $y/K = 0,75$, on trouve

$$\tau = -\frac{1}{0,71} \ln \frac{(0,25)(0,25)}{(0,75)(0,75)} = \frac{1}{0,71} \ln 9 \approx 3,095 \text{ années.}$$

La figure 2.6.4 illustre les graphiques de y/K en fonction de t pour les valeurs des paramètres donnés et pour différentes conditions initiales. La courbe en noir correspond à la condition initiale $y_0 = 0,25K$.

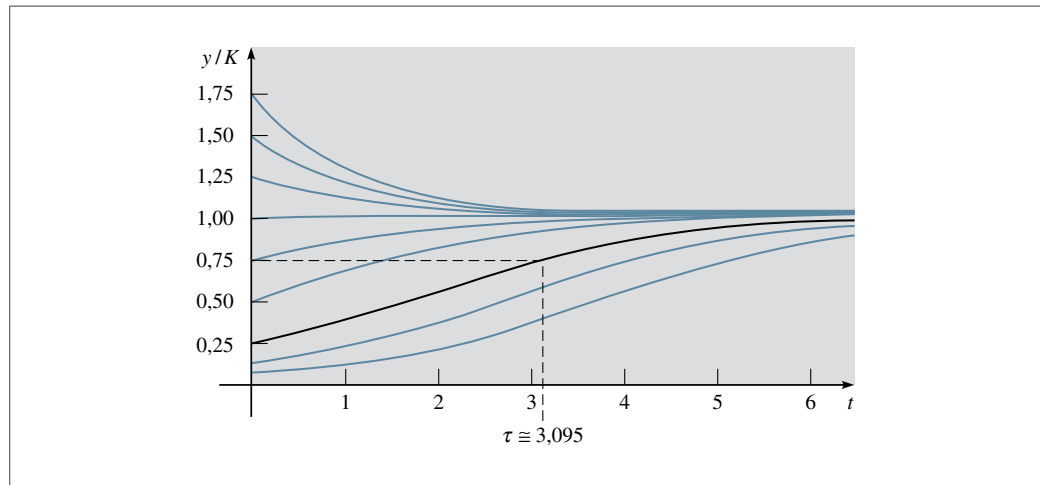


Figure 2.6.4 y/K en fonction de t pour le modèle de population de flétans de l'océan Pacifique. La courbe en noir satisfait à la condition initiale $y(0)/K = 0,25$.

Un seuil critique On considère maintenant l'équation

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T} \right) y, \quad (14)$$

où r et T sont des constantes positives données. Il faut noter que (sauf pour le remplacement du paramètre K par T) cette équation diffère de l'équation logistique (7) seulement par la présence du signe négatif dans le second membre. Cependant, comme on le verra, les solutions à l'équation (14) se comportent très différemment de celles de l'équation (7).

Pour l'équation (14), le graphique de $f(y)$ en fonction de y est la parabole illustrée à la figure 2.6.5, qui se trouve à la page suivante. Les intersections avec l'axe des y sont aux points critiques $y = 0$ et $y = T$, qui correspondent aux solutions d'équilibre $\phi_1(t) = 0$ et $\phi_2(t) = T$. Si $0 < y < T$, alors $dy/dt < 0$, et y diminue lorsque t augmente. D'un autre côté, si $y > T$, alors $dy/dt > 0$ et y croît lorsque t augmente. Ainsi, $\phi_1(t) = 0$ est une solution d'équilibre asymptotiquement stable et $\phi_2(t) = T$ est une solution instable. De plus, $f'(y)$ est négative pour $0 < y < T/2$ et elle est positive pour $T/2 < y < T$. Donc, le graphique de y en fonction de t est respectivement concave vers le haut et concave vers le bas dans ces intervalles. De plus, $f'(y)$ est positive pour $y > T$. Donc, le graphique de y en fonction de t est aussi concave vers le haut à cet endroit.

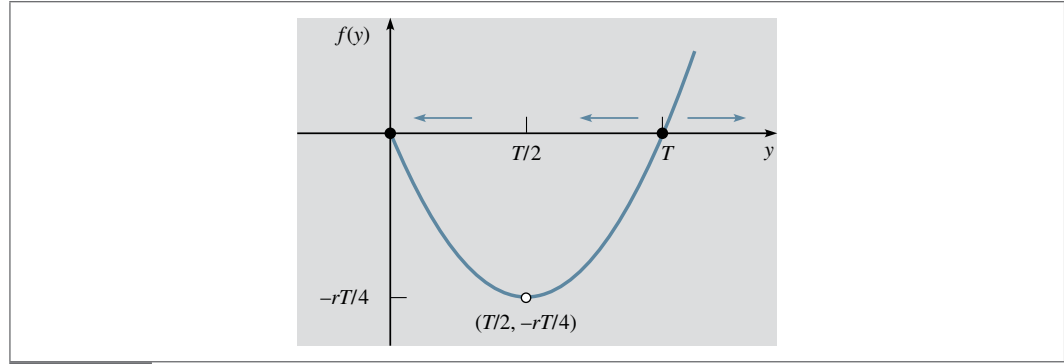


Figure 2.6.5 $f(y)$ en fonction de y pour $dy/dt = -r(1 - y/T)y$.

La figure 2.6.6 a) montre la ligne de phase (l'axe des y) pour l'équation (14). Les points en $y = 0$ et $y = T$ sont les points critiques, ou solutions d'équilibre, et les flèches indiquent les intervalles où les solutions sont croissantes ou décroissantes. On peut maintenant esquisser rapidement les courbes-solutions de l'équation (14), en procédant comme suit. D'abord, tracez les solutions d'équilibre $y = 0$ et $y = T$. Ensuite, esquissez dans l'intervalle $0 < y < T$ des courbes qui sont décroissantes lorsque t augmente et changez leur concavité quand elles croisent la droite $y = T/2$. Après cela, tracez au-dessus de la droite $y = T$ quelques courbes qui croissent de plus en plus abruptement lorsque t et y augmentent. Assurez-vous que toutes les courbes deviennent plus aplaties lorsque y s'approche de 0 ou de T . Le résultat est illustré dans la figure 2.6.6 b), qui est une esquisse qualitativement exacte des solutions à l'équation (14) pour tout r et T . D'après cette figure, il semble que lorsque le temps augmente, y s'approche de 0 ou croît sans limite, selon que la valeur initiale y_0 est inférieure ou supérieure à T . Par conséquent, T est le **niveau critique** au-dessous duquel il n'y a pas de croissance.

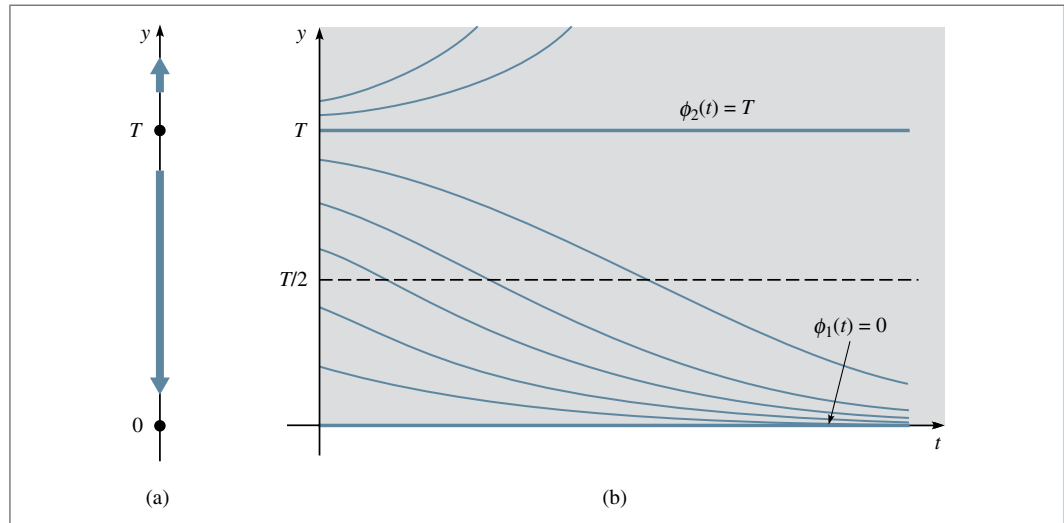


Figure 2.6.6 Croissance avec seuil pour $dy/dt = -r(1 - y/T)y$. En a), la ligne de phase; en b), y en fonction de t .

On peut confirmer les conclusions obtenues par un raisonnement géométrique en résolvant l'équation différentielle (14). On peut le faire en séparant les variables et en intégrant, comme on l'a fait pour l'équation (7). Cependant, si on note qu'on peut obtenir l'équation (14) à partir de l'équation (7) en remplaçant K par T et r par $-r$, alors on peut faire les mêmes substitutions dans la solution (11) et obtenir ainsi

$$y = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}}, \quad (15)$$

soit la solution à l'équation (14) qui satisfait à la condition initiale $y(0) = y_0$.

Si $0 < y_0 < T$, alors il découle de l'équation (15) que $y \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Cela concorde avec notre analyse géométrique qualitative. Si $y_0 > T$, alors le dénominateur du second membre de l'équation (15) est zéro pour une certaine valeur de t . On note cette valeur t^* , et on la calcule à partir de

$$y_0 - (y_0 - T)e^{rt^*} = 0,$$

ce qui donne

$$t^* = \frac{1}{r} \ln \frac{y_0}{y_0 - T}. \quad (16)$$

Ainsi, si la population initiale y_0 est au-dessous du seuil T , le modèle du seuil critique prédit que le graphique de y en fonction de t a une asymptote verticale en $t = t^*$. En d'autres mots, la population devient non bornée en un temps fini qui dépend de la valeur initiale y_0 et de la valeur du seuil T . L'existence et la position de cette asymptote ne pouvaient être déterminées à partir de l'analyse géométrique. Dans ce cas, la solution explicite fournit donc de l'information additionnelle, tant qualitative que quantitative.

Les populations de certaines espèces présentent ce phénomène de seuil critique. S'il y a trop peu de membres, les espèces ne peuvent pas se reproduire efficacement et la population s'éteint. Cependant, si on peut rassembler une population plus grande que le niveau du seuil, on assiste alors à une croissance. Bien sûr, la population ne peut pas devenir non bornée. Donc, éventuellement, l'équation (14) devra être modifiée en conséquence.

Les seuils critiques se produisent aussi en d'autres circonstances. Par exemple, en mécanique des fluides, les équations de la forme (7) ou (14) gouvernent souvent l'évolution d'une petite perturbation y dans un flux laminaire (ou lisse). Par exemple, si l'équation (14) s'applique et si $y < T$, alors la perturbation est amortie et le flux laminaire persiste. Cependant, si $y > T$, alors la perturbation s'accroît et le flux laminaire devient un flux turbulent. Dans ce cas, on dit que T est une amplitude critique. Par exemple, les expérimentateurs parlent de garder le niveau de perturbation dans un tunnel aérodynamique suffisamment faible afin d'étudier le flux laminaire sur une surface portante.

La croissance logistique avec seuil Comme on l'a mentionné dans la sous-section précédente, le modèle du seuil critique (14) peut nécessiter des modifications pour empêcher une croissance non bornée quand y se trouve au-dessus du seuil T . La manière la plus simple de le faire consiste à introduire un autre facteur qui aura pour effet de rendre dy/dt négatif quand y est grand. Ainsi, on considère

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad (17)$$

où $r > 0$ et $0 < T < K$.

La figure 2.6.7 présente le graphique de $f(y)$ en fonction de y . Dans ce problème, il y a trois points critiques: $y = 0$, $y = T$ et $y = K$, qui correspondent respectivement aux solutions

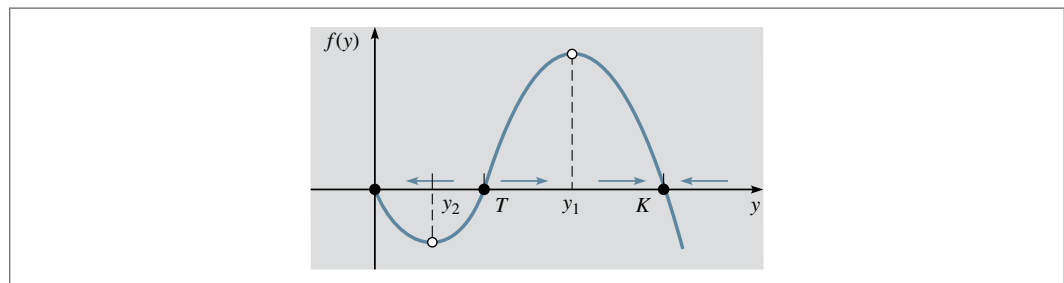


Figure 2.6.7 $f(y)$ en fonction de y pour $dy/dt = -r(1 - y/T)(1 - y/K)y$.

d'équilibre $\phi_1(t) = 0$, $\phi_2(t) = T$ et $\phi_3(t) = K$. À partir de la figure 2.6.8, il est clair que $dy/dt > 0$ pour $T < y < K$ et que, par conséquent, y augmente à cet endroit. Le contraire est vrai pour $y < T$ et $y > K$. Ainsi, les solutions d'équilibre $\phi_1(t)$ et $\phi_3(t)$ sont asymptotiquement stables, et la solution $\phi_2(t)$ est instable.

La ligne de phase pour l'équation (17) est montrée dans la figure 2.6.8 a) et les graphiques de quelques solutions sont esquissés dans la figure 2.6.8 b). Assurez-vous de bien comprendre la relation entre ces deux figures, ainsi que celle entre les figures 2.6.7 et 2.6.8 a). D'après la figure 2.6.8 b), on voit que si y débute sous le seuil T , alors y décroît jusqu'à l'extinction finale. D'un autre côté, si y commence au-dessus du seuil T , alors y s'approche éventuellement de la capacité limite K . Les points d'inflexion sur les graphiques de y en fonction de t [voir la figure 2.6.8 b)] correspondent aux points maximal et minimal qui sont respectivement y_1 et y_2 du graphique de $f(y)$ en fonction de y (voir la figure 2.6.7). On peut obtenir ces valeurs en dérivant le second membre de l'équation (17) par rapport à y , puis en posant le résultat égal à zéro et en faisant la résolution pour déterminer y . On obtient

$$y_{1,2} = (K + T \pm \sqrt{K^2 - KT + T^2})/3, \quad (18)$$

où le signe positif donne y_1 et le signe négatif, y_2 .

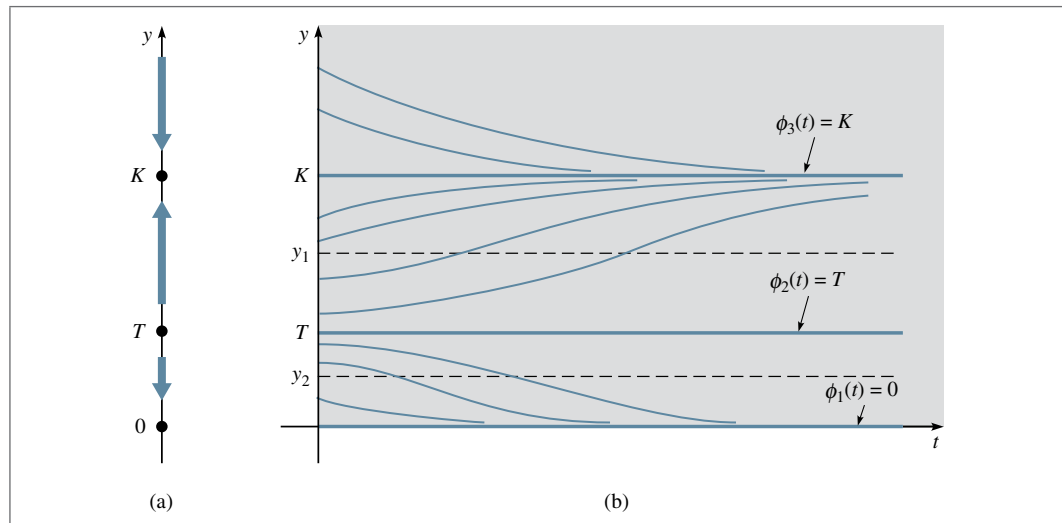


Figure 2.6.8 Croissance avec seuil T pour $dy/dt = -r(1 - y/T)(1 - y/K)y$. En a), ligne de phase ; en b), y en fonction de t .

Apparemment, un modèle de ce type général décrit bien la population de pigeons voyageurs¹³ aux États-Unis, qui était très nombreuse jusqu'à la fin du XIX^e siècle. La chasse aux pigeons voyageurs ayant été excessive (pour la nourriture et le sport), leur nombre a considérablement diminué dans les années 1880.

Malheureusement, les pigeons voyageurs ne peuvent se reproduire facilement que si leur concentration est grande, ce qui correspond à un seuil T plutôt élevé. Bien qu'un nombre relativement élevé de ces oiseaux soient restés en vie vers la fin des années 1880, ils n'étaient pas assez nombreux en un même endroit pour permettre une reproduction efficace. La population s'est donc rapidement éteinte. Le dernier survivant est mort en 1914. Le déclin précipité de la population de pigeons voyageurs, ceux-ci étant passés d'un nombre très élevé à l'extinction en à peine plus de 30 ans, a été l'un des premiers facteurs qui a suscité un intérêt pour la conservation des espèces.

13. Voir, par exemple, l'ouvrage suivant : AUSTIN, Oliver L. Jr. *Birds of the World*, New York, Golden Press, 1983, p. 143-145.

Problèmes

■ Les problèmes 1 à 6 comprennent des équations de la forme $dy/dt = f(y)$. Pour chaque problème, tracez le graphique de $f(y)$ en fonction de y , déterminez les points d'équilibre (critiques) et précisez si chacune des solutions est asymptotiquement stable ou instable.

1. $dy/dt = ay + by^2$, $a > 0$, $b > 0$, $y_0 \geq 0$
2. $dy/dt = ay + by^2$, $a > 0$, $b > 0$, $-\infty < y_0 < \infty$
3. $dy/dt = y(y-1)(y-2)$, $y_0 \geq 0$
4. $dy/dt = e^y - 1$, $-\infty < y_0 < \infty$
5. $dy/dt = e^{-y} - 1$, $-\infty < y_0 < \infty$
6. $dy/dt = -2(\arctan y)/(1+y^2)$, $-\infty < y_0 < \infty$

7. **Les solutions d'équilibre semi-stable** Parfois, une solution d'équilibre constante a la propriété voulant que les solutions situées sur un côté de la solution d'équilibre aient tendance à s'en approcher, tandis que les solutions situées de l'autre côté s'en éloignent (voir la figure 2.6.9). Dans ce cas, la solution d'équilibre est qualifiée de **semi-stable**.

a) Considérez l'équation

$$dy/dt = k(1-y)^2, \quad (i)$$

où k est une constante positive. Montrez que $y = 1$ est le seul point critique, avec la solution d'équilibre correspondante $\phi(t) = 1$.

b) Tracez le graphique de $f(y)$ en fonction de y . Montrez que y est une fonction croissante de t pour $y < 1$ et aussi pour $y > 1$. Ainsi, les solutions au-dessous de la solution d'équilibre s'en approchent, tandis que celles qui sont au-dessus de la solution d'équilibre s'en éloignent. Par conséquent, $\phi(t) = 1$ est semi-stable.

c) Résolvez l'équation (i) qui satisfait à la condition initiale $y(0) = y_0$, puis confirmez les conclusions obtenues à la partie b).

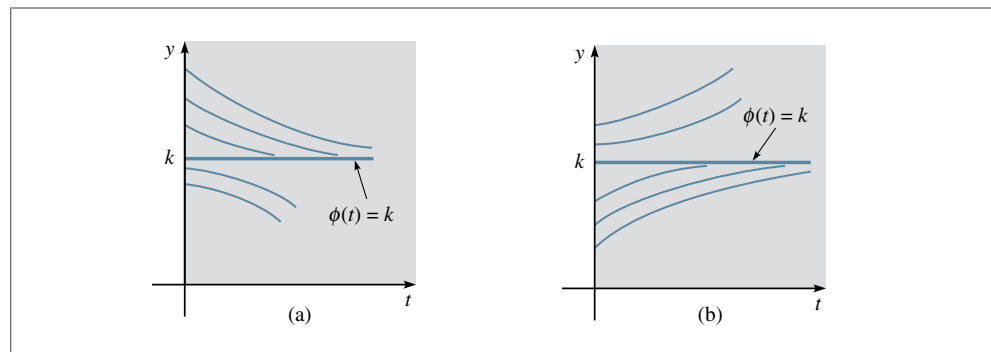


Figure 2.6.9 Dans les deux cas, la solution d'équilibre $\phi(t) = k$ est semi-stable.
a) $dy/dt \leq 0$; b) $dy/dt \geq 0$.

■ Les problèmes 8 à 13 comportent des équations de la forme $dy/dt = f(y)$. Pour chaque problème, tracez le graphique de $f(y)$ en fonction de y , déterminez les points critiques (d'équilibre) et précisez si chacune des solutions est asymptotiquement stable, instable ou semi-stable (voir le problème 7).

8. $dy/dt = -k(y-1)^2$, $k > 0$, $-\infty < y_0 < \infty$
9. $dy/dt = y^2(y^2-1)$, $-\infty < y_0 < \infty$
10. $dy/dt = y(1-y^2)$, $-\infty < y_0 < \infty$
11. $dy/dt = ay - b\sqrt{y}$, $a > 0$, $b > 0$, $y_0 \geq 0$
12. $dy/dt = y^2(4-y^2)$, $-\infty < y_0 < \infty$
13. $dy/dt = y^2(1-y)^2$, $-\infty < y_0 < \infty$

14. Considérez l'équation $dy/dt = f(y)$. Supposez que y_1 est un point critique, c'est-à-dire que $f(y_1) = 0$. Montrez que la solution d'équilibre constante $\phi(t) = y_1$ est asymptotiquement stable si $f'(y_1) < 0$, et instable si $f'(y_1) > 0$.

15. Supposez qu'une certaine population obéit à l'équation logistique $dy/dt = ry[1 - (y/K)]$.

a) Si $y_0 = K/3$, trouvez le temps τ au bout duquel la population initiale a doublé. Trouvez la valeur de τ correspondant à $r = 0,025$ par année.

- b) Si $y_0/K = \alpha$, trouvez le temps T au bout duquel $y(T)/K = \beta$, où $0 < \alpha, \beta < 1$. Observez que $T \rightarrow \infty$ lorsque $\alpha \rightarrow 0$ ou $\beta \rightarrow 1$. Trouvez la valeur de T pour $r = 0,025$ par année, $\alpha = 0,1$ et $\beta = 0,9$.

16. Une autre équation utilisée pour modéliser la croissance de la population est l'équation de Gompertz :

$$dy/dt = ry \ln(K/y),$$

où r et K sont des constantes positives.

- a) Tracez le graphique de $f(y)$ en fonction de y . Ensuite, trouvez les points critiques et déterminez si chacune des solutions est asymptotiquement stable ou instable.
 b) Pour $0 \leq y \leq K$, déterminez les régions où le graphique de y en fonction de t est concave vers le haut et où il est concave vers le bas.
 c) Pour tout y dans $0 < y \leq K$, montrez que dy/dt telle que donnée par l'équation de Gompertz n'est jamais inférieure à dy/dt telle que donnée par l'équation logistique.

17. Résolvez l'équation de Gompertz

$$dy/dt = ry \ln(K/y),$$

assujettie à la condition initiale $y(0) = y_0$.

Suggestion : Vous pouvez poser $u = \ln(y/K)$.

- a) Pour les données fournies dans l'exemple 1 de la présente section [$r = 0,71$ par année, $K = 80,5 \times 10^6$ kg, $y_0/K = 0,25$], utilisez le modèle de Gompertz pour prédire la valeur de $y(2)$.
 b) Pour les mêmes données qu'à la partie a), utilisez le modèle de Gompertz pour déterminer le temps τ au bout duquel $y(\tau) = 0,75K$.

18. Un étang se forme au fur et à mesure que de l'eau remplit une dépression conique de rayon a et de profondeur h . Supposez que l'eau se déverse à un taux constant k et qu'elle se perd par évaporation à un taux proportionnel à sa superficie.

- a) Montrez que le volume $V(t)$ d'eau présent dans l'étang au temps t satisfait à l'équation différentielle

$$dV/dt = k - \alpha\pi(3a/\pi h)^{2/3}V^{2/3},$$

où α est le coefficient d'évaporation.

- b) Trouvez la profondeur d'équilibre de l'eau dans l'étang. L'équilibre est-il asymptotiquement stable ?
 c) Trouvez une condition qui doit être satisfaite pour que l'étang ne déborde pas.

19. Considérez un réservoir d'eau cylindrique de section constante A . De l'eau est pompée dans le réservoir à un taux constant k , et elle s'en écoule par un petit trou de rayon a situé au fond du réservoir. D'après le théorème de Torricelli en hydrodynamique, il s'ensuit que le taux auquel l'eau s'écoule par le trou est de $\alpha a \sqrt{2gh}$, où h est la profondeur actuelle de l'eau dans le réservoir, g l'accélération due à la gravité et α un coefficient de contraction qui satisfait à $0,5 \leq \alpha \leq 1,0$.

- a) Montrez que la profondeur de l'eau dans le réservoir au temps t satisfait à l'équation

$$dh/dt = (k - \alpha a \sqrt{2gh})/A.$$

- b) Déterminez la profondeur d'équilibre h_e de l'eau et montrez qu'elle est asymptotiquement stable. Il faut noter que h_e ne dépend pas de A .

- **La capture d'une ressource renouvelable** Supposez que la taille de la population y d'une espèce de poisson (par exemple le thon ou le flétan) dans une région donnée est décrite par l'équation logistique

$$dy/dt = r(1 - y/K)y.$$

Bien qu'on désire exploiter cette source de nourriture, dans le cas d'une pêche excessive, la population peut être réduite au-dessous d'un niveau critique ou même s'éteindre. Les problèmes 20 et 21 explorent certaines questions soulevées dans l'élaboration d'une stratégie rationnelle pour la gestion de la pêche¹⁴.

14. Le livre de Colin W. Clark (*voir les références à la fin du chapitre*) présente un excellent traitement de ce type de problème, qui va bien au-delà de la matière présentée ici (particulièrement dans les deux premiers chapitres). De nombreuses références additionnelles sont fournies.

20. À un niveau d'effort donné, il est raisonnable de supposer que le taux auquel les poissons sont pêchés dépend de la taille de la population y . En effet, plus les poissons sont nombreux, plus la pêche est facile. Ainsi, on suppose que le taux auquel les poissons sont pêchés est donné par Ey , où E est une constante positive, avec les unités de 1/temps, qui permet de mesurer l'effort total fourni pour capturer cette espèce. Afin d'inclure cet effet, on remplace l'équation logistique par

$$dy/dt = r(1 - y/K)y - Ey. \quad (i)$$

Cette équation est dite **modèle de Schaefer**. Elle porte le nom du biologiste M. B. Schaefer, qui l'a appliquée à des populations de poissons.

- Montrez que si $E < r$, alors il existe deux points d'équilibre, $y_1 = 0$ et $y_2 = K(1 - E/r) > 0$.
 - Montrez que $y = y_1$ est instable et que $y = y_2$ est asymptotiquement stable.
 - Un rendement équilibré Y des pêches est un taux auquel on peut pêcher des poissons indéfiniment. Il s'agit du produit de l'effort E et de la population asymptotiquement stable y_2 . Trouvez Y en fonction de l'effort E . Le graphique de cette fonction est la courbe de rendement-effort.
 - Déterminez E pour qu'il maximise Y , puis trouvez le **rendement équilibré maximal** Y_m .
21. Dans ce problème, supposez qu'on pêche des poissons à un taux constant h indépendant de la taille de la population de poissons. Alors, y satisfait à

$$dy/dt = r(1 - y/K)y - h. \quad (i)$$

L'hypothèse d'un taux de pêche constant h peut être raisonnable quand y est grand, mais elle l'est moins lorsque y est petit.

- Si $h < rK/4$, montrez que l'équation (i) a deux points d'équilibre y_1 et y_2 où $y_1 < y_2$. Déterminez ces points.
- Montrez que y_1 est instable et que y_2 est asymptotiquement stable.
- À partir du graphique de $f(y)$ en fonction de y , montrez que si $y_0 > y_1$, alors $y \rightarrow y_2$ lorsque $t \rightarrow \infty$, mais que si $y_0 < y_1$, alors y diminue lorsque t augmente. Il faut noter que $y = 0$ n'est pas un point d'équilibre. Donc, si $y_0 < y_1$, alors l'extinction sera atteinte en un temps fini.
- Si $h > rK/4$, montrez que y diminue à zéro lorsque t augmente, peu importe la valeur de y_0 .
- Si $h = rK/4$, montrez qu'il y a un seul point d'équilibre $y = K/2$ et que ce point est semi-stable (voir le problème 7). Ainsi, le rendement équilibré maximal est de $h_m = rK/4$, ce qui correspond à la valeur d'équilibre $y = K/2$. Il faut noter que h_m a la même valeur que Y_m dans le problème 20 d). On parle de surpêche si y est réduit à un niveau inférieur à $K/2$.

- **Les épidémies** L'utilisation de méthodes mathématiques pour étudier la propagation des maladies contagieuses remonte au moins à certaines études de Daniel Bernoulli, effectuées en 1760 et concernant la variole. Plus récemment, on a proposé et étudié de nombreux modèles mathématiques pour différentes maladies¹⁵. Les problèmes 22 à 24 font appel à quelques modèles plus simples et portent sur les conclusions qu'on peut en tirer. On a aussi utilisé des modèles semblables pour décrire la diffusion de rumeurs et de produits de consommation.

22. Supposez qu'on puisse diviser une population donnée en deux parties : ceux qui ont une maladie donnée et qui peuvent infecter les autres et ceux qui n'ont pas cette maladie mais qui sont susceptibles de la contracter. Soit x la proportion de personnes susceptibles de contracter la maladie et y la proportion de personnes infectées. Alors, $x + y = 1$. Supposez aussi que la maladie se propage par le contact des personnes malades avec les personnes saines de la population, et que le taux de propagation dy/dt est proportionnel au nombre de ces contacts. De plus, supposez que les membres des deux groupes se déplacent librement, donc que le nombre de contacts est proportionnel au produit de x et y . Puisque $x = 1 - y$, on obtient le problème de valeur initiale

$$dy/dt = \alpha y(1 - y), \quad y(0) = y_0, \quad (i)$$

où α est un facteur de proportionnalité positif et y_0 est la proportion initiale de personnes infectées.

15. Le livre de N. T. J. Bailey est une source habituelle qui figure dans les références à la fin du chapitre. Bailey discute respectivement les modèles des problèmes 22 à 24 aux chapitres 5, 10 et 20.

- a) Trouvez les points d'équilibre pour l'équation différentielle (i), puis déterminez s'ils sont asymptotiquement stables, semi-stables ou instables.
- b) Résolvez le problème de valeur initiale (i) et vérifiez si les conclusions tirées à la partie a) sont correctes. Montrez que $y(t) \rightarrow 1$ lorsque $t \rightarrow \infty$, ce qui signifie que, finalement, la maladie se propage dans toute la population.
23. Certaines maladies (comme la fièvre typhoïde) se propagent de façon importante par des porteurs, c'est-à-dire des personnes qui peuvent transmettre la maladie mais qui ne présentent aucun symptôme manifeste. Prenez x et y pour noter respectivement la proportion de personnes susceptibles de contracter la maladie et la proportion de porteurs dans la population. Supposez que les porteurs sont identifiés et isolés de la population à un taux β . Donc,

$$dy/dt = -\beta y. \quad (i)$$

Supposez aussi que la maladie se propage à un taux proportionnel au produit de x et y . Ainsi,

$$dx/dy = \alpha xy. \quad (ii)$$

- a) Déterminez y au temps t en résolvant l'équation (i) assujettie à la condition initiale

$$y(0) = y_0.$$

- b) Utilisez le résultat obtenu à la partie a) pour trouver x au temps t en résolvant l'équation (ii) assujettie à la condition initiale $x(0) = x_0$.
- c) Trouvez la proportion de la population qui échappe à l'épidémie en trouvant la valeur limite de x lorsque $t \rightarrow \infty$.

24. Le travail accompli par Daniel Bernoulli en 1760 avait pour but d'évaluer l'efficacité d'un programme d'inoculation controversé contre la variole, qui était une grande menace à la santé publique à l'époque. Son modèle s'applique aussi très bien à d'autres maladies qui, une fois contractées et guéries, procurent l'immunité à vie.

Considérez la cohorte de personnes nées au cours d'une année donnée ($t = 0$). Ensuite, posez $n(t)$ comme étant le nombre de personnes qui survivent t années plus tard. Soit $x(t)$ le nombre de personnes de cette cohorte qui n'ont pas contracté la variole jusqu'à l'année t et qui sont par conséquent encore susceptibles de l'attraper. Soit β le taux auquel les personnes susceptibles d'être contaminées contractent la variole et ν le taux auquel les personnes qui attrapent la variole meurent de la maladie. Finalement, soit $\mu(t)$ le taux de mortalité rattaché à toutes les causes autres que la variole. Alors dx/dt , le taux selon lequel le nombre de personnes susceptibles de contracter la maladie diminue, est

$$dx/dt = -[\beta + \mu(t)]x. \quad (i)$$

Le premier terme du second membre de l'équation (i) est le taux auquel les personnes contractent la variole et le second terme est le taux auquel elles meurent de toute autre cause. De plus,

$$dn/dt = -\nu\beta x - \mu(t)n, \quad (ii)$$

où dn/dt est le taux de mortalité de toute la cohorte et où les deux termes du second membre sont respectivement le taux de mortalité dû à la variole et le taux de mortalité dû à toutes les autres causes.

- a) Soit $z = x/n$. Montrez que z satisfait au problème de valeur initiale

$$dz/dt = -\beta z(1 - \nu z), \quad z(0) = 1. \quad (iii)$$

Il faut noter que le problème de valeur initiale (iii) ne dépend pas de $\mu(t)$.

- b) Trouvez $z(t)$ en résolvant l'équation (iii).

- c) Bernoulli estimait que $\nu = \beta = \frac{1}{8}$. En utilisant ces valeurs, déterminez la proportion des personnes de 20 ans qui n'ont pas contracté la variole.

Remarque : En se basant sur le modèle décrit précédemment et en utilisant les meilleures données sur la mortalité de l'époque, Bernoulli a calculé que si les décès causés par la variole pouvaient être éliminés ($\nu = 0$), alors l'espérance de vie moyenne (de 26 ans et 7 mois en 1760) serait augmentée d'environ 3 ans. Il a donc soutenu le programme d'inoculation.

■ **Les points de bifurcation** Pour une équation de la forme

$$dy/dt = f(a, y) \quad (i)$$

où a est un paramètre réel, les points critiques (les solutions d'équilibre) dépendent généralement de la valeur de a . À mesure que a augmente ou diminue de façon régulière, il arrive souvent qu'à une certaine valeur de a , appelée **point de bifurcation**, les points critiques se fusionnent, ou se séparent, et des solutions d'équilibre peuvent être perdues ou gagnées. Les points de bifurcation sont d'un grand intérêt dans de nombreuses applications, car près de ces points, la nature de la solution à l'équation différentielle sous-jacente subit un changement abrupt. Par exemple, en mécanique des fluides, un flux lisse (ou laminaire) peut être perturbé et devenir turbulent. Ou une colonne chargée dans la direction de son axe peut soudainement se déformer et montrer un grand déplacement latéral. Ou encore, quand on augmente la quantité d'un des produits chimiques contenus dans un certain mélange, des spirales de diverses couleurs peuvent soudainement apparaître dans un fluide initialement au repos. Les problèmes 25 à 27 décrivent trois types de bifurcation qui peuvent se produire dans des équations simples de la forme (i).

25. Considérez l'équation

$$dy/dt = a - y^2. \quad (\text{ii})$$

- Trouvez tous les points critiques de l'équation (ii). Remarquez qu'il n'y a aucun point critique si $a < 0$, qu'il y en a un seul si $a = 0$ et qu'il y en a deux si $a > 0$.
- Tracez la ligne de phase dans chaque cas et déterminez si chaque point critique est asymptotiquement stable, semi-stable ou instable.
- Dans chaque cas, esquissez plusieurs solutions à l'équation (ii) dans le plan ty .
- Si on représente graphiquement l'emplacement des points critiques comme une fonction de a dans le plan ay , on obtient la figure 2.6.10. C'est ce qu'on appelle le **diagramme de bifurcation** de l'équation (ii). La bifurcation en $a = 0$ est appelée une bifurcation **nœud-col**. Ce nom est plus naturel dans le contexte des systèmes du deuxième ordre, qui seront étudiés au chapitre 5.

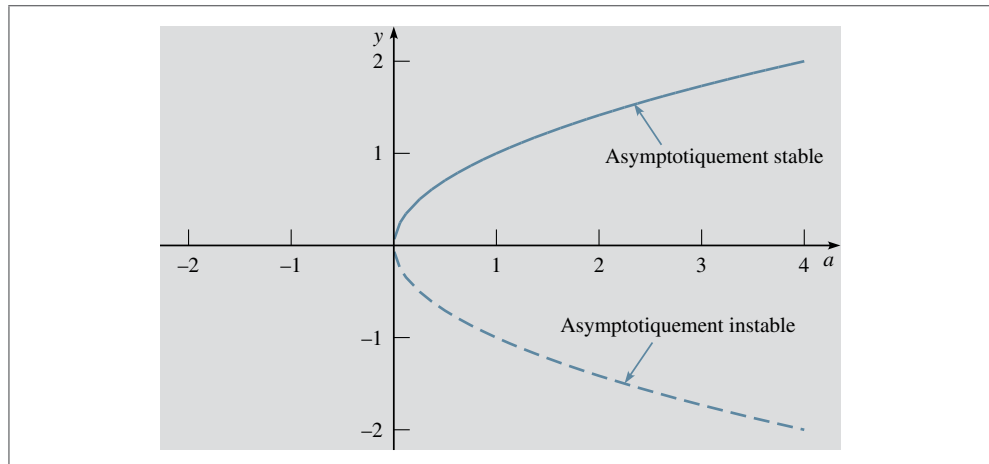


Figure 2.6.10 Diagramme de bifurcation de l'équation $y' = a - y^2$.

26. Considérez l'équation

$$dy/dt = ay - y^3 = y(a - y^2). \quad (\text{iii})$$

- Considérez de nouveau les cas $a < 0$, $a = 0$ et $a > 0$. Dans chaque cas, trouvez les points critiques, tracez la ligne de phase et déterminez si chaque point critique est asymptotiquement stable, semi-stable ou instable.
- Dans chaque cas, esquissez plusieurs solutions à l'équation (iii) dans le plan ty .
- Tracez le diagramme de bifurcation de l'équation (iii); autrement dit, représentez graphiquement l'emplacement des points critiques en fonction de a . Pour l'équation (iii), le point de bifurcation en $a = 0$ est appelé une **bifurcation fourche**. Votre diagramme vous suggérera peut-être la raison pour laquelle ce nom est approprié.

27. Considérez l'équation

$$dy/dt = ay - y^2 = y(a - y). \quad (\text{iv})$$

- a) Considérez de nouveau les cas $a < 0$, $a = 0$ et $a > 0$. Dans chaque cas, trouvez les points critiques, tracez la ligne de phase et déterminez si chaque point critique est asymptotiquement stable, semi-stable ou instable.
- b) Dans chaque cas, esquissez plusieurs solutions à l'équation (iv) dans le plan ty .
- c) Tracez le diagramme de bifurcation de l'équation (iv). Remarquez que pour l'équation (iv), le nombre de points critiques quand $a < 0$ et quand $a > 0$ reste le même, mais que leur stabilité a changé. Quand $a < 0$, la solution d'équilibre $y = 0$ est asymptotiquement stable et la solution $y = a$ est instable, tandis que quand $a > 0$, la situation est inversée. Par conséquent, il y a un **échange de stabilité** lorsque a passe par le point de bifurcation $a = 0$. Ce type de bifurcation est appelé une **bifurcation trans-critique**.

- 28. Les réactions chimiques** Une réaction chimique du second ordre implique l'interaction (la collision) d'une molécule d'une substance P avec une molécule d'une substance Q pour produire une molécule d'une nouvelle substance X , ce qui est noté $P + Q \rightarrow X$. Supposez que p et q , où $p \neq q$, sont respectivement les concentrations initiales de P et de Q , et soit $x(t)$ la concentration de X au temps t . Alors, $p - x(t)$ et $q - x(t)$ sont les concentrations de P et de Q au temps t . De plus, le taux auquel la réaction se produit est donné par l'équation

$$dx/dt = \alpha(p - x)(q - x), \quad (i)$$

où α est une constante positive.

- a) Si $x(0) = 0$, déterminez la valeur limite de $x(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$ sans résoudre l'équation différentielle. Ensuite, résolvez le problème de valeur initiale et trouvez $x(t)$ pour tout t .
- b) Si les substances P et Q sont les mêmes, alors $p = q$, et l'équation (i) est remplacée par

$$dx/dt = \alpha(p - x)^2. \quad (ii)$$

Si $x(0) = 0$, déterminez la valeur limite de $x(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$ sans résoudre l'équation différentielle. Ensuite, résolvez le problème de valeur initiale et déterminez $x(t)$ quel que soit t .

Références

- Voici les deux livres mentionnés dans la section 2.6:
BAILEY, N. T. J. *The Mathematical Theory of Infections Diseases and Its Applications*, 2^e édition, New York, Hafner Press, 1975.
CLARK, Colin W. *Mathematical Bioeconomics*, 2^e édition, New York, Wiley-Interscience, 1990.
- Voici une introduction aux dynamiques des populations en général:
FRAUENTHAL, J. C. *Introduction to Population Modeling*, Boston, Birkhauser, 1980.
- Vous pouvez trouver une discussion plus détaillée sur la preuve du théorème fondamental de l'existence et de l'unicité dans de nombreux manuels avancés sur les équations différentielles. Voici deux manuels relativement accessibles aux lecteurs novices:
BRAUER, F. et J. NOHEL. *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*, New York, Benjamin, 1969 ; New York, Dover, 1989.
CODDINGTON, E. A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1961 ; New York, Dover, 1989.
- Voici un condensé pratique des méthodes permettant de résoudre des équations différentielles:
ZWILLINGER, D. *Handbook of Differential Equations*, 3^e édition, San Diego, Academic Press, 1988.
- Voici une référence générale sur les équations aux différences:
MICKENS, R. E. *Difference Equations, Theory and Applications*, 2^e édition, New York, Van Nostrand Reinhold, 1990.
- Voici un ouvrage élémentaire sur les solutions chaotiques aux équations aux différences:
DEVANEY, R. L. *Chaos, Fractals, and Dynamics*, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1990.

Les équations linéaires du deuxième ordre

Les équations linéaires du deuxième ordre sont d'une importance cruciale dans l'étude des équations différentielles pour deux raisons. D'une part, les équations linéaires ont une structure qui permet en général de les résoudre de manière systématique. En effet, les constituants majeurs de cette structure et les méthodes de résolution sont d'un niveau mathématique élémentaire. Dans ce chapitre, pour introduire les idées maîtresses dans un contexte simple, nous les décrirons à l'aide des équations du deuxième ordre. D'autre part, les équations linéaires du deuxième ordre sont fondamentales dans l'étude approfondie de la physique mathématique. On ne peut aller très loin en mécanique des fluides, en thermodynamique, en physique des ondes ni en électromagnétisme sans savoir comment résoudre des équations différentielles linéaires du deuxième ordre. À titre d'exemple, nous discuterons des circuits électriques et d'applications élémentaires en mécanique à la fin du présent chapitre.

3.1 Généralités sur les équations différentielles du deuxième ordre

Une équation différentielle ordinaire du deuxième ordre est de la forme

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right), \quad (1)$$

où f est une fonction donnée. En général, on note t la variable indépendante puisque c'est souvent le temps qui joue ce rôle en physique. Par ailleurs, on se sert parfois de la lettre x . On utilise y ou, à l'occasion, une autre lettre pour désigner la variable dépendante. L'équation (1) est une **équation linéaire** si la fonction f est de la forme

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t) \frac{dy}{dt} - q(t)y, \quad (2)$$

c'est-à-dire si f est linéaire en y et en y' . Dans l'équation (2), g , p et q sont des fonctions spécifiques de la variable indépendante t , mais elles sont indépendantes de y . On réécrit alors habituellement l'équation (1) sous la forme

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (3)$$

où les dérivées sont effectuées par rapport à t . Au lieu de l'équation (3), on rencontre souvent l'équation

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t). \quad (4)$$

Si $P(t) \neq 0$, on peut alors diviser l'équation (4) par $P(t)$ et obtenir de nouveau l'équation (3), où

$$p(t) = \frac{Q(t)}{P(t)}, \quad q(t) = \frac{R(t)}{P(t)}, \quad g(t) = \frac{G(t)}{P(t)}. \quad (5)$$

Dans l'étude de l'équation (3) et de sa solution, pour la variable indépendante, on se restreindra à des intervalles dans lesquels les fonctions p , q et g sont continues¹.

Une équation linéaire du deuxième ordre est une **équation homogène** si le terme $g(t)$ dans l'équation (3), ou le terme $G(t)$ dans l'équation (4), est égal à zéro. Sinon, l'équation est une **équation non homogène**. On appelle souvent termes non homogènes les fonctions $g(t)$ et $G(t)$. On considère d'abord les équations homogènes écrites sous la forme

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0. \quad (6)$$

Dans les sections 3.6 et 3.7, on verra que lorsqu'une équation homogène a été résolue, il est toujours possible de résoudre aisément l'équation non homogène correspondante (4) ou, du moins, d'en exprimer la solution à l'aide d'une intégrale. Ainsi, la résolution de l'équation homogène constitue le problème fondamental.

Un problème de valeur initiale comporte une équation différentielle du type (1), (3) ou (4) ainsi que deux conditions initiales

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad (7)$$

où y_0 et y'_0 sont des valeurs spécifiques. Les conditions initiales pour une équation du deuxième ordre comportent ainsi non seulement un point particulier (t_0, y_0) par lequel la courbe-solution doit passer, mais aussi la pente y'_0 de la tangente à la courbe en ce point. Il est raisonnable de s'attendre à ce que deux conditions initiales soient nécessaires pour une équation du deuxième ordre, car l'obtention d'une solution requiert deux intégrations et chacune introduit une constante arbitraire. Les deux conditions initiales devraient permettre de déterminer les valeurs appropriées de ces deux constantes.

Si l'équation (1) n'est pas de la forme (3) ou (4), il s'agit alors d'une **équation non linéaire**. Puisque l'analyse des équations non linéaires est difficile, nous ne ferons que les effleurer dans le présent manuel. Une approche numérique est souvent appropriée dans ces cas. Toutefois, il existe deux types particuliers d'équations non linéaires du deuxième ordre qu'on peut résoudre en effectuant un changement de variables approprié, ce qui permet de les réduire à des équations du premier ordre.

Les équations sans variable dépendante Si une équation différentielle du deuxième ordre est de la forme $y'' = f(t, y')$, alors la variable dépendante y n'apparaît pas explicitement. En posant $v(t) = y'(t)$, on obtient $y'' = v'$. Si on substitue v à y' et v' à y'' , on obtient une équation du premier ordre de la forme $v' = f(t, v)$. Si on peut résoudre cette équation pour déterminer v , alors on peut obtenir y en intégrant $dy/dt = v$. Il faut noter qu'on obtient une constante arbitraire en résolvant l'équation du premier ordre afin de déterminer v , et qu'on introduit une deuxième constante arbitraire dans l'intégration afin de déterminer y .

Exemple 1

On veut résoudre l'équation différentielle

$$ty'' + 2y' = 6t. \quad (8)$$

On introduit une nouvelle variable dépendante $v(t)$ telle que $v(t) = y'(t)$ et on en déduit que $y'' = v'$. Si on substitue v à y' et v' à y'' dans l'équation (8), on obtient une équation du premier ordre :

$$tv' + 2v = 6t. \quad (9)$$

1. On traite de façon similaire les équations linéaires d'ordre plus élevé au chapitre 4. Vous pouvez lire les sections appropriées du chapitre 4 en parallèle avec le chapitre 3.

► En divisant les deux membres de l'équation (9) par t , on obtient l'équation linéaire sous la forme normalisée suivante :

$$v' + \frac{2}{t}v = 6.$$

En résolvant cette équation linéaire à l'aide du facteur intégrant $\mu(t) = t^2$, on trouve

$$v(t) = 2t + \frac{c_1}{t^2},$$

où c_1 est une constante arbitraire.

Par la suite, sachant que $y' = v$, on obtient par intégration

$$y(t) = t^2 - \frac{c_1}{t} + c_2,$$

où c_2 est une constante arbitraire.

Les équations sans variable indépendante Si une équation différentielle du deuxième ordre est de la forme $y'' = f(y, y')$, alors la variable indépendante t n'apparaît pas explicitement ; on y trouve seulement la variable dépendante y et ses dérivées. Si on introduit une nouvelle variable dépendante de variable indépendante y telle que $v(y) = y'(t)$, on obtient en vertu de la règle de la dérivée en chaîne,

$$dv/dt = (dv/dy)(dy/dt) = v(dv/dy).$$

Ainsi, on peut réécrire l'équation différentielle initiale sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre de variable dépendante v et de variable indépendante y :

$$v(dv/dy) = f(y, v).$$

Si on peut résoudre cette équation du premier ordre pour obtenir v en fonction de y , la relation entre y et t découle de la résolution de l'équation différentielle du premier ordre de variable dépendante y et de variable indépendante t ,

$$dy/dt = v(y).$$

Une fois de plus, deux constantes arbitraires apparaissent dans le résultat final.

Exemple 2

Résoudre le problème de valeurs initiales

$$y''(t) = \frac{3}{2}y^2(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

On pose $v(y) = y'(t)$ et on obtient $y'' = v \frac{dv}{dy}$.

Si on substitue $v(y)$ à y' et y'' à $v \frac{dv}{dy}$ dans l'équation initiale, on obtient l'équation différentielle du premier ordre de variable dépendante v et de variable indépendante y ,

$$v \frac{dv}{dy} = \frac{3}{2}y^2.$$

On peut réécrire cette équation sous la forme de l'équation à variables séparables

$$-\frac{3y^2}{2} + v \frac{dv}{dy} = 0. \quad (10)$$

La solution de l'équation (10) est donnée sous la forme implicite par

$$-\int \frac{3y^2}{2} dy + \int v dv = 0.$$

▶ Après intégration, on obtient

$$-\frac{y^3}{2} + \frac{v^2}{2} = c_1.$$

Il s'ensuit que

$$v(y) = \pm \sqrt{y^3 + 2c_1},$$

où c_1 est une constante arbitraire.

Sachant que $v(y(0)) = v(1) = y'(0) = 1 > 0$, il s'ensuit que

$$v(y) = \sqrt{y^3 + 2c_1}.$$

À partir des conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = v(1) = \sqrt{(y(0))^3 + 2c_1} = 1$, on a $c_1 = 0$ et il en découle que

$$v(y) = y^{3/2}.$$

Pour obtenir la relation entre y et la variable indépendante t , il faut résoudre l'équation différentielle de variable dépendante y et de variable indépendante t ,

$$\frac{dy}{dt} = y^{3/2}.$$

Puisque $y(t) \neq 0$, en divisant cette dernière équation par $y^{3/2}$, on peut la réécrire sous la forme de l'équation à variables séparables

$$-1 + y^{-3/2} \frac{dy}{dt} = 0$$

dont la solution est donnée sous la forme explicite par

$$y(t) = \left(\frac{2}{c_2 - t} \right)^2.$$

Sachant que $y(0) = 1$, on a

$$y(0) = \left(\frac{2}{c_2 - 0} \right)^2 = 1 \Rightarrow c_2 = \pm 2.$$

Finalement, on rejette le cas $c_2 = -2$, car $y'(0) = 1 > 0$ et on obtient la solution

$$y(t) = \frac{4}{(2-t)^2}.$$

Problèmes

■ Pour les problèmes 1 à 12, utilisez un changement de variable approprié pour résoudre l'équation.

1. $t^2 y'' + 2ty' - 1 = 0, \quad t > 0$

2. $ty'' + y' = 1, \quad t > 0$

3. $y'' + t(y')^2 = 0$

4. $2t^2 y'' + (y')^3 = 2ty', \quad t > 0$

5. $y'' + y' = e^{-t}$

6. $t^2 y'' = (y')^2, \quad t > 0$

7. $yy'' + (y')^2 = 0$

8. $y'' + y = 0$

9. $y'' + y(y')^3 = 0$

10. $2y^2 y'' + 2y(y')^2 = 1$

11. $yy'' - (y')^3 = 0$

12. $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$

Remarque : Dans le problème 12, l'équation modifiée est une équation de Bernoulli (voir la fin de la section 2.3).

- ■ Pour les problèmes 13 à 16, résolvez le problème de valeur initiale en utilisant un changement de variable approprié.

13. $y'y'' = 2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

14. $y'' - 3y^2 = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 4$

15. $(1 + t^2)y'' + 2ty' + 3t^{-2} = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -1$

16. $y'y'' - t = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$

3.2 Les équations homogènes à coefficients constants

Dans cette section, on se concentre sur les équations où les fonctions P , Q et R sont constantes. L'équation (6) de la section 3.1 devient alors

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (1)$$

où a , b et c sont des constantes. L'équation (1) admet toujours une solution en termes de fonctions élémentaires. Il est généralement beaucoup plus difficile de résoudre l'équation (6) de la section 3.1 si les coefficients ne sont pas constants ; ce sujet sera discuté au chapitre 7.

Avant d'aborder l'équation (1), on considère un exemple simple mais typique.

Exemple 1

Soit l'équation

$$y'' - y = 0, \quad (2)$$

qui est en fait l'équation (1) avec $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$. L'équation (2) indique qu'on recherche une fonction dont la dérivée seconde est identique à la fonction elle-même. On peut trouver à tâtons une telle fonction, par exemple la fonction exponentielle $y_1(t) = e^t$. En réfléchissant un peu plus, il est aussi possible de trouver une deuxième fonction, soit $y_2(t) = e^{-t}$. Une étude plus approfondie révèle que tout multiple de ces deux solutions est aussi une solution. Par exemple, les fonctions $2e^t$ et $5e^{-t}$ satisfont à l'équation (2), comme on peut le vérifier en calculant leurs dérivées secondes. Les fonctions $c_1y_1(t) = c_1e^t$ et $c_2y_2(t) = c_2e^{-t}$ satisfont à l'équation (2), quelles que soient les constantes c_1 et c_2 . Il est important de remarquer qu'une somme de solutions à l'équation (2) est également une solution. En particulier, puisque $c_1y_1(t)$ et $c_2y_2(t)$ sont des solutions à l'équation (2), il en est de même de la fonction

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} \quad (3)$$

quelles que soient c_1 et c_2 . On peut encore faire une vérification en calculant la dérivée seconde y'' de la fonction dans l'équation (3). On a $y' = c_1e^t - c_2e^{-t}$ et $y'' = c_1e^t + c_2e^{-t}$; comme y'' est identique à y , l'équation (2) est satisfaite.

Voici un résumé de la matière présentée dans cet exemple. On remarque d'abord que les fonctions $y_1(t) = e^t$ et $y_2(t) = e^{-t}$ sont des solutions à l'équation (2). Il s'ensuit que toute combinaison linéaire (3) de ces fonctions est aussi une solution. Puisque les coefficients c_1 et c_2 dans l'équation (3) sont arbitraires, cette expression représente un ensemble de solutions à l'équation différentielle (2) avec deux degrés de liberté.

Maintenant, comment peut-on choisir un élément particulier de cet ensemble infini de solutions qui satisfait aussi à des conditions initiales spécifiques ? Par exemple, on suppose qu'on recherche la solution à l'équation (2) satisfaisant aux conditions

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = -1. \quad (4)$$

En d'autres mots, on recherche la solution qui passe par le point $(0, 2)$ et dont la pente de la tangente vaut -1 en ce point. Premièrement, on pose $t = 0$ et $y = 2$ dans l'équation (10). On obtient

$$c_1 + c_2 = 2. \quad (5)$$

▶ Ensuite, on dérive l'équation (3) et on obtient

$$y' = c_1 e^t - c_2 e^{-t}.$$

Aussi, en posant $t = 0$ et $y' = -1$, on a

$$c_1 - c_2 = -1. \quad (6)$$

En résolvant le système d'équations (5) et (6) pour c_1 et c_2 , on trouve

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{3}{2}. \quad (7)$$

Enfin, en reportant ces valeurs dans l'équation (3), on obtient

$$y = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t}, \quad (8)$$

qui est la solution à l'équation différentielle (2) satisfaisant aux conditions initiales (4).

Quelles conclusions peut-on tirer de l'exemple précédent pour nous aider à traiter l'équation plus générale (1),

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

dont les coefficients a , b et c sont des constantes arbitraires (réelles)? Tout d'abord, dans l'exemple, les solutions étaient des fonctions exponentielles. De plus, après avoir trouvé deux solutions, on a pu utiliser une combinaison linéaire de celles-ci pour satisfaire aux conditions initiales données, ainsi qu'à l'équation différentielle elle-même.

Il s'avère qu'en exploitant ces deux idées, on peut résoudre l'équation (1) pour toutes valeurs de ses coefficients et aussi satisfaire à tout ensemble donné de conditions initiales pour y et y' . On commence par chercher des solutions exponentielles de la forme $y = e^{rt}$, où r est un paramètre à déterminer. Il s'ensuit alors que $y' = re^{rt}$ et $y'' = r^2 e^{rt}$. En substituant ces expressions à y , y' et y'' dans l'équation (1), on obtient

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$

ou, puisque $e^{rt} \neq 0$,

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (9)$$

On appelle l'équation (9) l'**équation caractéristique** de l'équation différentielle (1). Son interprétation est la suivante : si r est une racine de l'équation polynomiale (9), alors $y = e^{rt}$ est une solution à l'équation différentielle (1). Puisque l'équation (9) est une équation quadratique à coefficients réels, elle admet deux racines qui peuvent être réelles et distinctes, réelles de multiplicité deux ou complexes conjuguées. On considère ici le premier cas et les deux derniers dans les sections 3.4 et 3.5.

Soit r_1 et r_2 les racines réelles distinctes (c'est-à-dire que $r_1 \neq r_2$) de l'équation caractéristique (9). Alors, $y_1(t) = e^{r_1 t}$ et $y_2(t) = e^{r_2 t}$ sont deux solutions à l'équation (1). Comme dans l'exemple précédent, il s'ensuit que

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (10)$$

est aussi une solution à l'équation (1). Pour vérifier ce résultat, on peut dériver l'expression dans l'équation (10). Ainsi,

$$y' = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t} \quad (11)$$

et

$$y'' = c_1 r_1^2 e^{r_1 t} + c_2 r_2^2 e^{r_2 t}. \quad (12)$$

En substituant ces expressions à y , à y' et à y'' dans l'équation (1) et en réarrangeant les termes, on obtient

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1 t} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2 t}. \quad (13)$$

L'expression à l'intérieur de chacune des parenthèses du second membre de l'équation (13) doit être nulle, car r_1 et r_2 sont des racines de l'équation (9). Par conséquent, la fonction y dans l'équation (10) est effectivement une solution à l'équation (1) et la vérification en a été faite.

Maintenant, on recherche l'élément particulier de l'ensemble de solutions (10) qui satisfait aux conditions initiales

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0. \quad (14)$$

En posant $t = t_0$ et $y = y_0$ dans l'équation (10), on obtient

$$c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = y_0. \quad (15)$$

De la même façon, en posant $t = t_0$ et $y' = y'_0$ dans l'équation (11), on obtient

$$c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} = y'_0. \quad (16)$$

En résolvant les équations (15) et (16) pour déterminer c_1 et c_2 , on trouve

$$c_1 = \frac{y'_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, \quad c_2 = \frac{y_0 r_1 - y'_0}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0}. \quad (17)$$

Par conséquent, peu importe les conditions initiales, c'est-à-dire les valeurs de t_0 , de y_0 et de y'_0 dans l'équation (14), on peut toujours déterminer c_1 et c_2 de façon à satisfaire aux conditions initiales. De plus, ces valeurs spécifiques de c_1 et de c_2 sont uniques pour chaque ensemble de conditions initiales. Avec les valeurs de c_1 et de c_2 données par l'équation (17), l'expression (10) est la solution au problème de valeur initiale

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0. \quad (18)$$

On peut montrer, en se basant sur le théorème fondamental énoncé dans la section suivante, que toutes les solutions à l'équation (1) sont comprises dans l'expression (10), du moins dans le cas où les racines de l'équation (9) sont réelles et distinctes. L'équation (10) est appelée la solution générale à l'équation (1). Le fait que toute condition initiale peut être satisfaite par un choix judicieux de constantes dans l'équation (10) rend plus plausible l'idée que cette expression inclut toutes les solutions à l'équation (1).

Exemple 2

Trouvez la solution générale à

$$y'' + 5y' + 6y = 0. \quad (19)$$

Si on pose $y = e^{rt}$, r doit être une racine de l'équation caractéristique

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0. \quad (20)$$

Ainsi, les valeurs possibles pour r sont $r_1 = -2$ et $r_2 = -3$. La solution générale à l'équation (20) est

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}. \quad (21)$$

Exemple 3

Trouvez la solution au problème de valeur initiale

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 3. \quad (22)$$

On a trouvé la solution générale à l'équation différentielle dans l'exemple 2. Cette solution est donnée par l'équation (21). Pour satisfaire à la première condition initiale, on pose $t = 0$ et $y = 2$ dans l'équation (21). Par conséquent, c_1 et c_2 doivent respecter

$$c_1 + c_2 = 2. \quad (23)$$

► Pour utiliser la deuxième condition initiale, on dérive l'équation (21). On obtient $y' = -2c_1e^{-2t} - 3c_2e^{-3t}$. En posant ensuite $t = 0$ et $y' = 3$, on a

$$-2c_1 - 3c_2 = 3. \quad (24)$$

En résolvant les équations (23) et (24), on trouve $c_1 = 9$ et $c_2 = -7$. En reportant ces valeurs dans l'expression (21), on obtient la solution

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t} \quad (25)$$

au problème de valeur initiale (22). La figure 3.2.1 illustre le graphe de la solution.

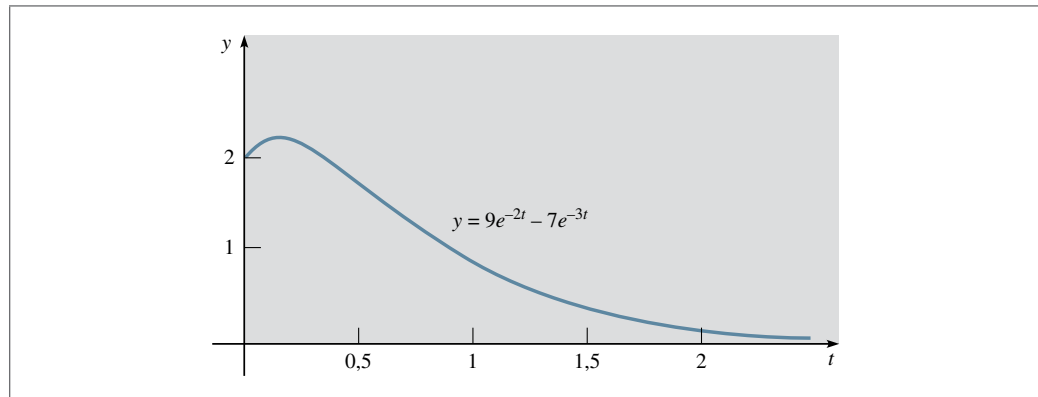


Figure 3.2.1 Solution à $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

Exemple 4

Trouvez la solution au problème de valeur initiale

$$4y'' - 8y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{2}. \quad (26)$$

Si $y = e^{rt}$, alors l'équation caractéristique est

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$

et ses racines sont $r = 3/2$ et $r = 1/2$. Par conséquent, la solution générale à l'équation différentielle est

$$y = c_1e^{3t/2} + c_2e^{t/2}. \quad (27)$$

En tenant compte des conditions initiales, on obtient les équations suivantes, qui doivent être satisfaites par c_1 et c_2 :

$$c_1 + c_2 = 2, \quad \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = \frac{1}{2}.$$

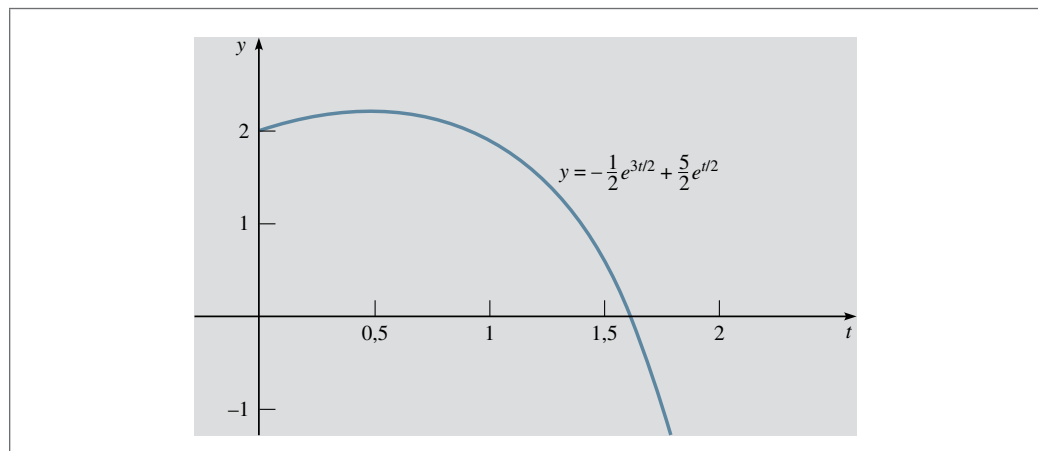


Figure 3.2.2 Solution à $4y'' - 8y' + 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0,5$.

► La solution à ces équations est $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{5}{2}$, et la solution au problème de valeur initiale (26) est

$$y = -\frac{1}{2}e^{3t/2} + \frac{5}{2}e^{t/2}. \quad (28)$$

La figure 3.2.2 illustre le graphe de la solution.

Exemple 5

La solution (25) au problème de valeur initiale (22) est croissante *a priori* (car sa dérivée est alors positive), mais elle finit par tendre vers zéro (car les deux termes comportent des fonctions exponentielles négatives). Par conséquent, la solution doit admettre un maximum, ce qui est corroboré par le graphe de la figure 3.2.1. Déterminez les coordonnées de ce maximum.

On peut se faire une idée des coordonnées du maximum à partir du graphe, mais on cherche précisément le point où la solution admet une dérivée nulle. En dérivant la solution (25) $y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$ par rapport à t , on obtient

$$y' = -18e^{-2t} + 21e^{-3t}. \quad (29)$$

En posant $y' = 0$ et en multipliant par e^{3t} , on trouve que la valeur critique de t_c doit satisfaire à $e^t = 7/6$. Ainsi,

$$t_c = \ln(7/6) \approx 0,154\,15. \quad (30)$$

La valeur maximale correspondante yM est

$$yM = 9e^{-2t_c} - 7e^{-3t_c} = \frac{108}{49} \approx 2,204\,08. \quad (31)$$

Dans cet exemple, la pente de la tangente est initialement égale à 3, mais la solution à l'équation différentielle donnée se comporte d'une manière semblable pour toute autre pente initiale positive. Dans le problème 26, on demande de déterminer comment les conditions initiales influencent les coordonnées du maximum.

En revenant à l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, où les coefficients sont arbitraires, on doit se rappeler que si $r_1 \neq r_2$, alors la solution générale (10) est la somme des deux fonctions exponentielles. Par conséquent, la solution admet un comportement relativement simple : lorsque t augmente, l'amplitude de la solution tend vers zéro si les deux exposants sont négatifs ou elle croît rapidement si au moins un exposant est positif. Les solutions aux exemples 3 et 4 illustrent ces deux cas (*voir respectivement les figures 3.2.1 et 3.2.2*). Il existe un troisième cas : la solution est asymptotiquement constante lorsqu'un exposant est nul et que l'autre est négatif.

Aux sections 3.4 et 3.5, respectivement, nous reviendrons au problème de la résolution de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ quand les racines de l'équation caractéristique sont soit complexes conjuguées, soit réelles et égales. D'ici là, dans la section 3.3, on présente une discussion systématique de la structure mathématique des solutions de toutes les équations linéaires homogènes du deuxième ordre.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 8, trouvez la solution générale à l'équation différentielle.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$

2. $y'' + 3y' + 2y = 0$

3. $6y'' - y' - y = 0$

4. $2y'' - 3y' + y = 0$

5. $y'' + 5y' = 0$

6. $4y'' - 9y = 0$

7. $y'' - 9y' + 9y = 0$

8. $y'' - 2y' - 2y = 0$

- ■ Dans les problèmes 9 à 16, trouvez la solution au problème de valeur initiale. Tracez le graphe de la solution et décrivez son comportement lorsque t augmente.

9. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
10. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
11. $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$
12. $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$
13. $y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
14. $2y'' + y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
15. $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
16. $4y'' - y = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$
17. Trouvez une équation différentielle dont la solution générale est $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t}$.
18. Trouvez une équation différentielle dont la solution générale est $y = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-2t}$.

- Ⓢ 19. Trouvez la solution au problème de valeur initiale

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = \frac{5}{4}, \quad y'(0) = -\frac{3}{4}.$$

Tracez le graphe de la solution pour $0 \leq t \leq 2$ et déterminez sa valeur minimale.

20. Trouvez la solution au problème de valeur initiale

$$2y'' - 3y' + y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

Ensuite, déterminez sa valeur maximale et trouvez sa racine.

21. Résolvez le problème de valeur initiale $y'' - y' - 2y = 0, y(0) = \alpha, y'(0) = 2$. Ensuite, trouvez α de sorte que la solution tende vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$.
 22. Résolvez le problème de valeur initiale $4y'' - y = 0, y(0) = 2, y'(0) = \beta$. Ensuite, trouvez β de sorte que la solution tende vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$.
- Pour les problèmes 23 et 24, déterminez les valeurs de α , s'il en existe, telles que toutes les solutions tendent vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. Déterminez aussi les valeurs de α , s'il en existe, telles que toutes les solutions (non nulles) sont croissantes et non bornées lorsque $t \rightarrow \infty$.

23. $y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1)y = 0$
24. $y'' + (3 - \alpha)y' - 2(\alpha - 1)y = 0$

- Ⓢ 25. Considérez le problème de valeur initiale

$$2y'' + 3y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\beta,$$

où $\beta > 0$.

- a) Trouvez la solution au problème.
- b) Tracez le graphe de la solution dans le cas où $\beta = 1$. Trouvez les coordonnées (t_0, y_0) du minimum de la solution dans ce cas.
- c) Trouvez la plus petite valeur de β pour laquelle la solution n'admet aucun minimum.

- Ⓢ 26. Considérez le problème de valeur initiale (voir l'exemple 4)

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \beta,$$

où $\beta > 0$.

- a) Trouvez la solution au problème.
- b) Déterminez les coordonnées t_m et y_m du maximum de la solution en fonction de β .
- c) Déterminez la plus petite valeur de β telle que $y_m \geq 4$.
- d) Déterminez le comportement de t_m et de y_m lorsque $\beta \rightarrow \infty$.

- 27. Considérez l'équation $ay'' + by' + cy = d$, où a, b, c et d sont des constantes.
- a) Trouvez toutes les solutions d'équilibre, ou constantes, de cette équation différentielle.
 - b) Posez y_e pour dénoter une solution d'équilibre et posez $Y = y - y_e$. Par conséquent, Y est l'écart entre une solution y et une solution d'équilibre. Trouvez l'équation différentielle satisfaite par Y .
28. Considérez l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, où a, b et c sont des constantes et $a > 0$. Trouvez les conditions qu'il faut imposer à a, b et c pour que les racines de l'équation caractéristique soient :
- a) réelles, distinctes et négatives ;
 - b) réelles et de signe opposé ;
 - c) réelles, distinctes et positives.

3.3 La théorie des équations homogènes linéaires du deuxième ordre

Dans la section précédente, nous avons vu comment résoudre les équations différentielles de la forme

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

où a, b et c sont des constantes. Nous allons maintenant analyser ces résultats afin de saisir la structure des solutions à toutes les équations homogènes linéaires du deuxième ordre. Cette démarche nous aidera notamment à trouver des solutions à d'autres problèmes abordés plus loin.

Dans la théorie des équations différentielles linéaires, il est utile d'introduire la notion d'opérateur différentiel. Soit p et q deux fonctions continues dans un intervalle ouvert I , par exemple $\alpha < t < \beta$, incluant les cas où $\alpha = -\infty$ ou $\beta = \infty$ ou les deux. Pour toute fonction ϕ au moins deux fois différentiable dans l'intervalle I , on définit l'opérateur différentiel L selon

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi. \quad (1)$$

Il faut noter que $L[\phi]$ est une fonction dans I . La valeur de $L[\phi]$ en un point t est

$$L[\phi](t) = \phi''(t) + p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t).$$

Par exemple, si $p(t) = t^2$, $q(t) = 1 + t$ et $\phi(t) = \sin 3t$, alors

$$\begin{aligned} L[\phi](t) &= (\sin 3t)'' + t^2(\sin 3t)' + (1+t)\sin 3t \\ &= -9\sin 3t + 3t^2 \cos 3t + (1+t)\sin 3t. \end{aligned}$$

L'opérateur L est souvent écrit sous la forme $L = D^2 + pD + q$, où D est l'opérateur de dérivation.

Dans cette section, nous allons étudier l'équation homogène linéaire du deuxième ordre $L[\phi](t) = 0$. Puisqu'on note souvent $\phi(t)$ par y , cette équation sera généralement écrite sous la forme

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (2)$$

Avec l'équation (2), on dispose des conditions initiales

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad (3)$$

où t_0 est un point dans I , et y_0 et y'_0 sont deux valeurs spécifiques. On cherche à savoir si le problème de valeur initiale (2), (3) admet toujours une solution et s'il peut même en admettre plus d'une. On s'interroge aussi sur la structure de ces solutions, qui pourrait servir à trouver des solutions à d'autres problèmes particuliers. Les résultats de la présente section permettent de répondre à ces questions.

Le théorème 3.3.1 est le résultat fondamental concernant les problèmes de valeur initiale pour les équations linéaires du deuxième ordre. Il est similaire au théorème 2.4.1 pour les équations linéaires du premier ordre. Le résultat s'appliquant aussi aux équations non homogènes, on l'énonce comme suit :

Théorème 3.3.1

Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad (4)$$

où les fonctions p , q et g sont continues dans l'intervalle ouvert I . Alors, il existe une et une seule solution $y = \phi(t)$ au problème, et celle-ci est définie pour tout t dans l'intervalle I .

Ce théorème stipule trois choses :

1. Le problème de valeur initiale admet une solution ; en d'autres mots, il existe une solution.
2. Le problème de valeur initiale admet seulement une solution ; donc, la solution est unique.
3. La solution ϕ est bien définie dans tout l'intervalle I où les coefficients sont continus, et elle est différentiable au moins deux fois dans cet intervalle.

Dans certains cas, ces assertions sont faciles à vérifier. Par exemple, on a vu à la section 3.1 que le problème de valeur initiale

$$y'' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1 \quad (5)$$

admet comme solution

$$y = \frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t}. \quad (6)$$

Le fait d'avoir trouvé une solution démontre qu'il en existe une à ce problème de valeur initiale. De plus, la solution (6) est au moins deux fois différentiable dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, où les coefficients dans l'équation différentielle sont continus. Toutefois, il est difficile de prouver que le problème de valeur initiale (5) n'admet aucune autre solution que celle qui est donnée par l'équation (6). Le théorème 3.3.1 énonce que cette solution est en fait la seule solution au problème de valeur initiale (5).

Pour la plupart des problèmes de la forme (4), il n'est hélas pas possible de déterminer explicitement la solution. Il s'agit d'une différence importante entre les équations du premier ordre et celles du deuxième ordre. Par conséquent, toutes les parties du théorème doivent être prouvées à l'aide de méthodes générales qui n'exigent pas la présence d'une telle expression. La preuve du théorème 3.3.1 est ardue et ne sera pas abordée ici². Cependant, nous admettrons les résultats du théorème 3.3.1 et nous y ferons référence au besoin.

Exemple 1

Trouvez l'intervalle d'amplitude maximale dans lequel la solution au problème de valeur initiale

$$(t^2 - 3t)y'' + ty' - (t + 3)y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1$$

existe assurément.

Quand cette équation différentielle est réécrite sous la forme de l'équation (4), on a $p(t) = 1/(t - 3)$, $q(t) = -(t + 3)/(t - 3)$ et $g(t) = 0$. Les points de discontinuité des coefficients sont donc $t = 0$ et $t = 3$. Par conséquent, le plus grand intervalle ouvert contenant le point initial $t = 1$ et dans lequel tous les coefficients sont continus est $0 < t < 3$. Ainsi, il s'agit de l'intervalle d'amplitude maximale dans lequel le théorème 3.3.1 assure l'existence d'une solution.

2. On peut trouver une preuve du théorème 3.3.1 à la section 8 du chapitre 6 du manuel de Coddington apparaissant dans les références à la fin de ce chapitre.

Exemple 2

Trouvez la solution unique au problème de valeur initiale

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

où p et q sont continues dans un intervalle ouvert I contenant t_0 .

La fonction $y = \phi(t) = 0$ pour tout t dans I satisfait à l'équation différentielle et aux conditions initiales. En vertu de la conclusion 2 du théorème 3.3.1, il s'agit de la seule solution au problème.

On suppose maintenant que y_1 et y_2 sont deux solutions à l'équation (2). En d'autres mots,

$$L[y_1] = y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0, \quad (7)$$

et il en va de même pour y_2 . Comme dans les exemples de la section 3.2, on peut obtenir d'autres solutions à partir de combinaisons linéaires de y_1 et de y_2 , d'où le théorème qui suit.

Théorème 3.3.2 Le principe de superposition

Si y_1 et y_2 sont deux solutions à l'équation différentielle (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

alors, la combinaison linéaire $c_1 y_1 + c_2 y_2$ en est également une solution, quelles que soient les constantes c_1 et c_2 .

Un cas particulier du théorème 3.3.2 survient quand c_1 ou c_2 est nulle. On conclut alors que tout multiple d'une solution à l'équation (2) est aussi une solution.

Pour prouver le théorème 3.3.2, il suffit de substituer

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad (8)$$

à y dans l'équation (2). On obtient

$$\begin{aligned} L[c_1 y_1 + c_2 y_2] &= [c_1 y_1 + c_2 y_2]'' + p[c_1 y_1 + c_2 y_2]' + q[c_1 y_1 + c_2 y_2] \\ &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + c_1 p y_1' + c_2 p y_2' + c_1 q y_1 + c_2 q y_2 \\ &= c_1 [y_1'' + p y_1' + q y_1] + c_2 [y_2'' + p y_2' + q y_2] \\ &= c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2]. \end{aligned}$$

Comme $L[y_1] = 0$ et $L[y_2] = 0$, on a $L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = 0$. Par conséquent, sans égard aux valeurs de c_1 et de c_2 , y , telle qu'elle est donnée par l'équation (8), satisfait à l'équation différentielle (2) et la preuve du théorème 3.3.2 est complète.

Le théorème 3.3.2 énonce qu'à partir de deux solutions à l'équation (2), on peut construire un ensemble de solutions à deux degrés de liberté au moyen de l'équation (8).

La question suivante consiste à déterminer si toutes les solutions à l'équation (2) sont comprises dans l'équation (8) ou encore s'il en existe d'autres d'une forme différente. On tente de répondre à cette question en examinant d'abord comment on peut choisir les constantes c_1 et c_2 dans l'équation (8) pour qu'elles satisfassent aux conditions initiales (3). Les conditions initiales exigent que c_1 et c_2 respectent

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= y_0, \\ c_1 y_1'(t_0) + c_2 y_2'(t_0) &= y_0'. \end{aligned} \quad (9)$$

En résolvant les équations (9) pour c_1 et c_2 , on trouve

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(t_0) - y_0' y_2(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}, \quad c_2 = \frac{-y_0 y_1'(t_0) + y_0' y_1(t_0)}{y_1(t_0) y_2'(t_0) - y_1'(t_0) y_2(t_0)}, \quad (10)$$

ou, en termes de déterminants,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y'_0 & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y'_1(t_0) & y'_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}. \quad (11)$$

Avec ces valeurs de c_1 et de c_2 , l'expression (8) satisfait aux conditions initiales (3) ainsi qu'à l'équation différentielle (2).

Pour que les expressions de c_1 et de c_2 dans les équations (10) ou (11) soient admissibles, les dénominateurs doivent être non nuls. Ce dénominateur est le déterminant

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y'_2(t_0) - y'_1(t_0)y_2(t_0). \quad (12)$$

Le déterminant W s'appelle le **déterminant wronskien**³ ou simplement le **wronskien** des solutions y_1 et y_2 . Parfois, on utilise la notation $W(y_1, y_2)(t_0)$ pour représenter l'expression du second membre de l'équation (12). On souligne ainsi que le wronskien dépend des fonctions y_1 et y_2 et qu'il est évalué en t_0 . En vertu de ce qui précède, on obtient le résultat ci-après.

Théorème 3.3.3

Soit y_1 et y_2 deux solutions à l'équation (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

les conditions initiales (3) imposées,

$$y(t_0) = y_0 \text{ et } y'(t_0) = y'_0.$$

Il est alors toujours possible de choisir les constantes c_1 et c_2 de façon que

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

et satisfasse à l'équation différentielle (2) et aux conditions initiales (3) si et seulement si le wronskien

$$W = y_1 y'_2 - y'_1 y_2$$

est non nul à t_0 .

Exemple 3

Dans l'exemple 2 de la section 3.2, on a vu que $y_1(t) = e^{-2t}$ et $y_2(t) = e^{-3t}$ sont des solutions à l'équation différentielle

$$y'' + 5y' + 6y = 0.$$

Trouvez le wronskien de y_1 et de y_2 .

Le wronskien de ces deux fonctions est

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t}.$$

Comme W est non nul pour tout t , on peut utiliser les fonctions y_1 et y_2 pour construire des solutions à l'équation différentielle donnée avec ses conditions initiales, quel que soit t . Un tel problème a été résolu dans l'exemple 3 de la section 3.2.

3. Le wronskien est dû à Joseph Maria Hoëné-Wronski (1776-1853), né en Pologne, mais qui a passé la plus grande partie de sa vie en France. Wronski était un homme doué mais tourmenté. Sa vie a été marquée par de fréquentes et vives disputes avec ses collègues et les institutions auxquelles il était rattaché.

Le théorème suivant justifie l'expression « solution générale » introduite dans la section 3.2 pour la combinaison linéaire $c_1y_1 + c_2y_2$.

Théorème 3.3.4

Si y_1 et y_2 sont deux solutions à l'équation différentielle (2)

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

et s'il existe un point t_0 où le wronskien de y_1 et de y_2 est non nul, alors l'ensemble de solutions

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

où c_1 et c_2 sont arbitraires, comprend toutes les solutions à l'équation (2).

Soit ϕ une solution à l'équation (2). Pour prouver le théorème, on doit montrer que ϕ est incluse dans une combinaison linéaire $c_1y_1 + c_2y_2$. Soit t_0 un point où le wronskien de y_1 et de y_2 est non nul. On évalue alors ϕ et ϕ' en t_0 et on désigne ces valeurs par y_0 et y'_0 . On a donc

$$y_0 = \phi(t_0), \quad y'_0 = \phi'(t_0).$$

Ensuite, on considère le problème de valeur initiale

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0. \quad (13)$$

La fonction ϕ est assurément une solution à ce problème de valeur initiale. De plus, comme $W(y_1, y_2)(t_0)$ est non nul, selon le théorème 3.3.3, on peut choisir c_1 et c_2 de sorte que $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ soit aussi une solution au problème (13). En fait, c_1 et c_2 sont obtenues à partir des équations (10) ou (11). La conclusion 2 du théorème 3.3.1 assure que ces deux solutions au problème sont les mêmes. Ainsi, avec un choix approprié de c_1 et de c_2 ,

$$\phi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

et, par conséquent, ϕ est incluse dans l'ensemble de fonctions du type $c_1y_1 + c_2y_2$. Finalement, puisque ϕ est une solution arbitraire à l'équation (2), toute solution à cette équation est incluse dans cet ensemble. Cela complète la preuve du théorème 3.3.4.

Supposons maintenant qu'il n'existe aucun point t_0 où le wronskien est non nul. Par conséquent, $W(y_1, y_2)(t_0) = 0$, peu importe le point t_0 choisi. Alors, selon le théorème 3.3.3, il existe des valeurs de y_0 et de y'_0 telles que le système (8) n'admet aucune solution pour c_1 et c_2 . Choisissez une paire de telles valeurs et choisissez la solution $\phi(t)$ à l'équation (2) qui satisfait à la condition initiale (3). Remarquez que le théorème 3.3.1 assure qu'une telle solution existe. Cependant, cette solution n'est pas incluse dans l'ensemble $y = c_1y_1 + c_2y_2$. Par conséquent, cette combinaison linéaire n'inclut pas toutes les solutions à l'équation (2) si $W(y_1, y_2) = 0$. Cela complète la démonstration du théorème 3.3.4.

Le théorème 3.3.4 énonce que tant que le wronskien de y_1 et de y_2 diffère de zéro, la combinaison linéaire $c_1y_1 + c_2y_2$ contient toutes les solutions à l'équation (2). Il est donc naturel (on l'a déjà fait dans la section précédente) d'appeler l'expression

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

où les constantes sont arbitraires, la **solution générale** à l'équation (2). Les solutions y_1 et y_2 , dont le wronskien est non nul, constituent ce qu'on appelle un **ensemble fondamental de solutions** à l'équation (2).

On peut énoncer le résultat du théorème 3.3.4 différemment : pour trouver la solution générale et, par conséquent, toutes les solutions à une équation de la forme (2), il suffit de trouver deux solutions à l'équation dont le wronskien est non nul. On l'a fait dans divers exemples de la section 3.2, même si on n'en a jamais calculé les wronskiens. Il serait utile de revoir ces exemples et de le faire. On pourra ainsi vérifier que toutes les solutions appelées solutions

générales dans la section 3.2 satisfont à la condition voulant que le wronskien soit non nul. Dans l'exemple 4, on a aussi la possibilité de revoir les notions abordées dans la section 3.2 et dans plusieurs autres problèmes du même type.

Exemple 4

Soit $y_1(t) = e^{r_1 t}$ et $y_2(t) = e^{r_2 t}$ deux solutions à une équation de la forme (2). Montrez qu'elles forment un ensemble fondamental de solutions lorsque $r_1 \neq r_2$.

On trouve le wronskien de y_1 et de y_2

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) \exp[(r_1 + r_2)t].$$

Comme une fonction exponentielle n'est jamais nulle et que $r_2 - r_1 \neq 0$ par hypothèse, W est non nul, quel que soit t . Par conséquent, y_1 et y_2 constituent un ensemble fondamental de solutions.

Exemple 5

Montrez que $y_1(t) = t^{1/2}$ et $y_2(t) = t^{-1}$ constituent un ensemble fondamental de solutions à

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0, \quad t > 0. \quad (14)$$

Dans la section 7.4, on décrira comment résoudre l'équation (14); il est aussi possible de se référer au problème 34 de la section 3.4. On peut vérifier ici par substitution directe que y_1 et y_2 satisfont à l'équation différentielle. Comme $y_1'(t) = \frac{1}{2}t^{-1/2}$ et que $y_1'' = -\frac{1}{4}t^{-3/2}$, on a

$$2t^2 \left(-\frac{1}{4}t^{-3/2} \right) + 3t \left(\frac{1}{2}t^{-1/2} \right) - t^{1/2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1 \right) t^{1/2} = 0.$$

De même, $y_2'(t) = -t^{-2}$ et $y_2''(t) = 2t^{-3}$, d'où

$$2t^2(2t^{-3}) + 3t(-t^{-2}) - t^{-1} = (4 - 3 - 1)t^{-1} = 0.$$

Ensuite, on calcule le wronskien W de y_1 et de y_2 :

$$W = \begin{vmatrix} t^{1/2} & t^{-1} \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & -t^{-2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}t^{-3/2}. \quad (15)$$

Puisque $W \neq 0$ quel que soit $t > 0$, on conclut que y_1 et y_2 constituent un ensemble fondamental de solutions.

Dans plusieurs cas, on a pu trouver un ensemble fondamental de solutions et, par conséquent, la solution générale à une équation différentielle donnée. Cependant, cette tâche est souvent difficile, et il faut établir si une équation différentielle de la forme (2) admet ou non un ensemble fondamental de solutions. Le théorème suivant donne la réponse à cette question.

Théorème 3.3.5

Considérez l'équation différentielle (2)

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

où les coefficients p et q sont continus dans un intervalle ouvert I . Soit t_0 un point de I . Soit y_1 la solution à l'équation (2) qui satisfait aux conditions initiales

$$y(t_0) = 1, \quad y'(t_0) = 0.$$

De plus, soit y_2 la solution à l'équation (2) qui satisfait aux conditions initiales

$$y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 1.$$

Alors, y_1 et y_2 forment un ensemble fondamental de solutions à l'équation (2).

L'existence des fonctions y_1 et y_2 résulte de la conclusion 1 du théorème 3.3.1. Pour montrer qu'elles forment un ensemble fondamental de solutions, il suffit de calculer leur wronskien en t_0 :

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Comme le wronskien est non nul en t_0 , les fonctions y_1 et y_2 forment un ensemble fondamental de solutions, ce qui complète la preuve du théorème 3.3.5.

La partie difficile de cette preuve, qui consiste à démontrer l'existence de deux solutions, est résolue grâce au théorème 3.3.1. Toutefois, le théorème 3.3.5 n'indique pas comment résoudre les problèmes de valeur initiale, c'est-à-dire comment trouver les fonctions y_1 et y_2 . Il est quand même rassurant de savoir qu'il existe toujours un ensemble fondamental de solutions.

Exemple 6

Trouvez l'ensemble fondamental de solutions pour l'équation différentielle

$$y'' - y = 0, \quad (16)$$

avec $t_0 = 0$.

Dans la section 3.2, on a noté que deux solutions à l'équation (16) sont $y_1(t) = e^t$ et $y_2(t) = e^{-t}$. Le wronskien de ces solutions est $W(y_1, y_2)(t) = -2 \neq 0$, et celles-ci forment donc un ensemble fondamental de solutions. Cependant, il ne s'agit pas des solutions spécifiées dans le théorème 3.3.5, car elles ne satisfont pas aux conditions initiales mentionnées dans le théorème au point $t = 0$.

Pour trouver les solutions précisées par le théorème, on doit trouver les solutions satisfaisant aux conditions initiales. On note $y_3(t)$ la solution à l'équation (16) qui satisfait aux conditions

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (17)$$

La solution générale à l'équation (16) est

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad (18)$$

et les conditions initiales (17) sont satisfaites lorsque $c_1 = 1/2$ et $c_2 = 1/2$. Ainsi,

$$y_3(t) = \frac{1}{2} e^t + \frac{1}{2} e^{-t} = \cosh t.$$

De même, si $y_4(t)$ satisfait aux conditions initiales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad (19)$$

alors

$$y_4(t) = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} = \sinh t.$$

Puisque le wronskien de y_3 et de y_4 est

$$W(y_3, y_4)(t) = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1,$$

ces fonctions forment aussi un ensemble fondamental de solutions conformément au théorème 3.3.5. On peut donc écrire la solution générale à l'équation (16) ainsi :

$$y = k_1 \cosh t + k_2 \sinh t \quad (20)$$

ou sous la forme (18). On a utilisé k_1 et k_2 comme constantes arbitraires dans l'équation (20), car elles diffèrent des constantes c_1 et c_2 dans l'équation (18). Cet exemple montre qu'une équation différentielle peut admettre plus d'un ensemble fondamental de solutions. En fait, elle en admet une infinité. Il convient de choisir l'ensemble approprié.

Dans la prochaine section, on verra des équations qui ont des solutions à valeurs complexes. Le théorème qui suit est essentiel pour traiter de telles équations et leurs solutions.

Théorème 3.3.6

Considérez de nouveau l'équation (2),

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

où p et q sont des fonctions continues à valeurs réelles. Si $y = u(t) + iv(t)$ est une solution à valeurs complexes à l'équation (2), sa partie réelle u et sa partie imaginaire v sont aussi des solutions à cette équation.

Pour prouver ce théorème, on substitue $u(t) + iv(t)$ à $L[y]$ et on obtient

$$L[y] = u''(t) + iv''(t) + p(t)[u'(t) + iv'(t)] + q(t)[u(t) + iv(t)]. \quad (21)$$

Ensuite, en réarrangeant l'équation (21) selon ses parties réelles et imaginaires (et c'est à ce moment qu'on doit savoir que $p(t)$ et $q(t)$ sont à valeurs réelles), on trouve

$$\begin{aligned} L[y] &= u''(t) + p(t)u'(t) + q(t)u(t) + i[v''(t) + p(t)v'(t) + q(t)v(t)] \\ &= L[u](t) + iL[v](t). \end{aligned}$$

Rappelez-vous qu'un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont toutes les deux nulles. On sait que $L[y] = 0$ parce que y est une solution à l'équation (2). Par conséquent, $L[u](t) = 0$ et $L[v](t) = 0$ également ; donc, u et v sont aussi des solutions à l'équation (2), ce qui prouve le théorème. Nous verrons des exemples de l'utilisation du théorème 3.3.6 à la section 3.4.

Au fait, la solution complexe conjuguée $\bar{y}$ d'une solution y est aussi une solution. Cette observation découle du théorème 3.3.2, puisque $\bar{y} = u(t) - iv(t)$ est une combinaison linéaire de deux solutions.

Examinons maintenant plus en détail les propriétés du wronskien de deux solutions à une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre. Le théorème ci-dessous, étonnamment, permet d'obtenir une formule explicite simple pour le wronskien de deux solutions quelconques à une telle équation, même si les solutions elles-mêmes sont inconnues.

Théorème 3.3.7 (Le théorème d'Abel⁴)

Si y_1 et y_2 sont deux solutions à l'équation différentielle

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad (22)$$

où les fonctions p et q sont continues dans l'intervalle ouvert I , alors le wronskien $W(y_1, y_2)(t)$ est

$$W(y_1, y_2)(t) = c \exp \left[- \int p(t) dt \right], \quad (23)$$

où c est une constante qui peut dépendre de y_1 et de y_2 , mais non de t . De plus, $W(y_1, y_2)(t)$ est soit nul, quel que soit t dans I (si $c = 0$), soit non nul, quel que soit t dans I .

Pour prouver le théorème d'Abel, on note d'abord que y_1 et y_2 satisfont à

$$\begin{aligned} y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1 &= 0, \\ y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

4. Le résultat du théorème 3.3.7 a été obtenu en 1827 par le mathématicien norvégien Niels Henrik Abel (1802-1829) et il est connu sous le nom de formule d'Abel. Niels Henrik Abel a aussi démontré qu'il n'existe aucune formule générale permettant de résoudre une équation polynomiale de degré 5 sur la base d'un nombre fini d'opérations algébriques simples sur ses coefficients. Il a ainsi résolu un problème demeuré sans solution depuis le xvi^e siècle. Il a réalisé ses plus grandes découvertes en analyse, particulièrement dans l'étude des fonctions elliptiques. Hélas, son travail n'a été apprécié qu'après sa mort. L'éminent mathématicien français Legendre a qualifié son travail de « monument plus durable que le bronze ».

Si on multiplie la première équation par $-y_2$ et la seconde par y_1 et si on additionne membre à membre les équations résultantes, on obtient

$$(y_1 y_2'' - y_1'' y_2) + p(t)(y_1 y_2' - y_1' y_2) = 0. \quad (25)$$

Ensuite, en posant $W(t) = W(y_1, y_2)(t)$, on observe que

$$W' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2. \quad (26)$$

Alors, on peut écrire l'équation (25) comme suit :

$$W' + p(t)W = 0. \quad (27)$$

On peut résoudre aisément l'équation (27), puisqu'elle est à la fois linéaire de premier ordre (voir la section 2.3) et à variables séparables (voir la section 2.1). Ainsi,

$$W(t) = c \exp \left[- \int p(t) dt \right], \quad (28)$$

où c est une constante. La valeur de c dépend des deux solutions obtenues pour l'équation (22). Puisqu'une fonction exponentielle n'est jamais nulle, $W(t)$ n'est nul que si $c = 0$ et, dans ce cas, $W(t)$ est nul, quel que soit t , ce qui complète la preuve du théorème 3.3.7.

Il faut noter que les wronskiens de différents ensembles fondamentaux de solutions à la même équation différentielle ne peuvent différer au plus que par une constante multiplicative et qu'on peut déterminer le wronskien d'un ensemble fondamental de solutions, à une constante multiplicative près, sans avoir résolu l'équation différentielle en question.

De plus, puisque selon les conditions du théorème 3.3.7 le wronskien W est soit toujours nul, soit jamais nul, on peut déterminer le cas qui se produit en évaluant W pour n'importe quelle valeur pratique de t .

Exemple 7

Dans l'exemple 5, on a vu que $y_1(t) = t^{1/2}$ et $y_2(t) = t^{-1}$ sont deux solutions à l'équation

$$2t^2 y'' + 3ty' - y = 0, \quad t > 0. \quad (29)$$

Vérifiez si l'équation (28) permet de trouver le wronskien de y_1 et de y_2 .

Selon l'exemple qu'on vient de traiter, on sait que $W(y_1, y_2)(t) = -(3/2)t^{-3/2}$. Pour utiliser l'équation (28), on doit écrire l'équation différentielle (29) de sorte que le coefficient de y'' soit égal à 1. On a alors

$$y'' + \frac{3}{2t} y' - \frac{1}{2t^2} y = 0.$$

Donc, $p(t) = 3/2t$. Ainsi,

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= c \exp \left[- \int \frac{3}{2t} dt \right] = c \exp \left(-\frac{3}{2} \ln t \right) \\ &= c t^{-3/2}. \end{aligned} \quad (30)$$

L'équation (30) donne le wronskien des deux solutions à l'équation (29). Étant donné les solutions particulières dans cet exemple, on doit choisir $c = -3/2$.

On peut résumer la discussion de cette section comme suit. Pour trouver la solution générale à l'équation différentielle

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad \alpha < t < \beta,$$

on doit d'abord trouver deux fonctions y_1 et y_2 qui satisfont à l'équation différentielle pour $\alpha < t < \beta$. Ensuite, on doit s'assurer qu'il existe un point dans l'intervalle où le wronskien W de y_1 et de y_2 est non nul. Dans ces circonstances, y_1 et y_2 forment un ensemble fondamental de solutions et la solution générale est

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. Si on dispose de conditions initiales en un point de l'intervalle $\alpha < t < \beta$ où $W \neq 0$, alors on peut identifier c_1 et c_2 satisfaisant à ces conditions.

Problèmes

- Pour les problèmes 1 à 6, trouvez le wronskien des fonctions.

1. e^{2t} , $e^{-3t/2}$

2. $\cos t$, $\sin t$

3. e^{-2t} , te^{-2t}

4. x , xe^x

5. $e^t \sin t$, $e^t \cos t$

6. $\cos^2 \theta$, $1 + \cos 2\theta$

- Pour les problèmes 7 à 12, déterminez l'intervalle d'amplitude maximale dans lequel le problème de valeur initiale admet assurément une solution unique au moins deux fois différentiable. Ne tentez pas de trouver la solution.

7. $ty'' + 3y = t$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$

8. $(t-1)y'' - 3ty' + 4y = \sin t$, $y(-2) = 2$, $y'(-2) = 1$

9. $t(t-4)y'' + 3ty' + 4y = 2$, $y(3) = 0$, $y'(3) = -1$

10. $y'' + (\cos t)y' + 3(\ln |t|)y = 0$, $y(2) = 3$, $y'(2) = 1$

11. $(x-3)y'' + xy' + (\ln |x|)y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$

12. $(x-2)y'' + y' + (x-2)(\tan x)y = 0$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 2$

13. Vérifiez si $y_1(t) = t^2$ et $y_2(t) = t^{-1}$ sont deux solutions à l'équation différentielle $t^2y'' - 2y = 0$ pour $t > 0$. Ensuite, montrez que $c_1t^2 + c_2t^{-1}$ est aussi une solution à cette équation, quelles que soient c_1 et c_2 .

14. Vérifiez que $y_1(t) = 1$ et $y_2(t) = t^{1/2}$ sont des solutions à l'équation différentielle $yy'' + (y')^2 = 0$ pour tout $t > 0$. Ensuite, montrez que $c_1 + c_2t^{1/2}$ n'est pas, en général, une solution à cette équation. Expliquez pourquoi ce résultat ne contredit pas le théorème 3.3.2.

15. Montrez que si $y = \phi(t)$ est une solution à l'équation différentielle $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$, où $g(t)$ est non identiquement nulle, alors $y = c\phi(t)$, où c est une constante différente de 1, n'est pas une solution. Expliquez pourquoi ce résultat ne contredit pas la remarque qui suit le théorème 3.3.2.

16. Est-ce que $y = \sin(t^2)$ peut être une solution dans un intervalle contenant $t = 0$ d'une équation $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ avec des coefficients continus ? Justifiez votre réponse.

17. Si le wronskien W de f et de g est de $3e^{4t}$, et si $f(t) = e^{2t}$, trouvez $g(t)$.

18. Si le wronskien W de f et de g est de t^2e^t et si $f(t) = t$, trouvez $g(t)$.

19. Si $W(f, g)$ est le wronskien de f et de g , et si $u = 2f - g$, $v = f + 2g$, trouvez le wronskien $W(u, v)$ de u et de v en fonction de $W(f, g)$.

20. Si le wronskien de f et de g est $t \cos t - \sin t$, et si $u = f + 3g$, $v = f - g$, trouvez le wronskien de u et de v .

21. Supposez que y_1 et y_2 constituent un ensemble fondamental de solutions à $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ et posez $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$ et $y_4 = b_1y_1 + b_2y_2$, où a_1 , a_2 , b_1 et b_2 sont des constantes quelconques. Montrez que

$$W(y_3, y_4) = (a_1b_2 - a_2b_1)W(y_1, y_2).$$

Les solutions y_3 et y_4 constituent-elles aussi un ensemble fondamental de solutions ? Pourquoi ?

- Pour les problèmes 22 et 23, trouvez l'ensemble fondamental de solutions conformément au théorème 3.3.5 pour l'équation différentielle.

22. $y'' + y' - 2y = 0$, $t_0 = 0$

23. $y'' + 4y' + 3y = 0$, $t_0 = 1$

- Pour les problèmes 24 à 27, vérifiez si les fonctions y_1 et y_2 sont des solutions à l'équation différentielle. Ces solutions constituent-elles un ensemble fondamental de solutions ?

24. $y'' + 4y = 0$; $y_1(t) = \cos 2t$, $y_2(t) = \sin 2t$

25. $y'' - 2y' + y = 0$; $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$

26. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$

27. $(1 - x \cot x)y'' - xy' + y = 0$, $0 < x < \pi$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \sin x$

- 28. Considérez l'équation $y'' - y' - 2y = 0$.
- Montrez que $y_1(t) = e^{-t}$ et $y_2(t) = e^{2t}$ constituent un ensemble fondamental de solutions.
 - Posez $y_3(t) = -2e^{2t}$, $y_4(t) = y_1(t) + 2y_2(t)$ et $y_5(t) = 2y_1(t) - 2y_3(t)$. Les solutions $y_3(t)$, $y_4(t)$ et $y_5(t)$ sont-elles aussi des solutions à l'équation différentielle donnée ?
 - Déterminez si chacune des paires de solutions suivantes constituent un ensemble fondamental de solutions : $[y_1(t), y_3(t)]$; $[y_2(t), y_3(t)]$; $[y_1(t), y_4(t)]$; $[y_4(t), y_5(t)]$.
- Pour les problèmes 29 à 32, trouvez le wronskien des deux solutions à l'équation différentielle sans tenter de la résoudre.
- $t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$
 - $(\cos t)y'' + (\sin t)y' - ty = 0$
 - $x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$, équation de Bessel
 - $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$, équation de Legendre
 - Montrez que si p est différentiable et si $p(t) > 0$, alors le wronskien $W(t)$ de deux solutions à $[p(t)y']' + q(t)y = 0$ est $W(t) = c/p(t)$, où c est une constante.
 - Si l'équation différentielle $ty'' + 2y' + te^t y = 0$ admet y_1 et y_2 comme ensemble fondamental de solutions et si $W(y_1, y_2)(1) = 2$, trouvez la valeur de $W(y_1, y_2)(5)$.
 - Si l'équation différentielle $t^2 y'' - 2y' + (3+t)y = 0$ admet y_1 et y_2 comme ensemble fondamental de solutions et si $W(y_1, y_2)(2) = 3$, trouvez la valeur de $W(y_1, y_2)(4)$.
 - Si le wronskien de deux solutions à $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ est constant, que peut-on dire des coefficients p et q ?
 - Si f , g et h sont trois fonctions différentiables, montrez que $W(fg, fh) = f^2 W(g, h)$.
- Dans les problèmes 38 à 40, supposez que les fonctions p et q sont continues et que les fonctions y_1 et y_2 sont deux solutions à l'équation différentielle $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ dans l'intervalle ouvert I .
- Prouvez que si y_1 et y_2 admettent une racine commune dans I , alors elles ne peuvent pas former un ensemble fondamental de solutions dans l'intervalle.
 - Prouvez que si y_1 et y_2 admettent chacune soit un maximum, soit un minimum en un même point dans I , alors elles ne peuvent pas former un ensemble fondamental de solutions dans l'intervalle.
 - Prouvez que si y_1 et y_2 admettent un point d'inflexion commun t_0 dans I , alors elles ne peuvent pas former un ensemble fondamental de solutions dans I à moins que p et q ne soient toutes les deux nulles en t_0 .
41. **Les équations exactes** L'équation $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ est dite exacte si elle peut être réécrite sous la forme $[P(x)y']' + [f(x)y]' = 0$, où $f(x)$ dépend des fonctions $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$. On peut intégrer immédiatement la dernière équation et on obtient une équation linéaire du premier ordre en y . Il est possible de résoudre cette équation comme dans la section 2.1. En égalisant les coefficients des équations précédentes, puis en éliminant $f(x)$, montrez qu'une condition nécessaire pour que l'équation soit exacte est que $P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0$. On peut aussi montrer qu'il s'agit d'une condition suffisante.
- Pour les problèmes 42 à 45, utilisez le résultat du problème 41 afin de déterminer si l'équation est exacte. Si c'est le cas, résolvez l'équation.
- $y'' + xy' + y = 0$
 - $y'' + 3x^2 y' + xy = 0$
 - $xy'' - (\cos x)y' + (\sin x)y = 0$, $x > 0$
 - $x^2 y'' + xy' - y = 0$, $x > 0$
46. **L'équation adjointe** Quand une équation homogène linéaire du deuxième ordre n'est pas exacte, il est parfois possible de la rendre exacte en la multipliant par un facteur intégrant approprié $\mu(x)$. Il faut alors que $\mu(x)$ soit tel que

$$\mu(x)P(x)y'' + \mu(x)Q(x)y' + \mu(x)R(x)y = 0$$

puisse être écrite sous la forme

$$[\mu(x)P(x)y']' + [f(x)y]' = 0.$$

►

En égalisant les coefficients dans ces deux équations et en éliminant $f(x)$, montrez que la fonction μ doit satisfaire à

$$P\mu'' + (2P' - Q)\mu' + (P'' - Q' + R)\mu = 0.$$

Cette équation est dite l'adjointe de l'équation originale et elle est importante dans la théorie avancée des équations différentielles. En général, la résolution de l'équation différentielle adjointe est aussi difficile que celle de l'équation originale. Il est donc occasionnellement possible de trouver un facteur intégrant pour une équation du deuxième ordre.

- Pour les problèmes 47 à 49, utilisez le résultat du problème 46 afin de trouver l'adjointe de l'équation différentielle.

47. $x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$, équation de Bessel

48. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, équation de Legendre

49. $y'' - xy = 0$, équation d'Airy

50. Pour l'équation linéaire du deuxième ordre $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, montrez que l'adjointe de l'équation adjointe est l'équation originale.

51. Une équation linéaire du deuxième ordre $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ est considérée comme auto-adjointe si son adjointe est la même que celle de l'équation originale. Montrez que $P'(x) = Q(x)$ est une condition nécessaire pour que l'équation soit autoadjointe. Déterminez si les équations des problèmes 33 à 35 sont autoadjointes.

3.4 Les racines complexes de l'équation caractéristique

Nous poursuivons notre étude de l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (1)$$

où a , b et c sont des nombres réels. Dans la section 3.2, nous avons vu que si $y = e^{rt}$ est une solution à l'équation, alors r doit être une racine de l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2)$$

Nous avons montré à la section 3.2 que si les racines r_1 et r_2 sont réelles et distinctes, c'est-à-dire si le discriminant $b^2 - 4ac$ est strictement positif, la solution générale à l'équation (1) est alors

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \quad (3)$$

On suppose maintenant que $b^2 - 4ac$ est négatif. Dans ce cas, les racines de l'équation (2) sont complexes conjuguées. On les note

$$r_1 = \lambda + i\mu, \quad r_2 = \lambda - i\mu, \quad (4)$$

où λ et μ sont deux nombres réels. La solution y est alors de la forme

$$y_1(t) = \exp[(\lambda + i\mu)t], \quad y_2(t) = \exp[(\lambda - i\mu)t]. \quad (5)$$

Pour comprendre la signification de cette expression, on doit pouvoir évaluer une fonction exponentielle où l'exposant est un nombre complexe. Par exemple, si $\lambda = -1$, $\mu = 2$ et $t = 3$, selon l'équation (5), on a

$$y_1(3) = e^{-3+6i}. \quad (6)$$

Que signifie l'expression «exponentielle d'un nombre complexe»? La réponse réside dans la relation fondamentale dite formule d'Euler.

La formule d'Euler L'interprétation des expressions de l'équation (5) nécessite la définition d'une fonction exponentielle dont l'exposant est complexe. Bien sûr, cette définition doit

être cohérente avec celle d'une fonction exponentielle où l'exposant est réel. Il existe plusieurs approches permettant de généraliser la fonction exponentielle. On utilise ici une méthode basée sur les développements en série de Taylor. Dans le problème 28, on demande de trouver le même résultat à l'aide d'une approche différente.

Il faut d'abord se rappeler que la série de Taylor pour e^t autour du point $t = 0$ est

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (7)$$

On suppose qu'on peut remplacer t par it dans l'équation (7). On obtient alors

$$\begin{aligned} e^{it} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!}, \end{aligned} \quad (8)$$

où on a séparé les parties réelles et imaginaires de la série en utilisant les résultats $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, et ainsi de suite. La première série dans l'équation (8) est la série de Taylor de la fonction $\cos t$ autour du point $t = 0$, et la seconde est celle de la fonction $\sin t$ autour du point $t = 0$. Par conséquent,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \quad (9)$$

Le résultat fondamental de l'équation (9) est appelé la formule d'Euler. On a obtenu l'équation (9) en supposant (sans justification) qu'on peut employer la série (7) pour des valeurs complexes de la variable indépendante de la même façon que pour des valeurs réelles. Ce raisonnement est utilisé dans le seul but de rendre plausible l'équation (9). On définit maintenant e^{it} en se basant sur l'équation (9). En d'autres mots, e^{it} équivaut dorénavant à l'expression du second membre de l'équation (9).

On peut réécrire la formule d'Euler différemment. En remplaçant t par $-t$ dans l'équation (9) et en sachant que $\cos(-t) = \cos t$ et que $\sin(-t) = -\sin t$, on a

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t. \quad (10)$$

De plus, en remplaçant t par μt dans l'équation (9), on obtient une version plus générale de la formule d'Euler, soit

$$e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \sin \mu t. \quad (11)$$

On cherche maintenant à étendre la définition d'une fonction exponentielle dans laquelle l'exposant est un nombre complexe arbitraire $(\lambda + i\mu)t$. Comme on souhaite que les propriétés habituelles d'une fonction exponentielle soient également valides avec des exposants complexes, on veut notamment que l'exposant $[(\lambda + i\mu)t]$ satisfasse à

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} e^{i\mu t}. \quad (12)$$

En remplaçant $e^{i\mu t}$ par $e^{(\lambda+i\mu)t}$ dans l'équation (11), on obtient

$$\begin{aligned} e^{(\lambda+i\mu)t} &= e^{\lambda t} (\cos \mu t + i \sin \mu t) \\ &= e^{\lambda t} \cos \mu t + i e^{\lambda t} \sin \mu t. \end{aligned} \quad (13)$$

On utilise maintenant l'équation (13) comme définition de l'exponentielle de $[(\lambda + i\mu)t]$. La valeur de la fonction exponentielle avec un exposant complexe est un nombre complexe dont les parties réelles et imaginaires sont données par les termes du second membre de l'équation (13). Il faut noter que les parties réelles et imaginaires de l'exponentielle de $[(\lambda + i\mu)t]$ sont toutes exprimées en termes de fonctions élémentaires à valeurs réelles. Par exemple, l'expression dans l'équation (6) prend la valeur

$$e^{-3+6i} = e^{-3} \cos 6 + i e^{-3} \sin 6 \cong 0,047\,804\,1 - 0,013\,911\,3i.$$

Avec les définitions (9) et (13), on peut aisément montrer que les règles habituelles des exposants sont valides pour une fonction exponentielle d'exposant complexe. De plus, il est facile de vérifier que la dérivée

$$\frac{d}{dt}(e^{rt}) = re^{rt} \quad (14)$$

reste valide même si r est complexe.

Exemple 1

Trouvez la solution générale à l'équation différentielle

$$y'' + y' + 9,25y = 0. \quad (15)$$

Trouvez aussi la solution qui satisfait aux conditions initiales

$$y(0) = 2 \text{ et } y'(0) = 8, \quad (16)$$

et tracez son graphique.

L'équation caractéristique de l'équation (15) est

$$r^2 + r + 9,25 = 0;$$

donc, ses racines sont

$$r_1 = -\frac{1}{2} + 3i, \text{ et } r_2 = -\frac{1}{2} - 3i.$$

Par conséquent, deux solutions à l'équation (15) sont

$$y_1(t) = \exp\left[\left(-\frac{1}{2} + 3i\right)t\right] = e^{-t/2}(\cos 3t + i \sin 3t) \quad (17)$$

et

$$y_2(t) = \exp\left[\left(-\frac{1}{2} - 3i\right)t\right] = e^{-t/2}(\cos 3t - i \sin 3t). \quad (18)$$

Vous pouvez vérifier que le wronskien $W(y_1, y_2)(t) = -6ie^{-t}$, qui est non nul ; donc, on peut exprimer la solution générale à l'équation (15) sous la forme d'une combinaison linéaire de $y_1(t)$ et de $y_2(t)$ avec des coefficients arbitraires.

Toutefois, le problème de valeur initiale (15), (16) ne comporte que des coefficients réels et il est souvent souhaitable d'exprimer la solution à un tel problème en termes de fonctions à valeurs réelles. Pour y parvenir, on peut appliquer le théorème 3.3.6, qui énonce que les parties réelles et imaginaires d'une solution à valeurs complexes à l'équation (15) sont aussi des solutions à l'équation (15). Par conséquent, à partir de $y_1(t)$ ou de $y_2(t)$, on obtient

$$u(t) = e^{-t/2} \cos 3t \quad \text{et} \quad v(t) = e^{-t/2} \sin 3t \quad (19)$$

comme solutions à valeurs réelles⁵ à l'équation (15). En calculant le wronskien de $u(t)$ et de $v(t)$, on trouve $W(u, v)(t) = 3e^{-t}$, qui est non nul ; par conséquent, $u(t)$ et $v(t)$ constituent un ensemble fondamental de solutions et on peut écrire la solution générale à l'équation (15) sous la forme

$$y = c_1 u(t) + c_2 v(t) = e^{-t/2}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t), \quad (20)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires.

Pour satisfaire aux conditions initiales (16), on substitue d'abord $t = 0$ et $y = 2$ dans l'équation (20), ce qui donne $c_1 = 2$. Ensuite, en dérivant l'équation (20), puis en posant $t = 0$ et $y' = 8$, on

5. Si vous n'êtes pas entièrement certain que $u(t)$ et $v(t)$ sont des solutions à l'équation différentielle donnée, vous devriez les substituer dans l'équation (15) pour confirmer qu'elles satisfont à l'équation.

obtient $-\frac{1}{2}c_1 + 3c_2 = 8$; donc, $c_2 = 3$. Par conséquent, la solution au problème de valeur initiale (15), (16) est

$$y = e^{-t/2}(2 \cos 3t + 3 \sin 3t). \quad (21)$$

Le graphique de cette solution est présenté dans la figure 3.4.1.

D'après le graphique, on peut constater que la solution à ce problème est une oscillation à amplitude décroissante. Les facteurs sinus et cosinus déterminent la nature oscillatoire de la solution et le facteur exponentiel négatif de chaque terme entraîne la diminution de l'amplitude des oscillations au fil du temps.

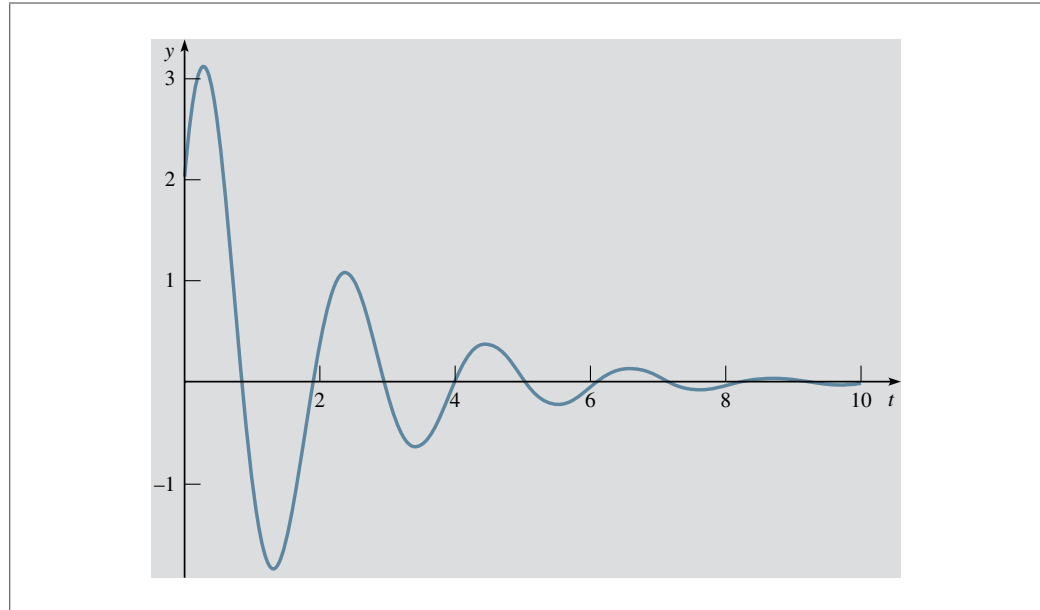


Figure 3.4.1 Solution au problème de valeur initiale (15), (16): $y'' + y' + 9,25y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.

Les racines complexes – le cas général Les fonctions $y_1(t)$ et $y_2(t)$, données par les équations (5) et dont la signification est exprimée par l'équation (13), sont des solutions à l'équation (1) quand les racines de l'équation caractéristique (2) sont des nombres complexes $\lambda \pm i\mu$. Cependant, les solutions y_1 et y_2 sont des fonctions à valeurs complexes, tandis qu'on préfère en général avoir des solutions à valeurs réelles, car l'équation différentielle elle-même comporte des coefficients réels. Comme dans l'exemple 1, on peut appliquer le théorème 3.3.6 pour trouver un ensemble fondamental de solutions à valeurs réelles en choisissant les parties réelles et imaginaires de $y_1(t)$ ou de $y_2(t)$. De cette façon, on obtient les solutions

$$u(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad v(t) = e^{\lambda t} \sin \mu t. \quad (22)$$

Par un calcul direct, on peut montrer que le wronskien de u et de v est

$$W(u, v)(t) = \mu e^{2\lambda t}. \quad (23)$$

Par conséquent, tant que $\mu \neq 0$, le wronskien W est non nul; donc, u et v constituent un ensemble fondamental de solutions. (Évidemment, si $\mu = 0$, les racines sont réelles et la présente discussion ne s'applique pas.) Il s'ensuit alors que si les racines de l'équation caractéristique sont des nombres complexes $\lambda \pm i\mu$, où $\mu \neq 0$, la solution générale à l'équation (1) est

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t, \quad (24)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. Notez qu'on peut écrire la solution (24) dès qu'on connaît les valeurs de λ et de μ . Considérons maintenant d'autres exemples.

Exemple 2

Trouvez la solution au problème de valeur initiale

$$16y'' - 8y' + 145y = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 1. \quad (25)$$

L'équation caractéristique est $16r^2 - 8r + 145 = 0$, et ses racines sont $r = 1/4 \pm 3i$. La solution générale à l'équation différentielle est donc

$$y = c_1 e^{t/4} \cos 3t + c_2 e^{t/4} \sin 3t. \quad (26)$$

Pour utiliser la première condition initiale, on pose $t = 0$ dans l'équation (26). On obtient

$$y(0) = c_1 = -2.$$

Pour ce qui est de la deuxième condition initiale, on doit dériver l'équation (26) puis poser $t = 0$. On trouve alors

$$y'(0) = \frac{1}{4}c_1 + 3c_2 = 1,$$

où $c_2 = 1/2$. En reportant ces valeurs de c_1 et de c_2 dans l'équation (26), on obtient

$$y = -2e^{t/4} \cos 3t + \frac{1}{2}e^{t/4} \sin 3t, \quad (27)$$

qui est la solution au problème de valeur initiale (25). Dans la figure 3.4.2, on illustre cette solution.

Dans ce cas, on constate que la solution est une oscillation à amplitude croissante. De nouveau, les facteurs trigonométriques de l'équation (27) déterminent la nature oscillatoire de la solution, tandis que le facteur exponentiel (avec un exposant positif cette fois) entraîne une augmentation de l'amplitude des oscillations au fil du temps.

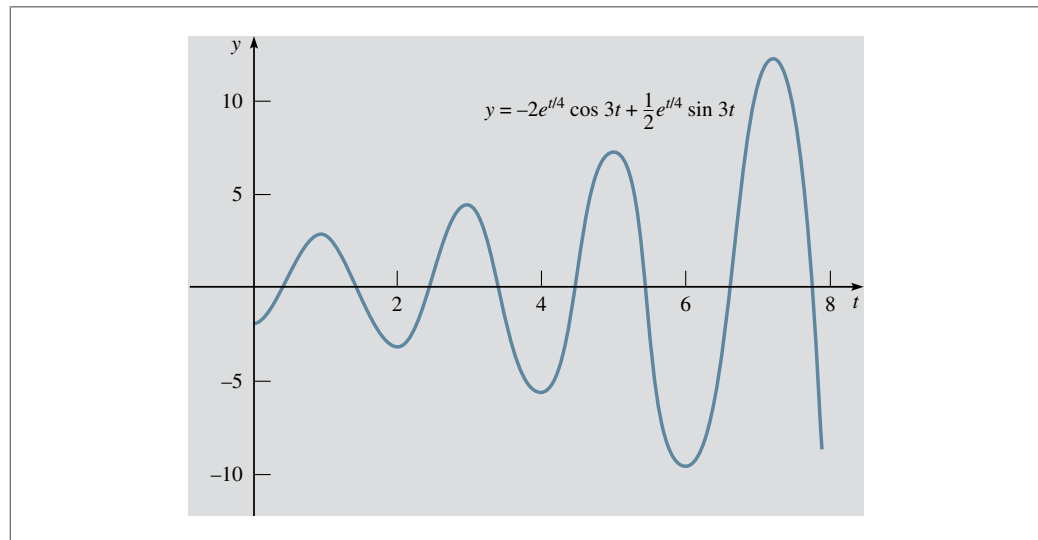


Figure 3.4.2 Solution à $16y'' - 8y' + 145y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

Exemple 3

Trouvez la solution générale à

$$y'' + 9y = 0. \quad (28)$$

L'équation caractéristique est $r^2 + 9 = 0$, et ses racines sont $r = \pm 3i$. Donc, $\lambda = 0$ et $\mu = 3$. La solution générale est

$$y = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t. \quad (29)$$

Quand la partie réelle de la racine est nulle, comme dans l'exemple précédent, il n'y a aucun facteur exponentiel dans la solution. La figure 3.4.3 illustre le graphique de deux solutions typiques à l'équation (28). Dans chaque cas, la solution est une oscillation pure dont l'amplitude est déterminée par les conditions initiales. Puisqu'il n'y a pas de facteur exponentiel dans la solution (29), l'amplitude de chaque oscillation demeure constante au fil du temps.

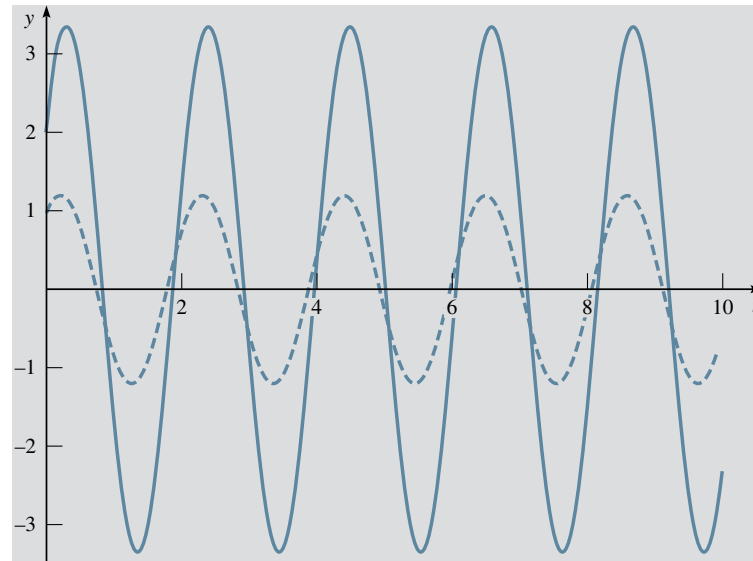


Figure 3.4.3 Solution typique à $y'' + 9y = 0$.

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 6, utilisez la formule d'Euler pour transformer l'expression donnée sous la forme $a + ib$.

1. $\exp(1 + 2i)$

2. $\exp(2 - 3i)$

3. e^i

4. $e^{2-(\pi/2)i}$

5. 2^{1-i}

6. π^{-1+2i}

- Dans les problèmes 7 à 16, trouvez la solution générale à l'équation différentielle.

7. $y'' - 2y' + 2y = 0$

8. $y'' - 2y' + 6y = 0$

9. $y'' + 2y' - 8y = 0$

10. $y'' + 2y' + 2y = 0$

11. $y'' + 6y' + 13y = 0$

12. $4y'' + 9y = 0$

13. $y'' + 2y' + 1,25y = 0$

14. $9y'' + 9y' - 4y = 0$

15. $y'' + y' + 1,25y = 0$

16. $y'' + 4y' + 6,25y = 0$

- Dans les problèmes 17 à 22, trouvez la solution au problème de valeur initiale. Tracez le graphe de la solution et décrivez son comportement lorsque t augmente.

17. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

18. $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

19. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 2$

20. $y'' + y = 0, \quad y(\pi/3) = 2, \quad y'(\pi/3) = -4$

21. $y'' + y' + 1,25y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$

22. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(\pi/4) = 2, \quad y'(\pi/4) = -2$

- Ⓢ 23. Considérez le problème de valeur initiale

$$3u'' - u' + 2u = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$$

a) Trouvez la solution $u(t)$ à ce problème.

b) Trouvez la plus petite valeur de t telle que $|u(t)| = 10$.

- ▶ 24. Considérez le problème de valeur initiale

$$5u'' + 2u' + 7u = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 1.$$

- a) Trouvez la solution $u(t)$ à ce problème.
b) Trouvez la plus petite valeur T telle que $|u(t)| \leq 0,1$, quel que soit $t > T$.

25. Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + 2y' + 6y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \alpha \geq 0.$$

- a) Trouvez la solution $y(t)$ à ce problème.
b) Trouvez α de sorte que $y = 0$ lorsque $t = 1$.
c) Trouvez, en fonction de α , la plus petite valeur positive de t telle que $y = 0$.
d) Déterminez la limite de l'expression trouvée à la partie c) lorsque $\alpha \rightarrow \infty$.

26. Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + 2ay' + (a^2 + 1)y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

- a) Trouvez la solution $y(t)$ à ce problème.
b) Si $a = 1$, trouvez la plus petite valeur T telle que $|y(t)| < 0,1$ lorsque $t > T$.
c) Reprenez la partie b) pour $a = 1/4, 1/2$ et 2 , respectivement.
d) À l'aide des résultats obtenus dans les parties b) et c), tracez le graphe de T en fonction de a et décrivez la relation entre T et a .

27. Montrez que $W(e^{\lambda t} \cos \mu t, e^{\lambda t} \sin \mu t) = \mu e^{2\lambda t}$.

28. Dans ce problème, on veut retrouver la formule d'Euler à l'aide d'une approche différente de celle qui a été utilisée précédemment.

- a) Montrez que $y_1(t) = \cos t$ et $y_2(t) = \sin t$ constituent un ensemble fondamental de solutions à $y'' + y = 0$, c'est-à-dire qu'elles sont des solutions à l'équation et que leur wronskien est non nul.
b) Montrez (formellement) que $y = e^{it}$ est aussi une solution à $y'' + y = 0$. Par conséquent,

$$e^{it} = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad (i)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires. Pourquoi ce raisonnement est-il valide ?

- c) Posez $t = 0$ dans l'équation (i) et montrez que $c_1 = 1$.
d) En supposant que l'équation (14) est vraie, dérivez l'équation (i), puis posez $t = 0$ pour conclure que $c_2 = i$. Utilisez les valeurs de c_1 et de c_2 dans l'équation (i) pour obtenir la formule d'Euler.

29. À l'aide de la formule d'Euler, montrez que

$$\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2, \quad \sin t = (e^{it} - e^{-it})/2i.$$

30. Soit e^{rt} tel que défini par l'équation (13). Montrez que $e^{(r_1+r_2)t} = e^{r_1 t} e^{r_2 t}$, quels que soient les nombres complexes r_1 et r_2 .

31. Soit e^{rt} tel que défini par l'équation (13). Montrez que

$$\frac{d}{dt} e^{rt} = r e^{rt},$$

quel que soit le nombre complexe r .

32. Considérez l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

où $b^2 - 4ac < 0$ et l'équation caractéristique a des racines complexes $\lambda \pm i\mu$. Substituez les fonctions

$$u(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t \quad \text{et} \quad v(t) = e^{\lambda t} \sin \mu t$$

à y dans l'équation différentielle pour confirmer qu'elles sont bien des solutions.

33. Si les fonctions y_1 et y_2 sont des solutions linéairement indépendantes à $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, montrez qu'entre deux racines consécutives de y_1 , il existe une et une seule racine de y_2 . Vous devez noter que ce résultat est confirmé par les solutions $y_1(t) = \cos t$ et $y_2(t) = \sin t$ à l'équation $y'' + y = 0$.

- ■ **Les changements de variables** Dans la recherche d'une solution, on peut souvent simplifier une équation différentielle à coefficients variables

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (i)$$

en changeant la variable indépendante ou la variable dépendante, ou les deux. Ce sujet est abordé dans les problèmes 34 à 46. Au problème 34, on montre comment transformer le type d'équations connues sous le nom d'équations d'Euler en équations par un simple changement de la variable indépendante. Les problèmes 35 à 42 sont des applications de ce principe. En outre, au problème 43, on détermine les conditions sous lesquelles on peut transformer l'équation (i) en une équation différentielle à coefficients constants qui soit plus facile à résoudre. Les problèmes 44 à 46 sont des applications de ce principe.

- 34. L'équation d'Euler** On appelle équation d'Euler une équation de la forme

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + \alpha t \frac{dy}{dt} + \beta y = 0, \quad t > 0, \quad (ii)$$

où α et β sont deux constantes réelles.

a) Posez $x = \ln t$ et calculez dy/dt et $d^2 y/dt^2$ en termes de dy/dx et $d^2 y/dx^2$.

b) Servez-vous des résultats de la partie a) pour transformer l'équation (ii) en

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha - 1) \frac{dy}{dx} + \beta y = 0. \quad (iii)$$

Notez que l'équation (iii) a des coefficients constants. Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ constituent un ensemble fondamental de solutions à l'équation (iii), alors $y_1(\ln t)$ et $y_2(\ln t)$ constituent un ensemble fondamental de solutions à l'équation (ii).

- Dans les problèmes 35 à 42, utilisez le résultat du problème 34 pour résoudre l'équation lorsque $t > 0$.

35. $t^2 y'' + ty' + y = 0$

36. $t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0$

37. $t^2 y'' + 3ty' + 1,25y = 0$

38. $t^2 y'' - 4ty' - 6y = 0$

39. $t^2 y'' - 4ty' + 6y = 0$

40. $t^2 y'' - ty' + 5y = 0$

41. $t^2 y'' + 3ty' - 3y = 0$

42. $t^2 y'' + 7ty' + 10y = 0$

43. Pour ce problème, on détermine les conditions s'appliquant à p et à q sous lesquelles on peut transformer l'équation (i) en une équation à coefficients constants en changeant la variable indépendante. Soit $x = u(t)$ la nouvelle variable indépendante (la relation entre x et t sera précisée plus loin).

a) Montrez que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{dy}{dx}.$$

b) Montrez que l'équation différentielle (i) peut être réécrite sous la forme

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{d^2 x}{dt^2} + p(t) \frac{dx}{dt} \right) \frac{dy}{dx} + q(t)y = 0. \quad (iv)$$

- c) Pour que l'équation (iv) soit une équation à coefficients constants, les coefficients de $d^2 y/dx^2$ et de y doivent être proportionnels. Si $q(t) > 0$, on peut choisir la constante de proportionnalité comme étant égale à 1. Par conséquent,

$$x = u(t) = \int [q(t)]^{1/2} dt. \quad (v)$$

- d) En choisissant x comme dans la partie c), montrez que le coefficient de dy/dx dans l'équation (iv) est aussi constant si l'expression

$$\frac{q'(t) + 2p(t)q(t)}{2[q(t)]^{3/2}} \quad (vi)$$

est constante. On peut ainsi transformer l'équation (i) en une équation à coefficients constants en changeant la variable indépendante, à la condition que la fonction $(q' + 2pq)/q^{3/2}$ soit constante. Comment devez-vous modifier le résultat dans le cas où $q(t) < 0$?

- ■ Dans les problèmes 44 à 46, essayez de transformer l'équation en une équation à coefficients constants à l'aide de la méthode utilisée au problème 34. Si c'est possible, trouvez la solution générale à l'équation.

44. $y'' + ty' + e^{-t^2}y = 0, \quad -\infty < t < \infty$

45. $y'' + 3ty' + t^2y = 0, \quad -\infty < t < \infty$

46. $ty'' + (t^2 - 1)y' + t^3y = 0, \quad 0 < t < \infty$

3.5 Les racines de multiplicité deux – la réduction d'ordre

Dans les sections précédentes, nous avons vu comment résoudre l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1)$$

lorsque les racines de l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (2)$$

sont soit réelles et distinctes, soit complexes conjuguées. Nous allons maintenant considérer la troisième possibilité, c'est-à-dire le cas où les racines r_1 et r_2 sont identiques. Cela se produit lorsque le discriminant $b^2 - 4ac$ est égal à zéro. Alors,

$$r_1 = r_2 = -b/2a. \quad (3)$$

La difficulté apparaît immédiatement. Les deux racines donnent lieu à une seule solution

$$y_1(t) = e^{-bt/2a} \quad (4)$$

à l'équation différentielle (1), et il n'est pas évident d'en trouver une deuxième.

Exemple 1

Résolvez l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = 0. \quad (5)$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2 = 0,$$

donc $r_1 = r_2 = -2$. Par conséquent, une solution à l'équation (5) est $y_1(t) = e^{-2t}$. Pour trouver la solution générale à l'équation (5), une deuxième solution qui n'est pas un multiple de y_1 est nécessaire. Plusieurs méthodes permettent de trouver cette deuxième solution (voir les problèmes 20 à 22). On utilise ici une méthode élaborée par Jean d'Alembert⁶ au XVIII^e siècle. Rappelons que si $y_1(t)$ est une solution à l'équation (1), il en est de même pour $cy_1(t)$, quelle que soit la constante c . L'idée consiste à généraliser ce résultat en remplaçant c par une fonction $v(t)$, puis à essayer de déterminer $v(t)$ de sorte que le produit $v(t)y_1(t)$ soit également une solution à l'équation (1).

Pour y arriver, on remplace y par $v(t)y_1(t)$ dans l'équation (1) et on se base sur l'équation résultante pour trouver $v(t)$. Si

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-2t}, \quad (6)$$

on a

$$y' = v'(t)e^{-2t} - 2v(t)e^{-2t} \quad (7)$$

6. Jean d'Alembert (1717-1783), mathématicien français, était un contemporain de Léonhard Euler et de Daniel Bernoulli. Il est surtout connu pour ses réalisations en mécanique et en équations différentielles. On lui est redevable du principe de d'Alembert en mécanique et du paradoxe de d'Alembert en hydrodynamique. L'équation d'onde pour la corde vibrante (1747) est également le fruit de son travail. Vers la fin de sa vie, il s'est surtout consacré à la philosophie et à des tâches d'édition scientifique pour l'encyclopédie Diderot.

► et

$$y'' = v''(t)e^{-2t} - 4v'(t)e^{-2t} + 4v(t)e^{-2t}. \quad (8)$$

En substituant les expressions des équations (6), (7) et (8) dans l'équation (5) et en réorganisant les termes, on obtient

$$[v''(t) - 4v'(t) + 4v(t) + 4v'(t) - 8v(t) + 4v(t)]e^{-2t} = 0,$$

qui se simplifie en

$$v''(t) = 0. \quad (9)$$

Par conséquent,

$$v'(t) = c_1$$

et

$$v(t) = c_1 t + c_2, \quad (10)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires. Finalement, en remplaçant $v(t)$ par l'expression (10) dans l'équation (6), on obtient

$$y = c_1 t e^{-2t} + c_2 e^{-2t}. \quad (11)$$

Le deuxième terme du second membre de l'équation (11) est la solution originale $y_1(t) = \exp(-2t)$, mais le premier est une deuxième solution, soit $y_2(t) = t \exp(-2t)$. De toute évidence, ces deux solutions ne sont pas proportionnelles, mais on peut vérifier qu'elles sont linéairement indépendantes en calculant leur wronskien :

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(t) &= \begin{vmatrix} e^{-2t} & t e^{-2t} \\ -2e^{-2t} & (1-2t)e^{-2t} \end{vmatrix} \\ &= e^{-4t} - 2te^{-4t} + 2te^{-4t} = e^{-4t} \neq 0. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$y_1(t) = e^{-2t}, \quad y_2(t) = t e^{-2t} \quad (12)$$

forment un ensemble fondamental de solutions à l'équation (5), et la solution générale à cette équation est donnée par l'équation (11). Il faut noter que $y_1(t)$ et $y_2(t)$ tendent vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. Ainsi, toutes les solutions à l'équation (5) se comportent de la même façon. Dans la figure 3.5.1, on illustre le graphe d'une solution typique.

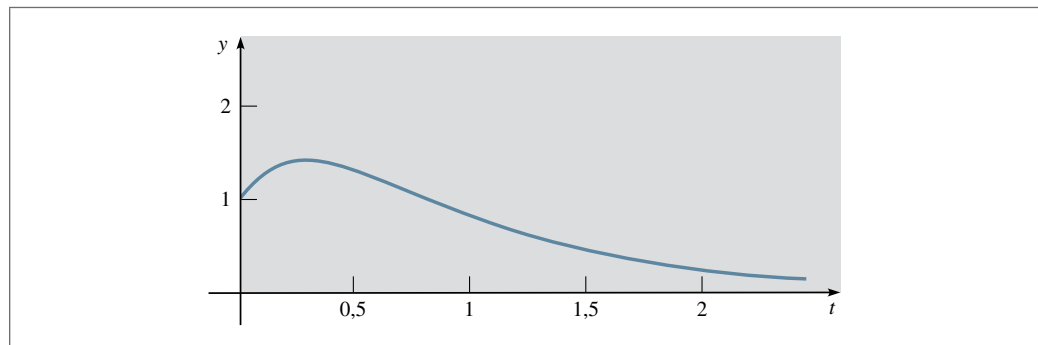


Figure 3.5.1 Solution typique à l'équation (5): $y'' + 4y' + 4y = 0$.

On peut appliquer la méthode utilisée dans l'exemple 1 à une équation générale dont l'équation caractéristique admet une racine de multiplicité deux. En supposant que les coefficients de l'équation (1) satisfont à $b^2 - 4ac = 0$, on en déduit que

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}$$

est une solution. Pour trouver une seconde solution, on suppose que

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-bt/2a}, \quad (13)$$

et on substitue cette dernière expression dans l'équation (1) pour déterminer $v(t)$. On a

$$y' = v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v(t)e^{-bt/2a} \quad (14)$$

et

$$y'' = v''(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{a}v'(t)e^{-bt/2a} + \frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{-bt/2a}. \quad (15)$$

En substituant ensuite (13), (14) et (15) dans l'équation (1), on obtient

$$\left\{ a \left[v''(t) - \frac{b}{a}v'(t) + \frac{b^2}{4a^2}v(t) \right] + b \left[v'(t) - \frac{b}{2a}v(t) \right] + cv(t) \right\} e^{-bt/2a} = 0. \quad (16)$$

En simplifiant le facteur commun non nul $\exp(-bt/2a)$ et en réorganisant les termes qui restent, on trouve

$$av''(t) + (-b + b)v'(t) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) v(t) = 0. \quad (17)$$

Le terme comprenant $v'(t)$ est de toute évidence nul. Le coefficient de $v(t)$, soit $c - (b^2/4a)$, est également nul, car $b^2 - 4ac = 0$ par hypothèse. Comme dans l'exemple 1, l'équation (17) est ainsi réduite à

$$v''(t) = 0.$$

Par conséquent,

$$v(t) = c_1 t + c_2.$$

Ainsi, à partir de l'équation (13), on a

$$y = c_1 t e^{-bt/2a} + c_2 e^{-bt/2a}. \quad (18)$$

Donc, y est une combinaison linéaire des deux solutions

$$y_1(t) = e^{-bt/2a}, \quad y_2(t) = t e^{-bt/2a}. \quad (19)$$

Le wronskien de ces deux solutions est

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-bt/2a} & t e^{-bt/2a} \\ -\frac{b}{2a} e^{-bt/2a} & \left(1 - \frac{bt}{2a}\right) e^{-bt/2a} \end{vmatrix} = e^{-bt/a}. \quad (20)$$

Puisque $W(y_1, y_2)(t)$ est toujours non nul, les solutions y_1 et y_2 données dans les équations (19) constituent un ensemble fondamental de solutions. De plus, l'équation (18) est la solution générale à l'équation (1) quand les racines de l'équation caractéristique sont identiques. En d'autres mots, dans ce cas, il existe une solution exponentielle correspondant à la racine de multiplicité deux, et on obtient une deuxième solution en multipliant la solution exponentielle par t .

Exemple 2

Trouvez la solution au problème de valeur initiale

$$y'' - y' + 0,25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{1}{3}. \quad (21)$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 - r + 0,25 = 0.$$

Ses racines sont $r_1 = r_2 = 1/2$. Donc, la solution générale à l'équation différentielle est

$$y = c_1 e^{t/2} + c_2 t e^{t/2}. \quad (22)$$

Selon la première condition initiale, on a

$$y(0) = c_1 = 2.$$

► Pour respecter la deuxième condition initiale, on dérive d'abord l'équation (22), puis on pose $t = 0$, d'où

$$y'(0) = \frac{1}{2}c_1 + c_2 = \frac{1}{3}$$

et $c_2 = -2/3$. Ainsi, la solution au problème de valeur initiale est

$$y = 2e^{t/2} - \frac{2}{3}te^{t/2}. \quad (23)$$

Dans la figure 3.5.2, on illustre le graphique de cette solution.

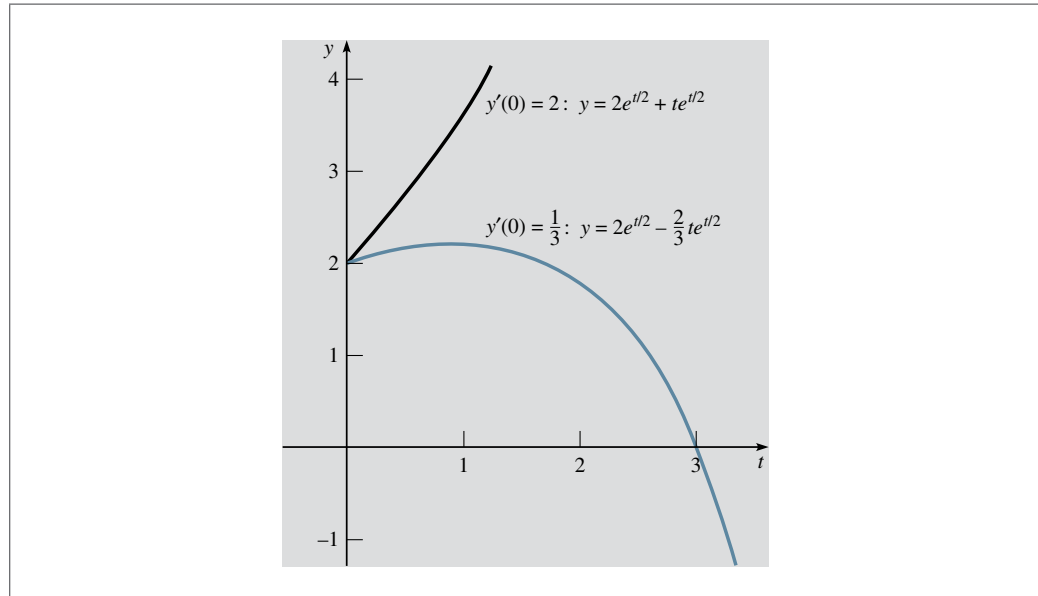


Figure 3.5.2 Solutions à $y'' - y' + 0,25y = 0$, $y(0) = 2$, avec $y'(0) = 1/3$ (la courbe bleue) et avec $y'(0) = 2$ (la courbe noire), respectivement.

Maintenant, on modifie le problème de valeur initiale (21) en changeant la pente en $t = 0$. On pose comme deuxième condition initiale $y'(0) = 2$. La solution au problème modifié est

$$y = 2e^{t/2} + te^{t/2},$$

et son graphique est aussi illustré à la figure 3.5.2. Les graphiques de cette figure incitent à penser qu'il existe une pente initiale critique (dont la valeur se situe entre $1/3$ et 2) permettant de distinguer les solutions concaves des solutions convexes. Au problème 16, on demande de déterminer cette pente initiale critique.

Ici, le comportement géométrique des solutions est similaire à celui qu'on a observé dans le cas où les racines sont réelles et distinctes. L'amplitude de la solution croît ou diminue selon le signe de l'exposant. Le facteur linéaire t a peu d'influence. La figure 3.5.1 illustre une solution asymptotique à zéro, alors que la figure 3.5.2 présente une solution croissante et une solution décroissante, mais ces solutions ne sont jamais asymptotiquement constantes. Si la racine de multiplicité deux est nulle, alors l'équation différentielle devient $y'' = 0$, et sa solution générale est une fonction linéaire de t .

Résumé On peut maintenant résumer les résultats obtenus pour les équations homogènes linéaires du deuxième ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (1)$$

Soit r_1 et r_2 les racines de l'équation caractéristique correspondante

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2)$$

Si r_1 et r_2 sont réelles et distinctes, alors la solution générale à l'équation différentielle (1) est

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \quad (24)$$

Si r_1 et r_2 sont les nombres complexes conjugués $\lambda \pm i\mu$, alors la solution générale est

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t. \quad (25)$$

Si $r_1 = r_2$, alors la solution générale est

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t}. \quad (26)$$

La réduction d'ordre Il est intéressant de noter que la démarche utilisée plus tôt dans cette section pour résoudre les équations à coefficients constants est applicable de manière plus générale. On suppose que l'on connaît une solution $y_1(t)$ non identiquement nulle à

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (27)$$

Pour trouver une deuxième solution, on pose

$$y = v(t)y_1(t). \quad (28)$$

Alors,

$$y' = v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t)$$

et

$$y'' = v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t).$$

En substituant les trois dernières expressions à y , y' et y'' dans l'équation (27) et en réorganisant les termes, on trouve

$$y_1 v'' + (2y_1' + p y_1) v' + (y_1'' + p y_1' + q y_1) v = 0. \quad (29)$$

Puisque y_1 est une solution à l'équation (27), le coefficient de v dans l'équation (29) est nul et l'équation (29) devient

$$y_1 v'' + (2y_1' + p y_1) v' = 0. \quad (30)$$

L'équation (30) est une équation du deuxième ordre dans laquelle la variable dépendante n'apparaît pas explicitement (*voir la section 3.1*). On peut réduire l'équation (30) à une équation du premier ordre en la fonction v' , et on peut la résoudre soit comme une équation linéaire du premier ordre, soit comme une équation à variables séparables. Une fois qu'on a trouvé v' , on obtient v en intégrant. Finalement, y est déterminée à partir de l'équation (28). Cette démarche est la méthode de réduction d'ordre, car l'étape importante consiste à résoudre une équation différentielle du premier ordre en v' au lieu de l'équation initiale du deuxième ordre en y . Même s'il est possible d'obtenir une formule générale pour $v(t)$, on se contentera d'illustrer cette méthode à l'aide d'un exemple.

Exemple 3

Sachant que $y_1(t) = t^{-1}$ est une solution à

$$2t^2 y'' + 3t y' - y = 0, \quad t > 0, \quad (31)$$

trouvez une deuxième solution linéairement indépendante.

On pose $y = v(t)t^{-1}$. Alors,

$$y' = v' t^{-1} - v t^{-2}, \quad y'' = v'' t^{-1} - 2v' t^{-2} + 2v t^{-3}.$$

En substituant les dernières expressions à y , à y' et à y'' dans l'équation (31) et en réorganisant les termes, on obtient

$$\begin{aligned} 2t^2(v'' t^{-1} - 2v' t^{-2} + 2v t^{-3}) + 3t(v' t^{-1} - v t^{-2}) - v t^{-1} \\ = 2t v'' + (-4 + 3)v' + (4t^{-1} - 3t^{-1} - t^{-1})v \\ = 2t v'' - v' = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

► Il faut noter que le coefficient de v est nul, comme on s'y attendait.

Si on pose $w = v'$, l'équation (32) devient

$$2tw' - w = 0.$$

En séparant les variables et en isolant $w(t)$, on obtient

$$w(t) = v'(t) = ct^{1/2};$$

alors

$$v(t) = \frac{2}{3}ct^{3/2} + k.$$

Il s'ensuit que

$$y = v(t)t^{-1} = \frac{2}{3}ct^{1/2} + kt^{-1}, \quad (33)$$

où c et k sont des constantes arbitraires. Le second terme du membre de droite de l'équation (33) est un multiple de $y_1(t)$ et peut être omis, mais le premier terme fournit une nouvelle solution, $y_2(t) = t^{1/2}$. Vous pouvez vérifier que le wronskien de y_1 et de y_2 est

$$W(y_1, y_2)(t) = \frac{3}{2}t^{-3/2} \neq 0 \text{ pour } t > 0. \quad (34)$$

Par conséquent, y_1 et y_2 constituent un ensemble fondamental de solutions à l'équation (31) quand $t > 0$.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 10, trouvez la solution générale à l'équation différentielle.

1. $y'' - 2y' + y = 0$

2. $9y'' + 6y' + y = 0$

3. $4y'' - 4y' - 3y = 0$

4. $4y'' + 12y' + 9y = 0$

5. $y'' - 2y' + 10y = 0$

6. $y'' - 6y' + 9y = 0$

7. $4y'' + 17y' + 4y = 0$

8. $16y'' + 24y' + 9y = 0$

9. $25y'' - 20y' + 4y = 0$

10. $2y'' + 2y' + y = 0$

■ Dans les problèmes 11 à 14, résolvez le problème de valeur initiale. Tracez le graphe de la solution et décrivez son comportement lorsque t augmente.

11. $9y'' - 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$

12. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

13. $9y'' + 6y' + 82y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$

14. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1$

Ⓢ 15. Considérez le problème de valeur initiale

$$4y'' + 12y' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -4.$$

a) Résolvez le problème et tracez sa solution pour $0 \leq t \leq 5$.

b) Déterminez la racine de la solution.

c) Déterminez les coordonnées (t_0, y_0) du minimum.

d) Changez la deuxième condition initiale en $y'(0) = b$ et trouvez la solution en fonction de b . Ensuite, trouvez la valeur critique de b qui permet de distinguer les solutions qui restent toujours positives des solutions qui peuvent devenir négatives.

16. Considérez la modification suivante du problème de valeur initiale de l'exemple 2:

$$y'' - y' + 0,25y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = b.$$

Trouvez la solution en fonction de b , puis déterminez la valeur critique de b qui permet de distinguer les solutions concaves des solutions convexes.

- ▶ ④ 17. Considérez le problème de valeur initiale

$$4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

- a) Résolvez le problème de valeur initiale et tracez la solution.
- b) Déterminez les coordonnées (t_0, y_0) du maximum.
- c) Changez la deuxième condition initiale en $y'(0) = b > 0$ et trouvez la solution en fonction de b .
- d) Trouvez les coordonnées (t_M, y_M) du maximum en fonction de b . Décrivez l'influence de b sur ces coordonnées quand b augmente.

18. Considérez le problème de valeur initiale

$$9y'' + 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = a > 0, \quad y'(0) = -1.$$

- a) Résolvez le problème de valeur initiale.
- b) Trouvez la valeur critique de a qui permet de distinguer les solutions qui peuvent devenir négatives de celles qui restent toujours positives.

19. Considérez l'équation $ay'' + by' + cy = 0$. Si les racines de l'équation caractéristique correspondante sont réelles, montrez qu'une solution à l'équation différentielle est toujours nulle ou bien ne peut être nulle qu'une fois.

- Dans les problèmes 20 à 22, on indique d'autres manières de trouver une deuxième solution quand l'équation caractéristique admet une racine de multiplicité deux.

20. a) Considérez l'équation $y'' + 2ay' + a^2y = 0$. Montrez que les racines de l'équation caractéristique sont $r_1 = r_2 = -a$ et, par conséquent, qu'une solution à l'équation est e^{-at} .
 b) Utilisez la formule d'Abel (voir l'équation (23) de la section 3.3) pour montrer que le wronskien de deux solutions à l'équation donnée est

$$W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = c_1 e^{-2at},$$

où c_1 est une constante.

- c) Posez $y_1(t) = e^{-at}$ et utilisez le résultat de la partie b) pour montrer qu'une deuxième solution est $y_2(t) = te^{-at}$.

21. Soit r_1 et r_2 les racines de $ar^2 + br + c = 0$. On suppose que $r_1 \neq r_2$; $\exp(r_1 t)$ et $\exp(r_2 t)$ sont alors deux solutions à l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$. Montrez que $\phi(t; r_1, r_2) = [\exp(r_2 t) - \exp(r_1 t)]/(r_2 - r_1)$ est aussi une solution à l'équation lorsque $r_2 \neq r_1$. Ensuite, considérez comme fixée la racine r_1 , puis utilisez la règle de L'Hospital pour évaluer la limite de $\phi(t; r_1, r_2)$ lorsque $r_2 \rightarrow r_1$. On obtient ainsi la deuxième solution dans le cas de racines identiques.

22. a) Si $ar^2 + br + c = 0$ admet une racine double r_1 , montrez que

$$L[e^{rt}] = a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + ce^{rt} = a(r - r_1)^2 e^{rt}. \quad (i)$$

Puisque le second membre de l'équation (i) est nul lorsque $r = r_1$, il s'ensuit que $\exp(r_1 t)$ est une solution à $L[y] = ay'' + by' + cy = 0$.

- b) Dérivez l'équation (i) par rapport à r . Ensuite, permutez la dérivée par rapport à r et la dérivée par rapport à t pour montrer que

$$\frac{\partial}{\partial r} L[e^{rt}] = L\left[\frac{\partial}{\partial r} e^{rt}\right] = L[te^{rt}] = ate^{rt}(r - r_1)^2 + 2ae^{rt}(r - r_1). \quad (ii)$$

Puisque le second membre de l'équation (ii) est nul lorsque $r = r_1$, concluez que $t \exp(r_1 t)$ est aussi une solution à $L[y] = 0$.

- Dans les problèmes 23 à 30, utilisez la méthode de réduction d'ordre pour trouver une deuxième solution à l'équation différentielle.

23. $t^2 y'' - 4ty' + 6y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^2$

24. $t^2 y'' + 2ty' - 2y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t$

25. $t^2 y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1}$

26. $t^2 y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t$

27. $xy'' - y' + 4x^3y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = \sin x^2$
 28. $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1; \quad y_1(x) = e^x$
 29. $x^2y'' - (x-0,1875)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{1/4}e^{2\sqrt{x}}$
 30. $x^2y'' + xy' + (x^2-0,25)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2} \sin x$
 31. L'équation différentielle

$$y'' + \delta(xy' + y) = 0$$

résulte de l'étude de l'écoulement d'un fluide de densité uniforme à travers un cylindre circulaire. Vérifiez que $y_1(x) = \exp(-\delta x^2/2)$ est une solution, puis trouvez la solution générale en termes d'une intégrale.

32. On peut appliquer la méthode du problème 20 aux équations du deuxième ordre où les coefficients sont variables. Si on connaît une solution non nulle y_1 à $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, montrez qu'une deuxième solution y_2 satisfait à $(y_2/y_1)' = W(y_1, y_2)/y_1^2$, où $W(y_1, y_2)$ est le wronskien de y_1 et de y_2 . Ensuite, utilisez la formule d'Abel (voir l'équation (23) de la section 3.3) pour déterminer y_2 .
- Dans les problèmes 33 à 36, utilisez la méthode du problème 32 pour trouver une deuxième solution indépendante à l'équation.
33. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1}$
 34. $ty'' - y' + 4t^3y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = \sin(t^2)$
 35. $(x-1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1; \quad y_1(x) = e^x$
 36. $x^2y'' + xy' + (x^2-0,25)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2} \sin x$
- **Le comportement des solutions lorsque $t \rightarrow \infty$** Les problèmes 37 à 39 portent sur le comportement limite des solutions lorsque $t \rightarrow \infty$.
37. Si a, b et c sont des constantes positives, montrez que toutes les solutions à $ay'' + by' + cy = 0$ tendent vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$.
38. a) Si $a > 0$ et $c > 0$, mais que $b = 0$, montrez que le résultat du problème 37 n'est plus valide, mais que toutes les solutions sont bornées lorsque $t \rightarrow \infty$.
 b) Si $a > 0$ et $b > 0$, mais que $c = 0$, montrez que le résultat du problème 37 n'est plus valide, mais que toutes les solutions tendent vers une constante qui dépend des conditions initiales lorsque $t \rightarrow \infty$. Déterminez cette constante avec les conditions initiales $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$.
39. Montrez que $y = \sin t$ est une solution à

$$y'' + (k \sin^2 t)y' + (1 - k \cos t \sin t)y = 0,$$

quelle que soit la constante k . Si $0 < k < 2$, montrez que $1 - k \cos t \sin t > 0$ et que $k \sin^2 t \geq 0$. Par conséquent, vous devez noter que même si les coefficients de cette équation différentielle à coefficients variables sont non négatifs (et que le coefficient de y' est nul seulement pour $t = 0, \pi, 2\pi, \dots$), l'équation admet une solution qui ne tend pas vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. Comparez cette situation avec le résultat du problème 37. Ainsi, on observe une situation inhabituelle : des équations apparemment similaires peuvent admettre des propriétés fort différentes.

- **Les équations d'Euler** Utilisez la substitution introduite au problème 34 de la section 3.4 pour résoudre les équations des problèmes 40 à 45.

40. $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0, \quad t > 0$
 41. $t^2y'' + 2ty' + 0,25y = 0, \quad t > 0$
 42. $2t^2y'' - 5ty' + 5y = 0, \quad t > 0$
 43. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0$
 44. $4t^2y'' - 8ty' + 9y = 0, \quad t > 0$
 45. $t^2y'' + 5ty' + 13y = 0, \quad t > 0$

3.6 Les équations non homogènes – la méthode des coefficients indéterminés

Revenons maintenant à l'équation non homogène

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (1)$$

où les fonctions p , q et g sont continues dans un intervalle ouvert I . L'équation

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \quad (2)$$

où $g(t) = 0$ et p et q sont les mêmes que dans l'équation (1), est dite l'équation homogène correspondant à l'équation (1). Les deux résultats qui suivent montrent comment obtenir la solution à l'équation non homogène (1).

Théorème 3.6.1

Si Y_1 et Y_2 sont deux solutions à l'équation non homogène (1), alors leur différence $Y_1 - Y_2$ est une solution à l'équation homogène correspondante (2). De plus, si y_1 et y_2 constituent un ensemble fondamental de solutions à l'équation (2), alors

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad (3)$$

où c_1 et c_2 sont deux constantes.

Pour prouver ce résultat, il faut noter que Y_1 et Y_2 satisfont aux équations

$$L[Y_1](t) = g(t), \quad L[Y_2](t) = g(t). \quad (4)$$

En soustrayant la deuxième équation de la première, on obtient

$$L[Y_1](t) - L[Y_2](t) = g(t) - g(t) = 0. \quad (5)$$

Cependant,

$$L[Y_1] - L[Y_2] = L[Y_1 - Y_2].$$

Donc, l'équation (5) devient

$$L[Y_1 - Y_2](t) = 0. \quad (6)$$

L'équation (6) permet d'établir que $Y_1 - Y_2$ est une solution à l'équation (2). Comme on peut exprimer toutes les solutions à l'équation (2) en termes de combinaisons linéaires de fonctions constituant un ensemble fondamental de solutions (voir le théorème 3.3.4), alors $Y_1 - Y_2$ est une solution. L'équation (3) est donc valide et la preuve est complète.

Théorème 3.6.2

On peut écrire la solution générale à l'équation non homogène (1) sous la forme

$$y = \phi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t), \quad (7)$$

où y_1 et y_2 constituent un ensemble fondamental de solutions à l'équation homogène correspondante (2), où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires et Y est une solution particulière à l'équation non homogène (1).

La preuve du théorème 3.6.2 découle directement du théorème précédent. Il faut noter que l'équation (3) est valide si on considère Y_1 comme une solution arbitraire ϕ à l'équation (1) et Y_2 comme sa solution particulière Y . Selon l'équation (3), on obtient donc

$$\phi(t) - Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad (8)$$

qui équivaut à l'équation (7). Puisque ϕ est une solution arbitraire à l'équation (1), l'expression du second membre de l'équation (7) inclut toutes les solutions à l'équation (1). On l'appelle par conséquent solution générale à l'équation (1).

Le théorème 3.6.2 énonce donc que la solution à l'équation non homogène (1) est obtenue à l'aide des trois étapes décrites ci-après.

1. Trouvez la solution générale $c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ à l'équation homogène correspondante. On appelle souvent celle-ci solution complémentaire, et on la note $y_c(t)$.
2. Trouvez une solution particulière $Y(t)$ à l'équation non homogène.
3. Additionnez les fonctions déterminées dans les deux étapes précédentes.

On sait déjà comment trouver $y_c(t)$, du moins quand l'équation homogène (2) est à coefficients constants. Dans cette section et dans la suivante, nous verrons comment trouver une solution particulière $Y(t)$ à l'équation non homogène (1). Nous discuterons deux méthodes : la méthode des coefficients indéterminés et la méthode de variation des paramètres. Chacune comporte ses avantages et ses inconvénients.

La méthode des coefficients indéterminés Cette méthode requiert qu'on pose *a priori* une expression explicite pour la solution particulière de $Y(t)$, dont les coefficients constants devront encore être précisés. On substitue ensuite cette expression dans l'équation (1) et on tente d'en déterminer les coefficients de sorte que l'équation soit satisfaite.

Quand cette démarche est réalisable, on trouve alors une solution à l'équation différentielle (1) qui est la solution particulière $Y(t)$ recherchée. Dans le cas contraire, alors il n'existe aucune solution de la forme supposée initialement. Il faut donc modifier l'expression supposée au départ pour la solution et reprendre le processus.

L'avantage de la méthode des coefficients indéterminés est son application directe dès qu'on dispose d'une expression potentielle pour $Y(t)$. Son inconvénient est qu'elle n'est utile que dans les équations où il est facile d'établir intuitivement une expression pour la solution particulière. En général, on n'utilise cette méthode que dans les problèmes où l'équation homogène est à coefficients constants et où le terme non homogène est une fonction simple, par exemple un polynôme, une fonction exponentielle, un sinus ou un cosinus. Malgré cette restriction, la méthode des coefficients indéterminés sert à résoudre de nombreux problèmes qui ont des applications importantes. Les calculs peuvent toutefois devenir fastidieux, et l'utilisation d'un calculateur symbolique s'avère alors fort utile. On illustre maintenant la méthode des coefficients indéterminés à l'aide d'exemples simples. Ensuite, les règles d'utilisation seront résumées.

Exemple 1

Trouvez une solution particulière à

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}. \quad (9)$$

On recherche une fonction Y telle que $Y''(t) - 3Y'(t) - 4Y(t) = 3e^{2t}$. Comme les dérivées d'une fonction exponentielle sont similaires à la fonction elle-même, on suppose intuitivement que $Y(t)$ est un multiple de e^{2t} , soit

$$Y(t) = Ae^{2t},$$

et on doit maintenant déterminer le coefficient A . Pour ce faire, on calcule

$$Y'(t) = 2Ae^{2t}, \quad Y''(t) = 4Ae^{2t},$$

et on substitue ces expressions à y , à y' et à y'' dans l'équation (9). On obtient

$$(4A - 6A - 4A)e^{2t} = 3e^{2t}.$$

On doit donc avoir $-6Ae^{2t} = 3e^{2t}$, d'où $A = -1/2$. Par conséquent, une solution particulière est

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}. \quad (10)$$

Exemple 2

Trouvez une solution particulière à

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin t. \quad (11)$$

Selon le même principe que celui de l'exemple 1, on suppose d'abord que $Y(t) = A \sin t$, où A est une constante à déterminer. En substituant cette expression dans l'équation (11), on obtient

$$-A \sin t - 3A \cos t - 4A \sin t = 2 \sin t$$

ou, en réorganisant les termes,

$$(2 + 5A) \sin t + 3A \cos t = 0. \quad (12)$$

On veut que l'équation (12) soit valide pour tout t . Par conséquent, elle doit être valide en deux points spécifiques, tels que $t = 0$ et $t = \pi/2$. En ces points, l'équation (12) est réduite à $3A = 0$ et $2 + 5A = 0$, respectivement. Ces exigences contradictoires signifient qu'il n'existe aucune valeur de la constante A telle que l'équation (12) est valide pour $t = 0$ et $t = \pi/2$, et encore moins pour tout t . Par conséquent, on conclut que notre supposition concernant $Y(t)$ est inappropriée. La présence d'un cosinus dans l'équation (12) suggère de modifier cette hypothèse et d'inclure un terme cosinus dans $Y(t)$, c'est-à-dire

$$Y(t) = A \sin t + B \cos t,$$

où A et B sont à déterminer. Ensuite, on a

$$Y'(t) = A \cos t - B \sin t, \quad Y''(t) = -A \sin t - B \cos t.$$

En substituant ces expressions à y , à y' et à y'' dans l'équation (11) et en réorganisant les termes, on obtient

$$(-A + 3B - 4A) \sin t + (-B - 3A - 4B) \cos t = 2 \sin t. \quad (13)$$

Pour que l'équation (13) soit satisfaite, les coefficients de $\sin t$ et de $\cos t$ de part et d'autre de l'équation doivent être identiques, c'est-à-dire que A et B doivent satisfaire à

$$-5A + 3B = 2, \quad -3A - 5B = 0.$$

Par conséquent, $A = -5/17$ et $B = 3/17$, et une solution particulière à l'équation (11) est

$$Y(t) = -\frac{5}{17} \sin t + \frac{3}{17} \cos t.$$

Cette méthode est également facile d'application quand le second membre de l'équation est un polynôme. Ainsi, pour trouver une solution particulière à

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1, \quad (14)$$

on suppose d'abord que $Y(t)$ est un polynôme de même degré que le terme non homogène, c'est-à-dire $Y(t) = At^2 + Bt + C$.

On peut maintenant résumer nos conclusions : si le terme non homogène $g(t)$ dans l'équation (1) est une fonction exponentielle e^{at} , alors on suppose que $Y(t)$ est proportionnelle à cette fonction. Si $g(t)$ est de type $\sin \beta t$ ou $\cos \beta t$, alors on suppose que $Y(t)$ est une combinaison linéaire de $\sin \beta t$ et de $\cos \beta t$. Si $g(t)$ est un polynôme, alors on suppose que $Y(t)$ est un polynôme de même degré. Le même principe s'applique dans le cas où $g(t)$ est un produit de deux de ces types de fonction, comme l'illustre l'exemple suivant.

Exemple 3

Trouvez une solution particulière à

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t. \quad (15)$$

Dans ce cas, on suppose que $Y(t)$ est le produit de e^t avec une combinaison linéaire de $\cos 2t$ et de $\sin 2t$, soit

$$Y(t) = Ae^t \cos 2t + Be^t \sin 2t.$$

Dans cet exemple, les calculs sont fastidieux, mais il s'ensuit que

$$Y'(t) = (A + 2B)e^t \cos 2t + (-2A + B)e^t \sin 2t$$

► et

$$Y''(t) = (-3A + 4B)e^t \cos 2t + (-4A - 3B)e^t \sin 2t.$$

En substituant ces expressions dans l'équation (15), on trouve que A et B doivent satisfaire à

$$10A + 2B = 8, \quad 2A - 10B = 0.$$

Ainsi, $A = 10/13$ et $B = 2/13$. Par conséquent, une solution particulière à l'équation (15) est

$$Y(t) = \frac{10}{13}e^t \cos 2t + \frac{2}{13}e^t \sin 2t.$$

Maintenant, on suppose que $g(t)$ est la somme de deux termes, $g(t) = g_1(t) + g_2(t)$, et que Y_1 et Y_2 sont des solutions aux équations

$$ay'' + by' + cy = g_1(t) \quad (16)$$

et

$$ay'' + by' + cy = g_2(t), \quad (17)$$

respectivement. Alors, $Y_1 + Y_2$ est une solution à l'équation

$$ay'' + by' + cy = g(t). \quad (18)$$

Afin de prouver cet énoncé, on remplace y par $Y_1(t) + Y_2(t)$ dans l'équation (18) et on utilise les équations (16) et (17). Une conclusion semblable est valide si $g(t)$ est la somme d'un nombre fini (quelconque) de termes. En pratique, ce résultat indique que dans le cas d'une équation où la fonction non homogène $g(t)$ est une somme de fonctions élémentaires, on ajoute à l'expression supposée déterminer $Y(t)$ un terme correspondant à chacun des éléments de $g(t)$. L'exemple suivant illustre cette démarche.

Exemple 4

Trouvez une solution particulière à

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2 \sin t - 8e^t \cos 2t. \quad (19)$$

En réécrivant l'équation (19) comme la superposition de trois équations, on obtient

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

$$y'' - 3y' - 4y = 2 \sin t$$

et

$$y'' - 3y' - 4y = -8e^t \cos 2t.$$

On a trouvé les solutions à ces trois équations dans les exemples 1, 2 et 3, respectivement. Par conséquent, une solution particulière à l'équation (19) est leur somme, à savoir

$$Y(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{17} \cos t - \frac{5}{17} \sin t + \frac{10}{13}e^t \cos 2t + \frac{2}{13}e^t \sin 2t.$$

La démarche illustrée dans ces exemples permet de résoudre plusieurs problèmes grâce à une approche raisonnablement efficace. Dans l'exemple suivant, on constate toutefois que certaines difficultés peuvent se poser.

Exemple 5

Trouvez une solution particulière à

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}. \quad (20)$$

En procédant comme dans l'exemple 1, on suppose que $Y(t) = Ae^{-t}$. En faisant la substitution dans l'équation (20), on obtient

$$(A + 3A - 4A)e^{-t} = 2e^{-t}. \quad (21)$$

- Puisque le premier membre de l'équation (21) est nul, il n'existe aucune valeur de A telle que l'équation puisse être satisfaite. Par conséquent, il n'existe aucune solution particulière à l'équation (20) de la forme supposée *a priori*. Cette conclusion est corroborée par la résolution de l'équation homogène correspondante

$$y'' - 3y' - 4y = 0. \quad (22)$$

Un ensemble fondamental de solutions à l'équation (22) est $y_1(t) = e^{-t}$ et $y_2(t) = e^{-4t}$. La solution particulière à l'équation (20) est en fait une solution à l'équation homogène (22). Elle ne peut donc pas satisfaire également à l'équation non homogène (20). Pour trouver une solution à l'équation (20), on doit, par conséquent, considérer des fonctions d'une forme quelque peu différente.

À ce stade, nous avons plusieurs options possibles. Une de ces options consiste simplement à tenter de deviner la forme appropriée de la solution particulière à l'équation (20). Une autre option consiste à résoudre cette équation d'une façon différente, puis à utiliser le résultat pour guider nos suppositions si cette situation se produit de nouveau dans le futur (*voir les problèmes 29 et 35 pour d'autres méthodes de résolution*). On peut aussi chercher une équation plus simple où cette difficulté apparaît et utiliser sa solution pour suggérer une manière de procéder avec l'équation (20). Si on adopte cette dernière approche, on cherche alors une équation du premier ordre analogue à l'équation (20). Une possibilité est l'équation linéaire

$$y' + y = 2e^{-t}. \quad (23)$$

Si on tente de trouver une solution particulière de la forme Ae^{-t} à l'équation (23), on échouera parce que e^{-t} est une solution à l'équation homogène $y' + y = 0$. Cependant, à la section 2.1, on a déjà appris à résoudre l'équation (23). Un facteur intégrant possible est $\mu(t) = e^t$ et en multipliant par $\mu(t)$, puis en intégrant les deux membres de l'équation, on obtient la solution

$$y = 2te^{-t} + ce^{-t}. \quad (24)$$

Le second terme du membre de droite de l'équation (24) est la solution générale à l'équation homogène $y' + y = 0$, mais le premier terme est une solution à l'équation non homogène (23). Notez que ce terme contient le facteur exponentiel e^{-t} multiplié par le facteur t . Voilà l'indice qu'on recherchait.

On revient maintenant à l'équation (20) et on suppose une solution particulière de la forme $Y(t) = Ate^{-t}$. Dans ce cas,

$$Y'(t) = Ae^{-t} - Ate^{-t} \quad \text{et} \quad Y''(t) = -2Ae^{-t} + Ate^{-t}. \quad (25)$$

En substituant ces expressions à y , à y' et à y'' dans l'équation (20), on obtient

$$(-2A - 3A)e^{-t} + (A + 3A - 4A)te^{-t} = 2e^{-t}.$$

Le coefficient de te^{-t} est zéro ; donc, d'après les termes contenant e^{-t} , on a $-5A = 2$, ou $A = -2/5$. Par conséquent, une solution particulière à l'équation (20) est

$$Y(t) = -\frac{2}{5}te^{-t}. \quad (26)$$

Le résultat de l'exemple 5 incite à rectifier les principes énoncés plus tôt. Lorsque la forme supposée *a priori* pour la solution particulière contient un terme qui fait partie de la solution à l'équation homogène correspondante, alors ce terme doit être multiplié par t . Parfois, cette opération ne suffit pas à éliminer la répétition des termes de la solution recherchée et des termes de la solution à l'équation homogène. On multiplie alors une deuxième fois par t les termes de la solution recherchée qui posent problème avec les termes de la solution à l'équation homogène. Dans le cas des équations du deuxième ordre, cette approche devrait toujours permettre d'obtenir la solution particulière.

Résumé Voici les étapes permettant de trouver la solution à un problème de valeur initiale comportant une équation non homogène de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad (27)$$

où les coefficients a , b et c sont constants :

1. Trouvez la solution générale à l'équation homogène correspondante.
2. Assurez-vous que la fonction $g(t)$ dans l'équation (27) soit du type de celles qui sont considérées dans cette section, c'est-à-dire qu'elle ne comporte que des fonctions exponentielles, des sinus, des cosinus, des polynômes et des sommes ou des produits de ces fonctions. Dans tous les autres cas, utilisez la méthode de variation des paramètres (voir la section suivante).
3. Si $g(t) = g_1(t) + \dots + g_n(t)$, c'est-à-dire si $g(t)$ est une somme de n termes, alors considérez n sous-problèmes, où chacun comporte un seul terme parmi $g_1(t), \dots, g_n(t)$. Le i -ième sous-problème $i = 1, \dots, n$ se présentera ainsi :

$$ay'' + by' + cy = g_i(t).$$

4. Pour le i -ième sous-problème, supposez une solution particulière $Y_i(t)$ de la forme appropriée (une fonction exponentielle, un sinus, un cosinus, un polynôme ou une combinaison de ces formes). Si, dans la forme supposée de $Y_i(t)$, on trouve un terme qui fait partie de la solution à l'équation homogène (trouvée à l'étape 1), alors multipliez $Y_i(t)$ par t ou (au besoin) par t^2 pour éliminer la duplication (voir le tableau 3.6.1).
5. Trouvez une solution particulière $Y_i(t)$ pour chacun des sous-problèmes. La somme $Y_1(t) + \dots + Y_n(t)$ est alors une solution particulière à l'équation non homogène (27).
6. La somme de la solution générale à l'équation homogène (voir l'étape 1) et de la solution particulière à l'équation non homogène (voir l'étape 5) constitue la solution générale à l'équation non homogène.
7. Utilisez les conditions initiales pour déterminer les valeurs des constantes arbitraires qui restent dans la solution générale.

Dans certains problèmes, on peut effectuer les calculs aisément, mais d'autres peuvent parfois s'avérer interminables. Quand cette méthode sera bien assimilée, un calculateur symbolique sera fort utile pour réduire la tâche.

Un avantage de la méthode des coefficients indéterminés est que si on pose initialement $Y(t)$ sous une forme inappropriée, on aboutit rapidement à une contradiction qui indique souvent comment modifier la fonction recherchée. Aussi, si on inclut *a priori* des termes inutiles dans $Y(t)$, alors on complique inutilement le travail et certains coefficients seront nuls. Néanmoins, on obtient la bonne réponse.

Tableau 3.6.1 Solution particulière à $ay'' + by' + cy = g_i(t)$

$g_i(t)$	$Y_i(t)$
$P_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$	$t^s (A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_n)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s (A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha t}$
$p_n(t)e^{\alpha t} \begin{cases} \sin \beta t \\ \cos \beta t \end{cases}$	$t^s [(A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_n)e^{\alpha t} \cos \beta t \\ + (B_0 t^n + B_1 t^{n-1} + \dots + B_n)e^{\alpha t} \sin \beta t]$

Remarque : Ici, s est le plus petit entier de 0, de 1 ou de 2 qui assure qu'aucun terme de $Y_i(t)$ ne fait partie de la solution à l'équation homogène correspondante. Dans ces trois cas, s correspond à la multiplicité de la racine 0 pour l'équation caractéristique, α est une racine réelle de l'équation caractéristique et $\alpha + i\beta$ est une racine complexe de l'équation caractéristique, respectivement.

La preuve de la méthode des coefficients indéterminés Nous venons de décrire la méthode des coefficients indéterminés à l'aide de divers exemples. Nous prouverons maintenant qu'elle est applicable en tout temps. Cette assertion sera vérifiée dans diverses situations qui correspondent à différentes formes pour le terme non homogène $g(t)$.

Cas 1: Soit $g(t) = P_n(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ Dans ce cas, l'équation (27) devient

$$ay'' + by' + cy = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n. \quad (28)$$

Pour obtenir une solution particulière, on pose

$$Y(t) = A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_{n-2} t^2 + A_{n-1} t + A_n. \quad (29)$$

En faisant la substitution dans l'équation (28), on obtient

$$\begin{aligned} a[n(n-1)A_0 t^{n-2} + \dots + 2A_{n-2}] + b(nA_0 t^{n-1} + \dots + A_{n-1}) \\ + c(A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \dots + A_n) = a_0 t^n + \dots + a_n. \end{aligned} \quad (30)$$

On identifie les coefficients des puissances correspondantes en t pour obtenir

$$\begin{aligned} cA_0 &= a_0, \\ cA_1 + nA_0 &= a_1, \\ &\vdots \\ cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} &= a_n. \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, la solution à la première équation est $A_0 = a_0/c$, et les autres équations permettent d'obtenir successivement $A_1, \dots, A_n$. Si $c = 0$ mais que $b \neq 0$, alors le polynôme du premier membre de l'équation (30) est de degré $n-1$, et l'équation (30) ne pourra jamais être satisfaite. Pour s'assurer que $aY''(t) + bY'(t)$ est un polynôme de degré n , $Y(t)$ doit être un polynôme de degré $n+1$. On pose alors

$$Y(t) = t(A_0 t^n + \dots + A_n).$$

Ici, le terme constant dans $Y(t)$ est nul, mais il est inutile d'inclure un tel terme, car une constante est toujours une solution à l'équation homogène lorsque $c = 0$. Puisque $b \neq 0$, on a $A_0 = a_0/b(n+1)$ et on trouve les coefficients $A_1, \dots, A_n$ de façon similaire. Si c et b sont nuls, on pose alors

$$Y(t) = t^2(A_0 t^n + \dots + A_n).$$

Comme $aY''(t)$ est de degré n , on procède comme on l'a fait précédemment. Dans $Y(t)$, le terme constant et le coefficient de t sont alors nuls, puisque toute constante et toute fonction linéaire sont des solutions à l'équation homogène.

Cas 2: Soit $g(t) = e^{\alpha t} P_n(t)$ Le problème consistant à déterminer une solution particulière à

$$ay'' + by' + cy = e^{\alpha t} P_n(t) \quad (31)$$

peut être réduit, comme dans le cas précédent, par substitution. Soit

$$Y(t) = e^{\alpha t} u(t),$$

alors

$$Y'(t) = e^{\alpha t} [u'(t) + \alpha u(t)]$$

et

$$Y''(t) = e^{\alpha t} [u''(t) + 2\alpha u'(t) + \alpha^2 u(t)].$$

On substitue ces expressions à y , à y' et à y'' dans l'équation (31), puis on simplifie le facteur $e^{\alpha t}$ et on réorganise les termes pour obtenir

$$au''(t) + (2a\alpha + b)u'(t) + (a\alpha^2 + b\alpha + c)u(t) = P_n(t). \quad (32)$$

Afin de trouver la solution particulière à l'équation (32), on doit résoudre précisément le même problème que celui de l'équation (28), où seule la notation des constantes diffère. Par conséquent, si $a\alpha^2 + b\alpha + c$ est non nul, on suppose que $u(t) = A_0 t^n + \dots + A_n$. Ainsi, une solution particulière à l'équation (31) est de la forme

$$Y(t) = e^{\alpha t}(A_0 t^n + \dots + A_n). \quad (33)$$

Toutefois, si $a\alpha^2 + b\alpha + c$ est nul et si $2a\alpha + b$ est non nul, on doit poser $u(t) = t(A_0 t^n + \dots + A_n)$. La fonction $Y(t)$ est alors t fois l'expression du second membre de l'équation (33). Il faut noter que si $a\alpha^2 + b\alpha + c$ est nul, alors $e^{\alpha t}$ est une solution à l'équation homogène. Si $a\alpha^2 + b\alpha + c$ et $2a\alpha + b$ sont nuls (ce qui implique que $e^{\alpha t}$ et $te^{\alpha t}$ sont des solutions à l'équation homogène), alors on pose $u(t) = t^2(A_0 t^n + \dots + A_n)$. Ainsi, $Y(t)$ est t^2 fois l'expression du second membre de l'équation (33).

Cas 3: Soit $g(t) = e^{\alpha t}P_n(t) \cos \beta t$ ou $e^{\alpha t}P_n(t) \sin \beta t$ Ces deux cas étant similaires, on ne considérera que le second. On peut réduire cette expression comme dans le problème précédent. Il faut noter que grâce à la formule d'Euler, on obtient $\sin \beta t = (e^{i\beta t} - e^{-i\beta t})/2i$. Ainsi, $g(t)$ est de la forme

$$g(t) = P_n(t) \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i},$$

et on doit choisir

$$Y(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(A_0 t^n + \dots + A_n) + e^{(\alpha-i\beta)t}(B_0 t^n + \dots + B_n)$$

ou, de la même manière,

$$Y(t) = e^{\alpha t}(A_0 t^n + \dots + A_n) \cos \beta t + e^{\alpha t}(B_0 t^n + \dots + B_n) \sin \beta t.$$

En général, il est préférable d'adopter la dernière forme. Si $\alpha \pm i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique de l'équation homogène correspondante, on doit, bien sûr, multiplier chaque polynôme par t pour augmenter leurs degrés de un.

Si la fonction non homogène comporte $\cos \beta t$ et $\sin \beta t$, on doit traiter les deux termes simultanément. En effet, si on les considère individuellement, on obtient la même forme pour la solution particulière. Par exemple, si $g(t) = t \sin t + 2 \cos t$, on pose

$$Y(t) = (A_0 t + A_1) \sin t + (B_0 t + B_1) \cos t,$$

à condition que $\sin t$ et $\cos t$ ne soient pas des solutions à l'équation homogène.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 12, trouvez la solution générale à l'équation différentielle.

1. $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$

2. $y'' + 2y' + 5y = 3 \sin 2t$

3. $y'' - y' - 2y = -2t + 4t^2$

4. $y'' + y' - 6y = 12e^{3t} + 12e^{-2t}$

5. $y'' - 2y' - 3y = -3te^{-t}$

6. $y'' + 2y' = 3 + 4 \sin 2t$

7. $y'' + 9y = t^2 e^{3t} + 6$

8. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$

9. $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3 \sin t$

10. $y'' + y = 3 \sin 2t + t \cos 2t$

11. $u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega t, \quad \omega^2 \neq \omega_0^2$

12. $u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega_0 t$

13. $y'' + y' + 4y = 2 \sinh t$ Suggestion: $\sinh t = (e^t - e^{-t})/2$

14. $y'' - y' - 2y = \cosh 2t$ Suggestion: $\cosh t = (e^t + e^{-t})/2$

■ Dans les problèmes 15 à 20, trouvez la solution au problème de valeur initiale.

15. $y'' + y' - 2y = 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

16. $y'' + 4y = t^2 + 3e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

17. $y'' - 2y' + y = te^t + 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
 18. $y'' - 2y' - 3y = 3te^{2t}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
 19. $y'' + 4y = 3 \sin 2t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$
 20. $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t} \cos 2t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

■ Dans les problèmes 21 à 28, procédez comme suit.

a) Déterminez une forme appropriée pour $Y(t)$ si la méthode des coefficients indéterminés doit être utilisée.

b) À l'aide d'un calculateur symbolique, trouvez une solution particulière à l'équation.

- Ⓢ 21. $y'' + 3y' = 2t^4 + t^2e^{-3t} + \sin 3t$
 Ⓢ 22. $y'' + y = t(1 + \sin t)$
 Ⓢ 23. $y'' - 5y' + 6y = e^t \cos 2t + e^{2t}(3t + 4) \sin t$
 Ⓢ 24. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-t} + 2e^{-t} \cos t + 4e^{-t}t^2 \sin t$
 Ⓢ 25. $y'' - 4y' + 4y = 2t^2 + 4te^{2t} + t \sin 2t$
 Ⓢ 26. $y'' + 4y = t^2 \sin 2t + (6t + 7) \cos 2t$
 Ⓢ 27. $y'' + 3y' + 2y = e^t(t^2 + 1) \sin 2t + 3e^{-t} \cos t + 4e^t$
 Ⓢ 28. $y'' + 2y' + 5y = 3te^{-t} \cos 2t - 2te^{-2t} \cos t$

29. Considérez l'équation

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t} \quad (i)$$

de l'exemple 5. Souvenez-vous que $y_1(t) = e^{-t}$ et $y_2(t) = e^{4t}$ sont des solutions à l'équation homogène correspondante. En adaptant la méthode de réduction d'ordre (voir la section 3.5), cherchez une solution à l'équation non homogène sous la forme $Y(t) = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-t}$, où $v(t)$ reste à déterminer.

a) Substituez $Y(t)$, $Y'(t)$ et $Y''(t)$ dans l'équation (i) et montrez que $v(t)$ doit satisfaire à $v'' - 5v' = 2$.

b) Posez $w(t) = v'(t)$ et montrez que $w(t)$ doit satisfaire à $w' - 5w = 2$. Résolvez cette équation pour déterminer $w(t)$.

c) Intégrez $w(t)$ pour déterminer $v(t)$, puis montrez que

$$Y(t) = -\frac{2}{5}te^{-t} + \frac{1}{5}c_1e^{4t} + c_2e^{-t}.$$

Le premier terme du membre de droite est la solution particulière recherchée à l'équation non homogène. Notez qu'il s'agit d'un produit de t et de e^{-t} .

30. Déterminez la solution générale à

$$y'' + \lambda^2 y = \sum_{m=1}^N a_m \sin m\pi t,$$

où $\lambda > 0$ et $\lambda \neq m\pi$ pour $m = 1, \dots, N$.

- Ⓢ 31. Dans plusieurs problèmes de physique, le terme non homogène peut différer d'un intervalle de temps à un autre. Par exemple, déterminez la solution $y = \phi(t)$ à

$$y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ \pi e^{\pi-t}, & t > \pi, \end{cases}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$. Supposez aussi que y et y' sont continues en $t = \pi$. Tracez le graphe du terme non homogène et de la solution en fonction du temps.

Suggestion : Résolvez d'abord le problème de valeur initiale pour $t \leq \pi$. Ensuite, résolvez-le pour $t > \pi$ en déterminant les constantes de la dernière solution et en supposant la continuité en $t = \pi$.

- Ⓢ 32. Comme dans le problème 31, résolvez l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 5y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ 0, & t > \pi/2 \end{cases}$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

- ■ **Le comportement des solutions lorsque $t \rightarrow \infty$** Le but des problèmes 33 et 34 est de poursuivre l'étude entreprise aux problèmes 37 à 39 de la section 3.5. Considérez l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad (i)$$

où a , b et c sont positifs.

33. Si $Y_1(t)$ et $Y_2(t)$ sont des solutions à l'équation (i), montrez que $Y_1(t) - Y_2(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Ce résultat est-il encore valide si $b = 0$?
34. Si $g(t) = d$ (une constante), montrez que toute solution à l'équation (i) tend vers d/c lorsque $t \rightarrow \infty$. Que se produit-il si $c = 0$? Que se produit-il si $b = 0$?
35. Dans ce problème, une autre démarche est proposée⁷ afin de résoudre l'équation différentielle

$$y'' + by' + cy = (D^2 + bD + c)y = g(t), \quad (i)$$

où b et c sont des constantes et où D est la dérivée par rapport à t . Soit r_1 et r_2 les racines du polynôme caractéristique de l'équation homogène correspondante. Ces racines peuvent être réelles et distinctes, réelles et identiques ou complexes conjuguées.

- a) Vérifiez que vous pouvez factoriser l'équation (i) sous la forme

$$(D - r_1)(D - r_2)y = g(t),$$

où $r_1 + r_2 = -b$ et $r_1 r_2 = c$.

- b) Soit $u = (D - r_2)y$. Montrez que vous pouvez alors trouver la solution à l'équation (i) en résolvant les deux équations du premier ordre suivantes :

$$(D - r_1)u = g(t), \quad (D - r_2)y = u(t).$$

- Dans les problèmes 36 à 39, utilisez la méthode du problème 35 pour résoudre l'équation différentielle.

36. $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$ (voir l'exemple 1)

37. $2y'' + 3y' + y = t^2 + 3 \sin t$ (voir le problème 9)

38. $y'' + 2y' + y = 2e^{-t}$ (voir le problème 8)

39. $y'' + 2y' = 3 + 4 \sin 2t$ (voir le problème 6)

3.7 La méthode de variation des paramètres

Dans la présente section, nous décrirons une autre méthode permettant de trouver la solution particulière à une équation non homogène. Cette méthode, appelée la **variation des paramètres**, est attribuable à Joseph Louis de Lagrange. Elle complète bien la méthode des coefficients indéterminés. Le principal avantage de la méthode de variation des paramètres est qu'il s'agit d'une méthode systématique. En principe, on peut appliquer cette méthode à n'importe quelle équation, et elle ne requiert aucune hypothèse spécifique sur la forme de la solution.

Plus loin dans cette section, nous utiliserons cette méthode pour obtenir une solution particulière à une équation différentielle non homogène linéaire du deuxième ordre. La méthode de variation des paramètres requiert toujours des calculs d'intégrales impliquant le terme non homogène de l'équation différentielle. Toutefois, la résolution peut s'avérer ardue, voire impossible. Avant de nous pencher sur cette méthode d'une façon générale, nous illustrerons son utilisation à l'aide d'un exemple.

7. LUTHAR, R. S. « Another Approach to a Standard Differential Equation », *Two Year College Mathematics Journal*, 10, 1979, p. 200-201. Voir aussi SANDELL, D. C. et F. M. STEIN. « Factorization of Operators of Second Order Linear Homogenous Ordinary Differential Equations », *Two Year College Mathematics Journal*, 8, 1977, p. 132-141, pour une étude plus générale sur la factorisation des opérateurs.

Exemple 1

Trouvez une solution particulière à

$$y'' + 4y = 3 \csc t. \quad (1)$$

Il faut noter que ce problème ne peut être résolu à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés, car le terme non homogène $g(t) = 3 \csc t$ est un quotient (plutôt qu'une somme ou un produit) de $\sin t$ ou de $\cos t$. Une approche différente est donc requise. On remarque également que l'équation homogène correspondante de l'équation (1) est

$$y'' + 4y = 0, \quad (2)$$

et que la solution générale à l'équation (2) est

$$y_c(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t. \quad (3)$$

L'idée de base de la méthode de variation des paramètres consiste à remplacer respectivement les constantes c_1 et c_2 dans l'équation (3) par deux fonctions $u_1(t)$ et $u_2(t)$, puis à déterminer ces fonctions pour que l'expression résultante

$$y = u_1(t) \cos 2t + u_2(t) \sin 2t \quad (4)$$

soit une solution à l'équation non homogène (1).

Afin de déterminer u_1 et u_2 , on doit substituer l'expression de y de l'équation (4) dans l'équation (1). Même sans avoir effectué cette substitution, on peut prévoir qu'il en résultera une seule équation impliquant u_1 et u_2 ainsi que leurs dérivées premières et secondes. Puisqu'il n'y a qu'une équation mais deux fonctions inconnues, on peut s'attendre à plusieurs choix possibles de u_1 et de u_2 qui répondront à nos besoins. On imposera donc une deuxième condition pour disposer de deux équations de ces deux fonctions inconnues u_1 et u_2 . Nous montrerons plus loin (c'est là l'idée de Lagrange) qu'il est possible de choisir cette deuxième condition de sorte qu'on puisse obtenir systématiquement u_1 et u_2 .

On revient maintenant à l'équation (4). En la dérivant et en réorganisant les termes, on obtient

$$y' = -2u_1(t) \sin 2t + 2u_2(t) \cos 2t + u_1'(t) \cos 2t + u_2'(t) \sin 2t. \quad (5)$$

On impose une deuxième condition à u_1 et à u_2 , à savoir que la somme des deux derniers termes du second membre de l'équation (5) soit nulle. Par conséquent,

$$u_1'(t) \cos 2t + u_2'(t) \sin 2t = 0. \quad (6)$$

À partir de l'équation (5), il s'ensuit que

$$y' = -2u_1(t) \sin 2t + 2u_2(t) \cos 2t. \quad (7)$$

Même si le but de l'introduction de la condition (6) n'est pas encore clair, on a du moins simplifié l'expression de y' . En dérivant maintenant l'équation (7), on obtient

$$y'' = -4u_1(t) \cos 2t - 4u_2(t) \sin 2t - 2u_1'(t) \sin 2t + 2u_2'(t) \cos 2t. \quad (8)$$

Ensuite, en substituant dans l'équation (1) les expressions respectives de y et de y'' dans les équations (4) et (8), on trouve que

$$\begin{aligned} y'' + 4y &= -4u_1(t) \cos 2t - 4u_2(t) \sin 2t - 2u_1'(t) \sin 2t + 2u_2'(t) \cos 2t \\ &\quad + 4u_1(t) \cos 2t + 4u_2(t) \sin 2t = 3 \csc t. \end{aligned}$$

Par conséquent, u_1 et u_2 doivent satisfaire à

$$-2u_1'(t) \sin 2t + 2u_2'(t) \cos 2t = 3 \csc t. \quad (9)$$

On résume les résultats obtenus jusqu'à maintenant. On choisit u_1 et u_2 pour qu'elles satisfassent aux équations (6) et (9). On peut considérer ces équations comme un système à deux équations algébriques et à deux inconnues, $u_1'(t)$ et $u_2'(t)$. On peut résoudre les équations (6) et (9) de différentes manières. Par exemple, en résolvant l'équation (6) pour déterminer $u_2'(t)$, on obtient

$$u_2'(t) = -u_1'(t) \frac{\cos 2t}{\sin 2t}. \quad (10)$$

Ensuite, en faisant la substitution pour déterminer $u_2'(t)$ dans l'équation (9) et en simplifiant, on obtient

$$u_1'(t) = -\frac{3 \csc t \sin 2t}{2} = -3 \cos t. \quad (11)$$

► De plus, si on remet l'expression correspondant à $u'_1(t)$ dans l'équation (10) et qu'on utilise une identité trigonométrique élémentaire, on trouve

$$u'_2(t) = \frac{3 \cos t \cos 2t}{\sin 2t} = \frac{3(1 - 2 \sin^2 t)}{2 \sin t} = \frac{3}{2} \csc t - 3 \sin t. \quad (12)$$

Après avoir obtenu $u'_1(t)$ et $u'_2(t)$, la prochaine étape consiste à intégrer pour obtenir $u_1(t)$ et $u_2(t)$. Le résultat est

$$u_1(t) = -3 \sin t + c_1 \quad (13)$$

et

$$u_2(t) = \frac{3}{2} \ln |\csc t - \cot t| + 3 \cos t + c_2. \quad (14)$$

On substitue ces expressions dans l'équation (4) et on obtient

$$y = -3 \sin t \cos 2t + \frac{3}{2} \ln |\csc t - \cot t| \sin 2t + 3 \cos t \sin 2t + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t.$$

Finalement, en utilisant encore une fois les formules trigonométriques, on obtient

$$y = 3 \sin t + \frac{3}{2} \ln |\csc t - \cot t| \sin 2t + c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t. \quad (15)$$

Les termes dans l'équation (15) comportant les constantes arbitraires c_1 et c_2 constituent la solution générale à l'équation homogène correspondante, et les autres forment la solution particulière à l'équation non homogène (1). Par conséquent, l'équation (15) est la solution générale à l'équation (1).

Dans l'exemple précédent, la méthode de variation des paramètres a permis d'obtenir efficacement une solution particulière ainsi que la solution générale à l'équation (1). Il faut maintenant déterminer si cette méthode peut être appliquée à une équation arbitraire. On considère donc

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (16)$$

où p , q et g sont des fonctions continues. On suppose que la solution générale se présente sous la forme

$$y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \quad (17)$$

en ce qui a trait à l'équation homogène correspondante

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (18)$$

Cette hypothèse est importante car, jusqu'à maintenant, on a vu comment résoudre l'équation (18) seulement quand elle admet des coefficients constants. Si l'équation (18) admet des coefficients qui dépendent de t , alors on doit généralement utiliser les méthodes décrites au chapitre 7 pour obtenir $y_c(t)$.

L'idée maîtresse illustrée dans l'exemple 1 consiste à substituer respectivement aux constantes c_1 et c_2 dans l'équation (17) deux fonctions $u_1(t)$ et $u_2(t)$. On a alors

$$y = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t). \quad (19)$$

Ensuite, on tente de déterminer $u_1(t)$ et $u_2(t)$ pour que l'expression présente dans l'équation (19) soit une solution à l'équation non homogène (16) plutôt qu'à l'équation homogène (18). En dérivant l'équation (19), on obtient

$$y' = u'_1(t)y_1(t) + u_1(t)y'_1(t) + u'_2(t)y_2(t) + u_2(t)y'_2(t). \quad (20)$$

Comme dans l'exemple 1, on suppose que la somme des termes impliquant $u'_2(t)$ et $u_2(t)$ dans l'équation (20) est nulle. Ainsi, on pose

$$u'_1(t)y_1(t) + u'_2(t)y_2(t) = 0. \quad (21)$$

À partir de l'équation (20), on a ensuite

$$y' = u_1(t)y_1'(t) + u_2(t)y_2'(t). \quad (22)$$

En dérivant une fois de plus, on obtient

$$y'' = u_1'(t)y_1'(t) + u_1(t)y_1''(t) + u_2'(t)y_2'(t) + u_2(t)y_2''(t). \quad (23)$$

Maintenant, dans l'équation (16), on substitue respectivement les expressions correspondant à y , à y' et à y'' des équations (19), (22) et (23). Après avoir réorganisé les termes dans l'équation résultante, on obtient

$$\begin{aligned} u_1(t)[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)] \\ + u_2(t)[y_2''(t) + p(t)y_2'(t) + q(t)y_2(t)] \\ + u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \end{aligned} \quad (24)$$

Chacune des expressions entre crochets de l'équation (24) est nulle, car y_1 et y_2 sont des solutions à l'équation homogène (18). Par conséquent, l'équation (24) est réduite à

$$u_1'(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2'(t) = g(t). \quad (25)$$

Les équations (21) et (25) forment un système à deux équations et à deux inconnues, qui sont les dérivées $u_1'(t)$ et $u_2'(t)$. Elles correspondent exactement aux équations (6) et (9) de l'exemple 1.

On résout le système (21), (25) pour obtenir

$$u_1'(t) = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \quad u_2'(t) = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)}, \quad (26)$$

où $W(y_1, y_2)$ est le wronskien de y_1 et de y_2 . Il faut noter que la division par W est légitime, puisque y_1 et y_2 constituent un ensemble fondamental de solutions. Par conséquent, le wronskien est non nul. En intégrant les équations (26), on trouve les fonctions recherchées $u_1(t)$ et $u_2(t)$, soit

$$u_1(t) = -\int \frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + c_1, \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt + c_2. \quad (27)$$

Si on peut évaluer les intégrales des équations (27) en termes de fonctions élémentaires, on peut alors substituer les résultats dans l'équation (19) et on obtient ainsi la solution générale à l'équation (16). De façon plus générale, on peut toujours exprimer la solution en termes d'intégrales, comme l'énonce le théorème suivant.

Théorème 3.7.1

Si les fonctions p , q et g sont continues dans un intervalle ouvert I , et si les fonctions y_1 et y_2 forment un ensemble fondamental de solutions à l'équation homogène (18) correspondant à l'équation non homogène (16), on a

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t).$$

Alors, une solution particulière à l'équation (16) est

$$Y(t) = -y_1(t) \int_{t_0}^t \frac{y_2(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds + y_2(t) \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)g(s)}{W(y_1, y_2)(s)} ds, \quad (28)$$

où t_0 est un point bien choisi dans l'intervalle I . La solution générale est

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + Y(t), \quad (29)$$

conformément au théorème 3.6.2.

Si on examine l'expression (28) et qu'on considère la démarche utilisée pour l'obtenir, on note que la méthode de variation des paramètres peut poser deux grandes difficultés. Comme on l'a mentionné plus tôt, la première consiste à déterminer $y_1(t)$ et $y_2(t)$, un ensemble fondamental de solutions à l'équation homogène (18), lorsque ses coefficients ne sont pas constants. L'autre difficulté possible réside dans l'évaluation des intégrales apparaissant dans l'équation (28). Ce problème dépend entièrement de la nature des fonctions y_1 , y_2 et g . Pour utiliser l'équation (28), il faut s'assurer que l'équation différentielle est exactement de la forme (16). Autrement, le terme non homogène $g(t)$ ne sera pas correctement déterminé.

Un grand avantage de la méthode de variation des paramètres est que l'équation (28) donne une expression pour la solution particulière $Y(t)$ sous la forme d'une fonction arbitraire $g(t)$. Cette expression représente un bon point de départ lorsqu'on veut étudier l'effet des variations de la fonction $g(t)$.

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 4, utilisez la méthode de variation des paramètres pour trouver une solution particulière à l'équation différentielle. Ensuite, vérifiez votre réponse en utilisant la méthode des coefficients indéterminés.

1. $y'' - 5y' + 6y = 2e^t$

2. $y'' - y' - 2y = 2e^{-t}$

3. $y'' + 2y' + y = 3e^{-t}$

4. $4y'' - 4y' + y = 16e^{t/2}$

- Dans les problèmes 5 à 12, trouvez la solution générale à l'équation différentielle. Dans les problèmes 11 et 12, g est une fonction continue arbitraire.

5. $y'' + y = \tan t$, $0 < t < \pi/2$

6. $y'' + 9y = 9 \sec^2 3t$, $0 < t < \pi/6$

7. $y'' + 4y' + 4y = t^{-2}e^{-2t}$, $t > 0$

8. $y'' + 4y = 3 \csc 2t$, $0 < t < \pi/2$

9. $4y'' + y = 2 \sec(t/2)$, $-\pi < t < \pi$

10. $y'' - 2y' + y = e^t/(1+t^2)$

11. $y'' - 5y' + 6y = g(t)$

12. $y'' + 4y = g(t)$

- Dans les problèmes 13 à 20, vérifiez que les fonctions y_1 et y_2 satisfont à l'équation homogène correspondante. Ensuite, trouvez une solution particulière à l'équation non homogène. Dans les problèmes 19 et 20, g est une fonction continue arbitraire.

13. $t^2y'' - 2y = 3t^2 - 1$, $t > 0$; $y_1(t) = t^2$, $y_2(t) = t^{-1}$

14. $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 2t^3$, $t > 0$; $y_1(t) = t$, $y_2(t) = te^t$

15. $ty'' - (1+t)y' + y = t^2e^{2t}$, $t > 0$; $y_1(t) = 1+t$, $y_2(t) = e^t$

16. $(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2e^{-t}$, $0 < t < 1$; $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = t$

17. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 \ln x$, $x > 0$; $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 \ln x$

18. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0,25)y = 3x^{3/2} \sin x$, $x > 0$; $y_1(x) = x^{-1/2} \sin x$, $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$

19. $(1-x)y'' + xy' - y = g(x)$, $0 < x < 1$; $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = x$

20. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0,25)y = g(x)$, $x > 0$; $y_1(x) = x^{-1/2} \sin x$, $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$

- 21. Montrez qu'on peut écrire la solution au problème de valeur initiale

$$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0 \quad (\text{i})$$

sous la forme $y = u(t) + v(t)$, où u et v sont des solutions respectives aux deux problèmes de valeur initiale

$$L[u] = 0, \quad u(t_0) = y_0, \quad u'(t_0) = y'_0, \quad (\text{ii})$$

$$L[v] = g(t), \quad v(t_0) = 0, \quad v'(t_0) = 0. \quad (\text{iii})$$

En d'autres mots, si l'équation différentielle et les conditions initiales ne sont pas homogènes, on peut les traiter séparément. Vous devez noter que u est facile à trouver si on connaît un ensemble fondamental de solutions de $L[u] = 0$.

22. En choisissant la borne inférieure d'intégration dans l'équation (28) de la présente section comme point initial t_0 , montrez que $Y(t)$ devient

$$Y(t) = \int_{t_0}^t \frac{y_1(s)y_2(t) - y_1(t)y_2(s)}{y_1(s)y_2'(s) - y_1'(s)y_2(s)} g(s) ds.$$

Montrez que $Y(t)$ est une solution au problème de valeur initiale

$$L[y] = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

Alors, on peut déterminer Y à partir de v telle qu'elle a été obtenue au problème 21.

23. a) Utilisez le résultat du problème 22 pour montrer que la solution au problème de valeur initiale

$$y'' + y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0 \quad (i)$$

est

$$y = \int_{t_0}^t \sin(t-s)g(s) ds. \quad (ii)$$

- b) Utilisez le résultat du problème 21 pour trouver la solution au problème de valeur initiale

$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0.$$

24. Utilisez le résultat du problème 22 pour trouver la solution au problème de valeur initiale

$$L[y] = (D - a)(D - b)y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

où a et b sont deux nombres réels distincts.

25. Utilisez le résultat du problème 22 pour trouver la solution au problème de valeur initiale

$$L[y] = [D^2 - 2\lambda D + (\lambda^2 + \mu^2)]y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0.$$

Vous devez noter que les racines de l'équation caractéristique sont $\lambda \pm i\mu$.

26. Utilisez le résultat du problème 22 pour trouver la solution au problème de valeur initiale

$$L[y] = (D - a)^2 y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

où a est un nombre réel.

27. En combinant les résultats des problèmes 24 à 26, montrez que la solution au problème de valeur initiale

$$L[y] = (aD^2 + bD + c)y = g(t), \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0,$$

où a , b et c sont constants, est de la forme

$$y = \phi(t) = \int_{t_0}^t K(t-s)g(s) ds. \quad (i)$$

La fonction K dépend seulement des solutions y_1 et y_2 à l'équation homogène correspondante, et elle est indépendante du terme non homogène. Une fois qu'on a déterminé K , tous les problèmes non homogènes impliquant le même opérateur différentiel L se réduisent à l'évaluation d'une intégrale. Vous devez aussi noter que même si K dépend de t et de s , seule la combinaison $t - s$ apparaît, donc K est en réalité une fonction d'une seule variable. En considérant $g(t)$ comme la donnée du problème et $\phi(t)$ comme son résultat, il s'ensuit qu'à partir de l'équation (i), le résultat dépend de la donnée dans tout l'intervalle partant de t_0 et s'étendant jusqu'à t . L'intégrale dans l'équation (i) est la **convolution** de K et de g , où K porte le nom de **noyau**.

28. On peut également utiliser la méthode de réduction d'ordre (voir la section 3.5) pour résoudre l'équation non homogène

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (i)$$

à condition de connaître une solution y_1 à l'équation homogène correspondante. Posez $y = v(t)y_1(t)$ et montrez que y satisfait à l'équation (i) si v est une solution à

$$y_1(t)v'' + [2y_1'(t) + p(t)y_1(t)]v' = g(t). \quad (ii)$$

L'équation (ii) est une équation linéaire du premier ordre en v' . En résolvant cette équation, en intégrant le résultat puis en multipliant par $y_1(t)$, on obtient la solution générale à l'équation (i).

- ■ Dans les problèmes 29 à 32, utilisez la méthode mentionnée au problème 28 pour résoudre l'équation différentielle.

29. $t^2 y'' - 2ty' + 2y = 4t^2$, $t > 0$; $y_1(t) = t$

30. $t^2 y'' + 7ty' + 5y = t$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{-1}$

31. $ty'' - (1+t)y' + y = t^2 e^{2t}$, $t > 0$; $y_1(t) = 1 + t$ (voir le problème 15)

32. $(1-t)y'' + ty' - y = 2(t-1)^2 e^{-t}$, $0 < t < 1$; $y_1(t) = e^t$ (voir le problème 16)

3.8 Les oscillations mécaniques et les circuits électriques

Les équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants apparaissent souvent dans la modélisation de processus physiques classiques, par exemple les oscillations d'un système masse-ressort, les vibrations de torsion et la circulation d'un courant électrique dans un circuit branché en série. Ceux-ci peuvent être décrits grâce à la résolution d'un problème de valeur initiale de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0. \quad (1)$$

Cela illustre une relation fondamentale entre les mathématiques et la physique : beaucoup de problèmes de physique peuvent être résolus sur la base d'un même modèle mathématique. Par conséquent, une fois qu'on sait comment résoudre le problème de valeur initiale (1), il suffit d'interpréter les constantes a , b et c et les fonctions y et g pour obtenir les solutions à divers problèmes de nature physique.

Dans la présente section, nous étudierons en détail les oscillations d'un système masse-ressort. En effet, la connaissance du comportement de ce système simple est l'étape de base menant à l'étude de systèmes oscillatoires plus complexes. De plus, les principes qui en seront déduits sont communs à de nombreux problèmes. Considérez un objet de masse m suspendu à l'extrémité d'un ressort vertical de longueur initiale l (voir la figure 3.8.1). Le poids de l'objet induit un étirement initial L du ressort vers le bas (la direction positive du déplacement). Deux forces agissent au point où la masse est attachée au ressort (voir la figure 3.8.2 à la page suivante). La force gravitationnelle (le poids) s'applique vers le bas et son amplitude est de mg , où g est la constante gravitationnelle. Une force F_s exercée par le ressort agit également vers le haut. Si on suppose que l'étirement L du ressort est petit, la force du ressort est proportionnelle à L . C'est ce qu'on appelle la loi de Hooke⁸. On pose donc $F_s = -kL$, où la constante de

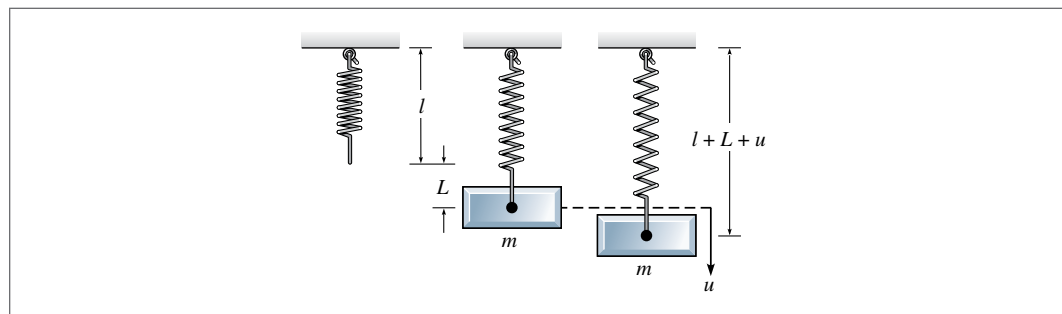


Figure 3.8.1 Système masse-ressort.

8. Robert Hooke (1635-1703) était un scientifique anglais qui s'intéressait à de nombreuses disciplines. Son ouvrage le plus important, *Micrographia*, publié en 1665, décrit diverses observations microscopiques. Robert Hooke a d'abord publié sa loi du comportement élastique en 1676 sous la forme de l'anagramme *ceiinoossstuv*. En 1678, il en a donné la solution *ut tensio sic vis*, ce qui signifie en quelque sorte « telle est la force, tel est le déplacement ».

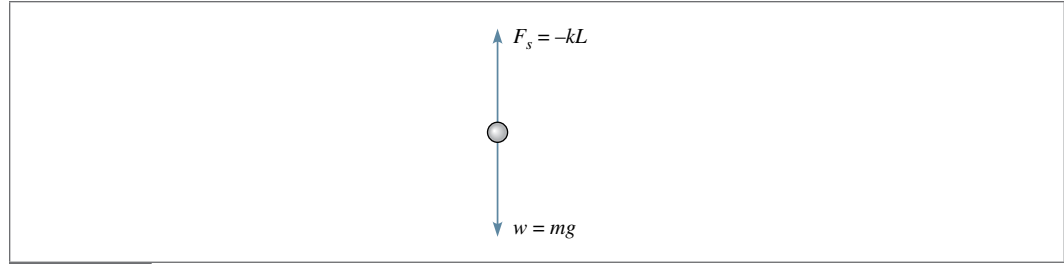


Figure 3.8.2 Diagramme des forces dans un système masse-ressort.

proportionnalité k est dite constante de raideur et où le signe négatif est dû au fait que la force due au ressort s'applique vers le haut (la direction négative du déplacement). Puisque la masse est au repos, les deux forces s'équilibrent, ce qui signifie que

$$mg - kL = 0. \quad (2)$$

Connaissant le poids $w = mg$ de l'objet, on peut mesurer L , puis utiliser l'équation (2) pour déterminer k . Il faut noter que k est exprimée en unités de force par longueur.

Dans ce contexte, nous étudierons le mouvement de l'objet quand une force extérieure agit sur lui ou qu'on le déplace au temps $t = 0$. Soit $u(t)$ le déplacement de l'objet à partir de son point d'équilibre au temps t , la direction positive de $u(t)$ étant orientée vers le bas (voir la figure 3.8.1). Alors, $u(t)$ est régi par les forces qui agissent sur l'objet selon la loi du mouvement de Newton

$$mu''(t) = f(t), \quad (3)$$

où u'' est l'accélération de l'objet et f , la force nette qui agit sur lui. Il faut noter que u et f sont deux fonctions du temps. Pour établir la nature de f , on doit considérer quatre forces distinctes :

1. On tient compte du poids $w = mg$ de l'objet, qui agit toujours vers le bas.
2. On suppose que la force du ressort F_s est proportionnelle à son étirement total $L + u$, et qu'elle agit toujours de sorte que le ressort revienne vers sa position initiale. Si $L + u > 0$, alors le ressort est étiré et la force du ressort est dirigée vers le haut. Dans ce cas,

$$F_s = -k(L + u). \quad (4)$$

D'un autre côté, si $L + u < 0$, alors le ressort est comprimé sur une distance $|L + u|$ et la force du ressort, maintenant dirigée vers le bas, est de $F_s = k|L + u|$. Cependant, lorsque $L + u < 0$, on a $|L + u| = -(L + u)$. Donc, F_s est la même que dans l'équation (4). Ainsi, sans tenir compte de la position de l'objet, la force exercée par le ressort est toujours de la forme de l'équation (4).

3. La force d'amortissement F_d agit toujours dans la direction opposée à celle du mouvement de l'objet. Cette force peut dépendre de plusieurs facteurs : la résistance de l'air ou d'un autre milieu dans lequel l'objet se déplace, une dissipation d'énergie interne due à l'étirement ou à la compression du ressort, une friction entre l'objet et les contraintes (s'il y en a) sur son mouvement unidimensionnel ou encore une source extérieure (un amortisseur) qui transmet une force de résistance à l'objet. Dans tous les cas, on suppose que la force de résistance est proportionnelle à la vitesse $|du/dt|$ de l'objet. C'est ce qu'on appelle généralement un amortissement hydraulique. Si $du/dt > 0$, alors u est croissante et l'objet se déplace vers le bas. La force d'amortissement F_d est alors dirigée vers le haut et vaut

$$F_d(t) = -\gamma u'(t), \quad (5)$$

où γ est une constante de proportionnalité positive appelée la constante d'amortissement. Au contraire, si $du/dt < 0$, alors u est décroissante, l'objet se déplace vers le haut

et F_d est dirigée vers le bas. Dans ce cas, $F_d = \gamma |u'(t)|$. Puisque $|u'(t)| = -u'(t)$, il s'ensuit que $F_d(t)$ reste identique à l'expression donnée à l'équation (5). Ainsi, sans égard à la direction du mouvement de l'objet, la force d'amortissement est toujours exprimée par l'équation (5).

La force d'amortissement peut être complexe, et l'hypothèse selon laquelle elle est modélisée adéquatement par l'équation (5) devrait être vérifiée. Certains amortisseurs ont le comportement décrit dans l'équation (5) et si les autres sources de dissipation sont faibles, on peut les négliger ou encore corriger la constante d'amortissement γ pour les approximer. L'hypothèse (5) a pour avantage important de mener à une équation différentielle linéaire (plutôt que non linéaire). Une analyse approfondie du système est alors simplifiée, comme on le verra dans cette section et dans la suivante.

4. On considère également l'application possible d'une force externe $F(t)$ dirigée soit vers le bas, soit vers le haut (la force externe $F(t)$ est alors respectivement positive ou négative). Celle-ci peut être causée par un mouvement du support sur lequel le ressort est attaché, ou il peut s'agir d'une force appliquée directement sur l'objet. Cette force externe est souvent une fonction périodique.

En considérant ces forces, on peut maintenant réécrire la loi de Newton (3) comme suit :

$$\begin{aligned} mu''(t) &= mg + F_s(t) + F_d(t) + F(t) \\ &= mg + k[L + u(t)] - \gamma u'(t) + F(t). \end{aligned} \quad (6)$$

Puisque $mg - kL = 0$ selon l'équation (2), il s'ensuit que l'équation décrivant le mouvement de l'objet est

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t), \quad (7)$$

où les constantes m , γ et k sont positives. Il faut noter que l'équation (7) a la même forme que l'équation (1).

On doit réaliser que l'équation (7) n'est qu'une modélisation approximative du comportement du déplacement $u(t)$. En particulier, les équations (4) et (5) ne sont respectivement que des approximations de la force du ressort et de la force d'amortissement. On a aussi négligé ici la masse du ressort par rapport à la masse de l'objet qui y est attaché.

La formulation complète de ce problème d'oscillation demande qu'on précise deux conditions initiales : la position initiale u_0 et la vitesse initiale v_0 de l'objet. On a

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \quad (8)$$

Selon le théorème 3.3.1, ces conditions déterminent un problème mathématique admettant une solution unique. Cela confirme notre intuition physique selon laquelle si l'objet est mis en mouvement et si le déplacement et la vitesse au départ sont spécifiés, alors sa position peut être déterminée de façon unique en tout temps. Cette position de l'objet est donnée (approximativement) par la solution à l'équation (7) assujettie aux conditions initiales (8).

Exemple 1

Un objet de 4 lb suspendu à un ressort induit un étirement du ressort de 2 po vers le bas. Supposez que l'objet est déplacé de 6 po supplémentaires vers le bas (la direction positive), puis qu'on le relâche. L'objet se trouve dans un milieu où la force de viscosité est de 6 lb quand l'objet atteint une vitesse de 3 pi/s. En fonction des hypothèses émises précédemment, formulez le problème de valeur initiale qui régit le mouvement de l'objet.

Le problème de valeur initiale approprié est constitué de l'équation différentielle (7) avec les conditions initiales (8). On doit maintenant établir les valeurs des constantes qui apparaissent dans ces équations. La première étape consiste à choisir les unités de mesure. Étant donné l'énoncé du problème, on utilisera le système impérial et non le système international d'unités (SI).

Comme la seule unité de temps mentionnée est la seconde, on l'utilisera pour la variable t . Les pieds et les pouces mentionnés dans l'énoncé constituent deux autres unités de mesure. Le choix des unités importe peu, mais une fois que celui-ci est établi, on doit le respecter par souci de cohérence. On décide de mesurer le déplacement u en pieds.

► Puisque aucune force externe n'est mentionnée dans ce problème, on pose $F(t) = 0$. Pour déterminer m , on considère que

$$m = \frac{w}{g} = \frac{4 \text{ lb}}{32 \text{ pi/s}^2} = \frac{1}{8} \frac{\text{lb} \cdot \text{s}^2}{\text{pi}}.$$

La valeur du coefficient d'amortissement γ est déterminée à partir du fait que $\gamma u'$ est égal à 6 lb lorsque u' vaut 3 pi/s. Par conséquent,

$$\gamma = \frac{6 \text{ lb}}{3 \text{ pi/s}} = 2 \frac{\text{lb} \cdot \text{s}}{\text{pi}}.$$

La valeur de la constante de raideur k dépend de l'étirement initial que l'objet impose au ressort, soit 2 po ou $1/6$ pi. Ainsi,

$$k = \frac{4 \text{ lb}}{1/6 \text{ pi}} = 24 \frac{\text{lb}}{\text{pi}}.$$

Par conséquent, l'équation (7) devient

$$\frac{1}{8} u'' + 2u' + 24u = 0$$

ou

$$u'' + 16u' + 192u = 0. \quad (9)$$

Les conditions initiales sont

$$u(0) = \frac{1}{2}, \quad u'(0) = 0. \quad (10)$$

L'énoncé du problème indique que l'objet est « relâché », donc que sa vitesse initiale est nulle.

Les oscillations libres non amorties Si aucune force externe ne s'applique, alors $F(t) = 0$ dans l'équation (7). On suppose aussi qu'il n'y a aucun amortissement, donc que $\gamma = 0$. Ces hypothèses simplifient l'analyse du système, mais elles ne sont jamais vérifiées en pratique. Toutefois, si l'amortissement réel est faible, l'hypothèse selon laquelle il n'y a aucun amortissement peut donner des résultats satisfaisants sur de courts intervalles de temps. Alors, l'équation du mouvement (7) est réduite à

$$mu'' + ku = 0. \quad (11)$$

L'équation caractéristique correspondant à l'équation (11) est

$$mr^2 + k = 0$$

et ses racines sont $r = \pm i\sqrt{k/m}$. La solution générale à l'équation (11) est

$$u = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t, \quad (12)$$

où

$$\omega_0^2 = k/m. \quad (13)$$

On peut déterminer les constantes arbitraires A et B si les conditions initiales de la forme (8) sont données.

En étudiant la solution à l'équation (11), on peut réécrire l'équation (12) sous la forme

$$u = R \cos(\omega_0 t - \delta) \quad (14)$$

ou

$$u = R \cos \delta \cos \omega_0 t + R \sin \delta \sin \omega_0 t. \quad (15)$$

En comparant l'équation (15) avec l'équation (12), on trouve que A , B , R et δ sont reliés entre eux par les équations

$$A = R \cos \delta, \quad B = R \sin \delta. \quad (16)$$

Ainsi,

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \tan \delta = B/A. \quad (17)$$

Le calcul de la valeur de δ dépend des signes de $\cos \delta$ et de $\sin \delta$ dans les équations (16).

La figure 3.8.3 illustre le graphe de l'équation (14) ou de l'équation équivalente (12), où la présence de conditions initiales est admise. On observe une onde cosinusoidale déphasée qui décrit un mouvement périodique (ou harmonique simple) de l'objet. La **période** du mouvement est

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \left(\frac{m}{k} \right)^{1/2}. \quad (18)$$

La fréquence angulaire $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, mesurée en radians par unité de temps, est dite la **fréquence naturelle** de l'oscillation. L'écart maximal R entre la position de l'objet et son point d'équilibre est l'**amplitude** du mouvement. Le paramètre adimensionnel δ est la **phase** (ou l'angle de phase) qui mesure le déplacement de l'onde à partir de la position normale correspondant à $\delta = 0$.

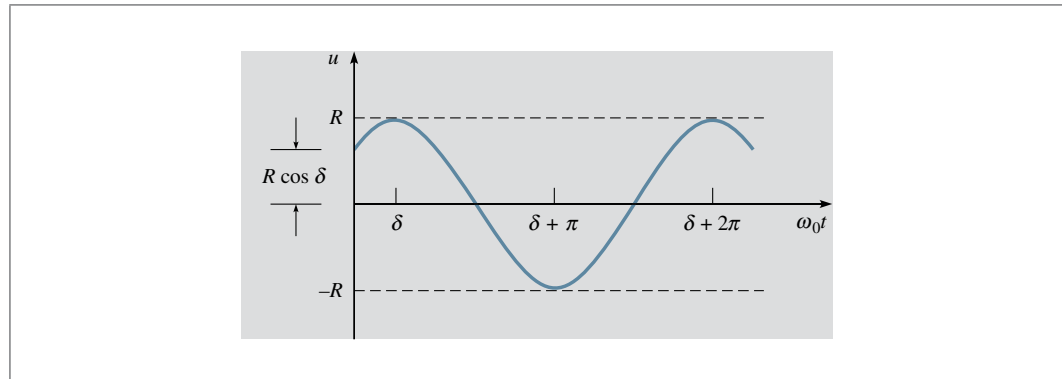


Figure 3.8.3 Mouvement harmonique simple ; $u = R \cos(\omega_0 t - \delta)$.

Il faut noter que le mouvement décrit par l'équation (14) est d'amplitude constante en tout temps. S'il n'y a aucun amortissement, alors le système est incapable de dissiper l'énergie induite par le déplacement et la vitesse initiale. De plus, pour une masse m et une constante de raideur k spécifiques, le système oscille toujours à la même fréquence ω_0 , indépendamment des conditions initiales. Celles-ci permettent toutefois de déterminer l'amplitude du mouvement. Enfin, à partir de l'équation (18), on peut observer que T augmente lorsque m augmente, donc qu'un objet plus pesant oscille plus lentement. À l'inverse, T diminue lorsque k augmente, ce qui signifie qu'un ressort plus rigide fait osciller le système plus rapidement.

Exemple 2

Supposez qu'un objet de 10 lb suspendu à un ressort induise un étirement initial du ressort de 2 po vers le bas. Si l'objet est déplacé de 2 po supplémentaires et qu'on le dirige ensuite vers le haut avec une vitesse initiale de 1 pi/s, déterminez la position de l'objet en fonction du temps. Évaluez aussi la période, l'amplitude et la phase du mouvement.

La constante de raideur est $k = 10 \text{ lb}/2 \text{ po} = 60 \text{ lb}/\text{pi}$, et la masse est $m = w/g = 10/32 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{pi}$. Par conséquent, l'équation du mouvement est réduite à

$$u'' + 192u = 0, \quad (19)$$

▶ et la solution générale est

$$u = A \cos(8\sqrt{3}t) + B \sin(8\sqrt{3}t).$$

La solution qui satisfait aux conditions initiales $u(0) = 1/6$ pi et $u'(0) = -1$ pi/s est

$$u = \frac{1}{6} \cos(8\sqrt{3}t) - \frac{1}{8\sqrt{3}} \sin(8\sqrt{3}t). \quad (20)$$

La fréquence naturelle est $\omega_0 = \sqrt{192} \cong 13,856$ rad/s. Donc, la période est $T = 2\pi/\omega_0 \cong 0,45345$ s. On trouve l'amplitude R et la phase δ à partir des équations (17). On a

$$R^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{192} = \frac{19}{576}, \quad \text{donc } R \cong 0,18162 \text{ pi.}$$

De la deuxième équation (17), on obtient $\tan \delta = -\sqrt{3}/4$. Il existe deux solutions à cette équation, une dans le deuxième quadrant et l'autre dans le quatrième. On a ici $\cos \delta > 0$ et $\sin \delta < 0$, donc, δ est dans le quatrième quadrant. Ainsi,

$$\delta = -\arctan(\sqrt{3}/4) \cong -0,40864 \text{ rad.}$$

La figure 3.8.4 illustre le graphique de la solution (20).

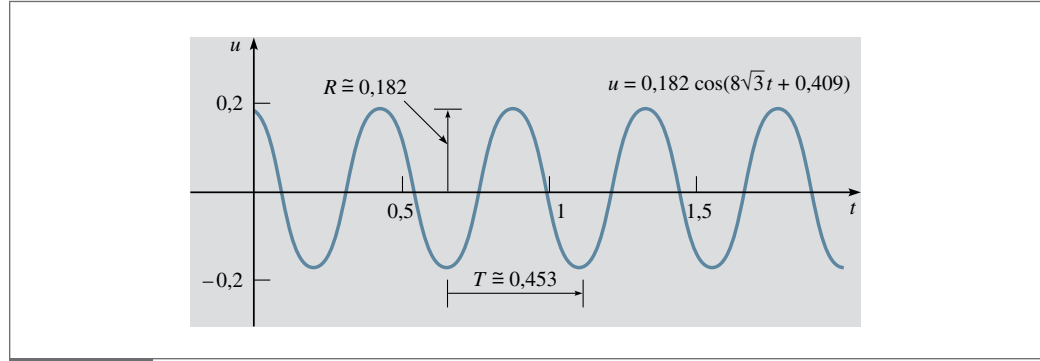


Figure 3.8.4 Oscillation libre non amortie; $u'' + 192u = 0$, $u(0) = 1/6$, $u'(0) = -1$.

Les oscillations libres amorties En présence d'une force d'amortissement, l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'objet est

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0. \quad (21)$$

Maintenant, on s'intéresse à l'influence du coefficient d'amortissement γ sur le déplacement lorsque la masse m et la constante de raideur k sont fixées. L'équation caractéristique correspondante est

$$mr^2 + \gamma r + k = 0,$$

et ses racines sont

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} = \frac{\gamma}{2m} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4km}{\gamma^2}} \right). \quad (22)$$

Selon le signe de $\gamma^2 - 4km$, la solution u a l'une des formes suivantes :

$$\gamma^2 - 4km > 0, \quad u = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}; \quad (23)$$

$$\gamma^2 - 4km = 0, \quad u = (A + Bt)e^{-\gamma t/2m}; \quad (24)$$

$$\gamma^2 - 4km < 0, \quad u = e^{-\gamma t/2m}(A \cos \mu t + B \sin \mu t), \quad \mu = \frac{(4km - \gamma^2)^{1/2}}{2m} > 0. \quad (25)$$

Puisque m , γ et k sont positifs, $\gamma^2 - 4km$ est toujours inférieur à γ^2 . Ainsi, si $\gamma^2 - 4km \geq 0$, alors les valeurs de r_1 et de r_2 données par l'équation (22) sont négatives. Si $\gamma^2 - 4km < 0$, alors les valeurs de r_1 et r_2 sont complexes, et leurs parties réelles sont négatives. Par conséquent, la solution u tend toujours vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$, indépendamment des valeurs des constantes arbitraires A et B , donc sans égard aux conditions initiales. Cela confirme notre intuition : en présence d'amortissement, l'énergie initialement transmise au système se dissipe de manière progressive et, par conséquent, le mouvement tend à se stabiliser.

Le cas le plus important est le troisième, qui survient lorsque la force d'amortissement est faible. Si on pose $A = R \cos \delta$ et $B = R \sin \delta$ dans l'équation (25), alors on obtient

$$u = Re^{-\gamma t/2m} \cos(\mu t - \delta). \quad (26)$$

Le déplacement u se situe entre les courbes $u = \pm Re^{-\gamma t/2m}$. Il décrit alors une onde cosinusoidale d'amplitude décroissante. La figure 3.8.5 illustre un exemple typique de ce phénomène. On appelle ce mouvement une oscillation amortie. Le facteur d'amplitude R dépend de m , de γ , de k et des conditions initiales.

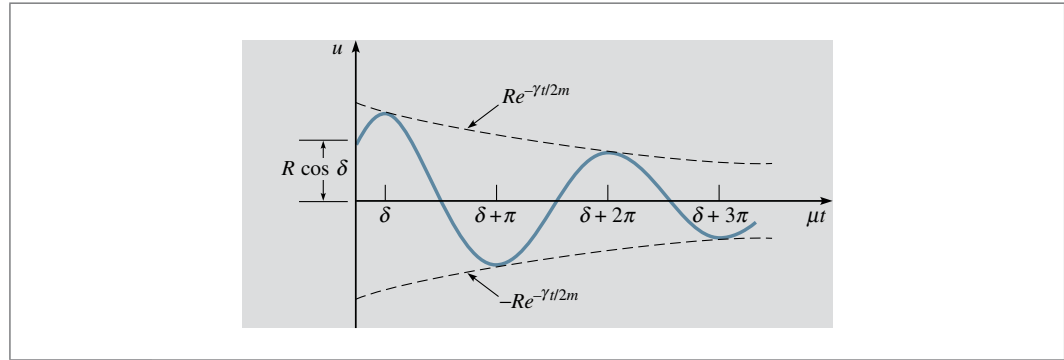


Figure 3.8.5 Oscillation amortie ; $u = Re^{-\gamma t/2m} \cos(\mu t - \delta)$.

Bien que le mouvement ne soit pas périodique, le paramètre μ détermine la fréquence à laquelle la masse oscille. Par conséquent, on appelle μ la **quasi-fréquence**. En comparant μ avec la fréquence ω_0 du mouvement non amorti, on trouve

$$\frac{\mu}{\omega_0} = \frac{(4km - \gamma^2)^{1/2}/2m}{\sqrt{k/m}} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{1/2} \cong 1 - \frac{\gamma^2}{8km}. \quad (27)$$

La dernière approximation est valide lorsque $\gamma^2/4km$ est petit. On qualifie cette situation d'amortissement faible. Un tel amortissement a pour effet de réduire légèrement la fréquence de l'oscillation. Par analogie avec l'équation (18), la quantité $T_d = 2\pi/\mu$ s'appelle la **quasi-période**. Celle-ci correspond au temps qui s'écoule entre deux maximums successifs ou deux minimums successifs de la position de l'objet, ou entre des passages successifs de l'objet par son point d'équilibre. La relation entre T_d et T est donnée par

$$\frac{T_d}{T} = \frac{\omega_0}{\mu} = \left(1 - \frac{\gamma^2}{4km}\right)^{-1/2} \cong \left(1 + \frac{\gamma^2}{8km}\right), \quad (28)$$

où on considère comme encore valide la dernière approximation lorsque $\gamma^2/4km$ est petit. Ainsi, un amortissement faible n'influence pas la quasi-période.

Les équations (27) et (28) renforcent la signification du ratio adimensionnel $\gamma^2/4km$. Il faut remarquer que non seulement la valeur de γ , mais également celle de γ^2 par rapport à $4km$, permettent de déterminer si l'amortissement est faible ou non. Lorsque $\gamma^2/4km$ est petit, alors on peut négliger l'effet de l'amortissement dans les calculs de la quasi-fréquence et de la quasi-période du mouvement. D'un autre côté, dans une étude détaillée du mouvement de l'objet en tout temps, on ne doit jamais négliger la force d'amortissement, aussi petite soit-elle.

Lorsque $\gamma^2/4km$ augmente, la quasi-fréquence μ diminue et la quasi-période T_d augmente. En fait, $\mu \rightarrow 0$ et $T_d \rightarrow \infty$ lorsque $\gamma \rightarrow 2\sqrt{km}$. Comme l'indiquent les équations (23), (24) et (25), la nature de la solution change lorsque γ atteint la valeur $2\sqrt{km}$. On appelle cette valeur **amortissement critique** et, pour des valeurs supérieures de γ , on parle de **mouvement suramorti**. En ce qui concerne les cas présentés respectivement dans les équations (24) et (23), la masse revient à son point d'équilibre, mais elle n'oscille pas autour de ce point, comme lorsque γ est faible. La figure 3.8.6 illustre deux exemples typiques d'amortissement critique. On discute cette situation plus en détail dans les problèmes 21 et 22.

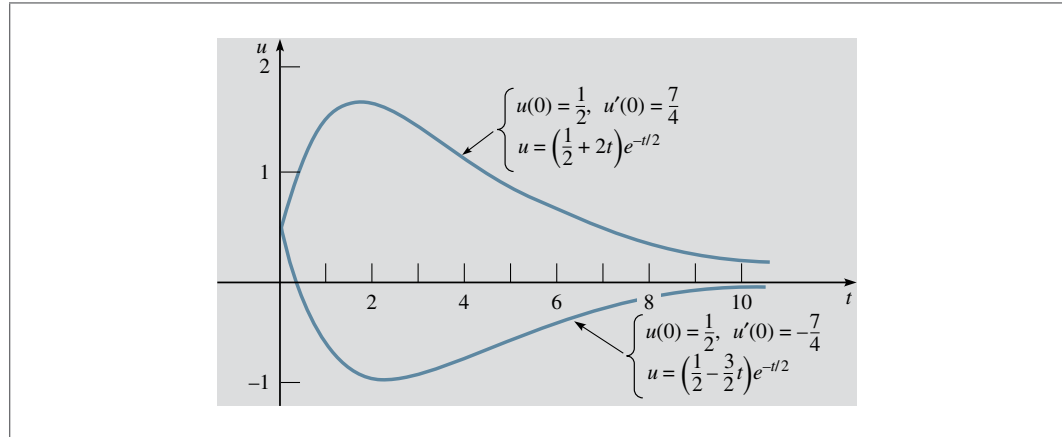


Figure 3.8.6 Amortissements critiques: $u'' + u' + 0,25u = 0$; $u = (A + Bt)e^{-t/2}$.

Exemple 3

Le mouvement d'un système masse-ressort est régi par l'équation différentielle

$$u'' + 0,125u' + u = 0, \quad (29)$$

où u est mesuré en pieds et t en secondes. Si $u(0) = 2$ et $u'(0) = 0$, déterminez la position de l'objet au temps t . Trouvez la quasi-fréquence et la quasi-période, de même que le premier instant où l'objet passe par son point d'équilibre. Trouvez aussi le temps τ tel que $|u(t)| < 0,1$ pour tout $t > \tau$.

La solution à l'équation (29) est

$$u = e^{-t/16} \left[A \cos \frac{\sqrt{255}}{16} t + B \sin \frac{\sqrt{255}}{16} t \right].$$

Pour satisfaire aux conditions initiales, on doit choisir $A = 2$ et $B = 2/\sqrt{255}$. Ainsi, la solution au problème de valeur initiale est

$$\begin{aligned} u &= e^{-t/16} \left(2 \cos \frac{\sqrt{255}}{16} t + \frac{2}{\sqrt{255}} \sin \frac{\sqrt{255}}{16} t \right) \\ &= \frac{32}{\sqrt{255}} e^{-t/16} \cos \left(\frac{\sqrt{255}}{16} t - \delta \right), \end{aligned} \quad (30)$$

où $\tan \delta = 1/\sqrt{255}$, donc $\delta \approx 0,06254$. Le déplacement de l'objet en fonction du temps est illustré à la figure 3.8.7. À des fins de comparaison, dans cette même figure, on illustre aussi le mouvement quand l'amortissement est négligé.

La quasi-fréquence est $\mu = \sqrt{255}/16 \approx 0,998$, et la quasi-période est $T_d = 2\pi/\mu \approx 6,295$ s. Ces valeurs ne diffèrent que légèrement des valeurs correspondantes (1 et 2π , respectivement) pour une oscillation non amortie. Cette situation est claire sur les graphes de la figure 3.8.7, où on observe un comportement de croissance-décroissance fort similaire pour les deux courbes dans les mêmes intervalles de temps. Le coefficient d'amortissement est faible dans cet exemple, soit à peine $1/16$ de la valeur critique. Néanmoins, l'amplitude de l'oscillation diminue rapidement. La figure 3.8.8 illustre le graphique de la solution pour $40 \leq t \leq 60$ et u entre $\pm 0,1$. Le graphe permet d'estimer la valeur de τ à environ 47,5; un calcul plus précis donne $\tau \approx 47,5149$ s.

- Afin de trouver le temps où la masse revient pour la première fois à son point d'équilibre, on reprend l'équation (30) et on pose $\sqrt{255}t/16 - \delta$ égal à $\pi/2$, la plus petite racine positive de la fonction cosinus. En solutionnant pour déterminer t , on obtient

$$t = \frac{16}{\sqrt{255}} \left(\frac{\pi}{2} + \delta \right) \cong 1,637 \text{ s.}$$

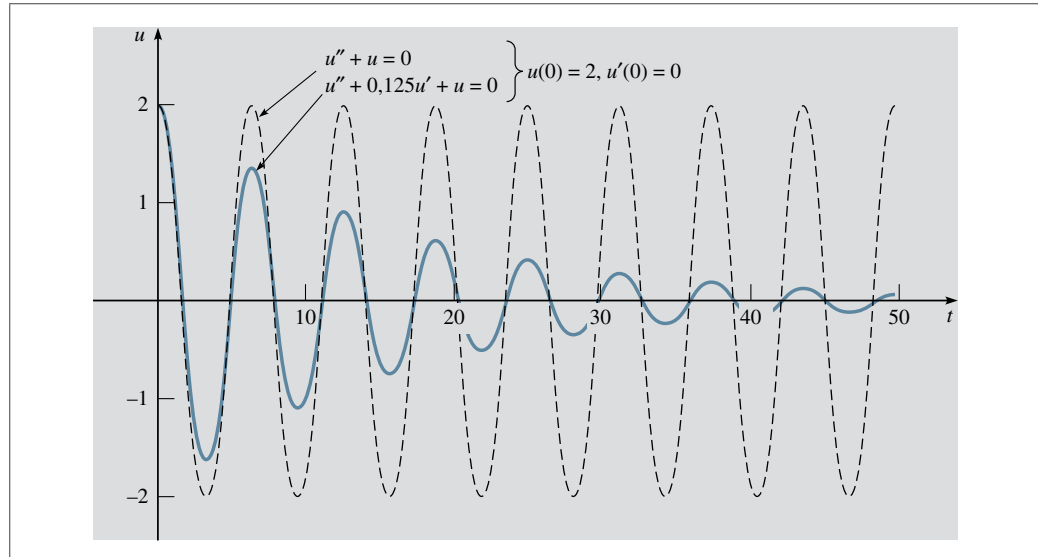


Figure 3.8.7 Oscillation avec amortissement faible (courbe pleine) et oscillation sans amortissement (courbe pointillée).

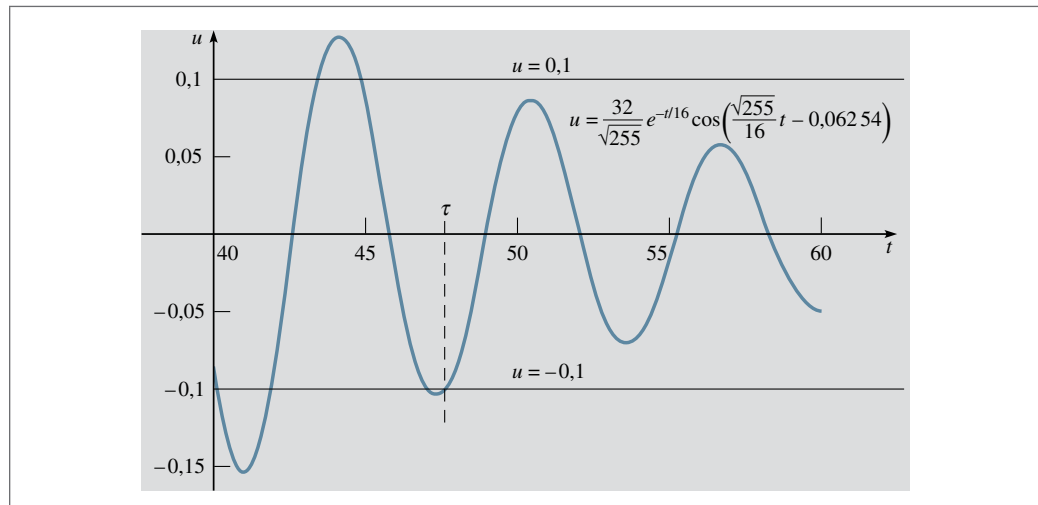


Figure 3.8.8 Solution à l'exemple 3; évaluation de τ .

Les circuits électriques Un deuxième exemple dans lequel apparaissent des équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants est un modèle du flux d'un courant électrique dans un circuit simple branché en série (voir la figure 3.8.9 à la page suivante). Le courant I (en ampères) est une fonction du temps t . La résistance R (en ohms), la capacitance C (en farads) et l'inductance L (en henrys) sont toutes positives et on suppose qu'elles admettent des valeurs spécifiques. La tension résultante E (en volts) est également une fonction du temps. Une autre quantité physique impliquée est la charge totale Q (en coulombs) du condensateur au temps t . La relation entre la charge Q et le courant I est

$$I = dQ/dt. \quad (31)$$

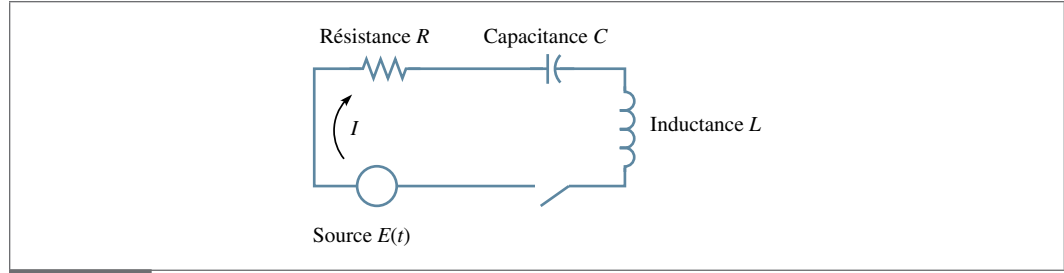


Figure 3.8.9 Circuit électrique simple.

Le flux du courant dans un circuit électrique est régi par la deuxième loi de Kirchhoff⁹ : dans un circuit fermé, la tension résultante est égale à la somme des chutes de tension dans le reste du circuit.

Selon les lois élémentaires de l'électricité, on sait que :

- la chute de tension aux bornes de la résistance est de IR ;
- la chute de tension aux bornes du condensateur est de Q/C ;
- la chute de tension aux bornes de l'inducteur est de LdI/dt .

Ainsi, selon la loi de Kirchhoff,

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t). \quad (32)$$

Les unités de tension, de résistance, de courant, de charge, de capacitance, d'inductance et de temps sont toutes apparentées :

$$1 \text{ volt} = 1 \text{ ohm} \cdot 1 \text{ ampère} = 1 \text{ coulomb/1 farad} = 1 \text{ henry} \cdot 1 \text{ ampère/1 seconde}.$$

En substituant l'expression de l'équation (31) dans l'équation (32), on obtient l'équation différentielle

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \quad (33)$$

en la charge Q . Les conditions initiales sont

$$Q(t_0) = Q_0, \quad Q'(t_0) = I(t_0) = I_0. \quad (34)$$

On doit donc spécifier la charge du condensateur et le courant dans le circuit au temps initial t_0 .

On peut aussi obtenir autrement une équation différentielle pour le courant I . On dérive l'équation (33) en fonction de t , puis on substitue I à dQ/dt , conformément à l'équation (31). Le résultat est

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t) \quad (35)$$

avec les conditions initiales

$$I(t_0) = I_0, \quad I'(t_0) = I'_0. \quad (36)$$

À partir de l'équation (32), il s'ensuit que

$$I'_0 = \frac{E(t_0) - RI_0 - (I/C)Q_0}{L}. \quad (37)$$

9. Gustave Kirchhoff (1824-1887), professeur à Breslau, Heidelberg, et à Berlin, fut l'un des physiciens éminents du XIX^e siècle. Il a établi les lois fondamentales régissant les circuits électriques vers 1845, alors qu'il était encore étudiant à Königsberg. Il est aussi connu pour son travail notoire en absorption et en émission électromagnétiques et il a été l'un des fondateurs de la spectroscopie.

Ainsi, I'_0 est aussi déterminé par la charge et le courant de départ, qui sont des quantités physiquement mesurables.

La conclusion la plus importante qu'on puisse tirer de cette étude est la suivante : le flux du courant dans le circuit est décrit par un problème de valeur initiale ayant précisément la même forme que le problème décrivant le mouvement d'un système masse-ressort. Il s'agit d'un bel exemple du rôle unificateur des mathématiques. En effet, une fois qu'on sait comment résoudre des équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants, on peut interpréter les résultats pour ce qui est des vibrations mécaniques, de la circulation dans un circuit électrique ou de toute autre situation physique pouvant être décrite par le même problème.

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 4, déterminez ω_0 , R et δ pour pouvoir écrire l'expression donnée sous la forme $u = R \cos(\omega_0 t - \delta)$.

1. $u = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$

2. $u = -\cos t + \sqrt{3} \sin t$

3. $u = 4 \cos 3t - 2 \sin 3t$

4. $u = -2 \cos \pi t - 3 \sin \pi t$

- Ⓢ 5. Un objet de 2 lb suspendu à un ressort entraîne un étirement du ressort de 6 po vers le bas. Si l'objet est tiré vers le bas sur 3 po supplémentaires, puis qu'il est lâché, et s'il n'y a aucun amortissement, déterminez la position u de l'objet au temps t . Tracez le graphe de u en fonction de t . Trouvez la fréquence, la période et l'amplitude du mouvement.
6. Un objet de 100 g suspendu à un ressort entraîne un étirement du ressort de 5 cm. Si l'objet est mis en mouvement vers le bas depuis son point d'équilibre avec une vitesse initiale de 10 cm/s, et s'il n'y a aucun amortissement, déterminez la position u de l'objet au temps t . Quand l'objet revient-il pour la première fois à son point d'équilibre ?
7. Un objet de 3 lb suspendu à un ressort entraîne un étirement du ressort de 3 po vers le bas. Si l'objet est poussé vers le haut en contractant le ressort sur une distance de 1 po, puis qu'il est mis en mouvement vers le bas avec une vitesse initiale de 2π po/s, et s'il n'y a aucun amortissement, trouvez la position u de l'objet au temps t . Déterminez la fréquence, la période, l'amplitude et la phase du mouvement.
8. Un circuit en série est constitué d'un condensateur de $0,25 \times 10^{-6}$ farad et d'un inducteur de 1 henry. Si la charge appliquée au départ sur le condensateur est de 10^{-6} coulomb et si le courant est nul initialement, trouvez la charge Q dans le condensateur au temps t .
- Ⓢ 9. Un objet de 20 g suspendu à un ressort entraîne un étirement du ressort de 5 cm vers le bas. Supposez que l'objet est aussi attaché à un amortisseur hydraulique avec une constante d'amortissement de 400 dynes·s/cm. Si l'objet est tiré vers le bas sur 2 cm supplémentaires puis qu'il est relâché, trouvez sa position u au temps t . Tracez le graphe de u en fonction de t . Déterminez la quasi-fréquence et la quasi-période. Trouvez le rapport de la quasi-période avec la période du mouvement non amorti correspondant. Trouvez aussi le temps τ tel que $|u(t)| < 0,05$ cm pour tout $t > \tau$.
- Ⓢ 10. Un objet de 16 lb suspendu à un ressort entraîne un étirement du ressort de 3 po vers le bas. L'objet est attaché à un amortisseur hydraulique avec une constante d'amortissement de 2 lb·s/pi. Si l'objet est mis en mouvement à partir de son point d'équilibre vers le bas avec une vitesse initiale de 3 po/s, trouvez sa position u au temps t . Tracez le graphe de u en fonction de t . Déterminez à quel moment l'objet revient pour la première fois à son point d'équilibre. Trouvez aussi le temps τ tel que $|u(t)| < 0,01$ po pour tout $t > \tau$.
11. Un ressort est étiré sur 10 cm vers le bas par une force de 3 newtons. Un objet de 2 kg est suspendu au ressort et il est aussi attaché à un amortisseur hydraulique qui exerce une force de 3 newtons quand la vitesse de la masse est de 5 m/s. Si l'objet est tiré vers le bas sur 5 cm au-dessous de sa position d'équilibre avec une vitesse initiale vers le bas de 10 cm/s, déterminez sa position u au temps t . Trouvez la quasi-fréquence μ et le ratio μ par rapport à la fréquence naturelle du mouvement non amorti correspondant.

12. Un circuit en série est constitué d'un condensateur de 10^{-5} farad, d'une résistance de 3×10^2 ohms et d'un inducteur de 0,2 henry. La charge initiale dans le condensateur est de 10^{-6} coulomb, et le courant initial est nul. Trouvez la charge Q dans le condensateur au temps t .
13. Un système oscillatoire satisfait à l'équation $u'' + \gamma u' + u = 0$. Trouvez la valeur du coefficient d'amortissement γ telle que la quasi-période du mouvement amorti soit de 50 % plus grande que la période du mouvement non amorti correspondant.
14. Montrez que la période du mouvement d'une oscillation non amortie d'un objet suspendu à un ressort vertical est $2\pi\sqrt{L/g}$, où L est l'étirement du ressort dû au poids de l'objet et g est la constante gravitationnelle usuelle.
15. Montrez qu'on peut exprimer la solution au problème de valeur initiale

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0, \quad u(t_0) = u_0, \quad u'(t_0) = u'_0$$

comme la somme $u = v + w$, où v satisfait aux conditions initiales $v(t_0) = u_0$, $v'(t_0) = 0$, w satisfait aux conditions initiales $w(t_0) = 0$, $w'(t_0) = u'_0$ et v et w satisfont à la même équation différentielle que celle de u . Il s'agit d'un autre exemple de solutions superposées à des problèmes simples pour obtenir la solution à un problème plus général.

16. Montrez qu'on peut réécrire $A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t$ sous la forme $r \sin(\omega_0 t - \theta)$. Déterminez r et θ en fonction de A et de B . Si $R \cos(\omega_0 t - \delta) = r \sin(\omega_0 t - \theta)$, déterminez la relation entre R , r , δ et θ .
17. Un objet de 8 lb suspendu à un ressort entraîne un étirement du ressort de 1,5 po vers le bas. L'objet est également attaché à un amortisseur de coefficient γ . Déterminez la valeur de γ pour laquelle le système est un système à amortissement critique. Assurez-vous de préciser les unités de γ .
18. Si un circuit en série est constitué d'un condensateur de $C = 0,8 \times 10^{-6}$ farad et d'un inducteur de $L = 0,2$ henry, trouvez la résistance R pour que le circuit soit tout de même amorti.
19. Supposez que le système décrit par l'équation $mu'' + \gamma u' + ku = 0$ est un système à amortissement critique ou suramorti. Montrez que l'objet peut passer par son point d'équilibre au moins une fois, peu importe les conditions initiales.

Suggestion : Déterminez toutes les valeurs possibles de t pour lesquelles $u = 0$.

20. Supposez que le système décrit par l'équation $mu'' + \gamma u' + ku = 0$ est un système à amortissement critique et que les conditions initiales sont $u(0) = u_0$, $u'(0) = v_0$. Si $v_0 = 0$, montrez que $u \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, mais que u n'est jamais nul. Si u_0 est positif, déterminez une condition portant sur v_0 qui assurera que l'objet passera par son point d'équilibre après avoir été relâché.

21. Le décréement logarithmique

- a) Pour l'oscillation amortie décrite dans l'équation (26), montrez que le temps écoulé entre deux maximums successifs est de $Td = 2\pi/\mu$.
- b) Montrez que le ratio des déplacements en deux maximums successifs est donné par $\exp(\gamma T_d/2m)$. Vous devez noter que ce ratio ne dépend pas du choix du couple de maximums. Le logarithme naturel de ce ratio s'appelle le décréement logarithmique et on le note Δ .
- c) Montrez que $\Delta = \pi\gamma/m\mu$. Puisque m , μ et Δ sont des quantités qu'on peut facilement mesurer, ce résultat est une méthode pratique permettant de déterminer la constante d'amortissement du système, qui est plus difficile à mesurer directement. En particulier, pour les oscillations d'un objet dans un fluide visqueux, la constante d'amortissement dépend de la viscosité du fluide. Quand l'objet est de forme géométrique simple, le type de dépendance est connu, et la relation précédente permet de déterminer la viscosité de manière expérimentale. Il s'agit de la manière la plus précise pour trouver la viscosité d'un gaz à haute pression.

22. En vous reportant au problème 21, trouvez le décréement logarithmique du système décrit dans le problème 10.
23. Pour le système décrit au problème 17, supposez que $\Delta = 3$ et que $Td = 0,3$ s. En vous reportant au problème 21, déterminez la valeur du coefficient d'amortissement γ .
24. La position de l'objet dans un système masse-ressort satisfait au problème de valeur initiale

$$\frac{3}{2}u'' + ku = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = v.$$

Si la période et l'amplitude du mouvement résultant sont respectivement de π et de 3, déterminez les valeurs de k et de v .

- 25. Considérez le problème de valeur initiale

$$u'' + \gamma u' + u = 0, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$$

On désire connaître le temps requis pour que la solution devienne «négligeable» et savoir comment le temps subit l'influence du coefficient d'amortissement γ . Pour être plus précis, on recherche le temps τ tel que $|u(t)| < 0,01$ pour tout $t > \tau$. Vous devez noter que l'amortissement critique dans ce problème se produit lorsque $\gamma = 2$.

- Soit $\gamma = 0,25$. Déterminez τ ou, du moins, évaluez-le assez précisément à partir d'un graphe de la solution.
- Répétez la partie a) pour différentes valeurs de γ dans l'intervalle $0 < \gamma < 1,5$. Vous devez noter que τ diminue de manière constante lorsque γ augmente dans cet intervalle.
- Construisez un graphe de τ en fonction de γ en traçant les couples de valeurs trouvées aux parties a) et b). Le graphe est-il une courbe lisse ?
- Reprenez la partie b) pour diverses valeurs de γ entre 1,5 et 2. Montrez que τ continue à diminuer jusqu'à ce que γ atteigne une certaine valeur critique γ_0 et qu'ensuite τ augmente. Trouvez γ_0 et la valeur minimale correspondante de τ à deux décimales près.
- Une autre manière de procéder consiste à écrire la solution au problème de valeur initiale de la forme (26). Ne tenez pas compte du facteur cosinus. Considérez seulement le facteur exponentiel et l'amplitude R . Ensuite, trouvez une expression pour représenter τ en fonction de γ . Comparez les résultats approximatifs obtenus de cette manière avec les valeurs déterminées aux parties a), b) et d).

26. Considérez le problème de valeur initiale

$$mu'' + \gamma u' + ku = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0.$$

Supposez que $\gamma^2 < 4km$.

- Résolvez le problème de valeur initiale.
 - Écrivez la solution sous la forme $u(t) = R \exp(-\gamma t/2m) \cos(\mu t - \delta)$. Déterminez R en termes de m, γ, k, u_0 et v_0 .
 - Étudiez comment R dépend du coefficient d'amortissement γ quand les valeurs des autres paramètres sont fixées.
27. Un bloc cubique de côté l et de masse volumique ρ par unité de volume flotte dans un fluide de masse volumique ρ_0 par unité de volume, où $\rho_0 > \rho$. Si le bloc est légèrement immergé puis relâché, il oscille dans la direction verticale. En supposant qu'on peut négliger l'amortissement hydraulique du fluide et de l'air, construisez l'équation différentielle régissant le mouvement et déterminez la période du mouvement.

Suggestion : Référez-vous au principe d'Archimède : Un objet qui est complètement ou partiellement immergé dans un fluide subit une force vers le haut égale au poids du fluide déplacé.

28. La position d'un certain système masse-ressort non amorti satisfait au problème de valeur initiale

$$u'' + 2u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 2.$$

- Trouvez la solution à ce problème de valeur initiale.
- Tracez le graphe de u en fonction de t et de u' en fonction de t dans un même plan.
- Tracez le graphe de u' en fonction de u , c'est-à-dire tracez le graphe de $u(t)$ et de $u'(t)$ où t est le paramètre. Ce graphe s'appelle une courbe de phase, et le plan uu' s'appelle le plan de phase. Vous devez noter qu'une courbe fermée dans le plan de phase correspond à une solution périodique $u(t)$. Quelle est la direction du mouvement sur la courbe de phase lorsque t augmente ?

29. La position d'un objet dans un système masse-ressort satisfait au problème de valeur initiale

$$u'' + \frac{1}{4}u' + 2u = 0, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 2.$$

- Trouvez la solution à ce problème de valeur initiale.
- Tracez le graphe de u en fonction de t et de u' en fonction de t dans un même plan.
- Tracez le graphe de u' en fonction de u dans le plan de phase (voir le problème 28). Déterminez divers points correspondants sur les courbes des parties b) et c). Quelle est la direction du mouvement dans la courbe de phase lorsque t augmente ?

- ▶ 30. En l'absence d'amortissement, le mouvement d'un objet dans un système masse-ressort satisfait au problème de valeur initiale

$$mu'' + ku = 0, \quad u(0) = a, \quad u'(0) = b.$$

- Montrez que l'énergie cinétique initialement transmise à l'objet est de $mb^2/2$ et que l'énergie potentielle initialement emmagasinée dans le ressort est de $ka^2/2$ et, par conséquent, que l'énergie totale initiale dans le système est de $(ka^2 + mb^2)/2$.
 - Résolvez le problème de valeur initiale.
 - En utilisant la solution de la partie b), déterminez l'énergie totale dans le système au temps t . Votre résultat doit confirmer le principe de conservation de l'énergie pour ce système.
31. Supposez qu'un objet de masse m glisse sans friction sur une surface horizontale. L'objet est attaché à un ressort dont le coefficient de raideur est k (voir la figure 3.8.10), et il est aussi assujéti à une résistance de l'air de coefficient γ . Montrez que le déplacement $u(t)$ de l'objet à partir de sa position d'équilibre satisfait à l'équation (21). Comment la construction de l'équation du mouvement décrite ici diffère-t-elle de la construction donnée dans la présente section ?

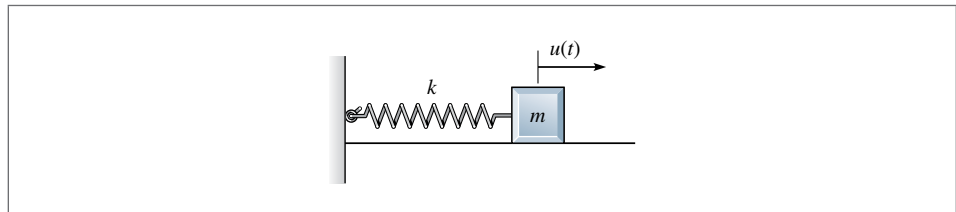


Figure 3.8.10 Système masse-ressort.

- Ⓢ 32. Dans le système masse-ressort du problème 31, supposez que la force du ressort n'est pas donnée par la loi de Hooke, mais qu'elle satisfait plutôt à la relation

$$F_s = -(ku + \epsilon u^3),$$

où $k > 0$ et ϵ est petit mais peut être positif ou négatif. Ce ressort est appelé un ressort durcissant si $\epsilon > 0$ et un ressort ramollissant si $\epsilon < 0$. Pourquoi ces termes sont-ils appropriés ?

- Montrez que le déplacement $u(t)$ de l'objet à partir de sa position d'équilibre satisfait à l'équation différentielle

$$mu'' + \gamma u' + ku + \epsilon u^3 = 0.$$

Supposez que les conditions initiales sont

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1.$$

Dans le reste de ce problème, supposez que $m = 1$, $k = 1$ et $\gamma = 0$.

- Trouvez $u(t)$ lorsque $\epsilon = 0$ et déterminez l'amplitude et la période du mouvement.
- Soit $\epsilon = 0,1$. Tracez le graphique (une approximation numérique) de la solution. Le mouvement semble-t-il être périodique ? Estimez l'amplitude et la période.
- Répétez la partie c) pour $\epsilon = 0,2$ et $\epsilon = 0,3$.
- Tracez le graphique des valeurs estimées de l'amplitude A et de la période T en fonction de ϵ . Décrivez comment A et T , respectivement, dépendent de ϵ .
- Répétez les parties c), d) et e) pour des valeurs négatives de ϵ .

3.9 Les oscillations forcées

Nous allons maintenant examiner le cas où une force externe périodique est appliquée à un système masse-ressort. Le comportement de ce système simple modélise le comportement de nombreux systèmes oscillatoires comportant une force externe produite, par exemple, par un

moteur fixé au système. Nous allons d'abord considérer le cas où il y a de l'amortissement, puis nous examinerons le cas idéal où on suppose qu'il n'y a pas d'amortissement.

Les oscillations forcées avec amortissement Les calculs algébriques peuvent être assez complexes dans ce genre de problème ; nous allons donc commencer avec un exemple relativement simple.

Exemple 1

Supposez que le mouvement d'un système masse-ressort satisfait à l'équation différentielle

$$u'' + u' + 1,25u = 3 \cos t \quad (1)$$

et aux conditions initiales

$$u(0) = 2, \quad u'(0) = 3. \quad (2)$$

Trouvez la solution à ce problème de valeur initiale et décrivez le comportement de cette solution lorsque t est grand.

L'équation caractéristique de l'équation homogène correspondant à l'équation (1) est $r^2 + r + 1,25 = 0$ et ses racines sont $r = -0,5 \pm i$. Par conséquent, la solution générale $u_c(t)$ à cette équation homogène est

$$u_c(t) = c_1 e^{-t/2} \cos t + c_2 e^{-t/2} \sin t. \quad (3)$$

Une solution particulière à l'équation (1) a la forme $U(t) = A \cos t + B \sin t$, où on détermine A et B en substituant $U(t)$ à u dans l'équation (1). On obtient alors $U'(t) = -A \sin t + B \cos t$ et $U''(t) = -A \cos t - B \sin t$. Dans ce cas, à partir de l'équation (1), on obtient

$$(0,25A + B) \cos t + (-A + 0,25B) \sin t = 3 \cos t.$$

Par conséquent, A et B doivent satisfaire aux équations

$$0,25A + B = 3, \quad -A + 0,25B = 0,$$

ce qui donne $A = 12/17$ et $B = 48/17$. Donc, la solution particulière est

$$U(t) = \frac{12}{17} \cos t + \frac{48}{17} \sin t, \quad (4)$$

et la solution générale à l'équation (1) est

$$u = u_c(t) + U(t) = c_1 e^{-t/2} \cos t + c_2 e^{-t/2} \sin t + \frac{12}{17} \cos t + \frac{48}{17} \sin t. \quad (5)$$

Les constantes restantes c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions initiales (2). D'après l'équation (5), on a

$$u(0) = c_1 + \frac{12}{17} = 2, \quad u'(0) = -\frac{1}{2}c_1 + c_2 + \frac{48}{17} = 3,$$

donc, $c_1 = 22/17$ et $c_2 = 14/17$. Ainsi, on obtient enfin la solution au problème de valeur initiale donné, à savoir,

$$u = \frac{22}{17} e^{-t/2} \cos t + \frac{14}{17} e^{-t/2} \sin t + \frac{12}{17} \cos t + \frac{48}{17} \sin t. \quad (6)$$

Le graphique de la solution (6) est représenté par la courbe noire dans la figure 3.9.1, à la page suivante.

Il est important de noter que la solution est composée de deux parties distinctes. Les deux premiers termes du membre de droite de l'équation (6) contiennent le facteur exponentiel $e^{-t/2}$; pour cette raison, ils s'approchent rapidement de zéro. On qualifie habituellement ces termes de transitoires. Les termes restants de l'équation (6) ne contiennent que des sinus et des cosinus ; ils représentent donc une oscillation qui se poursuit indéfiniment. Ils constituent ce qu'on appelle un état permanent. La courbe bleue pleine et la courbe bleue pointillée de la figure 3.9.1 illustrent respectivement la partie transitoire et la partie permanente de la solution. L'état transitoire provient de la solution à l'équation homogène correspondant à l'équation (1) et il est nécessaire pour satisfaire aux conditions initiales. L'état permanent correspond à la solution particulière de l'équation non homogène. Après un temps assez court, la partie transitoire devient infinitésimale et la solution complète devient essentiellement indiscernable de l'état permanent.

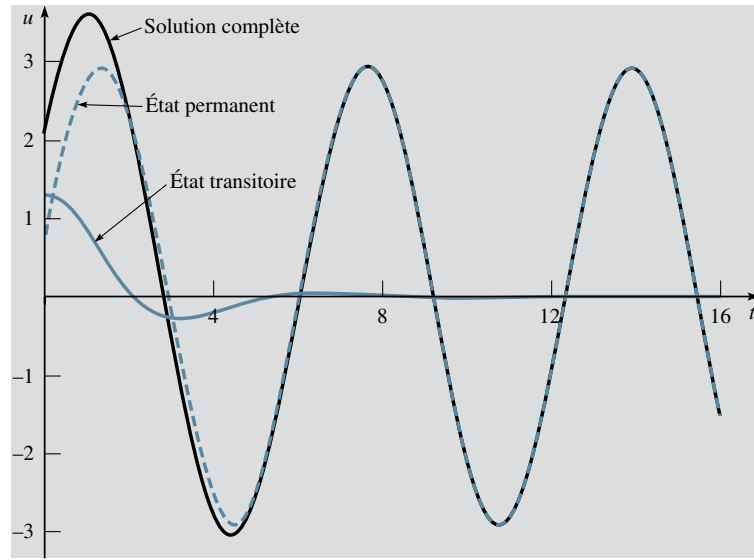


Figure 3.9.1 Solution au problème de valeur initiale (1), (2): $u'' + u' + 1,25u = 3 \cos t$, $u(0) = 2$, $u'(0) = 3$.

L'équation du mouvement d'un système masse-ressort général soumis à une force externe $F(t)$ est représentée par l'équation (7) de la section 3.8,

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t), \quad (7)$$

où m , γ et k sont la masse, le coefficient d'amortissement et la constante de raideur du système masse-ressort. Supposez maintenant que la force externe est donnée par $F_0 \cos \omega t$, où F_0 et ω sont des constantes positives représentant respectivement l'amplitude et la fréquence de la force. Dans ce cas, l'équation (7) devient

$$mu'' + \gamma u' + ku = F_0 \cos \omega t. \quad (8)$$

Le comportement des solutions à l'équation (8) ressemble beaucoup à celui de la solution de l'exemple précédent. La solution générale à l'équation (8) doit être de la forme

$$u = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + A \cos \omega t + B \sin \omega t = u_c(t) + U(t). \quad (9)$$

Les deux premiers termes du membre de droite de l'équation (9) représentent la solution générale $u_c(t)$ à l'équation homogène correspondant à l'équation (8), et les deux derniers termes représentent une solution particulière $U(t)$ à l'équation non homogène. On peut trouver les coefficients A et B de la façon habituelle, en substituant ces termes dans l'équation différentielle (8), tandis que les constantes arbitraires c_1 et c_2 sont présentes pour satisfaire aux conditions initiales, s'il y en a. Les solutions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ à l'équation homogène dépendent des racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique $mr^2 + \gamma r + k = 0$. Puisque m , γ et k sont tous positifs, il s'ensuit que les racines r_1 et r_2 sont soit réelles et négatives, soit complexes conjuguées avec une partie réelle négative. Dans les deux cas, $u_1(t)$ et $u_2(t)$ s'approchent de zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. Puisque $u_c(t)$ disparaît lorsque t augmente, on l'appelle la **solution transitoire**. Dans de nombreuses applications, elle a peu d'importance et (selon la valeur de γ) pourrait bien être indétectable après seulement quelques secondes.

Les autres termes de l'équation (9), à savoir $U(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, ne disparaissent pas lorsque t augmente, mais ils restent indéfiniment, ou du moins tant que la force externe est

appliquée. Ils représentent une oscillation permanente qui a la même fréquence que la force externe ; c'est ce qu'on appelle la **solution permanente** ou la **réponse forcée**. La solution transitoire permet de satisfaire à n'importe quelles conditions initiales. Au fil du temps, l'énergie transmise au système en raison du déplacement initial et de la vitesse en $t = 0$ est dissipée par la force d'amortissement et le mouvement devient alors la réponse du système à la force externe. Sans amortissement, l'effet des conditions initiales prévaudrait en tout temps.

Il est pratique d'exprimer $U(t)$ en un terme trigonométrique unique, plutôt qu'en une somme de deux termes. Souvenez-vous que c'est ce qu'on a fait pour d'autres expressions similaires dans la section 3.8. Par conséquent, on écrit

$$U(t) = R \cos(\omega t - \delta). \quad (10)$$

L'amplitude R et la phase δ dépendent directement de A et de B et indirectement des paramètres de l'équation différentielle (8). Il est possible de montrer, par des calculs directs, mais assez fastidieux, que

$$R = \frac{F_0}{\Delta}, \quad \cos \delta = \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)}{\Delta}, \quad \sin \delta = \frac{\gamma\omega}{\Delta}, \quad (11)$$

où

$$\Delta = \sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = k/m. \quad (12)$$

Souvenez-vous que ω_0 est la fréquence naturelle du système non forcé en l'absence d'amortissement.

Examinons maintenant le lien entre l'amplitude R de l'oscillation permanente et la fréquence ω de la force externe. En substituant à partir de l'équation (12) l'expression de R dans l'équation (11) et en effectuant quelques manipulations algébriques, on obtient

$$\frac{Rk}{F_0} = 1 / \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \Gamma \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right]^{1/2}, \quad (13)$$

où $\Gamma = \gamma^2/mk$. Notez que la grandeur Rk/F_0 est le rapport de l'amplitude R de la réponse forcée à F_0/k , le déplacement statique du ressort produit par la force F_0 .

Pour une excitation à basse fréquence, c'est-à-dire lorsque $\omega \rightarrow 0$, il s'ensuit, à partir de l'équation (13), que $Rk/F_0 \rightarrow 1$ ou $R \rightarrow F_0/k$. À l'inverse, pour une excitation à très haute fréquence, l'équation (13) implique que $R \rightarrow 0$ lorsque $\omega \rightarrow \infty$. Pour une valeur intermédiaire de ω , l'amplitude peut admettre un maximum. Pour trouver cette valeur maximale, on peut dériver R par rapport à ω et poser le résultat égal à zéro. Ainsi, on constate que l'amplitude maximale survient lorsque $\omega = \omega_{\max}$, où

$$\omega_{\max}^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2m^2} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2mk} \right). \quad (14)$$

Notez que $\omega_{\max} < \omega_0$ et que $\omega_{\max}$ est près de ω_0 lorsque γ est petit. La valeur maximale de R est

$$R_{\max} = \frac{F_0}{\gamma\omega_0\sqrt{1 - (\gamma^2/4mk)}} \cong \frac{F_0}{\gamma\omega_0} \left(1 + \frac{\gamma^2}{8mk} \right), \quad (15)$$

où la dernière expression est une approximation quand γ est petit. Si $\gamma^2/mk > 2$, alors $\omega_{\max}$ dans l'équation (14) est un nombre imaginaire ; dans ce cas, la valeur maximale de R survient lorsque $\omega = 0$ et R est une fonction monotone décroissante de ω . Rappelez-vous que l'amortissement critique survient lorsque $\gamma^2/mk = 4$.

Lorsque γ est petit, il s'ensuit, à partir de l'équation (15), que $R_{\max} \cong F_0/\gamma\omega_0$. Par conséquent, pour les systèmes légèrement amortis, l'amplitude R de la réponse forcée quand ω est près de ω_0 est plutôt grande, même pour des forces externes relativement faibles, et plus la valeur de γ est petite, plus cet effet est prononcé. Ce phénomène est appelé la **résonance** et on le considère souvent comme un facteur important dans la conception. La résonance peut être profitable ou néfaste, selon les circonstances. On doit en tenir compte très sérieusement dans la conception de structures telles que les immeubles et les ponts, où elle peut entraîner une instabilité pouvant mener à l'écroulement de la structure. D'autre part, la résonance peut s'avérer utile dans la conception d'instruments comme des sismographes, qui sont conçus pour détecter des signaux périodiques faibles.

La figure 3.9.2 montre quelques graphiques représentatifs de Rk/F_0 en fonction de ω/ω_0 pour plusieurs valeurs de $\Gamma = \gamma^2/mk$. Le graphique correspondant à $\Gamma = 0,015625$ est inclus, car il s'agit de la valeur de Γ qui apparaît dans l'exemple 2 ci-après. Notez en particulier la pente abrupte de la courbe correspondant à $\Gamma = 0,015625$ près de $\omega/\omega_0 = 1$. Le cas limite lorsque $\Gamma \rightarrow 0$ est aussi montré. Il s'ensuit, à partir de l'équation (13), ou des équations (11) et (12), que $R \rightarrow F_0/m|\omega_0^2 - \omega^2|$ lorsque $\gamma \rightarrow 0$ et par conséquent, Rk/F_0 est asymptotique à la droite verticale $\omega = \omega_0$, comme le montre la figure. À mesure que l'amortissement augmente dans le système, la réponse maximale diminue graduellement.

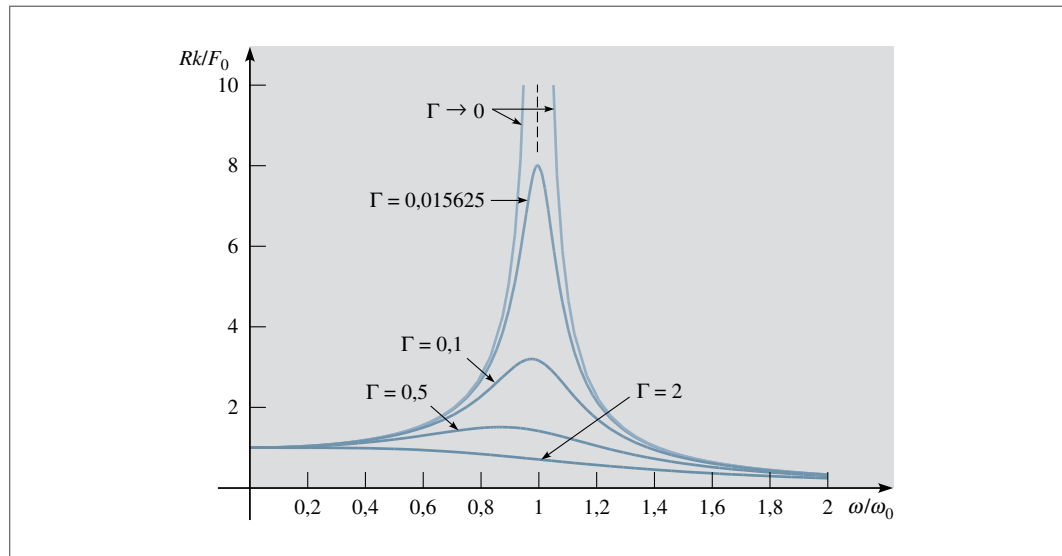


Figure 3.9.2 Oscillation forcée avec amortissement : amplitude de la réponse permanente en fonction de la fréquence de la force motrice ; $\Gamma = \gamma^2/mk$.

La figure 3.9.2 illustre également l'utilité des variables adimensionnelles. On peut facilement vérifier que chacune des grandeurs Rk/F_0 , ω/ω_0 et Γ est adimensionnelle. L'importance de cette observation est que le nombre de paramètres significatifs du problème est réduit à trois plutôt qu'aux cinq qui apparaissent dans l'équation (8). Par conséquent, un seul ensemble de courbes, dont quelques-unes sont illustrées dans la figure 3.9.2, suffit pour décrire le comportement de la réponse en fonction de la fréquence de tous les systèmes régis par l'équation (8).

L'angle de phase δ dépend aussi de ω d'une façon intéressante. Quand ω est près de zéro, il s'ensuit, à partir des équations (11) et (12), que $\cos \delta \cong 1$ et $\sin \delta \cong 0$. Dans ce cas, $\delta \cong 0$ et la réponse est presque en phase avec l'excitation, ce qui signifie que cette réponse et l'excitation augmentent et décroissent simultanément et, en particulier, qu'elles atteignent leurs maximums respectifs et leurs minimums respectifs presque en même temps.

Quand $\omega = \omega_0$, on a $\cos \delta = 0$ et $\sin \delta = 1$, donc $\delta = \pi/2$. Dans ce cas, la réponse est déphasée de $\pi/2$ par rapport à l'excitation, c'est-à-dire que les maximums de la réponse sont atteints $\pi/2$ plus tard que les maximums de l'excitation; c'est la même chose pour les minimums. Enfin, lorsque ω est très grand, on a $\cos \delta \cong -1$ et $\sin \delta \cong 0$. Par conséquent, $\delta \cong \pi$, donc la réponse est presque complètement déphasée par rapport à l'excitation; cela signifie que la réponse est minimale lorsque l'excitation est maximale et vice versa. La figure 3.9.3 montre les graphiques de δ en fonction de ω/ω_0 pour plusieurs valeurs de Γ . Lorsque l'amortissement est faible, la transition de phase de près de $\delta = 0$ à près de $\delta = \pi$ se produit plutôt brusquement, tandis que pour des valeurs plus grandes du paramètre d'amortissement, la transition s'effectue plus graduellement.

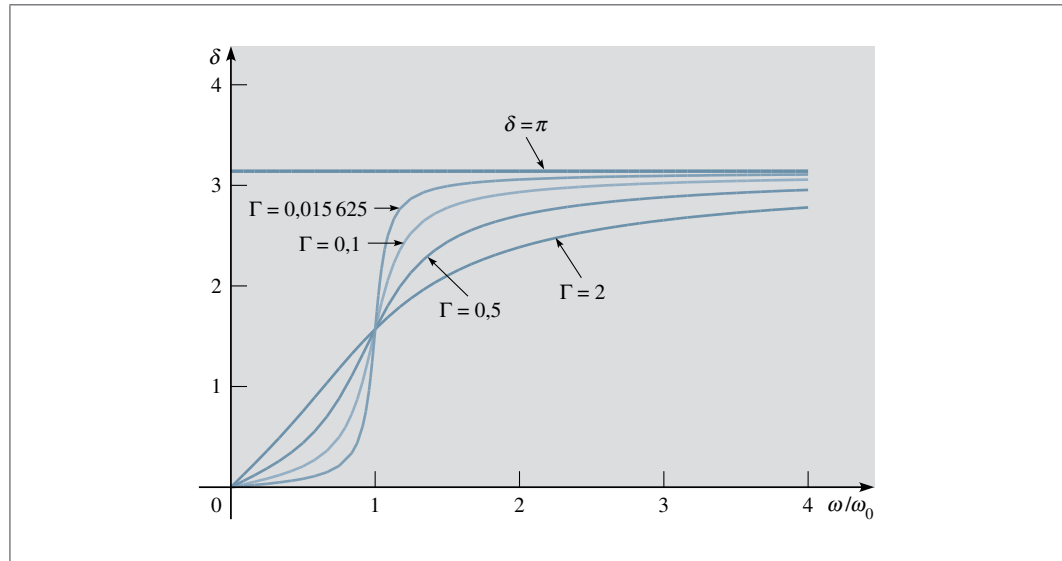


Figure 3.9.3 Oscillation forcée avec amortissement : phase de la réponse permanente en fonction de la fréquence de la force motrice; $\Gamma = \gamma^2/mk$.

Exemple 2

Considérez le problème de valeur initiale

$$u'' + 0,125u' + u = 3 \cos \omega t, \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0. \quad (16)$$

Représentez graphiquement la solution pour diverses valeurs de la fréquence de contrainte ω , et comparez vos graphiques avec les graphiques correspondants de la fonction de contrainte.

Pour ce système, on a $\omega_0 = 1$ et $\Gamma = 1/64 = 0,015\,625$. On a discuté de son mouvement non forcé dans l'exemple 3 de la section 3.8, et la figure 3.8.7 montre le graphique de la solution au problème non forcé. Les figures 3.9.4, 3.9.5 et 3.9.6 à la page suivante illustrent respectivement la solution au problème forcé (16) lorsque $\omega = 0,3$, $\omega = 1$ et $\omega = 2$. Chaque figure illustre également le graphique de la fonction de contrainte correspondante. Dans cet exemple, le déplacement statique, F_0/k , est égal à 3.

La figure 3.9.4 illustre le cas d'une basse fréquence, $\omega/\omega_0 = 0,3$. Après un amortissement considérable de la réponse transitoire initiale, la réponse permanente restante est essentiellement en phase avec l'excitation, et l'amplitude de la réponse est un peu plus grande que le déplacement statique. Pour être plus précis, $R \cong 3,2939$ et $\delta \cong 0,041185$.

Le cas de la résonance, $\omega/\omega_0 = 1$, est illustré dans la figure 3.9.5. Dans ce cas, l'amplitude de la réponse permanente est huit fois plus grande que le déplacement statique, et la figure montre également le déphasage prédit de $\pi/2$ par rapport à la force externe.

Le cas d'une fréquence d'excitation relativement élevée est illustré dans la figure 3.9.6. Notez que l'amplitude de la réponse permanente forcée égale approximativement un tiers du déplacement statique, et que la différence de phase entre l'excitation et la réponse est d'environ π . De manière plus précise, on trouve $R \cong 0,99655$ et $\delta \cong 3,0585$.

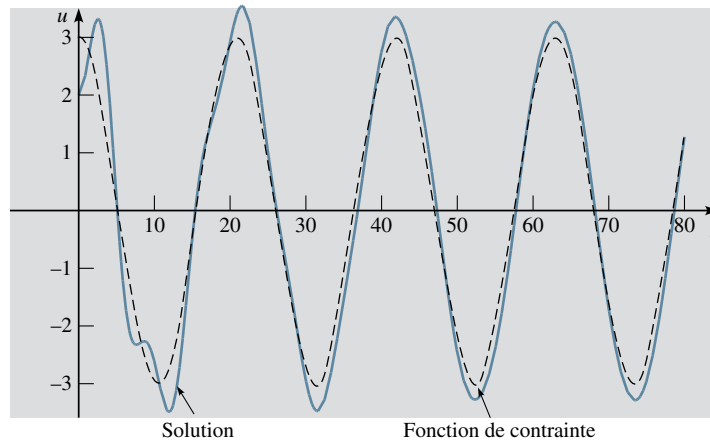


Figure 3.9.4 Oscillation forcée avec amortissement; solution à l'équation (16) avec $\omega = 0,3$: $u'' + 0,125u' + u = 3 \cos 0,3t$, $u(0) = 2$, $u'(0) = 0$.

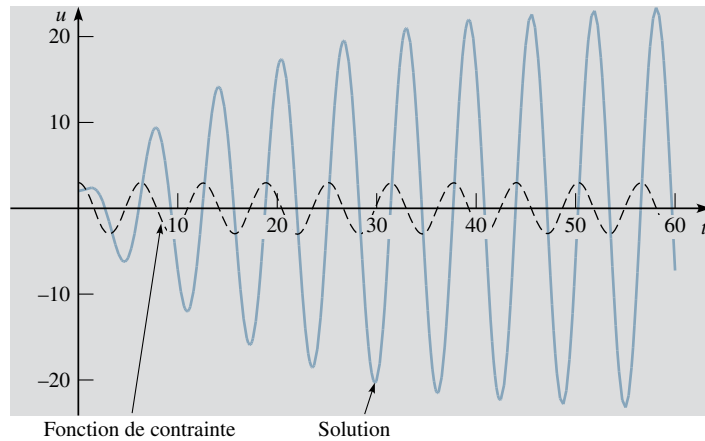


Figure 3.9.5 Oscillation forcée avec amortissement; solution à l'équation (16) avec $\omega = 1$: $u'' + 0,125u' + u = 3 \cos t$, $u(0) = 2$, $u'(0) = 0$.

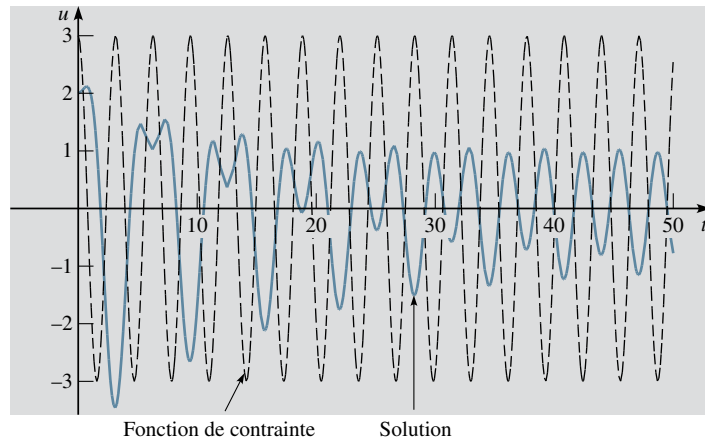


Figure 3.9.6 Oscillation forcée avec amortissement; solution à l'équation (16) avec $\omega = 2$: $u'' + 0,125u' + u = 3 \cos 2t$, $u(0) = 2$, $u'(0) = 0$.

Les oscillations forcées sans amortissement Supposons maintenant que $\gamma = 0$ dans l'équation (8). On obtient ainsi l'équation du mouvement d'un oscillateur forcé non amorti

$$mu'' + ku = F_0 \cos \omega t. \quad (17)$$

La forme de la solution générale à l'équation (17) est différente selon que la fréquence de contrainte ω est égale ou non à la fréquence naturelle $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ du système non forcé. Considérons d'abord le cas $\omega \neq \omega_0$; la solution générale à l'équation (17) est

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (18)$$

Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées par les conditions initiales. Le mouvement résultant est, en général, la somme de deux mouvements périodiques de fréquences (ω_0 et ω) et d'amplitudes différentes.

Il est particulièrement intéressant de supposer que la masse est initialement au repos, de façon que les conditions initiales soient $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$. Dans ce cas, l'énergie qui fait fonctionner le système provient entièrement de la force externe, sans aucun apport des conditions initiales. Ainsi, les constantes c_1 et c_2 dans l'équation (18) sont déterminées par

$$c_1 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \quad c_2 = 0, \quad (19)$$

et la solution à l'équation (17) est

$$u = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \quad (20)$$

Cette solution est la somme de deux fonctions périodiques de périodes différentes, mais de même amplitude. En utilisant les identités trigonométriques pour $\cos(A \pm B)$ avec $A = (\omega_0 + \omega)t/2$ et $B = (\omega_0 - \omega)t/2$, on peut réécrire l'équation (20) sous la forme

$$u = \left[\frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right] \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}. \quad (21)$$

Si $|\omega_0 - \omega|$ est petit, alors $\omega_0 + \omega$ est beaucoup plus grand que $|\omega_0 - \omega|$. Par conséquent, $\sin(\omega_0 + \omega)t/2$ est une fonction qui oscille rapidement comparativement à $\sin(\omega_0 - \omega)t/2$. Ainsi, le mouvement est une oscillation rapide de fréquence $(\omega_0 + \omega)/2$, mais dont l'amplitude sinusoidale

$$\frac{2F_0}{m|\omega_0^2 - \omega^2|} \left| \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right|$$

varie lentement.

Ce type de mouvement où l'amplitude varie de façon périodique est appelé une **pulsation**. Par exemple, un tel phénomène se produit en acoustique quand on frappe simultanément deux diapasons de fréquences presque égales. Dans ce cas, on peut pratiquement entendre la variation périodique de l'amplitude. En électronique, la variation de l'amplitude en fonction du temps est appelée la **modulation d'amplitude**.

Exemple 3

Résolvez le problème de valeur initiale

$$u'' + u = 0,5 \cos 0,8t, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \quad (22)$$

et représentez graphiquement la solution.

Dans ce cas, $\omega_0 = 1$, $\omega = 0,8$ et $F_0 = 0,5$; donc, selon l'équation (21), la solution au problème donné est

$$u = 2,777\,78(\sin 0,1t)(\sin 0,9t). \quad (23)$$

La figure 3.9.7 illustre un graphique de cette solution. La variation d'amplitude a une fréquence lente de 0,1 et une période lente correspondante de 20π . Notez qu'une demi-période de 10π correspond à un cycle unique d'amplitude croissante et décroissante. Le déplacement du système masse-ressort oscille à une fréquence relativement rapide de 0,9, ce qui est à peine moins rapide que la fréquence naturelle ω_0 .

Imaginons maintenant qu'on augmente la fréquence de contrainte ω à 0,9. Dans ce cas, la fréquence lente est divisée par deux et devient égale à 0,05, et la demi-période lente correspondante est multipliée par deux et devient égale à 20π . Le multiplicateur 2,777 78 augmente aussi considérablement, soit jusqu'à 5,2632. Toutefois, la fréquence rapide n'augmente que légèrement, soit jusqu'à 0,95. Pouvez-vous visualiser ce qui se produit lorsque les valeurs de ω s'approchent de plus en plus près de la fréquence naturelle $\omega_0 = 1$?

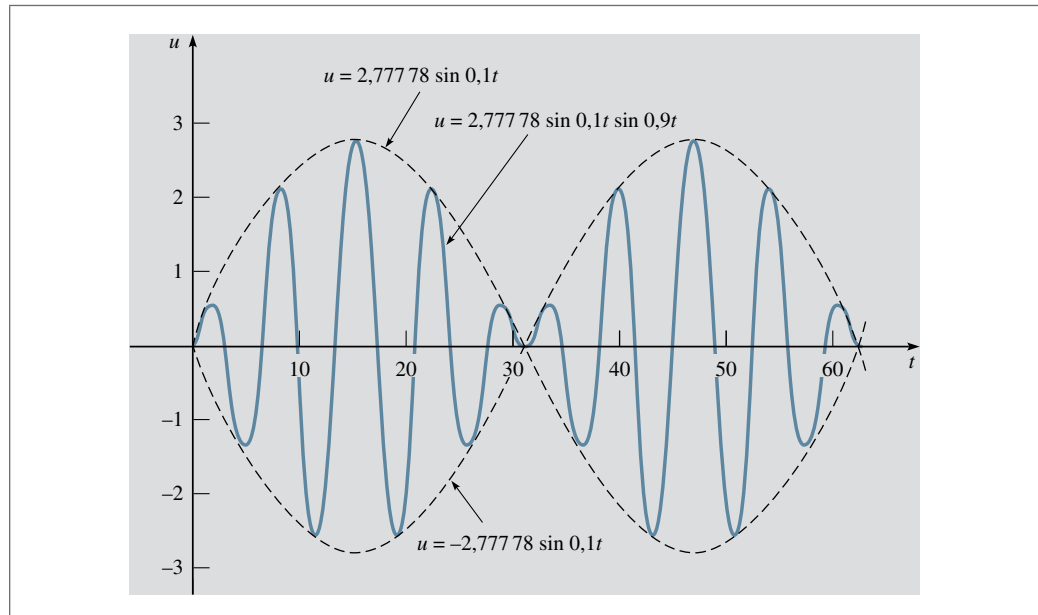


Figure 3.9.7 Pulsation; solution à l'équation (22): $u'' + u = 0,5 \cos 0,8t$, $u(0) = 0$, $u = 2,777 78(\sin 0,1t)(\sin 0,9t)$.

Revenons maintenant à l'équation (17) et considérons le cas de la résonance, où $\omega = \omega_0$, c'est-à-dire que la fréquence de la fonction de contrainte est égale à la fréquence naturelle du système. Ainsi, le terme non homogène $F_0 \cos \omega t$ est une solution à l'équation homogène. Dans ce cas, la solution à l'équation (17) est

$$u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t. \quad (24)$$

Considérez l'exemple suivant.

Exemple 4

Résolvez le problème de valeur initiale

$$u'' + u = 0,5 \cos t, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0 \quad (25)$$

et représentez graphiquement la solution.

La solution générale à l'équation différentielle est

$$u = c_1 \cos t + c_2 \sin t + 0,25t \sin t,$$

et les conditions initiales exigent que $c_1 = c_2 = 0$. Par conséquent, la solution au problème de valeur initiale donné est

$$u = 0,25t \sin t. \quad (26)$$

La figure 3.9.8 illustre le graphique de la solution.

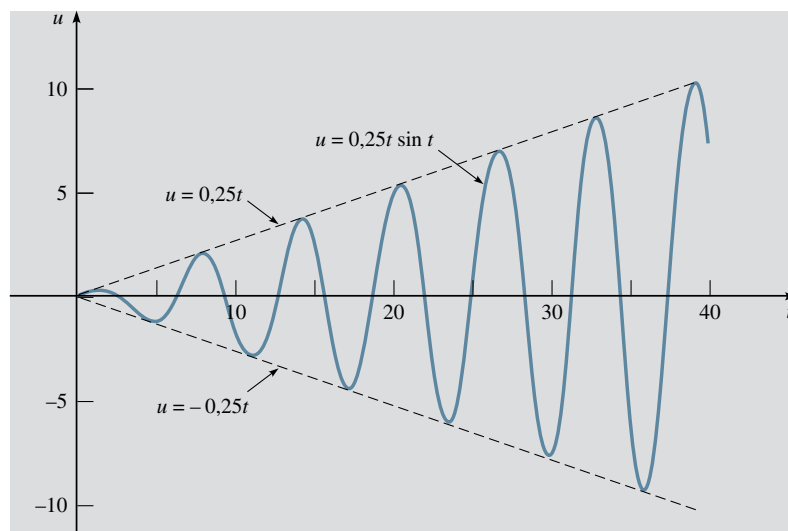


Figure 3.9.8 Résonance; solution à l'équation (25): $u'' + u = 0,5 \cos t$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$; $u = 0,25t \sin t$.

En raison du terme $t \sin \omega_0 t$, la solution (24) prédit que le mouvement deviendra non borné lorsque $t \rightarrow \infty$, peu importe les valeurs de c_1 et de c_2 . C'est ce que montre la figure 3.9.8. Bien sûr, en réalité, les oscillations non bornées n'existent pas, car le ressort ne peut pas s'étirer indéfiniment. De plus, dès que u devient grand, le modèle mathématique sur lequel est basée l'équation (17) n'est plus valide, puisque l'hypothèse selon laquelle la force du ressort dépend linéairement du déplacement exige que u soit petit. Comme on l'a vu, si on ajoute une force d'amortissement au modèle, le mouvement prédit demeure borné. Toutefois, la réponse à la fonction d'entrée $F_0 \cos \omega t$ peut être très grande si l'amortissement est faible et si ω est près de ω_0 .

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 4, écrivez l'expression comme un produit de deux fonctions trigonométriques de fréquences différentes.

1. $\cos 9t - \cos 7t$

2. $\sin 7t - \sin 6t$

3. $\cos \pi t + \cos 2\pi t$

4. $\sin 3t + \sin 4t$

5. Un objet de 4 lb suspendu à un ressort entraîne un étirement du ressort de 1,5 po vers le bas. L'objet est déplacé de 2 po vers le bas à partir de sa position d'équilibre dans la direction positive du déplacement, puis il est relâché avec une vitesse initiale nulle. En supposant qu'il n'y a aucun amortissement et que l'objet subit une force externe de $2 \cos 3t$ lb, formulez le problème de valeur initiale qui décrit le mouvement de l'objet.

6. Un objet de 5 kg suspendu à un ressort entraîne un étirement du ressort de 10 cm vers le bas. L'objet subit une force externe de $10 \sin(t/2)$ N (newtons), et il se déplace dans un milieu où la force de viscosité est de 2 N quand la vitesse de l'objet atteint 4 cm/s. Si l'objet est mis en mouvement à partir de sa position d'équilibre avec une vitesse initiale de 3 cm/s, formulez le problème de valeur initiale qui décrit le mouvement de l'objet.

7. a) Trouvez la solution au problème 5.

b) Tracez le graphe de la solution.

c) Si la force externe donnée est remplacée par une force de $4 \sin \omega t$ de fréquence ω , trouvez la valeur de ω pour laquelle une résonance se produit.

- ▶ ⑧ 8. a) Trouvez la solution au problème de valeur initiale du problème 6.
 b) Déterminez les parties transitoires et permanentes de la solution.
 c) Tracez le graphe de la solution permanente.
 d) Si la force externe donnée est remplacée par une force de $2 \cos \omega t$ de fréquence ω , trouvez la valeur de ω pour laquelle l'amplitude de la réponse forcée est maximale.
9. Supposez un système masse-ressort non amorti avec un objet de 6 lb et une constante de raideur de 1 lb/po soudainement mis en mouvement en $t = 0$ par une force externe de $4 \cos 7t$ lb. Déterminez la position de l'objet au temps t , puis tracez le graphique du déplacement en fonction de t .
10. Un objet de 8 lb suspendu à un ressort entraîne un étirement du ressort de 6 po vers le bas. Le système subit une force externe de $8 \sin 8t$ lb. Si on tire l'objet vers le bas de 3 po supplémentaires et qu'on le relâche, déterminez la position de l'objet au temps t . Déterminez les quatre premiers instants où la vitesse de l'objet est nulle.
11. Un objet de 8 lb suspendu à un ressort entraîne un étirement du ressort de 6 po. L'objet est attaché à un mécanisme d'amortisseur dont la constante d'amortissement vaut $0,25 \text{ lb}\cdot\text{s}/\pi$ et subit une force externe de $4 \cos 2t$ lb.
 a) Déterminez la solution permanente pour ce système.
 b) Si la masse de l'objet vaut m , déterminez la valeur de m telle que l'amplitude de la solution permanente soit maximale.
12. Un système masse-ressort a une constante de raideur de 3 N/m. Un objet de 2 kg est attaché au ressort, et le mouvement se produit dans un fluide visqueux qui offre une résistance numériquement égale à l'intensité de l'accélération instantanée. Si le système est contrôlé par une force externe de $3 \cos 3t - 2 \sin 3t$ N, déterminez la solution permanente. Exprimez votre réponse sous la forme $R \cos(\omega t - \delta)$.
13. Dans ce problème, vous devez fournir quelques-uns des détails de l'analyse d'un oscillateur forcé et amorti.
 a) Développez les équations (10), (11) et (12) pour la solution permanente à l'équation (8).
 b) Développez l'expression de l'équation (13), qui représente Rk/F_0 .
 c) Montrez que $\omega_{\max}^2$ et $R_{\max}$ sont donnés, respectivement, par les équations (14) et (15).
14. Trouvez la vitesse de la réponse permanente donnée par l'équation (10). Ensuite, montrez que cette vitesse est maximale lorsque $\omega = \omega_0$.
15. Trouvez la solution au problème de valeur initiale

$$u'' + u = F(t), \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

où

$$F(t) = \begin{cases} F_0 t, & 0 \leq t \leq \pi, \\ F_0 (2\pi - t), & \pi < t \leq 2\pi. \\ 0, & 2\pi < t. \end{cases}$$

Suggestion : Traitez chaque intervalle séparément et faites concorder les solutions obtenues dans les différents intervalles pour que u et u' soient des fonctions continues de t .

16. Un circuit en série est constitué d'un condensateur de $0,25 \times 10^{-6}$ farad, d'une résistance de 5×10^3 ohms et d'un inducteur de 1 henry. La charge initiale dans le condensateur est nulle. Si une pile de 12 volts est connectée au circuit et que le circuit est fermé en $t = 0$, déterminez la charge dans le condensateur en $t = 0,001$ s, en $t = 0,01$ s et en un temps t quelconque. Déterminez aussi la charge limite lorsque $t \rightarrow \infty$.
- ⑧ 17. Considérez le système oscillatoire décrit par le problème de valeur initiale

$$u'' + \frac{1}{4}u' + 2u = 2 \cos \omega t, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 2.$$

- a) Déterminez la partie permanente de la solution à ce problème.
 b) Trouvez l'amplitude A de la solution permanente en fonction de ω .

c) Tracez le graphe de A en fonction de ω .

d) Trouvez la valeur maximale de A et la fréquence ω pour laquelle ce maximum est atteint.

- Ⓢ 18. Considérez le système forcé mais non amorti décrit par le problème de valeur initiale

$$u'' + u = 3 \cos \omega t, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

a) Trouvez la solution $u(t)$ si $\omega \neq 1$.

b) Tracez la solution $u(t)$ en fonction de t pour $\omega = 0,7$, $\omega = 0,8$ et $\omega = 0,9$. Décrivez en quoi la réponse $u(t)$ dépend de ω . Que se produit-il lorsque ω tend vers 1 ? Vous devez noter que la fréquence naturelle du système non forcé est $\omega_0 = 1$.

- Ⓢ 19. Considérez le système oscillatoire décrit par le problème de valeur initiale

$$u'' + u = 3 \cos \omega t, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = 1.$$

a) Trouvez la solution si $\omega \neq 1$.

b) Tracez la solution $u(t)$ en fonction de t pour $\omega = 0,7$, $\omega = 0,8$ et $\omega = 0,9$. Comparez les résultats avec ceux du problème 18, c'est-à-dire décrivez les conséquences du fait que u et u' sont non nulles en $t = 0$.

- Ⓢ 20. Pour le problème de valeur initiale du problème 18, tracez le graphique de u' en fonction de u pour $\omega = 0,7$, $\omega = 0,8$ et $\omega = 0,9$, c'est-à-dire tracez la courbe de phase de la solution pour ces valeurs de ω . Faites varier t dans un intervalle assez grand, de sorte que la courbe de phase ressemble à une courbe fermée. Marquez la courbe à l'aide de flèches pour montrer la direction dans laquelle elle est parcourue lorsque t augmente.

- Dans les problèmes 21 à 23, le problème de valeur initiale suivant est utilisé :

$$u'' + 0,125u' + u = F(t), \quad u(0) = 2, \quad u'(0) = 0.$$

Dans chaque problème, procédez comme suit.

a) Tracez le graphique de la fonction de contrainte donnée $F(t)$ en fonction de t , puis le graphique de la solution $u(t)$ en fonction de t dans un même plan. Faites varier t dans un intervalle assez grand, de sorte que les parties transitoires initiales soient substantiellement éliminées. Observez la relation entre l'amplitude et la phase du terme de contrainte et entre l'amplitude et la phase de la réponse. Vous devez noter que $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 1$.

b) Tracez la courbe de phase de la solution, c'est-à-dire le graphique de u' en fonction de u .

- Ⓢ 21. $F(t) = 3 \cos(0,3t)$

- Ⓢ 22. $F(t) = 3 \cos t$

- Ⓢ 23. $F(t) = 3 \cos 3t$

- Ⓢ 24. Un système masse-ressort muni d'un ressort durcissant (voir le problème 32 de la section 3.8) subit une force externe périodique. En l'absence d'amortissement, supposez que le déplacement de l'objet satisfait au problème de valeur initiale

$$u'' + u + \frac{1}{5}u^3 = \cos \omega t, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

a) Posez $\omega = 1$ puis, à l'aide d'un ordinateur, tracez le graphique d'une solution au problème. Le système admet-il une pulsation ?

b) Tracez le graphique de la solution pour différentes valeurs de ω entre 1/2 et 2. Décrivez comment la solution est modifiée lorsque ω augmente.

- Ⓢ 25. Supposez qu'on inclut dans le système du problème 24 un terme d'amortissement et que le problème de valeur initiale résultant est

$$u'' + \frac{1}{5}u' + u + \frac{1}{5}u^3 = \cos \omega t, \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0.$$

a) Tracez le graphique de la solution pour différentes valeurs de ω entre 1/2 et 2, puis estimez l'amplitude R de la solution permanente dans chaque cas.

b) En utilisant les données de la partie a), tracez le graphique de R en fonction de ω . Pour quelle fréquence de ω l'amplitude est-elle maximale ?

c) Comparez les résultats des parties a) et b) avec les résultats correspondants concernant le ressort linéaire.

Références

CODDINGTON, E. A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1961 ; New York, Dover, 1989.

- Il existe de nombreux manuels qui traitent des vibrations mécaniques et des circuits électriques. Voici une suggestion :

CLOSE, C. M. et D. K. FREDERICK. *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*, 2^e édition, Boston, Houghton-Mifflin, 1993.

- Voici un ouvrage classique sur les vibrations mécaniques :

DEN HARTOG, P. J. *Mechanical Vibrations*, 4^e édition, New York, McGraw-Hill, 1956 ; New York, Dover, 1985.

- Voici un ouvrage plus récent de niveau intermédiaire :

THOMSON, W. T. *Theory of Vibrations with Applications*, 3^e édition, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1988.

- Voici un ouvrage élémentaire sur les circuits électriques :

BOBROW, L. S. *Elementary Linear Circuit Analysis*, New York, Oxford University Press, 1996.

Les équations linéaires d'ordre supérieur

La structure des équations et les méthodes de résolution élaborées dans le chapitre précédent pour les équations linéaires du deuxième ordre s'appliquent directement aux équations linéaires du troisième ordre et d'ordres plus élevés. Dans ce chapitre, nous examinerons brièvement cette généralisation en attirant l'attention sur certaines situations propres aux équations d'ordre supérieur à deux.

4.1 La théorie générale des équations linéaires d'ordre n

Une équation différentielle linéaire d'ordre n est une équation de la forme

$$P_0(t) \frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + P_n(t)y = G(t). \quad (1)$$

On suppose que les fonctions scalaires $P_0, \dots, P_n$ et G sont continues dans l'intervalle $I: \alpha < t < \beta$ et que P_0 est non nulle partout dans l'intervalle I . En divisant l'équation (1) par $P_0(t)$, on obtient

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t) \frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t). \quad (2)$$

L'opérateur différentiel linéaire L d'ordre n défini par l'équation (2) est similaire à l'opérateur du deuxième ordre introduit au chapitre 3. L'analyse de l'équation (2) est analogue à celle de l'équation linéaire du deuxième ordre. Pour cette raison, nous ne ferons qu'énoncer les résultats dans le cas du problème d'ordre n . Les preuves de la plupart de ces résultats sont également similaires à celles qui apparaissent dans l'étude de l'équation du deuxième ordre. En général, elles seront laissées à titre d'exercices.

Puisque l'équation (2) implique la dérivée n -ième de y par rapport à t , on peut considérer que sa résolution nécessite n intégrations successives. Chacune de ces intégrations introduit une nouvelle constante arbitraire. Pour obtenir une solution unique, on doit donc disposer de n conditions initiales, soit

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}, \quad (3)$$

où t_0 peut être n'importe quel point dans l'intervalle I et $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ est un ensemble de constantes spécifiques. Le théorème d'existence et d'unicité suivant, qui est similaire au théorème 3.3.1, assure que le problème de valeurs initiales (2), (3) admet une solution et une seule.

Théorème 4.1.1

Si les fonctions $p_1, p_2, \dots, p_n$ et g sont continues dans l'intervalle ouvert I , alors il existe une et une seule solution $y = \phi(t)$ à l'équation différentielle (2) satisfaisant aux conditions initiales (3). Cette solution existe partout dans l'intervalle I .

La preuve de ce théorème ne sera pas présentée ici. Cependant, si les coefficients $p_1, \dots, p_n$ sont constants, alors on peut obtenir la solution au problème de valeur initiale (2), (3), tout comme dans le chapitre 3 (voir les sections 4.2 à 4.4). Même s'il est possible de trouver une solution dans ce cas, on ne peut pas déterminer si elle est unique sans utiliser le théorème 4.1.1. Une preuve du théorème est présentée dans l'ouvrage d'Ince (voir la section 3.32) ou dans celui de Coddington (voir le chapitre 6).

L'équation homogène Comme dans le problème du deuxième ordre correspondant, on étudie d'abord l'équation homogène

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0. \quad (4)$$

Si les fonctions $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont des solutions à l'équation (4), alors il s'ensuit que la combinaison linéaire

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t), \quad (5)$$

où $c_1, \dots, c_n$ sont des constantes arbitraires, est aussi une solution à l'équation (4). Il est donc naturel de se demander si on peut exprimer chacune des solutions à l'équation (4) sous la forme d'une combinaison linéaire de $y_1, \dots, y_n$. Cela s'avérera si, peu importe les conditions initiales (3) prescrites, on peut choisir les constantes $c_1, \dots, c_n$ de sorte que la combinaison linéaire (5) satisfasse aux conditions initiales. Plus précisément, pour n'importe quelle valeur de t_0 dans I et peu importe $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, on doit pouvoir déterminer $c_1, \dots, c_n$ afin que les équations

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + \dots + c_n y_n(t_0) &= y_0 \\ c_1 y'_1(t_0) + \dots + c_n y'_n(t_0) &= y'_0 \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad (6)$$

soient satisfaites. Le système donné par les équations (6) est compatible en les constantes $c_1, \dots, c_n$ quand le déterminant de la matrice des coefficients est non nul. Toutefois, si ce déterminant est nul, alors on peut toujours choisir des valeurs $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ de sorte que les équations (6) n'admettent aucune solution. Par conséquent, une condition nécessaire et suffisante pour que les équations (6) admettent une solution, quels que soient $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, est que le wronskien

$$W(y_1, \dots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \quad (7)$$

soit non nul en $t = t_0$. Puisque t_0 est quelconque dans l'intervalle I , il est donc nécessaire et suffisant que $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ soit non nul en tout point dans l'intervalle. Tout comme pour l'équation linéaire du deuxième ordre, on peut démontrer que si $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont des solutions à l'équation (4), alors $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$ est soit nul pour tout t dans l'intervalle I , soit toujours non nul dans cet intervalle (voir le problème 20). On a donc le théorème qui suit.

Théorème 4.1.2

Si les fonctions $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont continues dans l'intervalle ouvert I , si les fonctions $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont des solutions à l'équation (4) et si $W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t) \neq 0$ pour au moins un point dans I , alors on peut exprimer toute solution à l'équation (4) sous la forme d'une combinaison linéaire des solutions $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Un ensemble de solutions $y_1, \dots, y_n$ à l'équation (4) dont le wronskien est non nul est appelé un **ensemble fondamental de solutions**. On peut démontrer l'existence d'un ensemble fondamental de solutions exactement comme on l'a fait pour l'équation linéaire du deuxième ordre (voir le théorème 3.3.5). Puisque toutes les solutions à l'équation (4) sont de la forme (5), on utilise l'expression **solution générale** pour désigner une combinaison linéaire arbitraire de fonctions qui constituent un ensemble fondamental de solutions à l'équation (4).

La dépendance et l'indépendance linéaires Explorons maintenant la relation entre les ensembles fondamentaux de solutions et le concept d'indépendance linéaire, une notion essentielle dans l'étude de l'algèbre linéaire. Les fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$ sont dites **linéairement dépendantes** dans I s'il existe un ensemble de constantes $k_1, k_2, \dots, k_n$ dont au moins une est différente de zéro telles que

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + \dots + k_n f_n = 0 \quad (8)$$

pour tout t dans I . Les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont **linéairement indépendantes** dans I si elles ne sont pas linéairement dépendantes.

Exemple 1

Déterminez si les fonctions $f_1(t) = 1, f_2(t) = t$ et $f_3(t) = t^2$ sont linéairement indépendantes ou dépendantes dans l'intervalle $I: -\infty < t < \infty$.

Formez la combinaison linéaire

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) = k_1 + k_2 t + k_3 t^2,$$

et posez qu'elle est égale à zéro pour obtenir

$$k_1 + k_2 t + k_3 t^2 = 0. \quad (9)$$

Si l'équation (9) est valide pour tout t dans I , elle doit certainement être valide pour tout groupe de trois points distincts dans I . On peut choisir trois points quelconques pour notre démarche, mais il est pratique de choisir $t = 0, t = 1$ et $t = -1$. En évaluant l'équation (9) en chacun de ces points, on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned} k_1 &= 0, \\ k_1 + k_2 + k_3 &= 0, \\ k_1 - k_2 + k_3 &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

D'après la première des équations (10), on note que $k_1 = 0$; dans ce cas, d'après les deux autres équations, il s'ensuit que $k_2 = k_3 = 0$ également. Par conséquent, il n'existe aucun ensemble de constantes k_1, k_2, k_3 dont au moins une est différente de zéro, pour lequel l'équation (9) est valide pour les trois points choisis, et encore moins pour tout l'intervalle I . Donc, les fonctions données ne sont pas linéairement dépendantes dans I et elles doivent alors être linéairement indépendantes. En effet, elles sont linéairement indépendantes dans tout intervalle. On peut établir ce fait en procédant comme dans cet exemple, en utilisant un ensemble différent de trois points.

Exemple 2

Déterminez si les fonctions

$$f_1(t) = 1, \quad f_2(t) = 2 + t, \quad f_3(t) = 3 - t^2 \quad \text{et} \quad f_4(t) = 4t + t^2$$

sont linéairement indépendantes ou dépendantes dans tout intervalle I .

Formez la combinaison linéaire

$$\begin{aligned} k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + k_3 f_3(t) + k_4 f_4(t) &= k_1 + k_2(2 + t) + k_3(3 - t^2) + k_4(4t + t^2) \\ &= (k_1 + 2k_2 + 3k_3) + (k_2 + 4k_4)t + (-k_3 + k_4)t^2. \end{aligned} \quad (11)$$

Pour que cette expression soit égale à zéro pour tout t dans un intervalle, il est certainement suffisant d'exiger que

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0, \quad k_2 + 4k_4 = 0, \quad -k_3 + k_4 = 0.$$

Ces trois équations, à quatre inconnues, admettent de nombreuses solutions. Par exemple, si $k_4 = 1$, alors $k_3 = 1$, $k_2 = -4$ et $k_1 = 5$. Si on substitue ces valeurs aux coefficients dans l'équation (11), on obtient

$$5f_1(t) - 4f_2(t) + f_3(t) + f_4 = 0$$

pour tout t . Par conséquent, les fonctions données sont linéairement dépendantes dans chaque intervalle.

Le concept d'indépendance linéaire offre une autre caractérisation des ensembles fondamentaux de solutions à l'équation homogène (4). Supposons que les fonctions $y_1, \dots, y_n$ sont des solutions à l'équation (4) dans un intervalle I et considérons l'équation

$$k_1 y_1(t) + \dots + k_n y_n(t) = 0. \quad (12)$$

En dérivant l'équation (12) plusieurs fois, on obtient les $n - 1$ équations supplémentaires

$$\begin{aligned} k_1 y_1'(t) + \dots + k_n y_n'(t) &= 0, \\ &\vdots \\ k_1 y_1^{(n-1)}(t) + \dots + k_n y_n^{(n-1)}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Le système constitué des équations (12) et (13) est un système de n équations algébriques linéaires à n inconnues $k_1, \dots, k_n$. Le déterminant des coefficients de ce système est le wronskien $W(y_1, \dots, y_n)(t)$ de $y_1, \dots, y_n$. Cela mène au théorème suivant.

Théorème 4.1.3

Si $y_1(t), \dots, y_n(t)$ est un ensemble fondamental de solutions à l'équation (4)

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = 0$$

dans un intervalle I , alors $y_1(t), \dots, y_n(t)$ sont linéairement indépendantes dans I . Inversement, si $y_1(t), \dots, y_n(t)$ sont des solutions linéairement indépendantes à l'équation (4) dans I , alors elles constituent un ensemble fondamental de solutions dans I .

Pour prouver ce théorème, supposons d'abord que $y_1(t), \dots, y_n(t)$ est un ensemble fondamental de solutions à l'équation (4) dans I . Dans ce cas, le wronskien $W(y_1, \dots, y_n)(t) \neq 0$ pour tout t dans I . Ainsi, le système (12), (13) admet seulement la solution $k_1 = \dots = k_n = 0$ pour tout t dans I . Par conséquent, $y_1(t), \dots, y_n(t)$ ne peuvent pas être linéairement dépendantes dans I et doivent donc être linéairement indépendantes dans cet intervalle.

Pour démontrer l'inverse, supposons que $y_1(t), \dots, y_n(t)$ sont linéairement indépendantes dans I . Pour montrer qu'elles constituent un ensemble fondamental de solutions, on doit montrer que leur wronskien n'est jamais nul dans I . Supposons que ce n'est pas vrai ; dans ce cas, il existe au moins un point t_0 pour lequel le wronskien est nul. En ce point, le système (12), (13)

admet une solution non nulle, qu'on peut noter par $k_1^*, \dots, k_n^*$. Formons maintenant la combinaison linéaire

$$\phi(t) = k_1^* y_1(t) + \dots + k_n^* y_n(t). \quad (14)$$

Alors, $\phi(t)$ satisfait au problème de valeur initiale

$$L[y] = 0, \quad y(t_0) = 0, \quad y'(t_0) = 0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = 0. \quad (15)$$

La fonction ϕ satisfait à l'équation différentielle parce qu'elle est une combinaison linéaire de solutions; elle satisfait aux conditions initiales parce que ces conditions ne sont que les équations du système (12), (13) évaluées en t_0 . Toutefois, la fonction $y(t) = 0$ pour tout t dans I est aussi une solution à ce problème de valeur initiale et, selon le théorème 4.1.1, la solution est unique. Donc, $\phi(t) = 0$ pour tout t dans I . Par conséquent, $y_1(t), \dots, y_n(t)$ sont linéairement dépendantes dans I , ce qui est une contradiction. Ainsi, la supposition selon laquelle il existe un point où le wronskien est nul est indéfendable. Donc, le wronskien n'est jamais nul dans I , ce qu'il fallait prouver.

Notez que pour un ensemble de fonctions $f_1, \dots, f_n$ qui ne sont pas des solutions à l'équation (4), la partie inverse du théorème 4.1.3 n'est pas nécessairement vraie. Ces fonctions peuvent être linéairement indépendantes dans I même si le wronskien est nul en certains points, ou même en tout point, mais avec différents ensembles de constantes $k_1, \dots, k_n$ en différents points. Voyez le problème 25 pour un exemple.

L'équation non homogène On considère maintenant l'équation non homogène (2)

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = g(t).$$

On suppose que Y_1 et Y_2 sont deux solutions à l'équation (2). Comme L est linéaire, on a

$$L[Y_1 - Y_2](t) = L[Y_1](t) - L[Y_2](t) = g(t) - g(t) = 0.$$

Par conséquent, la différence de deux solutions quelconques à l'équation non homogène (2) est aussi une solution à l'équation homogène (4). Puisqu'on peut exprimer n'importe quelle solution à l'équation homogène comme une combinaison linéaire de fonctions $y_1, \dots, y_n$ qui constituent un ensemble fondamental de solutions, toute solution à l'équation (2) peut s'écrire sous la forme

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \dots + c_n y_n(t) + Y(t), \quad (16)$$

où Y est une solution particulière à l'équation non homogène (2). La combinaison linéaire (16) est appelée solution générale à l'équation non homogène (2).

Ainsi, le problème principal consiste à déterminer un ensemble fondamental de solutions $y_1, \dots, y_n$ à l'équation homogène (4). Si les coefficients sont constants, le problème est relativement simple (*ce sujet sera discuté dans la prochaine section*). Si les coefficients ne sont pas constants, on doit habituellement utiliser des méthodes numériques ou des solutions en série (*voir le chapitre 7*). Ces méthodes deviennent complexes quand l'ordre de l'équation augmente.

Pour trouver une solution particulière $Y(t)$ dans l'équation (16), on peut de nouveau utiliser la méthode des coefficients indéterminés et la méthode de variation des paramètres. Ces méthodes sont examinées et illustrées aux sections 4.3 et 4.4, respectivement.

La méthode de réduction d'ordre (*voir la section 3.5*) s'applique aussi aux équations linéaires d'ordre n . Si y_1 est une solution à l'équation (4), alors la substitution $y = v(t)y_1(t)$ mène à une équation différentielle linéaire d'ordre $n - 1$ en v' (*voir le problème 26 pour le cas où $n = 3$*). Cependant, si $n \geq 3$, l'équation réduite est au moins du deuxième ordre et elle sera rarement plus simple que l'équation originale. Par conséquent, en pratique, une réduction d'ordre est peu utile pour les équations d'ordre supérieur à deux.

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 6, déterminez les intervalles à l'intérieur desquels il existe assurément des solutions.

$$\begin{array}{ll} 1. y^{(4)} + 4y''' + 3y = t & 2. ty''' + (\sin t)y'' + 3y = \cos t \\ 3. t(t-1)y^{(4)} + e^t y'' + 4t^2 y = 0 & 4. y''' + ty'' + t^2 y' + t^3 y = \ln t \\ 5. (x-1)y^{(4)} + (x+1)y'' + (\tan x)y = 0 & 6. (x^2-4)y^{(4)} + x^2 y''' + 9y = 0 \end{array}$$

- Dans les problèmes 7 à 10, déterminez si les fonctions sont linéairement dépendantes ou indépendantes. Si elles sont linéairement dépendantes, trouvez une relation linéaire entre ces fonctions.

$$\begin{array}{lll} 7. f_1(t) = 2t - 3, & f_2(t) = t^2 + 1, & f_3(t) = 2t^2 - t \\ 8. f_1(t) = 2t - 3, & f_2(t) = 2t^2 + 1, & f_3(t) = 3t^2 + t \\ 9. f_1(t) = 2t - 3, & f_2(t) = t^2 + 1, & f_3(t) = 2t^2 - t, \quad f_4(t) = t^2 + t + 1 \\ 10. f_1(t) = 2t - 3, & f_2(t) = t^3 + 1, & f_3(t) = 2t^2 - t, \quad f_4(t) = t^2 + t + 1 \end{array}$$

- Dans les problèmes 11 à 16, vérifiez que les fonctions sont des solutions à l'équation différentielle et déterminez leur wronskien.

$$\begin{array}{ll} 11. y''' + y' = 0; & 1, \quad \cos t, \quad \sin t \\ 12. y^{(4)} + y'' = 0; & 1, \quad t, \quad \cos t, \quad \sin t \\ 13. y''' + 2y'' - y' - 2y = 0; & e^t, \quad e^{-t}, \quad e^{-2t} \\ 14. y^{(4)} + 2y''' + y'' = 0; & 1, \quad t, \quad e^{-t}, \quad te^{-t} \\ 15. xy''' - y'' = 0; & 1, \quad x, \quad x^3 \\ 16. x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0; & x, \quad x^2, \quad 1/x \end{array}$$

17. Démontrez que $W(5, \sin^2 t, \cos 2t) = 0$ quel que soit t . Pouvez-vous parvenir à ce résultat sans effectuer une évaluation directe du wronskien ?

18. Vérifiez que l'opérateur différentiel défini par

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)y$$

est linéaire. Autrement dit, montrez que

$$L[c_1 y_1 + c_2 y_2] = c_1 L[y_1] + c_2 L[y_2],$$

où les fonctions y_1 et y_2 sont au moins n fois différentiables et où c_1 et c_2 sont deux constantes arbitraires. Montrez ainsi que si $y_1, y_2, \dots, y_n$ sont des solutions à $L[y] = 0$, alors toute combinaison linéaire $c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ est aussi une solution à $L[y] = 0$.

19. Soit l'opérateur différentiel linéaire L défini par

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y,$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des constantes réelles.

a) Trouvez $L[t^n]$.

b) Trouvez $L[e^{rt}]$.

c) Déterminez quatre solutions à l'équation $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$. Selon vous, ces quatre solutions forment-elles un ensemble fondamental de solutions ? Justifiez votre réponse.

20. Dans ce problème, on montre comment généraliser le théorème 3.3.7 (le théorème d'Abel) pour les équations d'ordre plus élevé. On présente d'abord la démarche pour l'équation du troisième ordre

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0.$$

Soit y_1, y_2 et y_3 des solutions à cette équation dans l'intervalle I .

a) Si $W = W(y_1, y_2, y_3)$, montrez que

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}.$$

Suggestion : La dérivée d'un déterminant d'ordre 3 est la somme de trois déterminants d'ordre 3 obtenus en dérivant respectivement la première, la deuxième et la troisième ligne.

b) Substituez aux fonctions y_1''', y_2''' et y_3''' leurs expressions obtenues à partir de l'équation différentielle ; multipliez la première ligne par p_3 , la deuxième ligne par p_2 , puis ajoutez-les à la dernière ligne pour obtenir

$$W' = -p_1(t)W.$$

c) Montrez que

$$W(y_1, y_2, y_3)(t) = c \exp \left[- \int p_1(t) dt \right].$$

Il s'ensuit que W est soit toujours nul, soit jamais nul dans I .

d) Généralisez ce raisonnement à l'équation du n -ième ordre

$$y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \dots + p_n(t)y = 0,$$

dont les solutions sont $y_1, \dots, y_n$. Autrement dit, appliquez la formule d'Abel,

$$W(y_1, \dots, y_n)(t) = c \exp \left[- \int p_1(t) dt \right],$$

à ce cas.

■ Dans les problèmes 21 à 24, utilisez la formule d'Abel (voir le problème 20) pour trouver le wronskien d'un ensemble fondamental de solutions à l'équation différentielle.

21. $y''' + 2y'' - y' - 3y = 0$

22. $y^{(4)} + y = 0$

23. $ty''' + 2y'' - y' + ty = 0$

24. $t^2 y^{(4)} + ty''' + ty'' - 4y = 0$

25. a) Montrez que les fonctions $f(t) = t^2 |t|$ et $g(t) = t^3$ sont linéairement dépendantes dans $0 < t < 1$ et dans $-1 < t < 0$.

b) Montrez que $f(t)$ et $g(t)$ sont linéairement indépendantes dans $-1 < t < 1$.

c) Montrez que $W(f, g)(t)$ est nul pour tout t dans $-1 < t < 1$.

26. Montrez que si y_1 est une solution à

$$y''' + p_1(t)y'' + p_2(t)y' + p_3(t)y = 0,$$

alors la substitution $y = y_1(t)v(t)$ mène à l'équation du deuxième ordre suivante en v :

$$y_1 v''' + (3y_1' + p_1 y_1) v'' + (3y_1'' + 2p_1 y_1' + p_2 y_1) v' = 0.$$

■ Dans les problèmes 27 et 28, utilisez la méthode de la réduction d'ordre (voir le problème 26) pour résoudre l'équation différentielle.

27. $(2-t)y''' + (2t-3)y'' - ty' + y = 0, \quad t < 2; \quad y_1(t) = e^t$

28. $t^2(t+3)y''' - 3t(t+2)y'' + 6(1+t)y' - 6y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^2; \quad y_2(t) = t^3$

4.2 Les équations homogènes à coefficients constants

On considère l'équation différentielle homogène linéaire d'ordre n

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1)$$

où $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont des constantes réelles. À partir de nos connaissances sur les équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants, on peut prévoir que $y = e^{rt}$ est une solution à l'équation (1) pour certaines valeurs de r . En effet,

$$L[e^{rt}] = e^{rt}(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n) = e^{rt} Z(r) \quad (2)$$

pour tout r , où

$$Z(r) = a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n. \quad (3)$$

En ce qui concerne les valeurs de r telles que $Z(r) = 0$, on a $L[e^{rt}] = 0$. Donc, $y = e^{rt}$ est une solution à l'équation (1). Le polynôme $Z(r)$ est appelé un **polynôme caractéristique** et l'équation $Z(r) = 0$ est l'**équation caractéristique** de l'équation différentielle (1). Un polynôme de degré n admet n racines¹, disons $r_1, r_2, \dots, r_n$, qui ne sont pas nécessairement distinctes. On peut donc écrire le polynôme caractéristique sous la forme

$$Z(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n). \quad (4)$$

Les racines réelles et distinctes Si les racines de l'équation caractéristique sont réelles et toutes différentes, alors l'équation (1) admet n solutions distinctes $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t}$. Si ces fonctions sont linéairement indépendantes, alors la solution générale à l'équation (1) est

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}. \quad (5)$$

Pour établir l'indépendance linéaire de $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}, \dots, e^{r_n t}$, on évalue leur wronskien. On présente une autre approche dans le problème 40.

Exemple 1

Trouvez la solution générale à

$$y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0. \quad (6)$$

De plus, déterminez la solution qui satisfait aux conditions initiales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = -2, \quad y'''(0) = -1 \quad (7)$$

et tracez son graphique.

En supposant que $y = e^{rt}$, on doit déterminer r en résolvant l'équation

$$r^4 + r^3 - 7r^2 - r + 6 = 0. \quad (8)$$

Les racines du polynôme sont $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = 2$ et $r_4 = -3$. Par conséquent, la solution générale à l'équation (6) est

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-3t}. \quad (9)$$

Les conditions initiales (7) exigent que $c_1, \dots, c_4$ satisfassent aux quatre équations

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &= 1, \\ c_1 - c_2 + 2c_3 - 3c_4 &= 0, \\ c_1 + c_2 + 4c_3 + 9c_4 &= -2, \\ c_1 - c_2 + 8c_3 - 27c_4 &= -1. \end{aligned} \quad (10)$$

En résolvant ce système, on trouve

$$c_1 = \frac{11}{8}, \quad c_2 = \frac{5}{12}, \quad c_3 = -\frac{2}{3}, \quad c_4 = -\frac{1}{8}.$$

Par conséquent, la solution au problème de valeur initiale est

$$y = \frac{11}{8} e^t + \frac{5}{12} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{2t} - \frac{1}{8} e^{-3t}. \quad (11)$$

La figure 4.2.1 présente le graphique de la solution.

1. Pendant plus de 200 ans, les mathématiciens se sont demandé si tout polynôme admettait au moins une racine. En 1799, Carl Friedrich Gauss a démontré ce fait dans le théorème fondamental de l'algèbre, quoique sa preuve n'ait pas respecté les normes de rigueur actuelles. Plusieurs autres preuves ont été obtenues par la suite, dont trois par Gauss lui-même. Aujourd'hui, les étudiants abordent le théorème fondamental de l'algèbre dans un premier cours sur les variables complexes. On obtient ce théorème comme une conséquence de certaines propriétés essentielles des fonctions analytiques complexes.

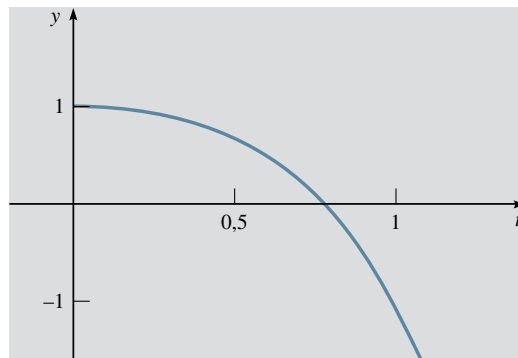


Figure 4.2.1 Solution au problème de valeurs initiales (6), (7): $y^{(4)} + y''' - 7y'' - y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $-y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = -1$.

Comme le montre l'exemple 1, l'essentiel de la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants consiste à trouver les racines du polynôme de degré n correspondant. Si les conditions initiales sont données, on doit résoudre un système à n équations linéaires et n inconnues pour déterminer les valeurs appropriées des constantes $c_1, \dots, c_n$. Chacune de ces tâches devient beaucoup plus compliquée à mesure que n augmente ; on a donc omis les calculs détaillés dans l'exemple 1. Un ordinateur peut être très utile pour résoudre de tels problèmes.

Pour les polynômes de degrés trois et quatre, il existe des formules² similaires à la technique de résolution des équations quadratiques, mais elles sont plus complexes. Ces formules donnent les valeurs exactes des racines. Les calculatrices et les ordinateurs sont souvent programmés pour trouver les racines. Parfois, ces fonctions sont incluses dans le solveur d'équations différentielles, de sorte que le processus de factorisation du polynôme caractéristique n'est pas visible et la solution à l'équation différentielle est directement obtenue.

Si on doit factoriser le polynôme caractéristique, il existe un résultat qui est parfois utile. On suppose que le polynôme

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \dots + a_{n-1} r + a_n = 0 \quad (12)$$

est à coefficients entiers. Si $r = p/q$ en est une racine rationnelle, où p et q sont premiers deux à deux, alors p doit être un diviseur de a_n et q doit être un diviseur de a_0 . Par exemple, dans l'équation (8), les diviseurs de a_0 sont ± 1 et les diviseurs de a_n sont $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ et ± 6 . Ainsi, les seules racines rationnelles possibles pour cette équation sont $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ et ± 6 . On peut vérifier que $1, -1, 2$ et -3 sont des racines réelles. Dans ce cas, il n'y a aucune autre racine puisque le polynôme est du quatrième degré. Si certaines racines sont irrationnelles ou complexes, comme c'est habituellement le cas, alors ce processus ne permet pas de les trouver. Toutefois, on peut réduire le degré du polynôme en le divisant par les facteurs correspondant aux racines rationnelles.

Lorsque les racines de l'équation caractéristique sont réelles et distinctes, la solution générale (5) est donc une somme de fonctions exponentielles. Pour de grandes valeurs de t , la solution sera dominée par le terme correspondant à la racine de valeur absolue maximale. Si cette racine est positive, alors les solutions deviendront non bornées de manière exponentielle. Si la

2. On attribue la découverte de la solution à l'équation de degré trois à Scipione dal Ferro (1465-1526) vers 1500, bien que cette solution ait été publiée pour la première fois en 1545 par Girolamo Cardano (1501-1576) dans *Ars Magna*. Cet ouvrage présente aussi une solution à l'équation de degré quatre que Girolamo Cardano attribue à son élève Ludovico Ferrari (1522-1565). La question de savoir s'il existe des formules analogues pour les racines d'équations de degrés supérieurs est demeurée sans réponse pendant plus de deux siècles. En 1826, Niels Abel a démontré qu'il ne pouvait exister de formule générale donnant les racines d'un polynôme de degré cinq ou plus. Évariste Galois (1811-1832) a élaboré une théorie plus générale en 1831 mais, malheureusement, cette théorie n'a été répandue qu'après plusieurs décennies.

racine est négative, alors les solutions tendront vers zéro de manière exponentielle. Finalement, si la plus grande racine est zéro, alors la solution tend vers une constante non nulle lorsque t augmente. Bien sûr, pour certaines conditions initiales, le coefficient du terme dominant sera nul. Le comportement de la solution lorsque t augmente dépend alors de la deuxième plus grande racine.

Les racines complexes Si l'équation caractéristique admet des racines complexes, celles-ci sont alors conjuguées, $\lambda \pm i\mu$, puisque les coefficients $a_0, \dots, a_n$ sont réels. Si elles sont distinctes, la solution générale à l'équation (1) est toujours de la forme (4). Cependant, tout comme pour l'équation du deuxième ordre (voir la section 3.4), on peut remplacer les solutions à valeurs complexes $e^{(\lambda + i\mu)t}$ et $e^{(\lambda - i\mu)t}$ par les solutions à valeurs réelles

$$e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad e^{\lambda t} \sin \mu t, \quad (13)$$

qui sont les parties réelles et imaginaires de $e^{(\lambda + i\mu)t}$. Ainsi, même si certaines racines de l'équation caractéristique sont complexes, on peut encore exprimer la solution générale à l'équation (1) comme une combinaison linéaire de solutions à valeurs réelles.

Exemple 2

Trouvez la solution générale à

$$y^{(4)} - y = 0. \quad (14)$$

Trouvez aussi la solution qui satisfait aux conditions initiales

$$y(0) = 7/2, \quad y'(0) = -4, \quad y''(0) = 5/2, \quad y'''(0) = -2 \quad (15)$$

et tracez son graphe.

En posant $y = e^{rt}$, on obtient l'équation caractéristique

$$r^4 - 1 = (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Par conséquent, les racines sont $r = 1, -1, i, -i$ et la solution générale à l'équation (14) est

$$y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t.$$

À partir des conditions initiales (15), on trouve

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 3, \quad c_3 = 1/2, \quad c_4 = -1.$$

Ainsi, la solution au problème de valeur initiale est

$$y = 3e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t - \sin t. \quad (16)$$

La figure 4.2.2 illustre le graphe de cette solution.

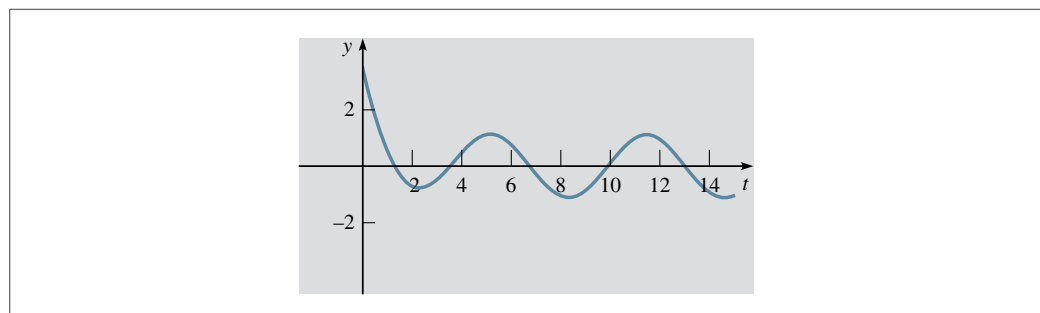


Figure 4.2.2 Solution du problème de valeurs initiales (14), (15): $y^{(4)} - y = 0$, $y(0) = 7/2$, $y'(0) = -4$, $y''(0) = 5/2$, $y'''(0) = -2$.

Il faut noter que selon les conditions initiales (15), le coefficient c_1 du terme qui croît de manière exponentielle dans la solution générale est nul. Par conséquent, ce terme n'apparaît pas dans la solution (16), qui décroît exponentiellement puis se stabilise en une solution périodique (voir la figure 4.2.2). Si on modifie les conditions initiales, il est possible que c_1 soit non nul. Le comportement de la solution est alors tout autre. Par exemple, si les trois premières conditions initiales demeurent inchangées et si l'on

► pose $y'''(0) = -15/8$, alors la solution au problème de valeur initiale devient

$$y = \frac{1}{32}e^t + \frac{95}{32}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos t - \frac{17}{16}\sin t. \quad (17)$$

Les coefficients de l'équation (17) ne diffèrent que légèrement de ceux de l'équation (16). Toutefois, le terme qui croît de manière exponentielle, même avec un coefficient relativement petit valant $1/32$, domine complètement la solution dès que t atteint 4 ou 5. On peut le constater dans la figure 4.2.3, qui présente les graphes des solutions (16) et (17).

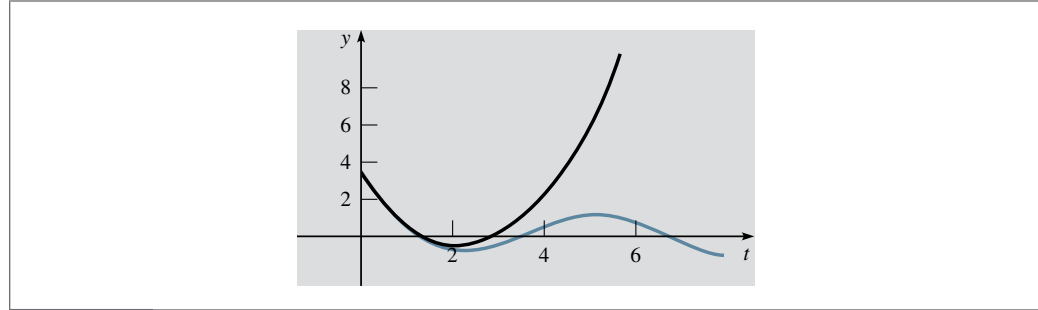


Figure 4.2.3 La courbe bleue représente la solution au problème de valeur initiale (14), (15) et est identique à la courbe de la figure 4.2.2. La courbe noire représente la solution au problème modifié, où la dernière condition initiale est devenue $y'''(0) = -15/8$.

Les racines multiples Si les racines de l'équation caractéristique ne sont pas distinctes, alors l'expression (5) ne donne plus la solution générale à l'équation (1). On se rappelle que si r_1 est une racine multiple de l'équation linéaire du deuxième ordre $a_0y'' + a_1y' + a_2y = 0$, alors les deux solutions linéairement indépendantes sont e^{r_1t} et te^{r_1t} . Pour une équation d'ordre n , si $r = r_1$ est une racine de multiplicité s (où $s \leq n$) de $Z(r) = 0$, alors

$$e^{r_1t}, \quad te^{r_1t}, \quad t^2e^{r_1t}, \quad \dots, \quad t^{s-1}e^{r_1t} \quad (18)$$

sont les solutions correspondant à l'équation (1). Le problème 41 est une démonstration de cet énoncé, qui est valide peu importe si la racine multiple est réelle ou complexe.

Notez qu'une racine complexe peut être multiple seulement si l'équation différentielle (1) est d'un ordre supérieur ou égal à quatre. Si une racine complexe $\lambda + i\mu$ est répétée s fois, la racine complexe conjuguée $\lambda - i\mu$ est aussi répétée s fois. On peut trouver $2s$ solutions à valeurs réelles, qui correspondent à ces $2s$ solutions à valeurs complexes, en notant que les parties réelles et imaginaires de $e^{(\lambda+i\mu)t}$, $te^{(\lambda+i\mu)t}$, $\dots$, $t^{s-1}e^{(\lambda+i\mu)t}$ sont aussi des solutions linéairement indépendantes :

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad e^{\lambda t} \sin \mu t, \quad te^{\lambda t} \cos \mu t, \quad te^{\lambda t} \sin \mu t, \\ \dots, \quad t^{s-1}e^{\lambda t} \cos \mu t, \quad t^{s-1}e^{\lambda t} \sin \mu t. \end{aligned}$$

Par conséquent, on peut toujours exprimer la solution générale à l'équation (1) comme une combinaison linéaire de n solutions à valeurs réelles.

Exemple 3

Trouvez la solution générale à

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 0. \quad (19)$$

L'équation caractéristique est

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)(r^2 + 1) = 0.$$

Les racines sont $r = i, i, -i, -i$, et la solution générale à l'équation (19) est

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t.$$

Pour déterminer les racines du polynôme caractéristique, on peut devoir trouver des racines cubiques, quatrièmes, et même d'ordre plus élevé d'un nombre possiblement complexe. En général, on peut y arriver en utilisant la formule d'Euler, $e^{it} = \cos t + i \sin t$, et les règles données à la section 3.4. L'exemple 4 illustre cette situation.

Exemple 4

Trouvez la solution générale à

$$y^{(4)} + y = 0. \quad (20)$$

L'équation caractéristique est

$$r^4 + 1 = 0.$$

Pour résoudre l'équation, on doit trouver les racines quatrièmes de -1 , qui est le nombre complexe $-1 + 0i$. Sa longueur est 1, et son argument est π . Ainsi,

$$-1 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi}.$$

Comme la période du cosinus et du sinus est de 2π , on a

$$-1 = \cos(\pi + 2m\pi) + i \sin(\pi + 2m\pi) = e^{i(\pi + 2m\pi)},$$

où m est un entier quelconque. Ainsi,

$$(-1)^{1/4} = e^{i(\pi/4 + m\pi/2)} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{m\pi}{2}\right).$$

On obtient les quatre racines quatrièmes de -1 en posant $m = 0, 1, 2$ et 3 . Ces racines sont

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Il est facile de vérifier que pour toute autre valeur de m , on retombe sur une de ces quatre racines. Par exemple, si $m = 4$, on obtient $(1+i)/\sqrt{2}$. La solution générale à l'équation (20) est

$$y = e^{t/\sqrt{2}} \left(c_1 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right) + e^{-t/\sqrt{2}} \left(c_3 \cos \frac{t}{\sqrt{2}} + c_4 \sin \frac{t}{\sqrt{2}} \right). \quad (21)$$

L'obtention de toutes les racines d'un polynôme est ardue, même à l'aide d'un ordinateur. Par exemple, il peut être difficile de déterminer si deux racines sont égales ou très voisines l'une de l'autre. Il convient de se rappeler que la forme de la solution générale est différente dans ces deux cas.

Si les constantes $a_0, a_1, \dots, a_n$ dans l'équation (1) sont des nombres complexes, la solution à l'équation (1) est encore de la forme (4). Cependant, dans ce cas, les racines du polynôme caractéristique sont en général des nombres complexes. Il n'est alors plus vrai que le conjugué d'une racine est aussi une racine. En conséquence, les solutions correspondantes sont à valeurs complexes.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 6, exprimez le nombre complexe sous la forme $R(\cos \theta + i \sin \theta) = Re^{i\theta}$.

1. $1 + i$

2. $-1 + \sqrt{3}i$

3. -3

4. $-i$

5. $\sqrt{3} - i$

6. $-1 - i$

■ Dans les problèmes 7 à 10, suivez la démarche présentée à l'exemple 4 pour déterminer les racines du nombre complexe.

7. $1^{1/3}$

8. $(1 - i)^{1/2}$

9. $1^{1/4}$

10. $[2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)]^{1/2}$

► Dans les problèmes 11 à 28, trouvez la solution générale à l'équation différentielle.

11. $y''' - y'' - y' + y = 0$	12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
13. $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$	14. $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$
15. $y^{(6)} + y = 0$	16. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$
17. $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$	18. $y^{(6)} - y'' = 0$
19. $y^{(5)} - 3y^{(4)} - 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$	20. $y^{(4)} - 8y' = 0$
21. $y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$	22. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$
23. $y''' - 5y'' + 3y' + y = 0$	24. $y''' + 5y'' + 6y' + 2y = 0$
Ⓜ 25. $18y''' + 21y'' + 14y' + 4y = 0$	Ⓜ 26. $y^{(4)} - 7y''' + 6y'' + 30y' - 36y = 0$
Ⓜ 27. $12y^{(4)} + 31y''' + 75y'' + 37y' + 5y = 0$	Ⓜ 28. $y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0$

■ Dans les problèmes 29 à 36, trouvez la solution au problème de valeur initiale et tracez son graphe. Comment la solution se comporte-t-elle lorsque $t \rightarrow \infty$?

- Ⓜ 29. $y''' + y' = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$
- Ⓜ 30. $y^{(4)} + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$
- Ⓜ 31. $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 0$, $y'''(1) = 0$
- Ⓜ 32. $y''' - y'' + y' - y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -2$
- Ⓜ 33. $2y^{(4)} - y''' - 9y'' + 4y' + 4y = 0$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 0$
- Ⓜ 34. $4y''' + y' + 5y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$
- Ⓜ 35. $6y''' + 5y'' + y' = 0$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$
- Ⓜ 36. $y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 3$

37. Montrez qu'on peut écrire la solution générale à $y^{(4)} - y = 0$ sous la forme

$$y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cosh t + c_4 \sinh t.$$

Déterminez la solution qui satisfait aux conditions initiales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$. Pourquoi est-il approprié d'utiliser les solutions $\cosh t$ et $\sinh t$ plutôt que e^t et e^{-t} ?

38. Considérez l'équation $y^{(4)} - y = 0$.

- Utilisez la formule d'Abel (voir le problème 20 d) de la section 4.1) pour trouver le wronskien d'un ensemble fondamental de solutions à l'équation donnée.
- Déterminez le wronskien des solutions e^t , e^{-t} , $\cos t$ et $\sin t$.
- Déterminez le wronskien des solutions $\cosh t$, $\sinh t$, $\cos t$ et $\sin t$.

39. Considérez le système masse-ressort (voir la figure 4.2.4 à la page suivante) constitué de deux objets suspendus à des ressorts dont les constantes de raideur sont respectivement 3 et 2. Supposez qu'il n'y a pas d'amortissement dans le système.

a) Montrez que les déplacements u_1 et u_2 des objets depuis leurs positions d'équilibre respectives satisfont aux équations

$$u_1'' + 5u_1 = 2u_2, \quad u_2'' + 2u_2 = 2u_1. \quad (i)$$

b) Résolvez la première des équations (i) pour u_2 , puis effectuez une substitution dans la deuxième équation afin d'obtenir l'équation du quatrième ordre pour u_1 suivante :

$$u_1^{(4)} + 7u_1'' + 6u_1 = 0. \quad (ii)$$

Trouvez la solution générale à l'équation (ii).

c) Supposez que les conditions initiales soient

$$u_1(0) = 1, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 2, \quad u_2'(0) = 0. \quad (iii)$$

Utilisez la première des équations (i) et les conditions initiales (iii) afin d'obtenir les valeurs de $u_1''(0)$ et de $u_1'''(0)$. Ensuite, montrez que la solution à l'équation (ii) qui satisfait aux quatre conditions initiales s'appliquant à u_1 est $u_1(t) = \cos t$. Montrez que la solution correspondante u_2 est $u_2(t) = 2 \cos t$.

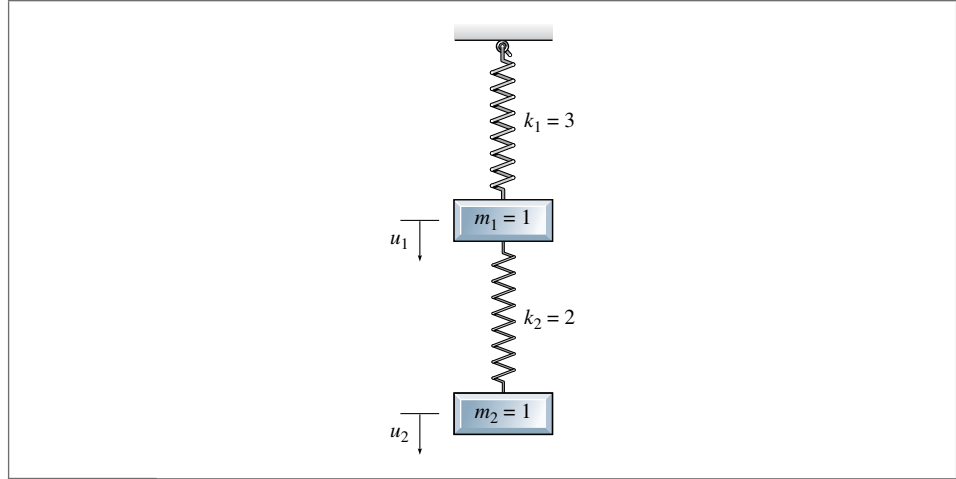


Figure 4.2.4 Système masse-ressort à deux degrés de liberté.

d) Maintenant, supposez que les conditions initiales soient

$$u_1(0) = -2, \quad u_1'(0) = 0, \quad u_2(0) = 1, \quad u_2'(0) = 0. \quad (\text{iv})$$

Suivez la même démarche qu'à la partie c) pour montrer que les solutions correspondantes sont

$$u_1(t) = -2 \cos \sqrt{6}t \text{ et } u_2(t) = \cos \sqrt{6}t.$$

e) Les solutions obtenues aux parties c) et d) décrivent deux modes distincts de vibration. Dans la première solution, la fréquence du mouvement est de 1 et les deux objets bougent en phase, se déplaçant simultanément vers le haut ou vers le bas. Le deuxième mouvement a une fréquence de $\sqrt{6}$ et les mouvements des objets sont déphasés : l'un se déplace vers le bas, tandis que l'autre se déplace vers le haut et inversement. Avec d'autres conditions initiales, le mouvement des objets est une combinaison de ces deux modes.

40. Dans ce problème, on montre que si $r_1, \dots, r_n$ sont des réels distincts, alors les fonctions $e^{r_1 t}, \dots, e^{r_n t}$ sont linéairement indépendantes pour $-\infty < t < \infty$. Ainsi, on considère la relation

$$c_1 e^{r_1 t} + \dots + c_n e^{r_n t} = 0, \quad -\infty < t < \infty \quad (\text{i})$$

et on montre que toutes les constantes doivent être nulles.

a) Multipliez l'équation (i) par $e^{-r_1 t}$ et dérivez-la par rapport à t pour obtenir

$$c_2(r_2 - r_1)e^{(r_2 - r_1)t} + \dots + c_n(r_n - r_1)e^{(r_n - r_1)t} = 0.$$

b) Multipliez le résultat de la partie a) par $e^{-(r_2 - r_1)t}$ et dérivez-le par rapport à t pour obtenir

$$c_3(r_3 - r_2)(r_3 - r_1)e^{(r_3 - r_2)t} + \dots + c_n(r_n - r_2)(r_n - r_1)e^{(r_n - r_2)t} = 0.$$

c) Poursuivez la démarche des parties a) et b) pour en venir à obtenir

$$c_n(r_n - r_{n-1}) \dots (r_n - r_1)e^{(r_n - r_{n-1})t} = 0.$$

Ainsi, $c_n = 0$ et, par conséquent,

$$c_1 e^{r_1 t} + \dots + c_{n-1} e^{r_{n-1} t} = 0.$$

d) Répétez le raisonnement précédent pour montrer que $c_{n-1} = 0$. De la même manière, il s'ensuit que $c_{n-2} = \dots = c_1 = 0$. Ainsi, les fonctions $e^{r_1 t}, \dots, e^{r_n t}$ sont linéairement indépendantes.

41. Dans ce problème, on présente une manière de montrer que si $r = r_1$ est une racine de multiplicité s du polynôme caractéristique $Z(r)$, alors $e^{r_1 t}, t e^{r_1 t}, \dots, t^{s-1} e^{r_1 t}$ sont des solutions à l'équation (1). Ce problème étend aux équations d'ordre n la méthode servant à résoudre les équations du deuxième ordre présentée dans le problème 22 de la section 3.5. On commence avec l'équation (2) du texte,

$$L[e^{rt}] = e^{rt} Z(r), \quad (\text{i})$$

et on la dérive plusieurs fois par rapport à r , en posant $r = r_1$ après chaque dérivation.

a) Notez que si r_1 est une racine de multiplicité s , alors $Z(r) = (r - r_1)^s q(r)$, où $q(r)$ est un polynôme de degré $n - s$ et $q(r_1) \neq 0$. Montrez que $Z(r_1), Z'(r_1), \dots, Z^{(s-1)}(r_1)$ sont tous nuls, mais que $Z^{(s)}(r_1) \neq 0$.

b) En dérivant l'équation (i) plusieurs fois par rapport à r , montrez que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} L[e^{rt}] &= L\left[\frac{\partial}{\partial r} e^{rt}\right] = L[te^{rt}], \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{s-1}}{\partial r^{s-1}} L[e^{rt}] &= L[t^{s-1}e^{rt}].\end{aligned}$$

c) Montrez que $e^{r_1 t}, te^{r_1 t}, \dots, t^{s-1}e^{r_1 t}$ sont des solutions à l'équation (1).

4.3 La méthode des coefficients indéterminés

On peut obtenir une solution particulière Y à l'équation linéaire du n -ième ordre non homogène à coefficients constants

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = g(t) \quad (1)$$

à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés à condition que $g(t)$ soit simple. Bien que la méthode des coefficients indéterminés ne soit pas aussi générale que celle de la variation des paramètres (*voir la prochaine section*), elle est habituellement plus facile à utiliser quand elle est applicable.

Tout comme pour l'équation linéaire du deuxième ordre, si on applique l'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants L sur un polynôme $A_0 t^m + A_1 t^{m-1} + \dots + A_m$, sur une fonction exponentielle $e^{\alpha t}$, sur $\sin \beta t$ ou sur $\cos \beta t$, le résultat reste respectivement un polynôme, une fonction exponentielle ou une combinaison linéaire de sinus et de cosinus. Par conséquent, si $g(t)$ est une somme de polynômes, d'exponentielles, de sinus et de cosinus ou des produits de telles fonctions, on peut s'attendre à pouvoir trouver $Y(t)$ en choisissant une combinaison appropriée de polynômes, d'exponentielles et ainsi de suite, multipliée par certaines constantes indéterminées. On trouve ensuite les valeurs constantes de sorte que l'équation (1) soit satisfaite.

La principale différence dans l'utilisation de cette méthode pour les équations d'ordre élevé réside dans le fait que les racines du polynôme caractéristique peuvent être d'une multiplicité supérieure à deux. Par conséquent, on peut devoir multiplier les fonctions introduites par des puissances élevées de t en se basant sur la partie non homogène de la solution. On peut ainsi les distinguer des termes dans la solution à l'équation homogène correspondante. Les exemples ci-après illustrent cette démarche. Dans ces exemples, on a omis plusieurs étapes algébriques simples, car le but principal est de montrer la manière d'arriver à la forme correcte de la solution présumée.

Exemple 1

Trouvez la solution générale à

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t. \quad (2)$$

Le polynôme caractéristique de l'équation homogène correspondant à l'équation (2) est

$$r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = (r - 1)^3.$$

Donc, la solution générale à l'équation homogène est

$$y_c(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t. \quad (3)$$

► Pour trouver une solution particulière $Y(t)$ à l'équation (2), on pose d'abord $Y(t) = Ae^t$. Comme e^t , te^t et t^2e^t sont des solutions à l'équation homogène, on doit multiplier le choix initial de la solution particulière par t^3 . En conséquence, on posera $Y(t) = At^3e^t$, où A est un coefficient indéterminé. Pour déterminer A , on dérive $Y(t)$ trois fois, on la substitue avec ses dérivées dans l'équation (2), puis on regroupe les termes dans l'équation résultante. On obtient ainsi

$$6Ae^t = 4e^t.$$

Donc, $A = 2/3$, et la solution particulière est

$$Y(t) = \frac{2}{3}t^3e^t. \quad (4)$$

La solution générale à l'équation (2) est la somme de $y_c(t)$ et de $Y(t)$.

$$y = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + \frac{2}{3}t^3e^t.$$

Exemple 2

Trouvez une solution particulière à l'équation

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 3 \sin t - 5 \cos t. \quad (5)$$

On a trouvé la solution générale à l'équation homogène dans l'exemple 3 de la section 4.2, soit

$$y_c(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t, \quad (6)$$

qui correspond aux racines $r = i, i, -i$ et $-i$ du polynôme caractéristique. On pose d'abord comme solution particulière $Y(t) = A \sin t + B \cos t$, puis on doit la multiplier par t^2 afin de la distinguer de toutes les solutions à l'équation homogène. On aboutit donc à

$$Y(t) = At^2 \sin t + Bt^2 \cos t.$$

On dérive ensuite $Y(t)$ quatre fois, on substitue la fonction et ses dérivées dans l'équation différentielle (4) et on regroupe les termes pour obtenir

$$-8A \sin t - 8B \cos t = 3 \sin t - 5 \cos t.$$

Ainsi, $A = -\frac{3}{8}$, $B = -\frac{5}{8}$, et la solution particulière à l'équation (4) est

$$Y(t) = -\frac{3}{8}t^2 \sin t + \frac{5}{8}t^2 \cos t. \quad (7)$$

Si $g(t)$ comporte plusieurs termes, il est souvent plus facile, en pratique, de calculer séparément la solution particulière correspondant à chaque terme dans $g(t)$. Comme pour l'équation du deuxième ordre, la solution particulière au problème global est la somme des solutions particulières aux problèmes individuels. L'exemple suivant illustre ce cas.

Exemple 3

Trouvez une solution particulière à

$$y''' - 4y' = t + 3 \cos t + e^{-2t}. \quad (8)$$

On résout d'abord l'équation homogène. L'équation caractéristique est $r^3 - 4r = 0$, et les racines du polynôme sont $0, \pm 2$. Ainsi,

$$y_c(t) = c_1 + c_2e^{2t} + c_3e^{-2t}.$$

On obtient une solution particulière à l'équation (8) en additionnant les solutions particulières aux équations différentielles

$$y''' - 4y' = t, \quad y''' - 4y' = 3 \cos t, \quad y''' - 4y' = e^{-2t}.$$

Notre choix initial pour une solution particulière $Y_1(t)$ à la première équation est $A_0t + A_1$ et, du fait que la solution à l'équation homogène comporte un terme constant, on multiplie ce choix par t . Ainsi,

$$Y_1(t) = t(A_0t + A_1).$$

► Pour la deuxième équation, on pose

$$Y_2(t) = B \cos t + C \sin t,$$

et il n'est pas nécessaire de modifier ce choix initial de solution puisque $\cos t$ et $\sin t$ ne sont pas des solutions à l'équation homogène. Finalement, pour la troisième équation, puisque e^{-2t} est une solution à l'équation homogène, on pose

$$Y_3(t) = Ete^{-2t}.$$

Les constantes sont déterminées en effectuant les substitutions dans les équations différentielles individuelles. On obtient $A_0 = -\frac{1}{8}$, $A_1 = 0$, $B = 0$, $C = -\frac{3}{5}$ et $E = \frac{1}{8}$. Par conséquent, une solution particulière à l'équation (8) est

$$Y(t) = -\frac{1}{8}t^2 - \frac{3}{5}\sin t + \frac{1}{8}te^{-2t}. \quad (9)$$

Vous devriez garder à l'esprit que les opérations nécessaires pour déterminer les coefficients appropriés sont fastidieuses quand les équations sont d'ordre élevé, particulièrement quand le terme non homogène est complexe. Un calculateur symbolique est alors fort utile pour les exécuter.

Il est possible d'utiliser la méthode des coefficients indéterminés lorsqu'on peut deviner une forme appropriée pour $Y(t)$. Cependant, en général, on ne peut pas l'employer si les équations différentielles ne sont pas à coefficients constants ou si les termes non homogènes diffèrent de ceux qui ont été décrits plus tôt. Dans le cas de problèmes plus complexes, on peut utiliser la méthode de variation des paramètres, qui sera introduite dans la section suivante.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 8, déterminez la solution générale à l'équation différentielle.

1. $y''' - y'' - y' + y = 2e^{-t} + 3$

2. $y^{(4)} - y = 3t + \cos t$

3. $y''' + y'' + y' + y = e^{-t} + 4t$

4. $y''' - y' = 2 \sin t$

5. $y^{(4)} - 4y'' = t^2 + e^t$

6. $y^{(4)} + 2y'' + y = 3 + \cos 2t$

7. $y^{(6)} + y''' = t$

8. $y^{(4)} + y''' = \sin 2t$

■ Dans les problèmes 9 à 12, trouvez la solution au problème de valeur initiale. Ensuite, tracez le graphe de la solution.

Ⓢ 9. $y''' + 4y' = t$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$

Ⓢ 10. $y^{(4)} + 2y'' + y = 3t + 4$, $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = y'''(0) = 1$

Ⓢ 11. $y''' - 3y'' + 2y' = t + e^t$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{1}{4}$, $y''(0) = -\frac{3}{2}$

Ⓢ 12. $y^{(4)} + 2y''' + y'' + 8y' - 12y = 12 \sin t - e^{-t}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$,
 $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 2$

■ Dans les problèmes 13 à 18, déterminez une forme appropriée pour $Y(t)$ si vous devez utiliser la méthode des coefficients indéterminés. Ne tentez pas de trouver les valeurs des constantes.

13. $y''' - 2y'' + y' = t^3 + 2e^t$

14. $y''' - y' = te^{-t} + 2 \cos t$

15. $y^{(4)} - 2y'' + y = e^t + \sin t$

16. $y^{(4)} + 4y'' = \sin 2t + te^t + 4$

17. $y^{(4)} - y'' - y' + y = t^2 + 4 + t \sin t$

18. $y^{(4)} + 2y''' + 2y'' = 3e^t + 2te^{-t} + e^{-t} \sin t$

19. Considérez l'équation différentielle linéaire d'ordre n non homogène

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = g(t),$$

où $a_0, \dots, a_n$ sont des constantes. Vérifiez que si $g(t)$ est de la forme

$$e^{\alpha t}(b_0 t^m + \dots + b_m),$$

alors la substitution $y = e^{\alpha t} u(t)$ réduit l'équation précédente à la forme

$$k_0 u^{(n)} + k_1 u^{(n-1)} + \dots + k_n u = b_0 t^m + \dots + b_m,$$

où $k_0, \dots, k_n$ sont des constantes. Déterminez k_0 et k_n en termes des a et de α . Pour trouver une solution particulière à l'équation originale, on obtient le problème plus simple consistant à déterminer une solution particulière à une équation à coefficients constants dont le terme non homogène est polynomial.

- **La méthode de l'annihilateur** Dans les problèmes 20 à 22, on considère une autre façon d'obtenir la forme appropriée de $Y(t)$ à utiliser avec la méthode des coefficients indéterminés. La démarche est basée sur l'observation selon laquelle les termes exponentiels, polynomiaux ou sinusoidaux (ou les sommes ou les produits de ces termes) peuvent être considérés comme des solutions à certaines équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants. Le symbole D signifie d/dt . Par exemple, e^{-t} est une solution à $(D+1)y=0$. L'opérateur différentiel $D+1$ annihile (ou il est un « annihilateur de ») e^{-t} . De même, D^2+4 est un annihilateur de $\sin 2t$ ou de $\cos 2t$, $(D-3)^2 = D^2 - 6D + 9$ est un annihilateur de e^{3t} ou de te^{3t} , et ainsi de suite.

20. Montrez que le produit d'opérateurs différentiels linéaires à coefficients constants est commutatif. Cela signifie que

$$(D-a)(D-b)f = (D-b)(D-a)f$$

pour toute fonction f au moins deux fois différentiable et quelles que soient les constantes a et b . Le résultat peut être généralisé peu importe le nombre (fini) de facteurs.

21. Considérez le problème qui consiste à trouver la forme de la solution particulière $Y(t)$ à

$$(D-2)^3(D+1)Y = 3e^{2t} - te^{-t}, \quad (\text{i})$$

où le premier membre de l'équation correspond à la factorisation du polynôme caractéristique.

- a) Montrez que $D-2$ et $(D+1)^2$, respectivement, sont des annihilateurs des termes du second membre de l'équation (i), et que la combinaison $(D-2)(D+1)^2$ annihile simultanément les deux termes du second membre de l'équation (i).
- b) Appliquez l'opérateur $(D-2)(D+1)^2$ à l'équation (i) et utilisez le résultat du problème 20 pour obtenir

$$(D-2)^4(D+1)^3Y = 0. \quad (\text{ii})$$

Ainsi, Y est une solution à l'équation homogène (ii). En résolvant l'équation (ii), montrez que

$$Y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + c_3 t^2 e^{2t} + c_4 t^3 e^{2t} + c_5 e^{-t} + c_6 t e^{-t} + c_7 t^2 e^{-t}, \quad (\text{iii})$$

où $c_1, \dots, c_7$ sont des constantes qui restent à déterminer.

- c) Comme e^{2t} , $t e^{2t}$, $t^2 e^{2t}$ et e^{-t} sont des solutions à l'équation homogène correspondant à l'équation (i), ces fonctions sont superflues dans la résolution de l'équation non homogène. Donc, posez c_1 , c_2 , c_3 et c_5 égaux à zéro dans l'équation (iii) pour obtenir

$$Y(t) = c_4 t^3 e^{2t} + c_6 t e^{-t} + c_7 t^2 e^{-t}, \quad (\text{iv})$$

ce qui correspond à la forme de la solution particulière Y à l'équation (i). On peut trouver les valeurs des coefficients c_4 , c_6 et c_7 en substituant l'expression de l'équation (iv) dans l'équation différentielle (i).

- **Résumé** Soit

$$L(D)y = g(t), \quad (\text{i})$$

où $L(D)$ est un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants et $g(t)$ est une somme ou un produit de termes exponentiels, polynomiaux ou sinusoidaux. Pour trouver la forme de la solution particulière à l'équation (i), vous pouvez procéder comme suit.

- a) Trouvez un opérateur différentiel $H(D)$ à coefficients constants qui annihile $g(t)$, c'est-à-dire un opérateur tel que $H(D)g(t) = 0$.

- b) Appliquez $H(D)$ à l'équation (i) pour obtenir

$$H(D)L(D)y = 0, \quad (\text{ii})$$

qui est une équation homogène d'ordre élevé.

- c) Résolvez l'équation (ii).

- d) Éliminez de la solution trouvée à l'étape a) les termes qui apparaissent aussi dans la solution à $L(D)y = 0$. Les termes restants constituent la forme appropriée de la solution particulière de l'équation (i).

22. Utilisez la méthode de l'annihilateur pour trouver la forme de la solution particulière $Y(t)$ à chacune des équations des problèmes 13 à 18. Ne tentez pas d'évaluer les coefficients.

4.4 La méthode de variation des paramètres

La méthode de variation des paramètres servant à déterminer une solution particulière à l'équation différentielle linéaire d'ordre n non homogène

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(t)y' + p_n(t)y = g(t) \quad (1)$$

est une extension directe de la méthode pour l'équation différentielle du deuxième ordre (voir la section 3.7). Comme on l'a vu plus tôt, pour utiliser la méthode de variation des paramètres, on doit d'abord résoudre l'équation différentielle homogène correspondante. Cela peut s'avérer difficile à moins que les coefficients ne soient constants. Cependant, la méthode de variation des paramètres est plus générale que la méthode des coefficients indéterminés, car elle conduit à une expression pour la solution particulière à toute fonction continue g , tandis que la méthode des coefficients indéterminés est restreinte, en pratique, à une classe limitée de fonctions g .

Par exemple, on suppose que l'on connaît un ensemble fondamental de solutions $y_1, y_2, \dots, y_n$ à l'équation homogène. Alors, la solution générale à celle-ci est

$$y_c(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t). \quad (2)$$

La méthode de variation des paramètres servant à déterminer une solution particulière à l'équation (1) repose sur la possibilité de déterminer n fonctions $u_1, u_2, \dots, u_n$ telles que $Y(t)$ soit de la forme

$$Y(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) + \cdots + u_n(t)y_n(t). \quad (3)$$

Puisqu'il y a n fonctions à déterminer, on doit préciser n conditions. L'une d'elles est que Y doit satisfaire à l'équation (1). Les $n - 1$ autres fonctions sont choisies pour simplifier les calculs le plus possible. Puisqu'une simplification dans la détermination de Y est peu probable si on doit résoudre des équations différentielles d'ordre élevé pour $u_1, \dots, u_n$, il est normal d'imposer des conditions pour supprimer les termes qui conduisent à des dérivées d'ordre supérieur de $u_1, \dots, u_n$. À partir de l'équation (3), on obtient

$$Y' = (u_1 y_1' + u_2 y_2' + \cdots + u_n y_n') + (u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n), \quad (4)$$

où on a omis la variable indépendante t dont dépend chaque fonction de l'équation (4). Par conséquent, on impose une première condition, soit

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 + \cdots + u_n' y_n = 0. \quad (5)$$

Il s'ensuit que l'expression (4) représentant Y' est réduite à

$$Y' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + \cdots + u_n y_n'. \quad (6)$$

On continue en calculant les dérivées successives $Y'', \dots, Y^{(n-1)}$. Après chaque dérivation, on pose la somme des termes contenant les dérivées de $u_1, \dots, u_n$ égale à zéro. Ainsi, on obtient $n - 2$ conditions supplémentaires similaires à l'équation (5), c'est-à-dire

$$u_1' y_1^{(m)} + u_2' y_2^{(m)} + \dots + u_n' y_n^{(m)} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n - 2. \quad (7)$$

En raison de ces conditions, il s'ensuit que les expressions représentant $Y'', \dots, Y^{(n-1)}$ sont réduites à

$$Y^{(m)} = u_1 y_1^{(m)} + u_2 y_2^{(m)} + \dots + u_n y_n^{(m)}, \quad m = 2, 3, \dots, n - 1. \quad (8)$$

Enfin, on doit imposer la condition où Y est une solution à l'équation (1). En dérivant $Y^{(n-1)}$ à partir de l'équation (8), on obtient

$$Y^{(n)} = (u_1 y_1^{(n)} + \dots + u_n y_n^{(n)}) + (u_1' y_1^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)}). \quad (9)$$

Pour satisfaire à l'équation différentielle, on remplace Y et ses dérivées dans l'équation (1) à partir des équations (3), (6), (8) et (9). Ensuite, on regroupe les termes contenant chacune des fonctions $y_1, \dots, y_n$ et leurs dérivées. Il s'ensuit alors que la plupart des termes de l'équation sont éliminés, car chacune des fonctions $y_1, \dots, y_n$ est une solution à l'équation (1) et, par conséquent, $L[y_i] = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Les termes restants donnent la relation

$$u_1' y_1^{(n-1)} + u_2' y_2^{(n-1)} + \dots + u_n' y_n^{(n-1)} = g. \quad (10)$$

L'équation (10), jumelée avec les $n - 1$ équations (7), donne un système à n équations linéaires non homogènes et n inconnues $u_1', u_2', \dots, u_n'$:

$$\begin{aligned} y_1 u_1' + y_2 u_2' + \dots + y_n u_n' &= 0, \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' + \dots + y_n' u_n' &= 0, \\ y_1'' u_1' + y_2'' u_2' + \dots + y_n'' u_n' &= 0, \\ &\vdots \\ y_1^{(n-1)} u_1' + \dots + y_n^{(n-1)} u_n' &= g. \end{aligned} \quad (11)$$

Le système (11) est linéaire en $u_1', \dots, u_n'$. Si on résout ce système et qu'on intègre les expressions résultantes, on peut obtenir les coefficients $u_1, \dots, u_n$. Une condition suffisante pour qu'il existe une solution au système d'équations (11) est que le déterminant de la matrice des coefficients doit être non nul pour tout t . Comme ce déterminant est précisément $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$, il n'est jamais nul car $y_1, \dots, y_n$ sont des solutions linéairement indépendantes à l'équation homogène. On peut ainsi déterminer $u_1', \dots, u_n'$. À partir de la règle de Cramer, on trouve la solution au système d'équations (11) selon

$$u_m'(t) = \frac{g(t)W_m(t)}{W(t)}, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Ici, $W(t) = W(y_1, y_2, \dots, y_n)(t)$, et W_m est le déterminant obtenu en remplaçant la m -ième colonne de W par la colonne $(0, 0, \dots, 0, 1)$. Une solution particulière à l'équation (1) est donc donnée par

$$Y(t) = \sum_{m=1}^n y_m(t) \int_{t_0}^t \frac{g(s)W_m(s)}{W(s)} ds, \quad (13)$$

où t_0 est arbitraire. Bien que cette démarche soit simple, les calculs impliqués par l'équation (13) sont fort complexes lorsque n est élevé. Dans certains cas, on peut les simplifier en utilisant l'identité d'Abel (voir le problème 20 de la section 4.1).

$$W(t) = W(y_1, \dots, y_n)(t) = c \exp \left[- \int p_1(t) dt \right].$$

On détermine la constante c en évaluant W en un point approprié.

Exemple 1

Sachant que $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$ et $y_3(t) = e^{-t}$ sont les solutions à l'équation homogène correspondant à

$$y''' - y'' - y' + y = g(t), \quad (14)$$

déterminez une solution particulière à l'équation (14) en termes d'intégrale.

On utilise l'équation (13). D'abord, on a

$$W(t) = W(e^t, te^t, e^{-t})(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}.$$

On extrait du déterminant les facteurs e^t des deux premières colonnes et le facteur e^{-t} de la troisième colonne. On obtient

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 1 & t+1 & -1 \\ 1 & t+2 & 1 \end{vmatrix}.$$

En soustrayant la première ligne des deuxième et troisième lignes, on obtient

$$W(t) = e^t \begin{vmatrix} 1 & t & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Finalement, en évaluant le dernier déterminant à partir des mineurs associés à la première colonne, on a

$$W(t) = 4e^t.$$

Ensuite,

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & te^t & e^{-t} \\ 0 & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ 1 & (t+2)e^t & e^{-t} \end{vmatrix}.$$

En utilisant les mineurs associés à la première colonne, on obtient

$$W_1(t) = \begin{vmatrix} te^t & e^{-t} \\ (t+1)e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = -2t - 1.$$

De la même manière,

$$W_2(t) = \begin{vmatrix} e^t & 0 & e^{-t} \\ e^t & 0 & -e^{-t} \\ e^t & 1 & e^{-t} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{vmatrix} = 2$$

et

$$W_3(t) = \begin{vmatrix} e^t & te^t & 0 \\ e^t & (t+1)e^t & 0 \\ e^t & (t+2)e^t & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^t & te^t \\ e^t & (t+1)e^t \end{vmatrix} = e^{2t}.$$

En substituant ces résultats dans l'équation (13), on a

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^t \int_{t_0}^t \frac{g(s)(-1-2s)}{4e^s} ds + te^t \int_{t_0}^t \frac{g(s)(2)}{4e^s} ds + e^{-t} \int_{t_0}^t \frac{g(s)e^{2s}}{4e^s} ds \\ &= \frac{1}{4} \int_{t_0}^t \left\{ e^{t-s} [-1+2(t-s)] + e^{-(t-s)} \right\} g(s) ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Selon la fonction spécifique $g(t)$, il ne sera peut-être pas possible d'évaluer les intégrales de l'équation (15) en termes de fonctions élémentaires.

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 6, utilisez la méthode de variation des paramètres pour déterminer la solution générale à l'équation différentielle.

1. $y''' + y' = \tan t$, $-\pi/20 < t < \pi/2$

2. $y''' - y' = t$

3. $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4t}$

4. $y''' - y' = \sec t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$

5. $y''' - y'' + y' - y = e^{-t} \sin t$

6. $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin t$

- Dans les problèmes 7 et 8, trouvez la solution générale à l'équation différentielle. Laissez votre réponse en termes d'au moins une intégrale.

7. $y''' - y'' + y' - y = \sec t$, $-\pi/2 < t < \pi/2$

8. $y''' - y' = \csc t$, $0 < t < \pi$

- Dans les problèmes 9 à 12, trouvez la solution au problème de valeur initiale, puis tracez un graphe de la solution.

⊕ 9. $y''' + y' = \sec t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2$

⊕ 10. $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 1$

⊕ 11. $y''' - y'' + y' - y = \sec t$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$

⊕ 12. $y''' - y' = \csc t$, $y(\pi/2) = 2$, $y'(\pi/2) = 1$, $y''(\pi/2) = -1$

13. Sachant que x , x^2 et $1/x$ sont des solutions à l'équation homogène correspondant à

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4, \quad x > 0,$$

déterminez une solution particulière.

14. Trouvez une solution particulière à l'équation différentielle en termes d'intégrales

$$y''' - y'' + y' - y = g(t).$$

15. Trouvez une solution particulière à l'équation différentielle en termes d'intégrales

$$y^{(4)} - y = g(t).$$

Suggestion : Les fonctions $\sin t$, $\cos t$, $\sinh t$ et $\cosh t$ constituent un ensemble fondamental de solutions à l'équation homogène.

16. Trouvez une solution particulière à l'équation différentielle en termes d'intégrales

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = g(t).$$

Si $g(t) = t^{-2}e^t$, déterminez $Y(t)$.

17. Trouvez une solution particulière à l'équation différentielle en termes d'intégrales

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = g(x), \quad x > 0.$$

Suggestion : Vérifiez que x , x^2 et x^3 sont des solutions à l'équation homogène.

Références

CODDINGTON, E. A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1961 ; New York, Dover, 1989.

CODDINGTON, E. A. et R. CARLSON. *Linear Ordinary Differential Equations*, Philadelphia, PA, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

Les systèmes d'équations linéaires du premier ordre

Plusieurs problèmes en physique comportent un certain nombre d'éléments distincts reliés entre eux, par exemple dans les circuits électriques et en mécanique classique. Dans de tels cas, le problème mathématique correspondant est constitué d'un système qui comprend au moins deux équations différentielles qu'on peut toujours réécrire en termes d'équations du premier ordre. Dans ce chapitre, nous aborderons essentiellement les systèmes d'équations linéaires du premier ordre au moyen des techniques élémentaires de l'algèbre linéaire. À bien des égards, ce chapitre suit la même démarche que celle utilisée pour étudier les équations linéaires du deuxième ordre au chapitre 3. Nous aborderons la stabilité et la linéarisation des systèmes non linéaire à la fin du chapitre.

5.1 Introduction

Les systèmes d'équations différentielles ordinaires interviennent dans les problèmes incluant plusieurs variables dépendantes, chacune d'elles étant une fonction d'une même variable indépendante. La variable indépendante sera notée t et les variables dépendantes $x_1, x_2, x_3, \dots$ sont des fonctions de t . La notation x'_i indiquera la dérivée de x_i par rapport à t .

On considère le système masse-ressort illustré à la figure 5.1.1. Les deux objets se déplacent sur une surface (on néglige l'amortissement) sous l'influence de forces externes $F_1(t)$ et $F_2(t)$ et sont contraints par les trois ressorts caractérisés respectivement par les constantes k_1, k_2 et k_3 . À l'aide d'arguments similaires à ceux qui ont été avancés à la section 3.8, on trouve les équations suivantes régissant les déplacements respectifs x_1 et x_2 des objets :

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= k_2(x_2 - x_1) - k_1 x_1 + F_1(t) \\ &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 + F_1(t), \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= -k_3 x_2 - k_2(x_2 - x_1) + F_2(t) \\ &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 + F_2(t). \end{aligned} \tag{1}$$

La construction des équations (1) apparaît au problème 17.

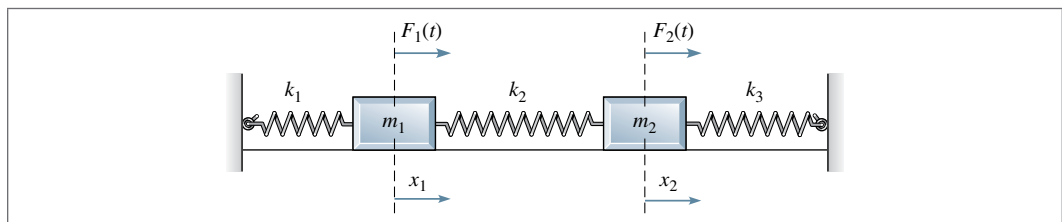


Figure 5.1.1 Système masse-ressort à deux degrés de liberté.

Ensuite, on considère un circuit RLC branché en parallèle (voir la figure 5.1.2). Soit V la chute de tension aux bornes du condensateur et I le courant passant par l'inducteur. En se reportant à la section 3.8 et au problème 19 de la présente section, on peut montrer que la tension et le courant sont régis par le système d'équations

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \frac{V}{L}, \\ \frac{dV}{dt} &= -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC},\end{aligned}\tag{2}$$

où L est l'inductance, C la capacitance et R la résistance.

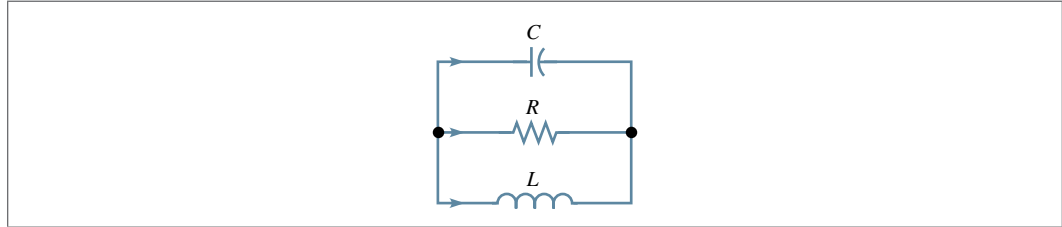


Figure 5.1.2 Circuit RLC branché en parallèle.

Comme dernier exemple, on peut mentionner le problème proie-prédateur qui, en écologie, est fondamental du point de vue mathématique. Soit $H(t)$ et $P(t)$ les populations au temps t de deux espèces dont l'une est la proie (P) et l'autre le prédateur (H). Par exemple, $P(t)$ et $H(t)$ peuvent représenter respectivement soit le nombre de renards et de lapins dans une forêt, soit le nombre de perches et de crapets (qui sont consommés par les perches) dans un étang. Sans proies, le nombre de prédateurs diminuera et sans prédateurs, le nombre de proies augmentera.

Vers 1925, Lotka et Volterra ont introduit un modèle mathématique montrant la façon de préserver un équilibre écologique quand les deux espèces sont présentes. Le modèle est constitué du système d'équations différentielles

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dt} &= a_1 H - b_1 HP, \\ \frac{dP}{dt} &= -a_2 P + b_2 HP,\end{aligned}\tag{3}$$

appelé équations proie-prédateur. Dans les équations (3), le coefficient a_1 est le taux de natalité dans la population H , et a_2 est le taux de mortalité dans la population P . Les termes HP dans les deux équations modélisent l'interaction entre les deux populations. On suppose que le nombre de rencontres entre les prédateurs et les proies est proportionnel au produit des tailles des populations. Puisque cette rencontre tend à être favorable pour le prédateur et défavorable pour la proie, le signe du terme HP est négatif dans la première équation et positif dans la seconde. Les coefficients b_1 et b_2 sont les coefficients d'interaction entre le prédateur et la proie.

Les systèmes d'équations du premier ordre sont aussi importants dans l'étude des équations d'ordre plus élevé, car celles-ci peuvent toujours être ramenées à de tels systèmes. Cette transformation est généralement nécessaire si on prévoit utiliser une approche numérique. En effet, presque tous les logiciels permettant d'obtenir des solutions numériques sont conçus pour résoudre les systèmes d'équations du premier ordre. L'exemple suivant illustre la facilité avec laquelle on peut effectuer cette transformation.

Exemple 1

Le mouvement d'un système masse-ressort (voir l'exemple 3 de la section 3.8) est décrit par l'équation différentielle du deuxième ordre

$$u'' + 0,125u' + u = 0.\tag{4}$$

Réécrivez cette équation sous la forme d'un système d'équations du premier ordre.

Soit $x_1 = u$ et $x_2 = u'$. Alors, $x'_1 = x_2$. De plus, $u'' = x'_2$. Par conséquent, en remplaçant u , u' et u'' dans l'équation (4), on obtient

$$x'_2 + 0,125x_2 + x_1 = 0.$$

► Ainsi, x_1 et x_2 satisfont au système suivant de deux équations différentielles du premier ordre :

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1 - 0,125x_2. \end{aligned} \quad (5)$$

On peut transformer l'équation générale du mouvement d'un système masse-ressort

$$mu'' + \gamma u' + ku = F(t) \quad (6)$$

en un système d'équations du premier ordre de la même manière. Si $x_1 = u$ et $x_2 = u'$ et si on procède comme dans l'exemple 1, on obtient le système

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -(k/m)x_1 - (\gamma/m)x_2 + F(t)/m. \end{aligned} \quad (7)$$

Pour transformer une équation d'ordre arbitraire n

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (8)$$

en un système à n équations du premier ordre, on applique la méthode de l'exemple 1 en introduisant n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, définies selon

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', \quad x_3 = y'', \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}. \quad (9)$$

On a alors

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \end{aligned} \quad (10)$$

et, à partir de l'équation (8),

$$x_n' = F(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (11)$$

Les équations (10) et (11) constituent un cas particulier du système plus général

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (12)$$

De manière similaire, on peut réduire le système (1) en un système à quatre équations du premier ordre de la forme (12), tandis que les systèmes (2) et (3) admettent déjà cette forme. En fait, les systèmes de la forme (12) incluent presque tous les cas rencontrés en pratique et, par conséquent, une grande part de la théorie en équations différentielles leur est consacrée.

On dit que le système (12) admet une **solution** dans l'intervalle I : $\alpha < t < \beta$ s'il existe un ensemble de n fonctions

$$x_1 = \phi_1(t), \quad x_2 = \phi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \phi_n(t), \quad (13)$$

qui sont différentiables en tout point dans l'intervalle I et qui satisfont au système d'équations (12) en tout point dans cet intervalle. En plus du système d'équations différentielles, on peut aussi avoir des conditions initiales de la forme

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n(t_0) = x_n^0, \quad (14)$$

où t_0 est une valeur précise de t dans I et $x_1^0, \dots, x_n^0$ sont des valeurs spécifiques. On obtient un problème de valeur initiale en combinant les équations différentielles (12) et les conditions initiales (14).

On peut considérer une solution (13) comme un ensemble d'équations paramétriques dans un espace à n dimensions. Pour une valeur donnée de t , les équations (13) permettent d'obtenir

les valeurs des coordonnées $x_1, \dots, x_n$ d'un point dans l'espace. Quand t varie, les coordonnées varient également. L'ensemble de points correspondant à $\alpha < t < \beta$ décrit une courbe dans l'espace. On considère souvent cette courbe comme la trajectoire suivie par une particule dont le déplacement correspond au système d'équations différentielles (12). Les conditions initiales (14) déterminent le point de départ du déplacement de la particule.

Les conditions suivantes s'appliquant à $F_1, F_2, \dots, F_n$, facilement vérifiées en pratique, suffisent pour assurer que le problème de valeur initiale (12), (14) admet une solution unique. Le théorème 5.1.1 est analogue au théorème 2.4.2, relatif à l'existence et à l'unicité pour une équation du premier ordre.

Théorème 5.1.1

Soit n fonctions continues ($F_1, \dots, F_n$) dont les dérivées partielles $\partial F_1 / \partial x_1, \dots, \partial F_1 / \partial x_n, \dots, \partial F_n / \partial x_1, \dots, \partial F_n / \partial x_n$ existent et sont également continues dans une région R de l'espace $tx_1x_2 \dots x_n$ définie par $\alpha < t < \beta$, $\alpha_1 < x_1 < \beta_1, \dots, \alpha_n < x_n < \beta_n$ et soit $(t_0, x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ un point dans R . Il existe alors un intervalle $|t - t_0| < h$ dans lequel il y a une solution unique $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ au système d'équations différentielles (12) satisfaisant également aux conditions initiales (14).

Nous ne ferons pas la démonstration de ce théorème ici. Il convient toutefois de noter que dans les hypothèses du théorème, on ne spécifie rien sur les dérivées partielles de $F_1, \dots, F_n$ par rapport à la variable indépendante t . De plus, dans la conclusion, l'amplitude $2h$ de l'intervalle dans lequel la solution existe n'est pas spécifiée et, parfois, celle-ci est très courte. Finalement, on peut obtenir le même résultat sur la base d'hypothèses moins restrictives mais plus complexes. Ainsi, le théorème tel qu'il est énoncé ne représente pas le résultat le plus général possible. Par ailleurs, les conditions d'application du théorème sont suffisantes mais non nécessaires pour que la conclusion soit valide.

Si chacune des fonctions $F_1, \dots, F_n$ des équations (12) est une fonction linéaire des variables dépendantes $x_1, \dots, x_n$, le système d'équations est **linéaire**; autrement, il est **non linéaire**. Ainsi, le système le plus général à n équations linéaires du premier ordre est de la forme

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \dots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + \dots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \dots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Si chacune des fonctions $g_1(t), \dots, g_n(t)$ est nulle pour tout t dans l'intervalle I , le système (15) est **homogène**; sinon, il est **non homogène**. Il faut noter que les systèmes (1) et (2) sont tous les deux linéaires et que le système (3) est non linéaire. Le système (1) est non homogène sauf si $F_1(t) = F_2(t) = 0$, et le système (2) est homogène. Pour le système linéaire (15), le théorème 5.1.2, relatif à l'existence et à l'unicité, est plus simple et permet de tirer une conclusion plus solide. Il est analogue aux théorèmes 2.4.1 et 3.3.1

Théorème 5.1.2

Si les fonctions $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}, g_1, \dots, g_n$ sont continues dans un intervalle ouvert $I: \alpha < t < \beta$, alors il existe une solution unique $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ au système (15) qui satisfait également aux conditions initiales (14), où t_0 est un point dans I et $x_1^0, \dots, x_n^0$ sont des valeurs spécifiques. De plus, la solution existe dans l'intervalle I .

Il faut noter que contrairement au cas d'un système non linéaire, l'existence et l'unicité de la solution d'un système linéaire sont assurées partout dans l'intervalle à l'intérieur duquel les

hypothèses sont satisfaites. De plus, pour un système linéaire, les valeurs initiales $x_1^0, \dots, x_n^0$ en $t = t_0$ sont complètement arbitraires, tandis que dans le cas du système non linéaire, le point initial doit se situer dans la région R définie au théorème 5.1.1.

Le présent chapitre sera consacré essentiellement aux systèmes d'équations linéaires du premier ordre. Les systèmes non linéaires seront abordés à la section 5.11. Nous utiliserons ici une notation matricielle et supposerons que le lecteur est familier avec les propriétés des matrices. Nous résumerons les propriétés élémentaires des matrices dans les sections 5.2 et 5.3, et nous introduirons au besoin des notions plus avancées dans les sections suivantes.

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 4, transformez l'équation en un système d'équations du premier ordre.

$$\begin{array}{ll} 1. & u'' + 0,5u' + 2u = 0 \\ 2. & u'' + 0,5u' + 2u = 3 \sin t \\ 3. & t^2 u'' + tu' + (t^2 - 0,25)u = 0 \\ 4. & u^{(4)} - u = 0 \end{array}$$

- Dans les problèmes 5 et 6, transformez le problème de valeur initiale donné en un problème de valeur initiale composé de deux équations du premier ordre.

$$\begin{array}{ll} 5. & u'' + 0,25u' + 4u = 2 \cos 3t, \quad u(0) = 1, \quad u'(0) = -2 \\ 6. & u'' + p(t)u' + q(t)u = g(t), \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = u'_0 \end{array}$$

7. **Méthode de résolution par élimination** Les systèmes d'équations du premier ordre peuvent parfois être transformés en une seule équation d'ordre plus élevé. Considérez le système

$$x'_1 = -2x_1 + x_2, \quad x'_2 = x_1 - 2x_2.$$

- Résolvez la première équation pour déterminer x_2 et substituez-la dans la seconde équation afin d'obtenir une équation du deuxième ordre pour x_1 . Résolvez cette équation pour déterminer x_1 puis x_2 .
- Trouvez la solution au système qui satisfait aussi aux conditions initiales $x_1(0) = 2$, $x_2(0) = 3$.
- Dans le cas où $t \geq 0$, tracez la courbe paramétrique obtenue en termes de x_1 et de x_2 trouvées dans la partie b).

- Dans les problèmes 8 à 12, procédez comme pour le problème 7.

- Transformez le système en une seule équation du deuxième ordre.
- Trouvez x_1 et x_2 satisfaisant aux conditions initiales données.
- Tracez le graphique de la solution dans le plan x_1x_2 lorsque $t \geq 0$.

$$\begin{array}{ll} 8. & x'_1 = 3x_1 - 2x_2, \quad x_1(0) = 3 \\ & x'_2 = 2x_1 - 2x_2, \quad x_2(0) = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 9. & x'_1 = 1,25x_1 + 0,75x_2, \quad x_1(0) = -2 \\ & x'_2 = 0,75x_1 + 1,25x_2, \quad x_2(0) = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 10. & x'_1 = x_1 - 2x_2, \quad x_1(0) = -1 \\ & x'_2 = 3x_1 - 4x_2, \quad x_2(0) = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 11. & x'_1 = 2x_2, \quad x_1(0) = 3 \\ & x'_2 = -2x_1, \quad x_2(0) = 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 12. & x'_1 = -0,5x_1 + 2x_2, \quad x_1(0) = -2 \\ & x'_2 = -2x_1 + 0,5x_2, \quad x_2(0) = 2 \end{array}$$

13. Transformez les équations (2) pour le circuit en parallèle en une seule équation du deuxième ordre.

14. Montrez que si a_{11} , a_{12} , a_{21} , et a_{22} sont des constantes, où a_{12} et a_{21} ne sont pas simultanément nulles, et que si les fonctions g_1 et g_2 sont dérivables, alors on peut transformer le problème de valeur initiale

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t), & x_1(0) &= x_1^0 \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t), & x_2(0) &= x_2^0\end{aligned}$$

en un problème de valeur initiale avec une seule équation du deuxième ordre. Est-il possible d'appliquer la même démarche si $a_{11}, \dots, a_{22}$ sont des fonctions de t ?

15. Considérez le système linéaire homogène

$$\begin{aligned}x' &= p_{11}(t)x + p_{12}(t)y, \\y' &= p_{21}(t)x + p_{22}(t)y.\end{aligned}$$

Montrez que si $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ et $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ sont deux solutions au système, alors $x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ est aussi une solution, quelles que soient les constantes c_1 et c_2 . Il s'agit du principe de superposition.

16. Soit $x = x_1(t)$, $y = y_1(t)$ et $x = x_2(t)$, $y = y_2(t)$ deux solutions au système linéaire non homogène

$$\begin{aligned}x' &= p_{11}(t)x + p_{12}(t)y + g_1(t), \\y' &= p_{21}(t)x + p_{22}(t)y + g_2(t).\end{aligned}$$

Montrez que $x = x_1(t) - x_2(t)$, $y = y_1(t) - y_2(t)$ est une solution au système homogène correspondant.

17. Pour obtenir les équations (1), on trace un schéma d'équilibre qui présente les forces agissant sur chaque objet. La figure 5.1.3 a) illustre la situation où les déplacements x_1 et x_2 respectifs des objets sont tous les deux positifs (donc orientés vers la droite) et $x_2 > x_1$. Par conséquent, les ressorts 1 et 2 sont étirés et le ressort 3 est comprimé, ce qui donne lieu aux forces en présence dans la figure 5.1.3 b). En vous référant à la loi de Newton ($F = ma$), faites en sorte d'obtenir les équations (1).

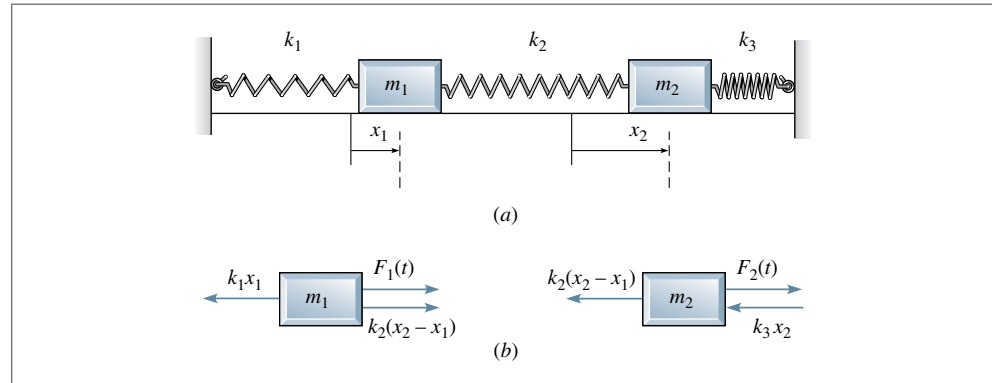


Figure 5.1.3 a) Les déplacements x_1 et x_2 sont tous deux positifs. b) Schéma d'équilibre du système masse-ressort.

18. Transformer le système (1) en un système d'équations de premier ordre en introduisant les 4 variables suivantes : $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1'$, et $y_4 = x_2'$.

Les circuits électriques La théorie des circuits électriques (voir la figure 5.1.2), qui sont constitués d'inducteurs, de résistances et de condensateurs, est basée sur les lois de Kirchhoff :

- 1) le débit net de courant passant par chaque nœud est nul ;
- 2) la chute de tension nette autour d'une boucle fermée est nulle.

En plus des lois de Kirchhoff, les relations suivantes existent entre le courant I (en ampères) passant par chaque élément du circuit et la chute de tension V (en volts) dans l'élément :

$$\begin{aligned}V &= RI, & R &= \text{résistance (en ohms)}; \\C \frac{dV}{dt} &= I, & C &= \text{capacitance (en farads}^1\text{)}; \\L \frac{dI}{dt} &= V, & L &= \text{inductance (en henrys)}.\end{aligned}$$

1. On mesure généralement les capacitances des condensateurs réels en microfarads. On utilise le farad par commodité.

Les lois de Kirchhoff ainsi que la relation courant-tension pour chaque élément du circuit aboutissent à un système d'équations algébriques et différentielles à partir duquel on peut établir la tension à chaque nœud et le courant passant dans le circuit. Les problèmes 19 à 21 illustrent ce qui précède.

19. Considérez le circuit illustré à la figure 5.1.2. Soit I_1 , I_2 et I_3 les courants passant respectivement par le condensateur, la résistance et l'inducteur, et soit V_1 , V_2 et V_3 les chutes de tension correspondantes. Les flèches indiquent les directions (choisies arbitrairement) dans lesquelles les courants et les chutes de tension seront considérés comme positifs.

- a) En appliquant la seconde loi de Kirchhoff à la boucle supérieure du circuit, montrez que

$$V_1 - V_2 = 0. \quad (\text{i})$$

De même, montrez que

$$V_2 - V_3 = 0. \quad (\text{ii})$$

- b) En appliquant la première loi de Kirchhoff à un nœud dans le circuit, montrez que

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0. \quad (\text{iii})$$

- c) Utilisez la relation courant-tension dans chaque élément du circuit pour obtenir les équations

$$CV_1' = I_1, \quad V_2 = RI_2, \quad LI_3' = V_3. \quad (\text{iv})$$

- d) Éliminez V_2 , V_3 , I_1 et I_2 des équations (i) à (iv) pour obtenir

$$CV_1' = -I_3 - \frac{V_1}{R}, \quad LI_3' = V_1. \quad (\text{v})$$

Vous devez noter que si les indices inférieurs sont omis dans les équations (v), alors on obtient le système (2) illustré dans la présente section.

20. Considérez le circuit illustré à la figure 5.1.4. Utilisez la méthode mentionnée dans le problème 19 pour montrer que le courant I passant par l'inducteur et la tension V passant par le condensateur satisfont au système d'équations différentielles

$$\frac{dI}{dt} = -I - V, \quad \frac{dV}{dt} = 2I - V.$$

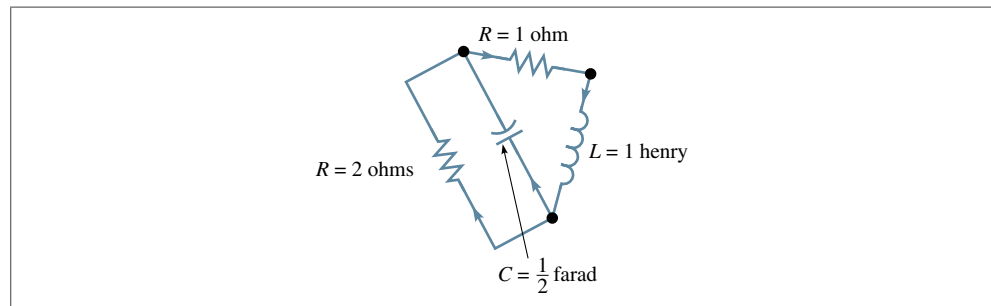


Figure 5.1.4 Circuit du problème 20.

21. Considérez le circuit illustré à la figure 5.1.5. Utilisez la méthode mentionnée dans le problème 19 pour montrer que le courant I passant par l'inducteur et la tension V passant par le condensateur satisfont au système d'équations différentielles

$$L \frac{dI}{dt} = -R_1 I - V, \quad C \frac{dV}{dt} = I - \frac{V}{R_2}.$$

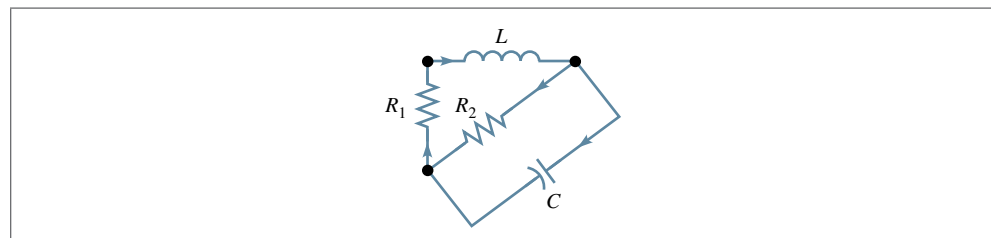


Figure 5.1.5 Circuit du problème 21.

22. Considérez les réservoirs reliés illustrés à la figure 5.1.6. Au départ, le réservoir 1 contient 30 gal d'eau et 25 oz de sel, et le réservoir 2 contient 20 gal d'eau et 15 oz de sel.

De l'eau contenant 1 oz/gal de sel entre dans le réservoir 1 avec un débit de 1,5 gal/min. Le mélange se déverse du réservoir 1 dans le réservoir 2 avec un débit de 3 gal/min. De l'eau contenant 3 oz/gal de sel se déverse également dans le réservoir 2 avec un débit de 1 gal/min (de l'extérieur). Le mélange sort du réservoir 2 avec un débit de 4 gal/min, duquel une certaine partie retourne dans le réservoir 1 à un débit de 1,5 gal/min, tandis que le reste quitte le système.

- Supposez que $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ sont respectivement la quantité de sel dans chaque réservoir au temps t . Posez les équations différentielles et les conditions initiales qui modélisent le processus de débit. Vous devez noter que ce système d'équations différentielles est non homogène.
- Trouvez les valeurs de Q_1 et de Q_2 pour lesquelles le système est en équilibre, c'est-à-dire que ce système ne varie plus avec le temps. Soit Q_1^E et Q_2^E ces valeurs d'équilibre. Pouvez-vous prédire quel réservoir s'approchera le plus rapidement de son état d'équilibre ?
- Soit $x_1 = Q_1(t) - Q_1^E$ et $x_2 = Q_2(t) - Q_2^E$. Posez un problème de valeur initiale en termes de x_1 et de x_2 . Vous devez noter que le système d'équations avec x_1 et x_2 est homogène.

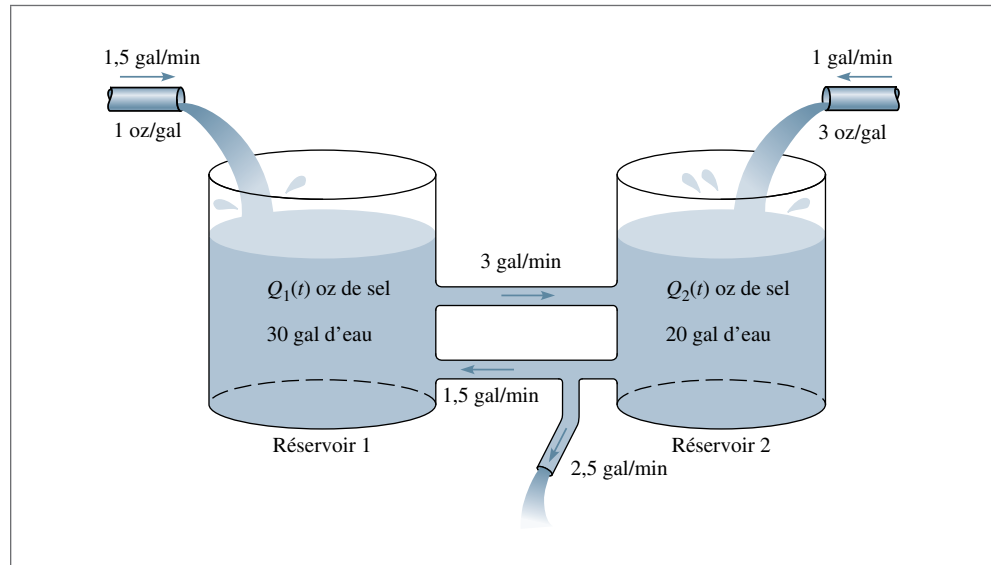


Figure 5.1.6 Deux réservoirs reliés (voir les problèmes 22 et 23).

23. Considérez deux réservoirs reliés semblables à ceux qui sont illustrés à la figure 5.1.6. Le réservoir 1 contient au départ 60 gal d'eau et Q_1^0 oz de sel, et le réservoir 2 contient au départ 100 gal d'eau et Q_2^0 oz de sel. De l'eau contenant q_1 oz/gal de sel s'écoule dans le réservoir 1 avec un débit de 3 gal/min. Le mélange dans le réservoir 1 s'écoule avec un débit de 4 gal/min, duquel la moitié s'écoule dans le réservoir 2, tandis que le reste quitte le système. De l'eau contenant q_2 oz/gal de sel entre également dans le réservoir 2 de l'extérieur avec un débit de 1 gal/min. Le mélange dans le réservoir 2 quitte le réservoir avec un débit de 3 gal/min, dont 1 gal/min retourne dans le réservoir 1, tandis que le reste quitte le système.

- Tracez un diagramme qui illustre le processus décrit plus haut. Soit $Q_1(t)$ et $Q_2(t)$ les quantités respectives de sel dans les réservoirs au temps t . Posez les équations différentielles et les conditions initiales en termes de Q_1 et de Q_2 , qui modélisent le processus.
- Trouvez les valeurs d'équilibre Q_1^E et Q_2^E en fonction des concentrations q_1 et q_2 .
- Est-il possible (en corrigeant q_1 et q_2) d'obtenir $Q_1^E = 60$ et $Q_2^E = 50$ comme état d'équilibre ?
- Décrivez quels états d'équilibre sont réalisables pour ce système avec différentes valeurs de q_1 et de q_2 .

5.2 Résultats élémentaires sur les matrices

Pour effectuer les calculs requis, nous devons introduire plusieurs résultats d'algèbre matricielle² afin de résoudre le problème de valeur initiale décrit par un système d'équations différentielles. Dans cette section et la suivante, nous présenterons un résumé des notions qui seront nécessaires ultérieurement. Il est possible de trouver plus d'information dans un manuel de base sur l'algèbre linéaire. Toutefois, nous supposons que le lecteur est familier avec les déterminants et la façon de les évaluer.

Les matrices seront désignées par des lettres majuscules en caractères gras $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$, et, occasionnellement, par des lettres majuscules en caractères gras de l'alphabet grec $\Phi, \Psi, \dots$. Une matrice $\mathbf{A}$ est un tableau rectangulaire de nombres dits éléments disposés en m lignes et en n colonnes, soit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

On dit que $\mathbf{A}$ est une matrice de dimensions $m \times n$. Même si plus loin dans ce chapitre on supposera souvent que les éléments sont des nombres réels, on admet dans cette section que les éléments des matrices peuvent être des nombres complexes. L'élément se trouvant à l'intersection de la i -ième ligne et de la j -ième colonne est désigné par a_{ij} , le premier indice précisant sa ligne et le second, sa colonne. On utilise parfois la notation (a_{ij}) pour indiquer la matrice dont le terme général est a_{ij} .

La matrice $\mathbf{A}^T$ associée à la matrice $\mathbf{A}$ est la **transposée** de $\mathbf{A}$; on l'obtient en permutant les lignes et les colonnes de $\mathbf{A}$. Ainsi, si $\mathbf{A} = (a_{ij})$, alors $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$. De plus, on notera $\bar{a}_{ij}$ le conjugué complexe de a_{ij} et $\bar{\mathbf{A}}$ la matrice obtenue à partir de $\mathbf{A}$ en remplaçant chaque élément a_{ij} par son conjugué $\bar{a}_{ij}$. La matrice $\bar{\mathbf{A}}$ est la **conjuguée** de $\mathbf{A}$. On aura également besoin de la transposée de la conjuguée de $\bar{\mathbf{A}}^T$. Cette matrice est la **matrice adjointe**³ de $\mathbf{A}$ et sera notée $\mathbf{A}^*$.

Par exemple, soit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2-i \\ 4+3i & -5+2i \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & 4+3i \\ 2-i & -5+2i \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2+i \\ 4-3i & -5-2i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 3 & 4-3i \\ 2+i & -5-2i \end{pmatrix}.$$

On s'intéresse ici à des types particuliers de matrices : les matrices carrées, qui admettent le même nombre de lignes et de colonnes, c'est-à-dire pour lesquelles $m = n$; et les vecteurs (ou les vecteurs colonne), qu'on peut considérer comme des matrices de dimensions $n \times 1$ donc comme des matrices avec une seule colonne. Les matrices carrées avec n lignes et n colonnes sont dites d'ordre n . Les vecteurs (ou colonnes) seront notés par des lettres minuscules en caractères gras : $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \dots$. La matrice transposée $\mathbf{x}^T$ d'un vecteur colonne est un vecteur ligne $n \times 1$, c'est-à-dire

2. En 1858, l'algébriste anglais Arthur Cayley (1821-1895) écrivait un article dans lequel les propriétés des matrices étaient examinées pour la première fois en détail. Le terme « matrice » a été introduit par son ami James Sylvester (1814-1897) en 1850. Arthur Cayley a accompli certains de ses plus grands travaux en mathématiques de 1849 à 1863, alors qu'il pratiquait le droit. Il est ensuite devenu professeur de mathématiques à l'Université Cambridge, poste qu'il a conservé durant le reste de sa vie. Après le travail innovateur d'Arthur Cayley, l'élaboration de la théorie sur les matrices s'est déroulée rapidement. Charles Hermite, George Frobenius et Camille Jordan, entre autres, y ont apporté d'importantes contributions.

3. La matrice adjointe ne doit pas être confondue avec la transposée de la matrice des cofacteurs pour l'inversion d'une matrice (voir les équations (23) et (24) de la présente section).

une matrice constituée d'une seule ligne et dont les éléments sont les mêmes que les éléments correspondants de $\mathbf{x}$.

Propriétés des matrices

1. **L'égalité** Deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de dimensions $m \times n$ sont égales si tous les éléments correspondants sont égaux, c'est-à-dire si $a_{ij} = b_{ij}$ pour tout i et pour tout j .
2. **La matrice zéro** On utilise le symbole $\mathbf{0}$ pour noter la matrice (ou le vecteur) dont chacun des éléments est zéro.
3. **L'addition** La somme de deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ de dimensions $m \times n$ est la matrice obtenue en additionnant les éléments correspondants :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}). \quad (2)$$

À partir de cette définition, il s'ensuit que l'addition des matrices est commutative et associative, de sorte que

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}. \quad (3)$$

4. **La multiplication par un scalaire** Le produit de la matrice $\mathbf{A}$ par un nombre complexe α est la matrice

$$\alpha \mathbf{A} = \alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij}). \quad (4)$$

Chaque élément de la matrice $\mathbf{A}$ est multiplié par α . Les lois de distributivité

$$\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha \mathbf{A} + \alpha \mathbf{B}, \quad (\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{A} \quad (5)$$

sont satisfaites par cette opération. En particulier, l'inverse additif de $\mathbf{A}$, noté $-\mathbf{A}$, est

$$-\mathbf{A} = (-1)\mathbf{A}. \quad (6)$$

5. **La soustraction** La différence $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ de deux matrices de dimensions $m \times n$ est

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \quad (7)$$

Ainsi,

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij}), \quad (8)$$

ce qui est similaire à l'équation 2.

6. **La multiplication** Le produit $\mathbf{AB}$ de deux matrices n'est défini que lorsque le nombre de colonnes de $\mathbf{A}$ est identique au nombre de lignes de $\mathbf{B}$. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices de dimensions respectives $m \times n$ et $n \times r$, alors le produit $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ est une matrice de dimensions $m \times r$. On trouve l'élément dans la i -ième ligne et la j -ième colonne de $\mathbf{C}$ en multipliant chaque élément de la i -ième ligne de $\mathbf{A}$ par l'élément correspondant de la j -ième colonne de $\mathbf{B}$ et en additionnant ensuite ces produits. Symboliquement, on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}. \quad (9)$$

On peut démontrer que la multiplication matricielle est associative :

$$(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) \quad (10)$$

On peut aussi démontrer qu'elle est distributive sur l'addition :

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}. \quad (11)$$

En général, la multiplication matricielle n'est pas commutative. Pour que les produits $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{BA}$ existent et pour qu'ils admettent les mêmes dimensions, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ doivent être deux matrices carrées de même ordre. Même dans ce cas, les résultats des deux produits sont habituellement différents, de sorte qu'en général,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \quad (12)$$

Exemple 1

Pour illustrer la multiplication des matrices et le fait que la multiplication de matrices n'est pas nécessairement commutative, considérez les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

À partir de la définition de la multiplication donnée à l'équation (9), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 2-2+2 & 1+2-1 & -1+0+1 \\ 0+2-2 & 0-2+1 & 0+0-1 \\ 4+1+2 & 2-1-1 & -2+0+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

De toute évidence, $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

7. La multiplication des vecteurs La multiplication des matrices s'applique aussi en particulier si les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont respectivement des vecteurs de dimensions $1 \times n$ et $n \times 1$. En notant ces vecteurs $\mathbf{x}^T$ et $\mathbf{y}$, on obtient

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (13)$$

Il s'agit d'un prolongement en n dimensions du produit usuel issu de la physique et du calcul différentiel. Le résultat de l'équation (13) est un nombre (complexe), et il découle de l'équation (13) que

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^T (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x}^T \mathbf{y} + \mathbf{x}^T \mathbf{z}, \quad (\alpha \mathbf{x})^T \mathbf{y} = \alpha (\mathbf{x}^T \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T (\alpha \mathbf{y}). \quad (14)$$

Il existe un autre produit vectoriel qu'on définit aussi pour deux vecteurs ayant le même nombre de composantes. Ce produit noté $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ est appelé **produit scalaire** et est défini par

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i. \quad (15)$$

Le produit scalaire est aussi un nombre (complexe) et, en comparant les équations (13) et (15), on constate que

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{y}}. \quad (16)$$

Si tous les éléments de $\mathbf{y}$ sont réels, alors les produits (13) et (15) sont identiques. À partir de l'équation (15), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}, & (\mathbf{x}, \mathbf{y} + \mathbf{z}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}) + (\mathbf{x}, \mathbf{z}), \\ (\alpha \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \alpha (\mathbf{x}, \mathbf{y}), & (\mathbf{x}, \alpha \mathbf{y}) &= \bar{\alpha} (\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (17)$$

Il faut noter que même si le vecteur $\mathbf{x}$ comporte des éléments dont les parties imaginaires sont non nulles, le produit scalaire de $\mathbf{x}$ par lui-même donne un nombre réel non négatif

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2. \quad (18)$$

La quantité non négative $(\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}$, notée $\|\mathbf{x}\|$, est appelée **longueur** de $\mathbf{x}$. Si $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$, les vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont dits **orthogonaux**. Par exemple, les vecteurs unitaires $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ en géométrie vectorielle en trois dimensions forment un ensemble orthogonal. Par ailleurs, si certains des éléments de $\mathbf{x}$ ne sont pas réels, alors le produit matriciel

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad (19)$$

peut ne pas être réel.

Par exemple,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} i \\ -2 \\ 1+i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2-i \\ i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y} = (i)(2-i) + (-2)(i) + (1+i)(3) = 4 + 3i,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (i)(2+i) + (-2)(-i) + (1+i)(3) = 2 + 7i,$$

$$\mathbf{x}^T \mathbf{x} = (i)^2 + (-2)^2 + (1+i)^2 = 3 + 2i,$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = (i)(-i) + (-2)(-2) + (1+i)(1-i) = 7.$$

8. **L'identité** La matrice identité $\mathbf{I}$ est de la forme

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

D'après la définition de la multiplication matricielle, on a

$$\mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (21)$$

quelle que soit la matrice $\mathbf{A}$. Le produit matriciel est donc commutatif si l'une des matrices est la matrice identité.

9. **L'inverse** La matrice carrée $\mathbf{A}$ est **non singulière** ou **inversible** s'il existe une matrice $\mathbf{B}$ telle que $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{B}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. S'il existe une telle matrice $\mathbf{B}$, on peut montrer qu'elle est unique. On l'appelle matrice inverse ou simplement inverse de $\mathbf{A}$ et on écrit $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$. Par conséquent,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}. \quad (22)$$

Les matrices qui n'admettent pas d'inverse sont **singulières** ou **non inversibles**.

Si l'inverse $\mathbf{A}^{-1}$ existe, il peut être obtenu à partir de $\mathbf{A}$ de plusieurs façons. Dans l'une de celles-ci, on utilise les déterminants. Le mineur M_{ij} associé à l'élément a_{ij} d'une matrice est le déterminant de la matrice obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de la matrice originale, autrement dit la ligne et la colonne contenant a_{ij} . Le cofacteur C_{ij} est alors associé à chaque élément a_{ij} , et est défini par

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (23)$$

Si $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$, alors on peut démontrer que le terme général b_{ij} est

$$b_{ij} = \frac{C_{ji}}{\det \mathbf{A}}. \quad (24)$$

La méthode donnée à l'équation (24) pour obtenir $\mathbf{A}^{-1}$ n'est pas efficace⁴ mais elle permet d'introduire la condition à laquelle $\mathbf{A}$ doit satisfaire pour admettre un inverse. En fait, cette condition est nécessaire et suffisante : $\mathbf{A}$ est non singulière si et seulement si $\det \mathbf{A} \neq 0$. Si $\det \mathbf{A} = 0$, alors $\mathbf{A}$ est singulière.

Une technique plus appropriée pour calculer $\mathbf{A}^{-1}$ consiste à utiliser les opérations élémentaires de lignes. Il en existe trois :

1. la permutation de deux lignes ;
2. la multiplication d'une ligne par un scalaire non nul ;
3. l'addition vectorielle d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.

La transformation d'une matrice par une suite d'opérations élémentaires de lignes est appelée **réduction** ou **élimination de Gauss**⁵. On peut transformer toute matrice non singulière $\mathbf{A}$ en la matrice identité $\mathbf{I}$ à l'aide d'une suite systématique de telles opérations. Il est possible de montrer que si la même suite d'opérations est effectuée sur $\mathbf{I}$, on obtient la matrice $\mathbf{A}^{-1}$. Il est beaucoup plus efficace d'effectuer la suite d'opérations sur les deux matrices simultanément en formant la matrice augmentée $\mathbf{A} | \mathbf{I}$. L'exemple suivant illustre la façon de déterminer une matrice inverse selon cette méthode.

Exemple 2

Trouvez l'inverse de

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

On commence par former la matrice augmentée $\mathbf{A} | \mathbf{I}$:

$$\mathbf{A} | \mathbf{I} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

On peut transformer la matrice $\mathbf{A}$ en $\mathbf{I}$ à l'aide de la suite d'opérations suivante. Simultanément, la matrice $\mathbf{I}$ est transformée en $\mathbf{A}^{-1}$. Le résultat de chaque étape apparaît sous l'énoncé.

- a) Faites en sorte d'obtenir des zéros à l'extérieur de la diagonale principale de la première colonne en additionnant (-3) fois la première ligne à la deuxième ligne, puis en additionnant (-2) fois la première ligne à la troisième ligne.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

- b) Faites en sorte d'obtenir un 1 sur la diagonale principale de la deuxième colonne en multipliant la deuxième ligne par $\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 5 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

4. Lorsque n est grand, le nombre de multiplications nécessaires pour évaluer $\mathbf{A}^{-1}$ à l'aide de l'équation (24) est de l'ordre de $n!$. Si on utilise des méthodes plus efficaces comme la réduction décrite plus loin, le nombre de multiplications n'est que de l'ordre de n^3 . Même pour de petites valeurs de n (par exemple $n = 4$), les déterminants sont coûteux pour calculer un inverse, en ce qui concerne le nombre d'opérations requises, et il est préférable d'utiliser les méthodes de réduction.

5. Carl Friedrich Gauss (1777-1855) est né à Brunswick, en Allemagne. Il a été la plus grande partie de sa vie professeur d'astronomie et directeur de l'observatoire de l'Université de Göttingen. Gauss a par ailleurs grandement contribué au développement de la théorie des nombres, de l'algèbre, de la géométrie non euclidienne et différentielle, et de différents champs d'application des sciences tels la géodésie, les statistiques et le mouvement des corps célestes. Il est généralement considéré comme l'un des meilleurs mathématiciens de tous les temps.

- c) Faites en sorte d'obtenir des zéros à l'extérieur de la diagonale principale de la deuxième colonne en additionnant la deuxième ligne à la première ligne et en additionnant (-4) fois la deuxième ligne à la troisième ligne.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 4 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

- d) Faites en sorte d'obtenir un 1 sur la diagonale principale de la troisième colonne en multipliant la troisième ligne par $\left(-\frac{1}{5}\right)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right)$$

- e) Faites en sorte d'obtenir des zéros à l'extérieur de la diagonale principale de la troisième colonne en additionnant $\left(-\frac{3}{2}\right)$ fois la troisième ligne à la première ligne et en ajoutant $\left(-\frac{5}{2}\right)$ fois la troisième ligne à la deuxième ligne.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array} \right)$$

La dernière matrice est $\mathbf{I}|\mathbf{A}^{-1}$, un résultat qu'on peut vérifier en la multipliant avec la matrice originale $\mathbf{A}$.

Cet exemple est simplifié du fait que la matrice $\mathbf{A}$ comporte un 1 dans le coin supérieur gauche ($a_{11} = 1$). Si ce n'est pas le cas, alors la première étape consiste à obtenir un 1 à cet endroit en multipliant la première ligne par $1/a_{11}$, pourvu que $a_{11} \neq 0$. Si $a_{11} = 0$, alors on doit permuter la première ligne avec une autre ligne pour obtenir un élément non nul dans la position supérieure gauche avant d'effectuer l'opération. Si c'est impossible, parce que chaque élément de la première colonne est nul, la matrice n'a pas d'inverse et est singulière. La même situation peut aussi se produire à des étapes ultérieures de la démarche et la solution reste la même : on permute la ligne donnée avec une ligne plus basse pour obtenir un élément non nul à la position voulue dans la diagonale. Si c'est impossible, alors la matrice initiale est singulière.

Les fonctions matricielles On doit parfois considérer les vecteurs et les matrices dont les éléments sont des fonctions d'une variable réelle t . On écrit alors

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad (25)$$

respectivement.

La matrice $\mathbf{A}(t)$ est continue en $t = t_0$ ou dans un intervalle $\alpha < t < \beta$ si chaque élément de $\mathbf{A}$ est une fonction continue au point donné ou dans l'intervalle donné. De même, $\mathbf{A}(t)$ est dérivable si chacun de ses éléments est dérivable et que ses dérivées $d\mathbf{A}/dt$ sont définies par

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left(\frac{da_{ij}}{dt} \right). \quad (26)$$

Autrement dit, chaque élément de $d\mathbf{A}/dt$ est la dérivée de l'élément correspondant de $\mathbf{A}$. De la même manière, l'intégrale d'une fonction matricielle est définie par

$$\int_a^b \mathbf{A}(t)dt = \left(\int_a^b a_{ij}(t)dt \right). \quad (27)$$

Par exemple, si

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & t \\ 1 & \cos t \end{pmatrix},$$

alors

$$\mathbf{A}'(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & -\sin t \end{pmatrix}, \quad \int_0^\pi \mathbf{A}(t)dt = \begin{pmatrix} 2 & \pi^2/2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}.$$

Plusieurs règles du calcul différentiel élémentaire s'appliquent facilement aux fonctions matricielles; en particulier

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C} \frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \text{où } \mathbf{C} \text{ est une matrice constante;} \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt}; \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A} \frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \mathbf{B}. \quad (30)$$

Dans les équations (28) et (30), on doit éviter de permuter l'ordre de la multiplication des facteurs. Les définitions données aux équations (26) et (27) s'appliquent également aux vecteurs.

En conclusion, on peut effectuer certaines opérations importantes sur les matrices en appliquant les opérations séparément à chaque élément de la matrice. La multiplication par un scalaire, la dérivation et l'intégration sont des exemples de telles opérations. Toutefois, ce n'est pas le cas pour de nombreuses autres opérations. Par exemple, on ne détermine pas le carré d'une matrice en élevant au carré chacun de ses éléments.

Problèmes

1. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, trouvez les matrices suivantes.

a) $2\mathbf{A} + \mathbf{B}$

b) $\mathbf{A} - 4\mathbf{B}$

c) $\mathbf{AB}$

d) $\mathbf{BA}$

2. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1+i & -1+2i \\ 3+2i & 2-i \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} i & 3 \\ 2 & -2i \end{pmatrix}$, trouvez les matrices suivantes.

a) $\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$

b) $3\mathbf{A} + \mathbf{B}$

c) $\mathbf{AB}$

d) $\mathbf{BA}$

3. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, trouvez les matrices suivantes.

a) $\mathbf{A}^T$

b) $\mathbf{B}^T$

c) $\mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

d) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T$

4. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3-2i & 1+i \\ 2-i & -2+3i \end{pmatrix}$, trouvez les matrices suivantes.

a) $\mathbf{A}^T$

b) $\bar{\mathbf{A}}$

c) $\mathbf{A}^*$

5. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, vérifiez que $2(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$.

6. Si $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, vérifiez que

a) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

b) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$

c) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

7. Prouvez chacune des lois suivantes de l'algèbre matricielle.

a) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$

b) $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$

c) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$

d) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$

e) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$

f) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

8. Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3i \\ 1-i \end{pmatrix}$ et $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$, trouvez les matrices suivantes.

a) $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$

b) $\mathbf{y}^T \mathbf{y}$

c) $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

d) $(\mathbf{y}, \mathbf{y})$

9. Si $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1-2i \\ i \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$, montrez que

a) $\mathbf{x}^T \mathbf{y} = \mathbf{y}^T \mathbf{x}$

b) $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \overline{(\mathbf{y}, \mathbf{x})}$

■ Dans les problèmes 10 à 19, trouvez la matrice inverse ou montrez que la matrice est singulière.

10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

12. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -7 \end{pmatrix}$

15. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

16. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

20. Si $\mathbf{A}$ est une matrice carrée, et s'il existe deux matrices $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ telles que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ et $\mathbf{CA} = \mathbf{I}$, montrez que $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. Par conséquent, si une matrice a un inverse, elle ne peut en avoir qu'un seul.

21. Si $\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 2e^t & e^{-t} & -e^{2t} \\ -e^t & 3e^{-t} & 2e^{2t} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{-t} & 3e^{2t} \\ -e^t & 2e^{-t} & e^{2t} \\ 3e^t & -e^{-t} & -e^{2t} \end{pmatrix}$, trouvez les matrices qui suivent.

a) $\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$

b) $\mathbf{AB}$

c) $d\mathbf{A}/dt$

d) $\int_0^1 \mathbf{A}(t) dt$

■ Dans les problèmes 22 à 24, vérifiez que le vecteur satisfait à l'équation différentielle.

22. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$

23. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t$

24. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-t} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

■ Dans les problèmes 25 et 26, vérifiez que la matrice satisfait à l'équation différentielle.

25. $\Psi' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Psi$, $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{2t} \\ -4e^{-3t} & e^{2t} \end{pmatrix}$

26. $\Psi' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Psi$, $\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-2t} & e^{3t} \\ -4e^t & -e^{-2t} & 2e^{3t} \\ -e^t & -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$

5.3 Les systèmes d'équations algébriques linéaires

Dans cette section, nous introduirons des résultats importants de l'algèbre linéaire dans la résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires. Certains sont faciles à prouver, d'autres ne le sont pas. Puisque nous voulons donner les résultats utiles, aucune preuve ne sera donnée. Les résultats de cette section concernent la résolution d'un système d'équations linéaires.

Les systèmes d'équations linéaires Un ensemble de n équations algébriques linéaires avec n variables,

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned} \quad (1)$$

peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (2)$$

où la matrice $\mathbf{A}$ de dimensions $n \times n$ et le vecteur $\mathbf{b}$ sont spécifiés et où les composantes de $\mathbf{x}$ doivent être déterminées. Si $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, le système est **homogène**, sinon il est **non homogène**.

Si la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ est non singulière, autrement dit si $\det \mathbf{A} \neq 0$, alors il existe une solution unique au système (2). Si $\mathbf{A}$ est non singulière, $\mathbf{A}^{-1}$ existe et on peut trouver la solution en multipliant à gauche chaque membre de l'équation (2) par $\mathbf{A}^{-1}$. Par conséquent,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \quad (3)$$

En particulier, le problème homogène $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, qui correspond à $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ dans l'équation (2), n'admet que la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Par ailleurs, si $\mathbf{A}$ est singulière, autrement dit si $\det \mathbf{A} = 0$, alors l'équation (2) n'admet aucune solution ou admet une infinité de solutions. Si $\mathbf{A}$ est singulière, $\mathbf{A}^{-1}$ n'existe pas, et l'équation (3) n'est plus valide. Le système homogène

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0} \quad (4)$$

admet alors une infinité de solutions non nulles en plus de la solution triviale. La situation concernant le système non homogène (2) est plus compliquée. Ce système n'admet aucune solution à moins que le vecteur $\mathbf{b}$ ne satisfasse à une condition précise. Cette condition est

$$(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0, \quad (5)$$

pour tous les vecteurs $\mathbf{y}$ satisfaisant à $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$, où $\mathbf{A}^*$ est la matrice adjointe de $\mathbf{A}$. Si la condition (5) est satisfaite, alors le système (2) admet une infinité de solutions. Chacune de ces solutions est de la forme

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \boldsymbol{\xi}, \quad (6)$$

où $\mathbf{x}^{(0)}$ est une solution particulière à l'équation (2) et $\boldsymbol{\xi}$ est une solution quelconque au système homogène (4). Il faut noter la similitude entre l'équation (6) et la solution à une équation différentielle linéaire non homogène. Les preuves de certains des énoncés précédents sont requises dans les problèmes 26 à 30.

Les résultats énoncés au paragraphe précédent sont importants quand il faut classer les solutions dans les systèmes linéaires. Cependant, pour résoudre des systèmes particuliers, il est généralement préférable de réduire le système à résoudre à un système plus simple à partir duquel il est facile d'écrire la solution ou les solutions. Pour y arriver efficacement, on construit la **matrice augmentée**

$$\mathbf{A} | \mathbf{b} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \quad (7)$$

en apposant la colonne constituée du vecteur $\mathbf{b}$ à la matrice des coefficients $\mathbf{A}$. La ligne continue remplace le signe d'égalité et elle sépare la matrice augmentée. On effectue maintenant des opérations élémentaires de lignes sur la matrice augmentée de manière à transformer $\mathbf{A}$ en une matrice triangulaire, c'est-à-dire en une matrice dont les éléments au-dessous de la diagonale principale sont tous nuls. Une fois cette tâche accomplie, on constate facilement si le système admet des solutions et on peut alors les trouver. Il faut noter que les opérations élémentaires de lignes exécutées sur la matrice augmentée (7) sont des opérations qui préservent les solutions (s'il en existe) au système (1). Les exemples suivants illustrent ce processus.

Exemple 1

Résolvez le système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4. \end{aligned} \quad (8)$$

La matrice augmentée pour le système (8) est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{array} \right) \quad (9)$$

► On effectue maintenant des opérations élémentaires de lignes sur la matrice (9) afin d'introduire des zéros dans la partie inférieure gauche de la matrice. Chaque étape est décrite, et les résultats sont notés ci-dessous.

- a) Additionnez la première ligne à la deuxième ligne et additionnez (-2) fois la première ligne à la troisième ligne.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array} \right)$$

- b) Multipliez la deuxième ligne par -1 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array} \right)$$

- c) Additionnez (-3) fois la deuxième ligne à la troisième ligne.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array} \right)$$

- d) Divisez la troisième ligne par -4 .

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

La matrice ainsi obtenue correspond au système d'équations

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7, \\ x_2 - x_3 &= -2, \\ x_3 &= 1, \end{aligned} \tag{10}$$

qui équivaut au système original (8). Il faut noter que les coefficients dans les équations (10) forment une matrice triangulaire. À partir de la dernière des équations (10) on a $x_3 = 1$, à partir de la deuxième équation on a $x_2 = -2 + x_3 = -1$ et à partir de la première équation on a $x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 = 2$. Ainsi, on obtient

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

qui est la solution au système donné (8). Incidemment, puisque la solution est unique, on conclut que la matrice des coefficients est non singulière.

Exemple 2

Déterminez les solutions au système

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= b_1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= b_2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned} \tag{11}$$

en fonction des valeurs de b_1 , b_2 et b_3 .

Il faut noter que les coefficients du système (11) sont les mêmes que ceux du système (8), à l'exception du coefficient de x_3 dans la troisième équation. La matrice augmentée pour le système (11) est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & b_1 \\ -1 & 1 & -2 & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{array} \right). \tag{12}$$

En effectuant les étapes a), b) et c) comme dans l'exemple 1, on réduit la matrice (12) à

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + 3b_2 + b_3 \end{array} \right). \tag{13}$$

▶ L'équation correspondant à la troisième ligne de la matrice (13) est

$$b_1 + 3b_2 + b_3 = 0. \quad (14)$$

Ainsi, le système (11) n'admet aucune solution, à moins que la condition (14) ne soit satisfaite par b_1 , b_2 et b_3 . On peut montrer que cette condition est identique à l'équation (5) pour le système (11).

Supposons maintenant que $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ et $b_3 = -5$, auquel cas l'équation (14) est satisfaite. Alors, les deux premières lignes de la matrice (13) correspondent aux équations

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_2 - x_3 &= -3. \end{aligned} \quad (15)$$

Pour résoudre le système (15), on peut fixer arbitrairement une des inconnues, puis déterminer les valeurs respectives des deux autres. Soit $x_3 = \alpha$, où α est arbitraire. Il s'ensuit donc que

$$\begin{aligned} x_2 &= \alpha - 3, \\ x_1 &= 2(\alpha - 3) - 3\alpha + 2 = -\alpha - 4. \end{aligned}$$

Si on écrit la solution en notation vectorielle, on obtient

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha - 4 \\ \alpha - 3 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Il est facile de vérifier que le deuxième terme du second membre de l'équation (16) est une solution au système non homogène (11), alors que le premier terme représente la solution la plus générale au système homogène correspondant à (11).

La réduction sert aussi à résoudre des systèmes homogènes ainsi que des systèmes dans lesquels le nombre d'équations est différent du nombre de variables inconnues.

L'indépendance linéaire On dit qu'un ensemble de k vecteurs $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ est **linéairement dépendant** s'il existe un ensemble de nombres (complexes) $c_1, \dots, c_k$ dont au moins un est non nul, de sorte que

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)} + \dots + c_k \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{0}. \quad (17)$$

En d'autres mots, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ sont linéairement dépendants s'il existe une relation linéaire entre eux. Par ailleurs, si le seul ensemble $c_1, \dots, c_k$ pour lequel l'équation (17) est satisfaite est $c_1 = c_2 = \dots = c_k = 0$, alors on dit que $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ sont **linéairement indépendants**.

On considère maintenant un ensemble de n vecteurs admettant chacun n composantes. Soit $x_{ij} = x_i^{(j)}$ la i -ième composante du vecteur $\mathbf{x}^{(j)}$, et soit $\mathbf{X} = (x_{ij})$. Alors, on peut écrire l'équation (17) sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1^{(1)}c_1 + \dots + x_1^{(n)}c_n \\ \vdots \\ x_n^{(1)}c_1 + \dots + x_n^{(n)}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}c_1 + \dots + x_{1n}c_n \\ \vdots \\ x_{n1}c_1 + \dots + x_{nn}c_n \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

ou

$$\mathbf{X}\mathbf{c} = \mathbf{0}. \quad (18)$$

Si $\det \mathbf{X} \neq 0$, alors la solution unique à l'équation (18) est $\mathbf{c} = \mathbf{0}$, mais si $\det \mathbf{X} = 0$, il existe des solutions non nulles. Ainsi, l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ est linéairement indépendant si et seulement si $\det \mathbf{X} \neq 0$.

Exemple 3

Déterminez si les vecteurs

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix} \quad (19)$$

sont linéairement indépendants ou linéairement dépendants. S'ils sont linéairement dépendants, trouvez une relation linéaire entre eux.

Pour déterminer si $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ et $\mathbf{x}^{(3)}$ sont linéairement dépendants, il faut des constantes c_1 , c_2 et c_3 qui ne sont pas toutes nulles simultanément telles que

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} + c_3 \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}. \quad (20)$$

On peut aussi écrire l'équation (20) sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

et la résoudre au moyen d'opérations élémentaires de lignes en considérant la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -11 & 0 \end{array} \right). \quad (22)$$

On procède comme dans les exemples 1 et 2.

- a) Additionnez (-2) fois la première ligne à la deuxième ligne et additionnez la première ligne à la troisième ligne.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & -15 & 0 \end{array} \right)$$

- b) Divisez la deuxième ligne par -3 et additionnez (-5) fois la deuxième ligne à la troisième ligne.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right)$$

Ainsi, on obtient le système équivalent

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 4c_3 &= 0, \\ c_2 - 3c_3 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

De la deuxième ligne de l'équation (23), on tire $c_2 = 3c_3$ et de la première, on a $c_1 = 4c_3 - 2c_2 = -2c_3$. Ainsi, on a trouvé la solution pour c_1 et c_2 en fonction de c_3 , cette dernière variable demeurant arbitraire. Si on pose par exemple $c_3 = -1$, alors $c_1 = 2$ et $c_2 = -3$. Dans ce cas, la relation recherchée (20) devient

$$2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$$

et les vecteurs donnés sont linéairement dépendants.

On peut aussi calculer $\det(x_{ij})$, dont les colonnes sont les composantes de $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ et $\mathbf{x}^{(3)}$, respectivement. Par conséquent,

$$\det(x_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -11 \end{vmatrix}$$

et un calcul direct montrent qu'il est nul. Ainsi, $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ et $\mathbf{x}^{(3)}$ sont linéairement dépendants. Toutefois, si les coefficients c_1 , c_2 et c_3 sont requis, on doit alors résoudre l'équation (20) pour les déterminer.

Il est souvent utile de considérer les colonnes (ou les lignes) d'une matrice $\mathbf{A}$ comme des vecteurs. Ces vecteurs colonnes (ou lignes) sont linéairement indépendants si et seulement si $\det \mathbf{A} \neq 0$. De plus, si $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, alors on peut montrer que $\det \mathbf{C} = (\det \mathbf{A})(\det \mathbf{B})$. Par conséquent, si les colonnes (ou les lignes) de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{B}$ sont linéairement indépendantes, alors les colonnes (ou les lignes) de $\mathbf{C}$ sont aussi linéairement indépendantes.

On applique maintenant les notions de dépendance et d'indépendance linéaires à un ensemble de fonctions vectorielles $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ définies dans un intervalle $\alpha < t < \beta$. On dit que les vecteurs $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ sont linéairement dépendants de $\alpha < t < \beta$ s'il existe un ensemble de constantes $c_1, \dots, c_k$ qui ne sont pas toutes nulles simultanément telles

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_k \mathbf{x}^{(k)}(t) = \mathbf{0}, \quad \text{quel que soit } t \text{ dans l'intervalle.}$$

Sinon, on dit que $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ sont linéairement indépendants. Il faut noter que si $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ sont linéairement dépendants dans un intervalle, ils sont linéairement dépendants en tout point dans l'intervalle. Cependant, si $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ sont linéairement indépendants dans un intervalle, ils peuvent être ou non linéairement indépendants en tout point. En fait, ils peuvent être linéairement dépendants en chaque point, mais avec différents ensembles de constantes en différents points. Le problème 15 en est un exemple.

Les valeurs propres et les vecteurs propres On peut considérer l'équation

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{24}$$

comme une transformation linéaire qui transforme un vecteur $\mathbf{x}$ en un nouveau vecteur $\mathbf{y}$. Les vecteurs qui sont transformés en multiples d'eux-mêmes sont importants dans de nombreuses applications⁶. Pour trouver ces vecteurs, on pose $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x}$, où λ est une constante. On recherche ensuite des solutions aux équations

$$\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x} \tag{25}$$

ou

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{26}$$

Cette dernière équation admet des solutions non nulles si et seulement si on choisit λ de sorte que

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \tag{27}$$

L'équation (27) est une équation polynomiale de degré n en λ et est l'équation caractéristique de la matrice $\mathbf{A}$. Les valeurs de λ qui satisfont à l'équation (27) sont les **valeurs propres** de la matrice $\mathbf{A}$, et les solutions non nulles à l'équation (25) ou (26) qu'on obtient en utilisant ces valeurs de λ sont des **vecteurs propres** correspondant à la valeur propre.

Si $\mathbf{A}$ est une matrice de dimensions 2×2 , alors l'équation (26) est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

et l'équation (27) devient

$$\Delta(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \tag{29}$$

ou

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0, \tag{30}$$

6. Par exemple, ce problème se pose lorsqu'il faut trouver les axes principaux de tension dans un corps élastique et les modes de vibrations libres dans un système conservatif avec un nombre fini de degrés de liberté.

où $\text{tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22}$ et $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ sont respectivement la trace et le déterminant de la matrice $\mathbf{A}$.

Si on note λ_1 et λ_2 les racines de l'équation (30), elle devient

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0. \quad (31)$$

Il s'ensuit que

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr } \mathbf{A} \quad \text{et} \quad \lambda_1\lambda_2 = \det \mathbf{A}. \quad (32)$$

L'exemple suivant montre comment trouver les valeurs propres et les vecteurs propres.

Exemple 4

Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Les valeurs propres λ et les vecteurs propres $\mathbf{x}$ satisfont à l'équation $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ou

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0. \quad (35)$$

Par conséquent, les valeurs propres sont $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = -1$.

Pour trouver les vecteurs propres, on revient à l'équation (34) et on remplace λ par chacune des valeurs propres tour à tour. Pour $\lambda = 2$, on a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Ainsi, chaque ligne de cette équation vectorielle mène à la condition $x_1 - x_2 = 0$. Donc, x_1 et x_2 sont égaux, mais leur valeur n'est pas déterminée. Si $x_1 = c$, alors $x_2 = c$ et le vecteur propre $\mathbf{x}^{(1)}$ est

$$\mathbf{x}^{(1)} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \neq 0. \quad (37)$$

Par conséquent, il existe un ensemble infini de vecteurs propres, indexés par la constante arbitraire c , correspondant à la valeur propre λ_1 . Choisissons un seul élément de cet ensemble pour représenter tous les autres; dans cet exemple, il semble plus simple de poser $c = 1$. Ainsi, à la place de l'équation (34), on écrit

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

De plus, vous devez vous rappeler que tout multiple non nul de ce vecteur est également un vecteur propre. On dit que $\mathbf{x}^{(1)}$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda_1 = 2$.

Maintenant, en posant $\lambda = -1$ dans l'équation (34), on obtient

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (39)$$

De nouveau, on obtient une seule condition portant sur x_1 et x_2 , soit que $4x_1 - x_2 = 0$. Par conséquent, le vecteur propre correspondant à la valeur propre $\lambda_2 = -1$ est

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (40)$$

ou tout multiple non nul de ce vecteur.

Comme on a pu le voir dans l'exemple 4, on détermine les vecteurs propres à une constante multiplicative non nulle près. Lorsque cette constante est spécifiée, on dit que les vecteurs propres sont **normalisés**. Dans l'exemple 4, on a posé cette constante égale à 1, mais on aurait pu utiliser toute autre valeur non nulle. Parfois, il est pratique de normaliser un vecteur propre $\mathbf{x}$ en choisissant la constante de sorte que $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$.

L'équation (27) étant une équation polynomiale de degré n en λ , il existe n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, dont certaines peuvent être identiques. Si une valeur propre donnée apparaît m fois comme racine de l'équation (27), alors on dit que cette valeur propre est de multiplicité m . On peut associer un vecteur propre à chaque valeur propre, et on peut aussi associer q vecteurs propres linéairement indépendants à une valeur propre de multiplicité m . Le nombre entier q est appelé la **multiplicité géométrique** de la valeur propre et il est possible de montrer que

$$1 \leq q \leq m. \quad (41)$$

De plus, des exemples montrent que q peut être tout nombre entier dans cet intervalle. Si chaque valeur propre de $\mathbf{A}$ est **simple** (est de multiplicité un), alors elle est aussi de multiplicité géométrique un.

Il est possible de montrer que si λ_1 et λ_2 sont deux valeurs propres de $\mathbf{A}$ et si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors leurs vecteurs propres correspondants $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ sont linéairement indépendants (voir le problème 34). Ce résultat s'étend à tout ensemble $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ de valeurs propres distinctes : leurs vecteurs propres $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, si chaque valeur propre d'une matrice de dimensions $n \times n$ est simple, alors les n vecteurs propres de $\mathbf{A}$, un pour chaque valeur propre, sont linéairement indépendants. D'autre part, si $\mathbf{A}$ admet une ou plusieurs valeurs propres multiples, alors il peut y avoir moins de n vecteurs propres linéairement indépendants associés à $\mathbf{A}$, puisque pour une valeur propre multiple, on peut avoir $q < m$. Comme nous le verrons à la section 5.8, ce fait peut entraîner des difficultés ultérieures dans la résolution des systèmes d'équations différentielles.

Exemple 5

Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Les valeurs propres λ et les vecteurs propres $\mathbf{x}$ satisfont à l'équation $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ou

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0. \quad (44)$$

Les racines de l'équation (41) sont $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_3 = -1$. Ainsi, 2 est une valeur propre simple et -1 est une valeur propre de multiplicité 2.

Pour trouver le vecteur propre $\mathbf{x}^{(1)}$ correspondant à la valeur propre λ_1 , on pose $\lambda = 2$ dans l'équation (40). On obtient alors le système

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

► On peut réduire ce système au système équivalent

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (46)$$

au moyen d'opérations élémentaires de lignes. En résolvant ce système, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Pour $\lambda = -1$, l'équation (40) se réduit immédiatement à l'équation

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0. \quad (48)$$

Ainsi, on peut choisir arbitrairement les valeurs de deux des variables x_1, x_2, x_3 et déterminer la troisième à partir de l'équation (45). Par exemple, si $x_1 = c_1$ et $x_2 = c_2$, alors $x_3 = -c_1 - c_2$. En notation vectorielle, on écrit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Par exemple, en choisissant $c_1 = 1$ et $c_2 = 0$, on obtient le vecteur propre

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Tout multiple non nul de $\mathbf{x}^{(2)}$ est aussi un vecteur propre, mais on peut trouver un second vecteur propre indépendant en choisissant d'autres valeurs de c_1 et de c_2 ; par exemple, $c_1 = 0$ et $c_2 = 1$. Dans ce cas, on obtient

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (51)$$

qui est linéairement indépendant de $\mathbf{x}^{(2)}$. Par conséquent, dans cet exemple, deux vecteurs propres linéairement indépendants sont associés à une valeur propre double.

Une catégorie importante de matrices, les **matrices hermitiennes** (ou **autoadjointes**), sont celles pour lesquelles $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, autrement dit $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$. Les matrices hermitiennes incluent comme sous-catégorie les matrices symétriques (telles que $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$), dont tous les éléments sont réels. Les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices hermitiennes admettent toujours les propriétés suivantes :

1. Toutes les valeurs propres sont réelles.
2. Il existe toujours un ensemble de n vecteurs propres linéairement indépendants, peu importe les multiplicités des valeurs propres.
3. Si $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ sont des vecteurs propres qui correspondent à différentes valeurs propres, alors $(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$. Donc, si toutes les valeurs propres sont simples, les vecteurs propres associés sont orthogonaux deux à deux.
4. Si $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ correspondent à une valeur propre de multiplicité m , il est possible de choisir m vecteurs propres qui sont orthogonaux deux à deux. Ainsi, on peut toujours obtenir un ensemble de n vecteurs qui sont orthogonaux et linéairement indépendants.

L'exemple 5 qui précède traite d'une matrice symétrique réelle et illustre les propriétés 1, 2 et 3, mais le choix qu'on a fait pour $\mathbf{x}^{(2)}$ et $\mathbf{x}^{(3)}$ n'illustre pas la propriété 4. Cependant, il est

toujours possible de choisir $\mathbf{x}^{(2)}$ et $\mathbf{x}^{(3)}$ de sorte que $(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}) = 0$. Par exemple, dans l'exemple 5, on aurait pu choisir le vecteur $\mathbf{x}^{(2)}$ de l'équation (50) et le nouveau vecteur $\mathbf{x}^{(3)}$ en posant $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$ dans l'équation (49). Ainsi, on obtiendrait

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

comme vecteurs propres associés à la valeur propre. Ces deux vecteurs propres et le vecteur propre $\mathbf{x}^{(1)}$ correspondant à la valeur propre $\lambda = 2$ sont orthogonaux deux à deux. Les preuves des énoncés 1 et 3 de la page précédente apparaissent aux problèmes 32 et 33.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 6, résolvez le système d'équations ou montrez qu'il n'existe aucune solution.

1. $x_1 - x_3 = 0$
 $3x_1 + x_2 + x_3 = 1$
 $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$

2. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 1$
 $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$
 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 1$

3. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$
 $2x_1 + x_2 + x_3 = 1$
 $x_1 - x_2 + 2x_3 = -1$

4. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$
 $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$
 $x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$

5. $x_1 - x_3 = 0$
 $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$
 $-x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

6. $x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$
 $-2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4$
 $2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -4$

■ Dans les problèmes 7 à 11, déterminez si l'ensemble de vecteurs est linéairement indépendant. S'il est linéairement dépendant, trouvez une relation linéaire entre eux. Les vecteurs sont présentés en ligne pour économiser de l'espace, mais on peut les considérer comme des vecteurs colonnes. Autrement dit, on peut utiliser les transposées des vecteurs plutôt que les vecteurs eux-mêmes.

7. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (1, 0, 1)$

8. $\mathbf{x}^{(1)} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 2, 0)$

9. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, 2, 3)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (-1, 0, 3, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-2, -1, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (-3, 0, -1, 3)$

10. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (2, 3, 1, -1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 0, 2, 2)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (3, -1, 1, 3)$

11. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (3, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (4, 3, -2)$

12. Supposez que les vecteurs $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ admettent chacun n composantes et que $n < m$. Montrez que $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ sont linéairement dépendants.

■ Dans les problèmes 13 et 14, déterminez si l'ensemble des vecteurs est linéairement indépendant pour $-\infty < t < \infty$. S'il est linéairement dépendant, trouvez la relation linéaire entre eux. Comme dans les problèmes 7 à 11, les vecteurs sont présentés en ligne pour économiser de l'espace.

13. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t})$, $\mathbf{x}^{(2)}(t) = (e^{-t}, e^{-t})$, $\mathbf{x}^{(3)}(t) = (3e^{-t}, 0)$

14. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (2 \sin t, \sin t)$, $\mathbf{x}^{(2)}(t) = (\sin t, 2 \sin t)$

15. Soit

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Montrez que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ et $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ sont linéairement dépendants en chaque point de l'intervalle $0 \leq t \leq 1$. Néanmoins, montrez aussi que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ et $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ sont linéairement indépendants dans $0 \leq t \leq 1$.

- ■ Dans les problèmes 16 à 25, trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice.

16. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -3 & 3/4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 11/9 & -2/9 & 8/9 \\ -2/9 & 2/9 & 10/9 \\ 8/9 & 10/9 & 5/9 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

- Dans les problèmes 26 à 30, résolvez $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lorsque $\det \mathbf{A} = 0$.

26. a) Supposez que $\mathbf{A}$ est une matrice à valeurs réelles de dimensions $n \times n$. Montrez que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^T \mathbf{y})$ pour n'importe quels vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

Suggestion: Il est peut-être plus facile de considérer d'abord le cas où $n = 2$. Ensuite, étendez le résultat à une valeur arbitraire de n .

- b) Si $\mathbf{A}$ n'est pas nécessairement à valeurs réelles, montrez que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^* \mathbf{y})$ pour n'importe quels vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

- c) Si $\mathbf{A}$ est hermitienne, montrez que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay})$ pour n'importe quels vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$.

27. Supposez que, pour une matrice $\mathbf{A}$, il existe un vecteur non nul $\mathbf{x}$ de sorte que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Montrez qu'il existe aussi un vecteur non nul $\mathbf{y}$ tel que $\mathbf{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{0}$.

28. Supposez que $\det \mathbf{A} = 0$ et que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet au moins une solution. Montrez que $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$, où $\mathbf{y}$ est une solution à $\mathbf{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Vérifiez que cet énoncé est vrai pour l'ensemble des équations de l'exemple 2.

Suggestion: Utilisez le résultat du problème 26.

29. Supposez que $\det \mathbf{A} = 0$ et que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$ est une solution à $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Montrez que si ξ est une solution à $\mathbf{A}\xi = \mathbf{0}$ et que α est une constante, alors $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha \xi$ est aussi une solution à $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

30. Supposez que $\det \mathbf{A} = 0$ et que $\mathbf{y}$ est une solution à $\mathbf{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{0}$. Montrez que si $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$ quel que soit $\mathbf{y}$, alors $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ admet des solutions. Vous devez noter qu'il s'agit de l'inverse du problème 28. La forme de la solution est donnée au problème 29.

Suggestion: Qu'indique la relation $\mathbf{A}^* \mathbf{y} = \mathbf{0}$ à propos des lignes de $\mathbf{A}$? Il peut être de nouveau utile de considérer d'abord le cas où $n = 2$.

31. Prouvez que $\lambda = 0$ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ si et seulement si $\mathbf{A}$ est singulière.

32. Dans ce problème, on montre que les valeurs propres d'une matrice hermitienne $\mathbf{A}$ sont réelles. Soit $\mathbf{x}$ un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ .

- a) Montrez que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$. *Suggestion:* Reportez-vous au problème 26 c).

- b) Montrez que $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. *Suggestion:* Rappelez-vous que $\mathbf{Ax} = \lambda \mathbf{x}$.

- c) Montrez que $\lambda = \bar{\lambda}$, autrement dit que la valeur propre λ est réelle.

33. Montrez que si λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres d'une matrice hermitienne $\mathbf{A}$ et que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors les vecteurs propres $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ correspondants sont orthogonaux.

Suggestion: Utilisez les résultats des problèmes 26 c) et 32 pour montrer que $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$.

34. Montrez que si λ_1 et λ_2 sont des valeurs propres d'une matrice $\mathbf{A}$ quelconque et si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors les vecteurs propres correspondants $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ sont linéairement indépendants.

Suggestion: Commencez en posant $c_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{0}$ et multipliez cette expression par $\mathbf{A}$ pour obtenir $c_1 \lambda_1 \mathbf{x}^{(1)} + c_2 \lambda_2 \mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{0}$. Ensuite, montrez que $c_1 = c_2 = 0$.

5.4 La théorie fondamentale sur les systèmes d'équations linéaires du premier ordre

La théorie générale dans l'étude d'un système de n équations linéaires du premier ordre

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \quad (1)$$

est très similaire à celle d'une équation linéaire du n -ième ordre. Dans cette section, nous suivrons donc un cheminement semblable à celui des sections 3.3 et 4.1. Pour aborder efficacement le système (1), nous écrirons ce dernier en utilisant la notation matricielle. Autrement dit, nous allons considérer $x_1 = \phi_1(t), \dots, x_n = \phi_n(t)$ comme les composantes du vecteur $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$. De la même manière, $g_1(t), \dots, g_n(t)$ sont les composantes du vecteur $\mathbf{g}(t)$ et $p_{11}(t), \dots, p_{nn}(t)$ sont les éléments de la matrice $\mathbf{P}(t)$ de dimensions $n \times n$. L'équation (1) prend donc la forme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (2)$$

L'écriture matricielle ne permet pas uniquement de gagner beaucoup d'espace et de faciliter les calculs. Elle permet aussi d'accentuer les similitudes entre les traitements respectifs d'une seule équation et d'un système d'équations.

On dit qu'un vecteur $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ est une solution à l'équation (2) si ses composantes satisfont au système d'équations (1). Dans cette section, on supposera que $\mathbf{P}$ et $\mathbf{g}$ sont continues dans un intervalle $\alpha < t < \beta$. Autrement dit, chacune des fonctions scalaires est continue dans cet intervalle. Selon le théorème 5.1.2, cette condition est suffisante pour garantir l'existence des solutions à l'équation (2) dans l'intervalle $\alpha < t < \beta$.

D'abord, il convient de considérer l'équation homogène

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (3)$$

obtenue à partir de l'équation (2) lorsque $\mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$. Une fois l'équation homogène résolue, plusieurs méthodes permettent de résoudre l'équation non homogène (2); ce sujet sera abordé dans la section 5.9. On utilise la notation

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, \dots, \quad \mathbf{x}^{(k)}(t) = \begin{pmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{pmatrix}, \dots \quad (4)$$

pour désigner des solutions spécifiques au système (3). Il faut noter que $x_{ij}(t) = x_i^{(j)}(t)$ désigne la i -ième composante de la j -ième solution $\mathbf{x}^{(j)}(t)$. Les principaux résultats concernant la structure des solutions au système (3) sont énoncés dans les théorèmes 5.4.1 à 5.4.5. Ceux-ci ressemblent beaucoup aux théorèmes correspondants des sections 3.3 et 4.1. Certaines des preuves devront être trouvées dans les exercices.

Théorème 5.4.1

Si les fonctions vectorielles $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ sont des solutions au système (3), alors la combinaison linéaire $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ en est aussi une solution, quelles que soient les constantes c_1 et c_2 .

Il s'agit du principe de superposition. On le prouve simplement en dérivant $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)}$ et en considérant le fait que $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ satisfont à l'équation (3). En appliquant de manière répétitive le théorème 5.4.1, on en conclut que si $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}$ sont des solutions à l'équation (3), alors

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_k\mathbf{x}^{(k)}(t) \quad (5)$$

est une solution, quelles que soient les constantes $c_1, \dots, c_k$. Par exemple, on peut vérifier que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (6)$$

satisfait à l'équation

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (7)$$

Selon le théorème 5.4.1,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} \\ &= c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

satisfait également à l'équation (7).

Comme on l'a mentionné précédemment, si on applique de manière répétitive le théorème 5.4.1, il s'ensuit que toute combinaison linéaire finie de solutions à l'équation (3) est aussi une solution. On se demande maintenant si on peut trouver toutes les solutions à l'équation (3) de cette manière. Par analogie avec les cas précédents, il est raisonnable de s'attendre à ce que, pour un système de la forme (3) de n équations du premier ordre, il suffise de combiner linéairement n solutions choisies de manière appropriée. Par conséquent, soit $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ les n solutions au système du n -ième ordre (3). De plus, on considère la matrice $\mathbf{X}(t)$ dont les colonnes sont les vecteurs $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

On a vu dans la section 5.3 que les colonnes de $\mathbf{X}(t)$ sont linéairement indépendantes pour une valeur donnée de t si et seulement si $\det \mathbf{X} \neq 0$ pour cette valeur de t . Ce déterminant est le wronskien des n solutions $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ et on le note $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$. Autrement dit,

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}](t) = \det \mathbf{X}(t). \quad (10)$$

Les solutions $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ sont alors linéairement indépendantes en un point si et seulement si $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ est non nul en ce point.

Théorème 5.4.2

Si les fonctions vectorielles $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ sont des solutions linéairement indépendantes au système (3) en tout point de l'intervalle $\alpha < t < \beta$, alors on peut exprimer chaque solution $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ au système (3) comme une combinaison linéaire de $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$,

$$\boldsymbol{\phi}(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t), \quad (11)$$

d'une et d'une seule façon.

Avant de prouver le théorème 5.4.2, il faut noter que, selon le théorème 5.4.1, toutes les expressions de la forme (11) sont des solutions au système (3), tandis que selon le théorème 5.4.2, toutes les solutions à l'équation (3) peuvent s'écrire sous la forme (11). Si les constantes $c_1, \dots, c_n$ sont considérées comme étant arbitraires, alors l'équation (11) comprend toutes les solutions au système (3) et est dite **solution générale**. On dit que tout ensemble de solutions $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ à l'équation (3), qui est linéairement indépendant en chaque point dans l'intervalle $\alpha < t < \beta$, est un **ensemble fondamental de solutions** dans cet intervalle.

Afin de prouver le théorème 5.4.2, on montrera que, étant donné une solution ϕ à l'équation (3), $\phi(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ pour des valeurs appropriées de $c_1, \dots, c_n$. Soit $t = t_0$ un point dans l'intervalle $\alpha < t < \beta$ et soit $\xi = \phi(t_0)$. On veut déterminer s'il existe une solution de la forme $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ qui satisfait aussi à la condition initiale $\mathbf{x}(t_0) = \xi$. Autrement dit, on veut savoir s'il y a des valeurs de $c_1, \dots, c_n$ telles que

$$c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \xi, \quad (12)$$

ou, explicitement,

$$\begin{aligned} c_1 x_{11}(t_0) + \cdots + c_n x_{1n}(t_0) &= \xi_1, \\ &\vdots \\ c_1 x_{n1}(t_0) + \cdots + c_n x_{nn}(t_0) &= \xi_n. \end{aligned} \quad (13)$$

La condition nécessaire et suffisante selon laquelle l'équation (13) admet une solution unique $c_1, \dots, c_n$ est précisément que le déterminant de la matrice des coefficients soit non nul, celui-ci étant le wronskien $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ évalué en $t = t_0$. L'hypothèse selon laquelle $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ sont linéairement indépendants dans $\alpha < t < \beta$ assure que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ est non nul en $t = t_0$ et qu'il y a donc une solution (unique) à l'équation (3) de la forme $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ qui satisfait aussi à la condition initiale (12). Selon la partie relative à l'unicité du théorème 5.1.2, cette solution est identique à $\phi(t)$ et, ainsi, $\phi(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ comme il fallait le prouver.

Le théorème qui suit est utile, car il évite de devoir examiner $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ en tout point dans l'intervalle qui nous intéresse et il permet de déterminer si $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ forment un ensemble fondamental de solutions simplement en évaluant leur wronskien en un point quelconque dans l'intervalle.

Théorème 5.4.3

Si $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ sont des solutions à l'équation (3) dans l'intervalle $\alpha < t < \beta$, alors dans cet intervalle, $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}]$ est soit nul, soit toujours non nul.

On prouve le théorème 5.4.3 en établissant d'abord que le wronskien de $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ satisfait à l'équation différentielle (voir le problème 2)

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn})W. \quad (14)$$

Par conséquent, on a

$$W(t) = c \exp \left\{ \int [p_{11}(t) + \cdots + p_{nn}(t)] dt \right\}, \quad (15)$$

où c est une constante arbitraire, et la conclusion du théorème s'ensuit directement. L'expression qui représente $W(t)$ dans l'équation (15) est appelée la formule d'Abel. Notez la ressemblance de ce résultat avec le théorème 3.3.7 ainsi qu'avec l'équation (23) de la section 3.3 en particulier.

D'une autre manière, on peut établir le théorème 5.4.3 en montrant que si n solutions $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ à l'équation (3) sont linéairement dépendantes en un point $t = t_0$, alors elles doivent être linéairement dépendantes en tout point dans $\alpha < t < \beta$ (voir le problème 8). Par conséquent, si $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ sont linéairement indépendantes en un point, elles doivent être linéairement indépendantes en tout point de l'intervalle.

Le théorème suivant énonce que le système (3) admet toujours au moins un ensemble fondamental de solutions.

Théorème 5.4.4

Soit

$$\mathbf{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \quad \mathbf{e}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ les solutions au système (3) satisfaisant respectivement aux conditions initiales

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0) = \mathbf{e}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t_0) = \mathbf{e}^{(n)}, \quad (16)$$

où t_0 est un point dans $\alpha < t < \beta$. Alors, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ forment un ensemble fondamental de solutions au système (3).

Afin de prouver ce théorème, il faut noter que l'existence et l'unicité des solutions $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ mentionnées dans le théorème 5.4.4 sont assurées par le théorème 5.1.2. Il est clair que le wronskien de ces solutions est égal à 1 lorsque $t = t_0$. Par conséquent, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ forment un ensemble fondamental de solutions.

Lorsqu'on a trouvé un ensemble fondamental de solutions, on peut générer d'autres ensembles en combinant linéairement les solutions (indépendantes) du premier ensemble. On considère que l'ensemble obtenu au théorème 5.4.4 est le plus simple.

Enfin, il peut arriver (comme pour les équations linéaires du deuxième ordre) qu'un système dont tous les coefficients sont réels produise des solutions à valeurs complexes. Dans ce cas, le théorème ci-dessous est analogue au théorème 3.3.6 et nous permet d'obtenir plutôt des solutions à valeurs réelles.

Théorème 5.4.5

Considérez le système (3)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x},$$

où chaque élément de $\mathbf{P}$ est une fonction continue à valeurs réelles. Si $\mathbf{x} = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ est une solution à valeurs complexes à l'équation (3), alors sa partie réelle $\mathbf{u}(t)$ et sa partie imaginaire $\mathbf{v}(t)$ sont aussi des solutions à cette équation.

Pour prouver ce résultat, on substitue $\mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$ à $\mathbf{x}$ dans l'équation (3), ce qui donne

$$\mathbf{x}' - \mathbf{P}(t)\mathbf{x} = \mathbf{u}'(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{u}(t) + i[\mathbf{v}'(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{v}(t)] = 0. \quad (17)$$

On s'est basé sur l'hypothèse selon laquelle $\mathbf{P}(t)$ est à valeurs réelles pour décomposer l'équation (17) en ses parties réelle et imaginaire. Puisqu'un nombre complexe est nul si et seulement si ses parties réelle et imaginaire sont toutes les deux nulles, on en conclut que $\mathbf{u}'(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{u}(t) = 0$ et $\mathbf{v}'(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{v}(t) = 0$. Par conséquent, $\mathbf{u}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$ sont des solutions à l'équation (3).

En résumé :

1. Tout ensemble de n solutions linéairement indépendantes au système $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ constitue un ensemble fondamental de solutions.
2. Selon les conditions précisées dans cette section, de tels ensembles fondamentaux existent toujours.
3. On peut représenter chaque solution au système $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ sous la forme d'une combinaison linéaire de tout ensemble fondamental de solutions.

Problèmes

1. Prouvez la généralisation du théorème 5.4.1, telle qu'exprimée par la phrase qui inclut l'équation (8), pour une valeur arbitraire du nombre entier k .
2. Dans ce problème, une preuve du théorème 5.4.3 est établie lorsque $n = 2$. Soit $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ les solutions à l'équation (3) dans $\alpha < t < \beta$ et soit W le wronskien de $\mathbf{x}^{(1)}$ et de $\mathbf{x}^{(2)}$.

a) Montrez que

$$\frac{dW}{dt} = \begin{vmatrix} \frac{dx_1^{(1)}}{dt} & \frac{dx_1^{(2)}}{dt} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} \\ \frac{dx_2^{(1)}}{dt} & \frac{dx_2^{(2)}}{dt} \end{vmatrix}.$$

b) En utilisant l'équation (3), montrez que

$$\frac{dW}{dt} = (p_{11} + p_{22})W.$$

- c) Trouvez $W(t)$ en résolvant l'équation différentielle obtenue dans la partie b). Utilisez cette expression pour obtenir la conclusion énoncée dans le théorème 5.4.3.
 - d) Généralisez cette démarche afin de prouver le théorème 5.4.3 pour une valeur arbitraire de n .
3. Montrez que le wronskien de deux ensembles fondamentaux de solutions au système (3) peut différer au plus par une constante multiplicative.

Suggestion : Utilisez l'équation (15).

4. Si $x_1 = y$ et $x_2 = y'$, alors l'équation du deuxième ordre

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \quad (\text{i})$$

peut être réécrite comme le système

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -q(t)x_1 - p(t)x_2. \end{aligned} \quad (\text{ii})$$

Montrez que si $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ forment un ensemble fondamental de solutions aux équations (ii) et que si $y^{(1)}$ et $y^{(2)}$ sont un ensemble fondamental de solutions à l'équation (i), alors $W[y^{(1)}, y^{(2)}] = cW[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}]$, où c est une constante non nulle.

Suggestion : $y^{(1)}(t)$ et $y^{(2)}(t)$ doivent être des combinaisons linéaires de $x_{11}(t)$ et de $x_{12}(t)$.

5. Montrez que la solution générale à $\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ est la somme d'une solution particulière $\mathbf{x}^{(p)}$ à cette équation et de la solution générale $\mathbf{x}^{(c)}$ à l'équation homogène correspondante.

6. Considérez les vecteurs $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$.

- a) Calculez le wronskien de $\mathbf{x}^{(1)}$ et de $\mathbf{x}^{(2)}$.
- b) Dans quels intervalles $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ sont-ils linéairement indépendants ?
- c) Quelle conclusion pouvez-vous tirer concernant les coefficients du système d'équations différentielles homogènes satisfait par $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$?
- d) Trouvez ce système d'équations et vérifiez les conclusions de la partie c).

7. Considérez les vecteurs $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ et $\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, puis répondez aux mêmes questions qu'au problème 6.

Les deux problèmes suivants permettent de démontrer différemment le théorème 5.4.2.

8. Soit $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ les solutions à $\mathbf{x}' = P(t)\mathbf{x}$ dans l'intervalle $\alpha < t < \beta$. Supposez que P est continue et que t_0 est un point arbitraire dans l'intervalle donné. Montrez que $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ sont linéairement dépendantes dans $\alpha < t < \beta$ si et seulement si $\mathbf{x}^{(1)}(t_0), \dots, \mathbf{x}^{(m)}(t_0)$ sont linéairement dépendantes. En d'autres mots, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ sont linéairement dépendantes dans l'intervalle (α, β) si elles sont linéairement dépendantes en tout point à l'intérieur de celui-ci.

Suggestion: Il existe des constantes $c_1, \dots, c_m$ telles que $c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t_0) + \dots + c_m \mathbf{x}^{(m)}(t_0) = \mathbf{0}$. Soit $\mathbf{z}(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_m \mathbf{x}^{(m)}(t)$. Utilisez le théorème relatif à l'unicité pour montrer que $\mathbf{z}(t) = \mathbf{0}$ quel que soit t dans $\alpha < t < \beta$.

9. Soit $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ des solutions linéairement indépendantes de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, où $\mathbf{P}$ est continue dans $\alpha < t < \beta$.

a) Montrez que toute solution $\mathbf{x} = \mathbf{z}(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{z}(t) = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$$

en choisissant de façon appropriée les constantes $c_1, \dots, c_n$.

Suggestion: Utilisez le résultat du problème 12 de la section 5.3 ainsi que le problème 8 de la page précédente.

- b) Montrez que l'expression de la solution $\mathbf{z}(t)$ de la partie a) est unique. Autrement dit, si $\mathbf{z}(t) = k_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + k_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$, alors $k_1 = c_1, \dots, k_n = c_n$.

Suggestion: Montrez que $(k_1 - c_1) \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + (k_n - c_n) \mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{0}$ quel que soit t dans $\alpha < t < \beta$ en considérant l'indépendance linéaire de $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$.

5.5 Les systèmes linéaires homogènes à coefficients constants

Dans cette section, nous aborderons les systèmes d'équations linéaires homogènes à coefficients constants, c'est-à-dire les systèmes de la forme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1)$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice constante de dimensions $n \times n$. À moins d'indication contraire, on suppose aussi que tous les éléments de $\mathbf{A}$ sont des nombres réels (plutôt que des nombres complexes).

Si $n = 1$, alors le système se réduit à une seule équation du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = ax, \quad (2)$$

dont la solution est $x = ce^{at}$. Notez que $x = 0$ est la seule solution d'équilibre si $a \neq 0$. Les autres solutions s'approchent de $x = 0$ si $a < 0$ et, dans ce cas, on dit que $x = 0$ est une solution d'équilibre asymptotiquement stable. D'autre part, si $a > 0$, alors $x = 0$ est instable, puisque les autres solutions s'éloignent de celle-ci. Pour les systèmes de dimension élevée, la situation est analogue mais plus complexe. On trouve les solutions d'équilibre en résolvant $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. On suppose que $\det \mathbf{A} \neq 0$, de sorte que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est la seule solution d'équilibre. On doit toutefois se demander si d'autres solutions s'approchent de cette solution d'équilibre ou s'éloignent de celle-ci lorsque t augmente. En d'autres mots, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est-elle asymptotiquement stable ou instable, ou existe-t-il d'autres possibilités ?

Le cas où $n = 2$ est particulièrement important et se prête bien à une visualisation dans le plan x_1x_2 , appelé **plan de phase**. Si on évalue $\mathbf{A}\mathbf{x}$ en un grand nombre de points et qu'on trace les vecteurs résultants, on obtient un champ de direction de vecteurs tangents aux solutions au système d'équations différentielles. En général, on peut parvenir à une interprétation qualitative du comportement des solutions à partir d'un champ de direction. Il est possible d'obtenir des renseignements plus précis en incluant dans le graphe certaines courbes-solutions ou trajectoires. Un graphe d'échantillon de trajectoires pour un système donné est un **portrait de phase**. Un portrait de phase bien construit fournit des renseignements aisément compréhensibles au sujet de toutes les solutions d'un système bidimensionnel en un seul graphique simple. Même si on a besoin d'un ordinateur pour créer des portraits de phase quantitativement corrects, il est généralement possible d'esquisser des portraits de phase qualitativement corrects à la main, comme le montrent les exemples 2 et 3 de la présente section.

Toutefois, notre première tâche consiste à montrer une façon de trouver les solutions à des systèmes tels que l'équation (1). On commence par un exemple particulièrement simple.

Exemple 1

Trouvez la solution générale au système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3)$$

La caractéristique la plus importante de ce système est que la matrice de coefficients est une matrice diagonale. Par conséquent, si on exprime le système sous forme scalaire, on obtient

$$x_1' = 2x_1, \quad x_2' = -3x_2.$$

Chacune de ces équations ne contient qu'une seule des variables inconnues; on peut donc résoudre les deux équations séparément. De cette manière, on trouve

$$x_1 = c_1 e^{2t}, \quad x_2 = c_2 e^{-3t},$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires. Ainsi, en écrivant la solution sous forme vectorielle, on obtient

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} \\ c_2 e^{-3t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-3t} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \quad (4)$$

Maintenant, on définit les deux solutions $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ de façon que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \quad (5)$$

Le wronskien de ces solutions est

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{vmatrix} = e^{-t}, \quad (6)$$

qui n'est jamais nul. Par conséquent, $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ forment un ensemble fondamental de solutions et la solution générale à l'équation (3) est donnée par l'équation (4).

Dans l'exemple 1, on a trouvé deux solutions indépendantes au système (3) sous la forme d'une fonction exponentielle multipliée par un vecteur. C'est un résultat auquel on pouvait s'attendre, car on avait trouvé d'autres équations linéaires à coefficients constants qui admettaient des solutions exponentielles, et l'inconnue $\mathbf{x}$ dans le système (3) est un vecteur. Essayons maintenant d'étendre cette idée au système général (1) en cherchant des solutions de la forme

$$\mathbf{x} = \xi e^{rt}, \quad (7)$$

où il faut déterminer l'exposant r et le vecteur constant ξ . Dans le système (1), si on substitue à $\mathbf{x}$ son expression selon l'équation (7), on obtient

$$r\xi e^{rt} = \mathbf{A}\xi e^{rt}.$$

En simplifiant le facteur non nul e^{rt} , on obtient $\mathbf{A}\xi = r\xi$ ou encore

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \quad (8)$$

où $\mathbf{I}$ est la matrice identité $n \times n$. Ainsi, pour résoudre le système d'équations différentielles (1), on doit résoudre le système d'équations linéaires (8). Le dernier problème consiste à déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$. Par conséquent, le vecteur $\mathbf{x}$, à l'équation (7), est une solution à l'équation (1) à condition que r soit une valeur propre et ξ un vecteur propre, ces derniers étant associés à la matrice $\mathbf{A}$.

Les deux exemples suivants illustrent la démarche de résolution dans le cas où la matrice des coefficients est de dimensions 2×2 avec des valeurs propres réelles et distinctes. On montre aussi comment obtenir les portraits de phase correspondants. Plus loin dans cette section, nous discuterons en profondeur du système général $n \times n$.

Exemple 2

Considérez le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (9)$$

Tracez un champ de direction et déterminez le comportement qualitatif des solutions. Ensuite, trouvez la solution générale et tracez plusieurs trajectoires.

La figure 5.5.1 illustre un champ de direction pour ce système. À partir de cette figure, on constate facilement, d'une part, qu'une solution typique s'éloigne du voisinage de l'origine et, d'autre part, que cette pente peut être approximativement égale à 2 dans le premier ou le troisième quadrant.

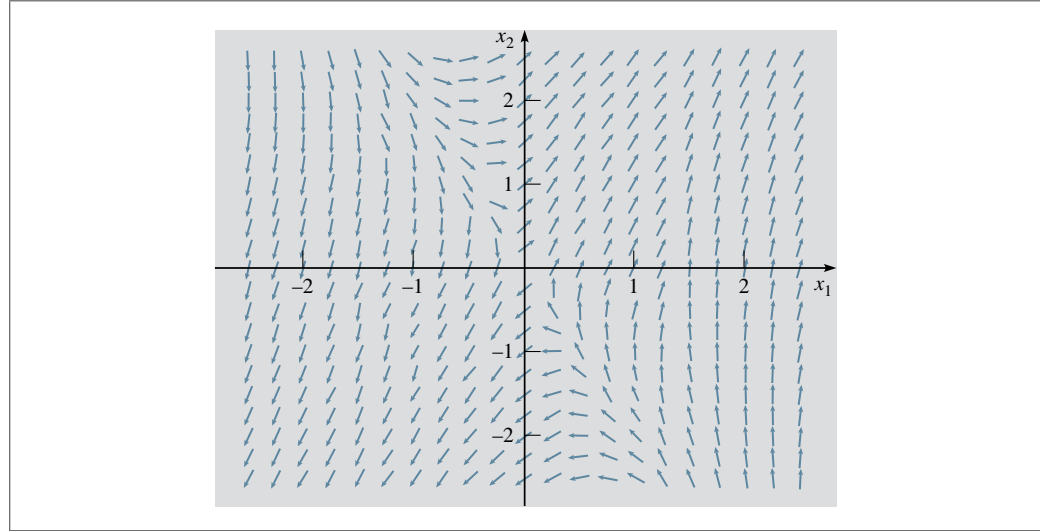


Figure 5.5.1 Champ de direction pour le système (9).

Afin de trouver explicitement les solutions, on suppose que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ et on substitue dans l'équation (9). On obtient le système d'équations linéaires

$$\begin{pmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Les équations (10) admettent une solution non nulle si et seulement si le déterminant de la matrice des coefficients est nul. Ainsi, on trouve les valeurs possibles de r en résolvant l'équation

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 4 & 1-r \end{vmatrix} &= (1-r)^2 - 4 \\ &= r^2 - 2r - 3 = (r-3)(r+1) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

L'équation (11) admet comme racines $r_1 = 3$ et $r_2 = -1$, qui sont les valeurs propres de la matrice des coefficients de l'équation (9). Si $r = 3$, alors le système (10) se réduit à l'équation

$$-2\xi_1 + \xi_2 = 0. \quad (12)$$

Par conséquent, $\xi_2 = 2\xi_1$ et on peut trouver un vecteur propre correspondant à $r_1 = 3$, disons

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

De façon similaire, pour $r_2 = -1$, on trouve $\xi_2 = -2\xi_1$, de sorte qu'un vecteur propre est

$$\boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Les solutions à l'équation différentielle sont donc

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (15)$$

▶ Le wronskien de ces solutions est

$$W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = \begin{vmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{vmatrix} = -4e^{2t}, \quad (16)$$

et n'est jamais nul. Ainsi, les solutions $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ forment un ensemble fondamental, et la solution générale au système (9) est

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}, \end{aligned} \quad (17)$$

où c_1 et c_2 sont des constantes arbitraires.

Afin de visualiser la solution (17), il est utile de considérer son graphe dans le plan pour différentes valeurs des constantes c_1 et c_2 . On commence par $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t)$, c'est-à-dire

$$x_1 = c_1 e^{3t}, \quad x_2 = 2c_1 e^{3t}.$$

En éliminant t de ces deux équations, on constate que cette solution se trouve sur la droite $x_2 = 2x_1$ [voir la figure 5.5.2 a)]. Il s'agit de la droite qui passe par l'origine dans la direction du vecteur propre $\xi^{(1)}$. Si on considère la solution comme la trajectoire d'une particule en mouvement, alors cette particule se trouve dans le premier quadrant lorsque $c_1 > 0$ et dans le troisième quadrant lorsque $c_1 < 0$. Dans les deux cas, la particule s'éloigne de l'origine lorsque t augmente. Ensuite, on considère $\mathbf{x} = c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t)$, ou encore

$$x_1 = c_2 e^{-t}, \quad x_2 = -2c_2 e^{-t}.$$

Cette solution se trouve sur la droite $x_2 = -2x_1$, dont la direction est déterminée par le vecteur propre $\xi^{(2)}$. La solution se situe dans le quatrième quadrant lorsque $c_2 > 0$ et dans le deuxième quadrant lorsque $c_2 < 0$ [voir la figure 5.5.2 a)]. Dans ces deux cas, la particule se déplace vers l'origine lorsque t augmente. La solution (17) est une combinaison de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ et $\mathbf{x}^{(2)}(t)$. Lorsque t augmente, le terme $c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t)$ domine et le terme $c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t)$ devient négligeable. Ainsi, toutes les solutions pour lesquelles $c_1 \neq 0$ sont asymptotiques à la droite $x_2 = 2x_1$ lorsque $t \rightarrow \infty$. De même, toutes les solutions pour lesquelles $c_2 \neq 0$ sont asymptotiques à la droite $x_2 = -2x_1$ lorsque $t \rightarrow -\infty$. La figure 5.5.2 a) présente les graphiques de plusieurs solutions. Le modèle des trajectoires de cette figure est typique de tous les systèmes de deux équations du premier ordre $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pour lesquels les valeurs propres sont réelles et de signes opposés. Dans ce cas, l'origine est un **point de selle**. Les points de selle sont toujours instables, car presque toutes les trajectoires s'en éloignent lorsque t augmente.

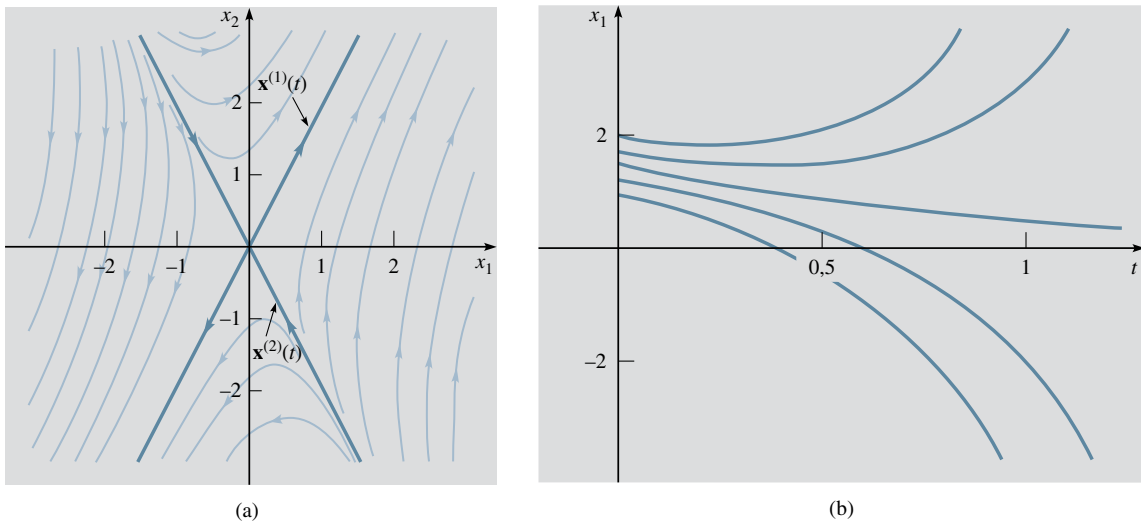


Figure 5.5.2 a) Trajectoires du système (9); l'origine est un point de selle. b) Graphiques de x_1 en fonction de t pour le système (9).

Dans le paragraphe précédent, on a vu comment tracer approximativement un schéma qualitatif des trajectoires d'un système comme celui de l'équation (9), une fois les valeurs propres et les

► vecteurs propres déterminés. Cependant, si on veut tracer un graphe détaillé et précis comme celui de la figure 5.5.2 a) et d'autres figures qui apparaissent plus loin dans ce chapitre, il est extrêmement utile, voire indispensable, d'utiliser un ordinateur.

Si on recherche une autre solution à la figure 5.5.2 a), on peut aussi tracer x_1 ou x_2 en fonction de t . La figure 5.5.2 b) présente certains graphiques typiques de x_1 en fonction de t et ceux de x_2 en fonction de t sont similaires. Pour certaines conditions initiales, il s'ensuit que $c_1 = 0$ dans l'équation (17), de sorte que $x_1 = c_2 e^{-t}$ et $x_1 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. La figure 5.5.2 b) présente un tel graphique, qui correspond à une trajectoire s'approchant de l'origine de la figure 5.5.2 a). Toutefois, pour la plupart des conditions initiales, $c_1 \neq 0$ et on a $x_1 = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$. Alors, la présence du terme exponentiel positif entraîne une croissance exponentielle de x_1 lorsque t augmente. La figure 5.5.2 b) présente plusieurs graphiques de ce type, lesquels correspondent aux trajectoires qui s'éloignent du voisinage de l'origine de la figure 5.5.2 a). Il est important de comprendre la relation qui existe entre les parties a) et b) de la figure 5.5.2 et d'autres figures similaires apparaissant plus loin dans ce manuel, car on souhaite parfois visualiser des solutions soit dans le plan $x_1 x_2$, soit en fonction de la variable indépendante t .

Exemple 3

Considérez le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (18)$$

Tracez un champ de direction pour ce système. Ensuite, trouvez sa solution générale et tracez plusieurs trajectoires dans le plan de phase.

Le champ de direction pour le système (18) de la figure 5.5.3 montre clairement que toutes les solutions s'approchent de l'origine. Pour trouver les solutions, on suppose que $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$. Alors, on obtient le système

$$\begin{pmatrix} -3-r & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

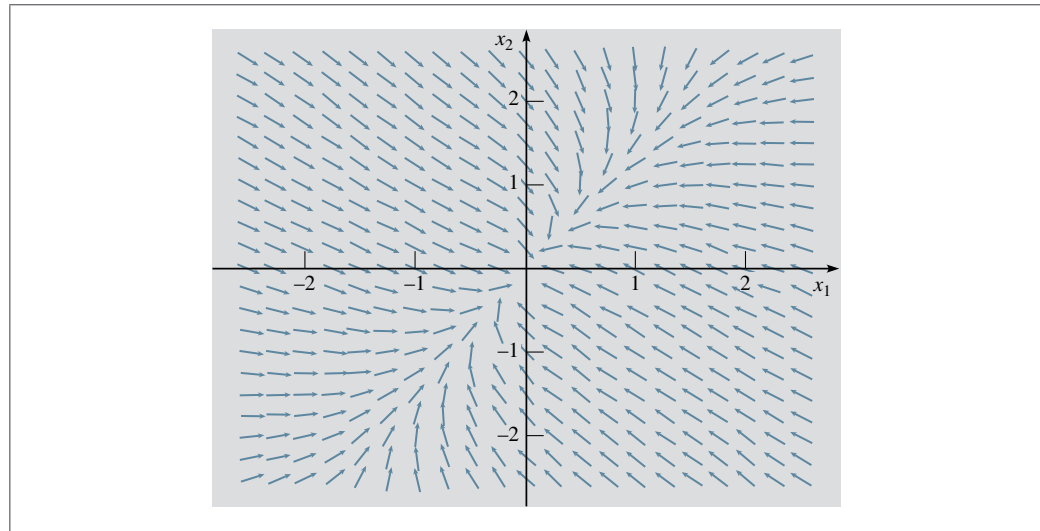


Figure 5.5.3 Champ de direction pour le système (18).

Les valeurs propres satisfont à

$$\begin{aligned} (-3-r)(-2-r) - 2 &= r^2 + 5r + 4 \\ &= (r+1)(r+4) = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

d'où $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$. Si $r = -1$, l'équation (19) devient

$$\begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

- Ainsi, $\xi_2 = \sqrt{2}\xi_1$ et on peut choisir le vecteur propre $\xi^{(1)}$ correspondant à la valeur propre $r_1 = -1$ comme

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

De la même manière, on a $\xi_1 = \sqrt{2}\xi_2$, qui correspond à la valeur propre $r_2 = -4$. Donc,

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

est un vecteur propre. Ainsi, un ensemble fondamental de solutions au système (18) est

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}, \quad (24)$$

et la solution générale est

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}. \quad (25)$$

La figure 5.5.4 a) présente les graphes de la solution (25) pour différentes valeurs de c_1 et de c_2 . La solution $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ s'approche de l'origine le long de la droite $x_2 = \sqrt{2}x_1$, tandis que la solution $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ s'approche de l'origine le long de la droite $x_1 = -\sqrt{2}x_2$.

Les directions de ces droites sont déterminées respectivement par les vecteurs propres $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$. En général, on a une combinaison de ces deux solutions fondamentales. Lorsque $t \rightarrow \infty$, la solution $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ est négligeable comparativement à $\mathbf{x}^{(1)}(t)$. Ainsi, à moins que $c_1 = 0$, la solution (25) s'approche de l'origine asymptotiquement à la droite $x_2 = \sqrt{2}x_1$. Le modèle des trajectoires présentées à la figure 5.5.4 a) est typique de tous les systèmes de deux équations du premier ordre $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ pour lesquels les valeurs propres sont réelles, distinctes et de même signe. L'origine pour un tel système est appelée un **nœud**. Si les valeurs propres étaient positives plutôt que négatives, alors les trajectoires seraient similaires mais dirigées vers l'extérieur. Les nœuds sont asymptotiquement stables si les valeurs propres sont négatives et ils sont instables si les valeurs propres sont positives.

Bien que la figure 5.5.4 a) ait été produite par ordinateur, il est facile de tracer à la main un schéma qualitatif si on connaît les valeurs propres et les vecteurs propres.

La figure 5.5.4 b) présente certains schémas typiques de x_1 en fonction de t . Il faut noter que chacun de ces graphes s'approche asymptotiquement de l'axe des t lorsque t augmente, ce qui correspond à une trajectoire s'approchant de l'origine de la figure 5.5.2 a). Le comportement de x_2 en fonction de t est similaire.

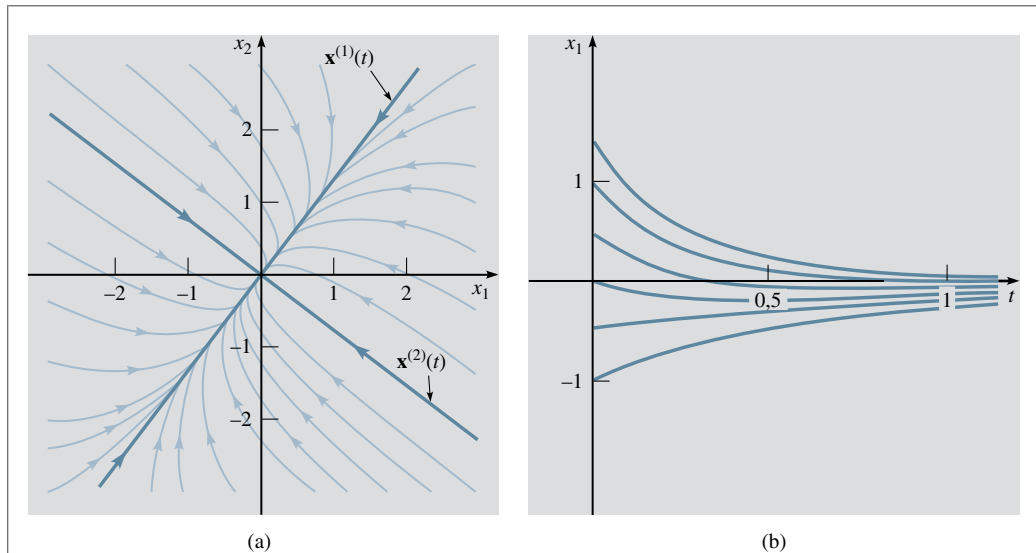


Figure 5.5.4 a) Trajectoires du système (18); l'origine est un nœud. b) Graphiques de x_1 en fonction de t pour le système (18).

Les deux exemples précédents illustrent les deux principaux cas pour les systèmes 2×2 lorsque les valeurs propres sont réelles et distinctes : les valeurs propres sont soit de signes opposés (voir l'exemple 2), soit de même signe (voir l'exemple 3). Il est aussi possible que zéro soit une valeur propre mais, dans ce cas, on a $\det \mathbf{A} = 0$, ce qui contredit l'hypothèse émise au début de cette section.

Si on revient au système général (1), on procède comme dans les exemples. Pour trouver des solutions à l'équation différentielle (1), on doit identifier les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ à partir du système (8) correspondant. Les valeurs propres $r_1, \dots, r_n$ (qui ne sont pas nécessairement distinctes) sont les racines de l'équation polynomiale de degré n

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \quad (26)$$

La nature des valeurs propres et des vecteurs propres correspondants détermine le type de solution générale au système (1). Si $\mathbf{A}$ est une matrice dont les éléments sont réels, il existe trois possibilités pour les valeurs propres de $\mathbf{A}$:

1. Toutes les valeurs propres sont réelles et distinctes.
2. Certaines valeurs propres, apparaissant deux à deux, sont conjuguées complexes.
3. Certaines valeurs propres sont multiples.

Si les valeurs propres sont réelles et distinctes, comme dans les deux exemples précédents, alors un vecteur propre réel $\xi^{(i)}$ est associé à chaque valeur propre r_i et l'ensemble de n vecteurs propres $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ est linéairement indépendant. Les solutions correspondantes au système (1) sont

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t) = \xi^{(n)} e^{r_n t}. \quad (27)$$

Pour montrer que ces solutions forment un ensemble fondamental, on évalue leur wronskien :

$$\begin{aligned} W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}](t) &= \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1 + \dots + r_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

D'abord, la fonction exponentielle n'est jamais nulle. Ensuite, puisque les vecteurs propres $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ sont linéairement indépendants, le déterminant du dernier terme de l'équation (28) est non nul. Par conséquent, le wronskien $W[\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}](t)$ n'est jamais nul. Ainsi, $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}$ forment un ensemble fondamental de solutions. Donc, la solution générale à l'équation (1) est

$$\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}. \quad (29)$$

Si $\mathbf{A}$ est réelle et symétrique (un cas particulier de matrice hermitienne), comme on l'a vu dans la section 5.3, toutes les valeurs propres $r_1, \dots, r_n$ sont réelles. De plus, même si certaines des valeurs propres sont multiples, il existe toujours un ensemble de n vecteurs propres $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ linéairement indépendants (en fait, ils sont orthogonaux). Ainsi, les solutions au système (1) données par l'équation (27) forment de nouveau un ensemble fondamental de solutions, et la solution générale est encore donnée par l'équation (29). L'exemple suivant illustre ce cas.

Exemple 4

Trouvez la solution générale à

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (30)$$

- Il faut noter que la matrice est à coefficients réels et qu'elle est symétrique. On a trouvé les valeurs propres et les vecteurs propres de cette matrice dans l'exemple 5 de la section 5.3, soit

$$r_1 = 2, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad (31)$$

$$r_2 = -1, \quad r_3 = -1; \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Ainsi, un ensemble fondamental de solutions à l'équation (30) est

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad (33)$$

et la solution générale est

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (34)$$

Cet exemple illustre le fait que même si une valeur propre ($r = -1$) est de multiplicité deux, il est possible de trouver deux vecteurs propres linéairement indépendants $\xi^{(2)}$ et $\xi^{(3)}$ et, par conséquent, d'obtenir la solution générale (34).

Le comportement de la solution (34) dépend essentiellement des conditions initiales. Lorsque t augmente, le premier terme du second membre de l'équation (34) est dominant. Par conséquent, si $c_1 \neq 0$, toutes les composantes de $\mathbf{x}$ deviennent non bornées lorsque $t \rightarrow \infty$.

Par ailleurs, pour certains points initiaux, c_1 sera nulle. Dans ce cas, la solution ne comporte que les termes exponentiels négatifs et $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Les points initiaux qui font en sorte que c_1 est nulle sont précisément ceux qui se trouvent dans le plan déterminé par les vecteurs propres $\xi^{(2)}$ et $\xi^{(3)}$ correspondant aux deux valeurs propres négatives. Ainsi, les solutions qui commencent dans ce plan s'approchent de l'origine lorsque $t \rightarrow \infty$, tandis que toutes les autres solutions deviennent non bornées.

Si certaines des valeurs propres sont deux à deux conjuguées complexes, alors il y a toujours n solutions linéairement indépendantes de la forme (27) à condition que toutes les valeurs propres soient distinctes. Bien sûr, les solutions issues de valeurs propres complexes sont à valeurs complexes. Cependant, comme on l'a vu dans la section 3.4, il est possible d'obtenir un ensemble complet de solutions à valeurs réelles. Ce sujet sera discuté dans la section 5.6.

Des difficultés plus sérieuses peuvent survenir si une valeur propre est multiple. Dans ce cas, le nombre de vecteurs propres correspondants et linéairement indépendants peut être plus petit que la multiplicité de la valeur propre. Dans ce cas, le nombre de solutions linéairement indépendantes de la forme ξe^{rt} sera plus petit que n . Pour construire un ensemble fondamental de solutions, il faut alors rechercher des solutions supplémentaires d'une autre forme. La situation est en quelque sorte analogue à celle d'une équation linéaire du n -ième ordre à coefficients constants. Une racine multiple de l'équation caractéristique a donné lieu aux solutions de la forme e^{rt} , te^{rt} , $t^2 e^{rt}$, ... Le cas des valeurs propres multiples sera abordé dans la section 5.8.

Finalement, si $\mathbf{A}$ admet des coefficients complexes, alors ses valeurs propres complexes ne sont plus deux à deux conjuguées et les vecteurs propres sont à valeurs complexes, même si la valeur propre associée peut être réelle. Les solutions au système d'équations différentielles (1) restent de la forme (27), à condition que les valeurs propres soient distinctes mais, en général, toutes les solutions sont à valeurs complexes.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 6, procédez comme suit.

- Trouvez la solution générale au système d'équations et décrivez le comportement de la solution lorsque $t \rightarrow \infty$.
- Tracez un champ de direction et quelques trajectoires pour le système.

Ⓢ 1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ⓢ 2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ⓢ 3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ⓢ 4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ⓢ 5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ⓢ 6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

■ Dans les problèmes 7 et 8, procédez comme suit.

- Trouvez la solution générale au système d'équations.
- Tracez un champ de direction et quelques trajectoires. Dans chacun de ces problèmes, la matrice des coefficients admet une valeur propre nulle. Par conséquent, le modèle des trajectoires est différent de ceux des exemples fournis dans le manuel.

Ⓢ 7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ⓢ 8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

■ Dans les problèmes 9 à 14, trouvez la solution générale au système d'équations.

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} \mathbf{x}$

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

13. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

14. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

■ Dans les problèmes 15 à 18, résolvez le problème de valeur initiale. Décrivez le comportement de la solution lorsque $t \rightarrow \infty$.

15. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

16. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

17. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

18. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

19. Le système $t\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ est analogue à l'équation d'Euler du deuxième ordre (voir la section 7.4). En supposant que $\mathbf{x} = \xi t^r$, où ξ est un vecteur constant, montrez que ξ et r doivent satisfaire à $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$ afin d'obtenir des solutions non nulles au système d'équations différentielles.

- ■ En vous reportant au problème 19, résolvez le système d'équations des problèmes 20 à 23. Supposez que $t > 0$.

$$20. \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$21. \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$22. \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$23. \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

- Dans les problèmes 24 à 27, les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $\mathbf{A}$ sont spécifiés. Considérez le système correspondant $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Procédez comme suit.

- Tracez le portrait de phase du système.
- Tracez la trajectoire passant par le point initial $(2, 3)$.
- Pour la trajectoire de la partie b), tracez le graphe de x_1 en fonction de t , puis le graphe de x_2 en fonction de t .

$$24. \quad r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$25. \quad r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$26. \quad r_1 = -1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r_2 = 2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$27. \quad r_1 = 1, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r_2 = 2, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

28. Considérez un système 2×2 : $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Si on suppose que $r_1 \neq r_2$, la solution générale est $\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}$, car $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ sont linéairement indépendants. Dans ce problème, on établit l'indépendance linéaire de $\xi^{(1)}$ et de $\xi^{(2)}$ en supposant qu'ils sont linéairement dépendants, puis en montrant que cela aboutit à une contradiction.

- Montrez que $\xi^{(1)}$ satisfait à l'équation matricielle $(\mathbf{A} - r_1 \mathbf{I})\xi^{(1)} = \mathbf{0}$. Ensuite, montrez que $(\mathbf{A} - r_2 \mathbf{I})\xi^{(2)} = \mathbf{0}$.

- Montrez que $(\mathbf{A} - r_2 \mathbf{I})\xi^{(1)} = (r_1 - r_2)\xi^{(1)}$.

- Supposez que $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ sont linéairement dépendants. Alors, $c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)} = \mathbf{0}$ et au moins l'une de c_1 ou de c_2 est non nulle. Supposez que $c_1 \neq 0$. Montrez que $(\mathbf{A} - r_2 \mathbf{I})(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = \mathbf{0}$ et que $(\mathbf{A} - r_2 \mathbf{I})(c_1 \xi^{(1)} + c_2 \xi^{(2)}) = c_1(r_1 - r_2)\xi^{(1)}$. Ainsi, $c_1 = 0$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ sont linéairement indépendants.

- Modifiez le raisonnement de la partie c) dans le cas où c_1 est nulle mais c_2 ne l'est pas.

- Utilisez un raisonnement similaire quand la dimension n est égale à 3. Vous devez noter que cette façon de procéder peut être généralisée si n est un entier naturel quelconque.

29. Considérez l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{i}$$

où a , b et c sont des constantes. Dans le chapitre 3, on a montré que la solution générale dépendait des racines de l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{ii}$$

- Transformez l'équation (i) en un système d'équations du premier ordre en supposant que

$$x_1 = y, x_2 = y'. \text{ Trouvez le système d'équations } \mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ qui est satisfait par } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

- Trouvez l'équation qui détermine les valeurs propres de la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ dans la partie a). Vous devez noter que cette équation est simplement l'équation caractéristique (ii) de l'équation (i).

- 30. Le système de réservoirs du problème 22 de la section 5.1 mène au problème de valeur initiale

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -17 \\ -21 \end{pmatrix},$$

où x_1 et x_2 sont les écarts des niveaux de sel Q_1 et Q_2 depuis leurs états d'équilibre respectifs.

- Trouvez la solution au problème de valeur initiale.
- Tracez x_1 en fonction de t et x_2 en fonction de t dans un même plan.
- Trouvez le temps T tel que $|x_1(t)| \leq 0,5$ et $|x_2(t)| \leq 0,5$ quel que soit $t \geq T$.

31. Considérez le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

- Résolvez le système pour $\alpha = 0,5$. Quelles sont les valeurs propres de la matrice des coefficients ? Classez le point d'équilibre à l'origine selon son type.
- Résolvez le système pour $\alpha = 2$. Quelles sont les valeurs de la matrice des coefficients ? Classez le point d'équilibre à l'origine selon son type.
- Dans les parties a) et b), les solutions au système présentent deux types de comportement assez différents. Trouvez les valeurs propres de la matrice des coefficients en fonction de α et déterminez la valeur de α entre 0,5 et 2, où la transition d'un type de comportement à un autre se produit. Cette valeur critique de α est le **point de bifurcation**.

- **Les circuits électriques** Les problèmes 32 et 33 portent sur le circuit électrique décrit dans le système d'équations différentielles du problème 21 de la section 5.1 :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}. \quad (i)$$

- Trouvez la solution générale à l'équation (i) si $R_1 = 1$ ohm, $R_2 = \frac{3}{5}$ ohm, $L = 2$ henrys et $C = \frac{3}{5}$ farad.
 - Montrez que $I(t) \rightarrow 0$ et $V(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, peu importe les valeurs initiales $I(0)$ et $V(0)$.
- Considérez le système d'équations différentielles (i) précédent.
 - Trouvez une condition en termes de R_1 , R_2 , C et L qui doit être satisfaite pour que les valeurs propres de la matrice des coefficients soient réelles et distinctes.
 - Si la condition trouvée dans la partie a) est satisfaite, montrez que les deux valeurs propres sont négatives. Ensuite, montrez que $I(t) \rightarrow 0$ et $V(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, peu importe les conditions initiales.
 - Si la condition trouvée dans la partie a) n'est pas satisfaite, alors les valeurs propres sont complexes ou multiples. Déterminez si $I(t) \rightarrow 0$ et $V(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ dans ces cas.
Suggestion : Dans la partie c), une approche consiste à modifier le système (i) en une équation du premier ordre. On étudie aussi les valeurs propres complexes et multiples dans les sections 5.6 et 5.8.

5.6 Les valeurs propres complexes

Dans cette section, nous allons considérer de nouveau un système à n équations homogènes linéaires à coefficients constants

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1)$$

où les éléments de la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ sont réels. Si on recherche des solutions de la forme $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$, alors, comme on l'a vu dans la section 5.5, r doit être une valeur propre et ξ , un

vecteur propre correspondant à la matrice des coefficients $\mathbf{A}$. Rappelez-vous que les valeurs propres $r_1, \dots, r_n$ de $\mathbf{A}$ sont les racines de l'équation

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \quad (2)$$

et que les vecteurs propres correspondants satisfont à

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Si $\mathbf{A}$ est réel, alors les coefficients de l'équation polynomiale (2) pour r sont réels et les valeurs propres complexes sont conjuguées deux à deux. Par exemple, si $r_1 = \lambda + i\mu$, où λ et μ sont réelles, et si r_1 est une valeur propre de $\mathbf{A}$, alors $r_2 = \lambda - i\mu$ en est une également.

Exemple 1

Trouvez un ensemble fondamental de solutions à valeurs réelles au système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (4)$$

et illustrez-les sur un graphique.

La figure 5.6.1 présente un champ de direction pour le système (4). Ce graphique suggère que les trajectoires dans le plan de phase forment une spirale se dirigeant vers l'origine dans le sens horaire.

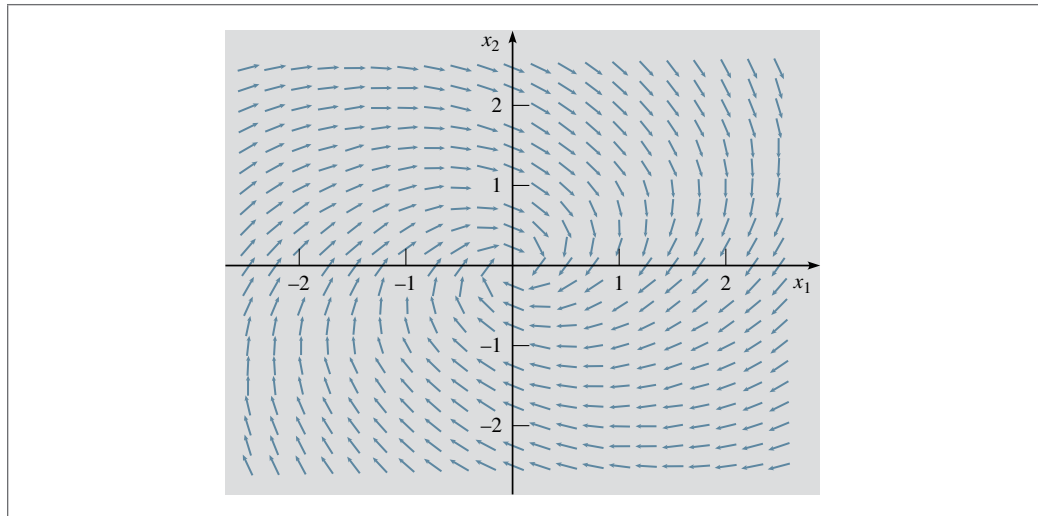


Figure 5.6.1 Champ de direction pour le système (4).

Pour trouver un ensemble fondamental de solutions, on suppose que

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt} \quad (5)$$

et on obtient le système d'équations linéaires

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}-r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

permettant de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{A}$. L'équation caractéristique est

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}-r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2}-r \end{vmatrix} = r^2 + r + \frac{5}{4} = 0. \quad (7)$$

Par conséquent, les valeurs propres sont $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ et $r_2 = -\frac{1}{2} - i$. À partir de l'équation (6), un calcul simple montre que les vecteurs propres correspondants sont

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Ainsi, un ensemble fondamental de solutions au système (4) est

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-1/2+i)t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-1/2-i)t}. \quad (9)$$

Pour obtenir un ensemble de solutions à valeurs réelles, on doit trouver les parties réelles et imaginaires de $\mathbf{x}^{(1)}$ ou de $\mathbf{x}^{(2)}$. En fait,

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-t/2} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2} \cos t \\ -e^{-t/2} \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t/2} \sin t \\ e^{-t/2} \cos t \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Ainsi,

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad (11)$$

est un ensemble de solutions à valeurs réelles. Pour vérifier si $\mathbf{u}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$ sont linéairement indépendants, on calcule leur wronskien :

$$\begin{aligned} W(\mathbf{u}, \mathbf{v})(t) &= \begin{vmatrix} e^{-t/2} \cos t & e^{-t/2} \sin t \\ -e^{-t/2} \sin t & e^{-t/2} \cos t \end{vmatrix} \\ &= e^{-t} (\cos^2 t + \sin^2 t) = e^{-t}. \end{aligned}$$

Puisque le wronskien n'est jamais nul, $\mathbf{u}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$ constituent un ensemble fondamental de solutions (à valeurs réelles) au système (4).

La figure 5.6.2 a) illustre les graphiques des solutions $\mathbf{u}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$. Puisque

$$\mathbf{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

les graphiques de $\mathbf{u}(t)$ et de $\mathbf{v}(t)$ passent respectivement par les points $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Les autres solutions au système (4) sont des combinaisons linéaires de $\mathbf{u}(t)$ et de $\mathbf{v}(t)$; les graphiques de quelques-unes de ces solutions sont présentés à la figure 5.6.2 a). Dans tous les cas, la solution s'approche de l'origine le long d'une spirale lorsque $t \rightarrow \infty$. Cela provient du fait que les solutions (11) sont des produits de facteurs exponentiels décroissants et de facteurs sinus et cosinus. La figure 5.6.2 b) présente certains graphiques typiques de x_1 en fonction de t . Chacun représente une oscillation décroissante dans le temps.

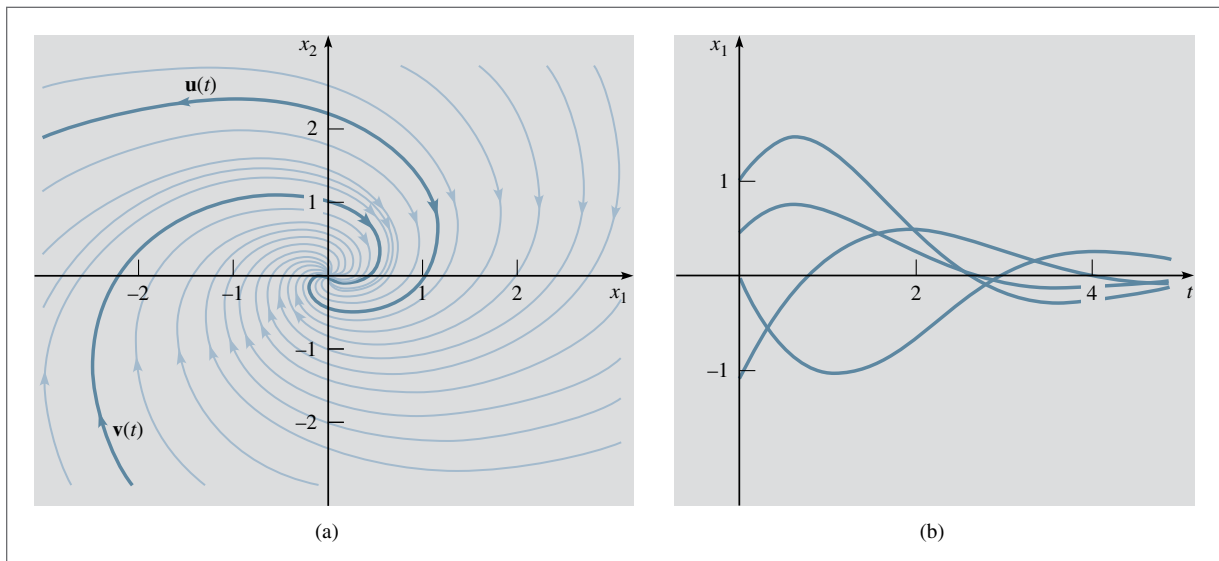


Figure 5.6.2 a) Portrait de phase du système (4); l'origine est un point spirale. b) Graphiques de x_1 en fonction de t pour le système (4); les graphiques de x_2 en fonction de t sont similaires.

La figure 5.6.2 a) est typique de deux équations du premier ordre $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dont les valeurs propres sont complexes avec des parties réelles négatives. L'origine est un **point spirale** et elle est asymptotiquement stable, car toutes les trajectoires s'approchent de celle-ci lorsque t augmente. Pour un système dont les valeurs propres ont une partie réelle positive, les trajectoires sont similaires à celles de la figure 5.6.2 a), mais la direction du mouvement s'éloigne de l'origine et les trajectoires deviennent non bornées. Dans ce cas, l'origine est instable. Si la partie réelle des valeurs propres est nulle, alors les trajectoires ne s'approchent pas de l'origine et ne deviennent pas non bornées, mais elles traversent plutôt de manière répétitive une courbe fermée autour de l'origine. Dans ce cas, l'origine est appelée un **centre**, et elle est dite stable mais non asymptotiquement stable. Dans les trois cas, la direction du mouvement peut être dans le sens horaire (*voir l'exemple*) ou dans le sens anti-horaire selon les éléments de la matrice des coefficients $\mathbf{A}$.

Le portrait de phase dans la figure 5.6.2 a) a été tracé à l'ordinateur, mais il est possible de tracer une esquisse utile du portrait de phase à la main. On a remarqué que lorsque les valeurs propres $\lambda \pm i\mu$ sont complexes, les trajectoires forment des spirales vers l'intérieur ($\lambda < 0$) ou vers l'extérieur ($\lambda > 0$), ou croisent de manière répétitive une courbe fermée ($\lambda = 0$). Pour déterminer si le mouvement s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire, il suffit de déterminer la direction du mouvement en un point unique pratique. Par exemple, dans le système (4), on pourrait choisir $\mathbf{x} = (0, 1)^T$.

Ainsi, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \left(1, -\frac{1}{2}\right)^T$. Par conséquent, au point $(0, 1)$ dans le plan de phase, le vecteur $\mathbf{x}'$ tangent à

la trajectoire en ce point a une composante en x_1 positive. Ainsi, à partir du deuxième quadrant, il se dirige vers le premier. Le mouvement s'effectue donc dans le sens des aiguilles d'une montre pour les trajectoires de ce système.

Si on revient à l'équation générale (1)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

on peut procéder comme dans l'exemple. Supposez qu'il existe une paire de valeurs propres complexes conjuguées, $r_1 = \lambda + i\mu$ et $r_2 = \lambda - i\mu$. Dans ce cas, les vecteurs propres correspondants $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ sont aussi complexes conjugués. Pour le constater, rappelez-vous que r_1 et $\xi^{(1)}$ satisfont à

$$(\mathbf{A} - r_1 \mathbf{I})\xi^{(1)} = \mathbf{0}. \quad (12)$$

En prenant le conjugué complexe de cette équation et sachant que les éléments de $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{I}$ sont réels, on obtient

$$(\mathbf{A} - \bar{r}_1 \mathbf{I})\bar{\xi}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad (13)$$

où $\bar{r}_1$ et $\bar{\xi}^{(1)}$ sont respectivement les conjugués complexes de r_1 et de $\xi^{(1)}$. En d'autres mots, $r_2 = \bar{r}_1$ est aussi une valeur propre et $\xi^{(2)} = \bar{\xi}^{(1)}$ est un vecteur propre correspondant. Les solutions

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{r_1 t}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \bar{\xi}^{(1)} e^{\bar{r}_1 t} \quad (14)$$

correspondant à l'équation différentielle (1) sont alors conjuguées complexes l'une de l'autre. Par conséquent, comme on l'a vu dans l'exemple 1, on peut trouver deux solutions à valeurs réelles à l'équation (1) correspondant aux valeurs propres r_1 et r_2 en prenant les parties réelles et imaginaires de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ ou de $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ données par l'équation (14).

On écrit donc $\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont réels, et on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)}(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\lambda + i\mu)t} \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t). \end{aligned} \quad (15)$$

En séparant les parties réelles et imaginaires de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, on obtient

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t) + ie^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t). \quad (16)$$

Si on écrit $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, alors les vecteurs

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t), \\ \mathbf{v}(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t)\end{aligned}\quad (17)$$

sont des solutions à valeurs réelles à l'équation (1). Il est possible de montrer que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des solutions linéairement indépendantes (voir le problème 27).

Par exemple, on suppose que $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$ et que $r_3, \dots, r_n$ sont réelles et distinctes. Soit les vecteurs propres correspondants $\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, $\xi^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, $\xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$. Alors, la solution générale à l'équation (1) est

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t) + c_3 \xi^{(3)} e^{r_3 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}, \quad (18)$$

où $\mathbf{u}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$ sont donnés par les équations (17). On insiste sur le fait que cette analyse s'applique uniquement si les coefficients de la matrice $\mathbf{A}$ de l'équation (1) sont réels, car ce n'est qu'à ce moment-là que les valeurs propres complexes et les vecteurs propres apparaissent conjugués deux à deux.

Pour les systèmes 2×2 à coefficients réels, la description des trois principaux cas qui peuvent survenir est maintenant terminée.

1. Les valeurs propres sont de signes opposés ; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est un point de selle.
2. Les valeurs propres sont de même signe et elles sont distinctes ; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est un nœud.
3. Les valeurs propres sont complexes et comportent des parties réelles non nulles ; $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est un point spirale.

Les autres possibilités ont moins d'importance et constituent une transition entre deux des cas mentionnés ci-dessus. Par exemple, une valeur propre nulle se produit durant la transition entre un point de selle et un nœud. Des valeurs propres imaginaires surviennent durant une transition entre des points spirales asymptotiquement stables et instables. Finalement, des valeurs réelles et identiques apparaissent durant la transition entre les nœuds et les points spirales.

Exemple 2

Le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (19)$$

dépend du paramètre α . Décrivez qualitativement en quoi les solutions dépendent de α . De façon particulière, trouvez les valeurs critiques de α pour lesquelles le comportement qualitatif des trajectoires dans le plan de phase change notablement.

Le comportement des trajectoires dépend des valeurs propres de la matrice des coefficients. L'équation caractéristique est

$$r^2 - \alpha r + 4 = 0, \quad (20)$$

et les valeurs propres sont

$$r = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}. \quad (21)$$

À partir de l'équation (21), il s'ensuit que les valeurs propres sont conjuguées complexes pour $-4 < \alpha < 4$ et qu'elles sont réelles autrement. Par conséquent, deux valeurs critiques sont $\alpha = -4$ et $\alpha = 4$, là où les valeurs propres passent de réelles à complexes ou inversement. Pour $\alpha < -4$, les deux valeurs propres sont négatives, donc toutes les trajectoires s'approchent de l'origine, laquelle est un nœud asymptotiquement stable. Pour $\alpha > 4$, les deux valeurs propres sont positives, donc l'origine est de nouveau un nœud, cette fois instable ; toutes les trajectoires (sauf $\mathbf{x} = \mathbf{0}$) deviennent non bornées. Pour les valeurs intermédiaires, $-4 < \alpha < 4$, les valeurs propres sont complexes et les trajectoires sont des spirales. Cependant, pour $-4 < \alpha < 0$, la partie réelle des valeurs propres est négative, les spirales se dirigent vers l'intérieur et l'origine est asymptotiquement stable, tandis que pour $0 < \alpha < 4$, le contraire s'applique et l'origine est instable. Par conséquent, $\alpha = 0$ est aussi une valeur critique là où la direction des spirales change, passant de l'intérieur vers l'extérieur. Pour cette valeur de α , l'origine est un centre et les trajectoires sont des courbes fermées autour de l'origine, ce qui correspond à des solutions périodiques. Les autres valeurs critiques, $\alpha = \pm 4$, produisent des valeurs propres qui sont réelles et identiques. Dans ce cas, l'origine est de nouveau un nœud, mais le portrait de phase diffère de ceux de la section 5.5. Ce cas sera étudié à la section 5.8.

Un système à masses et à ressorts multiples Considérez le système à deux masses et trois ressorts montré dans la figure 5.1.1, dont les équations du mouvement sont les équations (1) de la section 5.1. Si on suppose qu'il n'y a aucune force externe, alors $F_1(t) = 0$, $F_2(t) = 0$ et les équations résultantes sont

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2, \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2. \end{aligned} \quad (22)$$

On peut résoudre ces équations comme un système de deux équations du deuxième ordre (voir le problème 29), mais pour être cohérents avec l'approche suivie dans ce chapitre, on les transformera en un système de quatre équations du premier ordre. Posez $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x'_1$ et $y_4 = x'_2$. Dans ce cas,

$$y'_1 = y_3, \quad y'_2 = y_4 \quad (23)$$

et, selon les équations (22),

$$m_1 y'_3 = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2, \quad m_2 y'_4 = k_2 y_1 - (k_2 + k_3)y_2. \quad (24)$$

L'exemple suivant présente un cas particulier de ce système à deux masses et trois ressorts.

Exemple 3

Supposez que $m_1 = 2$, $m_2 = 9/4$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ et $k_3 = 15/4$ dans les équations (23) et (24), de façon que ces équations deviennent

$$y'_1 = y_3, \quad y'_2 = y_4, \quad y'_3 = -2y_1 + \frac{3}{2}y_2, \quad y'_4 = \frac{4}{3}y_1 - 3y_2. \quad (25)$$

Analysez les mouvements possibles décrits par les équations (25) et tracez des graphiques montrant un comportement typique.

En écrivant le système (25) sous forme matricielle, on obtient

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}. \quad (26)$$

Souvenez-vous que y_1 et y_2 représentent les positions des deux masses par rapport à leurs positions d'équilibre, et que y_3 et y_4 représentent leurs vitesses. Comme d'habitude, on suppose que $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$, où r doit être une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$ et $\boldsymbol{\xi}$ le vecteur propre correspondant. Il est possible, mais quelque peu fastidieux, de trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ à la main, mais il est plus facile de le faire à l'aide de logiciels appropriés. Le polynôme caractéristique de $\mathbf{A}$ est

$$r^4 + 5r^2 + 4 = (r^2 + 1)(r^2 + 4); \quad (27)$$

donc, les valeurs propres sont $r_1 = i$, $r_2 = -i$, $r_3 = 2i$ et $r_4 = -2i$. Les vecteurs propres correspondants sont

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3i \\ -2i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6i \\ 8i \end{pmatrix}. \quad (28)$$

► Les solutions à valeurs complexes $\xi^{(1)}e^{it}$ et $\xi^{(2)}e^{-it}$ sont des conjuguées complexes; donc, on peut trouver deux solutions à valeurs réelles en déterminant les parties réelle et imaginaire de l'une ou l'autre de ces solutions. Par exemple, on a

$$\begin{aligned}\xi^{(1)}e^{it} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(1)}(t) + i\mathbf{v}^{(1)}(t).\end{aligned}\quad (29)$$

D'une manière similaire, on obtient

$$\begin{aligned}\xi^{(3)}e^{2it} &= \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix} (\cos 2t + i \sin 2t) \\ &= \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(2)}(t) + i\mathbf{v}^{(2)}(t).\end{aligned}\quad (30)$$

On vous laisse le soin de vérifier que $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$ et $\mathbf{v}^{(2)}$ sont linéairement indépendants et, par conséquent, forment un ensemble fondamental de solutions. Ainsi, la solution générale à l'équation (26) est

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix}, \quad (31)$$

où c_1 , c_2 , c_3 et c_4 sont des constantes arbitraires.

L'espace (ou plan) de phase de ce système est à quatre dimensions et chaque solution, obtenue à l'aide d'un ensemble particulier de valeurs de $c_1, \dots, c_4$ dans l'équation (31), correspond à une trajectoire dans cet espace. Puisque chaque solution donnée par l'équation (31) est périodique de période 2π , chaque trajectoire est une courbe fermée. Peu importe où commence la trajectoire en $t = 0$, elle revient à ce point en $t = 2\pi$, en $t = 4\pi$, et ainsi de suite, en croisant sans cesse la même courbe dans chaque intervalle de temps d'une durée de 2π . On ne tentera pas de montrer ces trajectoires à quatre dimensions ici. Les figures à la page suivante présentent plutôt des projections de certaines trajectoires dans les plans y_1y_3 ou y_2y_4 , montrant ainsi le mouvement de chaque masse séparément.

Les deux premiers termes du membre de droite de l'équation (31) décrivent des mouvements de fréquence 1 et de période 2π . Notez que $y_2 = (2/3)y_1$ dans ces termes et que $y_4 = (2/3)y_3$. Cela signifie que les deux masses se déplacent ensemble, toujours dans la même direction, mais la seconde masse ne parcourt que les deux tiers de la distance parcourue par la première masse. Si on se concentre sur la solution $\mathbf{u}^{(1)}(t)$ et qu'on trace les graphiques de y_1 en fonction de t et de y_2 en fonction de t dans le même plan cartésien, on obtient des graphiques de cosinus d'amplitude 3 et 2, respectivement, comme le montre la figure 5.6.3 a). La trajectoire de la première masse dans le plan y_1y_3 suit le cercle de rayon 3 montré dans la figure 5.6.3 b), dans le sens des aiguilles d'une montre en partant du point (3, 0) et en effectuant un tour complet en un temps 2π . Cette figure montre également la trajectoire de la seconde masse dans le plan y_2y_4 . Cette trajectoire suit le cercle de rayon 2, également dans le sens des aiguilles d'une montre, en partant du point (2, 0) et en effectuant aussi un tour complet en un temps 2π . L'origine est un centre dans les plans y_1y_3 et y_2y_4 respectifs. On peut obtenir des graphiques similaires (avec un décalage dans le temps approprié) à partir de $\mathbf{v}^{(1)}$ ou d'une combinaison linéaire de $\mathbf{u}^{(1)}$ et de $\mathbf{v}^{(1)}$.

▶ Les autres termes du membre de droite de l'équation (31) décrivent des mouvements de fréquence 2 et de période π . Notez que dans ce cas, $y_2 = -(4/3)y_1$ et $y_4 = -(4/3)y_3$. Cela signifie que les deux masses se déplacent toujours dans des directions opposées et que la seconde masse parcourt quatre tiers de la distance parcourue par la première masse. Si on examine seulement $\mathbf{u}^{(2)}(t)$ et qu'on trace les graphiques de y_1 en fonction de t et de y_2 en fonction de t dans le même plan cartésien, on obtient la figure 5.6.4 a). Il y a une différence de phase de π et l'amplitude de y_2 égale quatre tiers de celle de y_1 , ce qui confirme les énoncés précédents relatifs aux mouvements des masses. La figure 5.6.4 b) montre une superposition des trajectoires des deux masses dans leurs plans de phase respectifs.

Les deux graphiques sont des ellipses; l'ellipse intérieure correspond à la première masse et l'ellipse extérieure à la seconde. La trajectoire de l'ellipse intérieure débute au point $(3, 0)$ et celle de l'ellipse extérieure débute au point $(-4, 0)$. Les deux trajectoires se déplacent dans le sens des aiguilles d'une montre et effectuent un tour complet en un temps π . L'origine est un centre dans les plans y_1y_3 et y_2y_4 respectifs. On peut de nouveau obtenir des graphiques similaires à partir de $\mathbf{v}^{(2)}$ ou d'une combinaison linéaire de $\mathbf{u}^{(2)}$ et de $\mathbf{v}^{(2)}$.

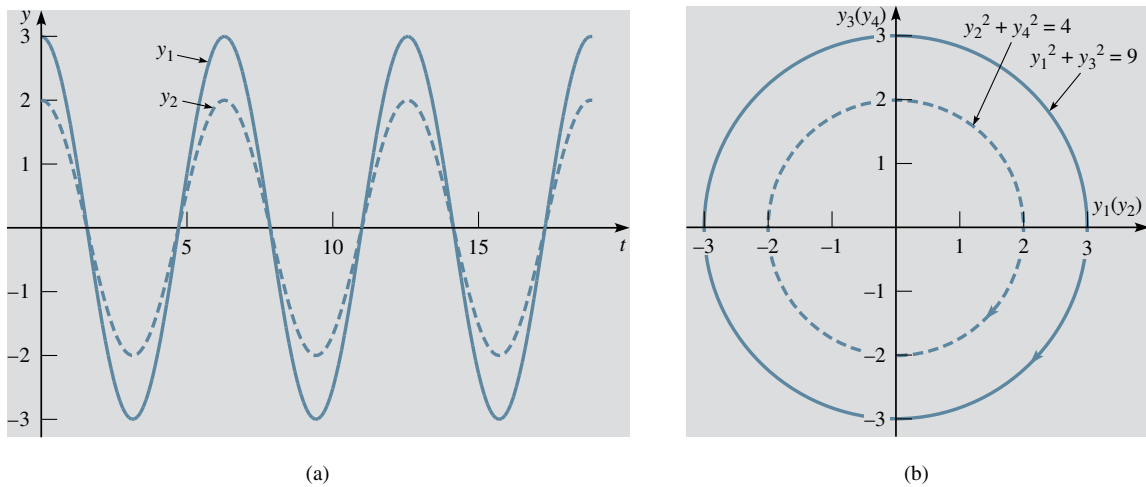


Figure 5.6.3 a) Graphiques de y_1 en fonction de t et de y_2 en fonction de t pour la solution $\mathbf{u}^{(1)}(t)$.
b) Superposition des projections des trajectoires dans les plans y_1y_3 et y_2y_4 pour la solution $\mathbf{u}^{(1)}(t)$.

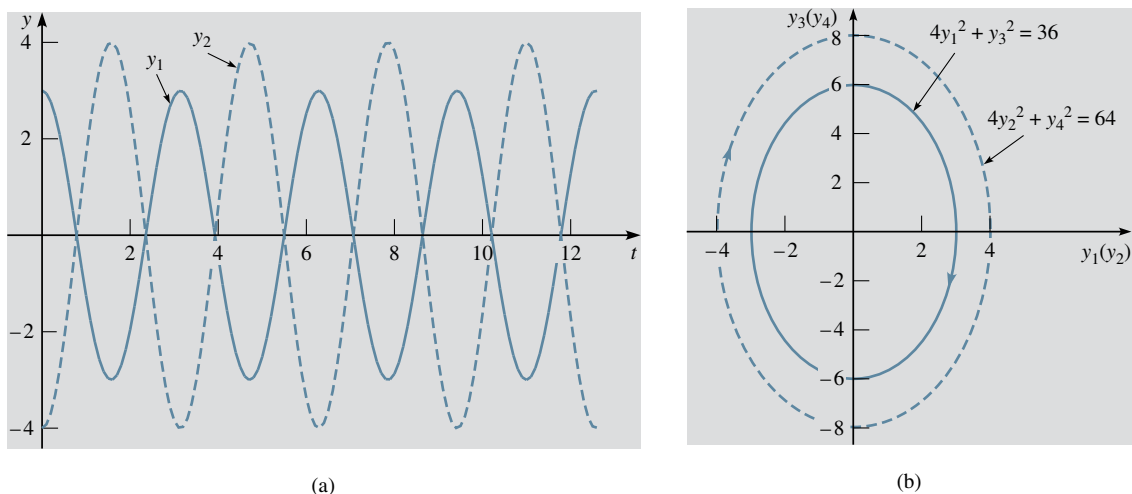


Figure 5.6.4 a) Graphiques de y_1 en fonction de t et de y_2 en fonction de t pour la solution $\mathbf{u}^{(2)}(t)$.
b) Superposition des projections des trajectoires dans les plans y_1y_3 et y_2y_4 pour la solution $\mathbf{u}^{(2)}(t)$.

Les types de mouvement décrits dans les deux paragraphes précédents sont appelés les **modes propres** de vibration du système à deux masses. Chacun de ces modes découle de conditions initiales

► assez particulières. Par exemple, pour obtenir le mode propre de fréquence 1, les deux constantes c_3 et c_4 dans l'équation (31) doivent être nulles. Cela se produit uniquement pour des conditions initiales dans lesquelles $3y_2(0) = 2y_1(0)$ et $3y_4(0) = 2y_3(0)$.

De la même façon, on obtient le mode de fréquence 2 seulement quand les deux constantes c_1 et c_2 dans l'équation (31) sont nulles; c'est-à-dire quand les conditions initiales sont telles que $3y_2(0) = -4y_1(0)$ et $3y_4(0) = -4y_3(0)$.

Pour des conditions initiales plus générales, la solution est une combinaison des deux modes propres. La figure 5.6.5 a) illustre un graphique de y_1 en fonction de t pour un cas typique et la figure 5.6.5 b) illustre la projection de la trajectoire correspondante dans le plan y_1y_3 . Remarquez que cette dernière figure peut sembler trompeuse, car elle montre la projection d'une trajectoire qui se croise elle-même. Cela ne peut pas être le cas pour la trajectoire réelle à quatre dimensions, car elle contreviendrait au théorème général de l'unicité: il ne peut y avoir deux solutions différentes provenant du même point initial.

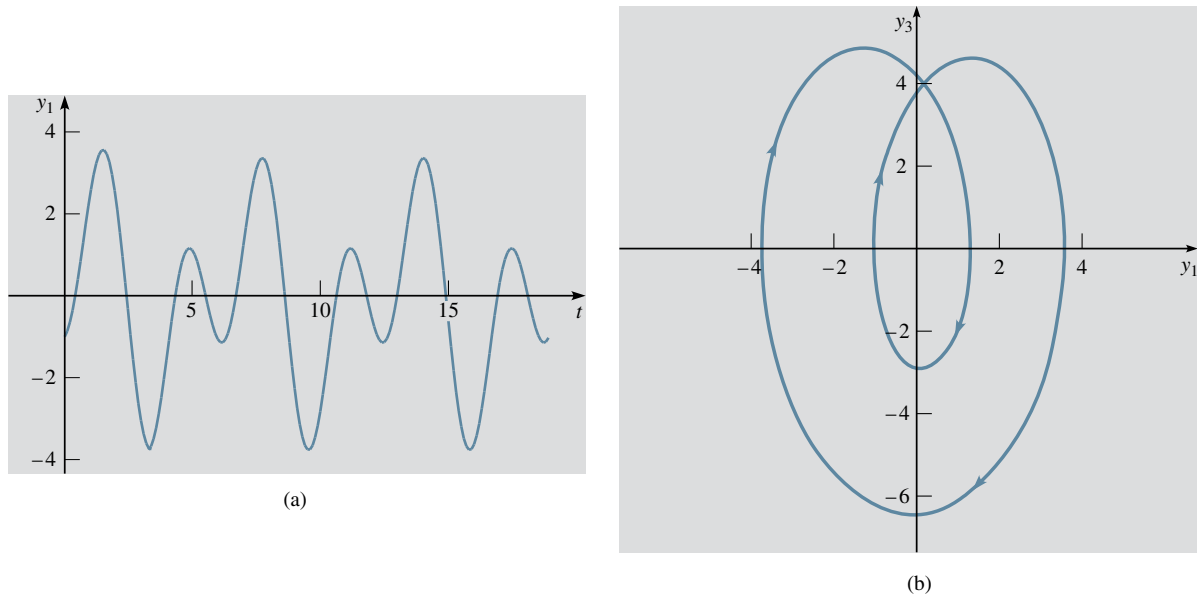


Figure 5.6.5 Solution au système (25) satisfaisant à la condition initiale $\mathbf{y}(0) = (-1, 4, 1, 1)^T$. a) Graphique de y_1 en fonction de t . b) Projection de la trajectoire dans le plan y_1y_3 . Comme on le mentionne dans la section, la trajectoire réelle à quatre dimensions ne se croise pas elle-même.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 6, procédez comme suit.

- Exprimez la solution générale au système d'équations en termes de fonctions à valeurs réelles.
- Tracez aussi un champ de direction et quelques trajectoires, puis décrivez le comportement des solutions lorsque $t \rightarrow \infty$.

Ⓢ 1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ⓢ 2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ⓢ 3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ⓢ 4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ⓢ 5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

Ⓢ 6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

- ■ Dans les problèmes 7 et 8, exprimez la solution générale au système d'équations en termes de fonctions à valeurs réelles.

$$7. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$8. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

- Dans les problèmes 9 et 10, trouvez la solution au problème de valeur initiale. Décrivez le comportement de la solution lorsque $t \rightarrow \infty$.

$$9. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$10. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Dans les problèmes 11 et 12, procédez comme suit.

- Trouvez les valeurs propres du système.
- Choisissez un point initial (autre que l'origine) et tracez la trajectoire correspondante dans le plan x_1, x_2 .
- Pour la trajectoire obtenue à la partie b), tracez les graphes de x_1 en fonction de t et de x_2 en fonction de t .
- Pour la trajectoire obtenue à la partie b), tracez le graphe correspondant dans l'espace tridimensionnel tx_1, x_2 .

$$11. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -2 \\ 1 & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$12. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & 2 \\ -1 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

- Dans les problèmes 13 à 20, la matrice des coefficients dépend du paramètre α . Pour chacun de ces problèmes, procédez comme suit.

- Déterminez les valeurs propres en fonction de α .
- Trouvez les valeurs critiques de α , où la nature qualitative du portrait de phase du système change.
- Tracez un portrait de phase pour une valeur de α légèrement inférieure et pour une autre valeur légèrement supérieure aux valeurs critiques.

$$\textcircled{U} 13. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\textcircled{U} 14. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\textcircled{U} 15. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\textcircled{U} 16. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \alpha & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\textcircled{U} 17. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & \alpha \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\textcircled{U} 18. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & \alpha \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\textcircled{U} 19. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\textcircled{U} 20. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

- Dans les problèmes 21 et 22, résolvez le système d'équations en utilisant la méthode du problème 19 de la section 5.5. Supposez que $t > 0$.

$$21. t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$22. t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

■ Dans les problèmes 23 et 24, procédez comme suit.

- Trouvez les valeurs propres du système.
- Choisissez un point initial (autre que l'origine) et tracez la trajectoire correspondante dans le plan x_1x_2 . De plus, tracez les trajectoires dans les plans x_1x_3 et x_2x_3 .
- Pour le point initial de la partie b), dessinez la trajectoire correspondante dans l'espace $x_1x_2x_3$.

$$\textcircled{23}. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\textcircled{24}. \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

25. Considérez le circuit électrique présenté à la figure 5.6.6. Supposez que $R_1 = R_2 = 4$ ohms, $C = \frac{1}{2}$ farad et $L = 8$ henrys.

- a) Montrez que ce circuit est régi par le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}, \quad (\text{i})$$

où I est le courant passant par l'inducteur et V la chute de tension aux bornes du condensateur.

Suggestion : Reportez-vous au problème 20 de la section 5.1.

- Trouvez la solution générale aux équations (i) en termes de fonctions à valeurs réelles.
- Trouvez $I(t)$ et $V(t)$ si $I(0) = 2$ ampères et $V(0) = 3$ volts.
- Déterminez les valeurs limites de $I(t)$ et de $V(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Ces valeurs limites dépendent-elles des conditions initiales ?

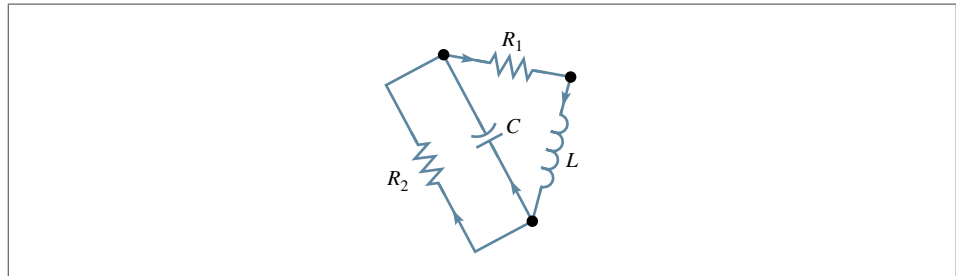


Figure 5.6.6 Circuit du problème 25.

26. Le circuit électrique présenté à la figure 5.6.7 à la page suivante est décrit par le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}, \quad (\text{i})$$

où I est le courant passant par l'inducteur et V la chute de tension aux bornes du condensateur. On a obtenu ces équations différentielles dans le problème 19 de la section 5.1.

- Montrez que les valeurs propres de la matrice des coefficients sont réelles et distinctes si $L > 4R^2C$. Montrez aussi qu'elles sont conjuguées complexes si $L < 4R^2C$.
- Supposez que $R = 1$ ohm, $C = \frac{1}{2}$ farad et $L = 1$ henry. Trouvez la solution générale au système (i) dans ce cas.

- c) Trouvez $I(t)$ et $V(t)$ si $I(0) = 2$ ampères et $V(0) = 1$ volt.
 d) Pour le circuit de la partie b), déterminez les valeurs limites de $I(t)$ et de $V(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Ces valeurs limites dépendent-elles des conditions initiales ?

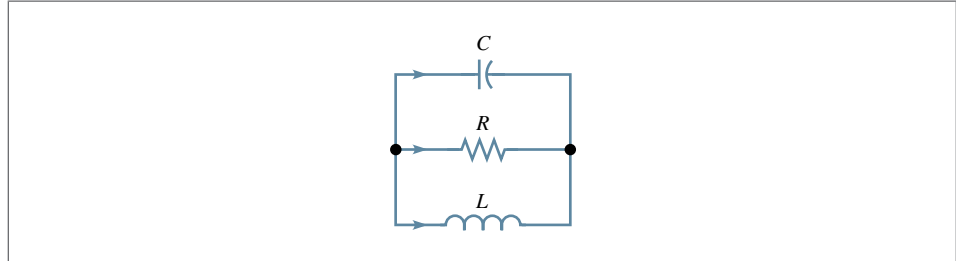


Figure 5.6.7 Circuit du problème 26.

27. Dans ce problème, on explique comment montrer que $\mathbf{u}(v)$ et $\mathbf{v}(t)$, tels que ces vecteurs apparaissent aux équations (17), sont linéairement indépendants. Soit $r_1 = \lambda + i\mu$ et $\bar{r}_1 = \lambda - i\mu$ deux valeurs propres conjuguées de la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ de l'équation (1); soit $\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$ et $\bar{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$ les vecteurs propres correspondants. Vous devez vous rappeler que dans la section 5.3, on a vu que si $r_1 \neq \bar{r}_1$, alors $\xi^{(1)}$ et $\bar{\xi}^{(1)}$ sont linéairement indépendants.
- a) Premièrement, on montre que $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont linéairement indépendants. Considérez l'équation $c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Exprimez $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ en fonction de $\xi^{(1)}$ et de $\bar{\xi}^{(1)}$, puis montrez que $(c_1 - ic_2)\xi^{(1)} + (c_1 + ic_2)\bar{\xi}^{(1)} = \mathbf{0}$.
- b) Montrez que $c_1 - ic_2 = 0$ et $c_1 + ic_2 = 0$, puis que $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$. Par conséquent, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont linéairement indépendants.
- c) Pour montrer que $\mathbf{u}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$ sont linéairement indépendants, considérez l'équation $c_1\mathbf{u}(t_0) + c_2\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{0}$, où t_0 est un point arbitraire. Réécrivez cette équation en fonction de $\mathbf{a}$ et de $\mathbf{b}$, puis procédez comme dans la partie b) pour montrer que $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$. Ainsi, $\mathbf{u}(t)$ et $\mathbf{v}(t)$ sont linéairement indépendants en un point arbitraire t_0 . Par conséquent, ils sont linéairement indépendants en tout point et dans tout intervalle.
28. Un objet de masse m soumis à un ressort de constante k satisfait à l'équation différentielle (voir la section 3.8)

$$mu'' + ku = 0,$$

où $u(t)$ est le déplacement au temps t de l'objet à partir de sa position d'équilibre.

- a) Soit $x_1 = u$ et $x_2 = u'$. Montrez que le système qui en découle est

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

- b) Trouvez les valeurs propres de la matrice pour le système de la partie a).
- c) Tracez plusieurs trajectoires pour le système. Choisissez une de ces trajectoires et tracez les graphiques correspondants de x_1 en fonction de t , puis de x_2 en fonction de t . Tracez les deux graphiques dans un même plan.
- d) Quelle est la relation entre les valeurs propres de la matrice des coefficients et la fréquence naturelle du système masse-ressort ?
29. Considérez le système à deux masses et trois ressorts de l'exemple 3. Au lieu de convertir le problème en un système à quatre équations du premier ordre, on vous montre ici à vous servir directement des équations (22).
- a) Montrez qu'on peut écrire les équations (22) sous la forme

$$\mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ \frac{4}{3} & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (\text{i})$$

b) Supposez que $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ et montrez que

$$(\mathbf{A} - r^2 \mathbf{I}) \xi = \mathbf{0}.$$

Notez que r^2 (plutôt que r) est une valeur propre de $\mathbf{A}$ correspondant à un vecteur propre ξ .

- c) Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{A}$.
- d) Écrivez des expressions pour représenter x_1 et x_2 . Il devrait y avoir quatre constantes arbitraires dans ces expressions.
- e) En dérivant les résultats de la partie d), écrivez des expressions pour représenter x'_1 et x'_2 . Vos résultats des parties d) et e) devraient concorder avec l'équation (31).
30. Considérez le système à deux masses et trois ressorts dont les équations du mouvement sont les équations (22) de la présente section. Posez $m_1 = 1$, $m_2 = 4/3$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ et $k_3 = 4/3$.
- a) Comme dans la section, convertissez le système en un système à quatre équations du premier ordre de la forme $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Déterminez la matrice de coefficients $\mathbf{A}$.
- b) Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{A}$.
- c) Écrivez la solution générale à ce système.
- d) Décrivez les modes propres de vibration. Pour chaque mode propre, tracez les graphiques de y_1 en fonction de t et de y_2 en fonction de t . Tracez aussi les trajectoires correspondantes dans les plans y_1y_3 et y_2y_4 .
- e) Considérez les conditions initiales $\mathbf{y}(0) = (2, 1, 0, 0)^T$. Évaluez les constantes arbitraires dans la solution générale de la partie c). Quelle est la période du mouvement dans ce cas ? Tracez les graphiques de y_1 en fonction de t et de y_2 en fonction de t . Tracez aussi les trajectoires correspondantes dans les plans y_1y_3 et y_2y_4 . Assurez-vous de bien comprendre la direction des trajectoires pour une période complète.
- f) Utilisez vos propres conditions initiales et tracez des graphiques similaires à ceux demandés dans la partie e).
31. Considérez le système à deux masses et trois ressorts dont les équations du mouvement sont les équations (22) de la présente section. Posez $m_1 = m_2 = 1$ et $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.
- a) Comme dans la section, convertissez le système en un système à quatre équations du premier ordre de la forme $\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{y}$. Déterminez la matrice de coefficients $\mathbf{A}$.
- b) Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{A}$.
- c) Écrivez la solution générale à ce système.
- d) Décrivez les modes propres de vibration. Pour chaque mode propre, tracez les graphiques de y_1 en fonction de t et de y_2 en fonction de t . Tracez aussi les trajectoires correspondantes dans les plans y_1y_3 et y_2y_4 .
- e) Considérez les conditions initiales $\mathbf{y}(0) = (-1, 3, 0, 0)^T$. Évaluez les constantes arbitraires dans la solution générale de la partie c). Tracez les graphiques de y_1 en fonction de t et de y_2 en fonction de t . Selon vous, la solution est-elle périodique ? Tracez aussi les trajectoires correspondantes dans les plans y_1y_3 et y_2y_4 .
- f) Utilisez vos propres conditions initiales et tracez des graphiques similaires à ceux demandés dans la partie e).

5.7 Les matrices fondamentales

Nous pouvons expliquer davantage la structure des solutions aux systèmes d'équations différentielles linéaires en introduisant la notion de matrice fondamentale. Supposons que $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(m)}(t)$ constituent un ensemble fondamental de solutions à l'équation

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} \quad (1)$$

dans l'intervalle $\alpha < t < \beta$. Alors, la matrice

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

dont les colonnes sont les vecteurs $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$, est la **matrice fondamentale** du système (1). Il faut noter qu'une matrice fondamentale est non singulière, puisque ses colonnes sont des vecteurs linéairement indépendants.

Exemple 1

Trouvez une matrice fondamentale pour le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (3)$$

Dans l'exemple 2 de la section 5.5, on a montré que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

sont des solutions linéairement indépendantes à l'équation (3). Ainsi, une matrice fondamentale pour le système (3) est

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

On peut écrire la solution à un problème de valeur initiale sous une forme compacte en termes d'une matrice fondamentale. La solution générale à l'équation (1) est

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t) \quad (5)$$

ou, en fonction de $\Psi(t)$,

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c}, \quad (6)$$

où $\mathbf{c}$ est un vecteur constant de composantes arbitraires $c_1, \dots, c_n$. Pour un problème de valeur initiale constitué de l'équation différentielle (1) et de la condition initiale

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0, \quad (7)$$

où t_0 est un point donné dans $\alpha < t < \beta$ et $\mathbf{x}^0$ est un vecteur initial donné, il ne reste qu'à choisir le vecteur $\mathbf{c}$ dans l'équation (6) de manière à satisfaire à la condition initiale (7). Ainsi, $\mathbf{c}$ doit satisfaire à

$$\Psi(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}^0. \quad (8)$$

Par conséquent, puisque $\Psi(t_0)$ est non singulière,

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \quad (9)$$

et

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 \quad (10)$$

est la solution au problème de valeur initiale (1), (7). Cependant, il convient d'insister sur le fait que, pour résoudre un problème de valeur initiale, on doit normalement résoudre l'équation (8) par réduction, puis substituer $\mathbf{c}$ dans l'équation (6) plutôt que de calculer $\Psi^{-1}(t_0)$ et utiliser l'équation (10).

Il faut se rappeler que chaque colonne de la matrice fondamentale Ψ est une solution à l'équation (1). Il s'ensuit que Ψ satisfait à l'équation différentielle matricielle

$$\Psi' = P(t)\Psi. \quad (11)$$

On vérifie cette relation en comparant les deux membres de l'équation (11) colonne par colonne.

Parfois, il est pratique d'utiliser la matrice fondamentale particulière, notée $\Phi(t)$, dont les colonnes sont les vecteurs $\mathbf{x}^{(1)}(t), \dots, \mathbf{x}^{(n)}(t)$, indiqués dans le théorème 5.4.4. En plus de l'équation différentielle (1), ces vecteurs satisfont aux conditions initiales

$$\mathbf{x}^{(j)}(t_0) = \mathbf{e}^{(j)}, \quad (12)$$

où $\mathbf{e}^{(j)}$ est le vecteur unitaire défini dans le théorème 5.4.4 et admettant la composante un à la j -ième position, et des zéros partout ailleurs. Ainsi, $\Phi(t)$ admet la propriété

$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}. \quad (13)$$

On réservera toujours le symbole Φ pour noter la matrice fondamentale satisfaisant à la condition (13) et on utilisera Ψ quand il s'agit d'une matrice fondamentale arbitraire. En fonction de $\Phi(t)$, la solution au problème de valeur initiale (1), (7) est encore plus simple en apparence. Puisque $\Phi^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$, il s'ensuit, à partir de l'équation (10), que

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0. \quad (14)$$

Bien que la matrice fondamentale $\Phi(t)$ soit souvent plus complexe que $\Psi(t)$, elle est particulièrement utile quand on doit résoudre un même système d'équations différentielles avec différents ensembles de conditions initiales. Cela correspond à un système physique donné qui peut se mettre en mouvement à partir de divers états initiaux. Si la matrice fondamentale $\Phi(t)$ a été déterminée, alors on peut trouver la solution à chaque ensemble de conditions initiales simplement au moyen de la multiplication de matrices, comme l'indique l'équation (14). La matrice $\Phi(t)$ représente donc une transformation des conditions initiales $\mathbf{x}^0$ dans la solution $\mathbf{x}(t)$ en un temps arbitraire t . Si on compare les équations (10) et (14), on constate que

$$\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0).$$

Exemple 2

Pour le système (3)

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

de l'exemple 1, trouvez la matrice fondamentale Φ , de sorte que $\Phi(0) = \mathbf{I}$.

Les colonnes de Φ sont des solutions à l'équation (3) qui satisfont aux conditions initiales

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Puisque la solution générale à l'équation (3) est

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t},$$

► on peut trouver la solution satisfaisant au premier ensemble de conditions initiales en choisissant $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$. De même, on obtient la solution satisfaisant au deuxième ensemble de conditions initiales en choisissant $c_1 = \frac{1}{4}$ et $c_2 = -\frac{1}{4}$. Ainsi,

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Il faut noter que les éléments de $\Phi(t)$ sont plus complexes que ceux de la matrice fondamentale $\Psi(t)$ donnée par l'équation (4). Cependant, il est maintenant facile de déterminer la solution correspondant à n'importe quel ensemble de conditions initiales.

La matrice $\exp(\mathbf{A}t)$ Il faut se rappeler que la solution au problème de valeur initiale

$$x' = ax, \quad x(0) = x_0, \quad (17)$$

où a est une constante, est

$$x = x_0 \exp(at). \quad (18)$$

On considère maintenant le problème de valeur initiale correspondant pour un système $n \times n$, soit

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0, \quad (19)$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice dont les éléments sont des constantes. En appliquant les résultats de cette section au problème (19), on peut écrire sa solution sous la forme

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0, \quad (20)$$

où $\Phi(0) = \mathbf{I}$. La comparaison des problèmes (17) et (19) et de leurs solutions indique que la matrice $\Phi(t)$ pourrait être de type exponentiel. Cette possibilité va maintenant être explorée.

On peut représenter la fonction exponentielle scalaire $\exp(at)$ par la série de puissances

$$\exp(at) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!}, \quad (21)$$

qui converge pour tout t . On remplace maintenant le scalaire a par la matrice constante $\mathbf{A}$ de dimensions $n \times n$ et on considère la série correspondante

$$\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \dots \quad (22)$$

Chaque terme de la série (22) est une matrice de dimensions $n \times n$. On peut montrer que cette somme matricielle converge pour tout t lorsque $n \rightarrow \infty$. Ainsi, la série (22) a pour somme une nouvelle matrice, qu'on notera $\exp(\mathbf{A}t)$. Autrement dit,

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} \quad (23)$$

est analogue au développement (21) de la fonction scalaire $\exp(at)$.

En dérivant la série (23) terme à terme, on obtient

$$\frac{d}{dt}[\exp(\mathbf{A}t)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^{n-1}}{(n-1)!} = \mathbf{A} \left[\mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} \right] = \mathbf{A} \exp(\mathbf{A}t). \quad (24)$$

Ainsi, $\exp(\mathbf{A}t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt} \exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{A} \exp(\mathbf{A}t). \quad (25)$$

De plus, lorsque $t = 0$, $\exp(\mathbf{A}t)$ satisfait à la condition initiale

$$\exp(\mathbf{A}t)\big|_{t=0} = \mathbf{I}. \quad (26)$$

La matrice fondamentale Φ satisfait au même problème de valeur initiale que $\exp(\mathbf{A}t)$, soit

$$\Phi' = \mathbf{A}\Phi, \quad \Phi(0) = \mathbf{I}. \quad (27)$$

Ainsi, on peut déterminer $\exp(\mathbf{A}t)$ à l'aide de la matrice fondamentale $\Phi(t)$ et on peut écrire la solution au problème de valeur initiale (19) sous la forme

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0, \quad (28)$$

qui est similaire à la solution (18) du problème de valeur initiale (17).

Afin de mieux justifier l'écriture de $\exp(\mathbf{A}t)$ pour désigner la somme de la série (22), on doit démontrer que cette fonction matricielle admet effectivement les propriétés d'une fonction exponentielle. La façon de procéder est présentée au problème 15.

Les matrices diagonalisables La principale raison pour laquelle la résolution d'un système d'équations linéaires (algébriques ou différentielles) pose certaines difficultés est que les équations sont habituellement appariées ou couplées. En d'autres mots, certaines équations (ou toutes) comportent plus d'une variable inconnue. Ainsi, il vaut mieux résoudre simultanément les équations d'un système. Au contraire, si chacune des équations ne comporte qu'une seule variable, alors on peut résoudre chaque équation indépendamment des autres, ce qui est beaucoup plus simple. Cette observation laisse entendre qu'on pourrait résoudre le système d'équations en le transformant en un système équivalent non apparié ou découplé, donc dans lequel chaque équation ne contient qu'une seule variable inconnue. Cette façon de procéder exige la transformation de la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ en une matrice diagonale.

Les vecteurs propres sont utiles pour accomplir cette transformation. On suppose que la matrice $\mathbf{A}$ de dimensions $n \times n$ admet un ensemble de n vecteurs propres linéairement indépendants. Il faut se rappeler que ce sera certainement le cas si les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont toutes différentes ou si $\mathbf{A}$ est une matrice hermitienne. En supposant que $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ sont ces vecteurs propres et que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres correspondantes, on considère la matrice $\mathbf{T}$ dont les colonnes sont des vecteurs propres,

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Puisque les colonnes de $\mathbf{T}$ sont des vecteurs linéairement indépendants, $\det \mathbf{T} \neq 0$. Ainsi, $\mathbf{T}$ est non singulière et $\mathbf{T}^{-1}$ existe. Un calcul simple montre que les colonnes de la matrice $\mathbf{AT}$ sont simplement les vecteurs $\mathbf{A}\xi^{(1)}, \dots, \mathbf{A}\xi^{(n)}$. Puisque $\mathbf{A}\xi^{(k)} = \lambda_k \xi^{(k)}$, il s'ensuit que

$$\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \xi_1^{(1)} & \dots & \lambda_n \xi_1^{(n)} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 \xi_n^{(1)} & \dots & \lambda_n \xi_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{TD}, \quad (30)$$

où

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (31)$$

est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$. À partir de l'équation (30), on a

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}. \quad (32)$$

Ainsi, si les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ sont connus, on peut transformer $\mathbf{A}$ en une matrice diagonale à l'aide de la démarche présentée à l'équation (32). Cette démarche est une **homothétie** et on résume l'équation (32) en disant que $\mathbf{A}$ est **semblable** à la matrice diagonale $\mathbf{D}$ et $\mathbf{A}$ est dite **diagonalisable**. Il convient d'observer qu'une homothétie ne modifie pas les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et qu'elle transforme ses vecteurs propres en ceux de la base canonique $\mathbf{e}^{(1)}, \dots, \mathbf{e}^{(n)}$.

Si $\mathbf{A}$ est hermitienne, alors on trouve $\mathbf{T}^{-1}$ rapidement. On choisit les vecteurs propres $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ de $\mathbf{A}$ de sorte qu'ils soient normalisés, c'est-à-dire que $(\xi^{(i)}, \xi^{(i)}) = 1$ pour tout i , et qu'ils soient orthogonaux. Il est alors facile de vérifier que $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^*$. En d'autres mots, l'inverse de $\mathbf{T}$ est le même que sa matrice adjointe (la matrice transposée de sa matrice conjuguée complexe).

Finalement, on note que si $\mathbf{A}$ comporte moins de n vecteurs linéairement indépendants, alors il n'existe aucune matrice $\mathbf{T}$ telle que $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{D}$. Dans ce cas, $\mathbf{A}$ n'est semblable à aucune matrice diagonale et n'est pas diagonalisable.

Exemple 3

Considérez la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Trouvez la matrice $\mathbf{T}$ et montrez que $\mathbf{A}$ est diagonalisable.

Dans l'exemple 2 de la section 5.5, on a trouvé les valeurs propres et les vecteurs propres de $\mathbf{A}$, soit

$$r_1 = 3, \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad r_2 = -1, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Ainsi, la matrice de transformation $\mathbf{T}$ et son inverse $\mathbf{T}^{-1}$ sont

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Par conséquent, on a

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}. \quad (36)$$

Maintenant, on examine de nouveau le système

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (37)$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice constante. Dans les sections 5.5 et 5.6, on a vu comment résoudre ce type de système à partir de l'hypothèse selon laquelle $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$. Maintenant, un autre point de vue est présenté. Il est basé sur la diagonalisation de la matrice des coefficients $\mathbf{A}$.

Selon les résultats mentionnés plus haut, il est possible de diagonaliser $\mathbf{A}$ lorsque $\mathbf{A}$ comporte un ensemble de n vecteurs linéairement indépendants. Soit $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$ les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ correspondant aux valeurs propres $r_1, \dots, r_n$. On doit trouver la matrice de transformation $\mathbf{T}$ dont les colonnes sont $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(n)}$. Ensuite, en définissant une nouvelle variable dépendante $\mathbf{y}$ à l'aide de la relation

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}, \quad (38)$$

on obtient, à partir de l'équation (37),

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y}. \quad (39)$$

En multipliant par $\mathbf{T}^{-1}$, on obtient alors

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y} \quad (40)$$

ou, en utilisant l'équation (32),

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y}. \quad (41)$$

Il convient de se rappeler que $\mathbf{D}$ est la matrice diagonale ayant comme éléments diagonaux les valeurs propres $r_1, \dots, r_n$ de $\mathbf{A}$. Une matrice fondamentale pour le système (4) est la matrice diagonale (voir le problème 16)

$$\mathbf{Q}(t) = \exp(\mathbf{D}t) = \begin{pmatrix} e^{r_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{r_n t} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

On trouve alors une matrice fondamentale Ψ pour le système (37) à partir de $\mathbf{Q}$ par la transformation (38),

$$\Psi = \mathbf{T}\mathbf{Q}. \quad (43)$$

Autrement dit,

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)} e^{r_n t} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{r_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{r_n t} \end{pmatrix}. \quad (44)$$

L'équation (44) est la même que celle qu'on a obtenue dans la section 5.5. Ce processus de diagonalisation ne présente aucun avantage de calcul comparativement à la méthode de la section 5.5, car dans les deux cas, il faut calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice des coefficients du système d'équations différentielles. Néanmoins, il faut noter que le problème de résolution d'un système d'équations différentielles et le problème de diagonalisation d'une matrice sont mathématiquement similaires.

Exemple 4

Considérez de nouveau le système d'équations différentielles

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (45)$$

où $\mathbf{A}$ est donnée par l'équation (33). En utilisant la transformation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, où $\mathbf{T}$ est donnée par l'équation (35), on peut réduire le système (45) au système diagonal

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{y}. \quad (46)$$

On obtient une matrice fondamentale pour le système (46) et on la transforme ensuite afin d'obtenir une matrice fondamentale pour le système original (45).

En évaluant les puissances de $\mathbf{D}$, on trouve

$$\mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \dots \quad (47)$$

Par conséquent, il s'ensuit, à partir de l'équation (23), que $\exp(\mathbf{D}t)$ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont e^{3t} et e^{-t} , c'est-à-dire

$$e^{\mathbf{D}t} = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Finalement, on obtient la matrice fondamentale recherchée $\Psi(t)$ en multipliant $\mathbf{T}$ et $\exp(\mathbf{D}t)$:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Il faut noter que cette matrice fondamentale est la même que celle qu'on a trouvée à l'exemple 1.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 10, procédez comme suit.

- a) Trouvez une matrice fondamentale pour le système d'équations.
 b) Dans chaque cas, trouvez aussi la matrice fondamentale $\Phi(t)$ satisfaisant à $\Phi(0) = \mathbf{I}$.

1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

11. Résolvez le problème de valeur initiale

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

en utilisant la matrice fondamentale $\Phi(t)$ trouvée au problème 3.

12. Résolvez le problème de valeur initiale

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant la matrice fondamentale $\Phi(t)$ trouvée au problème 6.

13. Montrez que $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(t_0)$, où $\Phi(t)$ et $\Psi(t)$ sont définies dans cette section.

14. On a trouvé la matrice fondamentale $\Phi(t)$ pour le système (3) de l'exemple 2. Montrez que $\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t+s)$ en multipliant $\Phi(t)$ et $\Phi(s)$.

15. Soit $\Phi(t)$ la matrice fondamentale satisfaisant à $\Phi' = \mathbf{A}\Phi$, $\Phi(0) = \mathbf{I}$. Dans ce manuel, on a aussi noté cette matrice $\exp(\mathbf{A}t)$. Dans ce problème, on montre que Φ admet les principales propriétés algébriques associées à la fonction exponentielle.

a) Montrez que $\Phi(t)\Phi(s) = \Phi(t+s)$, autrement dit que $\exp(\mathbf{A}t)\exp(\mathbf{A}s) = \exp[\mathbf{A}(t+s)]$.

Suggestion: Montrez que si s est fixé et que t varie, alors $\Phi(t)\Phi(s)$ et $\Phi(t+s)$ satisfont au problème de valeur initiale $\mathbf{Z}' = \mathbf{A}\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}(0) = \Phi(s)$.

b) Montrez que $\Phi(t)\Phi(-t) = \mathbf{I}$, autrement dit que $\exp(\mathbf{A}t)\exp[\mathbf{A}(-t)] = \mathbf{I}$. Ensuite, montrez que $\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$.

c) Montrez que $\Phi(t-s) = \Phi(t)\Phi^{-1}(s)$.

16. Montrez que si $\mathbf{A}$ est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $a_1, a_2, \dots, a_n$, alors $\exp(\mathbf{A}t)$ est aussi une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont $\exp(a_1t), \exp(a_2t), \dots, \exp(a_nt)$.

17. Considérez un oscillateur qui satisfait au problème de valeur initiale

$$u'' + \omega^2 u = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0. \quad (\text{i})$$

a) Posez $x_1 = u$ et $x_2 = u'$, puis réécrivez les équations (i) sous la forme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0. \quad (\text{ii})$$

b) En utilisant la série (23), montrez que

$$\exp \mathbf{A}t = \mathbf{I} \cos \omega t + \mathbf{A} \frac{\sin \omega t}{\omega}. \quad (\text{iii})$$

c) Trouvez la solution au problème de valeur initiale (ii).

5.8 Les valeurs propres multiples

Nous allons conclure notre étude des systèmes homogènes linéaires à coefficients constants

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

par une discussion du cas où la matrice $\mathbf{A}$ possède une valeur propre de multiplicité supérieure à un. Il convient de se rappeler que dans la section 5.3, on a souligné qu'une valeur propre multiple de multiplicité $m \geq 2$ peut admettre une multiplicité géométrique inférieure à m . Autrement dit, il peut y avoir moins de m vecteurs propres linéairement indépendants associés à cette valeur propre. L'exemple suivant illustre cette possibilité.

Exemple 1

Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Les valeurs propres r et les vecteurs propres ξ satisfont à l'équation $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}$ ou

$$\begin{pmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Les valeurs propres sont les racines de l'équation

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0. \quad (4)$$

Ainsi, les deux valeurs propres sont $r_1 = 2$ et $r_2 = 2$. Autrement dit, la valeur propre 2 est de multiplicité deux.

Pour déterminer les vecteurs propres, il faut revenir à l'équation (3) et remplacer r par 2, d'où

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Ainsi, on obtient la condition unique $\xi_1 + \xi_2 = 0$, qui détermine ξ_2 en fonction de ξ_1 ou inversement. Donc, un vecteur propre correspondant à la valeur propre $r = 2$ est

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

ou tout multiple non nul de ce vecteur. Il faut noter qu'il n'y a qu'un seul vecteur linéairement indépendant qui correspond à la double valeur propre.

En revenant au système (1), supposez que $r = \rho$ est une racine de multiplicité k de l'équation

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \quad (7)$$

Alors, ρ est une valeur propre de multiplicité k de la matrice $\mathbf{A}$. Dans ce cas, deux possibilités se présentent: soit qu'il y a k vecteurs linéairement indépendants correspondant à la valeur propre ρ , soit qu'il y en a moins de k .

Dans le premier cas, on a $\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}$, les k vecteurs linéairement indépendants associés à la valeur propre ρ de multiplicité k . Alors, $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)} e^{\rho t}, \dots, \mathbf{x}^{(k)}(t) = \xi^{(k)} e^{\rho t}$ sont k solutions linéairement indépendantes à l'équation (1). Ainsi, dans cette situation, il importe peu que

la valeur propre $r = \rho$ soit multiple. Il existe encore un ensemble fondamental de solutions à l'équation (1) de la forme ξe^{rt} . Ce cas survient toujours quand la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ est hermitienne (ou réelle et symétrique).

Cependant, si la matrice des coefficients n'est pas hermitienne, alors il pourrait y avoir moins de k vecteurs indépendants correspondant à une valeur propre ρ de multiplicité k et, le cas échéant, il y aura moins de k solutions à l'équation (1) de la forme ξe^{rt} associée à cette valeur propre. Par conséquent, pour construire la solution générale à l'équation (1), il faut trouver d'autres solutions de forme différente. Rappelez-vous qu'une situation similaire s'est produite dans la section 3.5 pour l'équation linéaire $ay'' + by' + cy = 0$ lorsque l'équation caractéristique admettait une racine double r . Dans ce cas, on a trouvé une solution exponentielle $y_1(t) = te^{rt}$, mais une seconde solution indépendante avait la forme $y_2(t) = te^{rt}$. En se rappelant ce résultat, considérons l'exemple suivant.

Exemple 2

Trouvez un ensemble fondamental de solutions à

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (8)$$

et tracez un portrait de phase pour ce système.

La figure 5.8.1 présente un champ de direction pour le système (8). À partir de cette figure, il semble que toutes les solutions non nulles s'éloignent de l'origine.

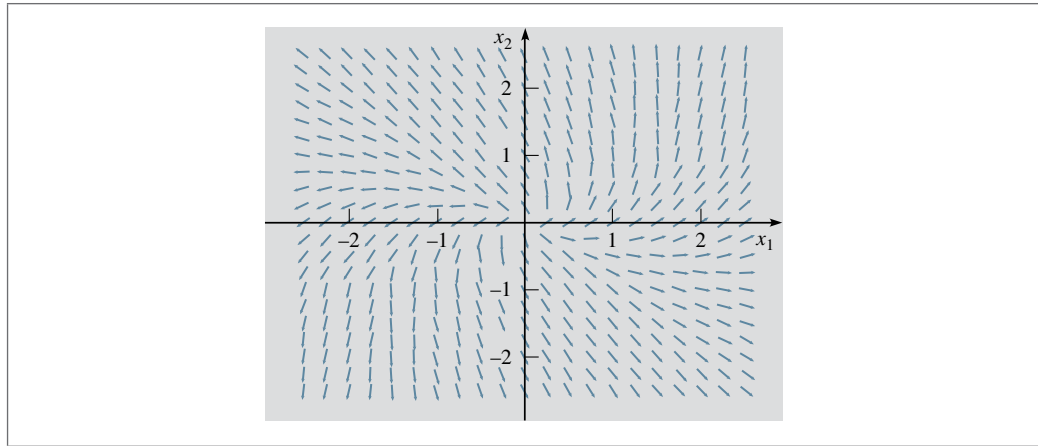


Figure 5.8.1 Champ de direction pour le système (8).

Pour résoudre le système, il faut d'abord noter que la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ est la même que celle de l'exemple 1. Ainsi, on sait que $r = 2$ est une valeur propre double et qu'elle admet un seul vecteur propre correspondant, par exemple $\xi^T = (1, -1)$. Par conséquent, une solution au système (8) est

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad (9)$$

mais il n'y a pas de deuxième solution de la forme $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$.

En se basant sur la démarche utilisée pour les équations linéaires du deuxième ordre de la section 3.5, on tente de trouver une deuxième solution au système (8) de la forme

$$\mathbf{x} = \xi t e^{2t}, \quad (10)$$

où ξ est un vecteur constant à déterminer. En substituant $\mathbf{x}$ dans l'équation (8), on obtient

$$2\xi t e^{2t} + \xi e^{2t} - \mathbf{A}\xi t e^{2t} = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Pour satisfaire à l'équation (11) quel que soit t , les coefficients de $t e^{2t}$ et de e^{2t} doivent tous les deux être nuls. À partir du terme dans e^{2t} , on trouve

$$\xi = \mathbf{0}. \quad (12)$$

► Ainsi, il n'existe aucune solution non nulle au système (8) de la forme (10).

Puisque l'équation (11) contient des termes en te^{2t} et e^{2t} , il semble que, en plus de ξte^{2t} , la seconde solution doit admettre un terme de la forme ηe^{2t} . En d'autres mots, on suppose que

$$\mathbf{x} = \xi te^{2t} + \eta e^{2t}, \quad (13)$$

où ξ et η sont des vecteurs constants. En substituant cette expression à $\mathbf{x}$ dans l'équation (8), on obtient

$$2\xi te^{2t} + (\xi + 2\eta)e^{2t} = \mathbf{A}(\xi te^{2t} + \eta e^{2t}). \quad (14)$$

En égalisant les coefficients de te^{2t} et de e^{2t} dans chaque membre de l'équation (14), on obtient les conditions

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\xi = \mathbf{0} \quad (15)$$

et

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi \quad (16)$$

pour déterminer ξ et η . L'équation (15) est satisfaite si ξ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ correspondant à la valeur propre $r = 2$, autrement dit $\xi^T = (1, -1)$. Puisque $\det(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$ est nul, on doit s'attendre à ne pas pouvoir résoudre l'équation (16). Cependant, cela n'est pas nécessairement le cas puisque, pour certains vecteurs ξ , il est possible de résoudre l'équation (16). En fait, la matrice augmentée pour l'équation (16) est

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

La deuxième ligne de cette matrice est proportionnelle à la première, donc le système est compatible. On obtient

$$-\eta_1 - \eta_2 = 1.$$

Par conséquent, si $\eta_1 = k$, où k est arbitraire, alors $\eta_2 = -k - 1$. Si on écrit

$$\eta = \begin{pmatrix} k \\ -1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

alors en substituant ξ et η dans l'équation (13), on obtient

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \quad (18)$$

Le dernier terme de l'équation (18) est simplement un multiple de la première solution $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ et on peut l'ignorer, mais les deux premiers termes constituent une nouvelle solution :

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}. \quad (19)$$

Du fait que $W[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}](t) = -e^{4t}$, $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ forment un ensemble fondamental de solutions au système (8). La solution générale est

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

L'analyse du graphique de la solution (20) est plus compliquée que dans les exemples précédents. Il est clair que $\mathbf{x}$ devient non borné lorsque $t \rightarrow \infty$ et que $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $t \rightarrow -\infty$. Si c_1 et c_2 sont non nuls, alors on a, le long des trajectoires,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-c_1 - c_2 t - c_2}{c_1 + c_2 t} = -1.$$

Par conséquent, lorsque $t \rightarrow -\infty$, chaque trajectoire s'approche de l'origine tangentiellement à la droite $x_2 = -x_1$ déterminée par le vecteur propre; ce comportement est clairement évident dans la figure 5.8.2 a) à la page suivante. De plus, lorsque $t \rightarrow \infty$, la pente de chaque trajectoire s'approche également de -1 . Toutefois, il est possible de montrer que les trajectoires ne s'approchent pas des asymptotes lorsque $t \rightarrow \infty$. Plusieurs trajectoires du système (8) sont illustrées dans la figure 5.8.2 a) et certains graphiques typiques de x_1 en fonction de t sont montrés dans la figure 5.8.2 b). Le modèle des

- ▶ trajectoires de cette figure caractérise les systèmes de deux équations du premier ordre $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ admettant des valeurs propres identiques et un seul vecteur propre indépendant. Dans ce cas, l'origine est appelée un **nœud impropre**. Si les valeurs propres sont négatives, alors les trajectoires sont similaires, mais elles sont traversées par l'intérieur. Un nœud impropre est asymptotiquement stable ou instable, selon que les valeurs propres sont négatives ou positives.

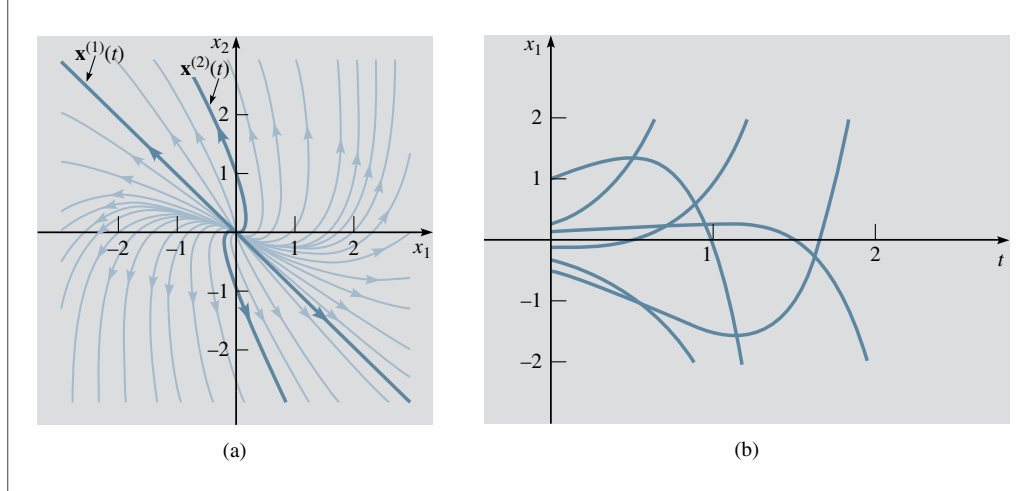


Figure 5.8.2 a) Trajectoires du système (8) ; l'origine est un nœud impropre. b) Graphiques de x_1 en fonction de t pour le système (8).

Une différence entre un système de deux équations du premier ordre et une seule équation du deuxième ordre ressort de l'exemple précédent. Il convient de se rappeler que, pour une équation linéaire du deuxième ordre admettant une racine multiple r_1 à son équation caractéristique, un terme $ce^{r_1 t}$ dans la seconde solution n'est pas requis puisqu'il s'agit d'un multiple de la première solution. Par ailleurs, pour un système à deux équations du premier ordre, le terme $\eta e^{r_1 t}$ de l'équation (13) avec $r_1 = 2$ n'est pas un multiple de la première solution $\xi e^{r_1 t}$, donc le terme $\eta e^{r_1 t}$ doit être conservé.

L'exemple 2 est tout à fait typique du cas général où il existe une valeur propre double et un seul vecteur propre correspondant. On se réfère de nouveau au système (1) et on suppose que $r = \rho$ est une double valeur propre de $\mathbf{A}$, mais qu'il n'y a qu'un seul vecteur propre correspondant. Alors, une solution [similaire à l'équation (9)] est

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi e^{\rho t}, \quad (21)$$

où ξ satisfait à

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I})\xi = \mathbf{0}. \quad (22)$$

En procédant comme dans l'exemple 2, on trouve une deuxième solution [similaire à l'équation (9)]

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi t e^{\rho t} + \eta e^{\rho t}, \quad (23)$$

où ξ satisfait à l'équation (22) et η est déterminé à partir de

$$(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I})\eta = \xi. \quad (24)$$

Même si $\det(\mathbf{A} - \rho \mathbf{I}) = 0$, on peut montrer qu'il est toujours possible de résoudre l'équation (24) pour déterminer η . Le vecteur η est le **vecteur propre généralisé** correspondant à la valeur propre ρ .

Les matrices fondamentales Comme nous l'avons vu dans la section 5.7, les matrices fondamentales sont obtenues en disposant des solutions linéairement indépendantes en colonnes. Par exemple, on peut créer une matrice fondamentale pour le système (8) respectivement à

partir des solutions $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ et $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ des équations (9) et (19) :

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -te^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -1-t \end{pmatrix}. \quad (25)$$

De plus, on peut facilement trouver la matrice Φ qui satisfait à $\Phi(0) = \mathbf{I}$ à partir de la relation $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(0)$. Pour l'équation (8), on a

$$\Psi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Psi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \Psi(t)\Psi^{-1}(0) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1-t & -t \\ t & 1+t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

Cette dernière matrice est aussi la matrice exponentielle $\exp(\mathbf{A}t)$.

Les formes de Jordan On peut diagonaliser une matrice $\mathbf{A}$ de dimensions $n \times n$ comme on l'a vu dans la section 5.7 uniquement si elle admet n vecteurs propres linéairement indépendants. S'il y en a moins (à cause des valeurs propres multiples), alors on peut toujours transformer $\mathbf{A}$ en une matrice diagonale par blocs qui constitue sa forme de Jordan⁷; celle-ci a les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sur sa diagonale principale, des 1 en diverses positions au-dessus de la diagonale principale et des 0 ailleurs.

On considère de nouveau la matrice $\mathbf{A}$ donnée par l'équation (2). On forme la matrice de transformation $\mathbf{T}$ avec l'unique vecteur propre ξ à partir de l'équation (6) dans sa première colonne et le vecteur propre généralisé η à partir de l'équation (17) avec $k=0$ dans la deuxième colonne. Ensuite, $\mathbf{T}$ et son inverse sont donnés par

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Comme on peut le vérifier, il s'ensuit que

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathbf{J}. \quad (29)$$

La matrice $\mathbf{J}$ de l'équation (29) est la forme de Jordan de $\mathbf{A}$. Elle est typique de toutes les formes de Jordan, car elle a un 1 au-dessus de la diagonale principale dans la colonne correspondant au vecteur propre absent (et elle est remplacée dans $\mathbf{T}$ par le vecteur propre généralisé).

Si on recommence à partir de l'équation (1),

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

la transformation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$, où $\mathbf{T}$ est donnée par l'équation (28), mène au système

$$\mathbf{y}' = \mathbf{J}\mathbf{y}, \quad (30)$$

où $\mathbf{J}$ est donnée par l'équation (29). Explicitement, le système (30) est

$$y_1' = 2y_1 + y_2, \quad y_2' = 2y_2. \quad (31)$$

On peut facilement résoudre ces équations dans l'ordre inverse. Ainsi, on obtient

$$y_2 = c_1 e^{2t}, \quad y_1 = c_1 t e^{2t} + c_2 e^{2t}. \quad (32)$$

7. Camille Jordan (1838-1921), professeur à l'École Polytechnique et au Collège de France, a largement contribué à l'analyse, à la topologie et particulièrement à l'algèbre. La forme de Jordan d'une matrice a été abordée dans son influent ouvrage intitulé *Traité des substitutions et des équations algébriques*, qui a été publié en 1870.

Par conséquent, deux solutions indépendantes au système (30) sont

$$\mathbf{y}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{y}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad (33)$$

et la matrice fondamentale correspondante est

$$\hat{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Puisque $\hat{\Psi}(0) = \mathbf{I}$, on peut aussi déterminer la matrice de l'équation (34) avec $\exp(\mathbf{J}t)$. On obtient le même résultat en calculant les puissances de $\mathbf{J}$ et en les substituant dans la série exponentielle (voir les problèmes 20 à 22). Afin d'obtenir une matrice fondamentale pour le système initial, on forme maintenant le produit

$$\Psi(t) = \mathbf{T} \exp(\mathbf{J}t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -e^{2t} - te^{2t} \end{pmatrix}, \quad (35)$$

qui est le même que la matrice fondamentale donnée dans l'équation (25).

Nous ne discuterons pas des systèmes $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ de dimensions $n \times n$ plus en détail ici. Quand n est grand, il est possible qu'il existe des valeurs propres de multiplicité m élevée, peut-être avec une multiplicité géométrique q beaucoup plus petite, ce qui produit $m - q$ vecteurs propres généralisés. Lorsque $n \geq 4$, il peut aussi y avoir des valeurs propres complexes multiples. Une discussion⁸ complète de la forme de Jordan d'une matrice générale de dimensions $n \times n$ exige une connaissance plus avancée de l'algèbre linéaire que celle présumée de la plupart des lecteurs de ce manuel. Les problèmes 18 à 22 vous demandent d'explorer l'utilisation des formes de Jordan pour les systèmes à trois équations.

La quantité de calculs requise pour l'analyse d'un système général de dimensions $n \times n$ peut être trop élevée pour qu'on les fasse à la main, même si n n'est pas plus grand que 3 ou 4. Par conséquent, on devrait utiliser des logiciels appropriés dans la plupart des cas. Cela n'élimine pas toutes les difficultés, loin de là, mais cela rend de nombreux problèmes beaucoup plus faciles à résoudre. Enfin, pour un ensemble d'équations produites par la modélisation d'un système physique, il est probable que certains des éléments de la matrice de coefficients $\mathbf{A}$ proviennent de la mesure d'une grandeur physique quelconque. Les incertitudes inévitables associées à de telles mesures entraînent des incertitudes dans les valeurs propres de $\mathbf{A}$. Par exemple, dans un tel cas, il peut être difficile de déterminer si deux valeurs propres sont vraiment égales ou si elles sont simplement près l'une de l'autre.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 4, procédez comme suit.

- Tracez un champ de direction et quelques trajectoires.
- Décrivez le comportement des solutions lorsque $t \rightarrow \infty$.
- Trouvez la solution générale au système d'équations.

① 1. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

② 2. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

8. Pour des exemples, voir les manuels présentés dans les références à la fin du chapitre.

$$\textcircled{u} \quad 3. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$\textcircled{u} \quad 4. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

■ Dans les problèmes 5 et 6, trouvez la solution générale au système d'équations.

$$5. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$6. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

■ Dans les problèmes 7 à 10, procédez comme suit.

a) Trouvez la solution au problème de valeur initiale.

b) Tracez la trajectoire de la solution dans le plan x_1x_2 ainsi que le graphe de x_1 en fonction de t .

$$\textcircled{u} \quad 7. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{u} \quad 8. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{u} \quad 9. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{u} \quad 10. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

■ Dans les problèmes 11 et 12, procédez comme suit.

a) Trouvez la solution au problème de valeur initiale.

b) Tracez la trajectoire correspondante dans l'espace $x_1x_2x_3$ ainsi que le graphe de x_1 en fonction de t .

$$\textcircled{u} \quad 11. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{u} \quad 12. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

■ Dans les problèmes 13 et 14, résolvez le système d'équations en utilisant la méthode du problème 19 de la section 5.5. Supposez que $t > 0$.

$$13. \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$14. \quad t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

15. Montrez que toutes les solutions au système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

tendent vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$ si et seulement si $a + d < 0$ et $ad - bc > 0$. Comparez ce résultat à celui du problème 37 de la section 3.5.

16. Considérez de nouveau le circuit électrique du problème 26 de la section 5.6. Ce circuit est décrit par le système d'équations différentielles

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}.$$

- a) Montrez que les valeurs propres sont réelles et identiques si $L = 4R^2C$.
 b) Supposez que $R = 1$ ohm, $C = 1$ farad et $L = 4$ henrys. Supposez également que $I(0) = 1$ ampère et $V(0) = 2$ volts. Trouvez $I(t)$ et $V(t)$.
 17. Considérez de nouveau le système

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (\text{i})$$

étudié dans l'exemple 2. Dans cet exemple, on a trouvé que $\mathbf{A}$ admet une double valeur propre $r_1 = r_2 = 2$ avec un seul vecteur propre indépendant $\xi^{(1)} = (1, -1)^T$, ou tout multiple non nul de ce vecteur. Par conséquent, une solution au système (i) est $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \xi^{(1)}e^{2t}$, et une seconde solution indépendante a la forme

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi te^{2t} + \eta e^{2t},$$

où ξ et η satisfont à

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi. \quad (\text{ii})$$

Dans l'exemple, on a résolu la première équation pour déterminer ξ , puis la seconde équation pour déterminer η . On vous demande maintenant de procéder dans l'ordre inverse.

- a) Montrez que η satisfait à $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2\eta = \mathbf{0}$.
 b) Montrez que $(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$. Par conséquent, on peut choisir arbitrairement le vecteur propre généralisé η , sauf qu'il doit être indépendant de $\xi^{(1)}$.
 c) Posez $\eta = (0, -1)^T$. Ensuite, déterminez ξ à partir de la seconde des équations (ii) et notez que $\xi = (1, -1)^T = \xi^{(1)}$. Ce choix de η reproduit la solution trouvée dans l'exemple 2.
 d) Posez $\eta = (0, 1)^T$ et déterminez le vecteur propre correspondant ξ .
 e) Posez $\eta = (k_1, k_2)^T$, où k_1 et k_2 sont des nombres arbitraires. Déterminez ensuite ξ . Quel est le lien entre ce vecteur et le vecteur propre $\xi^{(1)}$?

- **Les valeurs propres de multiplicité trois** Si la matrice $\mathbf{A}$ possède une valeur propre de multiplicité trois, alors il peut y avoir un, deux ou trois vecteurs propres linéairement indépendants correspondants. La solution générale au système $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ est différente selon le nombre de vecteurs propres correspondant à la valeur propre triple. Comme on l'a mentionné dans ce manuel, aucun problème ne se pose s'il y a trois vecteurs propres indépendants, puisqu'il existe alors trois solutions indépendantes de la forme $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$. Les deux problèmes suivants illustrent la marche à suivre de la solution pour une valeur propre triple admettant respectivement un et deux vecteurs propres.

18. Considérez le système

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (\text{i})$$

- a) Montrez que $r = 2$ est une valeur propre de multiplicité trois de la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ et qu'il n'y a qu'un seul vecteur propre correspondant, soit

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- b) À l'aide de l'information contenue dans la partie a), trouvez une solution $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ au système (i). Il n'y a aucune autre solution de la forme exponentielle $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$.

- c) Pour trouver une deuxième solution, supposez que $\mathbf{x} = \xi te^{2t} + \eta e^{2t}$. Montrez que ξ et η satisfont aux équations

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi.$$

Puisqu'on a déjà trouvé ξ dans la partie a), résolvez la seconde équation pour η . Omettez le multiple de $\xi^{(1)}$ qui apparaît en η , puisqu'il mène uniquement à un multiple de la première solution $\mathbf{x}^{(1)}$. Ensuite, écrivez une deuxième solution $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ au système (i).

- d) Pour trouver une troisième solution, supposez que $\mathbf{x} = \xi(t^2/2)e^{2t} + \eta te^{2t} + \zeta e^{2t}$. Montrez que ξ , η et ζ satisfont aux équations

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi, \quad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\zeta = \eta.$$

Les deux premières équations sont les mêmes que celles de la partie c). Donc, résolvez la troisième équation pour déterminer ζ en omettant de nouveau le multiple de $\xi^{(1)}$ qui apparaît. Ensuite, écrivez une troisième solution $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ au système (i).

- e) Écrivez une matrice fondamentale $\Psi(t)$ pour le système (i).
f) Trouvez une matrice $\mathbf{T}$ ayant le vecteur propre $\xi^{(1)}$ dans la première colonne et les vecteurs propres généralisés η et ζ dans les deuxième et troisième colonnes. Ensuite, trouvez $\mathbf{T}^{-1}$ et formez le produit $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. La matrice $\mathbf{J}$ est la forme de Jordan de $\mathbf{A}$.

19. Considérez le système

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}. \quad (\text{i})$$

- a) Montrez que $r = 1$ est une valeur propre triple de la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ et qu'il n'y a que deux vecteurs linéairement indépendants qu'on peut choisir comme

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad (\text{ii})$$

Trouvez deux solutions linéairement indépendantes $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ et $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ à l'équation (i).

- b) Pour trouver une troisième solution, supposez que $\mathbf{x} = \xi te^t + \eta e^t$. Ensuite, montrez que ξ et η doivent satisfaire à

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \quad (\text{iii})$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})\eta = \xi. \quad (\text{iv})$$

- c) L'équation (iii) est satisfaite si ξ est un vecteur propre. Donc, on peut choisir ξ de façon qu'il soit une combinaison linéaire appropriée de $\xi^{(1)}$ et de $\xi^{(2)}$ afin que l'équation (iv) soit soluble, puis résoudre cette équation pour déterminer η . Cependant, on va procéder d'une manière différente et suivre la démarche du problème 17. D'abord, montrez que η satisfait à

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2\eta = \mathbf{0}.$$

De plus, montrez que $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$. Par conséquent, on peut choisir η arbitrairement, sauf qu'il doit être indépendant de $\xi^{(1)}$ et de $\xi^{(2)}$.

- d) Un choix pratique pour η est $\eta = (0, 0, 1)^T$. Trouvez le vecteur ξ correspondant à partir de l'équation (iv). Vérifiez que ξ est un vecteur propre.
e) Trouvez une matrice fondamentale $\Psi(t)$ pour le système (i).
f) Formez une matrice $\mathbf{T}$ avec le vecteur propre $\xi^{(1)}$ dans la première colonne. Dans les deux autres colonnes, mettez le vecteur propre ξ ainsi que le vecteur propre généralisé η . Trouvez $\mathbf{T}^{-1}$ et trouvez le produit $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. La matrice $\mathbf{J}$ est la forme de Jordan de $\mathbf{A}$.

20. Soit $\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, où λ est un nombre réel arbitraire.

- a) Trouvez $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ et $\mathbf{J}^4$.

- b) Montrez par induction que $\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.
 c) Déterminez $\exp(\mathbf{J}t)$.
 d) Utilisez $\exp(\mathbf{J}t)$ pour résoudre le problème de valeur initiale $\mathbf{x}' = \mathbf{J}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$.

21. Soit

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

où λ est un nombre réel arbitraire.

- a) Trouvez $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ et $\mathbf{J}^4$.
 b) Montrez par induction que

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

- c) Déterminez $\exp(\mathbf{J}t)$.
 d) Vous devez noter que si vous choisissez $\lambda = 1$, alors la matrice $\mathbf{J}$ de ce problème est la même que la matrice $\mathbf{J}$ du problème 19 f). À l'aide de la matrice $\mathbf{T}$ du problème 19 f), trouvez le produit $\mathbf{T} \exp(\mathbf{J}t)$ avec $\lambda = 1$. La matrice résultante est-elle la même que la matrice fondamentale $\Psi(t)$ du problème 9 e)? Si ce n'est pas le cas, expliquez cette différence.

22. Soit

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

où λ est un nombre réel arbitraire.

- a) Trouvez $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ et $\mathbf{J}^4$.
 b) Montrez par induction que

$$\mathbf{J}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & [n(n-1)/2]\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

- c) Déterminez $\exp(\mathbf{J}t)$.
 d) Vous devez noter que si vous choisissez $\lambda = 2$, alors la matrice $\mathbf{J}$ de ce problème est la même que la matrice $\mathbf{J}$ du problème 18 f). À l'aide de la matrice $\mathbf{T}$ du problème 18 f), trouvez le produit $\mathbf{T} \exp(\mathbf{J}t)$ avec $\lambda = 2$. Il convient de préciser que la matrice résultante est la même que la matrice fondamentale $\Psi(t)$ du problème 18 e).

5.9 Les systèmes linéaires non homogènes

Dans cette section, nous aborderons le système non homogène

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (1)$$

où la matrice $\mathbf{P}(t)$ de dimensions $n \times n$ et le vecteur $\mathbf{g}(t)$ de dimensions $n \times 1$ sont continus pour $\alpha < t < \beta$. Si on considère le même argument que dans la section 3.6 (voir également le problème 16 de cette section), on peut exprimer la solution générale à l'équation (1) ainsi :

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t) + \mathbf{v}(t), \quad (2)$$

où $c_1 \mathbf{x}^{(1)}(t) + \dots + c_n \mathbf{x}^{(n)}(t)$ est la solution générale au système homogène $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, et $\mathbf{v}(t)$ est une solution particulière au système non homogène (1). Nous décrirons brièvement plusieurs méthodes permettant de déterminer $\mathbf{v}(t)$.

La diagonalisation On commence par des systèmes de la forme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (3)$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice constante diagonalisable de dimensions $n \times n$. En diagonalisant la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ (voir la section 5.7), on peut transformer l'équation (3) en un système d'équations facile à résoudre.

Soit $\mathbf{T}$ la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ de $\mathbf{A}$. Définissez une nouvelle variable dépendante $\mathbf{y}$ ainsi :

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}. \quad (4)$$

Ensuite, en substituant $\mathbf{x}$ dans l'équation (3), on obtient

$$\mathbf{T}\mathbf{y}' = \mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} + \mathbf{g}(t).$$

On multiplie par $\mathbf{T}^{-1}$, et il s'ensuit que

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{h}(t), \quad (5)$$

où $\mathbf{h}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t)$ et où $\mathbf{D}$ est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres $r_1, \dots, r_n$ de $\mathbf{A}$. Celles-ci sont disposées dans le même ordre que les vecteurs propres correspondants $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ qui apparaissent dans les colonnes de $\mathbf{T}$. L'équation (5) est un système à n équations non appariées (découplées) pour $y_1(t), \dots, y_n(t)$. Par conséquent, on peut résoudre les équations séparément. De manière explicite, l'équation (5) est de la forme

$$y_j'(t) = r_j y_j(t) + h_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad (6)$$

où $h_j(t)$ est une combinaison linéaire de $g_1(t), \dots, g_n(t)$. L'équation (6) est une équation linéaire du premier ordre et on peut la résoudre à l'aide des méthodes de la section 2.3. En fait, on a

$$y_j(t) = e^{r_j t} \int_0^t e^{-r_j s} h_j(s) ds + c_j e^{r_j t}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (7)$$

où les c_j sont des constantes arbitraires. Finalement, on obtient la solution $\mathbf{x}$ à l'équation (3) à partir de l'équation (4). Lorsqu'il est multiplié par la matrice de transformation $\mathbf{T}$, le deuxième terme du second membre de l'équation (7) donne la solution générale au système homogène $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, tandis que le premier terme du second membre de l'équation (7) donne une solution particulière au système non homogène (3).

Exemple 1

Trouvez la solution générale au système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (8)$$

En procédant comme dans la section 5.5, on trouve que les valeurs propres de la matrice des coefficients sont $r_1 = -3$ et $r_2 = -1$, et les vecteurs propres correspondants sont

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Ainsi, la solution générale au système homogène est

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}. \quad (10)$$

Avant d'écrire la matrice $\mathbf{T}$ des vecteurs propres, on doit se rappeler qu'il faut trouver $\mathbf{T}^{-1}$. Comme la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ est réelle et symétrique, on peut donc utiliser le résultat énoncé juste avant l'exemple 3 de la section 5.7 : $\mathbf{T}^{-1}$ est simplement la matrice adjointe ou (puisque $\mathbf{T}$ est réelle) la matrice

▶ transposée de $\mathbf{T}$, pourvu que les vecteurs propres de $\mathbf{A}$ soient normalisés de sorte que $(\xi, \xi) = 1$. Ainsi, en normalisant $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$, on obtient

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Soit $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$. En faisant la substitution pour $\mathbf{x}$ dans l'équation (8), on obtient le système d'équations suivant en ce qui concerne la nouvelle variable dépendante $\mathbf{y}$:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{D}\mathbf{y} + \mathbf{T}^{-1}\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2e^{-t} - 3t \\ 2e^{-t} + 3t \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_1' + 3y_1 &= \sqrt{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}}t, \\ y_2' + y_2 &= \sqrt{2}e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}t. \end{aligned} \quad (13)$$

Chacune des équations (13) est une équation linéaire du premier ordre et on peut donc les résoudre à l'aide des méthodes énoncées à la section 2.3. Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} - \frac{3}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{t}{3} \right) - \frac{1}{9} \right] + c_1 e^{-3t}, \\ y_2 &= \sqrt{2}te^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}(t-1) + c_2 e^{-t}. \end{aligned} \quad (14)$$

Finalement, on écrit la solution en fonction des variables originales :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + \left[(c_2/\sqrt{2}) + \frac{1}{2} \right] e^{-t} + t - \frac{4}{3} + te^{-t} \\ -(c_1/\sqrt{2})e^{-3t} + \left[(c_2/\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \right] e^{-t} + 2t - \frac{5}{3} + te^{-t} \end{pmatrix} \\ &= k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

où $k_1 = c_1/\sqrt{2}$ et $k_2 = c_2/\sqrt{2}$. Les deux premiers termes du second membre de l'équation (15) constituent la solution générale au système homogène correspondant à l'équation (8). Les autres termes sont une solution particulière au système non homogène.

Si la matrice des coefficients $\mathbf{A}$ de l'équation (3) n'est pas diagonalisable (à cause de valeurs propres multiples et d'un nombre insuffisant de vecteurs propres indépendants), il est néanmoins possible de la réduire à une forme de Jordan $\mathbf{J}$ au moyen d'une matrice de transformation appropriée $\mathbf{T}$ comportant des vecteurs propres ainsi que des vecteurs propres généralisés. Dans ce cas, les équations différentielles en $y_1, \dots, y_n$ ne sont pas vraiment non appariées puisque certaines lignes de $\mathbf{J}$ comportent deux éléments non nuls, une valeur propre dans la position diagonale et un 1 dans la position adjacente à la droite. Cependant, il est toujours possible de résoudre les équations en $y_1, \dots, y_n$ de manière consécutive en commençant par déterminer y_n . Ensuite, on peut trouver la solution au système original à l'aide de la relation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{y}$.

Les coefficients indéterminés Une deuxième manière de trouver une solution particulière au système non homogène (1) consiste à appliquer la méthode des coefficients indéterminés. Pour utiliser cette méthode, on doit supposer la forme de la solution avec une partie ou la totalité des coefficients non précisés, puis tenter de déterminer ces coefficients de manière à satisfaire à

l'équation différentielle. En pratique, on ne peut appliquer cette méthode que si les coefficients de la matrice $\mathbf{P}$ sont constants et si les composantes de $\mathbf{g}$ sont des fonctions polynomiales, exponentielles ou sinusoïdales ou encore des sommes ou des produits de celles-ci. Dans ces cas, on peut deviner la forme appropriée de la solution de façon systématique. La démarche pour choisir la forme de la solution est essentiellement la même que celle qui a été donnée à la section 3.6 pour les équations linéaires du deuxième ordre. La principale différence est illustrée par le cas d'un terme non homogène de la forme $\mathbf{u}e^{\lambda t}$, où λ est une racine simple de l'équation caractéristique. Dans cette situation, plutôt que de supposer une solution de la forme $\mathbf{a}te^{\lambda t}$, on doit utiliser $\mathbf{a}te^{\lambda t} + \mathbf{b}e^{\lambda t}$, où $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont déterminés en les substituant dans l'équation différentielle.

Exemple 2

Utilisez la méthode des coefficients indéterminés pour trouver une solution particulière à

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (16)$$

Il s'agit du même système d'équations que celui de l'exemple 1. Pour utiliser la méthode des coefficients indéterminés, on écrit $\mathbf{g}(t)$ sous la forme

$$\mathbf{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} t. \quad (17)$$

Ensuite, on suppose que

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{a}te^{-t} + \mathbf{b}e^{-t} + \mathbf{c}t + \mathbf{d}, \quad (18)$$

où $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$ sont les vecteurs à déterminer. Il faut noter que $r = -1$ est une valeur propre de la matrice des coefficients et qu'il faut donc inclure $\mathbf{a}te^{-t}$ et $\mathbf{b}e^{-t}$ dans la solution supposée. En substituant l'équation (18) dans l'équation (16) et en regroupant les termes, on obtient les équations suivantes pour $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ et $\mathbf{d}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{a} &= -\mathbf{a}, \\ \mathbf{A}\mathbf{b} &= \mathbf{a} - \mathbf{b} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}\mathbf{c} &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}\mathbf{d} &= \mathbf{c}. \end{aligned} \quad (19)$$

À partir de la première des équations (19), on voit que $\mathbf{a}$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}$ correspondant à la valeur propre $r = -1$. Ainsi, $\mathbf{a}^T = (\alpha, \alpha)$, où α est une constante non nulle. Ensuite, on découvre qu'on peut résoudre la deuxième des équations (19) seulement si $\alpha = 1$ et que, dans ce cas,

$$\mathbf{b} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (20)$$

pour toute constante k . Le choix le plus simple est $k = 0$, à partir duquel $\mathbf{b}^T = (0, -1)$. Ensuite, la troisième et la quatrième des équations (19) produisent respectivement $\mathbf{c}^T = (1, 2)$ et $\mathbf{d}^T = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}\right)$.

Enfin, à partir de l'équation (18), on obtient la solution particulière

$$\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

La solution particulière (21) n'est pas identique à celle qu'on a obtenue dans l'équation (15) de l'exemple 1 parce que le terme en e^{-t} est différent. Cependant, si on choisit $k = \frac{1}{2}$ dans l'équation (20), alors $\mathbf{b}^T = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et les deux solutions particulières concordent.

La variation de paramètres On examine maintenant des problèmes plus généraux dans lesquels la matrice des coefficients n'est ni constante ni diagonalisable. Soit

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad (22)$$

où $\mathbf{P}(t)$ et $\mathbf{g}(t)$ sont continus dans $\alpha < t < \beta$. On suppose qu'on a trouvé une matrice fondamentale $\Psi(t)$ pour le système homogène correspondant

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}. \quad (23)$$

On utilise la méthode de variation des paramètres afin de construire une solution particulière et, par le fait même, la solution générale au système non homogène (22).

Puisque la solution générale au système homogène (23) est $\Psi(t)\mathbf{c}$, il est naturel de procéder comme dans la section 3.7 et de rechercher une solution au système non homogène (22) en remplaçant le vecteur constant $\mathbf{c}$ par une fonction vectorielle $\mathbf{u}(t)$. Ainsi, on suppose que

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}(t), \quad (24)$$

où $\mathbf{u}(t)$ est un vecteur qu'il faut trouver. En dérivant $\mathbf{x}$ tel qu'il est donné par l'équation (24) et en faisant en sorte que l'équation (22) soit satisfaite, on obtient

$$\Psi'(t)\mathbf{u}(t) + \Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}(t). \quad (25)$$

Puisque $\Psi(t)$ est une matrice fondamentale, $\Psi'(t) = \mathbf{P}(t)\Psi(t)$. Ainsi, on réduit l'équation (25) à

$$\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t). \quad (26)$$

Il convient de se rappeler que $\Psi(t)$ est non singulière dans tout intervalle où $\mathbf{P}$ est continue. Ainsi, $\Psi^{-1}(t)$ existe et, par conséquent,

$$\mathbf{u}'(t) = \Psi^{-1}(t)\mathbf{g}(t). \quad (27)$$

Alors, pour $\mathbf{u}(t)$, on peut sélectionner n'importe quel vecteur à partir de la classe de vecteurs qui satisfait à l'équation (27). Ces vecteurs sont déterminés à une constante (vectorielle) additive près. Par conséquent, on note $\mathbf{u}(t)$

$$\mathbf{u}(t) = \int \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds + \mathbf{c}, \quad (28)$$

où le vecteur constant $\mathbf{c}$ est arbitraire. Si on peut évaluer les intégrales dans l'équation (28), alors on peut trouver la solution générale au système (22) en faisant la substitution pour $\mathbf{u}(t)$ à partir de l'équation (28) dans l'équation (24). Toutefois, même si on ne peut pas évaluer les intégrales, on peut toujours écrire la solution générale à l'équation (22) sous la forme

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t) \int_{t_1}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds, \quad (29)$$

où t_1 est un point quelconque dans l'intervalle (α, β) . Le premier terme du membre de droite de l'équation (29) représente la solution générale au système homogène correspondant (23), et le second terme représente une solution particulière à l'équation (22).

On considère maintenant le problème de valeur initiale constitué de l'équation différentielle (22) et de la condition initiale

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0. \quad (30)$$

On peut écrire la solution à ce problème de manière plus pratique si on choisit pour la solution particulière à l'équation (29) la solution précise qui est égale au vecteur nul lorsque $t = t_0$. On peut y arriver en utilisant t_0 comme borne inférieure d'intégration dans l'équation (29), de sorte que la solution générale à l'équation différentielle prend la forme

$$\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{c} + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds. \quad (31)$$

La condition initiale (30) peut aussi être satisfaite, à condition que

$$\mathbf{c} = \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0. \quad (32)$$

Par conséquent,

$$\mathbf{x} = \Psi(t) \Psi^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 + \Psi(t) \int_{t_0}^t \Psi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds \quad (33)$$

est la solution au problème de valeur initiale donné. De nouveau, bien qu'il soit utile d'utiliser Ψ^{-1} pour écrire les solutions (29) et (33), il est habituellement préférable dans certains cas de résoudre les équations nécessaires au moyen de la réduction plutôt que de calculer Ψ^{-1} et de le substituer dans les équations (29) et (33).

La solution (33) revêt une forme un peu plus simple si on utilise la matrice fondamentale $\Phi(t)$ satisfaisant à $\Phi(t_0) = \mathbf{I}$. Dans ce cas, on a

$$\mathbf{x} = \Phi(t) \mathbf{x}^0 + \Phi(t) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(s)\mathbf{g}(s) ds. \quad (34)$$

On peut simplifier davantage l'équation (34) si la matrice des coefficients $\mathbf{P}(t)$ est une matrice constante (voir le problème 17).

Exemple 3

Utilisez la méthode de variation des paramètres pour trouver la solution générale au système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (35)$$

Il s'agit du même système d'équations que celui qui est présenté dans les exemples 1 et 2. La solution générale au système homogène correspondant a été donnée dans l'équation (10). Ainsi,

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \quad (36)$$

est une matrice fondamentale. Par conséquent, la solution $\mathbf{x}$ à l'équation (35) est donnée par $\mathbf{x} = \Psi(t)\mathbf{u}(t)$, où $\mathbf{u}(t)$ satisfait à $\Psi(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{g}(t)$ ou

$$\begin{pmatrix} e^{-3t} & e^{-t} \\ -e^{-3t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix}. \quad (37)$$

En résolvant l'équation (37) par la réduction, on obtient

$$\begin{aligned} u_1' &= e^{2t} - \frac{3}{2}te^{3t}, \\ u_2' &= 1 + \frac{3}{2}te^t. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} + c_1, \\ u_2(t) &= t + \frac{3}{2}te^t - \frac{3}{2}e^t + c_2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \Psi(t)\mathbf{u}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (38)$$

qui est la même solution que celle qui a été obtenue précédemment.

Chacune des méthodes de résolution des équations non homogènes comporte certains avantages et certains inconvénients. La méthode des coefficients indéterminés n'exige aucune intégration, mais sa portée est limitée et elle peut nécessiter la résolution de plusieurs ensembles d'équations algébriques. La méthode de la diagonalisation demande de trouver l'inverse de la matrice de transformation et la solution à un ensemble d'équations linéaires du premier ordre non appariées, suivies d'une multiplication de matrices. Son principal avantage est que, pour les matrices hermitiennes, on peut obtenir directement l'inverse de la matrice de transformation, ce qui représente une caractéristique fort importante pour les systèmes de grande taille

La variation des paramètres est la méthode la plus générale. Par ailleurs, elle comporte la solution à un ensemble d'équations algébriques linéaires à coefficients variables, suivie d'une intégration et d'une multiplication de matrices. Elle peut donc être la plus compliquée en ce qui concerne les calculs à effectuer. Pour plusieurs petits systèmes ayant des coefficients constants, comme celui qui est présenté dans les exemples de cette section, il y a peu de raisons de préférer une méthode à une autre.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 12, trouvez la solution générale au système d'équations.

$$1. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

$$2. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ \sqrt{3}e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$3. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$4. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^{-2t} \\ -2e^t \end{pmatrix}$$

$$5. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

$$6. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1} + 4 \end{pmatrix}, \quad t > 0$$

$$7. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$8. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

$$9. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$10. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$11. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < \pi$$

$$12. \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \csc t \\ \sec t \end{pmatrix}, \quad \frac{\pi}{2} < t < \pi$$

13. Le circuit électrique présenté à la figure 5.9.1 est décrit par le système d'équations différentielles

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} I(t), \quad (i)$$

où x_1 est le courant passant par l'inducteur, x_2 la chute de tension aux bornes du condensateur et $I(t)$ le courant fourni par la source externe.

- a) Déterminez une matrice fondamentale $\Psi(t)$ pour le système homogène correspondant à l'équation (i). Reportez-vous au problème 25 de la section 5.6.
- b) Si $I(t) = e^{-t/2}$, déterminez la solution au système (i) satisfaisant aussi aux conditions initiales $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$.

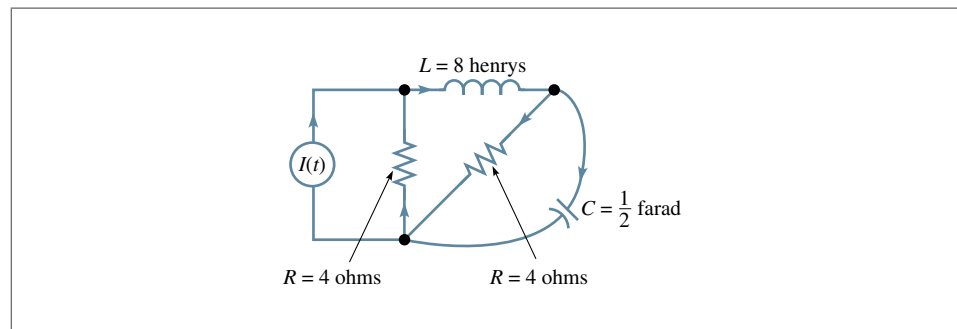


Figure 5.9.1 Circuit du problème 13.

- Dans les problèmes 14 et 15, vérifiez que le vecteur est la solution générale au système homogène correspondant, puis résolvez le système non homogène. Supposez que $t > 0$.

14. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$

15. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2t \\ t^4 - 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^{(c)} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$

16. Soit $\mathbf{x} = \Phi(t)$ la solution générale à $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t)$ et soit $\mathbf{x} = \mathbf{v}(t)$ une solution particulière au même système. En considérant la différence $\Phi(t) - \mathbf{v}(t)$, montrez que $\Phi(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$, où $\mathbf{u}(t)$ est la solution générale au système homogène $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$.

17. Considérez le problème de valeur initiale

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0.$$

- a) En vous reportant au problème 15 c) de la section 5.7, montrez que

$$\mathbf{x} = \Phi(t)\mathbf{x}^0 + \int_0^t \Phi(t-s)\mathbf{g}(s)ds.$$

- b) Montrez aussi que

$$\mathbf{x} = \exp(\mathbf{A}t)\mathbf{x}^0 + \int_0^t \exp[\mathbf{A}(t-s)]\mathbf{g}(s)ds.$$

Comparez ces résultats à ceux du problème 27 de la section 3.7.

5.10 Le plan de phase – les systèmes linéaires

Puisque de nombreuses équations différentielles ne peuvent être résolues convenablement par des méthodes analytiques, il est important de considérer les renseignements qualitatifs⁹ qu'on peut obtenir à propos de leurs solutions sans vraiment résoudre ces équations. Les questions qui seront examinées dans cette section sont associées à l'idée de stabilité d'une solution, et les méthodes utilisées sont fondamentalement géométriques. Tant le concept de stabilité que l'utilisation de l'analyse géométrique ont été présentés dans le chapitre 1 et utilisés dans la section 2.6 pour les équations autonomes du premier ordre

$$dy/dt = f(y). \quad (1)$$

Dans cette section, on précise les idées et on étend la discussion aux systèmes autonomes d'équations. On s'intéresse en particulier aux systèmes non linéaires, car ils ne peuvent habituellement pas être résolus en termes de fonctions élémentaires. De plus, on considère principalement les systèmes à deux équations, car ils se prêtent bien à l'analyse géométrique dans un plan, plutôt que dans un espace comportant un plus grand nombre de dimensions.

Cependant, avant d'aborder les systèmes non linéaires, nous allons résumer certains des résultats obtenus dans les sections précédentes du présent chapitre en ce qui concerne les systèmes bidimensionnels d'équations linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants. Un tel système prend la forme

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2)$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice constante de dimensions 2×2 et $\mathbf{x}$ est un vecteur de dimensions 2×1 . Dans les sections 5.5 à 5.8, on a vu qu'on peut résoudre de tels systèmes en cherchant des solutions de la forme $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$. Si on substitue cette expression à $\mathbf{x}$ dans l'équation (2), on obtient

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Par conséquent, r doit être une valeur propre et ξ le vecteur propre correspondant de la matrice de coefficients $\mathbf{A}$. Les valeurs propres sont les racines de l'équation polynomiale

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0, \quad (4)$$

et les vecteurs propres sont déterminés à partir de l'équation (3) jusqu'à une constante multiplicative arbitraire. On a présenté des graphiques des solutions d'équations de la forme (2) dans les sections 5.5, 5.6 et 5.8, mais l'objectif principal à ce moment-là était de déterminer une expression pratique pour la solution générale. Le but de la présente section est de rassembler les renseignements géométriques concernant les systèmes linéaires en un seul endroit. On utilisera ces renseignements pour étudier les systèmes non linéaires, qui sont beaucoup plus complexes.

À la section 2.6, on a découvert que les points pour lesquels le membre de droite de l'équation (1) est égal à zéro ont une importance particulière. Ces points correspondent aux solutions constantes, ou **solutions d'équilibre**, de l'équation (1) et sont souvent appelés **points critiques**. De la même façon, pour le système (2), les points où $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ correspondent aux solutions d'équilibre (constantes) et sont eux aussi appelés points critiques. On supposera que $\mathbf{A}$ est non singulière, ou que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Il s'ensuit que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est le seul point critique du système (2).

9. La théorie qualitative des équations différentielles a été élaborée par Henri Poincaré (1854-1912) dans plusieurs articles majeurs entre 1880 et 1886. M. Poincaré était professeur à l'Université de Paris et est généralement considéré comme le plus important mathématicien de son époque. Il a fait des découvertes fondamentales dans plusieurs branches différentes des mathématiques, dont la théorie des fonctions complexes, les équations aux dérivées partielles et la mécanique céleste. Dans une série d'articles débutant en 1894, il a introduit l'utilisation des méthodes modernes en topologie. En ce qui concerne les équations différentielles, il a été un pionnier dans l'utilisation des séries asymptotiques, un des outils les plus puissants des mathématiques appliquées contemporaines. Entre autres, il a utilisé les développements asymptotiques pour obtenir des solutions au sujet des points singuliers irréguliers, poussant ainsi plus loin les travaux de Fuchs et de Frobenius, qui seront abordés au chapitre 7.

Souvenez-vous qu'une solution de l'équation (2) est une fonction vectorielle $\mathbf{x} = \phi(t)$ qui satisfait l'équation différentielle. Une telle fonction peut être considérée comme une représentation paramétrique d'une courbe dans le plan x_1x_2 . Il est souvent utile de considérer cette courbe comme le chemin, ou la **trajectoire**, suivi par une particule en mouvement dont la vitesse $d\mathbf{x}/dt$ est précisée par l'équation différentielle. Le plan x_1x_2 est appelé le **plan de phase** et un ensemble représentatif de trajectoires est appelé un **portrait de phase**.

Quand on analyse le système (2), on doit considérer plusieurs cas différents, selon la nature des valeurs propres de $\mathbf{A}$. On caractérisera l'équation différentielle d'après le motif géométrique formé par ses trajectoires. Dans chaque cas, on discutera du comportement des trajectoires en général et on l'illustrera à l'aide d'un exemple. Il est important de vous familiariser avec les types de comportement des trajectoires pour chaque cas, car ils constituent les ingrédients de base de la théorie qualitative des équations différentielles.

CAS 1 Les valeurs propres réelles distinctes et du même signe Dans ce cas, la solution générale de l'équation (2) est

$$\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}, \quad (5)$$

où r_1 et r_2 sont tous les deux positifs ou tous les deux négatifs. Supposez d'abord que $r_1 < r_2 < 0$ et que les vecteurs propres $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ sont ceux montrés dans la figure 5.10.1 a). Il résulte de l'équation (5) que $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}$ lorsque $t \rightarrow \infty$ indépendamment des valeurs de c_1 et de c_2 ; autrement dit, toutes les solutions s'approchent du point critique à l'origine lorsque $t \rightarrow \infty$. Si la solution débute en un point initial se trouvant sur la droite qui passe par $\xi^{(1)}$, alors $c_2 = 0$. Par conséquent, la solution demeure sur la droite qui passe par $\xi^{(1)}$ pour tous les t et s'approche de l'origine lorsque $t \rightarrow \infty$. De la même façon, si le point initial se trouve sur la droite qui passe par $\xi^{(2)}$, alors la solution s'approche de l'origine le long de cette droite. Dans la solution générale, il est utile de récrire l'équation (5) sous la forme

$$\mathbf{x} = e^{r_2 t} [c_1 \xi^{(1)} e^{(r_1 - r_2)t} + c_2 \xi^{(2)}]. \quad (6)$$

Remarquez que $r_1 - r_2 < 0$. Par conséquent, tant que $c_2 \neq 0$, la magnitude du terme $c_1 \xi^{(1)} \exp[(r_1 - r_2)t]$ est négligeable par rapport à celle de $c_2 \xi^{(2)}$ quand t est suffisamment grand. Ainsi, lorsque $t \rightarrow \infty$, la trajectoire ne s'approche pas seulement de l'origine, mais elle tend aussi vers la droite qui passe par $\xi^{(2)}$. Les solutions sont donc toutes tangentes à $\xi^{(2)}$ au point critique à l'exception des solutions qui débutent exactement sur la droite qui passe par $\xi^{(1)}$. Plusieurs trajectoires sont tracées dans la figure 5.10.1 a). Des graphiques types de x_1 en fonction de t sont présentés dans la figure 5.10.1 b), illustrant le fait que toutes les solutions montrent une décroissance exponentielle au fil du temps. Le comportement de x_2 en fonction de t est similaire. Ce type de point critique s'appelle un **nœud**.

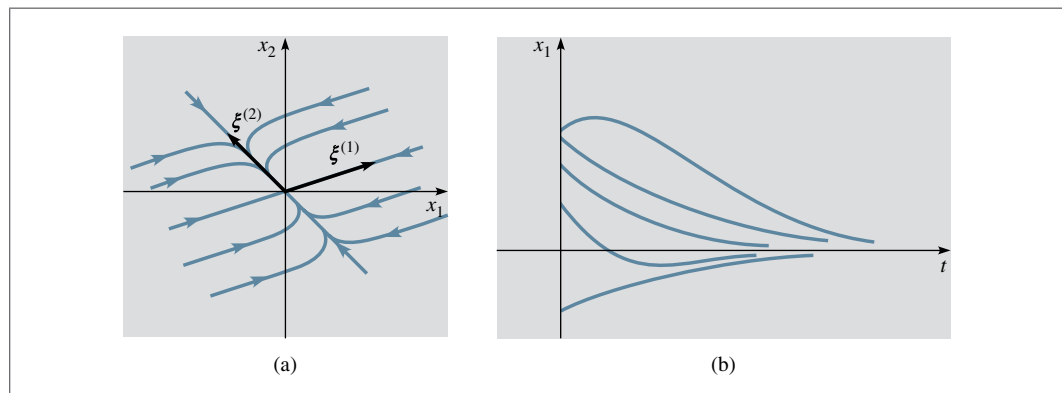


Figure 5.10.1 Un nœud; $r_1 < r_2 < 0$. a) Le plan de phase. b) Graphiques de x_1 en fonction de t .

Remontons maintenant le temps et examinons ce qui se produit lorsque $t \rightarrow -\infty$. En supposant toujours que $r_1 < r_2 < 0$, on remarque que si $c_1 \neq 0$, le terme dominant de l'équation (5) lorsque $t \rightarrow -\infty$ est le terme comportant l'expression $e^{r_1 t}$. Par conséquent, à l'exception des trajectoires qui se trouvent le long de la droite qui passe par $\xi^{(2)}$, pour de grandes valeurs négatives de t , les trajectoires ont des pentes qui sont presque égales à celle du vecteur propre $\xi^{(1)}$. Cela est également montré dans la figure 5.10.1 a).

Si r_1 et r_2 sont tous les deux positifs, et que $0 < r_2 < r_1$, les trajectoires montrent la même régularité que celle de la figure 5.10.1 a), mais le mouvement s'éloigne du point critique à l'origine, au lieu de s'en approcher. Dans ce cas, x_1 et x_2 croissent exponentiellement en fonction de t . Une fois de plus, le point critique est appelé un **nœud**. Un exemple de nœud est présenté dans l'exemple 3 de la section 5.5 et ses trajectoires sont illustrées dans la figure 5.5.4.

CAS 2 Les valeurs propres réelles de signes opposés La solution générale de l'équation (2) est

$$\mathbf{x} = c_1 \xi^{(1)} e^{r_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{r_2 t}, \quad (7)$$

où $r_1 > 0$ et $r_2 < 0$. Supposez que les vecteurs propres $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ sont ceux montrés dans la figure 5.10.2 a). Si la solution débute en un point initial qui se trouve sur la droite passant par $\xi^{(1)}$, il s'ensuit que $c_2 = 0$. Par conséquent, la solution demeure sur la droite passant par $\xi^{(1)}$ pour tous les t et puisque $r_1 > 0$, $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Si la solution débute en un point initial qui se trouve sur la droite passant par $\xi^{(2)}$, elle demeure toujours sur cette droite et $\|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, car $r_2 < 0$. Pour les solutions débutant en d'autres points initiaux, le terme exponentiel positif est le terme dominant de l'équation (7) pour les grandes valeurs de t ; donc, toutes ces solutions finiront par s'approcher de l'infini de façon asymptotique à la droite déterminée par le vecteur propre $\xi^{(1)}$ qui correspond à la valeur propre positive r_1 . Les seules solutions qui s'approchent du point critique à l'origine sont celles qui débutent précisément sur la droite déterminée par $\xi^{(2)}$. Pour les grandes valeurs négatives de t , le terme dominant de l'équation (7) est le terme exponentiel négatif; donc, une solution type est asymptotique à la droite qui passe par le vecteur propre $\xi^{(2)}$ lorsque $t \rightarrow -\infty$. Les exceptions sont les solutions qui se trouvent exactement sur la droite qui passe par le vecteur propre $\xi^{(1)}$; ces solutions s'approchent de l'origine lorsque $t \rightarrow -\infty$. Le portrait de phase illustré dans la figure 5.10.2 a) est typique du cas où les valeurs propres sont réelles et de signes opposés. L'origine est appelée un **point de selle** dans ce cas.

La figure 5.10.2 b) présente quelques graphiques types de x_1 en fonction de t . Pour certaines conditions initiales, le terme exponentiel positif est absent de la solution, donc $x_1 \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Pour toutes les autres conditions initiales, le terme exponentiel positif finit par dominer et il s'ensuit que x_1 est non borné. Le comportement de x_2 est similaire.

Un exemple de point de selle est présenté dans l'exemple 2 de la section 5.5 et ses trajectoires sont illustrées dans la figure 5.5.2.

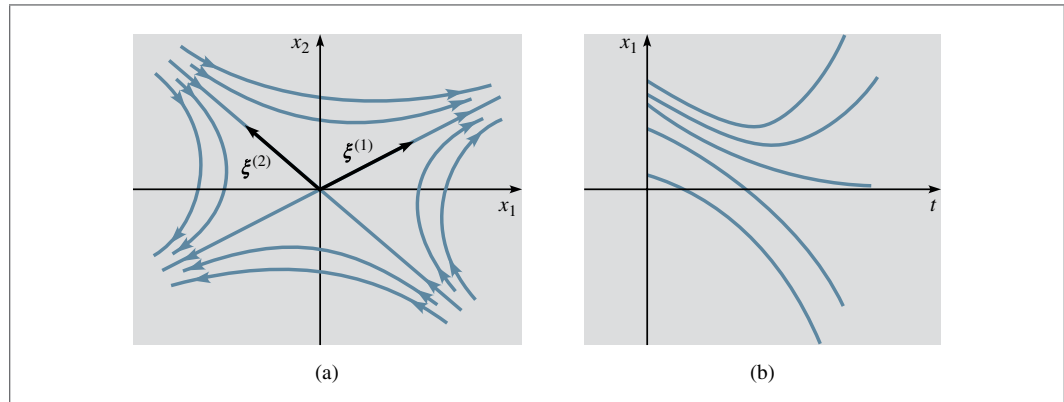


Figure 5.10.2 Un point de selle; $r_1 > 0$, $r_2 < 0$. a) Le plan de phase. b) Graphiques de x_1 en fonction de t .

CAS 3 Les valeurs propres égales On suppose maintenant que $r_1 = r_2 = r$. On examine le cas où les valeurs propres sont négatives; si elles sont positives, les trajectoires sont similaires, mais le sens du mouvement est inversé. Il existe deux cas secondaires, selon que la valeur propre répétée possède deux vecteurs propres indépendants ou n'en possède qu'un seul.

1. **Deux vecteurs propres indépendants** La solution générale de l'équation (2) est

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{rt} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{rt}, \quad (8)$$

où $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ et $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ sont les vecteurs propres indépendants.

Le rapport x_2/x_1 est indépendant de t , mais dépend des composantes de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ et de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, ainsi que des constantes arbitraires c_1 et c_2 . Par conséquent, chaque trajectoire est une droite passant par l'origine, comme le montre la figure 5.10.3 a). Des graphiques types de x_1 ou de x_2 en fonction de t sont présentés dans la figure 5.10.3 b). Le point critique est appelé un **nœud propre**, ou parfois un **nœud étoilé**.

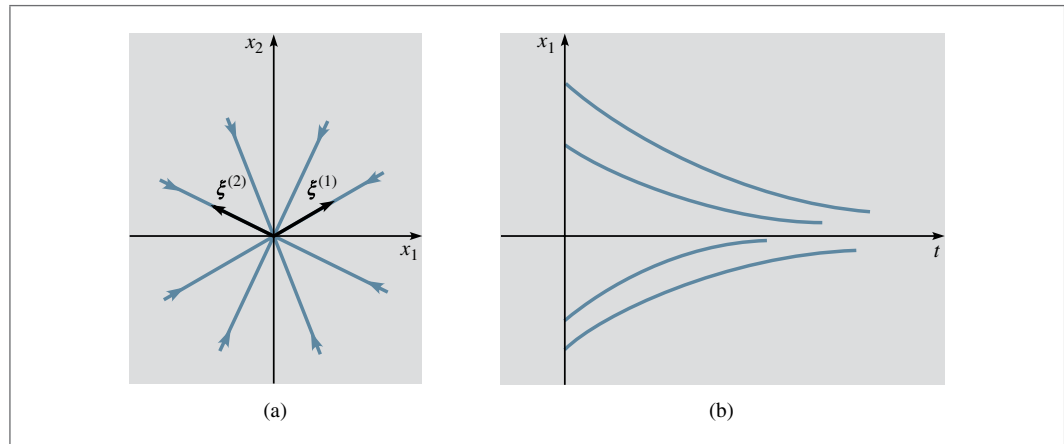


Figure 5.10.3 Un nœud propre, deux vecteurs propres indépendants; $r_1 = r_2 < 0$. a) Le plan de phase. b) Graphiques de x_1 en fonction de t .

2. **Un vecteur propre indépendant** Comme on le voit à la section 5.8, la solution générale de l'équation (2) dans ce cas est

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi} e^{rt} + c_2 (\boldsymbol{\xi} t e^{rt} + \boldsymbol{\eta} e^{rt}), \quad (9)$$

où $\boldsymbol{\xi}$ est le vecteur propre et $\boldsymbol{\eta}$ est le vecteur propre généralisé associé à la valeur propre répétée. Pour les grandes valeurs de t , le terme dominant de l'équation (9) est $c_2 \boldsymbol{\xi} t e^{rt}$. Par conséquent, lorsque $t \rightarrow \infty$, chaque trajectoire s'approche de l'origine tangentiellement à la droite qui passe par le vecteur propre. Cela est vrai même si $c_2 = 0$, puisque dans ce cas, la solution $\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ se trouve sur cette droite. De la même façon, pour les grandes valeurs négatives de t , le terme $c_2 \boldsymbol{\xi} t e^{rt}$ est encore le terme dominant, de façon que lorsque $t \rightarrow -\infty$, la pente de chaque trajectoire s'approche de la pente du vecteur propre $\boldsymbol{\xi}$.

L'orientation des trajectoires dépend des positions relatives de $\boldsymbol{\xi}$ et de $\boldsymbol{\eta}$. Une situation possible est présentée dans la figure 5.10.4 a). Pour déterminer les trajectoires, il est utile de réécrire la solution (9) sous la forme

$$\mathbf{x} = [(c_1 \boldsymbol{\xi} + c_2 \boldsymbol{\eta}) + c_2 \boldsymbol{\xi} t] e^{rt} = \mathbf{y} e^{rt}, \quad (10)$$

où $\mathbf{y} = (c_1 \boldsymbol{\xi} + c_2 \boldsymbol{\eta}) + c_2 \boldsymbol{\xi} t$. Remarquez que le vecteur $\mathbf{y}$ détermine la direction de $\mathbf{x}$, tandis que la grandeur scalaire e^{rt} influe seulement sur la magnitude de $\mathbf{x}$. Notez aussi que pour des valeurs fixes de c_1 et de c_2 , l'expression correspondant à $\mathbf{y}$ est une équation vectorielle de la droite qui passe par le point $c_1 \boldsymbol{\xi} + c_2 \boldsymbol{\eta}$ et qui est parallèle à $\boldsymbol{\xi}$.

Pour tracer la trajectoire correspondant à une paire de valeurs données c_1 et c_2 , vous pouvez procéder de la façon suivante. D'abord, tracez la droite déterminée par $(c_1 \boldsymbol{\xi} + c_2 \boldsymbol{\eta}) + c_2 \boldsymbol{\xi} t$ et indiquez la direction dans laquelle t augmente sur cette droite. Deux de ces droites sont montrées

dans la figure 5.10.4 a), une pour $c_2 > 0$ et une autre pour $c_2 < 0$. Ensuite, remarquez que la trajectoire donnée passe par le point $c_1\xi + c_2\eta$ quand $t = 0$. De plus, lorsque t augmente, le vecteur $\mathbf{x}$ donné par l'équation (10) suit la même direction que l'augmentation des t sur la droite, mais la magnitude de $\mathbf{x}$ décroît rapidement et s'approche de zéro en raison du facteur exponentiel décroissant e^{rt} . Enfin, lorsque t diminue vers $-\infty$, la direction de $\mathbf{x}$ est déterminée par des points de la partie correspondante de la droite et la magnitude de $\mathbf{x}$ s'approche de l'infini. De cette façon, on obtient les trajectoires en noir de la figure 5.10.4 a). On a aussi tracé d'autres trajectoires pour compléter le diagramme. Des graphiques types de x_1 en fonction de t sont montrés dans la figure 5.10.4 b).

L'autre situation possible est illustrée par la figure 5.10.4 c), où l'orientation relative de ξ et de η est inversée. Comme on le voit dans la figure, il en résulte une inversion de l'orientation des trajectoires.

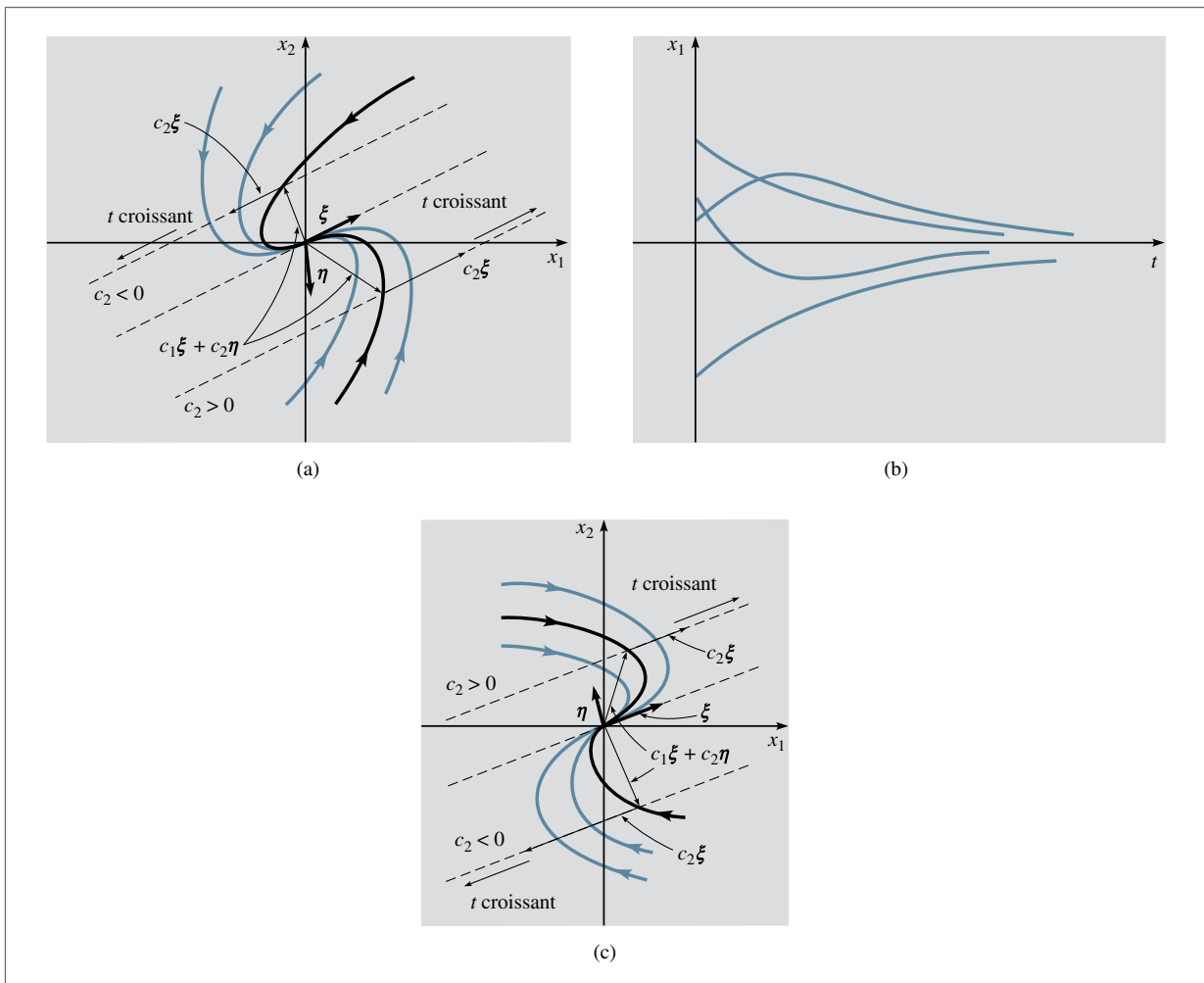


Figure 5.10.4 Un nœud impropre, un vecteur propre indépendant; $r_1 = r_2 < 0$. a) Le plan de phase. b) Graphiques de x_1 en fonction de t . c) Le plan de phase pour le même ξ et un η différent.

Si $r_1 = r_2 > 0$, vous pouvez tracer les trajectoires en suivant la même démarche. Dans ce cas, les trajectoires se dirigent vers l'extérieur, et l'orientation des trajectoires par rapport à celle de ξ et de η est aussi inversée.

Quand une valeur propre double n'a qu'un seul vecteur propre indépendant, le point critique s'appelle un **nœud impropre** ou **dégénéré**. Un exemple particulier de ce cas est donné à l'exemple 2 de la section 5.8; les trajectoires sont montrées dans la figure 5.8.2.

CAS 4 Les valeurs propres complexes comportant une partie réelle non nulle Supposez que les valeurs propres sont $\lambda \pm i\mu$, où λ et μ sont réels, $\lambda \neq 0$ et $\mu > 0$. À la section 5.6, on a vu qu'il est possible d'écrire la solution générale en fonction des valeurs propres et des vecteurs propres. Cependant, on peut procéder d'une façon différente. Considérons le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (11)$$

dont la forme scalaire est

$$x_1' = \lambda x_1 + \mu x_2, \quad x_2' = -\mu x_1 + \lambda x_2. \quad (12)$$

Il suffit d'examiner le système (11), puisque chaque système de dimensions 2×2 ayant des valeurs propres $\lambda \pm i\mu$ peut être converti sous la forme (11) par une transformation linéaire (*un exemple de la façon de procéder est donné au problème 22*). On introduit ici les coordonnées polaires r, θ données par

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \tan \theta = x_2/x_1.$$

En calculant la différentielle de ces équations, on obtient

$$rr' = x_1x_1' + x_2x_2', \quad (\sec^2 \theta)\theta' = (x_1x_2' - x_2x_1')/x_1^2. \quad (13)$$

En substituant à partir des équations (12) dans la première des équations (13), on obtient

$$r' = \lambda r, \quad (14)$$

et par conséquent

$$r = ce^{\lambda t}, \quad (15)$$

où c est une constante. De la même façon, en substituant à partir des équations (12) dans la seconde des équations (13), et en se servant du fait que $\sec^2 \theta = r^2/x_1^2$, on obtient

$$\theta' = -\mu. \quad (16)$$

Par conséquent,

$$\theta = -\mu t + \theta_0, \quad (17)$$

où θ_0 est la valeur de θ quand $t = 0$.

Les équations (15) et (17) sont des équations paramétriques en coordonnées polaires des trajectoires du système (11). Puisque $\mu > 0$, il découle de l'équation (17) que θ diminue lorsque t augmente; donc, le mouvement sur une trajectoire s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre. Lorsque $t \rightarrow \infty$, on voit d'après l'équation (15) que $r \rightarrow 0$ si $\lambda < 0$ et $r \rightarrow \infty$ si $\lambda > 0$. Par conséquent, les trajectoires sont des spirales, qui s'approchent ou s'éloignent de l'origine, selon le signe de λ . Ces deux possibilités sont illustrées dans la figure 5.10.5 à la page suivante, accompagnées de quelques graphiques types de x_1 en fonction de t . Le point critique s'appelle un **point spirale** dans ce cas. On utilise fréquemment les termes **puits spirale** et **foyer spirale** pour faire référence aux points spirales dont les trajectoires s'approchent ou s'éloignent, respectivement, du point critique.

De façon plus générale, les trajectoires sont des spirales pour tout système comportant des valeurs propres complexes $\lambda \pm i\mu$, où $\lambda \neq 0$. Les spirales sont dirigées vers l'intérieur ou vers l'extérieur, selon que λ est négatif ou positif. Elles peuvent être allongées et obliques par rapport aux axes de coordonnées et le mouvement peut se faire dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens contraire. De plus, il est facile d'obtenir une idée générale de l'orientation des trajectoires à partir des équations différentielles. Supposez que

$$\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (18)$$

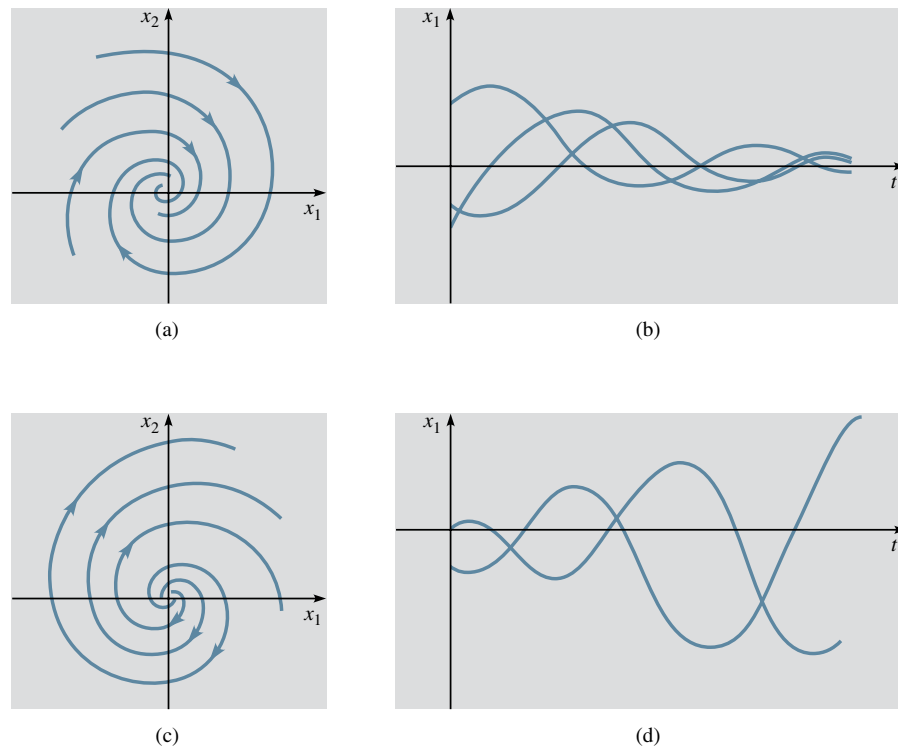


Figure 5.10.5 Un point spirale; $r_1 = \lambda + i\mu$, $r_2 = \lambda - i\mu$. a) $\lambda < 0$, le plan de phase. b) $\lambda < 0$, graphiques de x_1 en fonction de t . c) $\lambda > 0$, le plan de phase. d) $\lambda > 0$, graphiques de x_1 en fonction de t .

comporte des valeurs propres complexes $\lambda \pm i\mu$, et examinez le point $(0, 1)$ sur la partie positive de l'axe des y . En ce point, il découle des équations (18) que $dx/dt = b$ et $dy/dt = d$. Selon les signes de b et de d , on peut déduire la direction du mouvement et l'orientation approximative des trajectoires. Par exemple, si b et d sont tous les deux négatifs, alors les trajectoires croisent la partie positive de l'axe des y de façon à se diriger vers le bas et dans le deuxième quadrant. Si, en plus, $\lambda < 0$, les trajectoires doivent être des spirales qui pointent vers l'intérieur et qui ressemblent à celle de la figure 5.10.6. Un autre cas a été donné dans l'exemple 1 de la section 5.6, et les trajectoires correspondantes sont montrées dans la figure 5.6.2.

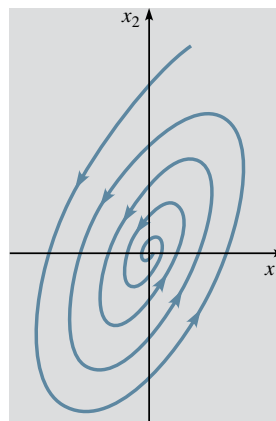


Figure 5.10.6 Un point spirale; $r = \lambda \pm i\mu$, où $\lambda < 0$.

CAS 5 Les valeurs propres imaginaires pures Dans ce cas, $\lambda = 0$ et le système (11) se réduit au système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad (19)$$

qui comporte des valeurs propres $\pm i\mu$. En utilisant le même argument que dans le cas 4, on constate que

$$r' = 0, \quad \theta' = -\mu \quad (20)$$

et, en conséquence,

$$r = c, \quad \theta = -\mu t + \theta_0, \quad (21)$$

où c et θ_0 sont des constantes.

Par conséquent, les trajectoires sont des cercles, centrés à l'origine, où le mouvement s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre si $\mu > 0$ et dans le sens contraire si $\mu < 0$. Une révolution complète autour de l'origine s'effectue dans un intervalle de $2\pi/\mu$; donc, toutes les solutions sont périodiques de période $2\pi/\mu$. Le point critique est alors appelé un **centre**.

Généralement, quand les valeurs propres sont des nombres imaginaires purs, il est possible de montrer (voir le problème 19) que les trajectoires sont des ellipses centrées à l'origine. La figure 5.10.7 illustre une situation typique et présente aussi quelques graphiques types de x_1 en fonction de t . Consultez aussi l'exemple 3 de la section 5.6, en particulier les figures 5.6.3 et 5.6.4.

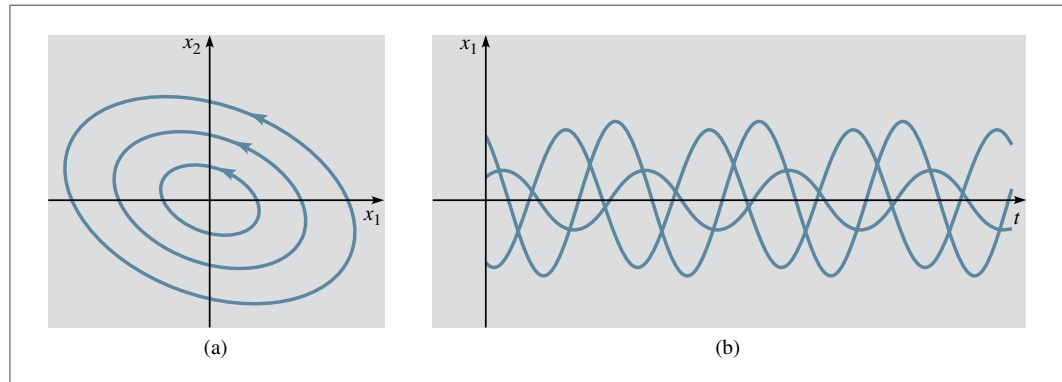


Figure 5.10.7 Un centre; $r_1 = i\mu$, $r_2 = -i\mu$. a) Le plan de phase. b) Graphiques de x_1 en fonction de t .

En réfléchissant aux cinq cas traités précédemment et en examinant les figures correspondantes, on peut faire plusieurs observations :

1. Sur une longue durée, chaque trajectoire individuelle présente un des trois types de comportement possibles. Lorsque $t \rightarrow \infty$, chaque trajectoire s'approche du point critique $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, croise de manière répétitive une courbe fermée autour du point critique (ce qui correspond à une solution périodique) ou devient non bornée.
2. Dans son ensemble, la régularité des trajectoires dans chaque cas est relativement simple. Pour être plus précis, par chaque point (x_0, y_0) du plan de phase, il ne passe qu'une seule trajectoire; par conséquent, les trajectoires ne se croisent pas. Ne soyez pas induits en erreur par les figures, dans lesquelles il semble parfois que plusieurs trajectoires passent par le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. En fait, la seule solution qui passe par l'origine est la solution d'équilibre $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Les autres solutions qui semblent passer par l'origine ne font en fait que s'approcher de ce point lorsque $t \rightarrow \infty$ ou $t \rightarrow -\infty$.
3. Dans chaque cas, l'ensemble de toutes les trajectoires est tel qu'il n'y a que trois situations possibles.

- a) Toutes les trajectoires s'approchent du point critique $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ lorsque $t \rightarrow \infty$. C'est le cas si les valeurs propres sont réelles et négatives ou si elles sont complexes avec une partie réelle négative. L'origine est alors un puits nodal ou un puits spirale.
- b) Toutes les trajectoires demeurent bornées, mais ne s'approchent pas de l'origine lorsque $t \rightarrow \infty$. C'est le cas si les valeurs propres sont des nombres imaginaires purs. L'origine est alors un centre.
- c) Certaines trajectoires, et possiblement toutes les trajectoires à l'exception de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, deviennent non bornées lorsque $t \rightarrow \infty$. C'est le cas si au moins une des valeurs propres est positive ou si les valeurs propres ont une partie réelle positive. L'origine est alors un foyer nodal, un foyer spirale ou un point de selle.

Les situations décrites aux points 3 a), 3 b) et 3 c) ci-dessus illustrent les concepts de stabilité asymptotique, de stabilité et d'instabilité, respectivement, de la solution d'équilibre $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ du système (2). Les définitions exactes de ces termes sont données à la section 5.11, mais leur signification fondamentale devrait être claire après la discussion géométrique présentée dans cette section. Les renseignements qu'on a obtenus au sujet du système (2) sont résumés dans le tableau 5.10.1. Vous pouvez aussi consulter les problèmes 20 et 21.

Tableau 5.10.1 Les propriétés liées à la stabilité des systèmes linéaires $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, où $\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0$ et $\det \mathbf{A} \neq 0$.

Valeurs propres	Type de point critique	Stabilité
$r_1 > r_2 > 0$	Nœud	Instable
$r_1 < r_2 < 0$	Nœud	Asymptotiquement stable
$r_2 < 0 < r_1$	Point de selle	Instable
$r_1 = r_2 > 0$	Nœud propre ou impropre	Instable
$r_1 = r_2 < 0$	Nœud propre ou impropre	Asymptotiquement stable
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$	Point spirale	
$\lambda > 0$		Instable
$\lambda < 0$		Asymptotiquement stable
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	Centre	Stable

L'analyse effectuée dans cette section s'applique seulement aux systèmes de deux équations du premier ordre $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dont les solutions peuvent être visualisées sous forme de courbes dans le plan de phase. Une analyse similaire, bien que plus compliquée, peut être effectuée pour un système de n équations du premier ordre, avec une matrice de coefficients $\mathbf{A}$ de dimensions $n \times n$, dont les solutions sont représentées géométriquement par des courbes dans un espace de phase à n dimensions. Les cas qui peuvent se produire dans les systèmes de dimension plus élevée sont essentiellement des combinaisons des cas examinés en deux dimensions. Par exemple, dans un système de dimension trois ayant un espace de phase tridimensionnel, il serait possible que les solutions dans un certain plan se dirigent en spirale vers l'origine, tandis que d'autres solutions tendraient vers l'infini le long d'une droite transversale à ce plan. Ce serait le cas si la matrice de coefficients contenait deux valeurs propres complexes ayant une partie réelle négative et une valeur propre réelle positive. Toutefois, en raison de leur complexité, nous ne discuterons pas des systèmes d'une dimension supérieure à deux.

Problèmes

■ Pour chacun des systèmes des problèmes 1 à 12, procédez comme suit.

- a) Trouvez les valeurs propres et les vecteurs propres.
- b) Classez le point critique $(0, 0)$ en fonction de son type et déterminez s'il est stable, asymptotiquement stable ou instable.

- c) Esquissez plusieurs trajectoires dans le plan de phase, ainsi que quelques graphiques types de x_1 en fonction de t .
- d) Utilisez un ordinateur pour tracer avec précision les courbes demandées à la partie c).

1. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

2. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

3. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

4. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

5. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

6. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

7. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

8. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -0,25 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

9. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

10. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

11. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

12. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ 9 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

- Dans les problèmes 13 à 16, déterminez le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0$, classez-le selon son type, puis examinez sa stabilité en effectuant la transformation $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \mathbf{u}$.

13. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

14. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

15. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

16. $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \delta & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} \alpha \\ -\gamma \end{pmatrix}; \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$

17. L'équation du mouvement d'un système masse-ressort avec amortissement (voir la section 3.8) est

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + ku = 0,$$

où m , γ et k sont positifs. Écrivez cette équation du deuxième ordre sous la forme d'un système de deux équations du premier ordre pour $x = u$, $y = du/dt$. Montrez que $x = 0$, $y = 0$ est un point critique et analysez la nature et la stabilité du point critique en fonction des paramètres m , γ et k . Une analyse similaire peut être appliquée à l'équation d'un circuit électrique (voir la section 3.8):

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0.$$

18. Considérez le système $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ et supposez que $\mathbf{A}$ comporte une valeur propre nulle.

a) Montrez que $\det \mathbf{A} = 0$.

b) Montrez que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est un point critique et qu'en plus, chaque point d'une certaine droite qui passe par l'origine est aussi un point critique.

c) Soit $r_1 = 0$, $r_2 \neq 0$ et $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$, les vecteurs propres correspondants. Montrez que les trajectoires sont celles indiquées dans la figure 5.10.8 à la page suivante. Quelle est la direction du mouvement sur ces trajectoires?

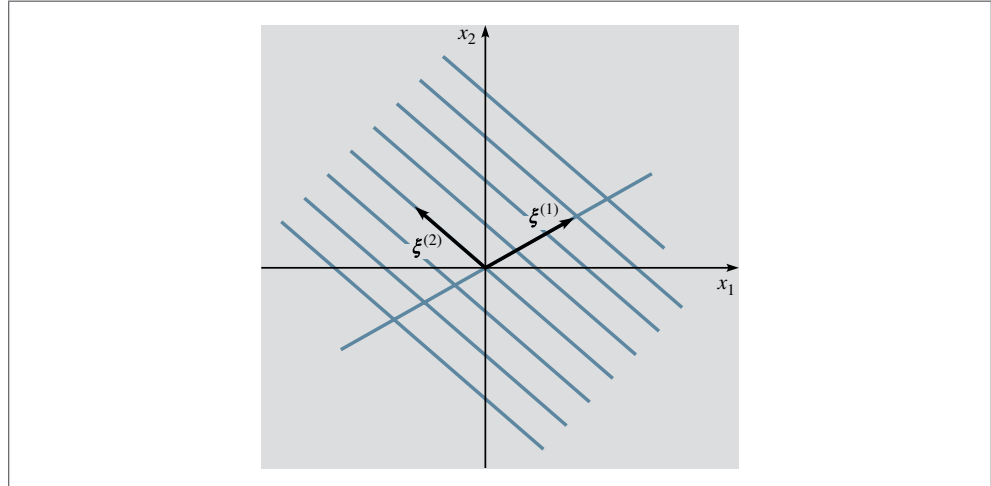


Figure 5.10.8 Des points critiques non isolés; $r_1 = 0$, $r_2 \neq 0$. Chaque point de la droite qui passe par $\xi^{(1)}$ est un point critique.

19. Dans ce problème, on vous indique comment montrer que les trajectoires sont des ellipses quand les valeurs propres sont des nombres imaginaires purs. Considérez le système

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{i})$$

- a) Montrez que les valeurs propres de la matrice de coefficients sont des nombres imaginaires purs si et seulement si

$$a_{11} + a_{22} = 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \quad (\text{ii})$$

- b) On peut trouver les trajectoires du système (i) en convertissant les équations (i) en l'équation unique

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a_{21}x + a_{22}y}{a_{11}x + a_{12}y}. \quad (\text{iii})$$

Utilisez la première des équations (ii) pour montrer que l'équation (iii) est exacte.

- c) Calculez l'intégrale de l'équation (iii) pour montrer que

$$a_{21}x^2 + 2a_{22}xy - a_{12}y^2 = k, \quad (\text{iv})$$

où k est une constante. Utilisez les équations (ii) pour conclure que le graphique de l'équation (iv) est toujours une ellipse.

Suggestion: Quel est le discriminant de l'équation quadratique (iv) ?

20. Considérez le système linéaire

$$dx/dt = a_{11}x + a_{12}y, \quad dy/dt = a_{21}x + a_{22}y,$$

où a_{11} , a_{12} , a_{21} et a_{22} sont des constantes réelles. Soit $p = a_{11} + a_{22}$, $q = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ et $\Delta = p^2 - 4q$. Remarquez que p et q sont, respectivement, la trace et le déterminant de la matrice de coefficients du système donné. Montrez que le point critique $(0, 0)$ est

- a) un nœud si $q > 0$ et $\Delta \geq 0$;
- b) un point de selle si $q < 0$;
- c) un point spirale si $p \neq 0$ et $\Delta < 0$;
- d) un centre si $p = 0$ et $q > 0$.

Suggestion: On peut arriver à ces conclusions en étudiant les valeurs propres r_1 et r_2 . Il peut aussi être utile d'établir, puis d'utiliser, les relations $r_1 r_2 = q$ et $r_1 + r_2 = p$.

21. Poursuivez le problème 20 et montrez que le point critique $(0, 0)$ est

- a) asymptotiquement stable si $q > 0$ et $p < 0$;
- b) stable si $q > 0$ et $p = 0$;
- c) instable si $q < 0$ ou $p > 0$.

Les résultats des problèmes 20 et 21 sont résumés de façon visuelle dans la figure 5.10.9.

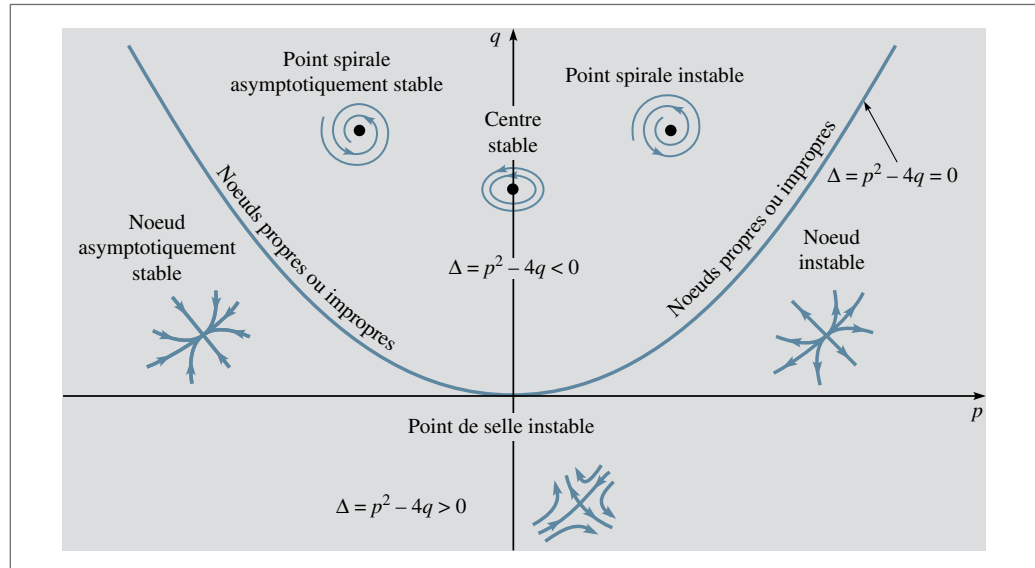


Figure 5.10.9 Schéma de la stabilité.

22. Ce problème montre la façon de transformer un système de dimensions 2×2 dont les valeurs propres sont $\lambda \pm i\mu$ sous la forme du système (11). Considérez le système du problème 12 :

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -2,5 \\ 1,8 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (\text{i})$$

- a) Montrez que les valeurs propres de ce système sont $r_1 = 0,5 + 1,5i$ et $r_2 = 0,5 - 1,5i$.
b) Montrez que le vecteur propre correspondant à r_1 peut être déterminé par

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 - 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}. \quad (\text{ii})$$

- c) Soit $\mathbf{P}$ la matrice dont les colonnes sont les parties réelles et imaginaires de $\xi^{(1)}$. Par conséquent,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}. \quad (\text{iii})$$

Posez que $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ et substituez ce terme à $\mathbf{x}$ dans l'équation (i). Montrez que

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P})\mathbf{y}. \quad (\text{iv})$$

- d) Déterminez $\mathbf{P}^{-1}$ et montrez que

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0,5 & 1,5 \\ -1,5 & 0,5 \end{pmatrix}. \quad (\text{v})$$

Par conséquent, l'équation (v) a la même forme que l'équation (11).

5.11 Les équations différentielles non linéaires et la stabilité

De nombreuses équations différentielles, en particulier les équations non linéaires, se prêtent mal à une résolution analytique convenable. Les méthodes basées sur l'approximation numérique fournissent un moyen de traiter ces équations. Une autre approche, présentée dans cette section, est de nature géométrique et mène à une compréhension qualitative du comportement des solutions plutôt qu'à des renseignements quantitatifs détaillés.

La stabilité et l'instabilité On a déjà mentionné plusieurs fois les concepts de stabilité, de stabilité asymptotique et d'instabilité dans ce manuel. Il est maintenant temps de donner une définition mathématique précise de ces concepts, du moins en ce qui concerne les systèmes autonomes de la forme

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Dans les définitions suivantes, et ailleurs dans le manuel, on utilise la notation $\|\mathbf{x}\|$ pour désigner la longueur du vecteur $\mathbf{x}$.

On appelle **points critiques** du système autonome (1) les points, s'ils existent, où $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. En de tels points, on a aussi $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$, donc les points critiques correspondent aux solutions constantes, ou d'équilibre, du système d'équations différentielles.

On dit qu'un point critique $\mathbf{x}^0$ du système (1) est **stable** si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que chaque solution $\mathbf{x} = \phi(t)$ du système (1), qui en $t = 0$ satisfait à

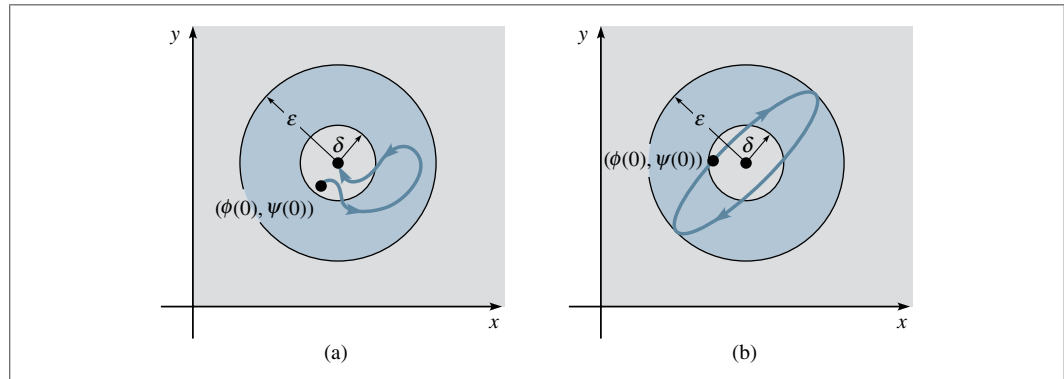
$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta, \quad (2)$$

existe pour toute valeur positive de t et satisfait à

$$\|\phi(t) - \mathbf{x}^0\| < \varepsilon \quad (3)$$

pour tout $t \geq 0$.

Cet énoncé est illustré géométriquement dans les figures 5.11.1 a) et 5.11.1 b). Ces énoncés mathématiques indiquent que toutes les solutions qui débutent « suffisamment près » (c'est-à-dire, à une distance inférieure à δ) de $\mathbf{x}^0$ demeurent « près » (à une distance inférieure à ε) de $\mathbf{x}^0$. Notez que dans la figure 5.11.1 a), la trajectoire est à l'intérieur du cercle $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| = \delta$ en $t = 0$ et que, même si elle passe rapidement à l'extérieur de ce cercle, elle demeure à l'intérieur du cercle $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0\| = \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$. Cependant, la trajectoire de la solution ne doit pas nécessairement s'approcher du point critique $\mathbf{x}^0$ lorsque $t \rightarrow \infty$; elle doit simplement demeurer à l'intérieur du cercle de rayon ε , tel qu'illustré dans la figure 5.11.1 b). Un point critique qui n'est pas stable est dit **instable**.



On dit qu'un point critique $\mathbf{x}^0$ est **asymptotiquement stable** s'il est stable et s'il existe un δ_0 ($\delta_0 > 0$) tel que si une solution $\mathbf{x} = \phi(t)$ satisfait à

$$\|\phi(0) - \mathbf{x}^0\| < \delta_0, \quad (4)$$

alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{x}^0. \quad (5)$$

Par conséquent, les trajectoires qui débutent « suffisamment près » de $\mathbf{x}^0$ doivent non seulement rester « près », mais doivent finir par s'approcher de $\mathbf{x}^0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. C'est le cas de la trajectoire de la figure 5.11.1 a), mais pas de la trajectoire de la figure 5.11.1 b). Notez que la stabilité asymptotique est une propriété plus puissante que la stabilité, puisqu'un point critique doit être

stable avant qu'on puisse même vérifier s'il pourrait être asymptotiquement stable. D'autre part, la condition limite (5), qui est une caractéristique essentielle de la stabilité asymptotique, ne suffit pas à elle seule à justifier la stabilité ordinaire. En effet, on peut construire des exemples dans lesquels toutes les trajectoires s'approchent de $\mathbf{x}^0$ lorsque $t \rightarrow \infty$, mais où $\mathbf{x}^0$ n'est pas un point critique stable. Géométriquement, il suffit d'avoir un ensemble de trajectoires composé d'éléments qui débutent arbitrairement près de $\mathbf{x}^0$, puis qui s'en éloignent d'une distance arbitrairement grande avant de finir par s'approcher de $\mathbf{x}^0$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Dans ce chapitre, on se concentre sur les systèmes à deux équations, mais les définitions qu'on vient de donner sont indépendantes de la taille du système. Si vous considérez les vecteurs des équations (1) à (5) comme étant de dimension n , alors les définitions de stabilité, de stabilité asymptotique et d'instabilité s'appliquent aussi aux systèmes à n équations. On peut mieux comprendre les concepts exprimés dans ces définitions en les interprétant dans le contexte d'un problème physique particulier.

Exemple 1

Considérez le système

$$dx/dt = -(x-y)(1-x-y), \quad dy/dt = x(2+y). \quad (6)$$

Trouvez les points critiques de ce système et tracez des champs de direction sur des rectangles contenant ces points critiques. Examinez les champs de direction pour déterminer le type de chacun des points critiques, puis indiquez si le point critique est asymptotiquement stable, stable ou instable. Pour trouver les points critiques, on résout les équations algébriques

$$(x-y)(1-x-y) = 0, \quad x(2+y) = 0. \quad (7)$$

On peut satisfaire à la seconde équation en posant $x = 0$. Dans ce cas, la première équation devient $y(1-y) = 0$; donc, $y = 0$ ou $y = 1$. On peut trouver d'autres solutions en posant $y = -2$ dans la seconde équation. Dans ce cas, la première équation devient $(x+2)(3-x) = 0$; donc, $x = -2$ ou $x = 3$. Par conséquent, nous avons trouvé les quatre points critiques : $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-2, -2)$ et $(3, -2)$.

La figure 5.11.2 illustre un champ de direction contenant les deux premiers points critiques. Une comparaison de cette figure avec celles des sections 5.5, 5.6, 5.8 et 5.10 devrait montrer clairement que l'origine est un point de selle et que le point $(0, 1)$ est un point spirale. Évidemment, le point de selle est instable. Les trajectoires près du point spirale semblent s'approcher de ce point; on en déduit donc qu'il est asymptotiquement stable. Un champ de direction contenant les deux autres points critiques est illustré dans la figure 5.11.3 à la page suivante. Chacun de ces points est un nœud. Les flèches pointent vers le point $(-2, -2)$ et s'éloignent du point $(3, -2)$. Par conséquent, le premier est asymptotiquement stable et le second est instable.

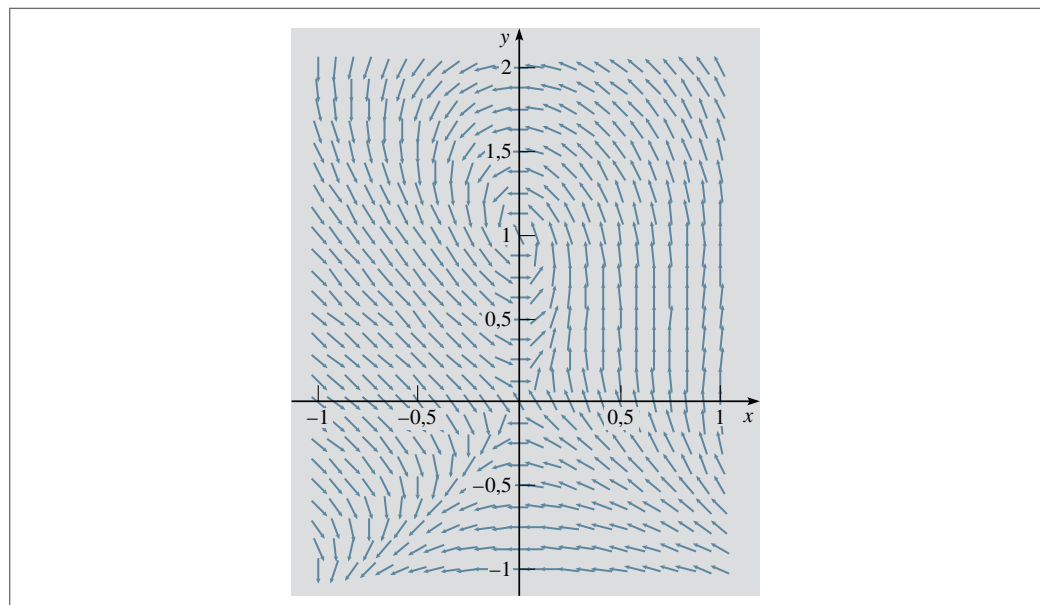


Figure 5.11.2 Champ de direction pour le système (6), contenant les points critiques $(0, 0)$ et $(0, 1)$; le premier est un point de selle et le second est un point spirale.

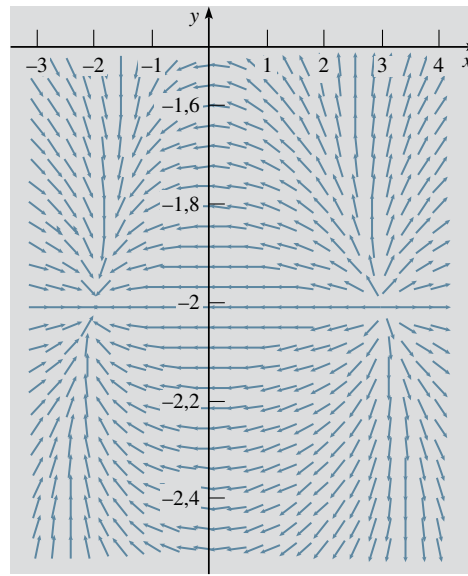


Figure 5.11.3 Champ de direction pour le système (6), contenant les points critiques $(-2, -2)$ et $(3, -2)$; ces deux points sont des nœuds.

Les systèmes localement linéaires Dans la section 5.10, on a décrit la stabilité de la solution d'équilibre $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ du système linéaire bidimensionnel

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (8)$$

Le tableau 5.10.1 résume les résultats. Souvenez-vous qu'il fallait que $\det \mathbf{A} \neq 0$, pour que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ soit le seul point critique du système (8). Maintenant qu'on a défini les concepts de stabilité asymptotique, de stabilité et d'instabilité avec plus de précision, on peut reformuler ces résultats pour obtenir le théorème suivant.

Théorème 5.11.1

Le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ du système linéaire (8) est asymptotiquement stable si les valeurs propres r_1 et r_2 sont réelles et négatives ou si elles ont une partie réelle négative. Il est stable, sans être asymptotiquement stable, si r_1 et r_2 sont des nombres imaginaires purs. Il est instable si r_1 et r_2 sont réelles et que l'une ou l'autre est positive, ou si elles ont une partie réelle positive.

L'incidence de petites perturbations Il est évident selon ce théorème ou le tableau 5.10.1 que les valeurs propres r_1 et r_2 de la matrice de coefficients $\mathbf{A}$ déterminent le type de point critique en $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et ses caractéristiques de stabilité. Quant à elles, les valeurs de r_1 et de r_2 dépendent des coefficients du système (1). Quand un tel système apparaît dans un domaine appliqué quelconque, les coefficients résultent généralement de la mesure de certaines grandeurs physiques. Ces mesures sont souvent sujettes à de petites incertitudes, de sorte qu'il devient intéressant d'examiner si de petites variations (ou perturbations) dans les coefficients peuvent influencer sur la stabilité ou l'instabilité du point critique, ou modifier de façon significative le modèle des trajectoires.

Souvenez-vous que les valeurs propres r_1 et r_2 sont les racines de l'équation polynomiale

$$\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \quad (9)$$

Il est possible de montrer que de petites perturbations dans quelques-uns ou dans l'ensemble des coefficients produisent de petites perturbations dans les valeurs propres. La situation la plus sensible apparaît quand $r_1 = i\mu$ et $r_2 = -i\mu$. Dans ce cas, le point critique est un centre et les trajectoires sont des courbes fermées (des ellipses) qui l'entourent. Si une faible variation survient dans les coefficients, les valeurs propres r_1 et r_2 deviennent $r'_1 = \lambda' + i\mu'$ et $r'_2 = \lambda' - i\mu'$, où λ' est une petite variation et $\mu' \cong \mu$ (voir la figure 5.11.4). Si $\lambda' \neq 0$, ce qui est presque toujours le cas, les trajectoires du système perturbé sont des spirales plutôt que des ellipses. Le système est asymptotiquement stable si $\lambda' < 0$, mais instable si $\lambda' > 0$. Par conséquent, dans le cas d'un centre, de petites perturbations dans les coefficients pourraient bien transformer un système stable en un système instable et, de toute façon, on peut s'attendre à ce que les trajectoires en ellipses se transforment en spirales (voir le problème 27).

Un autre cas légèrement moins sensible apparaît quand les valeurs propres r_1 et r_2 sont égales; dans ce cas, le point critique est un nœud. De petites perturbations dans les coefficients entraînent normalement une séparation (une bifurcation) des deux racines égales. Si les racines distinctes sont réelles, le point critique du système perturbé reste un nœud, mais si les racines distinctes sont des nombres complexes conjugués, le point critique devient un point spirale. Ces deux possibilités sont illustrées dans la figure 5.11.5. Dans ce cas, de petites perturbations des coefficients n'influencent pas sur la stabilité ou l'instabilité du système, mais pourraient modifier le type de point critique (voir le problème 28).

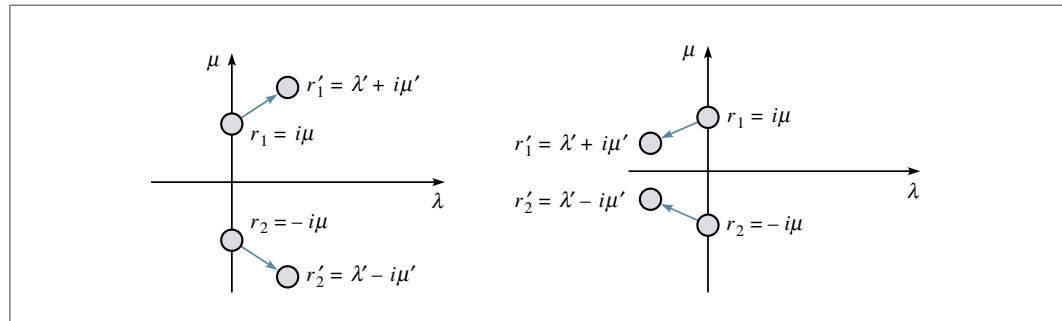


Figure 5.11.4 Schéma d'une perturbation de $r_1 = i\mu$ et de $r_2 = -i\mu$.

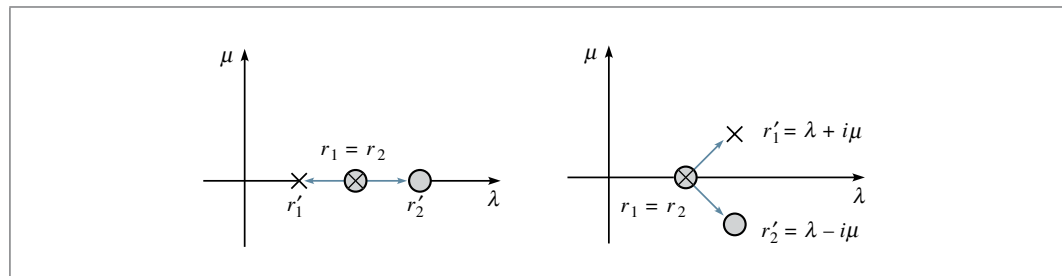


Figure 5.11.5 Schéma d'une perturbation de $r_1 = r_2$.

Dans tous les autres cas, la stabilité ou l'instabilité du système n'est pas modifiée, tout comme le type de point critique, par des perturbations suffisamment petites des coefficients du système. Par exemple, si r_1 et r_2 sont des valeurs réelles, négatives et distinctes, une petite variation des coefficients n'influera pas sur le signe de r_1 et de r_2 et ne permettra pas à ces deux valeurs de fusionner. Par conséquent, le point critique demeure un nœud asymptotiquement stable.

L'approximation linéaire des systèmes non linéaires Considérons maintenant un système autonome non linéaire bidimensionnel

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Notre principal objectif consiste à étudier le comportement des trajectoires du système (1) près d'un point critique $\mathbf{x}^0$. Rappelez-vous qu'à l'exemple 1, on a remarqué que près de chaque point critique de ce système non linéaire, le modèle des trajectoires ressemble à celui d'un certain système linéaire. Cela nous suggère que près d'un point critique, on pourrait peut-être faire une approximation du système non linéaire (1) à l'aide d'un système linéaire approprié, dont les trajectoires sont faciles à décrire. La question cruciale est de déterminer s'il existe un système linéaire approximatif, ainsi que la façon de le trouver, dont les trajectoires correspondent étroitement à celles du système non linéaire près du point critique.

Il est pratique de choisir l'origine comme point critique. Cela n'entraîne aucune perte quant à la généralisation, car si $\mathbf{x}^0 \neq \mathbf{0}$, il est toujours possible de faire la substitution $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$ dans l'équation (1). Dans ce cas, $\mathbf{u}$ satisfera à un système autonome dont le point critique est à l'origine.

D'abord, considérons les conditions nécessaires pour que le système non linéaire (1) corresponde étroitement au système linéaire (8). En conséquence, supposez que

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

et que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est un point critique **isolé** du système (10). Cela signifie qu'il existe, autour de l'origine, un certain cercle à l'intérieur duquel il n'y a aucun autre point critique. De plus, on suppose que $\det \mathbf{A} \neq 0$, de sorte que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est aussi un point critique isolé du système linéaire $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Pour que le système non linéaire (10) corresponde étroitement au système linéaire $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, on doit supposer que $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ est petit.

Plus précisément, on suppose que les composantes de $\mathbf{g}$ ont des premières dérivées partielles continues et satisfont à la condition limite

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| / \|\mathbf{x}\| \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}; \quad (11)$$

c'est-à-dire que $\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|$ est petit par rapport à $\|\mathbf{x}\|$ près de l'origine. Un tel système s'appelle un **système localement linéaire** au voisinage du point critique $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Il peut être utile d'exprimer la condition (11) sous une forme scalaire. Si on pose $\mathbf{x}^T = (x, y)$, alors $\|\mathbf{x}\| = (x^2 + y^2)^{1/2} = r$. De la même façon, si $\mathbf{g}^T(\mathbf{x}) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$, alors

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| = [g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y)]^{1/2}.$$

Par conséquent, il s'ensuit que la condition (11) est satisfaite si et seulement si

$$g_1(x, y)/r \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad g_2(x, y)/r \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } r \rightarrow 0. \quad (12)$$

Exemple 2

Déterminez si le système

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 - xy \\ -0,75xy - 0,25y^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

est localement linéaire au voisinage de l'origine.

Remarquez que le système (13) est exprimé sous la forme (10), que $(0, 0)$ est un point critique et que $\det \mathbf{A} \neq 0$. Il n'est pas difficile de montrer que les autres points critiques des équations (13) sont $(0, 2)$, $(1, 0)$ et $(0,5, 0,5)$; par conséquent, l'origine est un point critique isolé. Pour vérifier la condition (12), il est pratique d'introduire les coordonnées polaires en posant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$. Alors,

$$\begin{aligned} \frac{g_1(x, y)}{r} &= \frac{-x^2 - xy}{r} = \frac{-r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta}{r} \\ &= -r(\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

lorsque $r \rightarrow 0$. D'une façon similaire, vous pouvez montrer que $g_2(x, y)/r \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$. Par conséquent, le système (13) est localement linéaire près de l'origine.

Exemple 3

Le mouvement d'un pendule est décrit par le système

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - \gamma y. \quad (14)$$

Les points critiques sont $(0, 0)$, $(\pm\pi, 0)$, $(\pm 2\pi, 0)$, ...; donc, l'origine est un point critique isolé de ce système. Montrez que ce système est localement linéaire près de l'origine.

Pour comparer les équations (14) avec l'équation (10), on doit récrire les premières de façon que les termes linéaires et non linéaires soient clairement indiqués. Si on écrit $\sin x = x + (\sin x - x)$ et qu'on substitue cette expression dans la seconde des équations (14), on obtient le système équivalent

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x - x \end{pmatrix}. \quad (15)$$

En comparant l'équation (15) et l'équation (10), on constate que $g_1(x, y) = 0$ et $g_2(x, y) = -\omega^2(\sin x - x)$. D'après la série de Taylor¹⁰ pour $\sin x$, on sait que $\sin x - x$ se comporte comme $-x^3/3! = -(r^3 \cos^3 \theta)/3!$ lorsque x est petit. Par conséquent, $(\sin x - x)/r \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0$. Donc, les conditions (12) sont respectées et le système (15) est localement linéaire près de l'origine.

Revenons maintenant au système non linéaire général (1), que nous récrivons sous la forme scalaire

$$x' = F(x, y), \quad y' = G(x, y); \quad (16)$$

ainsi, $\mathbf{x} = (x, y)^T$ et $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (F(x, y), G(x, y))^T$. Le système (16) est localement linéaire au voisinage d'un point critique (x_0, y_0) quand les fonctions F et G ont des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre deux. Pour le montrer, on utilise les développements de Taylor près du point (x_0, y_0) pour écrire $F(x, y)$ et $G(x, y)$ sous la forme

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(x_0, y_0) + F_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_1(x, y), \\ G(x, y) &= G(x_0, y_0) + G_x(x_0, y_0)(x - x_0) + G_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \eta_2(x, y), \end{aligned}$$

où $\eta_1(x, y)/[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2} \rightarrow 0$ lorsque $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ et pareillement pour η_2 . Remarquez que $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$ et que $dx/dt = d(x - x_0)/dt$ et $dy/dt = d(y - y_0)/dt$. Alors, le système (16) se simplifie en

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1(x, y) \\ \eta_2(x, y) \end{pmatrix}, \quad (17)$$

ou, en notation vectorielle,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{x}}(\mathbf{x}^0)\mathbf{u} + \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}), \quad (18)$$

où $\mathbf{u} = (x - x_0, y - y_0)^T$ et $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)^T$.

Ce résultat a une double importance. Premièrement, si les fonctions F et G sont dérivables deux fois, alors le système (16) est localement linéaire et il est inutile de recourir aux conditions limites, comme dans les exemples 2 et 3. Deuxièmement, le système linéaire qui fait l'approximation du système non linéaire (16) près de (x_0, y_0) est donné par la partie linéaire des équations (17) ou (18):

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(x_0, y_0) & F_y(x_0, y_0) \\ G_x(x_0, y_0) & G_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

où $u_1 = x - x_0$ et $u_2 = y - y_0$. L'équation (19) fournit une méthode simple et générale pour trouver le système linéaire qui correspond à un système localement linéaire près d'un point critique donné.

10. Brook Taylor (1685-1731) a été le plus éminent mathématicien anglais de la génération qui a suivi celle de Newton. En 1715, il a publié un énoncé général sur le théorème du développement en série qui porte son nom. Ce résultat s'est avéré essentiel dans toutes les branches de l'analyse. De plus, il a été un des précurseurs du calcul des différences finies et le premier à reconnaître l'existence des solutions singulières aux équations différentielles.

La matrice

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix}, \quad (20)$$

qui apparaît comme la matrice de coefficients dans l'équation (19), est appelée la **matrice jacobienne**¹¹ des fonctions F et G par rapport à x et y . On doit supposer que $\det \mathbf{J}$ est non nul au point (x_0, y_0) , de sorte que ce point est aussi un point critique isolé du système linéaire (19).

Exemple 4

Utilisez l'équation (19) pour trouver le système linéaire qui correspond aux équations du pendule (14) près de l'origine, ainsi que près du point critique $(\pi, 0)$.

Dans ce cas, on obtient, à partir de l'équation (14),

$$F(x, y) = y, \quad G(x, y) = -\omega^2 \sin x - \gamma y; \quad (21)$$

puisque ces fonctions sont dérivables autant de fois que nécessaire, le système (14) est localement linéaire près de chaque point critique. Les dérivées de F et de G sont

$$F_x = 0, \quad F_y = 1, \quad G_x = -\omega^2 \cos x, \quad G_y = -\gamma. \quad (22)$$

Par conséquent, à l'origine, le système linéaire correspondant est

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (23)$$

ce qui concorde avec l'équation (15).

De la même façon, en évaluant les dérivées partielles de l'équation (22) au point $(\pi, 0)$, on obtient

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (24)$$

où $u = x - \pi$ et $v = y$. Ce système est le système linéaire correspondant aux équations (14) près du point $(\pi, 0)$.

Revenons maintenant au système localement linéaire (10). Puisque le terme non linéaire $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ est petit comparativement au terme linéaire $\mathbf{A}\mathbf{x}$ quand $\mathbf{x}$ est petit, il est raisonnable d'espérer que les trajectoires du système linéaire (3) sont de bonnes approximations de celles du système non linéaire (10), au moins près de l'origine. Cela s'avère juste dans de nombreux cas (mais pas dans tous), comme l'énonce le théorème suivant.

Théorème 5.11.2

Soit r_1 et r_2 les valeurs propres du système linéaire (3) correspondant au système localement linéaire (10). Dans ce cas, le type et la stabilité du point critique $(0, 0)$ du système linéaire (3) et du système localement linéaire (10) sont indiqués dans le tableau 5.11.1.

À ce stade, il est trop difficile de prouver le théorème 5.11.2; on acceptera donc les résultats sans preuves. Les énoncés concernant la stabilité asymptotique et l'instabilité découlent d'un résultat qui n'est pas discuté ici. Une preuve est esquissée dans les problèmes 10 à 12 de cette section. Essentiellement, le théorème 5.11.2 énonce que pour de petits $\mathbf{x}$ (ou $\mathbf{x} - \mathbf{x}^0$), les termes non linéaires sont également petits et n'ont pas d'incidence sur la stabilité et le type de point critique déterminés par les termes linéaires, excepté dans deux cas sensibles. Si r_1 et r_2 sont des nombres imaginaires purs, les petits termes non linéaires peuvent transformer le centre stable en un point spirale, qui peut être soit asymptotiquement stable, soit instable. Si r_1 et r_2 sont des nombres réels

11. Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), un analyste allemand qui était professeur à l'Université de Königsburg et à l'Université de Berlin, a contribué de façon importante à la théorie des fonctions elliptiques. Le déterminant de $\mathbf{J}$ et son prolongement à n fonctions à n variables est qualifié de jacobien en raison de son article remarquable paru en 1841 sur les propriétés de ce déterminant. La matrice correspondante est également nommée en son honneur, même si les matrices n'ont été développées qu'après sa mort.

Tableau 5.11.1 La stabilité et l'instabilité des systèmes linéaires et localement linéaires

r_1, r_2	Système linéaire		Système localement linéaire	
	Type	Stabilité	Type	Stabilité
$r_1 > r_2 > 0$	N	Instable	N	Instable
$r_1 < r_2 < 0$	N	Asymptotiquement stable	N	Asymptotiquement stable
$r_2 < 0 < r_1$	PS	Instable	PS	Instable
$r_1 = r_2 > 0$	NP ou NI	Instable	N ou PSp	Instable
$r_1 = r_2 < 0$	NP ou NI	Asymptotiquement stable	N ou PSp	Asymptotiquement stable
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$				
$\lambda > 0$	PSp	Instable	PSp	Instable
$\lambda < 0$	PSp	Asymptotiquement stable	PSp	Asymptotiquement stable
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	C	Stable	C ou PSp	Indéterminé

Légende: N, nœud; NI, nœud impropre; NP, nœud propre; PS, point de selle; PSp, point spirale; C, centre.

égaux, les termes non linéaires peuvent transformer le nœud en un point spirale, mais sa stabilité asymptotique ou son instabilité demeure inchangée. Rappelez-vous que plus tôt dans cette section, on a énoncé que de petites perturbations dans les coefficients du système linéaire (3), et par conséquent dans les valeurs propres r_1 et r_2 , peuvent modifier le type et la stabilité du point critique seulement dans ces deux cas. Il est raisonnable de s'attendre à ce que le petit terme non linéaire de l'équation (10) ait un effet important similaire, au moins dans ces deux cas. Il en est ainsi, mais la signification principale du théorème 5.11.2 est que dans tous les autres cas, le petit terme non linéaire ne modifie ni le type ni la stabilité du point critique. Par conséquent, sauf pour les deux cas sensibles, on peut déterminer le type et la stabilité du point critique du système non linéaire (10) en examinant le système linéaire (3), qui est beaucoup plus simple.

Même si le point critique est du même type que celui du système linéaire, les trajectoires du système localement linéaire peuvent sembler être considérablement différentes de celles du système linéaire correspondant, sauf quand on est très près du point critique. Cependant, on peut montrer que les pentes selon lesquelles les trajectoires « entrent » dans le point critique, ou en « sortent », sont données correctement par le système linéaire.

Le pendule amorti Poursuivons la discussion sur le pendule amorti débutée dans les exemples 3 et 4. Près de l'origine, les équations non linéaires (14) sont représentées approximativement par le système linéaire (23), dont les valeurs propres sont

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}. \quad (25)$$

La nature des solutions des équations (14) et (23) dépend du signe de $\gamma^2 - 4\omega^2$:

1. Si $\gamma^2 - 4\omega^2 > 0$, les valeurs propres sont réelles, distinctes et négatives. Le point critique (0, 0) est un nœud asymptotiquement stable du système linéaire (23) et du système localement linéaire (14).
2. Si $\gamma^2 - 4\omega^2 = 0$, les valeurs propres sont réelles, égales et négatives. Le point critique (0, 0) est un nœud (propre ou impropre) asymptotiquement stable du système linéaire (23). Il peut être soit un nœud asymptotiquement stable, soit un point spirale asymptotiquement stable du système localement linéaire (14).
3. Si $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$, les valeurs propres sont des nombres complexes avec une partie réelle négative. Le point critique (0, 0) est un point spirale asymptotiquement stable du système linéaire (23) et du système localement linéaire (14).

Par conséquent, le point critique $(0, 0)$ est un point spirale du système (14) si l'amortissement est faible et un nœud si l'amortissement est suffisamment important. Peu importe le cas, l'origine est asymptotiquement stable.

Considérons maintenant le cas $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$, qui correspond à un faible amortissement, plus en détail. La direction du mouvement sur les spirales près de $(0, 0)$ peut être obtenue directement à partir des équations (14).

Considérons le point où une spirale croise la partie positive de l'axe des y ($x = 0$ et $y > 0$). Il découle des équations (14) qu'en un tel point, $dx/dt > 0$. Par conséquent, le point (x, y) sur la trajectoire se déplace vers la droite, donc le mouvement sur les spirales s'effectue dans le sens des aiguilles d'une montre.

Le comportement du pendule près des points critiques $(\pm n\pi, 0)$, où n est pair, est le même que près de l'origine. C'est le résultat auquel on s'attend physiquement, puisque tous ces points critiques correspondent à la position d'équilibre inférieure du pendule. On peut confirmer cette conclusion en répétant l'analyse effectuée précédemment pour l'origine. La figure 5.11.6 montre des spirales tournant dans le sens des aiguilles d'une montre en quelques-uns de ces points critiques.

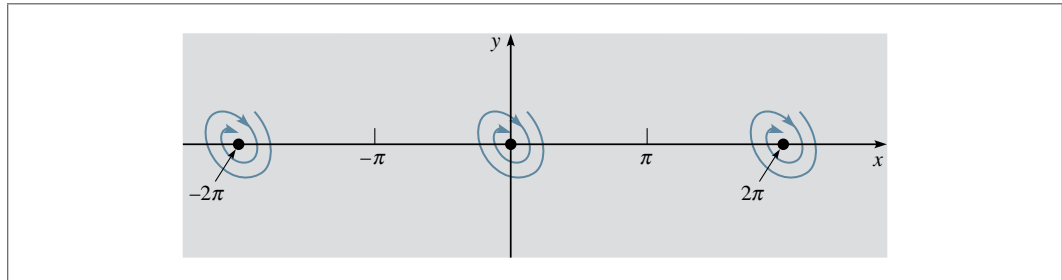


Figure 5.11.6 Des points spirales asymptotiquement stables pour le pendule amorti.

Considérons maintenant le point critique $(\pi, 0)$. Ici, les équations non linéaires (14) sont représentées approximativement par le système linéaire (24), dont les valeurs propres sont

$$r_1, r_2 = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 4\omega^2}}{2}. \quad (26)$$

Une des valeurs propres (r_1) est positive et l'autre (r_2) est négative. Par conséquent, quelle que soit l'importance de l'amortissement, le point critique $x = \pi, y = 0$ est un point de selle instable, tant dans le système linéaire (24) que dans le système localement linéaire (14).

Pour examiner plus en détail le comportement des trajectoires près du point de selle $(\pi, 0)$, on écrit la solution générale des équations (24), à savoir,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ r_1 \end{pmatrix} e^{r_1 t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ r_2 \end{pmatrix} e^{r_2 t}, \quad (27)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. Puisque $r_1 > 0$ et $r_2 < 0$, il s'ensuit que la solution qui s'approche de zéro lorsque $t \rightarrow \infty$ correspond à $C_1 = 0$. Pour cette solution, $v/u = r_2$, donc la pente des trajectoires entrantes est négative; l'une se trouve dans le deuxième quadrant ($C_2 < 0$) et l'autre se trouve dans le quatrième quadrant ($C_2 > 0$). Pour $C_2 = 0$, on obtient la paire de trajectoires qui « sortent » du point de selle. Ces trajectoires ont une pente $r_1 > 0$; l'une se trouve dans le premier quadrant ($C_1 > 0$) et l'autre se trouve dans le troisième quadrant ($C_1 < 0$).

La situation est la même en d'autres points critiques $(n\pi, 0)$ où n est impair. Ces points correspondent tous à la position d'équilibre supérieure du pendule; on s'attend donc à ce qu'ils soient instables. On peut répéter l'analyse au point $(\pi, 0)$ pour montrer que les points sont des points de selle ayant la même orientation que le point $(\pi, 0)$. La figure 5.11.7 montre les schémas des trajectoires au voisinage de deux points de selle.

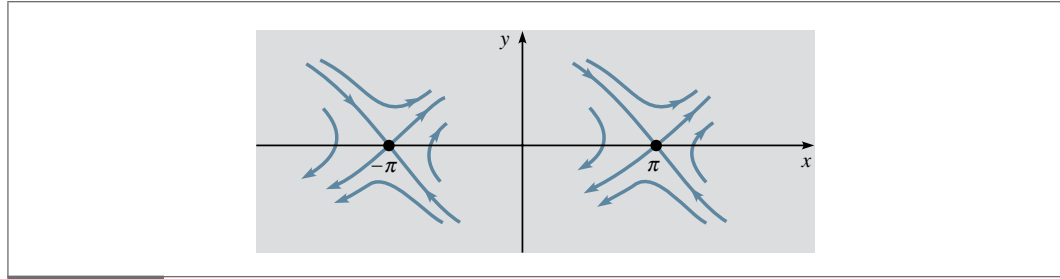


Figure 5.11.7 Des points de selle instables pour le pendule amorti.

Exemple 5

Les équations du mouvement d'un certain pendule sont

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -9 \sin x - \frac{1}{5}y, \quad (28)$$

où $x = \theta$ et $y = d\theta/dt$. Tracez un portrait de phase de ce système et expliquez la façon dont il montre les mouvements possibles du pendule.

En traçant les trajectoires à partir de divers points initiaux dans le plan de phase, on obtient le portrait de phase illustré dans la figure 5.11.8. Comme on l'a vu, les points critiques (solutions d'équilibre) sont les points $(n\pi, 0)$, où $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Les valeurs paires de n , y compris zéro, correspondent à la position inférieure du pendule, tandis que les valeurs impaires de n correspondent à la position supérieure. Près de chaque point critique asymptotiquement stable, les trajectoires sont des spirales tournant dans le sens des aiguilles d'une montre et représentent une oscillation décroissante autour de la position d'équilibre inférieure. Les portions horizontales ondulées des trajectoires qui apparaissent pour de plus grandes valeurs de $|y|$ représentent les mouvements tourbillonnants du pendule. Remarquez qu'un mouvement tourbillonnant ne peut pas continuer indéfiniment, peu importe la grandeur que peut atteindre $|y|$; la vitesse angulaire finit par être tellement réduite par le terme lié à l'amortissement que le pendule ne peut plus remonter jusqu'en haut et commence plutôt à osciller autour de sa position inférieure.

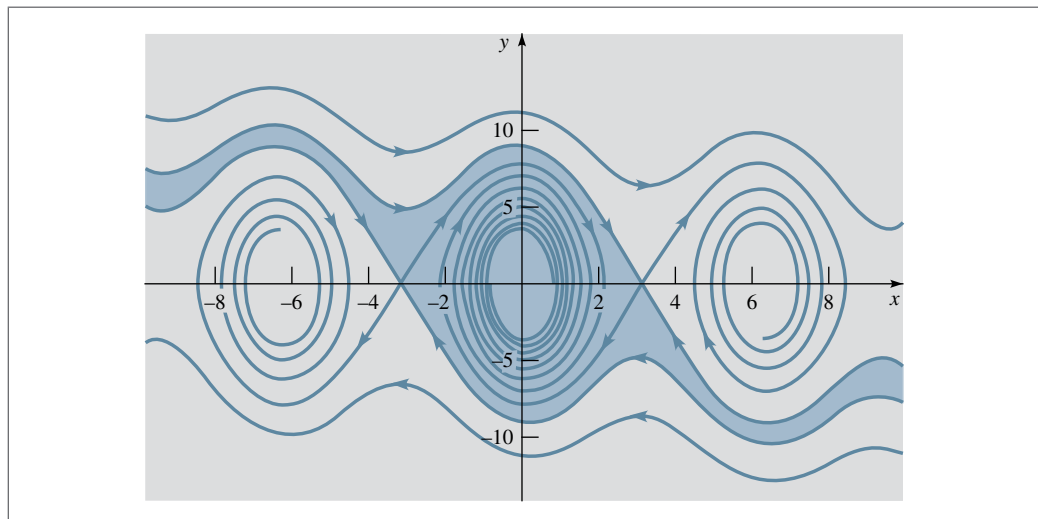


Figure 5.11.8 Un portrait de phase pour le pendule amorti de l'exemple 5.

Dans le cas de l'origine, le bassin d'attraction est la région bleutée de la figure 5.11.8. Il est borné par les trajectoires qui entrent dans les deux points de selle adjacents, $(\pi, 0)$ et $(-\pi, 0)$. Les trajectoires limites sont appelées séparatrices. Chaque point critique asymptotiquement stable possède son propre bassin d'attraction, qui est borné par les séparatrices entrant dans les deux points de selle adjacents.

Tous les bassins d'attraction sont congruents au bassin bleuté; la seule différence est qu'ils ont subi une translation horizontale d'une distance appropriée. Remarquez qu'il est mathématiquement possible (mais physiquement irréalisable) de choisir des conditions initiales se trouvant exactement sur une séparatrice de sorte que le mouvement résultant mène à un pendule équilibré dans une position verticale supérieure dont l'équilibre est instable.

Une importante différence entre les systèmes autonomes non linéaires et les systèmes linéaires examinés à la section 5.10 est illustrée par les équations du pendule. Rappelez-vous que le système linéaire (8) n'a qu'un seul point critique, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, si $\det \mathbf{A} \neq 0$. Par conséquent, si l'origine est asymptotiquement stable, toutes les trajectoires, et non pas seulement celles qui débutent près de l'origine, s'approchent de celle-ci. Dans ce cas, le point critique $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est dit **globalement asymptotiquement stable**. Cette propriété des systèmes linéaires n'est pas, en général, vraie pour les systèmes non linéaires, même si le système non linéaire n'a qu'un seul point critique asymptotiquement stable. Par conséquent, pour les systèmes non linéaires, il est important de déterminer (ou d'estimer) le bassin d'attraction pour chaque point critique asymptotiquement stable.

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 4, vérifiez que $(0, 0)$ est un point critique, montrez que le système est localement linéaire et discutez du type et de la stabilité du point critique $(0, 0)$ en examinant le système linéaire correspondant.

1. $dx/dt = x - y^2$, $dy/dt = x - 2y + x^2$
2. $dx/dt = -x + y + 2xy$, $dy/dt = -4x - y + x^2 - y^2$
3. $dx/dt = (1 + x)\sin y$, $dy/dt = 1 - x - \cos y$
4. $dx/dt = x + y^2$, $dy/dt = x + y$

- Dans les problèmes 5 à 18, procédez comme suit.

- a) Déterminez tous les points critiques du système d'équations donné.
- b) Trouvez le système linéaire correspondant près de chaque point critique.
- c) Trouvez les valeurs propres de chaque système linéaire. Quelles conclusions pouvez-vous ensuite tirer au sujet du système non linéaire ?
- d) Tracez un portrait de phase du système non linéaire pour confirmer vos conclusions ou pour les étendre aux cas où le système linéaire ne fournit pas de renseignements précis au sujet du système non linéaire.

- ⊕ 5. $dx/dt = (2 + x)(y - x)$, $dy/dt = (4 - x)(y + x)$
- ⊕ 6. $dx/dt = x - x^2 - xy$, $dy/dt = 3y - xy - 2y^2$
- ⊕ 7. $dx/dt = 1 - y$, $dy/dt = x^2 - y^2$
- ⊕ 8. $dx/dt = x - x^2 - xy$, $dy/dt = \frac{1}{2}y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{3}{4}xy$
- ⊕ 9. $dx/dt = (2 + y)(y - 0,5x)$, $dy/dt = (2 - x)(y + 0,5x)$
- ⊕ 10. $dx/dt = x + x^2 + y^2$, $dy/dt = y - xy$
- ⊕ 11. $dx/dt = 2x + y + xy^3$, $dy/dt = x - 2y - xy$
- ⊕ 12. $dx/dt = (1 + x)\sin y$, $dy/dt = 1 - x - \cos y$
- ⊕ 13. $dx/dt = x - y^2$, $dy/dt = y - x^2$
- ⊕ 14. $dx/dt = 1 - xy$, $dy/dt = x - y^3$
- ⊕ 15. $dx/dt = -2x - y - x(x^2 + y^2)$, $dy/dt = x - y + y(x^2 + y^2)$
- ⊕ 16. $dx/dt = y + x(1 - x^2 - y^2)$, $dy/dt = -x + y(1 - x^2 - y^2)$
- ⊕ 17. $dx/dt = 4 - y^2$, $dy/dt = (1,5 + x)(y - x)$
- ⊕ 18. $dx/dt = (1 - y)(2x - y)$, $dy/dt = (2 + x)(x - 2y)$

19. Considérez le système autonome

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = x + 2x^3.$$

- a) Montrez que le point critique $(0, 0)$ est un point de selle.
- b) Esquissez les trajectoires du système linéaire correspondant en intégrant l'équation dy/dx . Montrez, à partir de la forme paramétrique de la solution, que la seule trajectoire pour laquelle $x \rightarrow 0$ et $y \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ est $y = -x$.
- c) Déterminez les trajectoires du système non linéaire en intégrant l'équation dy/dx . Esquissez les trajectoires du système non linéaire qui correspondent à $y = -x$ et à $y = x$ dans le système linéaire.

20. Considérez le système autonome

$$dx/dt = x, \quad dy/dt = -2y + x^3.$$

- a) Montrez que le point critique $(0, 0)$ est un point de selle.
- b) Esquissez les trajectoires du système linéaire correspondant et montrez que la trajectoire pour laquelle $x \rightarrow 0$ et $y \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ est donnée par $x = 0$.
- c) Déterminez les trajectoires du système non linéaire pour $x \neq 0$ en intégrant l'équation dy/dx . Montrez que la trajectoire correspondant à $x = 0$ dans le système linéaire demeure inchangée, mais que celle correspondant à $y = 0$ devient $y = x^3/5$. Esquissez quelques trajectoires du système non linéaire.

21. L'équation du mouvement d'un pendule non amorti est $d^2\theta/dt^2 + \omega^2 \sin\theta = 0$, où $\omega^2 = g/L$. Posez $x = 0$ et $y = d\theta/dt$ pour obtenir le système d'équations

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -\omega^2 \sin x.$$

- a) Montrez que les points critiques sont $(\pm n\pi, 0)$, où $n = 0, 1, 2, \dots$, et que le système est localement linéaire au voisinage de chaque point critique.
 - b) Montrez que le point critique $(0, 0)$ est un centre (stable) du système linéaire correspondant. En vous appuyant sur le théorème 5.11.2, que pouvez-vous dire au sujet du système non linéaire? La situation est similaire aux points critiques $(\pm 2n\pi, 0)$, où $n = 1, 2, 3, \dots$. Quelle est l'interprétation physique de ces points critiques?
 - c) Montrez que le point critique $(\pi, 0)$ est un point de selle (instable) du système linéaire correspondant. Quelle conclusion pouvez-vous tirer au sujet du système non linéaire? La situation est similaire aux points critiques $(\pm(2n-1)\pi, 0)$, où $n = 1, 2, 3, \dots$. Quelle est l'interprétation physique de ces points critiques?
 - d) Choisissez une valeur de ω^2 et tracez quelques trajectoires du système non linéaire au voisinage de l'origine. Pouvez-vous maintenant tirer d'autres conclusions au sujet de la nature du point critique $(0, 0)$ du système non linéaire?
 - e) En utilisant la valeur de ω^2 choisie à la partie d), tracez un portrait de phase du pendule. Comparez votre portrait avec la figure 5.11.8 tracée pour un pendule amorti.
22. a) En résolvant l'équation dy/dx , montrez que l'équation des trajectoires du pendule non amorti du problème 21 peut s'écrire ainsi :

$$\frac{1}{2}y^2 + \omega^2(1 - \cos x) = c, \quad (i)$$

où c est une constante d'intégration.

- b) Multipliez l'équation (i) par mL^2 . Exprimez ensuite le résultat en fonction de θ pour obtenir

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1 - \cos\theta) = E, \quad (ii)$$

où $E = mL^2c$.

- c) Montrez que le premier terme de l'équation (ii) est l'énergie cinétique du pendule et que le second terme est l'énergie potentielle due à la gravité. Par conséquent, l'énergie totale E du pendule est constante le long de n'importe quelle trajectoire et sa valeur est déterminée par les conditions initiales.

- ▶ 23. Le mouvement d'un certain pendule non amorti est décrit par les équations

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -4 \sin x.$$

Si le pendule est mis en mouvement avec un écart angulaire A et une vitesse initiale nulle, les conditions initiales sont $x(0) = A$ et $y(0) = 0$.

- Posez $A = 0,25$ et tracez le graphique de x en fonction de t . D'après le graphique, estimez l'amplitude R et la période T du mouvement résultant du pendule.
- Refaites la partie a) pour $A = 0,5$; $1,0$; $1,5$ et $2,0$.
- En quoi l'amplitude et la période du mouvement du pendule dépendent-elles de la position initiale A ? Tracez un graphique pour illustrer chacune de ces relations. Pouvez-vous dire quoi que ce soit au sujet de la valeur limite de la période lorsque $A \rightarrow 0$?
- Posez $A = 4$ et tracez le graphique de x en fonction de t . Expliquez la raison pour laquelle ce graphique est différent de ceux tracés dans les parties a) et b). Pour quelle valeur de A la transition a-t-elle lieu?

24. Considérez de nouveau les équations du pendule (voir le problème 23)

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -4 \sin x.$$

Si le pendule est mis en mouvement à partir de sa position d'équilibre inférieure avec une vitesse angulaire v , les conditions initiales sont $x(0) = 0$ et $y(0) = v$.

- Tracez le graphique de x en fonction de t pour $v = 2$ et pour $v = 5$. Expliquez les différents mouvements du pendule que ces deux graphiques représentent.
- Il existe une valeur critique de v , notée v_c , telle qu'un type de mouvement se produit quand $v < v_c$ et qu'un autre type se produit quand $v > v_c$. Estimez la valeur de v_c .

25. Ce problème étend le problème 24 à un pendule amorti. Les équations du mouvement sont

$$dx/dt = y, \quad dy/dt = -4 \sin x - \gamma y,$$

où γ est le coefficient d'amortissement, sous les conditions initiales $x(0) = 0$ et $y(0) = v$.

- Pour $\gamma = 1/4$, tracez le graphique de x en fonction de t quand $v = 2$ et quand $v = 5$. Expliquez ces graphiques par rapport aux mouvements du pendule qu'ils représentent. Expliquez aussi la façon dont ils sont liés aux graphiques correspondants du problème 24 a).
- Estimez la valeur critique v_c de la vitesse initiale où la transition d'un type de mouvement à l'autre se produit.
- Refaites la partie b) pour d'autres valeurs de γ et déterminez la façon dont v_c dépend de γ .

26. Le théorème 5.11.2 ne fournit aucun renseignement au sujet de la stabilité d'un point critique d'un système localement linéaire si ce point est un centre du système linéaire correspondant. Le fait que ce soit effectivement le cas est illustré par les systèmes

$$dx/dt = y + x(x^2 + y^2), \quad dy/dt = -x + y(x^2 + y^2) \quad (i)$$

et

$$dx/dt = y - x(x^2 + y^2), \quad dy/dt = -x - y(x^2 + y^2). \quad (ii)$$

- Montrez que le point $(0, 0)$ est un point critique de chaque système et qu'il est, de plus, un centre du système linéaire correspondant.
- Montrez que chaque système est localement linéaire.
- Posez $r^2 = x^2 + y^2$ et remarquez que $x dx/dt + y dy/dt = r dr/dt$. Pour le système (ii), montrez que $dr/dt < 0$ et que $r \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$; par conséquent, le point critique est asymptotiquement stable. Pour le système (i), montrez que la solution au problème de valeur initiale de r quand $r = r_0$ à $t = 0$ devient non bornée lorsque $t \rightarrow 1/2r_0^2$ et que, par conséquent, le point critique est instable.

27. Dans ce problème, on montre que de petits changements dans les coefficients d'un système d'équations linéaires peuvent influencer sur un point critique qui est un centre. Considérez le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

Montrez que les valeurs propres sont $\pm i$, de sorte que $(0, 0)$ est un centre. Considérez maintenant le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

où $|\varepsilon|$ est arbitrairement petit. Montrez que les valeurs propres sont $\varepsilon \pm i$. Par conséquent, peu importe à quel point $|\varepsilon| \neq 0$ est petit, le centre devient un point spirale. Si $\varepsilon < 0$, le point spirale est asymptotiquement stable; si $\varepsilon > 0$, le point spirale est instable.

28. Dans ce problème, on montre que de petits changements dans les coefficients d'un système d'équations linéaires peuvent influencer sur la nature d'un point critique quand les valeurs propres sont égales. Considérez le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Montrez que les valeurs propres sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -1$, de sorte que le point critique $(0, 0)$ est un nœud asymptotiquement stable. Considérez maintenant le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\varepsilon & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

où $|\varepsilon|$ est arbitrairement petit. Montrez que si $\varepsilon > 0$, les valeurs propres sont $-1 \pm i\sqrt{\varepsilon}$, de sorte que le nœud asymptotiquement stable devient un point spirale asymptotiquement stable. Si $\varepsilon < 0$, les racines sont $-1 \pm \sqrt{|\varepsilon|}$ et le point critique demeure un nœud asymptotiquement stable.

29. Dans ce problème, on développe une formule pour la période naturelle d'un pendule non linéaire non amorti. Le mouvement du pendule (de longueur L) est décrit par l'équation

$$mL^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin\theta. \quad (i)$$

Supposez que la masse du pendule est tirée de façon à former un angle positif α , puis qu'elle est relâchée avec une vitesse initiale nulle.

- a) On considère généralement θ et $d\theta/dt$ comme des fonctions de t . Cependant, si on inverse les rôles de t et de θ , on peut considérer t comme une fonction de θ et, par conséquent, on peut aussi considérer $d\theta/dt$ comme une fonction de θ . Alors, développez la série d'équations suivante :

$$\frac{1}{2} mL^2 \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -mgL \sin\theta$$

$$\frac{1}{2} m \left(L \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mgL (\cos\theta - \cos\alpha),$$

$$dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}.$$

Pourquoi a-t-on choisi la racine carrée négative dans la dernière équation ?

- b) Si T est la période naturelle d'oscillation, développez la formule

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_{\alpha}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

- c) En utilisant les identités $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ et $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2(\alpha/2)$, et en remplaçant la variable $\sin(\theta/2) = k \sin\phi$ par $k = \sin(\alpha/2)$, montrez que

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\phi}}.$$

Cette intégrale est appelée l'intégrale elliptique de première espèce. Remarquez que la période dépend du rapport L/g et aussi du déplacement initial α à cause de $k = \sin(\alpha/2)$.

- d) En évaluant l'intégrale de l'expression qui représente T , calculez des valeurs de T que vous pouvez comparer avec les estimations graphiques obtenues au problème 23.
30. L'équation de Liénard¹² est une généralisation de l'équation du pendule amorti discutée dans le texte, ou d'un système masse-ressort amorti :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + c(x)\frac{dx}{dt} + g(x) = 0.$$

Si $c(x)$ est une constante et $g(x) = kx$, cette équation a la même forme que l'équation linéaire du pendule (remplacez $\sin \theta$ par θ dans l'équation (i) du problème 29) ; par ailleurs, la force d'amortissement $c(x)dx/dt$ et la force de rétablissement $g(x)$ sont non linéaires. Supposez que c est dérivable et que sa dérivée est continue, que g est dérivable deux fois et que sa dérivée est continue et que $g(0) = 0$.

- a) Écrivez l'équation de Liénard sous la forme d'un système de deux équations du premier ordre en introduisant la variable $y = dx/dt$.
- b) Montrez que $(0, 0)$ est un point critique et que le système est localement linéaire au voisinage de $(0, 0)$.
- c) Montrez que si $c(0) > 0$ et $g'(0) > 0$, le point critique est asymptotiquement stable et que si $c(0) < 0$ ou $g'(0) < 0$, le point critique est instable.

Suggestion : Utilisez les séries de Taylor pour faire une approximation de c et de g au voisinage de $x = 0$.

Références

- Pour obtenir des renseignements supplémentaires sur les matrices et l'algèbre linéaire, vous devrez consulter des manuels d'introduction sur le sujet. Les ouvrages suivants en sont de bons exemples :
 ANTON, H. et C. RORRES. *Elementary Linear Algebra*, 8^e édition, New York, Wiley, 2000.
 JOHNSON, L. W., R. D. RIESS et J. T. ARNOLD. *Introduction to Linear Algebra*, 4^e édition, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1997.
 KOLMAN, B. *Elementary Linear Algebra*, 7^e édition, Upper Saddle River, New Jersey, Prentice Hall, 1999.
 LAY, D. C. *Linear Algebra and Its Applications*, 4^e édition, Boston, Addison-Wesley, 2012.
 LEON, S. J. *Linear Algebra with Applications*, 4^e édition, New York, Macmillan, 1994.
 STRANG, G. *Linear Algebra and its Applications*, 3^e édition, New York, Academic Press, 1988.
- On peut trouver un traitement plus approfondi des systèmes d'équations linéaires du premier ordre dans de nombreux ouvrages, dont les suivants :
 CODDINGTON, E. A. et R. CARLSON. *Linear Ordinary Differential Equations*, Philadelphie, Pennsylvanie, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.
 HIRSCH, M. W., S. SMALE et R. L. DEVANEY. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*, 2^e édition, San Diego, Californie, Academic Press, 2004.
- Dans l'ouvrage suivant, on traite d'équations différentielles élémentaires en mettant l'accent sur les systèmes d'équations du premier ordre :
 BRANNAN, J. R. et W. E. BOYCE. *Differential Equations : An Introduction to Modern Methods and Applications*, 2^e édition, New York, Wiley, 2011.

12. Alfred-Marie Liénard (1869-1958), un physicien et ingénieur français, a été professeur à l'École des Mines à Paris. Il a travaillé principalement en électricité, en mécanique et en mathématiques appliquées. Les résultats de son étude de cette équation différentielle ont été publiés en 1928.

Les transformées de Laplace

Plusieurs applications en ingénierie impliquent des systèmes électriques ou mécaniques régis par des fonctions discontinues ou des fonctions impulsion. Pour résoudre ces problèmes, les méthodes décrites au chapitre 3 sont souvent inefficaces. Cependant, il existe une approche basée sur la transformée de Laplace particulièrement appropriée pour des problèmes d'ordre plus général. Dans ce chapitre, nous décrirons cette méthode importante en mettant l'accent sur des problèmes typiques qu'on trouve dans les applications en ingénierie.

6.1 Définition de la transformée de Laplace

Les intégrales impropres Puisque la transformée de Laplace est une intégrale entre zéro et l'infini, une connaissance des intégrales impropres de ce type est nécessaire si on veut comprendre le développement ultérieur des propriétés de la transformée. On offre ici une brève révision des intégrales impropres de ce type. Si les intégrales impropres vous sont déjà familières, vous pouvez omettre cette révision. Par contre, si vous ne connaissez pas ces intégrales, vous devriez probablement consulter un manuel de calcul différentiel et intégral, où vous trouverez beaucoup plus de détails et d'exemples.

Tout d'abord, une intégrale dans un intervalle non borné est appelée **intégrale impropre** et est définie comme une limite d'intégrales dans des intervalles finis. Ainsi,

$$\int_a^\infty f(t)dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^A f(t)dt, \quad (1)$$

où A est un nombre réel positif. Si l'intégrale de a à A existe pour tout $A > a$ et si la limite existe lorsque $A \rightarrow \infty$, l'intégrale impropre est **convergente** vers cette limite. Sinon, l'intégrale est **divergente** et n'existe pas. Les exemples suivants illustrent ces deux possibilités.

Exemple 1

Considérez $f(t) = e^{ct}$, $t \geq 0$, où c est une constante non nulle. Alors,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{ct} dt &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{ct} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{ct}}{c} \right|_0^A \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{c} (e^{cA} - 1). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'intégrale impropre converge si $c < 0$ et diverge si $c > 0$. Lorsque $c = 0$, l'intégrande $f(t)$ est la fonction constante de valeur 1 et l'intégrale diverge également.

Exemple 2

Considérez $f(t) = 1/t$, $t \geq 1$. Alors,

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{t} = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \frac{dt}{t} = \lim_{A \rightarrow \infty} \ln A.$$

Puisque $\lim_{A \rightarrow \infty} \ln A = \infty$, l'intégrale impropre diverge.

Exemple 3

Considérez $f(t) = t^{-p}$, $t \geq 1$ où p est une constante et $p \neq 1$ (le cas $p = 1$ a été traité dans l'exemple 2). Alors,

$$\int_1^{\infty} t^{-p} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A t^{-p} dt = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{1-p} (A^{1-p} - 1).$$

Lorsque $A \rightarrow \infty$, $A^{1-p} \rightarrow 0$ si $p > 1$, $A^{1-p} \rightarrow \infty$ si $p < 1$. Ainsi, $\int_1^{\infty} t^{-p} dt$ converge pour $p > 1$, mais (en ajoutant le résultat de l'exemple 2) elle diverge pour $p \leq 1$. Ces résultats sont analogues à ceux qui concernent la convergence de la série infinie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$.

Avant de discuter l'existence de $\int_a^{\infty} f(t) dt$, on doit définir certains termes. Une fonction f est **continue par morceaux** dans l'intervalle $\alpha \leq t \leq \beta$ si l'intervalle peut être partitionné à l'aide d'un nombre fini de points $\alpha = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \beta$, de sorte que

1. f est continue dans chaque sous-intervalle ouvert $t_{i-1} < t < t_i$;
2. f admet une limite finie lorsque t tend vers les extrémités de chaque sous-intervalle par l'intérieur du sous-intervalle.

Autrement dit, f est continue par morceaux dans $\alpha \leq t \leq \beta$ si elle y est continue, sauf en un nombre fini de discontinuités de type saut. Si f est continue par morceaux dans $\alpha \leq t \leq \beta$ pour tout $\beta > \alpha$, alors f est considérée comme une fonction continue par morceaux pour $t \geq \alpha$. La figure 6.1.1 illustre un exemple de fonction continue par morceaux.

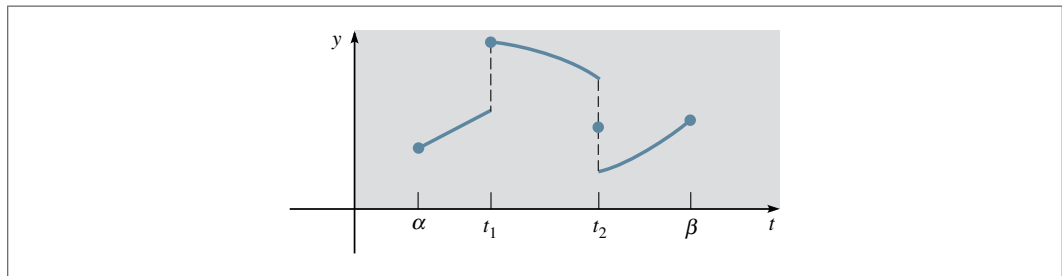


Figure 6.1.1 Fonction continue par morceaux $y = f(t)$.

L'intégrale d'une fonction continue par morceaux dans un intervalle fini est simplement la somme des intégrales dans les sous-intervalles créés par les points de partition. Par exemple, pour la fonction $f(t)$ illustrée dans la figure 6.1.1, on a

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^{t_1} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt + \int_{t_2}^{\beta} f(t) dt. \quad (2)$$

Pour la fonction illustrée dans la figure 6.1.1, on lui a assigné des valeurs aux points α et β , ainsi qu'aux points de partition t_1 et t_2 . Cependant, en ce qui concerne les intégrales de l'équation (2), il importe peu de savoir si $f(t)$ est défini en ces points ou de connaître les valeurs assignées à $f(t)$ en ces points. Les valeurs des intégrales de l'équation (2) restent les mêmes.

Par conséquent, si f est une fonction continue par morceaux dans l'intervalle $a \leq t \leq A$, alors $\int_a^A f(t)dt$ existe. Ainsi, si f est continue par morceaux pour $t \geq a$, alors $\int_a^A f(t)dt$ existe pour tout $A > a$. Cependant, la continuité par morceaux n'assure pas la convergence d'une intégrale impropre $\int_a^\infty f(t)dt$, comme on a pu le voir dans les exemples précédents.

Si on ne peut pas facilement obtenir une primitive de f en termes de fonctions élémentaires, la définition de convergence de $\int_a^\infty f(t)dt$ peut être difficile à appliquer. Pour établir la convergence ou la divergence d'une intégrale impropre, on utilise souvent le théorème de comparaison suivant, qui est analogue à un théorème classique concernant la convergence des séries infinies.

Théorème 6.1.1

Si f est continue par morceaux pour $t \geq a$, si $|f(t)| \leq g(t)$ lorsque $t \geq M$, où M est une constante positive, et si $\int_M^\infty g(t)dt$ converge, alors $\int_a^\infty f(t)dt$ converge également. De plus, si $f(t) \geq g(t) \geq 0$ pour $t \geq M$ et si $\int_M^\infty g(t)dt$ diverge, alors $\int_a^\infty f(t)dt$ diverge aussi.

La preuve de ce résultat sera omise ici. On peut se convaincre de sa validité en comparant l'aire des régions représentées par $\int_M^\infty g(t)dt$ et $\int_M^\infty |f(t)| dt$. À des fins de comparaison, les fonctions usuelles sont e^{ct} et t^{-p} , déjà utilisées dans les exemples 1, 2 et 3.

Les transformées intégrales Les **transformées intégrales** font partie des outils fort utiles pour la résolution des équations différentielles linéaires. Une transformée intégrale est une relation de la forme

$$F(s) = \int_\alpha^\beta K(s, t)f(t)dt, \quad (3)$$

où $K(s, t)$ est une fonction donnée appelée **noyau** de la transformation et où les bornes d'intégration α et β sont spécifiées. On peut avoir $\alpha = -\infty$ ou $\beta = \infty$ ou les deux. La relation (3) permet de transformer la fonction f en une autre fonction F , appelée la « transformée de f ».

Plusieurs transformées intégrales sont utiles en mathématiques appliquées, mais ce chapitre considérera seulement la transformée de Laplace¹, qu'on définit de la façon suivante. Posez $f(t)$ pour $t \geq 0$ et supposez que f satisfait à certaines conditions qui seront précisées un peu plus tard. Dans ce cas, la transformée de Laplace de f , qu'on note $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ou $F(s)$, est définie par l'équation

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \quad (4)$$

quand cette intégrale impropre converge. La transformée de Laplace se sert du noyau $K(s, t) = e^{-st}$. Puisque les solutions aux équations différentielles linéaires à coefficients constants sont basées sur la fonction exponentielle, la transformée de Laplace est particulièrement utile pour résoudre de telles équations. Voici l'idée générale derrière l'utilisation de la transformée de Laplace pour résoudre une équation différentielle :

1. On utilise la relation (4) pour transformer un problème de valeur initiale concernant une fonction inconnue f dans le domaine des t en un problème plus simple (en fait, un problème algébrique) concernant F dans le domaine des s .

1. La transformée de Laplace porte le nom de l'éminent mathématicien français Pierre Simon de Laplace, qui a étudié la relation (2) en 1782. Cependant, les techniques décrites dans ce chapitre ont été élaborées il y a seulement un siècle. Elles sont principalement le fruit des travaux d'Oliver Heaviside (1850-1925), un ingénieur anglais innovateur qui a largement contribué à la conception et à l'application de la théorie de l'électromagnétisme.

2. On résout ce problème algébrique pour déterminer F .
3. On récupère la fonction recherchée f à partir de sa transformée F . Cette dernière étape est appelée la « transformée inverse ».

En général, le paramètre s peut être une variable complexe, et la pleine puissance de la transformée de Laplace devient disponible seulement si on considère $F(s)$ comme une fonction d'une variable complexe. Cependant, pour les problèmes étudiés ici, il est suffisant de considérer uniquement des valeurs réelles de s . La transformée de Laplace F d'une fonction f existe si f satisfait à certaines conditions, comme celles précisées dans le théorème suivant.

Théorème 6.1.2

Supposez

1. que f est continue par morceaux dans l'intervalle $0 \leq t \leq A$ pour tout A positif ;
2. qu'il existe des constantes K , a et M (K et M étant positives) telles que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ pour $t \geq M$.

Alors, la transformée de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ définie par l'équation (4) existe pour $s > a$.

Afin de démontrer ce théorème, il faut montrer que l'intégrale dans l'équation (4) converge pour $s > a$. En séparant l'intégrale impropre en deux parties, on a

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^M e^{-st} f(t) dt + \int_M^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (5)$$

La première intégrale du second membre de l'équation (5) existe selon l'hypothèse (1) du théorème. Ainsi, l'existence de $F(s)$ dépend de la convergence de la deuxième intégrale. Selon l'hypothèse (2), on a, pour $t \geq M$,

$$|e^{-st} f(t)| \leq Ke^{-st} e^{at} = Ke^{(a-s)t}$$

et, par conséquent, d'après le théorème 6.1.1, $F(s)$ existe si $\int_M^{\infty} e^{(a-s)t} dt$ converge. En se reportant à l'exemple 1, où on substitue $a - s$ à c , on voit que la dernière intégrale converge lorsque $a - s < 0$, ce qui permet de démontrer le théorème 6.1.2.

À moins d'avis contraire, on considérera que les fonctions abordées dans ce chapitre satisfont aux conditions du théorème 6.1.2. De telles fonctions sont décrites comme étant continues par morceaux et elles sont d'**ordre exponentiel** lorsque $t \rightarrow \infty$. Les transformées de Laplace de certaines fonctions élémentaires importantes sont données dans les exemples suivants.

Exemple 4

Considérez $f(t) = 1$ lorsque $t \geq 0$. Alors,

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

Exemple 5

Considérez $f(t) = e^{at}$ lorsque $t \geq 0$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt \\ &= \frac{1}{s-a}, \quad s > a. \end{aligned}$$

Exemple 6

Posez

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ k, & t = 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

où k est une constante. Dans des contextes d'ingénierie, $f(t)$ représente souvent une impulsion unité, peut-être associée à une force ou à une tension.

Notez que f est une fonction continue par morceaux. Dans ce cas,

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} dt = -\frac{e^{-st}}{s} \Big|_0^1 = \frac{1 - e^{-s}}{s}, \quad s > 0.$$

Remarquez que $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ne dépend pas de k , la valeur de la fonction au point de discontinuité. Même si $f(t)$ n'est pas définie en ce point, la transformée de Laplace de f reste la même. Par conséquent, de nombreuses fonctions, qui se distinguent seulement par leur valeur en un point unique, admettent la même transformée de Laplace.

Exemple 7

Considérez $f(t) = \sin at$ lorsque $t \geq 0$. Alors,

$$\mathcal{L}\{\sin at\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at \, dt, \quad s > 0.$$

Puisque

$$F(s) = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A e^{-st} \sin at \, dt,$$

en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} F(s) &= \lim_{A \rightarrow \infty} \left[-\frac{e^{-st} \cos at}{a} \Big|_0^A - \frac{s}{a} \int_0^A e^{-st} \cos at \, dt \right] \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \int_0^{\infty} e^{-st} \cos at \, dt. \end{aligned}$$

Une deuxième intégration par parties mène à

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} \int_0^{\infty} e^{-st} \sin at \, dt \\ &= \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s). \end{aligned}$$

Ainsi, en résolvant pour déterminer $F(s)$, on a

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0.$$

Maintenant, on suppose que f_1 et f_2 sont deux fonctions dont les transformées de Laplace existent respectivement pour $s > a_1$ et $s > a_2$. Si s est supérieur au maximum entre a_1 et a_2 , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} [c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] dt \\ &= c_1 \int_0^{\infty} e^{-st} f_1(t) dt + c_2 \int_0^{\infty} e^{-st} f_2(t) dt. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + c_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\}. \quad (6)$$

L'équation (6) indique que la transformée de Laplace est un **opérateur linéaire**. On utilisera fréquemment cette propriété ultérieurement. On peut facilement étendre la somme de l'équation (6) à un nombre arbitraire de termes.

Exemple 8

Trouvez la transformée de Laplace de $f(t) = 5e^{-2t} - 3\sin 4t$, $t \geq 0$.

En utilisant l'équation (6), on écrit

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 5\mathcal{L}\{e^{-2t}\} - 3\mathcal{L}\{\sin 4t\}.$$

Ensuite, à partir des exemples 5 et 7, on obtient

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{5}{s+2} - \frac{12}{s^2+16}, \quad s > 0.$$

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 4, tracez le graphe de la fonction. Dans chaque cas, déterminez si f est continue, continue par morceaux ou ni l'un ni l'autre dans l'intervalle $0 \leq t \leq 3$.

$$1. f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 2+t, & 1 < t \leq 2 \\ 6-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

$$2. f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1)^{-1}, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

$$3. f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 3-t, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

$$4. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 3-t, & 1 < t \leq 2 \\ 1, & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

5. Trouvez la transformée de Laplace de chacune des fonctions qui suivent.

a) $f(t) = t$

b) $f(t) = t^2$

c) $f(t) = t^n$, où n est un entier positif

6. Trouvez la transformée de Laplace de $f(t) = \cos at$, où a est une constante.

- Rappelez-vous que $\cosh bt = (e^{bt} + e^{-bt})/2$ et que $\sinh bt = (e^{bt} - e^{-bt})/2$. Dans les problèmes 7 à 10, trouvez la transformée de Laplace de la fonction, où a et b sont des constantes.

7. $f(t) = \cosh bt$

8. $f(t) = \sinh bt$

9. $f(t) = e^{at} \cosh bt$

10. $f(t) = e^{at} \sinh bt$

- Dans les problèmes 11 à 14, rappelez-vous que $\cos bt = (e^{ibt} + e^{-ibt})/2$ et que $\sin bt = (e^{ibt} - e^{-ibt})/2i$. Trouvez la transformée de Laplace de la fonction, où a et b sont des constantes.

11. $f(t) = \sin bt$

12. $f(t) = \cos bt$

13. $f(t) = e^{at} \sin bt$

14. $f(t) = e^{at} \cos bt$

- Dans les problèmes 15 à 20, en intégrant par parties, trouvez la transformée de Laplace de la fonction, où n est un entier positif et a est une constante.

15. $f(t) = te^{at}$

16. $f(t) = t \sin at$

17. $f(t) = t \cosh at$

18. $f(t) = t^n e^{at}$

19. $f(t) = t^2 \sin at$

20. $f(t) = t^2 \sinh at$

- Dans les problèmes 21 à 24, trouvez la transformée de Laplace de la fonction.

$$21. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & \pi \leq t < \infty \end{cases}$$

$$22. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

$$23. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & 1 \leq t < \infty \end{cases}$$

$$24. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & 2 \leq t < \infty \end{cases}$$

- Dans les problèmes 25 à 28, déterminez si l'intégrale converge ou diverge.

25. $\int_0^\infty (t^2 + 1)^{-1} dt$

26. $\int_0^\infty te^{-t} dt$

27. $\int_1^{\infty} t^{-2} e^t dt$

28. $\int_0^{\infty} e^{-t} \cos t dt$

29. Supposez que f et f' sont continues pour $t \geq 0$ et d'ordre exponentiel lorsque $t \rightarrow \infty$. En intégrant par parties, montrez que si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, alors $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$. Le résultat demeure vrai dans des conditions moins strictes comme celles du théorème 6.1.2.

30. **La fonction gamma** La fonction gamma est notée $\Gamma(p)$ et est définie par l'intégrale

$$\Gamma(p+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx. \quad (i)$$

L'intégrale converge lorsque $x \rightarrow \infty$, quel que soit p . Pour $p < 0$, elle est aussi impropre, car l'intégrande devient non bornée lorsque $x \rightarrow 0$. Cependant, on peut démontrer que l'intégrale converge en $x = 0$ pour $p > -1$.

- a) Montrez que pour $p > 0$,

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

- b) Montrez que $\Gamma(1) = 1$.

- c) Si p est un entier positif, par exemple $p = n$, montrez que

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Puisque $\Gamma(p)$ est aussi définie lorsque p n'est pas un entier, cette fonction étend la notion de factorielle à des valeurs non entières. Il faut aussi noter la cohérence de la définition $0! = 1$.

- d) Montrez que pour $p > 0$,

$$p(p+1)(p+2) \cdots (p+n-1) = \Gamma(p+n)/\Gamma(p).$$

Ainsi, on peut déterminer $\Gamma(p)$ pour toute valeur positive de p si $\Gamma(p)$ est connue dans un seul intervalle de longueur 1, par exemple $0 < p \leq 1$. Il est possible de montrer que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Trouvez $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)$.

31. Considérez la transformée de Laplace de t^p , où $p > -1$.

- a) En vous reportant au problème 30, montrez que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{t^p\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} t^p dt = \frac{1}{s^{p+1}} \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx \\ &= \Gamma(p+1)/s^{p+1}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

- b) Dans la partie a), considérez que p est un entier positif, par exemple $p = n$. Montrez que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = n!/s^{n+1}, \quad s > 0.$$

- c) Montrez que

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx, \quad s > 0.$$

Il est possible de montrer que

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ainsi,

$$\mathcal{L}\{t^{-1/2}\} = \sqrt{\pi/s}, \quad s > 0.$$

- d) Montrez que

$$\mathcal{L}\{t^{1/2}\} = \sqrt{\pi}/(2s^{3/2}), \quad s > 0.$$

6.2 La solution aux problèmes de valeur initiale

Dans cette section, nous verrons comment utiliser la transformée de Laplace pour résoudre des problèmes de valeur initiale impliquant des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Ici, l'utilité de la transformée de Laplace repose principalement sur le fait que la transformée de f' est reliée de façon simple à la transformée de f . Cette relation est exprimée dans le théorème suivant.

Théorème 6.2.1

Supposez que f est continue et que f' est continue par morceaux dans un intervalle $0 \leq t \leq A$. Supposez aussi qu'il existe des constantes K , a et M telles que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ pour $t \geq M$. Alors, $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe pour $s > a$ et

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0). \quad (1)$$

Afin de prouver ce théorème, on considère l'intégrale

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt.$$

Si la limite existe lorsque $A \rightarrow \infty$, alors cette limite est la transformée de Laplace de f' . Pour calculer cette limite, on doit d'abord écrire l'intégrale sous la forme appropriée. Si f' admet des discontinuités dans l'intervalle $0 \leq t \leq A$, on les note $t_1, t_2, \dots, t_n$. On peut donc écrire cette intégrale sous la forme

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t) dt + \dots + \int_{t_n}^A e^{-st} f'(t) dt.$$

En intégrant par parties chaque terme du second membre, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^A e^{-st} f'(t) dt &= e^{-st} f(t) \Big|_0^{t_1} + e^{-st} f(t) \Big|_{t_1}^{t_2} + \dots + e^{-st} f(t) \Big|_{t_n}^A \\ &\quad + s \left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t) dt + \dots + \int_{t_n}^A e^{-st} f(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Puisque f est continue, les contributions des termes en $t_1, t_2, \dots, t_n$ s'annulent. De plus, on peut combiner les intégrales dans le membre de droite en une seule intégrale, de façon à obtenir

$$\int_0^A e^{-st} f'(t) dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s \int_0^A e^{-st} f(t) dt. \quad (2)$$

Maintenant, on pose $A \rightarrow \infty$ dans l'équation (2). L'intégrale dans le membre de droite de cette équation s'approche de $\mathcal{L}\{f(t)\}$. De plus, lorsque $A \geq M$, on a $|f(A)| \leq Ke^{aA}$; ainsi, $|e^{-sA} f(A)| \leq Ke^{-(s-a)A}$. Par conséquent, $e^{-sA} f(A) \rightarrow 0$ lorsque $A \rightarrow \infty$ pour $s > a$. Donc, le membre de droite de l'équation (2) admet la limite $s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$. Dans ce cas, le membre de gauche de l'équation (2) admet aussi une limite et, comme on l'indique ci-dessus, cette limite est $\mathcal{L}\{f'(t)\}$. Par conséquent, quand $s > a$, on conclut que

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0),$$

ce qui prouve le théorème.

Si f' et f'' satisfont aux mêmes conditions que celles imposées respectivement à f et à f' dans le théorème 6.2.1, alors il s'ensuit que la transformée de Laplace de f'' existe aussi quand $s > a$ et qu'elle est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).\end{aligned}\quad (3)$$

En effet, si la fonction f et ses dérivées satisfont aux conditions appropriées, une expression pour la transformée de la n -ième dérivée $f^{(n)}$ est obtenue en appliquant récursivement le théorème. Le résultat est donné dans le corollaire suivant.

Corollaire 6.2.2

Supposez que les fonctions $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ sont continues et que $f^{(n)}$ est continue par morceaux dans tout intervalle $0 \leq t \leq A$. Supposez aussi qu'il existe des constantes K, a et M telles que $|f(t)| \leq Ke^{at}$, $|f'(t)| \leq Ke^{at}$, $\dots$, $|f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$ pour $t \geq M$. Alors, $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe pour $s > a$ et est donnée par

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - \dots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (4)$$

On aborde maintenant la façon d'utiliser la transformée de Laplace pour résoudre des problèmes de valeur initiale. Sa puissance est encore plus évidente quand les problèmes comprennent des équations différentielles non homogènes, comme nous le verrons dans des sections ultérieures de ce chapitre. Nous commençons toutefois par analyser des équations homogènes qui sont un peu plus simples.

Exemple 1

Considérez l'équation différentielle

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad (5)$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (6)$$

Ce problème est facilement résolu avec les méthodes de la section 3.1. L'équation caractéristique est

$$r^2 - r - 2 = (r - 2)(r + 1) = 0$$

et, par conséquent, la solution générale à l'équation (5) est

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}. \quad (7)$$

Pour satisfaire aux conditions initiales (6), on doit avoir $c_1 + c_2 = 1$ et $-c_1 + 2c_2 = 0$. Ainsi, $c_1 = \frac{2}{3}$ et $c_2 = \frac{1}{3}$. Donc, la solution au problème de valeur initiale (5) et (6) est

$$y = \phi(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}. \quad (8)$$

Maintenant, on résout le même problème en utilisant la transformée de Laplace. Pour ce faire, on doit supposer que le problème admet une solution $y = \phi(t)$ qui, de même que ses deux premières dérivées, satisfait aux conditions du corollaire 6.2.2. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle (5), on obtient

$$\mathcal{L}\{y''\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0, \quad (9)$$

où la linéarité de la transformée permet d'écrire la transformée d'une somme comme la somme des transformées respectives de chaque terme.

▶ Si on utilise le corollaire pour exprimer $\mathcal{L}\{y''\}$ et $\mathcal{L}\{y'\}$ en termes de $\mathcal{L}\{y\}$, l'équation (9) devient

$$s^2 \mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s \mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2 \mathcal{L}\{y\} = 0$$

ou

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0, \quad (10)$$

où $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. En substituant les valeurs de $y(0)$ et de $y'(0)$ dans l'équation (10) conformément aux conditions initiales (6), puis en résolvant pour déterminer $Y(s)$, on a

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}. \quad (11)$$

Ainsi, on a obtenu la transformée de Laplace $Y(s)$ de la solution $y = \phi(t)$ au problème de valeur initiale. Pour déterminer la fonction ϕ , on doit trouver la fonction dont la transformée de Laplace est $Y(s)$, telle qu'elle est donnée par l'équation (11).

On trouve facilement cette fonction en développant le second membre de l'équation (11) en fractions partielles. Ainsi,

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+1} = \frac{a(s+1)+b(s-2)}{(s-2)(s+1)}, \quad (12)$$

où il faut déterminer les coefficients a et b . En égalisant les numérateurs des second et quatrième membres de l'équation (12), on obtient

$$s-1 = a(s+1) + b(s-2),$$

et cette équation doit être valide quel que soit s . En particulier, en posant $s = 2$, on obtient $a = \frac{1}{3}$. De la même manière, en posant $s = -1$, on trouve $b = \frac{2}{3}$. On a ainsi

$$Y(s) = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}. \quad (13)$$

Finalement, à partir du résultat de l'exemple 5 de la section 6.1, la transformée de $\frac{1}{3}e^{2t}$ est $\frac{1}{3}(s-2)^{-1}$ et celle de $\frac{2}{3}e^{-t}$ est $\frac{2}{3}(s+1)^{-1}$. Comme la transformée de Laplace est linéaire, la transformée de

$$y = \phi(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

est l'expression (13) et, par conséquent, la solution au problème de valeur initiale (5), (6). Bien sûr, il s'agit de la même solution que celle qu'on a obtenue plus tôt.

On peut appliquer la même démarche à la forme générale de l'équation linéaire du deuxième ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = f(t). \quad (14)$$

En supposant que la solution $y = \phi(t)$ satisfait aux conditions du corollaire 6.2.2 pour $n = 2$, on peut prendre la transformée de l'équation (14) et obtenir ainsi

$$a[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = F(s), \quad (15)$$

où $F(s)$ est la transformée de $f(t)$. En résolvant l'équation (15) pour $Y(s)$, on trouve

$$Y(s) = \frac{(as+b)y(0) + ay'(0)}{as^2 + bs + c} + \frac{F(s)}{as^2 + bs + c}. \quad (16)$$

Le problème est ensuite résolu à condition qu'on puisse trouver la fonction $y = \phi(t)$ dont la transformée est $Y(s)$.

Même à cette étape de notre étude, on peut souligner certaines caractéristiques de la méthode des transformées. Premièrement, on trouve la transformée $Y(s)$ de la fonction inconnue $y = \phi(t)$ en résolvant une équation algébrique plutôt qu'une équation différentielle, soit l'équation (10) plutôt que l'équation (5), ou en général l'équation (15) plutôt que l'équation (14). C'est ce qui explique l'utilité des transformées de Laplace pour résoudre des équations linéaires à coefficients

constants ou des équations linéaires différentielles ordinaires – cette équation différentielle est réduite à une équation algébrique. Deuxièmement, la solution satisfaisant aux conditions initiales données est entièrement déterminée en ce sens qu'on n'a pas à rechercher les valeurs appropriées des constantes arbitraires dans la solution générale. De plus, comme on l'a vu dans l'équation (15), les équations non homogènes sont traitées exactement de la même manière que les équations homogènes. Il n'est pas nécessaire de résoudre d'abord l'équation homogène correspondante. Finalement, on peut appliquer la méthode de la même manière avec des équations d'ordre plus élevé en supposant que la solution satisfait aux conditions du corollaire.

Il faut noter que le polynôme $as^2 + bs + c$ au dénominateur du second membre de l'équation (16) est précisément le polynôme caractéristique associé à l'équation (14). Comme on doit factoriser ce polynôme pour développer $Y(s)$ en fractions partielles dans la recherche de $\phi(t)$, l'utilisation des transformées de Laplace exige encore de trouver les racines de l'équation caractéristique. Pour les équations d'ordre supérieur à deux, cela peut s'avérer difficile, particulièrement si les racines sont irrationnelles ou complexes.

La principale difficulté associée à la résolution des problèmes de valeur initiale avec la méthode des transformées consiste à déterminer la fonction $y = \phi(t)$ correspondant à la transformée $Y(s)$. C'est ce qu'on appelle le problème d'inversion de la transformée de Laplace ; $\phi(t)$ est appelée la transformée inverse de $Y(s)$, et la démarche pour trouver $\phi(t)$ à partir de $Y(s)$ est appelée l'inversion de la transformée. On utilise aussi la notation $\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ pour représenter la transformée inverse de $Y(s)$. Il existe une formule générale pour la transformée de Laplace inverse, mais son utilisation nécessite une connaissance de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Par conséquent, ce sujet ne sera pas abordé dans ce manuel. Toutefois, on peut encore développer de nombreuses propriétés importantes de la transformée de Laplace et résoudre plusieurs problèmes intéressants sans utiliser les variables complexes.

Pour résoudre le problème de valeur initiale (5), (6), on ne s'est pas demandé si d'autres fonctions admettent également comme transformée l'expression (13), hormis celle qui est donnée dans l'équation (8). D'après le théorème 3.3.1, on sait que le problème de valeur initiale n'admet aucune autre solution. On sait aussi que la solution unique (8) au problème de valeur initiale est continue. En accord avec ce fait, on peut montrer que si f et g sont des fonctions continues admettant la même transformée de Laplace, alors f et g doivent être identiques. En outre, si f et g sont seulement continues par morceaux, elles peuvent différer en un ou plusieurs points de discontinuité et admettre malgré tout la même transformée de Laplace (*voir l'exemple 6 dans la section 6.1*). Cette absence d'unicité de la transformée de Laplace inverse pour les fonctions continues par morceaux n'a aucune signification pratique dans les applications. En d'autres mots, il existe une bijection entre les fonctions et leurs transformées de Laplace. Cela suggère de construire un tableau, comme le tableau 6.2.1 à la page suivante, qui donne les transformées des fonctions usuelles. Les expressions de la deuxième colonne du tableau 6.2.1 sont les transformées des fonctions de la première colonne. Fait encore plus important, les fonctions de la première colonne sont les transformées inverses des fonctions de la deuxième colonne. Ainsi, par exemple, si on connaît la transformée de la solution à une équation différentielle, on peut souvent trouver la solution elle-même seulement en consultant le tableau. Certaines expressions du tableau 6.2.1 ont été utilisées comme exemples ou elles apparaissent sous la forme de problèmes dans la section 6.1, tandis que d'autres seront développées plus loin dans le chapitre. La troisième colonne du tableau indique l'endroit où se trouve le calcul effectif des transformées. Le tableau 6.2.1 suffit pour les exemples et les problèmes de ce manuel. Toutefois, il existe des tableaux beaucoup plus complets (*voir les références à la fin du chapitre*). On peut aussi trouver les transformées et les transformées inverses à l'aide d'un calculateur symbolique.

Souvent, il est possible d'exprimer une transformée de Laplace $F(s)$ sous la forme d'une somme de plusieurs termes

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s). \quad (17)$$

On suppose que $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}, \dots, f_n(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}$. Alors, la fonction

$$f(t) = f_1(t) + \dots + f_n(t)$$

admet $F(s)$ comme transformée de Laplace. En vertu de la propriété d'unicité énoncée précédemment, aucune autre fonction continue f ne possède la même transformée. Ainsi,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \dots + \mathcal{L}^{-1}\{F_n(s)\}. \quad (18)$$

Autrement dit, la transformée de Laplace inverse est aussi un opérateur linéaire.

Tableau 6.2.1 Transformées de Laplace élémentaires

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	Notes
1. 1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Ex. 4
2. e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Ex. 5
3. $t^n, \quad n = \text{entier positif}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Probl. 31
4. $t^p, \quad p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Probl. 31
5. $\sin at$	$\frac{a}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Ex. 7
6. $\cos at$	$\frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0$	Sec. 6.1 ; Probl. 6
7. $\sinh at$	$\frac{a}{s^2 - a^2}, \quad s > a $	Sec. 6.1 ; Probl. 8
8. $\cosh at$	$\frac{s}{s^2 - a^2}, \quad s > a $	Sec. 6.1 ; Probl. 7
9. $e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Probl. 13
10. $e^{at} \cos bt$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Probl. 14
11. $t^n e^{at}, \quad n = \text{entier positif}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$	Sec. 6.1 ; Probl. 18
12. $u_c(t)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$	Sec. 6.3
13. $u_c(t)f(t-c)$	$e^{-cs}F(s)$	Sec. 6.3
14. $e^{ct}f(t)$	$F(s-c)$	Sec. 6.3
15. $f(ct)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0$	Sec. 6.3 ; Probl. 25
16. $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	Sec. 6.6
17. $\delta(t-c)$	e^{-cs}	Sec. 6.5
18. $f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$	Sec. 6.2 ; Corr. 6.2.2
19. $(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$	Sec. 6.2 ; Probl. 29

Dans plusieurs problèmes, on utilise cette propriété en décomposant une transformée donnée en une somme de fonctions dont les transformées inverses sont déjà connues ou dont on peut trouver les transformées dans le tableau. Les développements en fractions partielles sont particulièrement utiles ici. Un résultat général qui s'applique à plusieurs cas est présenté au problème 39.

D'autres propriétés utiles des transformées de Laplace sont obtenues plus loin dans ce chapitre.

Les exemples suivants illustrent la technique de résolution des problèmes de valeur initiale avec la transformée de Laplace et les développements en fractions partielles.

Exemple 2

Trouvez la solution à l'équation différentielle

$$y'' + y = \sin 2t \quad (19)$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 1. \quad (20)$$

On suppose que ce problème de valeur initiale admet une solution $y = \phi(t)$ qui, tout comme ses deux premières dérivées, satisfait aux conditions du corollaire 6.2.2. En appliquant la transformée de Laplace à l'équation différentielle, on a

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) + Y(s) = 2/(s^2 + 4),$$

où on a obtenu la transformée de $\sin 2t$ à partir de la ligne 5 du tableau 6.2.1. En remplaçant $y(0)$ et $y'(0)$ par les valeurs indiquées dans les conditions initiales et en résolvant pour déterminer $Y(s)$, on obtient

$$Y(s) = \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}. \quad (21)$$

On réécrit $Y(s)$ sous la forme

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 + 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 4} = \frac{(as + b)(s^2 + 4) + (cs + d)(s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(s^2 + 4)}. \quad (22)$$

En développant le numérateur du second membre de l'équation (22) et en le posant égal au numérateur de l'équation (21), on trouve

$$2s^3 + s^2 + 8s + 6 = (a + c)s^3 + (b + d)s^2 + (4a + c)s + (4b + d)$$

quel que soit s . Ensuite, en identifiant les coefficients de mêmes puissances correspondantes de s , on a

$$a + c = 2, \quad b + d = 1,$$

$$4a + c = 8, \quad 4b + d = 6.$$

Par conséquent, $a = 2$, $c = 0$, $b = \frac{5}{3}$ et $d = -\frac{2}{3}$. Il en découle que

$$Y(s) = \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{5/3}{s^2 + 1} - \frac{2/3}{s^2 + 4}. \quad (23)$$

À partir des lignes 5 et 6 du tableau 6.2.1, la solution au problème de valeur initiale est

$$y = \phi(t) = 2 \cos t + \frac{5}{3} \sin t - \frac{1}{3} \sin 2t. \quad (24)$$

Exemple 3

Trouvez la solution au problème de valeur initiale

$$y^{(4)} - y = 0, \quad (25)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0. \quad (26)$$

▶ Dans ce problème, on doit supposer que la solution $y = \phi(t)$ satisfait aux conditions du corollaire 6.2.2 pour $n = 4$. La transformée de Laplace de l'équation différentielle (25) est

$$s^4 Y(s) - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) - Y(s) = 0.$$

Alors, en utilisant les conditions initiales (26) et en résolvant pour déterminer $Y(s)$, on a

$$Y(s) = \frac{s^2}{s^4 - 1}. \quad (27)$$

Le développement en fractions partielles de $Y(s)$ est

$$Y(s) = \frac{as + b}{s^2 - 1} + \frac{cs + d}{s^2 + 1},$$

et il s'ensuit que

$$(as + b)(s^2 + 1) + (cs + d)(s^2 - 1) = s^2 \quad (28)$$

quel que soit s . En posant $s = 1$ et $s = -1$, respectivement, dans l'équation (28), on obtient les deux équations

$$2(a + b) = 1, \quad 2(-a + b) = 1$$

et, par conséquent, $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$. Si on pose $s = 0$ dans l'équation (28), puis $b - d = 0$, alors $d = \frac{1}{2}$.

Enfin, en identifiant les coefficients des termes de degré trois dans chaque membre de l'équation (28), on trouve que $a + c = 0$, donc $c = 0$. Ainsi,

$$Y(s) = \frac{1/2}{s^2 - 1} + \frac{1/2}{s^2 + 1} \quad (29)$$

et, à partir des lignes 7 et 5 du tableau 6.2.1, la solution au problème de valeur initiale (25), (26) est

$$y = \phi(t) = \frac{\sinh t + \sin t}{2}. \quad (30)$$

On trouve les plus importantes applications élémentaires de la transformée de Laplace dans l'étude des vibrations mécaniques et l'analyse des circuits électriques. Les équations qui régissent ces processus ont été obtenues à la section 3.8. Le mouvement d'un système masse-ressort est régi par l'équation

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma \frac{du}{dt} + ku = F(t), \quad (31)$$

où m est la masse de l'objet, γ le coefficient d'amortissement, k la constante de raideur et $F(t)$ la force externe appliquée. L'équation décrivant un circuit électrique contenant une inductance L , une résistance R et une capacitance C (un circuit RLC) est

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = E(t), \quad (32)$$

où $Q(t)$ est la charge appliquée sur le condensateur et $E(t)$ la tension appliquée. En termes de courant $I(t) = dQ(t)/dt$, on peut dériver l'équation (32) et obtenir

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = \frac{dE}{dt}(t). \quad (33)$$

On doit aussi indiquer les conditions initiales appropriées en termes de u , Q ou I .

Dans la section 3.8, on a remarqué que l'équation (31) décrivant le système masse-ressort et l'équation (32) ou (33) décrivant le circuit électrique sont mathématiquement identiques ; seule l'interprétation des constantes et celle des variables diffèrent. Il existe d'autres problèmes en physique qui mènent à une même équation différentielle. Ainsi, une fois le problème mathématique résolu, on peut interpréter la solution en fonction du problème physique correspondant qui présente un intérêt immédiat.

Dans les problèmes proposés à la fin de cette section et dans d'autres sections du présent chapitre, il y a de nombreux problèmes de valeur initiale pour les équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants. Plusieurs peuvent être interprétés comme des modèles décrivant des systèmes physiques particuliers mais, en général, ces sujets ne seront pas abordés de façon explicite.

Les systèmes d'équations différentielles On a utilisé la transformée de Laplace pour résoudre des équations linéaires d'ordre arbitraire. On peut aussi l'utiliser essentiellement de la même manière pour résoudre des systèmes d'équations. Puisque la transformée est une intégrale, on détermine la transformée d'un vecteur composante par composante. Par conséquent, $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ est le vecteur dont les composantes sont les transformées des composantes respectives de $\mathbf{x}(t)$, et c'est la même chose pour $\mathcal{L}\{\mathbf{x}'(t)\}$. On remplacera $\mathcal{L}\{\mathbf{x}(t)\}$ par $\mathbf{X}(s)$. Ensuite, en étendant le théorème 6.2.1 aux vecteurs, on obtient aussi

$$\mathcal{L}\{\mathbf{x}'(t)\} = s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0). \quad (34)$$

Exemple 4

Utilisez la méthode des transformées de Laplace pour résoudre le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(t). \quad (35)$$

On prend la transformée de Laplace de chaque terme de l'équation (35) et on obtient

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{x}(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{G}(s), \quad (36)$$

où $\mathbf{G}(s)$ est la transformée de $\mathbf{g}(t)$. La transformée $\mathbf{G}(s)$ est donnée par

$$\mathbf{G}(s) = \begin{pmatrix} 2/(s+1) \\ 3/s^2 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Si on veut continuer, on doit choisir le vecteur initial $\mathbf{x}(0)$. Pour des raisons de simplicité, choisissons $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Ainsi, l'équation (36) devient

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) = \mathbf{G}(s), \quad (38)$$

où, comme d'habitude, $\mathbf{I}$ est la matrice identité. Par conséquent, $\mathbf{X}(s)$ est donné par

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{G}(s). \quad (39)$$

La matrice $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ est appelée la **matrice de transfert** parce qu'en la multipliant par la transformée du vecteur d'entrée $\mathbf{g}(t)$, on obtient la transformée du vecteur de sortie $\mathbf{x}(t)$. Dans cet exemple, on a

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

et, par un simple calcul, on obtient

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 1 & s+2 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Ensuite, en faisant les substitutions à partir des équations (36) et (41) dans l'équation (39) et en effectuant la multiplication indiquée, on trouve

$$\mathbf{X}(s) = \begin{pmatrix} \frac{2(s+2)}{(s+1)^2(s+3)} + \frac{3}{s^2(s+1)(s+3)} \\ \frac{2}{(s+1)^2(s+3)} + \frac{3(s+2)}{s^2(s+1)(s+3)} \end{pmatrix}. \quad (42)$$

Enfin, on doit déterminer la solution $\mathbf{x}(t)$ à partir de sa transformée $\mathbf{X}(s)$. On peut y arriver en développant les expressions de l'équation (42) en fractions partielles et en utilisant le tableau 6.2.1, ou (de façon plus efficace) en utilisant un logiciel approprié. Quelle que soit la méthode choisie, après quelques simplifications, le résultat est

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

► L'équation (43) donne la solution particulière au système (35) qui satisfait à la condition initiale $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$. Par conséquent, elle diffère légèrement des solutions particulières obtenues dans les exemples du chapitre 5. Pour obtenir la solution générale à l'équation (35), vous devez ajouter à l'expression de l'équation (43) la solution générale au système homogène correspondant à l'équation (35).

Dans la méthode des transformées de Laplace, on effectue une inversion de matrice pour déterminer la matrice de transfert, puis on effectue une multiplication et, pour finir, on détermine la transformée inverse de chaque terme de l'expression résultante. Cette méthode est particulièrement utile dans les problèmes de fonctions de contrainte qui comportent des termes discontinus ou liés à une impulsion.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 10, trouvez la transformée de Laplace inverse de la fonction.

1. $F(s) = \frac{3}{s^2 + 4}$

2. $F(s) = \frac{4}{(s-1)^3}$

3. $F(s) = \frac{2}{s^2 + 3s - 4}$

4. $F(s) = \frac{3s}{s^2 - s - 6}$

5. $F(s) = \frac{2s+2}{s^2 + 2s + 5}$

6. $F(s) = \frac{2s-3}{s^2 - 4}$

7. $F(s) = \frac{2s+1}{s^2 - 2s + 2}$

8. $F(s) = \frac{8s^2 - 4s + 12}{s(s^2 + 4)}$

9. $F(s) = \frac{1-2s}{s^2 + 4s + 5}$

10. $F(s) = \frac{2s-3}{s^2 + 2s + 10}$

■ Dans les problèmes 11 à 23, utilisez la transformée de Laplace pour résoudre le problème de valeur initiale.

11. $y'' - y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$

12. $y'' + 3y' + 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

13. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

14. $y'' - 4y' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$

15. $y'' - 2y' - 2y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

16. $y'' + 2y' + 5y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

17. $y^{(4)} - 4y''' + 6y'' - 4y' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 1$

18. $y^{(4)} - y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 0$

19. $y^{(4)} - 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 0$

20. $y'' + \omega^2 y = \cos 2t$, $\omega^2 \neq 4$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

21. $y'' - 2y' + 2y = \cos t$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

22. $y'' - 2y' + 2y = e^{-t}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

23. $y'' + 2y' + y = 4e^{-t}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

■ Dans les problèmes 24 à 27, trouvez la transformée de Laplace $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$ de la solution au problème de valeur initiale. Une méthode pour déterminer la transformée inverse est expliquée dans la section 6.3. Au besoin, référez-vous aux problèmes 21 à 24 de la section 6.1.

24. $y'' + 4y = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \pi, \\ 0, & \pi \leq t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

25. $y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

26. $y'' + 4y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

27. $y'' + y = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & 2 \leq t < \infty; \end{cases} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

28. On peut trouver les transformées de Laplace de certaines fonctions à partir de leurs développements en série de Taylor.

a) En utilisant la série de Taylor pour $\sin t$,

$$\sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

et en supposant qu'on peut calculer terme à terme la transformée de Laplace de cette série, vérifiez que

$$\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad s > 1.$$

b) Supposez que

$$f(t) = \begin{cases} (\sin t)/t, & t \neq 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Trouvez la série de Taylor pour f autour de $t = 0$. En supposant qu'on peut calculer terme à terme la transformée de Laplace de cette fonction, vérifiez que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \arctan(1/s), \quad s > 1.$$

c) La fonction de Bessel de premier type et d'ordre zéro J_0 admet comme série de Taylor (voir la section 7.7)

$$J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

En supposant qu'on peut calculer terme à terme les transformées de Laplace suivantes, vérifiez que

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = (s^2 + 1)^{-1/2}, \quad s > 1$$

et

$$\mathcal{L}\{J_0(\sqrt{t})\} = s^{-1} e^{-1/4s}, \quad s > 0.$$

■ Les problèmes 29 à 37 portent sur la dérivée de la transformée de Laplace.

29. Supposez que

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Il est possible de montrer que si f satisfait aux conditions du théorème 6.1.2, on peut dériver sous l'intégrale par rapport au paramètre s lorsque $s > a$.

a) Montrez que $F'(s) = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$.

b) Montrez que $F^{(n)}(s) = \mathcal{L}\{(-t)^n f(t)\}$. Ainsi, la dérivée de la transformée de Laplace correspond à la multiplication de la fonction originale par $-t$.

■ Dans les problèmes 30 à 35, utilisez le résultat du problème 29 pour trouver la transformée de Laplace de la fonction; a et b sont des nombres réels et n est un entier positif.

30. $f(t) = te^{at}$

31. $f(t) = t^2 \sin bt$

32. $f(t) = t^n$

33. $f(t) = t^n e^{at}$

34. $f(t) = te^{at} \sin bt$

35. $f(t) = te^{at} \cos bt$

▶ 36. Considérez l'équation de Bessel d'ordre zéro

$$ty'' + y' + ty = 0.$$

Les solutions peuvent devenir non bornées lorsque $t \rightarrow 0$, car $t = 0$ est un point singulier régulier de cette équation (voir la section 7.7). Cependant, essayez de déterminer s'il existe des solutions qui restent finies en $t = 0$ et qui ont des dérivées finies. En supposant qu'il existe une solution $y = \phi(t)$, supposez que $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$.

a) Montrez que $Y(s)$ satisfait à

$$(1 + s^2)Y'(s) + sY(s) = 0.$$

b) Montrez que $Y(s) = c(1 + s^2)^{-1/2}$, où c est une constante arbitraire.

c) Développez $(1 + s^2)^{-1/2}$ en série du binôme, valide pour $s > 1$. De plus, supposez qu'il est possible de prendre la transformée inverse terme à terme. Montrez que

$$y = c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n} (n!)^2} = cJ_0(t),$$

où J_0 est la fonction de Bessel de premier type et d'ordre zéro. Vous devez noter que $J_0(0) = 1$ et que les dérivées de J_0 sont finies en $t = 0$, peu importe l'ordre de la dérivée. Vous devez aussi noter que la deuxième solution à cette équation devient non bornée lorsque $t \rightarrow 0$ (voir la section 7.7).

37. Pour chacun des problèmes de valeur initiale, utilisez les résultats du problème 29 pour trouver l'équation différentielle satisfaite par $Y(s) = \mathcal{L}\{\phi(t)\}$, où $y = \phi(t)$ est la solution au problème de valeur initiale.

a) $y'' - ty = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (l'équation d'Airy)

b) $(1 - t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (l'équation de Legendre)

Vous devez noter que l'équation différentielle pour $Y(s)$ est du premier ordre dans la partie a), mais du deuxième ordre dans la partie b). Cela résulte du fait que t apparaît au plus à l'exposant un dans l'équation de la partie a), tandis qu'elle apparaît au carré dans l'équation de la partie b). On remarque que la transformée de Laplace permet rarement de résoudre des équations différentielles à coefficients variables, à moins que tous les coefficients ne soient que des fonctions linéaires de la variable indépendante.

38. Supposez que

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Si $G(s)$ et $F(s)$ sont respectivement les transformées de Laplace de $g(t)$ et de $f(t)$, montrez que

$$G(s) = F(s)/s.$$

39. Dans ce problème, on montre comment utiliser une décomposition en fractions partielles pour calculer plusieurs transformées de Laplace inverses. Supposez que

$$F(s) = P(s)/Q(s),$$

où $Q(s)$ est un polynôme de degré n de racines distinctes $r_1, \dots, r_n$ et $P(s)$ est un polynôme de degré inférieur à n . Dans ce cas, on peut montrer que $P(s)/Q(s)$ admet un développement en fractions partielles de la forme

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - r_1} + \dots + \frac{A_n}{s - r_n}, \quad (i)$$

où les coefficients $A_1, \dots, A_n$ sont à déterminer.

a) Montrez que

$$A_k = P(r_k)/Q'(r_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (ii)$$

Suggestion: Une méthode consiste à multiplier l'équation (i) par $s - r_k$, puis à prendre la limite lorsque $s \rightarrow r_k$.

b) Montrez que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sum_{k=1}^n \frac{P(r_k)}{Q'(r_k)} e^{r_k t}. \quad (iii)$$

40. Utilisez la transformée de Laplace pour résoudre le système

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 3t \end{pmatrix} = \mathbf{Ax} + \mathbf{g}(t) \quad (\text{i})$$

présenté dans l'exemple 4 de cette section. Au lieu d'utiliser des conditions initiales nulles, comme dans l'exemple 4, posez

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{ii})$$

où α_1 et α_2 sont arbitraires. Quelles doivent être les valeurs de α_1 et de α_2 pour que la solution soit identique à l'équation (38) de la section 5.9 ?

6.3 Les fonctions unités échelons

Dans la section 6.2, nous avons présenté la démarche générale visant à résoudre des problèmes de valeur initiale au moyen de la transformée de Laplace. On observe certaines des plus intéressantes applications élémentaires de la méthode des transformées dans la solution aux équations différentielles linéaires comportant des fonctions discontinues ou des fonctions impulsion. On rencontre souvent des équations de ce type dans l'analyse de la circulation du courant dans les circuits électriques ou des vibrations des systèmes mécaniques. Dans cette section et les suivantes, nous introduirons des propriétés additionnelles de la transformée de Laplace qui serviront à résoudre ces types de problèmes. À moins d'indication contraire, toutes les fonctions apparaissant dans le texte qui suit sont continues par morceaux et d'ordre exponentiel, de sorte que leur transformée de Laplace existe, du moins pour un s assez grand.

Afin de traiter efficacement les fonctions admettant des discontinuités de type saut, on introduit une fonction appelée **fonction unité échelon** ou **fonction de Heaviside**. Cette fonction est notée u_c et est définie par

$$u_c(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ 1, & t \geq c. \end{cases} \quad (1)$$

Puisque la transformée de Laplace admet des valeurs de t dans l'intervalle $[0, \infty)$, on s'intéresse aussi uniquement aux valeurs non négatives de c . La figure 6.3.1 illustre le graphique de $y = u_c(t)$. On a assigné de façon quelque peu arbitraire la valeur un à u_c en $t = c$. Cependant, pour une fonction continue par morceaux comme u_c , la valeur en un point de discontinuité n'est généralement pas pertinente. Le saut peut aussi être négatif. Par exemple, la figure 6.3.2 illustre le graphe de $y = 1 - u_c(t)$.

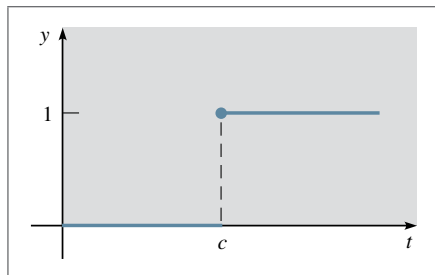


Figure 6.3.1 Graphique de $y = u_c(t)$.

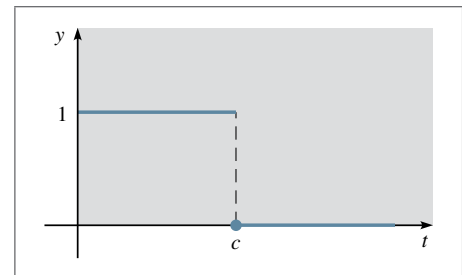


Figure 6.3.2 Graphique de $y = 1 - u_c(t)$.

Exemple 1

Tracez le graphique de $y = h(t)$, où

$$h(t) = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t), \quad t \geq 0.$$

D'après la définition de $u_c(t)$ dans l'équation (1), on a

$$h(t) = \begin{cases} 0 - 0 = 0, & 0 \leq t < \pi, \\ 1 - 0 = 1, & \pi \leq t < 2\pi, \\ 1 - 1 = 0, & 2\pi \leq t < \infty. \end{cases}$$

► Ainsi, l'équation $y = h(t)$ correspond au graphique illustré à la figure 6.3.3. On peut considérer cette fonction comme une onde rectangulaire.

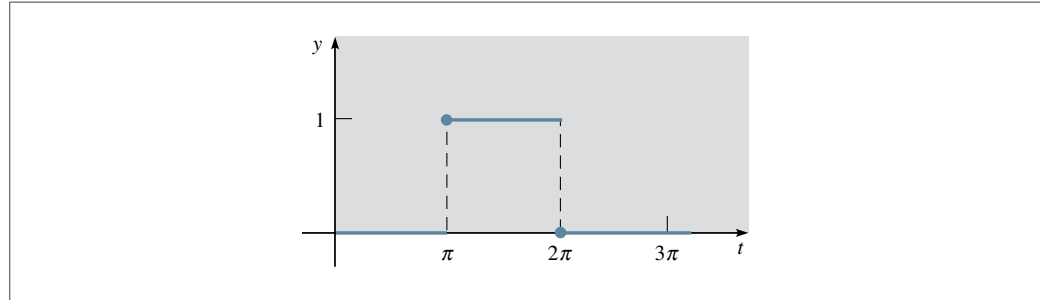


Figure 6.3.3 Graphique de $y = u_\pi(t) - u_{2\pi}(t)$.

Exemple 2

Considérez la fonction

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 4, \\ 5, & 0 \leq t < 7, \\ -1, & 7 \leq t < 9, \\ 1 & t \geq 9, \end{cases} \quad (2)$$

dont le graphique est illustré dans la figure 6.3.4. Exprimez $f(t)$ en fonction de $u_c(t)$.

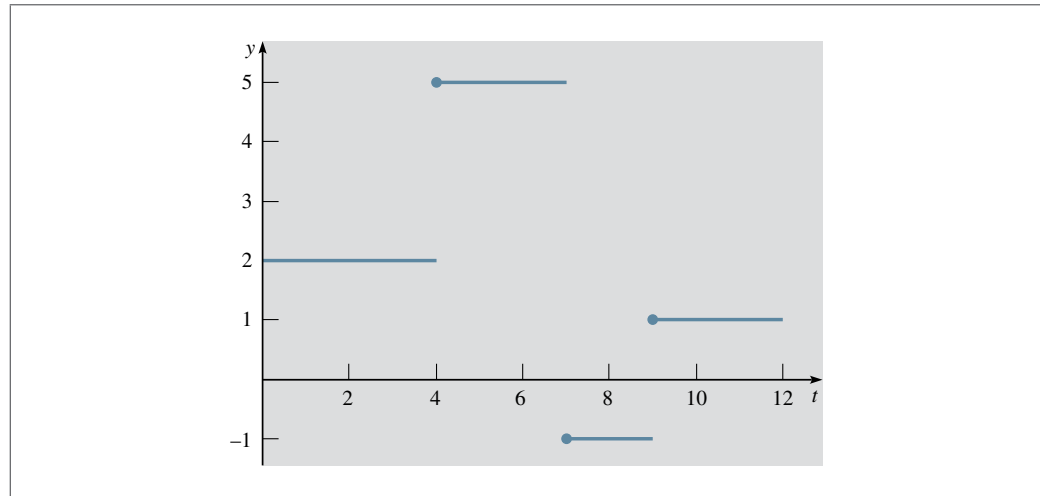


Figure 6.3.4 Graphique de la fonction de l'équation (2).

On commence avec la fonction $f_1(t) = 2$, qui concorde avec $f(t)$ dans l'intervalle $[0, 4)$. Pour produire un saut de trois unités en $t = 4$, on additionne $3u_4(t)$ à $f(t)$ et on obtient

$$f_2(t) = 2 + 3u_4(t),$$

qui concorde avec $f(t)$ dans l'intervalle $[0, 7)$. Le saut négatif de six unités en $t = 7$ correspond à l'addition de $-6u_7(t)$, ce qui donne

$$f_3(t) = 2 + 3u_4(t) - 6u_7(t).$$

Enfin, on doit additionner $2u_9(t)$ pour représenter le saut de deux unités en $t = 9$. Par conséquent, on obtient

$$f(t) = 2 + 3u_4(t) - 6u_7(t) + 2u_9(t). \quad (3)$$

On peut facilement déterminer la transformée de Laplace de u_c ainsi :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_c(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) dt = \int_c^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Étant donné une fonction f définie pour $t \geq 0$, on a souvent besoin d'une fonction associée g définie par

$$y = g(t) = \begin{cases} 0, & t < c, \\ f(t-c), & t \geq c, \end{cases}$$

qui représente une translation de f de c unités en la variable t (voir la figure 6.3.5). En termes de la fonction unité échelon, on peut écrire $g(t)$ sous la forme

$$g(t) = u_c(t) f(t-c).$$

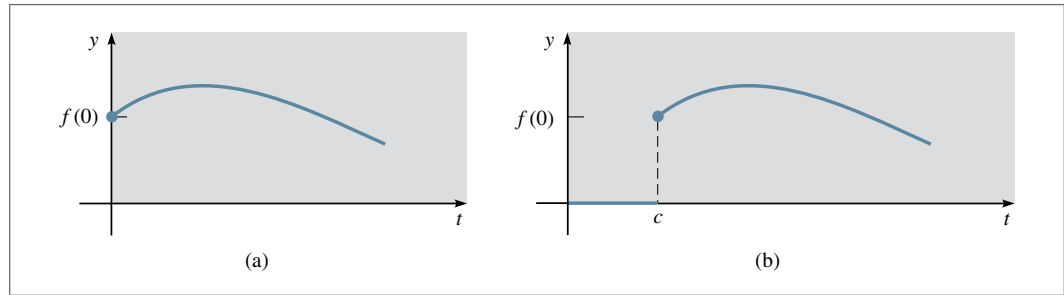


Figure 6.3.5 Translation de fonction ; a) $y = f(t)$; b) $y = u_c(t) f(t-c)$.

La fonction unité échelon est particulièrement utile à cause de la relation suivante entre la transformée de $f(t)$ et celle de la translation $u_c(t)f(t-c)$.

Théorème 6.3.1

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe pour $s > a \geq 0$ et si c est une constante positive, alors

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} = e^{-cs} \mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-cs} F(s), \quad s > a. \quad (5)$$

Inversement, si $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, alors

$$u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs} F(s)\}. \quad (6)$$

Le théorème 6.3.1 énonce simplement que la translation de c unités de la variable t dans la fonction $f(t)$ correspond à la multiplication de $F(s)$ par e^{-cs} . Afin de prouver le théorème 6.3.1, il suffit de calculer la transformée de $u_c(t)f(t-c)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} u_c(t) f(t-c) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t-c) dt.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $\xi = t - c$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\} &= \int_0^{\infty} e^{-(\xi+c)s} f(\xi) d\xi = e^{-cs} \int_0^{\infty} e^{-s\xi} f(\xi) d\xi \\ &= e^{-cs} F(s).\end{aligned}$$

Ainsi, l'équation (5) est vérifiée ; on obtient l'équation (6) en prenant la transformée inverse des deux membres de l'équation (5).

Le cas particulier $f(t) = 1$ est un exemple simple d'application. Sachant que $\mathcal{L}\{1\} = 1/s$, on peut en déduire directement que $\mathcal{L}\{u_c(t)\} = e^{-cs}/s$ en vertu de l'équation (3). Ce résultat concorde avec celui de l'équation (4). Les exemples 3 et 4 illustrent comment utiliser le théorème 6.3.1 dans le calcul des transformées et des transformées inverses.

Exemple 3

Si la fonction f est définie par

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi/4, \\ \sin t + \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4, \end{cases}$$

trouvez $\mathcal{L}\{f(t)\}$. Le graphe de $y = f(t)$ est illustré à la figure 6.3.6.

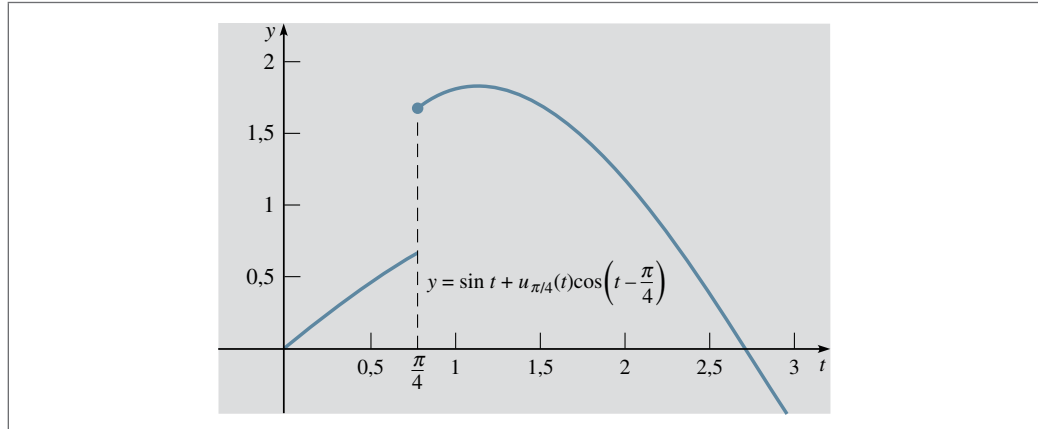


Figure 6.3.6 Graphique de la fonction de l'exemple 3.

Il faut noter que $f(t) = \sin t + g(t)$, où

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi/4, \\ \cos(t - \pi/4), & t \geq \pi/4. \end{cases}$$

Ainsi,

$$g(t) = u_{\pi/4}(t) \cos(t - \pi/4)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= \mathcal{L}\{\sin t\} + \mathcal{L}\{u_{\pi/4}(t) \cos(t - \pi/4)\} \\ &= \mathcal{L}\{\sin t\} + e^{-\pi s/4} \mathcal{L}\{\cos t\}. \end{aligned}$$

En introduisant les transformées de $\sin t$ et de $\cos t$, on obtient

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2 + 1} + e^{-\pi s/4} \frac{s}{s^2 + 1} = \frac{1 + se^{-\pi s/4}}{s^2 + 1}.$$

Il conviendrait de comparer cette méthode avec le calcul de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ à partir de la définition.

Exemple 4

Trouvez la transformée inverse de

$$F(s) = \frac{1 - e^{-2s}}{s^2}.$$

En vertu de la linéarité de la transformée inverse, on a

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\right\} \\ &= t - u_2(t)(t - 2). \end{aligned}$$

On peut aussi écrire la fonction f sous la forme

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2, \\ 2, & t \geq 2. \end{cases}$$

Le théorème suivant introduit une autre propriété très utile des transformées de Laplace, qui est similaire à celle qui a été énoncée au théorème 6.3.1.

Théorème 6.3.2

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe pour $s > a \geq 0$ et si c est constante, alors

$$\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} = F(s - c), \quad s > a + c. \quad (7)$$

Inversement, si $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, alors

$$e^{ct}f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s - c)\}. \quad (8)$$

En vertu du théorème 6.3.2, la multiplication de $f(t)$ par e^{ct} induit une translation de c unités sur la variable s dans la transformée $F(s)$ et inversement. La preuve de ce théorème nécessite l'évaluation de $\mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{ct}f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} e^{ct} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-c)t} f(t) dt \\ &= F(s - c), \end{aligned}$$

qui est l'équation (7). La restriction $s > a + c$ découle de l'hypothèse (ii) du théorème 6.1.2, soit que $|f(t)| \leq Ke^{at}$. Ainsi, $|e^{ct}f(t)| \leq Ke^{(a+c)t}$. L'équation (6) suit avec la transformée inverse de l'équation (5), et la preuve est alors complète.

La principale application du théorème 6.3.2 réside dans l'évaluation de certaines transformées inverses, comme dans l'exemple qui suit.

Exemple 5

Trouvez la transformée inverse de

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 4s + 5}.$$

En complétant le carré au dénominateur, on peut écrire

$$G(s) = \frac{1}{(s-2)^2 + 1} = F(s-2),$$

où $F(s) = (s^2 + 1)^{-1}$. Puisque $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \sin t$, il s'ensuit que, d'après le théorème 6.3.2,

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = e^{2t} \sin t.$$

Les résultats de cette section servent souvent à résoudre des équations différentielles qui comportent des fonctions discontinues. La prochaine section traite d'exemples illustrant ce fait.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 6, tracez le graphique de la fonction dans l'intervalle $t \geq 0$.

1. $g(t) = u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$
2. $g(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$
3. $g(t) = f(t-\pi)u_{\pi}(t)$, où $f(t) = t^2$
4. $g(t) = f(t-3)u_3(t)$, où $f(t) = \sin t$
5. $g(t) = f(t-1)u_2(t)$, où $f(t) = 2t$
6. $g(t) = f(t) = (t-1)u_1(t) - 2(t-2)u_2(t) + (t-3)u_3(t)$

- ■ Dans les problèmes 7 à 12,
 a) tracez le graphique de la fonction ;
 b) exprimez $f(t)$ en termes de fonctions de Heaviside $u_c(t)$.

$$7. f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ -2, & 3 \leq t < 5 \\ 2, & 5 \leq t < 7 \\ 1, & t \geq 7 \end{cases}$$

$$8. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ -1, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 3 \\ -1, & 3 \leq t < 4 \\ 0, & t \geq 4. \end{cases}$$

$$9. f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 2 \\ e^{-(t-2)}, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$10. f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 2 \\ 1, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$11. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < 2 \\ t-2, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$$

$$12. f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & 2 \leq t < 5 \\ 7-t, & 5 \leq t < 7 \\ 0, & t \geq 7 \end{cases}$$

- Dans les problèmes 13 à 18, trouvez la transformée de Laplace de la fonction.

$$13. f(t) = \begin{cases} 0, & t < 2 \\ (t-2)^2, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$14. f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t^2 - 2t + 2, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$15. f(t) = \begin{cases} 0, & t < \pi \\ t - \pi, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

$$16. f(t) = u_1(t) + 2u_3(t) - 6u_4(t)$$

$$17. f(t) = (t-3)u_2(t) - (t-2)u_3(t)$$

$$18. f(t) = t - (t-1)u_1(t), \quad t \geq 0$$

- Dans les problèmes 19 à 24, trouvez la transformée de Laplace inverse de la fonction.

$$19. F(s) = \frac{3!}{(s-2)^4}$$

$$20. F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + s - 2}$$

$$21. F(s) = \frac{2(s-1)e^{-2s}}{s^2 - 2s + 2}$$

$$22. F(s) = \frac{2e^{-2s}}{s^2 - 4}$$

$$23. F(s) = \frac{(s-2)e^{-s}}{s^2 - 4s + 3}$$

$$24. F(s) = \frac{e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} - e^{-4s}}{s}$$

25. Supposez que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe pour $s > a \geq 0$.

- a) Montrez que si c est une constante positive, alors

$$\mathcal{L}\{f(ct)\} = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right), \quad s > ca.$$

- b) Montrez que si k est une constante positive, alors

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(ks)\} = \frac{1}{k} f\left(\frac{t}{k}\right).$$

- c) Montrez que si a et b sont des constantes avec $a > 0$, alors

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(as+b)\} = \frac{1}{a} e^{-bt/a} f\left(\frac{t}{a}\right).$$

- Dans les problèmes 26 à 29, utilisez les résultats du problème 25 pour trouver la transformée de Laplace inverse de la fonction.

$$26. F(s) = \frac{2^{n+1}n!}{s^{n+1}}$$

$$27. F(s) = \frac{2s+1}{4s^2+4s+5}$$

28. $F(s) = \frac{1}{9s^2 - 12s + 3}$

29. $F(s) = \frac{e^2 e^{-4s}}{2s - 1}$

- Dans les problèmes 30 à 33, trouvez la transformée de Laplace de la fonction. Dans le problème 33, supposez qu'il est possible d'intégrer terme à terme la série infinie.

30. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$

31. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$

32. $f(t) = 1 - u_1(t) + \cdots + u_{2n}(t) - u_{2n+1}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k(t)$

33. $f(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k(t)$ (Voir la figure 6.3.7.)

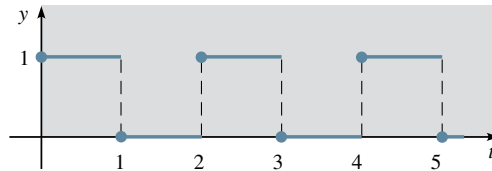


Figure 6.3.7 La fonction $f(t)$ du problème 33; une onde carrée.

34. Supposez que f satisfait à $f(t + T) = f(t)$ pour tout $t \geq 0$, où T est une valeur positive spécifique. La fonction f est alors dite périodique de période T dans l'intervalle $0 \leq t < \infty$. Montrez que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{\int_0^T e^{-st} f(t) dt}{1 - e^{-sT}}.$$

- Dans les problèmes 35 à 38, utilisez le résultat du problème 34 pour trouver la transformée de Laplace de la fonction.

35. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t < 2; \end{cases}$

$f(t + 2) = f(t).$

(Comparez avec le problème 33.)

36. $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ -1, & 1 \leq t < 2; \end{cases}$

$f(t + 2) = f(t).$

(Voir la figure 6.3.8.)

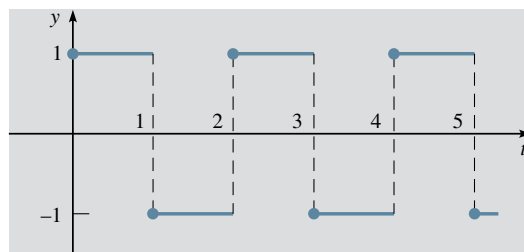


Figure 6.3.8 La fonction $f(t)$ du problème 36; une onde carrée.

37. $f(t) = t, \quad 0 \leq t < 1;$
 $f(t+1) = f(t).$
 (Voir la figure 6.3.9.)

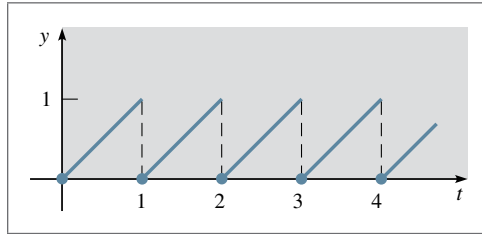


Figure 6.3.9 La fonction $f(t)$ du problème 37; une onde en dents de scie.

38. $f(t) = \sin t, \quad 0 \leq t < \pi;$
 $f(t + \pi) = f(t).$
 (Voir la figure 6.3.10.)

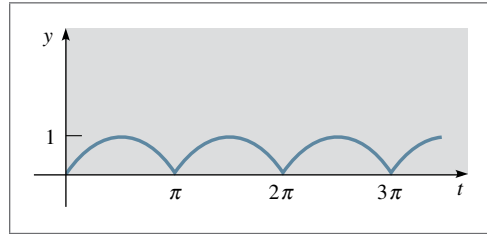


Figure 6.3.10 La fonction $f(t)$ du problème 38; une onde sinusoïdale positive.

39. a) Si $f(t) = 1 - u_1(t)$, trouvez $\mathcal{L}\{f(t)\}$ (comparez avec le problème 24). Tracez le graphique de $y = f(t)$.
 b) Soit $g(t) = \int_0^t f(\xi) d\xi$, où la fonction f est définie à la partie a). Tracez le graphique de $y = g(t)$ et trouvez $\mathcal{L}\{g(t)\}$.
 c) Soit $h(t) = g(t) - u_1(t)g(t-1)$, où g est définie à la partie b). Tracez le graphique de $y = h(t)$ et trouvez $\mathcal{L}\{h(t)\}$.
40. Considérez la fonction p définie par

$$p(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2-t, & 1 \leq t < 2; \end{cases} \quad p(t+2) = p(t).$$

- a) Tracez le graphique de $y = p(t)$.
 b) Trouvez $\mathcal{L}\{p(t)\}$ en considérant que p est le développement périodique de la fonction h dans le problème 39 c), puis en utilisant le résultat du problème 34.
 c) Trouvez $\mathcal{L}\{p(t)\}$ en considérant que

$$p(t) = \int_0^t f(t) dt,$$

où f est la fonction du problème 36, puis en utilisant le théorème 6.2.1.

6.4 Les équations différentielles avec des fonctions discontinues

Dans cette section, nous présenterons des exemples où le terme non homogène, aussi appelé fonction de contrainte, est discontinu.

Exemple 1

Trouvez la solution à l'équation différentielle

$$2y'' + y' + 2y = g(t), \quad (1)$$

où

$$g(t) = u_5(t) - u_{20}(t) = \begin{cases} 1, & 5 \leq t < 20, \\ 0, & 0 \leq t < 5 \quad \text{et} \quad t \geq 20. \end{cases} \quad (2)$$

Supposez que les conditions initiales sont

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (3)$$

Ce problème implique la charge du condensateur dans un circuit électrique simple avec une fonction potentielle unité échelon lorsque $5 \leq t \leq 20$. D'une autre manière, y peut représenter la réponse d'un oscillateur amorti quand la force appliquée est $g(t)$.

► La transformée de Laplace de l'équation (1) est

$$\begin{aligned} 2s^2Y(s) - 2sy(0) - 2y'(0) + sY(s) - y(0) + 2Y(s) &= \mathcal{L}\{u_5(t)\} - \mathcal{L}\{u_{20}(t)\} \\ &= (e^{-5s} - e^{-20s})/s. \end{aligned}$$

En tenant compte des conditions initiales (3) et en résolvant pour déterminer $Y(s)$, on obtient

$$Y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s(2s^2 + s + 2)}. \quad (4)$$

Afin de trouver $y = \phi(t)$, il est approprié d'écrire $Y(s)$ sous la forme

$$Y(s) = (e^{-5s} - e^{-20s})H(s), \quad (5)$$

où

$$H(s) = \frac{1}{s(2s^2 + s + 2)}. \quad (6)$$

Alors, si $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$, on a

$$y = \phi(t) = u_5(t)h(t-5) - u_{20}(t)h(t-20). \quad (7)$$

Il faut noter qu'on a utilisé le théorème 6.3.1 pour trouver les transformées inverses respectives de $e^{-5s}H(s)$ et de $e^{-20s}H(s)$. Finalement, pour déterminer $h(t)$, on utilise le développement en fractions partielles :

$$H(s) = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{2s^2+s+2}. \quad (8)$$

En déterminant les coefficients, on trouve $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = -\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1/2}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{2s^2 + s + 2} = \frac{1/2}{s} - \left(\frac{1}{2}\right) \frac{\left(s + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} \\ &= \frac{1/2}{s} - \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{s + \frac{1}{4}}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{15}/4}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Donc, en se reportant aux lignes 9 et 10 du tableau 6.2.1, on obtient

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[e^{-t/4} \cos(\sqrt{15}t/4) + (\sqrt{15}/15) e^{-t/4} \sin(\sqrt{15}t/4) \right]. \quad (10)$$

Dans la figure 6.4.1 à la page suivante, le graphique de $y = \phi(t)$ qui a été obtenu dans les équations (7) et (10) montre que la solution comporte trois parties distinctes. Pour $0 < t < 5$, l'équation différentielle est

$$2y'' + y' + 2y = 0 \quad (11)$$

et les conditions initiales sont données par l'équation (3). Puisque les conditions initiales ne transmettent aucune énergie au système et qu'il n'y a pas de force externe, le système demeure au repos. Autrement dit, $y = 0$ pour $0 < t < 5$. On peut le confirmer en résolvant l'équation (11) avec les conditions initiales (3). En particulier, si on évalue la solution et ses dérivées en $t = 5$ ou, plus précisément, quand t tend vers 5 par la gauche, on a

$$y(5) = 0, \quad y'(5) = 0. \quad (12)$$

▶ Lorsque $t > 5$, l'équation différentielle devient

$$2y'' + y' + 2y = 1, \quad (13)$$

dont la solution est la somme d'une constante (la réponse à la fonction constante) et d'une oscillation amortie (la solution à l'équation homogène correspondante). Le graphique de la figure 6.4.1 illustre clairement ce comportement dans l'intervalle $5 \leq t \leq 20$. On peut trouver cette partie de la solution en résolvant l'équation différentielle (13) avec les conditions initiales (12). Finalement, pour $t > 20$, l'équation différentielle redevient l'équation (11), où les conditions initiales sont obtenues en évaluant la solution des équations (13), (12) et sa dérivée en $t = 20$. Ces valeurs sont

$$y(20) \cong 0,501\,62, \quad y'(20) \cong 0,011\,25. \quad (14)$$

Le problème de valeur initiale (11), (14) n'est soumis à aucune force externe. Donc, sa solution est une oscillation amortie autour de $y = 0$ (voir la figure 6.4.1).

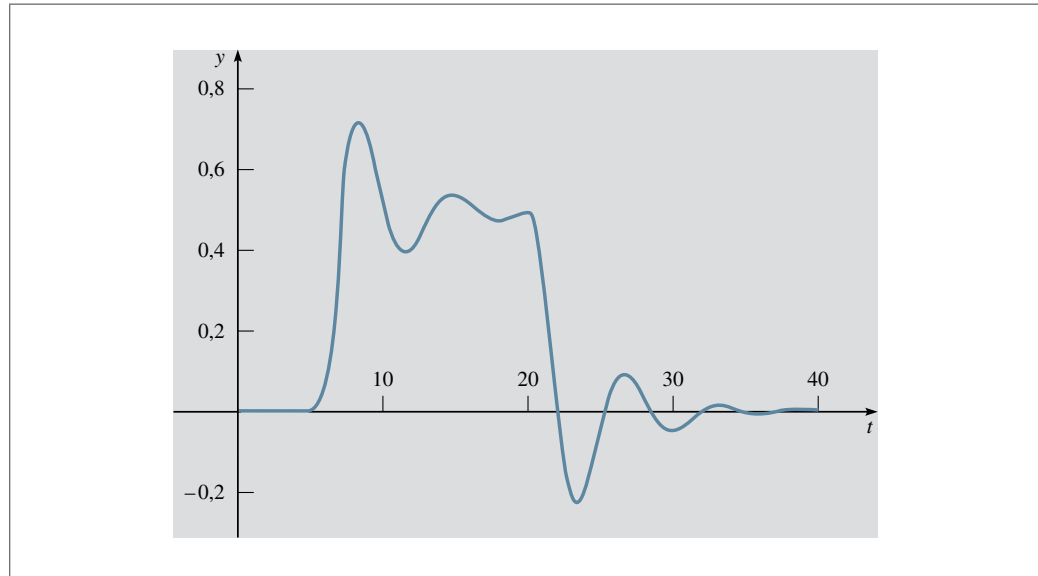


Figure 6.4.1 Solution au problème de valeur initiale (1), (2), (3): $2y'' + y' + 2y = u_5(t) - u_{20}(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Bien qu'il soit utile de visualiser la solution illustrée à la figure 6.4.1 comme étant composée des solutions à trois problèmes de valeur initiale distincts dans trois intervalles différents, il est fastidieux de trouver la solution en résolvant chaque problème séparément. Les méthodes des transformées de Laplace offrent une approche beaucoup plus élégante et pratique à ce problème et à d'autres qui impliquent des fonctions discontinues.

On peut constater l'effet de la discontinuité dans la fonction de contrainte si on examine plus en profondeur la solution $\phi(t)$ de l'exemple 1. Selon le théorème relatif à l'existence et à l'unicité (3.2.1), la solution ϕ et ses deux premières dérivées sont continues sauf possiblement aux points $t = 5$ et $t = 20$, où g est discontinue. On peut aussi le constater à partir de l'équation (7). De plus, d'après l'équation (7), on peut montrer par un calcul direct que ϕ et ϕ' sont continues même en $t = 5$ et en $t = 20$. Cependant, si on calcule ϕ'' , on trouve

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} \phi''(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 5^+} \phi''(t) = 1/2.$$

Par conséquent, $\phi''(t)$ admet une discontinuité de type saut de $1/2$ en $t = 5$. On peut montrer de manière similaire que $\phi''(t)$ admet une discontinuité de type saut de $-1/2$ en $t = 20$. Ainsi, le saut dans le terme de contrainte $g(t)$ en ces points est équilibré par un saut correspondant à l'intérieur du terme d'ordre le plus élevé $2y''$ dans le premier membre de l'équation.

On considère maintenant la forme générale de l'équation linéaire du deuxième ordre

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (15)$$

où p et q sont continues dans l'intervalle $\alpha < t < \beta$, mais où g est seulement continue par morceaux. Si $y = \psi(t)$ est une solution à l'équation (15), alors ψ et ψ' sont continues dans $\alpha < t < \beta$, mais ψ'' admet des discontinuités de type saut aux mêmes points que g . Des remarques similaires s'appliquent aux équations d'ordre plus élevé. En effet, la dérivée la plus élevée de la solution apparaissant dans l'équation différentielle admet des discontinuités de type saut aux mêmes points que la fonction de contrainte, mais la solution elle-même et ses dérivées d'ordres moins élevés sont continues même en ces points.

Exemple 2

Décrivez la nature qualitative de la solution au problème de valeur initiale

$$y'' + 4y = g(t), \quad (16)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (17)$$

où

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 5, \\ (t-5)/5, & 5 \leq t < 10, \\ 1, & t \geq 10. \end{cases} \quad (18)$$

Ensuite, trouvez la solution.

Dans cet exemple, la fonction de contrainte correspond au graphique illustré à la figure 6.4.2; on l'appelle chargement en pente. Il est assez facile de déterminer la forme générale de la solution. Pour $t < 5$, la solution est simplement $y = 0$. D'un autre côté, pour $t > 10$, la solution est de la forme

$$y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + 1/4. \quad (19)$$

La constante $1/4$ est une solution particulière à l'équation non homogène, tandis que les deux autres termes constituent la solution générale à l'équation homogène correspondante. Par conséquent, la solution (19) est une oscillation harmonique simple autour de $y = 1/4$. De même, à l'intérieur de l'étendue intermédiaire $5 < t < 10$, la solution oscille autour d'une fonction linéaire. Dans un contexte d'ingénierie, par exemple, on peut vouloir connaître l'amplitude éventuellement stable de cette oscillation.

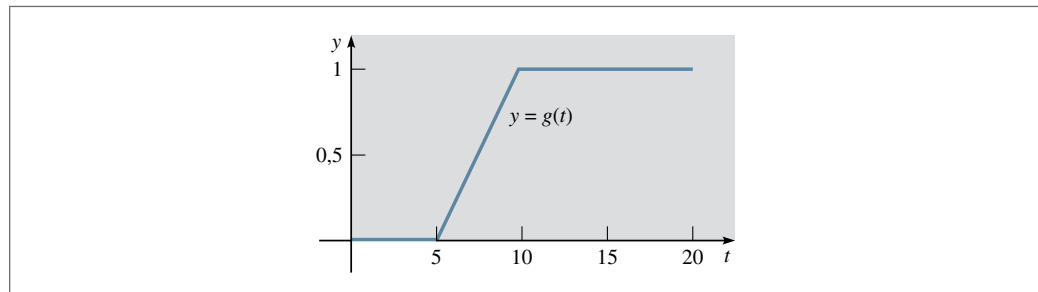


Figure 6.4.2 Chargement en pente; $y = g(t)$ d'après l'équation (18) ou l'équation (20).

Pour résoudre le problème, on pose

$$g(t) = [u_5(t)(t-5) - u_{10}(t)(t-10)]/5, \quad (20)$$

comme on peut le vérifier. Ensuite, on prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle et on utilise les conditions initiales. On obtient ainsi

$$(s^2 + 4)Y(s) = (e^{-5s} - e^{-10s})/5s^2$$

ou

$$Y(s) = (e^{-5s} - e^{-10s})H(s)/5, \quad (21)$$

où

$$H(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 4)}. \quad (22)$$

▶ Ainsi, la solution au problème de valeur initiale (16), (17), (18) est

$$y = \phi(t) = [u_5(t)h(t-5) - u_{10}(t)h(t-10)]/5, \quad (23)$$

où $h(t)$ est la transformée inverse de $H(s)$. La décomposition en fractions partielles de $H(s)$ est

$$H(s) = \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/4}{s^2 + 4}, \quad (24)$$

et il s'ensuit, d'après les lignes 3 et 5 du tableau 6.2.1, que

$$h(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t. \quad (25)$$

Le graphique de $y = \phi(t)$ est illustré à la figure 6.4.3. Il faut noter que la courbe admet qualitativement la forme dont on a parlé plus tôt. Pour trouver l'amplitude éventuellement stable de l'oscillation, il suffit de localiser un des maximums ou un des minimums pour $t > 10$. En posant la dérivée de la solution (23) égale à zéro, on trouve que le premier maximum est situé à environ (10,642, 0,2979), donc que l'amplitude de l'oscillation est d'environ 0,0479.

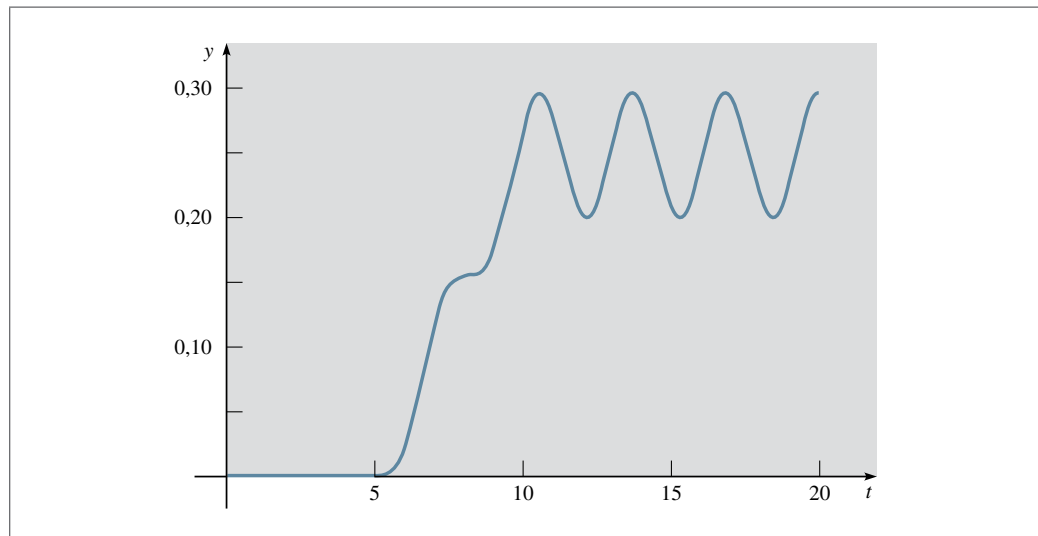


Figure 6.4.3 Solution au problème de valeur initiale (16), (17), (18).

Il faut noter que dans cet exemple, la fonction de contrainte g est continue, mais g' est discontinue en $t = 5$ et en $t = 10$. Il s'ensuit que la solution ϕ et ses deux premières dérivées sont continues partout, mais que ϕ'' admet des discontinuités en $t = 5$ et en $t = 10$ qui concordent avec les discontinuités de g' en ces points.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 13,

a) trouvez la solution au problème de valeur initiale ;

b) tracez les graphiques de la solution et de la fonction de contrainte. Expliquez comment celles-ci sont reliées.

⊙ 1. $y'' + y = f(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 3\pi \\ 0, & 3\pi \leq t < \infty \end{cases}$

⊙ 2. $y'' + 2y' + 2y = h(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; $h(t) = \begin{cases} 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & 0 \leq t < \pi \text{ et } t \geq 2\pi \end{cases}$

- ③ $y'' + 4y = \sin t - u_{2\pi}(t) \sin(t - 2\pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
 ④ $y'' + 4y = \sin t + u_{\pi}(t) \sin(t - \pi); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
 ⑤ $y'' + 3y' + 2y = f(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 10 \\ 0, & t \geq 10 \end{cases}$
 ⑥ $y'' + 3y' + 2y = u_2(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
 ⑦ $y'' + y = u_{3\pi}(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
 ⑧ $y'' + y' + \frac{5}{4}y = t - u_{\pi/2}(t)(t - \pi/2); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
 ⑨ $y'' + y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1; \quad g(t) = \begin{cases} t/2, & 0 \leq t < 6 \\ 3, & t \geq 6 \end{cases}$
 ⑩ $y'' + y' + \frac{5}{4}y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0; \quad g(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi \end{cases}$
 ⑪ $y'' + 4y = u_{\pi}(t) - u_{3\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$
 ⑫ $y^{(4)} - y = u_1(t) - u_2(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$
 ⑬ $y^{(4)} + 5y'' + 4y = 1 - u_{\pi}(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$
 14. Trouvez une expression impliquant $u_c(t)$ pour une fonction f qui bondit de zéro en $t = t_0$ à la valeur h en $t = t_0 + k$.
 15. Trouvez une expression comprenant $u_c(t)$ pour une fonction g qui bondit à partir de zéro en $t = t_0$ à la valeur h en $t = t_0 + k$ et qui retombe à zéro en $t = t_0 + 2k$.
 ⑭ 16. Un système masse-ressort satisfait au problème de valeur initiale

$$u'' + \frac{1}{4}u' + u = kg(t), \quad u(0) = 0, \quad u'(0) = 0,$$

où $g(t) = u_{3/2}(t) - u_{5/2}(t)$ et $k > 0$ est un paramètre.

- a) Tracez le graphe de $g(t)$. Vous devez noter qu'il s'agit d'une impulsion de longueur unitaire s'étendant sur une unité de temps.
 b) Résolvez le problème de valeur initiale.
 c) Tracez la solution pour $k = 1/2$, $k = 1$ et $k = 2$. Décrivez les principales caractéristiques de la solution et la façon dont elles dépendent de k .
 d) Trouvez, à deux décimales près, la plus petite valeur de k pour laquelle la solution $u(t)$ atteint la valeur de 2.
 e) Supposez que $k = 2$. Trouvez le temps τ au bout duquel $|u(t)| < 0,1$ quel que soit $t > \tau$.
 ⑮ 17. Modifiez le problème de l'exemple 2 de la présente section en remplaçant la fonction de contrainte $g(t)$ par

$$f(t) = [u_5(t)(t - 5) - u_{5+k}(t)(t - 5 - k)]/k.$$

- a) Tracez le graphique de $f(t)$ et décrivez en quoi cette fonction dépend de k . Pour quelle valeur de k la fonction $f(t)$ sera-t-elle identique à $g(t)$ dans l'exemple ?
 b) Résolvez le problème de valeur initiale

$$y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

- c) La solution à la partie b) dépend de k , mais lorsque t augmente, la solution est toujours une oscillation harmonique simple autour de $y = 1/4$. Tentez de trouver comment l'amplitude de cette oscillation éventuelle dépend de k . Ensuite, confirmez votre conclusion en traçant la solution pour différentes valeurs de k .

- ▶ ④ 18. Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + \frac{1}{3}y' + 4y = f_k(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où

$$f_k(t) = \begin{cases} 1/2k, & 4-k \leq t < 4+k \\ 0, & 0 \leq t < 4-k \quad \text{et} \quad t \geq 4+k \end{cases}$$

et $0 < k < 4$.

- Tracez le graphique de $f_k(t)$. Vous devez noter que la région au-dessous du graphique est indépendante de k . Si $f_k(t)$ représente une force, cela signifie que le produit de la longueur de la force et de l'intervalle de temps durant lequel elle agit ne dépend pas de k .
- Écrivez $f_k(t)$ en termes de la fonction unité échelon, puis résolvez le problème de valeur initiale.
- Tracez la solution pour $k = 2$, $k = 1$ et $k = 1/2$. Décrivez en quoi la solution dépend de k .

- **La résonance et les pulsations** Dans la section 3.9, on a vu qu'une oscillation harmonique non amortie (comme un système masse-ressort) avec une fonction de contrainte sinusoïdale produit une résonance si la fréquence du terme de contrainte est la même que la fréquence naturelle. Si la fréquence contrainte est légèrement différente de la fréquence naturelle, alors le système produit une pulsation. Dans les problèmes 19 à 23, on explore l'effet de certaines fonctions de contrainte périodiques non sinusoïdales.

- ④ 19. Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où

$$f(t) = u_0(t) + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k u_{k\pi}(t).$$

- Tracez le graphique de $f(t)$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq 6\pi$.
- Trouvez la solution au problème de valeur initiale.
- Soit $n = 15$. Tracez le graphique de la solution pour $0 \leq t \leq 60$. Décrivez la solution et expliquez son comportement.
- Observez comment la solution change lorsque n augmente. Que se passe-t-il lorsque $n \rightarrow \infty$?

- ④ 20. Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + 0,1y' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où $f(t)$ est la même qu'au problème 19.

- Tracez le graphique de la solution. Utilisez une valeur assez grande de n et un intervalle pour t assez ample pour que la partie transitoire de la solution devienne négligeable et que le régime permanent apparaisse clairement.
- Évaluez l'amplitude et la fréquence du régime permanent dans la solution.
- Comparez les résultats de la partie b) avec ceux de la section 3.9 pour un oscillateur contraint par une fonction sinusoïdale.

21. Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où

$$g(t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^n (-1)^k u_{k\pi}(t).$$

- Tracez le graphique de $g(t)$ dans l'intervalle $0 \leq t \leq 6\pi$. Comparez ce graphique avec celui de $f(t)$ dans le problème 19 a).
- Trouvez la solution au problème de valeur initiale.
- Soit $n = 15$. Tracez le graphique de la solution pour $0 \leq t \leq 60$. Décrivez la solution et expliquez son comportement. Comparez-la à la solution du problème 19.
- Observez comment la solution change lorsque n augmente. Que se passe-t-il lorsque $n \rightarrow \infty$?

- 22. Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + 0,1y' + y = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où $g(t)$ est la même qu'au problème 21.

- Tracez le graphique de la solution. Utilisez une valeur de n assez grande et un intervalle t assez ample pour que la partie transitoire de la solution devienne négligeable et que le régime permanent apparaisse clairement.
- Estimez l'amplitude et la fréquence du régime permanent dans la solution.
- Comparez les résultats de la partie b) avec ceux du problème 20 et de la section 3.9 pour un oscillateur contraint par une fonction sinusoïdale.

23. Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + y = h(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où

$$f(t) = u_0(t) + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k u_{1/k/4}(t).$$

Vous devez noter que ce problème est identique au problème 19, sauf que la fréquence du terme de contrainte a été augmentée.

- Trouvez la solution à ce problème de valeur initiale.
- Soit $n \geq 33$. Tracez le graphique de la solution pour $0 \leq t \leq 90$ ou dans un intervalle plus grand. Votre graphique devrait montrer une pulsation clairement reconnaissable.
- À partir du graphique de la partie b), évaluez la période lente et la période rapide de cet oscillateur.
- Pour l'oscillateur contraint par une fonction sinusoïdale de la section 3.9, on a montré que la fréquence lente est de $|\omega - \omega_0|/2$, où ω_0 est la fréquence naturelle du système et ω la fréquence contrainte. De la même manière, la fréquence rapide est de $(\omega + \omega_0)/2$. Utilisez ces expressions pour calculer la période rapide et la période lente de l'oscillateur. Comment les résultats se comparent-ils avec vos estimations de la partie c) ?

6.5 Les fonctions impulsion

Dans certaines applications, il est nécessaire de traiter des phénomènes de nature impulsive comme les tensions ou les forces de grande intensité qui agissent dans des intervalles de temps très courts. De tels problèmes conduisent souvent à des équations différentielles de la forme

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad (1)$$

où $g(t)$ est élevée dans un court intervalle $t_0 - \tau < t < t_0 + \tau$ et où elle est nulle ailleurs.

L'intégrale $I(\tau)$ définie par

$$I(\tau) = \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} g(t) dt \quad (2)$$

ou, puisque $g(t) = 0$ à l'extérieur de l'intervalle $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$,

$$I(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt, \quad (3)$$

est une mesure de la force de la fonction de contrainte. Dans un système mécanique, où $g(t)$ est une force, $I(\tau)$ est l'**impulsion** totale de la force $g(t)$ dans l'intervalle de temps $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$. De même, si y est le courant dans un circuit électrique et si $g(t)$ est la dérivée de temps de la tension, alors $I(\tau)$ représente la tension totale marquée par le circuit dans l'intervalle $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$.

En particulier, on suppose que t_0 est nul et que $g(t)$ est

$$g(t) = d_\tau(t) = \begin{cases} 1/(2\tau), & -\tau < t < \tau, \\ 0, & t \leq -\tau \text{ ou } t \geq \tau, \end{cases} \quad (4)$$

où τ est une constante positive très petite (voir la figure 6.5.1). Selon l'équation (2) ou (3), il s'ensuit directement que, dans ce cas, $I(\tau) = 1$ indépendamment de la valeur de τ , tant que $\tau \neq 0$. Maintenant, on idéalise la fonction de contrainte d_τ en supposant qu'elle agit dans des intervalles de plus en plus courts. Autrement dit, il faut que $\tau \rightarrow 0^+$ (voir la figure 6.5.2). En passant à la limite, on obtient

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} d_\tau(t) = 0, \quad t \neq 0. \quad (5)$$

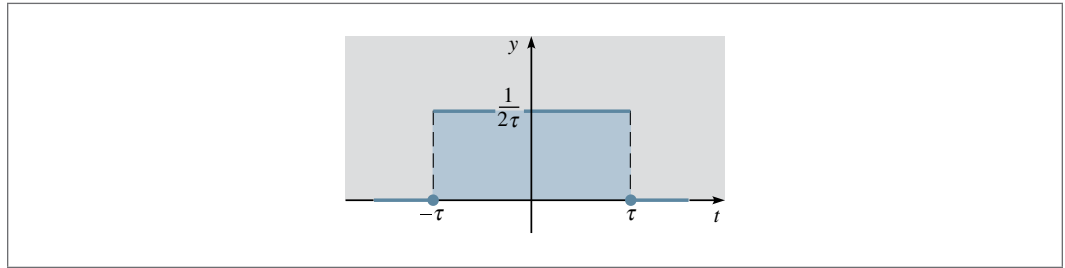


Figure 6.5.1 Graphique de $y = d_\tau(t)$.

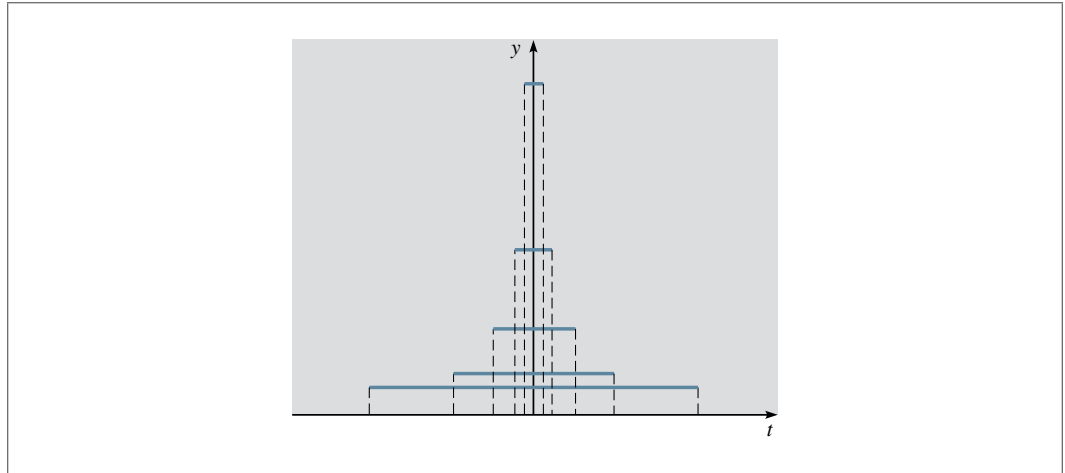


Figure 6.5.2 Graphiques de $y = d_\tau(t)$ lorsque $\tau \rightarrow 0^+$.

De plus, puisque $I(\tau) = 1$ quel que soit $\tau \neq 0$, il s'ensuit que

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} I(\tau) = 1. \quad (6)$$

On utilise les équations (5) et (6) pour définir une **fonction impulsion unitaire** δ , qui transmet une impulsion de magnitude 1 en $t = 0$, mais qui est nulle quel que soit t différent de zéro. Autrement dit, la « fonction » δ est définie comme admettant les propriétés

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0, \quad (7)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (8)$$

Aucune fonction élémentaire ne satisfait aux équations (7) et (8). La « fonction » δ définie par ces équations est un exemple de ce qu'est une fonction généralisée ou une distribution. On

appelle généralement cette dernière **fonction delta** de Dirac². Puisque $\delta(t)$ correspond à une impulsion égale à 1 en $t = 0$, une impulsion égale à 1 en un point arbitraire $t = t_0$ est donnée par $\delta(t - t_0)$. À partir des équations (7) et (8), il s'ensuit que

$$\delta(t - t_0) = 0, \quad t \neq t_0, \quad (9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1. \quad (10)$$

La fonction delta ne satisfait pas aux conditions du théorème 6.1.2, mais sa transformée de Laplace peut néanmoins être formellement définie. Puisque $\delta(t)$ est définie comme la limite de $d_\tau(t)$ lorsque $\tau \rightarrow 0$, il est naturel de définir la transformée de Laplace de δ comme une limite similaire à la transformée de d_τ . En particulier, on supposera que $t_0 > 0$, et on définira $\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}$ par l'équation

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\}. \quad (11)$$

Pour évaluer la limite dans l'équation (11), on note d'abord que si $\tau < t_0$, ce qui doit éventuellement être le cas lorsque $\tau \rightarrow 0^+$, alors $t_0 - \tau > 0$. Puisque $d_\tau(t - t_0)$ est non nulle dans l'intervalle de $t_0 - \tau$ à $t_0 + \tau$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} d_\tau(t - t_0) dt \\ &= \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st} d_\tau(t - t_0) dt. \end{aligned}$$

En substituant à $d_\tau(t - t_0)$ son expression selon l'équation (4), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\} &= \frac{1}{2\tau} \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} e^{-st} dt = -\frac{1}{2s\tau} e^{-st} \Big|_{t=t_0 - \tau}^{t=t_0 + \tau} \\ &= \frac{1}{2s\tau} e^{-st_0} (e^{s\tau} - e^{-s\tau}) \end{aligned}$$

ou

$$\mathcal{L}\{d_\tau(t - t_0)\} = \frac{\sinh s\tau}{s\tau} e^{-st_0}. \quad (12)$$

Le quotient $(\sinh s\tau)/s\tau$ est indéterminé lorsque $\tau \rightarrow 0$, mais on peut évaluer sa limite avec la règle de L'Hospital. On obtient

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\sinh s\tau}{s\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{s \cosh s\tau}{s} = 1.$$

Alors, à partir de l'équation (11), il s'ensuit que

$$\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-st_0}. \quad (13)$$

L'équation (13) définit $\mathcal{L}\{\delta(t - t_0)\}$, quel que soit $t_0 > 0$. Pour admettre $t_0 = 0$, on étend ce résultat lorsque $t_0 \rightarrow 0$ dans le second membre de l'équation (13). Ainsi,

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \lim_{t_0 \rightarrow 0^+} e^{-st_0} = 1. \quad (14)$$

2. Paul A. M. Dirac (1902-1984), physicien mathématicien anglais, a obtenu son doctorat de l'Université de Cambridge en 1926 et y a enseigné les mathématiques jusqu'en 1969. Il a reçu le prix Nobel de physique en 1933 (avec Erwin Schrödinger) pour son travail fondamental en mécanique quantique. Son travail le plus remarquable portait sur l'équation relativiste pour l'électron, publié en 1928. À partir de cette équation, il a prédit l'existence d'un anti-électron, ou positron, qu'il a observé pour la première fois en 1932. À sa retraite, après avoir quitté l'Université de Cambridge, Paul A. M. Dirac s'est installé aux États-Unis et il y a occupé le poste de professeur-chercheur à la Florida State University.

De la même manière, il est possible de définir l'intégrale du produit de la fonction delta et de toute fonction continue f . On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\tau}(t - t_0) f(t) dt. \quad (15)$$

En utilisant la définition (4) de $d_{\tau}(t)$ et le théorème de la moyenne pour les intégrales, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d_{\tau}(t - t_0) f(t) dt &= \frac{1}{2\tau} \int_{t_0 - \tau}^{t_0 + \tau} f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\tau} \cdot 2\tau \cdot f(t^*) = f(t^*), \end{aligned}$$

où $t_0 - \tau < t^* < t_0 + \tau$. Ainsi, $t^* \rightarrow t_0$ lorsque $\tau \rightarrow 0^+$, et il s'ensuit qu'à partir de l'équation (15),

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0). \quad (16)$$

Il est souvent approprié d'introduire la fonction delta quand on étudie des problèmes d'impulsion et de la traiter formellement comme s'il s'agissait d'une fonction ordinaire. Ce cas est illustré dans l'exemple 1. Cependant, il faut réaliser que la justification ultime de telles démarches doit reposer sur une analyse approfondie des opérations concernées. Une telle théorie mathématique a été rigoureusement élaborée, mais elle ne sera pas discutée ici.

Exemple 1

Trouvez la solution au problème de valeur initiale

$$2y'' + y' + 2y = \delta(t - 5), \quad (17)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \quad (18)$$

Ce problème de valeur initiale apparaît dans l'étude du même circuit électrique et du même oscillateur que dans l'exemple 1 de la section 6.4. La seule différence réside dans le terme de contrainte.

Pour résoudre ce problème de valeur initiale, on prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle et on utilise les conditions initiales. Ainsi, on obtient

$$(2s^2 + s + 2)Y(s) = e^{-5s}.$$

Alors,

$$Y(s) = \frac{e^{-5s}}{2s^2 + s + 2} = \frac{e^{-5s}}{2} \frac{1}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}. \quad (19)$$

Selon le théorème 6.3.2 ou à partir de la ligne 9 du tableau 6.2.1, on a

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\left(s + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}} \right\} = \frac{14}{\sqrt{15}} e^{-t/4} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} t. \quad (20)$$

Ainsi, selon le théorème 6.3.1, on a

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \frac{2}{\sqrt{15}} u_5(t) e^{-(t-5)/4} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} (t-5), \quad (21)$$

qui est la solution formelle au problème donné. Il est aussi possible d'écrire y sous la forme

$$y = \begin{cases} 0, & t < 5, \\ \frac{2}{\sqrt{15}} e^{-(t-5)/4} \sin \frac{\sqrt{15}}{4} (t-5), & t \geq 5. \end{cases} \quad (22)$$

Le graphique de l'équation (22) est illustré à la figure 6.5.3. Puisque les conditions initiales en $t = 0$ sont homogènes et qu'il n'y a aucune source d'excitation avant $t = 5$, aucune réponse ne survient dans l'intervalle $0 < t < 5$. L'impulsion en $t = 5$ produit une oscillation décroissante qui persiste indéfiniment. La réponse est continue en $t = 5$ malgré la singularité dans la fonction de contrainte en

► ce point. Cependant, la première dérivée de la solution admet une discontinuité de type saut en $t = 5$, et la deuxième dérivée admet une discontinuité infinie à cet endroit. C'est ce qu'exige l'équation différentielle (17), puisqu'une singularité d'un membre de l'équation doit être équilibrée par une singularité correspondante dans l'autre membre.

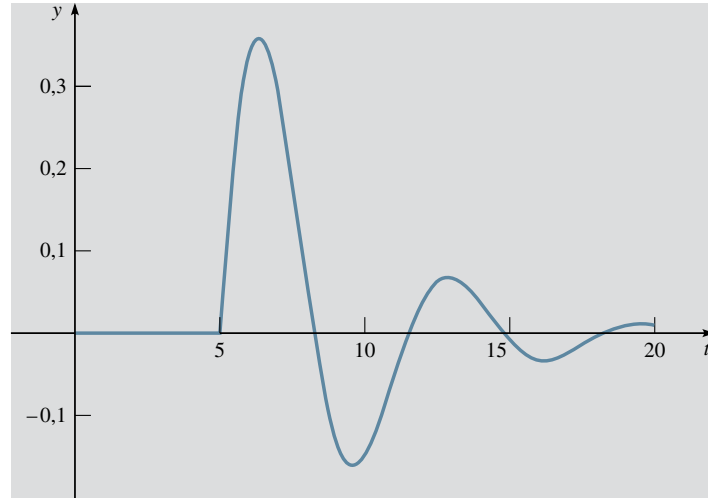


Figure 6.5.3 Solution au problème de valeur initiale (17), (18):
 $2y'' + y' + 2y = \delta(t - 5)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Quand on étudie des problèmes d'impulsion, l'utilisation de la fonction delta simplifie généralement les calculs mathématiques, souvent de façon assez importante. Cependant, si l'excitation réelle se produit durant un intervalle de temps bref, mais non nul, alors une erreur sera introduite si on considère l'excitation comme étant instantanée. Cette erreur peut être négligeable, mais dans un problème pratique, elle ne doit pas être écartée sans avoir été considérée. Le problème 16 vous demande d'étudier cette question dans le cas d'un oscillateur harmonique simple.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 12,

a) trouvez la solution au problème de valeur initiale;

b) tracez son graphique.

- ① 1. $y'' + 2y' + 2y = \delta(t - \pi)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- ② 2. $y'' + 4y = \delta(t - \pi) - \delta(t - 2\pi)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
- ③ 3. $y'' + 3y' + 2y = \delta(t - 5) + u_{10}(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1/2$
- ④ 4. $y'' - y = -20\delta(t - 3)$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- ⑤ 5. $y'' + 2y' + 3y = \sin t + \delta(t - 3\pi)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
- ⑥ 6. $y'' + 4y = \delta(t - 4\pi)$; $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$
- ⑦ 7. $y'' + y = \delta(t - 2\pi) \cos t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
- ⑧ 8. $y'' + 4y = 2\delta(t - \pi/4)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
- ⑨ 9. $y'' + y = u_{\pi/2}(t) + 3\delta(t - 3\pi/2) - u_{2\pi}(t)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
- ⑩ 10. $2y'' + y' + 4y = \delta(t - \pi/6) \sin t$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
- ⑪ 11. $y'' + 2y' + 2y = \cos t + \delta(t - \pi/2)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$
- ⑫ 12. $y^{(4)} - y = \delta(t - 1)$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 0$

- ▶ ⑬. Considérez une fois de plus le système de l'exemple 1 de la présente section, dans lequel une oscillation subit une impulsion égale à 1 en $t = 5$. Supposez qu'on désire ramener le système au repos après exactement un cycle, autrement dit quand la réponse revient d'abord à l'équilibre en se déplaçant dans la direction positive.

- Déterminez l'impulsion $k\delta(t - t_0)$ qu'on doit appliquer au système afin d'atteindre cet objectif. Vous devez noter que k est l'intensité de l'impulsion et que t_0 est le temps de son application.
- Résolvez le problème de valeur initiale résultant, puis tracez sa solution pour démontrer que celle-ci se comporte de la manière précisée.

- ⑭. Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + \gamma y' + y = \delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où γ est le coefficient d'amortissement (ou la résistance).

- Soit $\gamma = 1/2$. Trouvez la solution au problème de valeur initiale et tracez son graphique.
- Trouvez le temps t_1 auquel la solution atteint sa valeur maximale. De plus, trouvez la valeur maximale y_1 de la solution.
- Supposez maintenant que $\gamma = 1/4$. Répétez les exercices des parties a) et b).
- Déterminez comment t_1 et y_1 varient lorsque γ diminue. Quelles sont les valeurs de t_1 et de y_1 lorsque $\gamma = 0$?

- ⑮. Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + \gamma y' + y = k\delta(t - 1), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où k est l'intensité d'une impulsion en $t = 1$ et γ est le coefficient d'amortissement (ou la résistance).

- Soit $\gamma = 1/2$. Trouvez la valeur de k pour laquelle la réponse atteint un pic de hauteur 2. Notez cette valeur k_1 .
- Répétez la partie a) pour $\gamma = 1/4$.
- Déterminez comment k_1 varie lorsque γ diminue. Quelle est la valeur de k_1 lorsque $\gamma = 0$?

- ⑯. Considérez le problème de valeur initiale

$$y'' + y = f_k(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où $f_k(t) = [u_{4-k}(t) - u_{4+k}(t)]/2k$ avec $0 < k \leq 1$.

- Trouvez la solution $y = \phi(t, k)$ au problème de valeur initiale.
- Calculez $\lim_{k \rightarrow 0^+} \phi(t, k)$ à partir de la solution trouvée à la partie a).
- Vous devez noter que $\lim_{k \rightarrow 0^+} f_k(t) = \delta(t - 4)$. Trouvez la solution $\phi_0(t)$ au problème de valeur initiale avec $f_k(t)$ remplacée par $\delta(t - 4)$. Est-il vrai que $\phi_0(t) = \lim_{k \rightarrow 0^+} \phi(t, k)$?
- Tracez le graphique de $\phi(t, 1/2)$, $\phi(t, 1/4)$ et $\phi_0(t)$ dans un même plan. Décrivez la relation entre $\phi(t, k)$ et $\phi_0(t)$.

- Les problèmes 17 à 22 ont pour sujet l'effet d'une suite d'impulsions sur un oscillateur non amorti. Soit

$$y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

En ce qui concerne chacun des choix suivants pour $f(t)$, procédez comme suit.

- Essayez de prévoir la nature de la solution sans résoudre le problème.
- Testez votre prédiction en trouvant la solution et en traçant son graphique.
- Déterminez ce qui se produit quand la suite d'impulsions prend fin.

⑰. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} \delta(t - k\pi)$

⑱. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} \delta(t - k\pi)$

⑲. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} \delta(t - k\pi/2)$

⑳. $f(t) = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} \delta(t - k\pi/2)$

④ 21. $f(t) = \sum_{k=1}^{15} \delta[t - (2k-1)\pi]$

④ 22. $f(t) = \sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1} \delta(t - 11k/4)$

④ 23. La position d'un certain oscillateur légèrement amorti satisfait au problème de valeur initiale

$$y'' + 0,1y' + y = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} \delta(t - k\pi), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Vous devez noter que, sauf pour le terme d'amortissement, ce problème est le même que le problème 18.

- a) Essayez de prévoir la nature de la solution sans résoudre le problème.
- b) Testez votre prédiction en trouvant la solution et en traçant son graphique.
- c) Déterminez ce qui se produit quand la suite d'impulsions prend fin.

④ 24. Procédez comme au problème 23 pour l'oscillateur qui satisfait à

$$y'' + 0,1y' + y = \sum_{k=1}^{15} \delta[t - (2k-1)\pi], \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Vous devez noter que, sauf pour le terme d'amortissement, ce problème est le même que le problème 21.

25. a) À l'aide de la méthode de variation des paramètres, montrez que la solution au problème de valeur initiale

$$y'' + 2y' + 2y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

est

$$y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} f(\tau) \sin(t-\tau) d\tau.$$

b) Montrez que si $f(t) = \delta(t - \pi)$, alors la solution de la partie a) se réduit à

$$y = u_\pi(t) e^{-(t-\pi)} \sin(t - \pi).$$

c) Utilisez la transformée de Laplace pour résoudre le problème de valeur initiale avec $f(t) = \delta(t - \pi)$ et confirmez que la solution concorde avec le résultat de la partie b).

6.6 Le produit de convolution

Parfois, il est possible de poser une transformée de Laplace $H(s)$ comme étant le produit de deux autres transformées $F(s)$ et $G(s)$, où F et G sont les transformées respectives des fonctions f et g . On pourrait alors croire que $H(s)$ est la transformée du produit de f et de g . Cependant, ce n'est pas le cas. En d'autres mots, la transformée de Laplace n'est pas distributive sur la multiplication. Toutefois, si on introduit un « produit généralisé » défini de manière appropriée, alors la situation change, comme l'énonce le théorème qui suit.

Théorème 6.6.1

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ et $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$ existent pour $s > a \geq 0$, alors

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}, \quad s > a, \quad (1)$$

où

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (2)$$

La fonction h est dite la convolution de f et de g . Les intégrales dans l'équation (2) sont dites produits de convolution.

On obtient l'égalité des deux intégrales de l'équation (2) en effectuant le changement de variable $t - \tau = \xi$ dans la première intégrale. Avant de prouver ce théorème, voici quelques observations sur le produit de convolution. Selon ce théorème, la transformée de la convolution de deux fonctions, plutôt que la transformée de leur produit ordinaire, est donnée par le produit des transformées distinctes. Par convention, on peut considérer le produit de convolution comme un produit généralisé en écrivant

$$h(t) = (f * g)(t). \quad (3)$$

En particulier, la notation $(f * g)(t)$ sert à indiquer la première intégrale qui apparaît dans l'équation (2). La convolution $f * g$ possède de nombreuses propriétés identiques à celles de la multiplication ordinaire. Par exemple, on peut montrer que

$$f * g = g * f \quad (\text{commutativité}) \quad (4)$$

$$f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2 \quad (\text{distributivité}) \quad (5)$$

$$(f * g) * h = f * (g * h) \quad (\text{associativité}) \quad (6)$$

$$f * 0 = 0 * f = 0. \quad (7)$$

Dans l'équation (7), les zéros ne dénotent pas le nombre 0, mais plutôt la fonction dont la valeur est 0 pour chaque valeur de t . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier ces propriétés.

Cependant, il existe d'autres propriétés de la multiplication ordinaire qu'un produit de convolution n'admet pas. Par exemple, il est généralement faux que $f * 1$ soit égal à f . En effet,

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(t - \tau) \cdot 1 \, d\tau = \int_0^t f(t - \tau) \, d\tau.$$

Si, par exemple, $f(t) = \cos t$, alors

$$\begin{aligned} (f * 1)(t) &= \int_0^t \cos(t - \tau) \, d\tau = -\sin(t - \tau) \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} \\ &= -\sin 0 + \sin t \\ &= \sin t. \end{aligned}$$

Donc, $(f * 1)(t) \neq f(t)$. De la même manière, on n'a pas toujours que $f * f$ soit positif. Reportez-vous au problème 3 pour voir un exemple.

On trouve les produits de convolution dans plusieurs applications où le comportement d'un système au temps t dépend non seulement de son état à cet instant, mais aussi de son état dans le passé. Les systèmes de ce type sont parfois dits systèmes héréditaires, et on les rencontre par exemple dans le transport de neutrons, la viscoélasticité et la dynamique des populations.

En revenant à la preuve du théorème 6.6.1, on remarque d'abord que si

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \, d\xi$$

et

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \, d\tau,$$

alors

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \, d\xi \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \, d\tau. \quad (8)$$

Puisque l'intégrande de la première intégrale ne dépend pas de la variable d'intégration de la seconde, on peut écrire $F(s)G(s)$ sous la forme de l'intégrale itérée

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-s\xi} f(\xi) \, d\xi \right] d\tau \\ &= \int_0^\infty g(\tau) \left[\int_0^\infty e^{-s(\xi+\tau)} f(\xi) \, d\xi \right] d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

On peut réécrire cette expression sous une forme plus appropriée en introduisant de nouvelles variables d'intégration. D'abord, on pose $\xi = t - \tau$, où τ est fixée, pour que $\xi = 0$. En outre, $\xi = 0$ correspond à $t = \tau$, et $\xi = \infty$ correspond à $t = \infty$; alors l'intégrale par rapport à ξ dans l'équation (9) devient une intégrale par rapport à t . Ainsi,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty g(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau) dt \right] d\tau. \quad (10)$$

L'intégrale du second membre de l'équation (10) est illustrée par la région ombragée en forme de coin qui s'étend vers l'infini dans le plan $t\tau$ (voir la figure 6.6.1). En supposant qu'on peut inverser l'ordre d'intégration, on réécrit l'équation (10) pour que l'intégration par rapport à τ soit d'abord réalisée. On obtient finalement

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right] dt \quad (11)$$

ou

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st} h(t) dt = \mathcal{L}\{h(t)\}, \quad (12)$$

où $h(t)$ est définie par l'équation (2), ce qui complète la preuve du théorème 6.6.1.

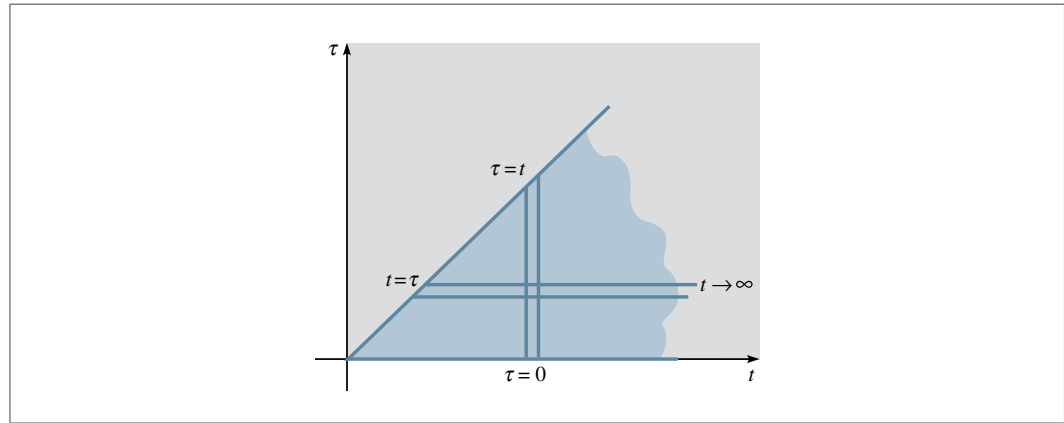


Figure 6.6.1 Région d'intégration en $F(s)G(s)$.

Exemple 1

Trouvez la transformée inverse de

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2 + a^2)}. \quad (13)$$

Considérez $H(s)$ comme le produit de s^{-2} et de $a/(s^2 + a^2)$ qui, selon les lignes 3 et 5 du tableau 6.2.1, sont respectivement les transformées de t et de $\sin at$. Ainsi, selon le théorème 6.6.1, la transformée inverse de $H(s)$ est

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau) \sin a\tau d\tau = \frac{at - \sin at}{a^2}. \quad (14)$$

Il est possible de vérifier que le résultat est le même si $h(t)$ est écrite sous la forme

$$h(t) = \int_0^t \tau \sin a(t-\tau) d\tau,$$

ce qui confirme l'équation (2) dans ce cas. Bien sûr, on peut aussi trouver $h(t)$ en développant $H(s)$ en fractions partielles.

Exemple 2

Trouvez la solution au problème de valeur initiale

$$y'' + 4y = g(t), \quad (15)$$

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = -1. \quad (16)$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle et en utilisant les conditions initiales, on obtient

$$s^2 Y(s) - 3s + 1 + 4Y(s) = G(s)$$

ou

$$Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4}. \quad (17)$$

Il faut noter que les premier et deuxième termes du second membre de l'équation (17) renferment la dépendance de $Y(s)$ par rapport respectivement aux conditions initiales et à la fonction de contrainte. On peut réécrire $Y(s)$ sous la forme

$$Y(s) = 3 \frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2} \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2} \frac{2}{s^2+4} G(s). \quad (18)$$

Ensuite, en utilisant les lignes 5 et 6 du tableau 6.2.1 et le théorème 6.6.1, on obtient

$$y = 3 \cos 2t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{2} \int_0^t \sin 2(t-\tau) g(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Si une fonction de contrainte spécifique g est donnée, alors on pourra évaluer l'intégrale dans l'équation (19) (avec des méthodes numériques, si nécessaire).

L'exemple 2 illustre la puissance du produit de convolution comme outil pour obtenir la solution à un problème de valeur initiale en termes d'une intégrale. En fait, il est possible de procéder sensiblement de la même manière avec des problèmes plus généraux. On considère l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad (20)$$

où a , b et c sont des constantes et g est une fonction donnée, avec les conditions initiales

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = y'_0. \quad (21)$$

La méthode des transformées donne un bon aperçu de la structure de la solution aux problèmes de ce type.

On appelle souvent le problème de valeur initiale (20), (21) un problème d'entrée-sortie. Les coefficients a , b et c caractérisent les propriétés d'un système physique, et $g(t)$ est l'entrée du système. Les valeurs y_0 et y'_0 décrivent l'état initial, et la solution y est la sortie au temps t .

En prenant la transformée de Laplace de l'équation (20) et en utilisant les conditions initiales (21), on obtient

$$(as^2 + bs + c)Y(s) - (as + b)y_0 - ay'_0 = G(s).$$

Si on a

$$\Phi(s) = \frac{(as + b)y_0 + ay'_0}{as^2 + bs + c}, \quad \Psi(s) = \frac{G(s)}{as^2 + bs + c}, \quad (22)$$

alors on peut écrire

$$Y(s) = \Phi(s) + \Psi(s). \quad (23)$$

Par conséquent,

$$y = \phi(t) + \psi(t), \quad (24)$$

où $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ et $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$. Il faut noter que $y = \phi(t)$ est une solution au problème de valeur initiale

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0 \quad (25)$$

obtenue à partir des équations (20) et (21) en posant $g(t)$ égale à zéro. De la même manière, $y = \psi(t)$ est la solution à

$$ay'' + by' + cy = g(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (26)$$

dans laquelle les valeurs initiales y_0 et y'_0 sont toutes deux remplacées par zéro.

Quand on donne des valeurs spécifiques à a , à b et à c , on peut trouver $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}$ en utilisant le tableau 6.2.1, possiblement en conjonction avec une translation ou un développement en fractions partielles. Pour trouver $\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\Psi(s)\}$, on écrit $\Psi(s)$ sous la forme

$$\Psi(s) = H(s)G(s), \quad (27)$$

où $H(s) = (as^2 + bs + c)^{-1}$. La fonction H est la **fonction de transfert**³ et elle dépend uniquement des propriétés du système considéré. En d'autres mots, $H(s)$ est entièrement déterminée par les coefficients a , b et c . D'un autre côté, $G(s)$ dépend seulement de la contrainte externe $g(t)$ qui est appliquée au système. Selon le théorème de convolution, on peut écrire

$$\psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)G(s)\} = \int_0^t h(t-\tau)g(\tau)d\tau, \quad (28)$$

où $h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ et $g(t)$ est la fonction de contrainte donnée.

Pour mieux comprendre la signification de $h(t)$, on considère le cas où $G(s) = 1$. Par conséquent, $g(t) = \delta(t)$ et $\Psi(s) = H(s)$. Cela signifie que $y = h(t)$ est la solution au problème de valeur initiale

$$ay'' + by' + cy = \delta(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad (29)$$

qui est obtenue à partir de l'équation (26) en remplaçant $g(t)$ par $\delta(t)$. Ainsi, $h(t)$ est la réponse du système à une impulsion égale à 1 appliquée en $t = 0$, et on appelle $h(t)$ la **réponse d'impulsion** au système. L'équation (28) révèle alors que $\psi(t)$ est la convolution de la réponse d'impulsion et de la fonction de contrainte.

En se reportant à l'exemple 2, on peut souligner que, dans ce cas, la fonction de transfert est $H(s) = 1/(s^2 + 4)$ et la réponse d'impulsion est $h(t) = (\sin 2t)/2$. De plus, deux termes du second membre de l'équation (19) constituent la fonction $\phi(t)$, la solution à l'équation homogène correspondante qui satisfait aux conditions initiales données.

Problèmes

1. Démontrez la commutativité, la distributivité et l'associativité du produit de convolution.

a) $f * g = g * f$

b) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$

c) $f * (g * h) = (f * g) * h$

2. Trouvez un exemple (différent de celui qui est présenté dans cette section) montrant que $(f * 1)(t)$ n'est pas nécessairement égal à $f(t)$.

3. Montrez, au moyen de l'exemple $f(t) = \sin t$, que $f * f$ n'est pas nécessairement non négatif.

■ Dans les problèmes 4 à 7, trouvez la transformée de Laplace de la fonction.

4. $f(t) = \int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau d\tau$

5. $f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin \tau d\tau$

6. $f(t) = \int_0^t (t-\tau)e^\tau d\tau$

7. $f(t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\cos \tau d\tau$

3. La terminologie employée vient du fait que $H(s)$ est le ratio des transformées de la sortie et de l'entrée du problème (27).

- ■ Dans les problèmes 8 à 11, trouvez la transformée inverse de Laplace de la fonction en utilisant le théorème de convolution.

$$8. F(s) = \frac{1}{s^4(s^2+1)}$$

$$9. F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)}$$

$$10. F(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+4)}$$

$$11. F(s) = \frac{G(s)}{s^2+1}$$

12. a) Si $f(t) = t^m$ et $g(t) = t^n$, où m et n sont des entiers positifs, montrez que

$$f * g = t^{m+n+1} \int_0^1 u^m (1-u)^n du.$$

- b) Utilisez le théorème de convolution pour montrer que

$$\int_0^1 u^m (1-u)^n du = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}.$$

- c) Étendez le résultat de la partie b) au cas où m et n sont des nombres positifs, mais pas nécessairement des nombres entiers.

- Dans les problèmes 13 à 20, exprimez la solution au problème de valeur initiale en termes d'un produit de convolution.

$$13. y'' + \omega^2 y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

$$14. y'' + 2y' + 2y = \sin \alpha t; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$15. 4y'' + 4y' + 17y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

$$16. y'' + y' + \frac{5}{4}y = 1 - u_\pi(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$$

$$17. y'' + 4y' + 4y = g(t); \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -3$$

$$18. y'' + 3y' + 2y = \cos \alpha t; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

$$19. y^{(4)} - y = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$$

$$20. y^{(4)} + 5y'' + 4y = g(t); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = 0$$

21. Considérez l'équation

$$\phi(t) + \int_0^t k(t-\xi)\phi(\xi) d\xi = f(t),$$

où f et k sont des fonctions connues et ϕ est à déterminer. Puisque la fonction inconnue ϕ apparaît sous la forme d'un signe intégral, l'équation donnée est appelée **équation intégrale**. En particulier, elle appartient à une classe d'équations intégrales dites équations intégrales de Volterra. Prenez la transformée de Laplace de l'équation intégrale donnée, puis recherchez une expression pour représenter $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ en fonction des transformées $\mathcal{L}\{f(t)\}$ et $\mathcal{L}\{k(t)\}$ des fonctions f et k données. La transformée inverse de $\mathcal{L}\{\phi(t)\}$ est la solution à l'équation intégrale originale.

22. Considérez l'équation intégrale de Volterra (voir le problème 20):

$$\phi(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi) d\xi = \sin 2t. \quad (i)$$

- a) Résolvez l'équation intégrale (i) à l'aide de la transformée de Laplace.

- b) En dérivant l'équation (i) deux fois, montrez que $\phi(t)$ satisfait à l'équation différentielle

$$\phi''(t) + \phi(t) = -4 \sin 2t.$$

Montrez aussi que les conditions initiales sont

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 2.$$

- c) Résolvez le problème de valeur initiale de la partie b) et vérifiez que la solution est la même que celle de la partie a).

- Dans les problèmes 23 à 25,

- a) résolvez l'équation intégrale de Volterra en utilisant la transformée de Laplace;

- b) convertissez l'équation intégrale en un problème de valeur initiale, comme dans le problème 22 b);

- c) résolvez le problème de valeur initiale de la partie b) et vérifiez que la solution est la même que celle de la partie a).

$$23. \quad \phi(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)d\xi = 1$$

$$24. \quad \phi(t) - \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)d\xi = 1$$

$$25. \quad \phi(t) + 2 \int_0^t \cos(t-\xi)\phi(\xi)d\xi = e^{-t}$$

- Il existe aussi des équations, appelées **équations intégrro-différentielles**, qui contiennent à la fois des dérivées et des intégrales de la fonction inconnue. Dans les problèmes 26 à 28,

- a) résolvez l'équation intégrro-différentielle en utilisant la transformée de Laplace ;
 b) en dérivant l'équation intégrro-différentielle un nombre suffisant de fois, convertissez-la en un problème de valeur initiale ;
 c) résolvez le problème de valeur initiale de la partie b) et vérifiez que la solution est la même que celle de la partie a).

$$26. \quad \phi'(t) + \int_0^t (t-\xi)\phi(\xi)d\xi = t, \quad \phi(0) = 0 \quad 27. \quad \phi'(t) - \frac{1}{2} \int_0^t (t-\xi)^2 \phi(\xi)d\xi = -t, \quad \phi(0) = 1$$

$$28. \quad \phi'(t) + \phi(t) = \int_0^t \sin(t-\xi)\phi(\xi)d\xi, \quad \phi(0) = 1$$

29. **Le tautochrone** Un problème intéressant dans l'histoire des mathématiques est celui qui consiste à trouver le tautochrone – une courbe décroissante sur laquelle une particule glisse librement, sous l'unique effet de la gravité, et atteint le fond au même moment, peu importe son point de départ sur la courbe. Ce problème a vu le jour au cours de la construction d'une horloge à balancier dont la période était indépendante de l'amplitude du mouvement. Le tautochrone a été découvert par Christian Huygens (1629-1695) en 1673 à l'aide de méthodes géométriques, puis par Leibniz et Jacques Bernoulli à l'aide d'une approche analytique. La solution de Bernoulli (en 1690) a été l'une des premières situations où une équation différentielle a été explicitement résolue.

La configuration géométrique est illustrée à la figure 6.6.2. Le point de départ $P(a, b)$ est relié au point d'arrivée $(0, 0)$ par l'arc C . La longueur s de l'arc est mesurée à partir de l'origine, et $f(y)$ est le taux de variation de s en fonction de y :

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \left[1 + \left(\frac{dx}{dy} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (i)$$

Alors, il s'ensuit que, en vertu du principe de conservation de l'énergie, le temps $T(b)$ nécessaire à une particule pour glisser de P à l'origine est

$$T(b) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^b \frac{f(y)}{\sqrt{b-y}} dy. \quad (ii)$$

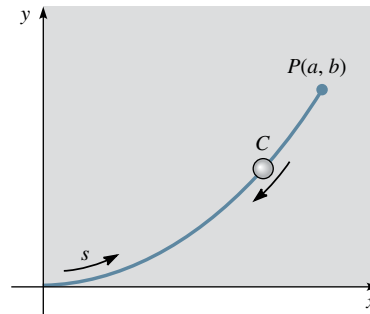


Figure 6.6.2 Le tautochrone.

- a) Supposez que $T(b) = T_0$, une constante, pour chaque b . À l'aide de la transformée de Laplace de l'équation (ii) et du théorème de convolution, montrez que

$$F(s) = \sqrt{\frac{2g}{\pi}} \frac{T_0}{\sqrt{s}}, \quad (\text{iii})$$

puis montrez que

$$f(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \frac{T_0}{\sqrt{y}}. \quad (\text{iv})$$

Suggestion : Reportez-vous au problème 31 de la section 6.1.

- b) En combinant les équations (i) et (iv), montrez que

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{\frac{2\alpha - y}{y}}, \quad (\text{v})$$

où

$$\alpha = gT_0^2/\pi^2.$$

- c) Utilisez la substitution $y = 2\alpha \sin^2(\theta/2)$ pour résoudre l'équation (v), et montrez que

$$x = \alpha(\theta + \sin \theta), \quad y = \alpha(1 - \cos \theta). \quad (\text{vi})$$

On peut considérer les équations (vi) comme les équations paramétriques d'un cycloïde. Par conséquent, le tautochrone est un arc de cycloïde.

Références

- Les ouvrages mentionnés ci-dessous contiennent de l'information additionnelle sur la transformée de Laplace et ses applications :
 CHURCHILL, R. V. *Operational Mathematics*, 3^e édition, New York, McGraw-Hill, 1971.
 DOETSCH, G. et W. NADER (tr.). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transform*, New York, Springer-Verlag, 1974.
 KAPLAN, W. *Operational Methods for Linear Systems*, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1962.
 KUHFITIG, P. K. F. *Introduction to the Laplace Transform*, New York, Plenum, 1978.
 MILES, J. W. *Integral Transforms in Applied Mathematics*, Londres, Cambridge University Press, 1971.
 RAINVILLE, E. D. *The Laplace Transform: An Introduction*, New York, Macmillan, 1963.
- Chacun des livres mentionnés ci-dessus contient une table de transformées. Pour obtenir des tables plus complètes, vous pouvez consulter les livres suivants :
 ERDELYI, A. (éditeur). *Tables of Integral Transforms*, vol. 1, New York, McGraw-Hill, 1954.
 ROBERTS, G. E. et H. KAUFMAN. *Table of Laplace Transforms*, Philadelphie, Saunders, 1966.
- Vous trouverez une étude sur les fonctions généralisées dans l'ouvrage suivant :
 LIGHTHILL, M. J. *Fourier Analysis and Generalized Functions*, Londres, Cambridge University Press, 1958.

Les solutions en série aux équations linéaires du deuxième ordre

Pour trouver la solution générale à une équation différentielle linéaire, il faut déterminer un ensemble fondamental de solutions à l'équation homogène. Jusqu'à maintenant, nous avons élaboré une démarche systématique permettant d'obtenir ces solutions fondamentales seulement lorsque l'équation est à coefficients constants. Pour traiter les équations à coefficients variables, nous devons étendre notre recherche de solutions au-delà des fonctions élémentaires usuelles. Le principal outil dont nous avons besoin est la représentation d'une fonction en série de puissances. L'idée de base est semblable à celle de la méthode des coefficients indéterminés : on suppose que les solutions à une équation différentielle admettent des développements en série de puissances ; ensuite, on tente de déterminer les coefficients de ces solutions afin que l'équation différentielle soit satisfaite.

7.1 Rappel sur les séries de puissances

Dans ce chapitre, nous verrons comment utiliser des séries de puissances pour construire des ensembles fondamentaux de solutions aux équations différentielles linéaires du deuxième ordre dont les coefficients sont des fonctions de la variable indépendante. D'abord, nous résumerons les résultats pertinents sur les séries de puissances requises. Les lecteurs qui sont familiers avec celles-ci peuvent passer à la section 7.2. Par ailleurs, ceux qui ont besoin de plus d'information que celles qui sont contenues dans la présente section peuvent consulter un manuel de calcul différentiel et intégral.

1. On dit qu'une série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge en un point x si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n (x - x_0)^n$$

existe en ce point. La série converge évidemment pour $x = x_0$. Elle peut converger pour tout x ou elle peut ne converger que pour certaines valeurs spécifiques de x .

2. On dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ converge absolument en un point x si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - x_0|^n$$

converge. On peut montrer que si la série converge absolument, alors la série converge. Cependant, le contraire n'est pas nécessairement vrai.

3. Un des tests les plus utiles pour établir la convergence absolue d'une série de puissances est le test du rapport. Si $a_n \neq 0$ et si, pour une valeur fixe de x ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L |x - x_0|,$$

alors la série de puissances converge absolument en x si $|x - x_0| < 1/L$, et elle diverge si $|x - x_0| > 1/L$. Si $|x - x_0| = 1/L$, le test n'est pas concluant.

Exemple 1

Pour quelles valeurs de x la série de puissances

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(x-2)^n$$

converge-t-elle ?

Afin d'établir l'intervalle de convergence, on utilise le test du rapport. On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+2} (n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1} n(x-2)^n} \right| = |x-2| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = |x-2|.$$

Selon l'énoncé 3, la série converge absolument pour $|x-2| < 1$, c'est-à-dire si $1 < x < 3$, et la série diverge pour $|x-2| > 1$. Les valeurs de x telles que $|x-2| = 1$ sont $x = 1$ et $x = 3$. La série diverge pour chacune de ces valeurs puisque le terme général de la série ne tend alors pas vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$.

4. Si la série de puissances $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge en $x = x_1$, elle converge absolument lorsque $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$; et si la série de puissances diverge en $x = x_1$, elle diverge lorsque $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.
5. Pour une série de puissances typique, comme celle de l'exemple 1, il existe un nombre positif ρ , appelé le **rayon de convergence**, tel que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge absolument lorsque $|x - x_0| < \rho$ et diverge lorsque $|x - x_0| > \rho$. L'intervalle, $|x - x_0| < \rho$ est appelé l'**intervalle de convergence**; il est illustré par la partie hachurée de la figure 7.1.1. La série peut soit converger, soit diverger lorsque $|x - x_0| = \rho$. De nombreuses séries de puissances importantes convergent pour toute valeur de x . Dans ce cas, on dit habituellement que ρ est infini, et l'intervalle de convergence correspond à la droite des nombres réels au complet. Il est aussi possible qu'une série de puissances converge uniquement en x_0 . Pour une telle série, on dit que $\rho = 0$, et la série n'a pas d'intervalle de convergence. Quand on tient compte de ces cas particuliers, on constate que toute série de puissances admet un rayon de convergence non négatif ρ et que si $\rho > 0$, alors il y a un intervalle de convergence (fini ou infini) centré en x_0 .

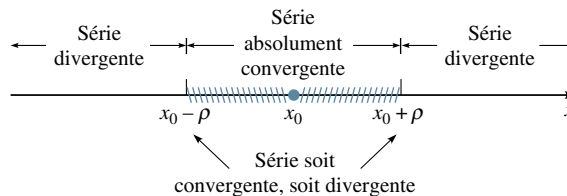


Figure 7.1.1 Intervalle de convergence d'une série de puissances.

Exemple 2

Déterminez le rayon de convergence de la série de puissances

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}.$$

On applique le test du rapport :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \frac{n2^n}{(x+1)^n} \right| = \frac{|x+1|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x+1|}{2}.$$

► Par conséquent, la série converge absolument lorsque $|x + 1| < 2$, c'est-à-dire lorsque $-3 < x < 1$, et elle diverge lorsque $|x + 1| > 2$. Le rayon de convergence de cette série de puissances est $\rho = 2$. Finalement, on vérifie les extrémités de l'intervalle de convergence. En $x = 1$, la série devient la série harmonique

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

qui diverge. En $x = -3$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

qui converge (mais ne converge pas absolument). On dit que la série converge conditionnellement en $x = -3$. Pour résumer, on peut dire que la série de puissances donnée converge lorsque $-3 \leq x < 1$ et qu'elle diverge dans les autres cas. Elle converge absolument lorsque $-3 < x < 1$, et son rayon de convergence est égal à 2.

On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ convergent respectivement vers $f(x)$ et $g(x)$

lorsque $|x - x_0| < \rho$ avec $\rho > 0$.

6. On peut additionner ou soustraire les deux séries terme à terme et on obtient

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n.$$

Les séries résultantes convergent lorsque $|x - x_0| < \rho$ avec $\rho > 0$.

7. On peut multiplier les deux séries et alors,

$$f(x)g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n,$$

où $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$. La série résultante converge au moins pour $|x - x_0| < \rho$. De plus, si $g(x_0) \neq 0$, on peut diviser les deux séries et alors

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n.$$

Dans la plupart des cas, il est plus facile d'obtenir les coefficients d_n en identifiant les coefficients correspondants dans la relation

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n d_k b_{n-k} \right) (x - x_0)^n. \end{aligned}$$

De plus, pour ce qui est de la division, le rayon de convergence de la série de puissances résultante peut être inférieur à ρ .

8. La fonction f est continue et infiniment dérivable lorsque $|x - x_0| < \rho$. De plus, on peut obtenir $f', f'', \dots$ en dérivant la série terme à terme. Autrement dit,

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} na_n (x - x_0)^{n-1},$$

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (x - x_0)^{n-2},$$

et ainsi de suite, et chacune des séries précédentes converge absolument pour $|x - x_0| < \rho$.

9. La valeur de a_n est donnée par

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Cette série est appelée la série de Taylor de la fonction f autour de $x = x_0$.

10. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ pour tout x au voisinage du point x_0 , alors $a_n = b_n$ pour $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. En particulier, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = 0$ pour tout x au voisinage de x_0 , alors $a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 0$.

Une fonction f dont le développement en série de Taylor autour de $x = x_0$ est

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

avec un rayon de convergence $\rho > 0$, est une **fonction analytique** en $x = x_0$. Toutes les fonctions familières du calcul différentiel et intégral sont analytiques, sauf peut-être en certains points facilement reconnaissables. Par exemple, $\sin x$ et e^x sont analytiques en tout point, $1/x$ est analytique sauf en $x = 0$ et $\tan x$ est analytique sauf en des points qui sont des multiples impairs de $\pi/2$. Selon les énoncés 6 et 7, si f et g sont analytiques en x_0 , alors $f \pm g$, $f \cdot g$ et f/g [pourvu que $g(x_0) \neq 0$] sont aussi analytiques en $x = x_0$. À bien des égards, le contexte naturel d'utilisation des séries de puissances est le plan complexe. Les méthodes et les résultats présentés dans ce chapitre peuvent presque toujours être étendus directement aux équations différentielles dans lesquelles les variables indépendantes et dépendantes ont des valeurs complexes.

Translation de l'indice de sommation L'indice de sommation dans une série infinie est un paramètre muet, tout comme la variable d'intégration dans une intégrale définie est une variable muette. Par conséquent, le choix de la lettre qui sert d'indice est arbitraire. Par exemple,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2^j x^j}{j!}.$$

De façon similaire aux changements de variables dans les intégrales définies, il peut être utile d'effectuer des transformations sur les indices de sommation en calculant les solutions en série d'équations différentielles. À l'aide de divers exemples, on illustre comment effectuer une translation de l'indice de sommation.

Exemple 3

Écrivez $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ sous la forme d'une série dont le premier terme correspond à $n = 0$ plutôt qu'à $n = 2$.

Soit $m = n - 2$. Alors, $n = m + 2$ et $n = 2$ correspond à $m = 0$. Ainsi,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2}. \quad (1)$$

En écrivant les premiers termes de chacune de ces séries, on peut vérifier que ces séries admettent exactement les mêmes termes. Enfin, dans la série du second membre de l'équation (1), on peut remplacer l'indice m par n . On obtient alors

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}. \quad (2)$$

Ainsi, on a translaté l'indice de 2 unités vers le haut et on a régularisé l'écriture de la série en commençant le calcul 2 unités plus bas.

Exemple 4

Écrivez la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n(x-x_0)^{n-2} \quad (3)$$

sous la forme d'une série dont le terme général est en $(x-x_0)^n$ plutôt qu'en $(x-x_0)^{n-2}$.

Une fois de plus, on translate l'indice de 2 unités de sorte que n soit remplacé par $n+2$, et on commence le calcul 2 unités plus bas. On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)a_{n+2}(x-x_0)^n. \quad (4)$$

On peut facilement vérifier que les termes dans les séries (3) et (4) sont identiques.

Exemple 5

Écrivez l'expression

$$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n-1} \quad (5)$$

sous la forme d'une série dont le terme général est en x^{r+n} .

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n+1}. \quad (6)$$

Premièrement, on translate l'indice de 1 unité vers le bas, et on commence le calcul 1 unité plus haut. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (r+n-1)a_{n-1} x^{r+n}. \quad (7)$$

Encore une fois, on peut facilement vérifier que les deux séries dans l'équation (7) sont identiques et qu'elles sont exactement les mêmes que celles de l'expression (5).

Exemple 6

Supposez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (8)$$

pour tout x , et déterminez-en les conséquences sur les coefficients a_n .

Selon l'énoncé 10, on peut égaliser les coefficients correspondants dans les deux séries. Pour ce faire, on doit d'abord réécrire l'équation (8) afin que les séries admettent la même puissance de x dans leurs termes généraux. Par exemple, dans les séries du premier membre de l'équation (8), on peut remplacer n par $n+1$ et commencer le calcul à 1 unité plus bas. Ainsi, l'équation (8) devient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (9)$$

En vertu de l'énoncé 10, on conclut que

$$(n+1)a_{n+1} = a_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

ou

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

Par conséquent, selon les valeurs de n dans l'équation (10), on a

$$a_1 = a_0, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!},$$

et ainsi de suite. En général,

$$a_n = \frac{a_0}{n!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (11)$$

- Ainsi, la relation (8) permet d'obtenir les coefficients de la série en fonction de a_0 . Finalement, en utilisant les coefficients donnés par l'équation (11), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x,$$

car $0! = 1$.

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 8, déterminez le rayon de convergence de la série de puissances.

1. $\sum_{n=0}^{\infty} (x-3)^n$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$

3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$

4. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n}$

7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 (x+2)^n}{3^n}$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$

- Dans les problèmes 9 à 16, déterminez la série de Taylor autour du point x_0 pour la fonction. Déterminez aussi le rayon de convergence de la série.

9. $\sin x, \quad x_0 = 0$

10. $e^x, \quad x_0 = 0$

11. $x, \quad x_0 = 1$

12. $x^2, \quad x_0 = -1$

13. $\ln x, \quad x_0 = 1$

14. $\frac{1}{1+x}, \quad x_0 = 0$

15. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 0$

16. $\frac{1}{1-x}, \quad x_0 = 2$

17. Étant donné $y = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$, calculez y' et y'' , puis écrivez les quatre premiers termes de chaque série, de même que le coefficient de x^n dans le terme général.

18. Étant donné $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, calculez y' et y'' , puis écrivez les quatre premiers termes de chaque série, de même que le coefficient de x^n dans le terme général. Montrez que si $y'' = y$, alors les coefficients a_0 et a_1 sont arbitraires. Ensuite, déterminez a_2 et a_3 en fonction de a_0 et de a_1 . Montrez que $a_{n+2} = a_n / (n+2)(n+1)$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

- Dans les problèmes 19 et 20, vérifiez que l'équation est valide.

19. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} (x-1)^n$

20. $\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = a_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k+1} + a_{k-1}) x^k$

- Dans les problèmes 21 à 27, réécrivez l'expression sous la forme d'une somme dont le terme général est en x^n .

21. $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

22. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2}$

23. $x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$

24. $(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

25. $\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-2} + x \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

26. $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

27. $x \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

28. Déterminez le coefficient a_n de sorte que l'équation

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

soit satisfaite. Essayez de déterminer la fonction représentée par la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

7.2 Les solutions en série près d'un point ordinaire – première partie

Dans le chapitre 3, nous avons décrit des méthodes permettant de résoudre les équations différentielles linéaires du deuxième ordre à coefficients constants. Nous allons maintenant considérer des méthodes permettant de résoudre des équations linéaires du deuxième ordre dont les coefficients sont des fonctions de la variable indépendante. Dans ce chapitre, la variable indépendante sera notée x . Il suffit de considérer l'équation homogène

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0, \quad (1)$$

puisque la démarche pour l'équation non homogène correspondante est similaire.

Beaucoup de problèmes en physique mathématique mènent à des équations de la forme (1) à coefficients polynomiaux. Par exemple, l'équation de Bessel¹

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$$

où ν est constant, et l'équation de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0,$$

où α est constant. Pour cette raison et pour simplifier les calculs algébriques, on considère d'abord le cas où les fonctions P , Q et R sont des polynômes. Cependant, comme nous le verrons, la méthode de résolution s'applique aussi lorsque P , Q et R sont des fonctions analytiques d'autres types.

Pour le moment, on suppose que P , Q et R sont des polynômes et qu'ils n'admettent aucun facteur commun $(x - c)$. S'il y a un facteur commun, il faut le simplifier. On suppose aussi qu'on veut résoudre l'équation (1) au voisinage d'un point x_0 . La solution à l'équation (1) dans un intervalle contenant x_0 est étroitement associée au comportement de P dans cet intervalle.

Un point x_0 tel que $P(x_0) \neq 0$ est un **point ordinaire**. Puisque P est continu, il s'ensuit qu'il existe un intervalle autour de x_0 dans lequel $P(x)$ n'est jamais nul. À l'intérieur de cet intervalle, on peut diviser l'équation (1) par $P(x)$ pour obtenir

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (2)$$

où $p(x) = Q(x)/P(x)$ et $q(x) = R(x)/P(x)$ sont des fonctions continues. Ainsi, selon le théorème 3.3.1 relatif à l'existence et à l'unicité, il existe dans cet intervalle une solution unique à l'équation (1) qui satisfait aussi aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ où y_0 et y'_0 sont des constantes données. Dans cette section et dans la suivante, nous étudierons la solution à l'équation (1) au voisinage d'un point ordinaire.

1. Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) a entrepris une carrière dans le commerce, mais il s'est vite tourné vers l'astronomie et les mathématiques. Il a été nommé directeur de l'observatoire de Königsberg en 1810 et il a occupé ce poste jusqu'à sa mort. Ses travaux sur les perturbations des planètes l'ont conduit en 1824 à effectuer la première analyse systématique des solutions à l'équation (1), appelées les « fonctions de Bessel ». Il est également connu pour avoir été le premier (1838) à déterminer avec précision la distance de la Terre à une étoile.

Au contraire, si $P(x_0) = 0$, alors x_0 est un **point singulier** de l'équation (1). Dans ce cas, au moins une des valeurs $Q(x_0)$ ou $R(x_0)$ est non nulle. Par conséquent, au moins un des coefficients p et q dans l'équation (2) est non borné lorsque $x \rightarrow x_0$, et le théorème 3.3.1 ne s'applique donc pas.

Dans les sections 7.4 à 7.7, nous verrons comment trouver des solutions à l'équation (1) au voisinage d'un point singulier. Nous allons maintenant étudier la façon de résoudre l'équation (1) au voisinage d'un point ordinaire x_0 . On recherche des solutions de la forme

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (3)$$

et on suppose que la série converge dans l'intervalle $|x - x_0| < \rho$ pour une certaine valeur $\rho > 0$. Même si, à première vue, cette recherche de solution sous la forme d'une série de puissances peut sembler peu attrayante, cette méthode est néanmoins fort utile. À l'intérieur de leurs intervalles de convergence, les séries de puissances se comportent de manière très semblable aux polynômes. De plus, elles sont faciles à manipuler du point de vue analytique et numérique. En effet, même si on peut obtenir une solution en termes de fonctions élémentaires, comme des fonctions exponentielles ou trigonométriques, on a besoin d'une série de puissances ou d'une expression équivalente si on veut les évaluer numériquement ou tracer leurs graphiques.

La méthode la plus pratique pour déterminer les coefficients a_n consiste à substituer la série (3) et ses dérivées y , y' et y'' dans l'équation (1). Les exemples suivants illustrent cette démarche. Les dérivées qui sont impliquées dans la démarche sont applicables quand on reste à l'intérieur de l'intervalle de convergence.

Exemple 1

Trouvez une solution en série à l'équation

$$y'' + y = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (4)$$

Comme on l'a vu précédemment, $\sin x$ et $\cos x$ sont deux solutions linéairement indépendantes à cette équation. Donc, les techniques de résolution en série ne sont pas nécessaires pour résoudre cette équation. Cependant, cet exemple montre comment utiliser des séries de puissances dans un cas relativement simple. Dans l'équation (4), $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ et $R(x) = 1$. Par conséquent, chaque point est un point ordinaire. On recherche une solution sous la forme d'une série de puissances autour de $x_0 = 0$, soit

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \quad (5)$$

et on suppose que la série converge dans l'intervalle $|x| < \rho$. En dérivant terme à terme, on obtient

$$y' = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}, \quad (6)$$

$$y'' = 2a_2 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}. \quad (7)$$

En substituant les séries (5) et (7) à y et y'' dans l'équation (4), on obtient

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0.$$

Afin de combiner les deux séries, on doit réécrire au moins l'une de celles-ci pour qu'elles admettent un terme général de même puissance. Ainsi, dans la première série, on translate l'indice de sommation en remplaçant n par $n+2$ et en commençant la sommation à 0 plutôt qu'à 2. On obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = 0$$

ou

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n]x^n = 0.$$

- Afin que l'équation soit satisfaite pour tout x , le coefficient de chaque puissance de x doit être nul. Ainsi, on conclut que

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

L'équation (8) est une **relation de récurrence**. On peut évaluer successivement les coefficients de la série en évaluant cette relation de récurrence d'abord pour $n = 0$, puis pour $n = 1$, et ainsi de suite. Dans cet exemple, l'équation (8) relie chaque coefficient au deuxième coefficient précédent. Ainsi, les coefficients dont l'indice est pair ($a_0, a_2, a_4, \dots$) et ceux dont l'indice est impair ($a_1, a_3, a_5, \dots$) sont déterminés séparément. Pour les coefficients d'indices pairs, on a

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1} = -\frac{a_0}{2!}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = +\frac{a_0}{4!}, \quad a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6!}, \dots$$

Ces résultats indiquent qu'en général, si $n = 2k$, alors

$$a_n = a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (9)$$

On peut démontrer la validité de l'équation (9) par induction. D'abord, on observe qu'elle est vérifiée pour $k = 1$. Ensuite, on suppose qu'elle l'est pour une valeur arbitraire de k et on considère le cas $n = 2(k+1)$. On a

$$a_{2k+2} = -\frac{a_{2k}}{(2k+2)(2k+1)} = -\frac{(-1)^k}{(2k+2)(2k+1)(2k)!} a_0 = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+2)!} a_0.$$

Ainsi, l'équation (9) est également valide pour $k+1$ et, par conséquent, pour tout entier naturel k . De même, pour les coefficients d'indices impairs

$$a_3 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = -\frac{a_1}{3!}, \quad a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = +\frac{a_1}{5!}, \quad a_7 = -\frac{a_5}{7 \cdot 6} = -\frac{a_1}{7!}, \dots$$

et, en général, si $n = 2k+1$, alors²

$$a_n = a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (10)$$

En substituant ces coefficients dans l'équation (5), on a

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \frac{a_0}{4!} x^4 + \frac{a_1}{5!} x^5 + \dots + \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!} x^{2n} + \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \\ &= a_0 \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots \right] + a_1 \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + \dots \right] \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Maintenant qu'on a formellement obtenu deux solutions en série pour l'équation (4), on peut établir l'intervalle de convergence de chacune. En utilisant le test du rapport, on voit que chacune des séries dans l'équation (11) converge pour tout x , et cela justifie rétroactivement toutes les étapes utilisées pour obtenir les solutions. En effet, on reconnaît que la première série dans l'équation (11) est la série de Taylor pour $\cos x$ autour de $x = 0$, et que la seconde est la série de Taylor pour $\sin x$ autour de $x = 0$. Ainsi, comme on l'avait prévu, on obtient la solution $y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$.

Il faut noter qu'aucune condition n'est imposée sur les coefficients a_0 et a_1 . Par conséquent, ils sont arbitraires. En se référant aux équations (5) et (6), on voit que y et y' évalués en $x = 0$ sont respectivement a_0 et a_1 . Puisqu'on peut choisir arbitrairement les conditions initiales $y(0)$ et $y'(0)$, il s'ensuit que a_0 et a_1 sont arbitraires si aucune condition initiale n'est spécifiée.

Les figures 7.2.1 et 7.2.2 à la page suivante montrent comment les sommes partielles des séries de l'équation (11) permettent d'approximer successivement $\cos x$ et $\sin x$. Plus le nombre de termes croît, plus l'intervalle dans lequel l'approximation est satisfaisante est grand. De plus, pour tout x dans cet intervalle, l'approximation devient de plus en plus précise. Cependant, on doit se rappeler qu'une série de puissances tronquée ne fournit qu'une approximation locale de la solution au voisinage du point initial $x = 0$. Cette série ne peut pas représenter adéquatement la solution lorsque $|x|$ est élevée.

2. On peut prouver le résultat de l'équation (10) et d'autres formules semblables présentées dans ce chapitre par induction, tout comme on l'a fait pour l'équation (9). On supposera que les résultats sont plausibles, et on omettra les preuves par induction par la suite.

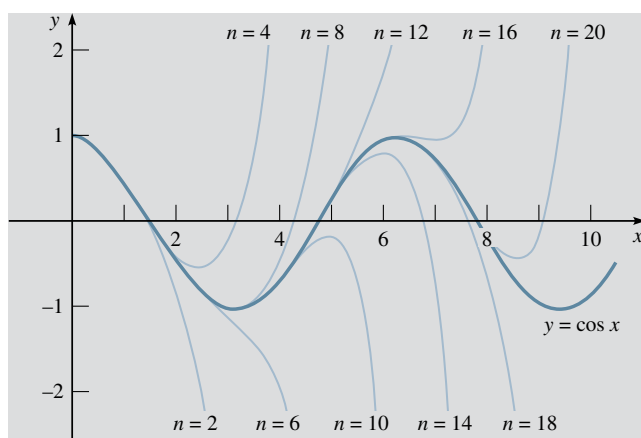


Figure 7.2.1 Approximations polynomiales de $\cos x$. La valeur de n est le degré du polynôme qui approxime la fonction.

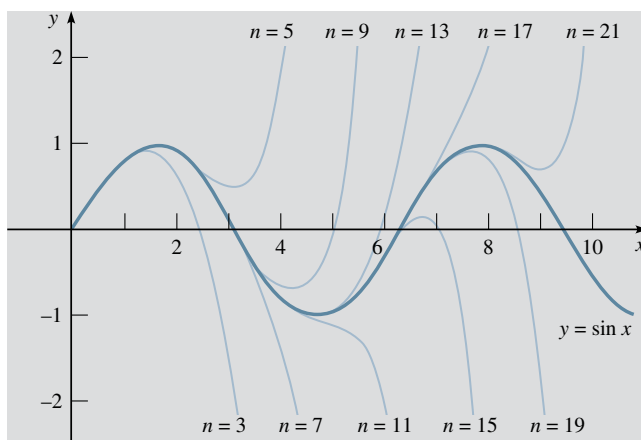


Figure 7.2.2 Approximations polynomiales de $\sin x$. La valeur de n est le degré du polynôme qui approxime la fonction.

Dans l'exemple 1, on savait au départ que $\sin x$ et $\cos x$ forment un ensemble fondamental de solutions à l'équation (4). Cependant, si on l'avait ignoré et qu'on avait simplement résolu en série l'équation (4), on aurait encore obtenu la solution (11). Comme l'équation différentielle (4) apparaît dans de nombreuses applications, on désignera les deux solutions à l'équation (11) sous la forme

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \quad (12)$$

On peut se demander quelles propriétés ces fonctions admettent. Par exemple, peut-on être certains que $C(x)$ et $S(x)$ forment un ensemble fondamental de solutions ? Il est évident d'après le développement respectif des séries que $C(0) = 1$ et $S(0) = 0$. En dérivant les séries de $C(x)$ et de $S(x)$ terme à terme, on obtient

$$S'(x) = C(x), \quad C'(x) = -S(x). \quad (13)$$

Par conséquent, lorsque $x = 0$, on a $S'(0) = 1$ et $C'(0) = 0$. Ainsi, le wronskien de C et de S en $x = 0$ est

$$W(C, S)(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad (14)$$

donc, ces fonctions forment bien un ensemble fondamental de solutions. En substituant $-x$ à x dans chacune des équations (12), on obtient $C(-x) = C(x)$ et $S(-x) = -S(x)$.

De plus, en traitant des séries infinies³, on peut montrer que les fonctions $C(x)$ et $S(x)$ ont respectivement toutes les propriétés analytiques et algébriques habituelles des fonctions cosinus et sinus.

Même si on a introduit les fonctions sinus et cosinus définies dans le contexte des triangles rectangles, il est intéressant de voir qu'on peut définir ces fonctions comme des solutions à une équation différentielle linéaire du deuxième ordre. Pour être plus précis, on peut définir la fonction $\sin x$ comme la solution unique au problème de valeur initiale $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. De même, on peut définir $\cos x$ comme la solution unique au problème de valeur initiale $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. En physique mathématique, beaucoup d'autres fonctions importantes sont définies comme des solutions à certains problèmes de valeur initiale. La plupart de ces fonctions ne peuvent être définies que par leur développement en série.

Exemple 2

Trouvez une solution en série de puissances de x à l'équation d'Airy⁴

$$y'' - xy = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (15)$$

Dans cette équation, $P(x) = 1$, $Q(x) = 0$ et $R(x) = -x$. Par conséquent, chaque point est un point ordinaire. On suppose que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (16)$$

et que la série converge dans l'intervalle $|x| < \rho$. La série correspondant à y'' est donnée par l'équation (7). Comme on l'a vu dans l'exemple précédent, on peut la réécrire sous la forme

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n. \quad (17)$$

En substituant les séries (16) et (17) à y et à y'' dans l'équation (15), on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}. \quad (18)$$

Ensuite, on translate l'indice de sommation dans la série du second membre de cette équation en remplaçant n par $n-1$ et en amorçant la sommation à 1 plutôt qu'à zéro. Ainsi, on a

$$2 \cdot 1a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n.$$

Une fois de plus, pour que cette équation soit satisfaite quel que soit x , les coefficients admettant les mêmes puissances de x doivent être égaux. Par conséquent, $a_2 = 0$ et on obtient la relation de récurrence

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_{n-1} \quad \text{pour} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Puisque a_{n+2} est donné en fonction de a_{n-1} , les a sont déterminés par bonds de trois unités. Ainsi, a_0 détermine a_3 qui, à son tour, détermine $a_6, \dots$; a_1 détermine a_4 qui, à son tour, détermine $a_7, \dots$; et a_2 détermine a_5 qui, à son tour, détermine $a_8, \dots$. Puisque $a_2 = 0$, on obtient $a_5 = a_8 = a_{11} = \dots = 0$.

3. Une telle analyse est fournie à la section 24 de l'ouvrage suivant: KNOPP, K. *Theory and Applications of Infinite Series*, New York, Hafner, 1951.

4. Sir George Airy (1801-1892), astronome et mathématicien anglais, a été directeur de l'observatoire de Greenwich de 1835 à 1881. Une des raisons pour lesquelles on s'intéresse à l'équation d'Airy est que lorsque x est négatif, les solutions sont oscillatoires (comme les fonctions trigonométriques) et, lorsque x est positif, elles sont monotones (comme les fonctions hyperboliques). Pouvez-vous expliquer comment prévoir un tel comportement?

► Pour la suite $a_0, a_3, a_6, a_9, \dots$, on pose $n = 1, 4, 7, 10, \dots$ dans la relation de récurrence

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \quad a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}, \quad a_9 = \frac{a_6}{8 \cdot 9} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}, \dots$$

Les résultats précédents suggèrent la formule générale

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)(3n)}, \quad n \geq 4.$$

Dans la suite $a_1, a_4, a_7, a_{10}, \dots$, on pose $n = 2, 5, 8, 11, \dots$ dans la relation de récurrence

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}, \quad a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}, \quad a_{10} = \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}, \dots$$

De la même manière qu'auparavant, on trouve

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots (3n)(3n+1)}, \quad n \geq 4.$$

La solution générale à l'équation d'Airy est

$$y = a_0 \left[1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^{3n}}{2 \cdot 3 \cdots (3n-1)(3n)} + \cdots \right] + a_1 \left[x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots + \frac{x^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdots (3n)(3n+1)} + \cdots \right]. \quad (20)$$

Ayant obtenu ces deux solutions en série, on peut maintenant étudier leur convergence. En raison de la croissance rapide des dénominateurs des termes de la série (20), on peut s'attendre à ce que ces séries admettent un grand rayon de convergence. En fait, on peut utiliser le test du rapport pour montrer que ces deux séries convergent quel que soit x (voir le problème 20).

En supposant que ces séries convergent pour tout x , on note respectivement y_1 et y_2 les fonctions définies par les expressions entre crochets dans l'équation (20). On choisit d'abord $a_0 = 1, a_1 = 0$, puis $a_0 = 0, a_1 = 1$. Il s'ensuit que y_1 et y_2 sont deux solutions distinctes à l'équation (15). Il faut noter que y_1 satisfait aux conditions initiales $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ et que y_2 satisfait aux conditions initiales $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$. Ainsi, $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ et, par conséquent, y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes. Ainsi, la solution générale à l'équation d'Airy est

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Dans les figures 7.2.3 et 7.2.4, on présente respectivement les graphiques des solutions y_1 et y_2 à l'équation d'Airy, de même que les graphiques de différentes sommes partielles des deux séries

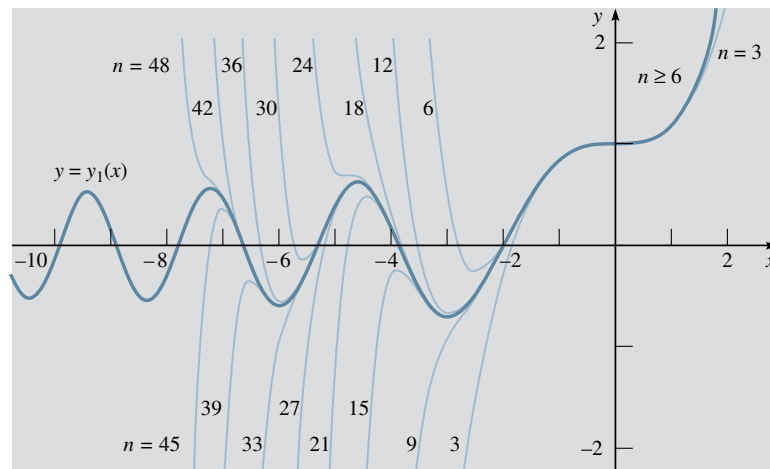


Figure 7.2.3 Approximations polynomiales pour la solution $y_1(x)$ à l'équation d'Airy. La valeur de n est le degré du polynôme qui permet d'approximer la solution.

► Maintenant, pour identifier les coefficients de mêmes puissances de $(x-1)$, on doit exprimer x , le coefficient de y dans l'équation (15), en termes de $x-1$. Autrement dit, on pose $x = 1 + (x-1)$. Il faut noter qu'il s'agit précisément de la série de Taylor pour x autour du point $x = 1$. Alors, l'équation (21) devient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n &= [1 + (x-1)] \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^{n+1}.\end{aligned}$$

En translatant l'indice de sommation dans la deuxième série du second membre, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n$$

$$\text{ou } 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-1)^n.$$

Si on identifie les coefficients des mêmes puissances de $x-1$, on obtient

$$\begin{aligned}2a_2 &= a_0, \\ (3 \cdot 2)a_3 &= a_1 + a_0, \\ (4 \cdot 3)a_4 &= a_2 + a_1, \\ (5 \cdot 4)a_5 &= a_3 + a_2, \\ &\vdots\end{aligned}$$

La relation de récurrence est

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + a_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1. \quad (22)$$

En exprimant les premiers coefficients a_n en fonction de a_0 et de a_1 , on trouve

$$a_2 = \frac{a_0}{2}, \quad a_3 = \frac{a_1}{6} + \frac{a_0}{6}, \quad a_4 = \frac{a_2}{12} + \frac{a_1}{12} = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12}, \quad a_5 = \frac{a_3}{20} + \frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{30} + \frac{a_1}{120}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}y &= a_0 \left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \dots \right] \\ &\quad + a_1 \left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \dots \right]. \quad (23)\end{aligned}$$

En général, quand la relation de récurrence admet plus de deux termes, comme dans l'équation (22), il est très complexe, voire impossible, d'obtenir une formule explicite pour a_n en fonction de a_0 et de a_1 . Dans cet exemple, une formule de ce type n'est pas évidente. Sans une telle formule, on ne peut pas établir l'intervalle de convergence des séries dans l'équation (23) avec des méthodes directes comme le test du rapport. Cependant, même sans connaître la formule permettant de déterminer a_n , on verra dans la section 7.3 qu'il est possible d'établir que les séries dans l'équation (23) convergent pour tout x , et qu'on peut aussi définir des fonctions y_3 et y_4 qui sont des solutions linéairement indépendantes à l'équation d'Airy (15). Ainsi,

$$y = a_0 y_3(x) + a_1 y_4(x)$$

est la solution générale à l'équation d'Airy pour $-\infty < x < \infty$.

Il est important de souligner, comme on l'a vu dans l'exemple 3, que si on recherche une solution à l'équation (1) de la forme $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, alors les coefficients $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ dans l'équation (1) doivent aussi être exprimés en puissances de $x-x_0$. On peut procéder autrement en effectuant le changement de variable $x-x_0 = t$. On obtient une nouvelle équation différentielle où y est alors en fonction de t , puis on recherche des solutions à cette nouvelle équation sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Quand on a terminé, on remplace t par $x-x_0$ (voir le problème 19).

Dans les exemples 2 et 3, on a trouvé deux ensembles de solutions à l'équation d'Airy. Les fonctions y_1 et y_2 définies par les séries dans l'équation (20) sont des solutions linéairement indépendantes à l'équation (15) pour tout x , et cela reste vrai pour les fonctions y_3 et y_4 définies par les séries dans l'équation (23). Selon la théorie générale des équations linéaires du deuxième ordre, on peut exprimer chacune des deux premières fonctions comme une combinaison linéaire des deux dernières fonctions et inversement – un résultat qui n'est certes pas évident quand on traite seulement des séries.

Enfin, on doit souligner que le fait de ne pas pouvoir déterminer le coefficient général a_n en fonction de a_0 et de a_1 n'est pas indispensable (*comme dans l'exemple 3*). Il est toutefois essentiel de pouvoir déterminer autant de coefficients qu'on veut. Ainsi, on peut trouver autant de termes qu'il faudrait dans les deux solutions en série, même si on ne peut pas en déterminer le terme général. Bien qu'il ne soit pas difficile de calculer divers coefficients dans une solution en série de puissances, cette tâche peut être fastidieuse. Un logiciel de calcul symbolique peut s'avérer fort utile dans ce cas. Certains peuvent trouver un nombre spécifique de termes dans une solution en série de puissances. On peut aussi tracer des graphiques comme ceux qui sont illustrés dans les figures de cette section avec un logiciel approprié.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 14,

- résolvez l'équation différentielle au moyen d'une série de puissances avoisinant le point x_0 et trouvez la relation de récurrence;
 - trouvez les quatre premiers termes de chacune des deux solutions y_1 et y_2 (à moins que la série se termine avant);
 - en évaluant le wronskien $W(y_1, y_2)(x_0)$, montrez que y_1 et y_2 forment un ensemble fondamental de solutions;
 - si c'est possible, trouvez le terme général pour chaque solution.
- $y'' - y = 0, \quad x_0 = 0$
 - $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
 - $y'' - xy' - y = 0, \quad x_0 = 1$
 - $y'' + k^2 x^2 y = 0, \quad x_0 = 0, \quad k \text{ étant constant}$
 - $(1 - x)y'' + y = 0, \quad x_0 = 0$
 - $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad x_0 = 0$
 - $y'' + xy' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
 - $xy'' + y' + xy = 0, \quad x_0 = 1$
 - $(1 + x^2)y'' - 4xy' + 6y = 0, \quad x_0 = 0$
 - $(4 - x^2)y'' + 2y = 0, \quad x_0 = 0$
 - $(3 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
 - $(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad x_0 = 0$
 - $2y'' + xy' + 3y = 0, \quad x_0 = 0$
 - $2y'' + (x + 1)y' + 3y = 0, \quad x_0 = 2$

■ Dans les problèmes 15 à 18, procédez comme suit.

- Trouvez les cinq premiers termes non nuls de la solution au problème de valeur initiale.
- Tracez les approximations à quatre termes et à cinq termes de la solution sur un même graphique.
- À partir du graphique de la partie b), estimez l'intervalle dans lequel l'approximation à quatre termes est raisonnablement précise.

- Ⓢ 15. $y'' - xy' - y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \quad (\text{voir le problème 2})$
- Ⓢ 16. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 3 \quad (\text{voir le problème 6})$
- Ⓢ 17. $y'' + xy' + 2y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -1 \quad (\text{voir le problème 7})$
- Ⓢ 18. $(1 - x)y'' + xy' - y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 2 \quad (\text{voir le problème 12})$

19. a) En effectuant le changement de variable $x - 1 = t$ et en posant y comme une série de puissances en t , trouvez deux solutions en série linéairement indépendantes à

$$y'' + (x - 1)^2 y' + (x^2 - 1)y = 0$$

en puissances de $x - 1$.

- b) Montrez que vous obtenez directement le même résultat en supposant que y est une série de Taylor en $x - 1$ et aussi en exprimant le coefficient $x^2 - 1$ en puissances de $x - 1$.

- ▶ 20. Montrez, à l'aide du test du rapport, que les deux solutions en série à l'équation d'Airy autour de $x = 0$ convergent pour tout x (voir l'équation (20) de la présente section).

21. **L'équation d'Hermite** L'équation

$$y'' - 2xy' + \lambda y = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

où λ est constant, est l'équation d'Hermite⁵. Cette équation est importante en physique mathématique.

- a) Trouvez les quatre premiers termes de chacune des solutions linéairement indépendantes autour de $x = 0$ et montrez qu'elles forment un ensemble fondamental de solutions.
- b) Vous devez noter que si λ est un entier naturel pair, alors l'une ou l'autre des solutions en série est finie et est un polynôme. Trouvez les solutions polynomiales pour $\lambda = 0, 2, 4, 6, 8$ et 10 . Il convient aussi de remarquer que chaque polynôme est déterminé à une constante multiplicative près.
- c) Le polynôme d'Hermite $H_n(x)$ est défini comme solution polynomiale à l'équation d'Hermite avec $\lambda = 2n$ dans laquelle le coefficient de x^n est 2^n . Trouvez $H_0(x), \dots, H_5(x)$.

22. Considérez le problème de valeur initiale $y' = \sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 0$.

- a) Montrez que $y = \sin x$ est une solution à ce problème de valeur initiale.
- b) Recherchez une solution au problème de valeur initiale sous la forme d'une série de puissances autour de $x = 0$. Déterminez les coefficients jusqu'au terme en x^3 dans cette série.

- Dans les problèmes 23 à 28, tracez différentes sommes partielles d'une solution en série au problème de valeur initiale autour de $x = 0$ pour obtenir des graphiques semblables à ceux des figures 7.2.1 à 7.2.4.

- Ⓢ 23. $y'' - xy' - y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (voir le problème 2)
- Ⓢ 24. $(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (voir le problème 6)
- Ⓢ 25. $y'' + xy' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (voir le problème 7)
- Ⓢ 26. $(4 - x^2)y'' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ (voir le problème 10)
- Ⓢ 27. $y'' + x^2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (voir le problème 4)
- Ⓢ 28. $(1 - x)y'' + xy' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

7.3 Les solutions en série près d'un point ordinaire – deuxième partie

Dans la section précédente, nous avons vu comment trouver dans le voisinage du point ordinaire x_0 les solutions à

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \quad (1)$$

où P , Q et R sont des polynômes. On suppose que l'équation (1) admet la solution $y = \phi(x)$ et que ϕ peut être développée en une série de Taylor

$$y = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (2)$$

qui converge pour $|x - x_0| < \rho$, où $\rho > 0$. On a vu qu'il est possible de déterminer a_n en substituant directement la série (2) à y dans l'équation (1).

Voyons maintenant comment on peut justifier l'énoncé selon lequel si x_0 est un point ordinaire de l'équation (1), alors il existe des solutions de la forme (2). Nous étudierons aussi la

5. Charles Hermite (1822-1901) était un éminent analyste et algébriste français. Il a introduit les fonctions d'Hermite en 1864 et en 1873. De plus, il a montré que e est transcendant (c'est-à-dire que e n'est la racine d'aucune équation polynomiale à coefficients rationnels). Son nom est aussi associé aux matrices hermitiennes (voir la section 5.3), dont il a découvert certaines propriétés.

question portant sur le rayon de convergence d'une telle série. Ainsi, nous pourrions généraliser la définition d'un point ordinaire.

On suppose qu'il existe une solution à l'équation (1) de la forme (2). En dérivant l'équation (2) m fois et en posant x égal à x_0 , il s'ensuit que

$$m!a_m = \phi^{(m)}(x_0).$$

Pour obtenir a_n dans la série (2), on doit montrer qu'on peut déterminer $\phi^{(n)}(x_0)$ pour $n = 0, 1, 2, \dots$ à partir de l'équation différentielle (1).

On suppose que $y = \phi(x)$ est une solution à l'équation (1) qui satisfait aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. Alors, $a_0 = y_0$ et $a_1 = y'_0$. Si on cherche seulement à trouver une solution à l'équation (1) sans préciser de conditions initiales, alors a_0 et a_1 restent arbitraires. Pour déterminer $\phi^{(n)}(x_0)$ et a_n pour $n = 2, 3, \dots$, on se réfère à l'équation (1). Puisque ϕ est une solution à l'équation (1), on a

$$P(x)\phi''(x) + Q(x)\phi'(x) + R(x)\phi(x) = 0.$$

Si on se restreint à l'intervalle autour de x_0 dans lequel P est non nul, on peut écrire cette équation sous la forme

$$\phi''(x) = -p(x)\phi'(x) - q(x)\phi(x), \quad (3)$$

où $p(x) = Q(x)/P(x)$ et $q(x) = R(x)/P(x)$. En posant x égal à x_0 dans l'équation (3), on obtient

$$\phi''(x_0) = -p(x_0)\phi'(x_0) - q(x_0)\phi(x_0).$$

Par conséquent, a_2 est donné par

$$2!a_2 = \phi''(x_0) = -p(x_0)a_1 - q(x_0)a_0. \quad (4)$$

Pour déterminer a_3 , on dérive l'équation (3), puis on pose x égal à x_0 . On obtient ainsi

$$\begin{aligned} 3!a_3 = \phi'''(x_0) &= -[p\phi'' + (p' + q)\phi' + q'\phi] \Big|_{x=x_0} \\ &= -2!p(x_0)a_2 - [p'(x_0) + q(x_0)]a_1 - q'(x_0)a_0. \end{aligned} \quad (5)$$

En substituant l'expression de a_2 à partir de l'équation (4), on obtient a_3 en fonction de a_1 et de a_0 . Puisque P , Q et R sont des polynômes et que $P(x_0) \neq 0$, toutes les dérivées de p et de q existent en x_0 . Ainsi, on peut continuer à dériver l'équation (3) indéfiniment. Après chaque dérivée, on détermine les coefficients successifs $a_4, a_5, \dots$ en posant x égal à x_0 .

Il faut noter que pour déterminer a_n , on a utilisé la propriété importante qui permet de calculer les dérivées des fonctions p et q aussi loin qu'on le désire. Il peut sembler raisonnable de modérer notre hypothèse selon laquelle les fonctions p et q sont des ratios de polynômes et qu'on exige seulement qu'elles soient infiniment différentiables au voisinage de x_0 . Malheureusement, cette condition est trop faible pour nous garantir qu'on peut prouver la convergence du développement en série résultant pour $y = \phi(x)$. En fait, on doit supposer que les fonctions p et q sont analytiques en x_0 . Autrement dit, ces fonctions admettent des développements en série de Taylor qui convergent vers elles dans un intervalle autour du point x_0 :

$$p(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + \dots + p_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n, \quad (6)$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \dots + q_n(x - x_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n. \quad (7)$$

En gardant cette idée en tête, on peut généraliser les définitions d'un point ordinaire et d'un point singulier de l'équation (1) comme suit : si les fonctions $p = Q/P$ et $q = R/P$ sont analytiques en x_0 , alors le point x_0 est un **point ordinaire** de l'équation différentielle (1); sinon, il s'agit d'un **point singulier**.

Maintenant, on s'intéresse à l'intervalle de convergence de la solution en série. On peut calculer la solution en série pour chaque problème, puis appliquer un des tests de convergence d'une série pour déterminer son rayon de convergence. Malheureusement, ces tests exigent qu'on exprime le coefficient général a_n en fonction de n et cette tâche est souvent assez difficile, quand elle n'est pas carrément impossible ; souvenez-vous de l'exemple 3 de la section 7.2. Cependant, le théorème suivant permet de résoudre cette situation pour une importante catégorie de problèmes.

Théorème 7.3.1

Si x_0 est un point ordinaire de l'équation différentielle (1),

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0.$$

Autrement dit, si $p = Q/P$ et $q = R/P$ sont analytiques en x_0 , alors la solution générale à l'équation (1) est

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x), \quad (8)$$

où a_0 et a_1 sont arbitraires et y_1 et y_2 sont des solutions en série linéairement indépendantes analytiques en x_0 . De plus, le rayon de convergence pour chacune des solutions en série y_1 et y_2 est au moins aussi grand que le minimum des rayons de convergence des séries pour p et q .

Pour voir que y_1 et y_2 forment un ensemble fondamental de solutions, il faut noter que les solutions se présentent sous la forme $y_1(x) = 1 + b_2(x - x_0)^2 + \dots$ et $y_2(x) = (x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots$. Ainsi, y_1 est la solution qui satisfait aux conditions initiales $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$, et y_2 est la solution qui satisfait aux conditions initiales $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$. De plus, bien que les calculs des coefficients par dérivation successive de l'équation différentielle soient efficaces en théorie, cette démarche est généralement peu pratique. On devrait plutôt substituer la série (2) à y dans l'équation différentielle (1) et déterminer les coefficients de manière à satisfaire à l'équation différentielle, comme dans les exemples de la section précédente.

Ce théorème ne sera pas prouvé ici. Dans une forme légèrement différente, il est le fruit des travaux d'Immanuel Lazarus Fuchs⁶. L'important pour notre étude est qu'il existe une solution en série de la forme (2) et que le rayon de convergence de la solution en série ne puisse pas être inférieur au plus petit des rayons de convergence des séries pour p et q . Maintenant, il reste à les déterminer.

On peut y arriver à l'aide de deux méthodes. La première consiste simplement à calculer la série de puissances pour p et q , puis à déterminer les rayons de convergence en utilisant un des tests de convergence pour les séries infinies. Cependant, une deuxième méthode plus facile peut servir lorsque P , Q et R sont des polynômes. On a vu dans la théorie des fonctions d'une variable complexe que le rapport de deux polynômes, par exemple Q/P , possède un développement en série de puissances autour du point $x = x_0$ si $P(x_0) \neq 0$. De plus, si on suppose que tout facteur commun à Q et à P a été simplifié, alors le rayon de convergence de la série de puissances pour Q/P autour du point x_0 est précisément la distance minimale entre x_0 et une racine de P . En déterminant cette distance, on doit se rappeler que $P(x) = 0$ peut admettre des racines complexes, que l'on doit aussi considérer.

6. Immanuel Lazarus Fuchs (1833-1902) a été étudiant puis professeur à l'Université de Berlin. Il a prouvé le résultat du théorème 7.3.1 en 1866. Son travail le plus important portait sur les points singuliers des équations différentielles linéaires. Il a reconnu la signification des points singuliers réguliers (voir la section 7.4) et les équations dont les seules singularités, y compris le point à l'infini, sont des points singuliers appelés des équations de Fuchs.

Exemple 1

Vous devez déterminer le rayon de convergence de la série de Taylor pour $(1+x^2)^{-1}$ autour de $x=0$.

On peut y arriver en trouvant la série de Taylor dont il est question, soit

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

On vérifie ensuite à l'aide du test du rapport $\rho = 1$. Une autre approche consiste à noter que les racines de $1+x^2$ sont $x = \pm i$. Puisque la distance de 0 à i ou de 0 à $-i$ dans le plan complexe est de 1, le rayon de convergence de la série de puissances autour de $x=0$ est de 1.

Exemple 2

Quel est le rayon de convergence de la série de Taylor pour $(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ autour de $x=0$? autour de $x=1$?

D'abord, il faut noter que

$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

admet comme solutions $x = 1 \pm i$. La distance de $x=0$ à $x = 1+i$ ou à $x = 1-i$ dans le plan complexe est de $\sqrt{2}$. Ainsi, le rayon de convergence du développement en série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ autour de $x=0$ est de $\sqrt{2}$.

La distance de $x=1$ à $x = 1+i$ ou à $x = 1-i$ est de 1. Ainsi, le rayon de convergence du développement en série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-1)^n$ autour de $x=1$ est de 1.

Selon le théorème 7.3.1, les solutions en série à l'équation d'Airy dans les exemples 2 et 3 de la section précédente convergent respectivement pour toutes les valeurs de x et de $x-1$ puisque, dans chaque problème, $P(x) = 1$ et n'est jamais nul.

Une solution en série peut converger à l'intérieur d'un intervalle plus grand que celui qui est indiqué dans le théorème 7.3.1. Ce théorème ne donne donc qu'une borne inférieure sur le rayon de convergence de la solution en série. Ce cas est illustré par la solution polynomiale de Legendre à l'équation de Legendre donnée dans l'exemple suivant.

Exemple 3

Déterminez une borne inférieure du rayon de convergence des solutions en série autour de $x=0$ pour l'équation de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0,$$

où α est constant.

Il faut noter que $P(x) = 1-x^2$, $Q(x) = -2x$ et $R(x) = \alpha(\alpha+1)$ sont des polynômes et que les racines de P , soit $x = \pm 1$, sont à une distance de 1 de $x=0$. Ainsi, une solution en série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$ au moins et possiblement pour d'autres valeurs de x . En effet, on peut montrer que si α est un entier positif, une des solutions en série ne comporte qu'un nombre fini de termes. Donc, cette solution converge non seulement pour $|x| < 1$ mais pour tout x . Par exemple, si $\alpha = 1$, la solution polynomiale est $y = x$. Les problèmes 22 à 29 à la fin de cette section permettent d'étudier l'équation de Legendre de manière plus détaillée.

Exemple 4

Déterminez une borne inférieure pour le rayon de convergence des solutions en série à l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0 \quad (9)$$

autour du point $x=0$; autour du point $x = -\frac{1}{2}$.

Encore une fois, P , Q et R sont des polynômes et les racines de P sont $x = \pm i$. La distance dans le plan complexe de 0 à $\pm i$ est 1, et de $-\frac{1}{2}$ à $\pm i$ est $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{5}/2$. Ainsi, dans le premier cas, la

▶ série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge au moins pour $|x| < 1$ et, dans le deuxième cas, la série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$ converge au moins pour $\left|x + \frac{1}{2}\right| < \sqrt{5}/2$.

Il convient de noter que l'équation (9) découle des théorèmes 3.3.1 et 7.3.1. On suppose que les conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y'_0$ sont données. Puisque $1 + x^2 \neq 0$ pour tout x , on sait, selon le théorème 3.3.1, qu'il existe une solution unique au problème de valeur initiale dans $-\infty < x < \infty$. D'un autre côté, le théorème 7.3.1 ne garantit qu'une solution en série de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (avec $a_0 = y_0$, $a_1 = y'_0$) pour $-1 < x < 1$. Il est possible que la solution unique dans l'intervalle $-\infty < x < \infty$ n'admette pas de série de puissances autour de $x = 0$ qui converge pour tout x .

Exemple 5

Pouvez-vous déterminer une solution en série autour de $x = 0$ pour l'équation différentielle

$$y'' + (\sin x)y' + (1 + x^2)y = 0$$

et, si c'est le cas, pouvez-vous préciser le rayon de convergence ?

Dans cette équation différentielle, $p(x) = \sin x$ et $q(x) = 1 + x^2$. On se rappelle que $\sin x$ admet un développement en série de Taylor autour de $x = 0$ qui converge pour tout x . De plus, q admet aussi un développement en série de Taylor autour de $x = 0$, soit $q(x) = 1 + x^2$, qui converge pour tout x . Ainsi, il existe une solution en série de la forme $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec a_0 et a_1 arbitraires, et cette série converge pour tout x .

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 4, déterminez $\phi''(x_0)$, $\phi'''(x_0)$ et $\phi^{(4)}(x_0)$ au point x_0 si $y = \phi(x)$ est une solution au problème de valeur initiale.

1. $y'' + xy' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
2. $y'' + (\sin x)y' + (\cos x)y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
3. $x^2 y'' + (1 + x)y' + 3(\ln x)y = 0$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$
4. $y'' + x^2 y' + (\sin x)y = 0$; $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$

■ Dans les problèmes 5 à 8, déterminez une borne inférieure pour le rayon de convergence des solutions en série autour de chaque point x_0 pour l'équation différentielle.

5. $y'' + 4y' + 6xy = 0$; $x_0 = 0$, $x_0 = 4$
6. $(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0$; $x_0 = 4$, $x_0 = -4$, $x_0 = 0$
7. $(1 + x^3)y'' + 4xy' + y = 0$; $x_0 = 0$, $x_0 = 2$
8. $xy'' + y = 0$; $x_0 = 1$

9. Déterminez une borne inférieure pour le rayon de convergence des solutions en série autour du point x_0 pour chacune des équations différentielles des problèmes 1 à 14 de la section 7.2.

10. **L'équation de Tchebychev** L'équation différentielle de Tchebychev⁷ est

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

où α est constant.

a) Déterminez deux solutions linéairement indépendantes en série de puissances en x pour $|x| < 1$ et montrez qu'elles forment un ensemble fondamental de solutions.

7. Pafnouti L. Tchebychev (1821-1894) a été professeur à l'Université de Saint-Petersbourg pendant 35 ans et le plus éminent mathématicien russe du XIX^e siècle. Il a fondé l'École mathématique de Saint-Petersbourg, où de nombreux mathématiciens connus ont été formés. Son étude sur les polynômes de Tchebychev a commencé vers 1854 dans le cadre d'une recherche sur l'approximation de fonctions par des polynômes. Il est aussi connu pour ses travaux sur la théorie des nombres et dans le domaine des probabilités.

- b) Montrez que si α est un entier naturel n , alors il existe une solution polynomiale de degré n . Ces polynômes, quand ils sont normalisés adéquatement, sont appelés polynômes de Tchebychev. Ils sont très utiles pour les problèmes nécessitant une approximation polynomiale d'une fonction définie dans $-1 \leq x \leq 1$.

c) Trouvez une solution polynomiale pour chacun des cas $\alpha = n = 0, 1, 2$ et 3 .

- Pour chacune des équations différentielles des problèmes 11 à 14, trouvez les quatre premiers termes non nuls dans chacune des solutions en série de puissances linéairement indépendantes autour de l'origine. Selon vous, quel sera le rayon de convergence pour chaque solution ?

11. $y'' + (\sin x)y = 0$

12. $e^x y'' + xy = 0$

13. $(\cos x)y'' + xy' - 2y = 0$

14. $e^{-x} y'' + \ln(1+x)y' - xy = 0$

15. Supposez qu'on vous précise que x et x^2 sont des solutions à une équation différentielle $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$. Pouvez-vous déterminer si le point $x = 0$ est un point ordinaire ou un point singulier ?

Suggestion : Utilisez le théorème 3.3.1 et notez les valeurs de x et de x^2 en $x = 0$.

- **Les équations du premier ordre** Les techniques de résolution en série qu'on a discutées dans cette section sont directement applicables à l'équation différentielle linéaire du premier ordre $P(x)y' + Q(x)y = 0$ en un point x_0 si la fonction $p = Q/P$ admet un développement en série de Taylor autour de ce point. Ce dernier est un point ordinaire, et le rayon de convergence de la série $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ est au moins aussi grand que le rayon de convergence de la série pour Q/P . Dans chacun des problèmes 16 à 21, résolvez l'équation différentielle donnée à l'aide d'une série de puissances en x , puis vérifiez si a_0 est arbitraire dans chaque cas. Les problèmes 20 et 21 mettent en jeu des équations différentielles non homogènes auxquelles on peut facilement appliquer les méthodes de résolution en série. Quand c'est possible, comparez la solution en série avec la solution obtenue en utilisant les méthodes décrites dans le chapitre 2.

16. $y' - y = 0$

17. $y' - xy = 0$

18. $y' = e^{x^2} y$ (trois termes seulement)

19. $(1-x)y' = y$

20. $y' - y = x^2$

21. $y' + xy = 1 + x$

- **L'équation de Legendre** Les problèmes 22 à 29 portent sur l'équation de Legendre⁸

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0.$$

Comme on l'a indiqué dans l'exemple 3, le point $x = 0$ est un point ordinaire de cette équation, et la distance minimale entre l'origine et les racines de $P(x) = 1 - x^2$ est de 1. Ainsi, le rayon de convergence des solutions en série autour de $x = 0$ est au moins égal à 1. De plus, vous devez considérer seulement $\alpha > -1$ car, si $\alpha \leq -1$, alors la substitution $\alpha = -(1 + \gamma)$, où $\gamma \geq 0$, mène à l'équation de Legendre $(1-x^2)y'' - 2xy' + \gamma(\gamma+1)y = 0$.

22. Montrez que deux solutions linéairement indépendantes à l'équation de Legendre pour $|x| < 1$ sont

$$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4 + \sum_{m=3}^{\infty} (-1)^m \frac{\alpha \cdots (\alpha-2m+2)(\alpha+1) \cdots (\alpha+2m-1)}{(2m)!} x^{2m},$$

$$y_2(x) = x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5 + \sum_{m=3}^{\infty} (-1)^m \frac{(\alpha-1) \cdots (\alpha-2m+1)(\alpha+2) \cdots (\alpha+2m)}{(2m+1)!} x^{2m+1}.$$

8. Adrien-Marie Legendre (1752-1833) a occupé plusieurs postes à l'Académie des sciences à partir de 1783. Ses principaux travaux portaient sur les fonctions elliptiques et la théorie des nombres. Les fonctions de Legendre, les solutions à l'équation de Legendre, ont paru en 1784 dans son étude sur l'attraction des sphéroïdes.

- ▶ 23. Montrez que si α est zéro ou un entier positif pair $2n$, la solution en série y_1 se réduit à un polynôme de degré $2n$ contenant seulement des puissances paires de x . Trouvez les polynômes correspondant à $\alpha = 0, 2$ et 4 . Montrez que si α est un entier positif impair $2n + 1$, la solution en série y_2 se réduit à un polynôme de degré $2n + 1$ contenant seulement des puissances impaires de x . Trouvez les polynômes correspondant à $\alpha = 1, 3$ et 5 .

Ⓢ 24. Le polynôme de Legendre $P_n(x)$ est défini comme la solution polynomiale à l'équation de Legendre avec $\alpha = n$ qui satisfait aussi à la condition $P_n(1) = 1$.

- a) En utilisant les résultats du problème 23, trouvez les polynômes de Legendre $P_0(x), \dots, P_5(x)$.
 b) Tracez les graphes de $P_0(x), \dots, P_5(x)$ pour $-1 \leq x \leq 1$.
 c) Trouvez les zéros de $P_0(x), \dots, P_5(x)$.

25. On peut montrer que la formule générale pour $P_n(x)$ est

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} x^{n-2k},$$

où $[n/2]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $n/2$. En observant la forme de $P_n(x)$ pour n pair ou n impair, montrez que $P_n(-1) = (-1)^n$.

26. Les polynômes de Legendre jouent un rôle important en physique mathématique. Par exemple, pour résoudre l'équation de Laplace (l'équation potentielle) en coordonnées sphériques, on doit résoudre l'équation

$$\frac{d^2 F(\varphi)}{d\varphi^2} + \cot \varphi \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} + n(n+1)F(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi,$$

où n est un entier positif. Montrez que le changement de variable $x = \cos \varphi$ conduit à l'équation de Legendre avec $\alpha = n$ pour $y = f(x) = F(\arccos x)$.

27. Montrez que pour $n = 0, 1, 2, 3$, le polynôme correspondant de Legendre est donné par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Cette formule, appelée formule de Rodrigues⁹, est valide pour tout entier positif n .

28. Montrez qu'on peut également écrire l'équation de Legendre sous la forme

$$[(1-x^2)y']' = -\alpha(\alpha+1)y.$$

Il s'ensuit que $[(1-x^2)P'_n(x)]' = -n(n+1)P_n(x)$ et que $[(1-x^2)P'_m(x)]' = -m(m+1)P_m(x)$. En multipliant la première équation par $P_m(x)$ et la seconde par $P_n(x)$, puis en intégrant par parties, montrez que

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m.$$

Cette propriété des polynômes de Legendre est appelée la propriété d'orthogonalité. Si $m = n$, on peut montrer que la valeur de l'intégrale précédente est $2/(2n+1)$.

29. À la condition d'avoir un polynôme f de degré n , on peut exprimer f sous la forme d'une combinaison linéaire de $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x).$$

En utilisant le résultat du problème 28, montrez que

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_k(x)dx.$$

9. Benjamin Olinde Rodrigues (1795-1851) a publié ce résultat dans le cadre de sa thèse de doctorat à l'Université de Paris en 1815. Il est par la suite devenu banquier et activiste social mais a maintenu un intérêt pour les mathématiques. Malheureusement, ses dernières publications n'ont été reconnues qu'à la fin du xx^e siècle.

7.4 Les équations d'Euler – les points singuliers réguliers

Dans cette section, nous allons considérer l'équation

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (1)$$

au voisinage d'un point singulier x_0 . On se rappelle que si les fonctions P , Q et R sont des polynômes qui n'admettent aucun facteur commun, les points singuliers de l'équation (1) sont les points pour lesquels $P(x) = 0$.

Les équations d'Euler L'exemple le plus simple d'une équation différentielle ayant un point singulier régulier est l'équation d'Euler¹⁰

$$L[y] = x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0, \quad (2)$$

où α et β sont constants. Il est facile de montrer que $x = 0$ est un point singulier régulier de l'équation (2). Puisque la solution à l'équation d'Euler est typique des solutions à toutes les équations différentielles avec un point singulier régulier, cela vaut la peine d'examiner cette équation avant de se pencher sur le problème plus général. Dans tout intervalle n'incluant pas l'origine, l'équation (2) admet une solution générale de la forme $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, où y_1 et y_2 sont linéairement indépendantes. Pour plus de commodité, on considère d'abord l'intervalle $x > 0$, et on appliquera plus tard les résultats à l'intervalle $x < 0$. Premièrement, on note que $(x')' = r x^{r-1}$ et $(x'')' = r(r-1)x^{r-2}$. Ainsi, si on suppose que l'équation (2) admet une solution de la forme

$$y = x^r, \quad (3)$$

alors on obtient

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^2 (x^r)'' + \alpha x (x^r)' + \beta x^r \\ &= x^r [r(r-1) + \alpha r + \beta]. \end{aligned} \quad (4)$$

Si r est une racine de l'équation quadratique

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0, \quad (5)$$

alors $L[x^r]$ est nul, et $y = x^r$ est une solution à l'équation (2). Les racines de l'équation (5) sont

$$r_1, r_2 = \frac{-(\alpha-1) \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4\beta}}{2} \quad (6)$$

et $F(r) = (r - r_1)(r - r_2)$. Comme pour les équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants, on doit considérer séparément les cas dans lesquels les racines sont réelles et distinctes, réelles doubles ou complexes conjuguées. En effet, toute l'étude de cette section ressemble au traitement des équations linéaires du deuxième ordre à coefficients constants du chapitre 3 où e^{rx} est remplacé par x^r .

Les racines réelles et distinctes Si $F(r) = 0$ a des racines réelles et distinctes r_1 et r_2 avec $r_1 \neq r_2$, alors $y_1(x) = x^{r_1}$ et $y_2(x) = x^{r_2}$ sont des solutions à l'équation (2). Puisque le wronskien $W(x^{r_1}, x^{r_2}) = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1}$ est non nul pour $r_1 \neq r_2$ et $x > 0$, il s'ensuit que la solution générale à l'équation (2) est

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}, \quad x > 0. \quad (7)$$

Il faut noter que si r n'est pas un nombre rationnel, alors x^r est défini par $x^r = e^{r \ln x}$.

10. Cette équation est souvent appelée l'équation d'Euler-Cauchy ou l'équation équidimensionnelle. Euler a étudié cette équation en 1740, mais ses solutions étaient connues par Jean Bernoulli avant 1700.

Exemple 1

Résolvez

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \quad x > 0. \quad (8)$$

En substituant $y = x^r$ dans l'équation (8), on obtient

$$x^r[2r(r-1) + 3r - 1] = x^r(2r^2 + r - 1) = x^r(2r-1)(r+1) = 0.$$

Ainsi, $r_1 = \frac{1}{2}$ et $r_2 = -1$. Donc, la solution générale à l'équation (8) est

$$y = c_1x^{1/2} + c_2x^{-1}, \quad x > 0. \quad (9)$$

Les racines doubles Si les racines r_1 et r_2 sont identiques, alors on obtient seulement une solution $y_1(x) = x^{r_1}$ de la forme supposée. On peut obtenir une deuxième solution avec la méthode de réduction d'ordre mais, pour les besoins de notre prochaine étude, nous allons considérer une autre méthode. Puisque $r_1 = r_2$, il s'ensuit que $F(r) = (r - r_1)^2$. Ainsi, dans ce cas, non seulement $F(r_1) = 0$, mais $F'(r_1) = 0$ également. Cela nous incite à dériver l'équation (4) en fonction de r , puis à poser r égal à r_1 . En dérivant l'équation (4) en fonction de r , on obtient

$$\frac{\partial}{\partial r} L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r} [x^r F(r)].$$

En substituant à $F(r)$ son expression polynomiale, en permutant la dérivation par rapport à x et celle par rapport à r , puis en notant que $\partial(x^r)/\partial r = x^r \ln x$, on obtient

$$L[x^r \ln x] = (r - r_1)^2 x^r \ln x + 2(r - r_1)x^r. \quad (10)$$

Le second membre de l'équation (10) est nul pour $r = r_1$. Par conséquent,

$$y_2(x) = x^{r_1} \ln x, \quad x > 0 \quad (11)$$

est une deuxième solution à l'équation (2). En évaluant le wronskien de y_1 et y_2 , on remarque que

$$W(x^{r_1}, x^{r_1} \ln x) = x^{2r_1-1}.$$

Ainsi, x^{r_1} et $x^{r_1} \ln x$ sont linéairement indépendantes pour $x > 0$, et la solution générale à l'équation (2) est

$$y = (c_1 + c_2 \ln x)x^{r_1}, \quad x > 0. \quad (12)$$

Exemple 2

Résolvez

$$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0, \quad x > 0. \quad (13)$$

En substituant $y = x^r$ dans l'équation (13), on obtient

$$x^r[r(r-1) + 5r + 4] = x^r(r^2 + 4r + 4) = 0.$$

Ainsi, $r_1 = r_2 = -2$, et

$$y = x^{-2}(c_1 + c_2 \ln x), \quad x > 0. \quad (14)$$

Les racines complexes Finalement, on suppose que les racines r_1 et r_2 sont complexes conjuguées, soit $r_1 = \lambda + i\mu$ et $r_2 = \lambda - i\mu$ avec $\mu \neq 0$. On doit maintenant expliquer ce que signifie x^r lorsque r est complexe. Il convient de se rappeler que

$$x^r = e^{r \ln x} \quad (15)$$

quand $x > 0$ et r est réel. Ainsi, on peut utiliser cette équation pour définir x^r lorsque r est complexe. Ainsi,

$$\begin{aligned} x^{\lambda+i\mu} &= e^{(\lambda+i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x} e^{i\mu \ln x} = x^\lambda e^{i\mu \ln x} \\ &= x^\lambda [\cos(\mu \ln x) + i \sin(\mu \ln x)], \quad x > 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Avec cette définition de x^r pour des valeurs complexes de r , on peut vérifier que les lois habituelles d'algèbre et de calcul différentiel s'appliquent. Ainsi, x^{r_1} et x^{r_2} sont des solutions à l'équation (2). La solution générale à l'équation (2) est

$$y = c_1 x^{\lambda+i\mu} + c_2 x^{\lambda-i\mu}. \quad (17)$$

Le désavantage de cette expression est que les fonctions $x^{\lambda+i\mu}$ et $x^{\lambda-i\mu}$ sont à valeurs complexes. Il faut se rappeler qu'on a vu une situation semblable pour l'équation différentielle du deuxième ordre à coefficients constants quand les racines de l'équation caractéristique étaient complexes. On observe aussi que les parties réelles et imaginaires de $x^{\lambda+i\mu}$, à savoir

$$x^\lambda \cos(\mu \ln x) \quad \text{et} \quad x^\lambda \sin(\mu \ln x), \quad (18)$$

sont aussi des solutions à l'équation (2). Un calcul simple montre que

$$W[x^\lambda \cos(\mu \ln x), x^\lambda \sin(\mu \ln x)] = \mu x^{2\lambda-1}.$$

Par conséquent, ces solutions sont aussi linéairement indépendantes pour $x > 0$, et la solution générale à l'équation (2) est

$$y = c_1 x^\lambda \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \sin(\mu \ln x), \quad x > 0. \quad (19)$$

Exemple 3

Résolvez

$$x^2 y + xy' + y = 0. \quad (20)$$

En substituant $y = x^r$ dans l'équation (20), on obtient

$$x^r [r(r-1) + r + 1] = x^r (r^2 + 1) = 0.$$

Ainsi, $r = \pm i$, et la solution générale est

$$y = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x), \quad x > 0. \quad (21)$$

On considère maintenant le comportement qualitatif des solutions à l'équation (2) près du point singulier $x = 0$. Ce comportement dépend entièrement de la nature des exposants r_1 et r_2 . D'abord, si r est réel et positif, alors $x^r \rightarrow 0$ lorsque x tend vers zéro par la droite. D'un autre côté, si r est réel et négatif, alors x^r devient non borné, tandis que si $r = 0$, alors $x^r = 1$. Ces possibilités sont illustrées à la figure 7.4.1 pour différentes valeurs de r . Si r est complexe, alors une solution typique est $x^\lambda \cos(\mu \ln x)$. Cette fonction devient non bornée ou s'approche de zéro si λ est respectivement négatif ou positif et qu'il oscille aussi de plus en plus vite lorsque $x \rightarrow 0$.

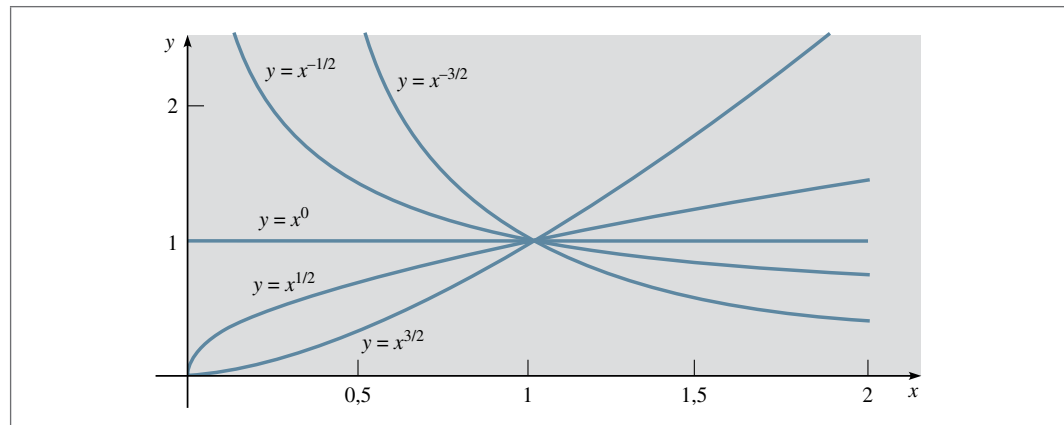


Figure 7.4.1 Solutions à l'équation d'Euler; racines réelles.

Ce comportement est illustré dans les figures 7.4.2 et 7.4.3 pour des valeurs spécifiques de λ et de μ . Si $\lambda = 0$, l'oscillation est d'amplitude constante. Finalement, s'il y a des racines multiples, alors une solution est de la forme $x^r \ln x$, qui tend vers zéro si $r > 0$ et devient non bornée si $r \leq 0$. La figure 7.4.4 illustre un exemple de chaque cas.

On peut obtenir l'extension des solutions à l'équation (2) dans l'intervalle $x < 0$ de manière assez simple. Il suffit de comprendre ce qu'on veut dire par x^r lorsque x est négatif et que r n'est pas un entier. De la même manière, $\ln x$ n'a pas été défini pour $x < 0$. On peut démontrer que les solutions à l'équation d'Euler données pour $x > 0$ peuvent être valides pour $x < 0$ mais, en général, elles sont à valeurs complexes. Ainsi, dans l'exemple 1, la solution $x^{1/2}$ est imaginaire pour $x < 0$.

Il est toujours possible d'obtenir des solutions à valeurs réelles à l'équation d'Euler (2) dans l'intervalle $x < 0$ en effectuant le changement de variable suivant. Soit $x = -\xi$, où $\xi > 0$, et soit $y = u(\xi)$. Alors, on a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = -\frac{du}{d\xi}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi} \left(-\frac{du}{d\xi} \right) \frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2u}{d\xi^2}. \quad (22)$$

Ainsi, l'équation (2) pour $x < 0$ prend la forme

$$\xi^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha \xi \frac{du}{d\xi} + \beta u = 0, \quad \xi > 0. \quad (23)$$

On remarque qu'il s'agit exactement du problème qu'on vient de résoudre. À partir des équations (7), (12) et (19), on a

$$u(\xi) = \begin{cases} c_1 \xi^{r_1} + c_2 \xi^{r_2} \\ (c_1 + c_2 \ln \xi) \xi^{r_1} \\ c_1 \xi^\lambda \cos(\mu \ln \xi) + c_2 \xi^\lambda \sin(\mu \ln \xi), \end{cases} \quad (24)$$

selon que les zéros de $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta$ sont réels et distincts, réels et identiques ou complexes conjugués. Pour obtenir u en fonction de x , on remplace ξ par $-x$ dans les équations (24).

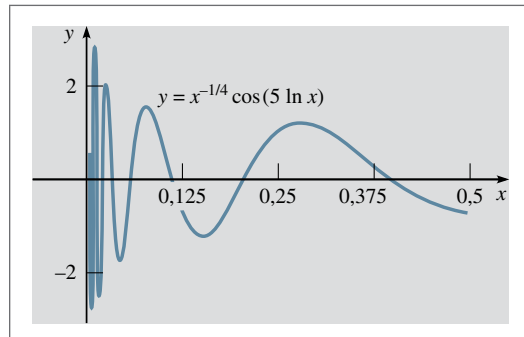


Figure 7.4.2 Solution à l'équation d'Euler; racines complexes avec partie réelle négative.

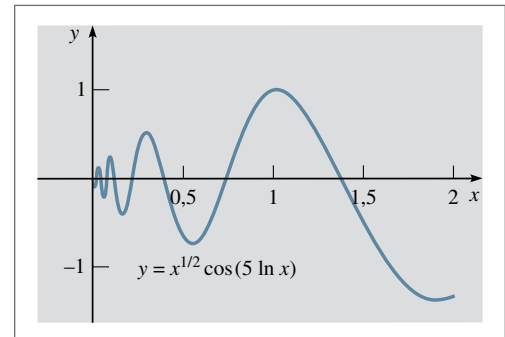


Figure 7.4.3 Solution à l'équation d'Euler; racines complexes avec partie réelle positive.

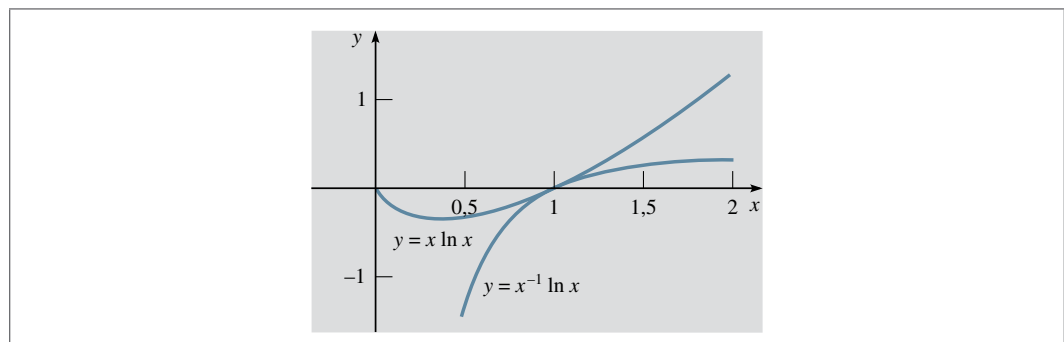


Figure 7.4.4 Solutions à l'équation d'Euler; racines multiples.

On peut combiner les résultats pour $x > 0$ et $x < 0$ en se rappelant que $|x| = x$ lorsque $x > 0$ et $|x| = -x$ lorsque $x < 0$. Ainsi, on doit seulement remplacer x par $|x|$ dans les équations (7), (12) et (19) pour obtenir des solutions à valeurs réelles valides dans tout intervalle qui ne contient pas l'origine. Ces résultats sont résumés ci-dessous.

La solution générale à l'équation d'Euler (2)

$$x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0,$$

dans tout intervalle ne contenant pas l'origine, est déterminée par les racines r_1 et r_2 de l'équation

$$F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0.$$

Si les racines sont réelles et distinctes, alors

$$y = c_1 |x|^{r_1} + c_2 |x|^{r_2}. \quad (25)$$

Si les racines sont réelles et identiques, alors

$$y = (c_1 + c_2 \ln |x|) |x|^{r_1}. \quad (26)$$

Si les racines sont complexes, alors

$$y = |x|^\lambda [c_1 \cos(\mu \ln |x|) + c_2 \sin(\mu \ln |x|)], \quad (27)$$

où $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$.

Les solutions à une équation d'Euler de la forme

$$(x - x_0)^2 y'' + \alpha(x - x_0) y' + \beta y = 0 \quad (28)$$

sont semblables à celles qui sont indiquées dans les équations (25) à (27). Si on recherche des solutions de la forme $y = (x - x_0)^r$, alors la solution générale est donnée par une des équations (25), (26) ou (27), où x est remplacé par $x - x_0$. D'une autre manière, on peut réduire l'équation (28) à la forme de l'équation (2) en effectuant le changement de variable (indépendante) $t = x - x_0$.

La situation d'une équation différentielle du deuxième ordre générale avec un point singulier régulier est analogue à celle d'une équation d'Euler. On considère ce problème dans la prochaine section.

Points singuliers réguliers Nous retournons maintenant au cas général de l'équation (1)

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

au voisinage d'un point singulier x_0 . Cela signifie que $P(x_0) = 0$ et qu'au moins l'une des fonctions Q et R n'est pas nulle en x_0 .

Malheureusement, quand on tente d'utiliser les méthodes des deux sections précédentes pour résoudre l'équation (1) au voisinage d'un point singulier x_0 , elles ne fonctionnent pas car la solution à l'équation (1) est souvent non analytique en x_0 . Par conséquent, l'équation (1) ne peut être représentée par une série de Taylor en puissances de $x - x_0$. On doit plutôt utiliser un développement en série plus général. Du fait que les points singuliers d'une équation différentielle sont souvent peu nombreux, on doit se demander si on peut simplement les ignorer, puisqu'on sait déjà comment construire des solutions autour de points ordinaires. Cette omission est irréaliste. En effet, les points singuliers déterminent les principales caractéristiques de la solution avec une portée qu'on ne peut pas soupçonner. Au voisinage d'un point singulier, l'amplitude de la solution augmente souvent ou encore varie rapidement. Par conséquent, le comportement d'un système physique modélisé par une équation différentielle est souvent plus intéressant au voisinage d'un point singulier. Souvent, les singularités géométriques dans un problème de physique (comme les coins ou les arêtes) conduisent à des points singuliers dans l'équation différentielle correspondante. Ainsi, bien qu'au début on cherche à éviter les quelques points où une équation différentielle est singulière, c'est précisément en ces points qu'on doit étudier la solution plus attentivement.

Comme solution de rechange aux méthodes analytiques, on peut considérer l'utilisation de méthodes numériques. Cependant, ces méthodes sont mal adaptées à l'étude de solutions au voisinage d'un point singulier. Ainsi, même si on adopte une approche numérique, il est préférable de la combiner avec les méthodes analytiques de ce chapitre afin d'examiner le comportement des solutions au voisinage de points singuliers.

Sans information additionnelle sur le comportement de Q/P et de R/P au voisinage du point singulier, il est impossible de décrire le comportement des solutions à l'équation (1) au voisinage de $x = x_0$. C'est peut-être parce qu'il existe deux solutions linéairement indépendantes à l'équation (1) qui restent bornées lorsque $x \rightarrow x_0$ (comme dans l'exemple 3) ou qu'il n'y en a qu'une qui reste bornée et que l'autre devient non bornée lorsque $x \rightarrow x_0$ (comme dans l'exemple 1), ou encore que les deux deviennent non bornées lorsque $x \rightarrow x_0$ (comme dans l'exemple 2).

Même si l'équation (1) n'admet pas de solution qui reste bornée lorsque $x \rightarrow x_0$, il est souvent important de déterminer le comportement des solutions à l'équation (1) lorsque $x \rightarrow x_0$. Par exemple, est-ce que $y \rightarrow \infty$ de la même manière que $(x - x_0)^{-1}$ ou $|x - x_0|^{-1/2}$ ou autrement ?

Notre objectif est d'appliquer la méthode déjà développée pour résoudre l'équation (1) près d'un point ordinaire pour qu'elle s'applique aussi au voisinage d'un point singulier x_0 . Dans le but de simplifier cette tâche, on se limite à des cas où les singularités des fonctions Q/P et R/P en $x = x_0$ ne sont pas trop importantes, c'est-à-dire à des singularités faibles. À cette étape, on ne sait pas exactement ce qu'est une singularité acceptable. Cependant, en développant la méthode de résolution, on verra que les conditions appropriées (voir aussi la section 7.6, problème 21) pour distinguer les singularités faibles sont

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \text{ existe} \quad (29)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \text{ existe.} \quad (30)$$

Ainsi, la singularité de Q/P ne peut être pire que $(x - x_0)^{-1}$, et la singularité de R/P ne peut être pire que $(x - x_0)^{-2}$. Un tel point est un **point singulier régulier** de l'équation (1). Pour des fonctions plus générales que les polynômes, x_0 est un point singulier régulier de l'équation (1) s'il s'agit d'un point singulier et si¹¹

$$(x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{et} \quad (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad (31)$$

admettent une série de Taylor convergente autour de x_0 , autrement dit si les fonctions dans l'équation (31) sont analytiques en $x = x_0$. Les équations (29) et (30) impliquent que ce sera le cas lorsque P , Q et R sont des polynômes. Tout point singulier de l'équation (1) qui n'est pas un point singulier régulier est un **point singulier irrégulier** de l'équation (1).

Veuillez noter que les conditions données par les équations (29) et (30) sont satisfaites par l'équation d'Euler (28). Ainsi la singularité de l'équation d'Euler est un point singulier régulier.

De plus, nous verrons que le comportement de toutes les équations sous la forme (1) avec un point singulier régulier est analogue à celle de l'équation d'Euler. Les solutions au voisinage d'un point singulier régulier peuvent donc inclure des termes de puissance de x avec des exposants négatifs ou non intégrables, ainsi que des logarithmes et des sinus ou des cosinus avec des arguments logarithmiques.

Dans les sections suivantes, nous verrons comment résoudre l'équation (1) au voisinage d'un point singulier régulier. L'étude des solutions aux équations différentielles au voisinage de points singuliers irréguliers est plus complexe. Par conséquent, elle sera présentée dans des manuels plus avancés.

11. Les fonctions données dans l'équation (31) ne sont pas nécessairement définies en x_0 . Dans ce cas, leurs valeurs en x_0 doivent être assignées comme leurs limites lorsque $x \rightarrow x_0$.

Exemple 4

Déterminez les points singuliers de l'équation de Legendre

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0 \quad (32)$$

et déterminez si ces points singuliers sont réguliers ou irréguliers.

Les points singuliers sont les racines de $P(x) = 1 - x^2$, soit $x = \pm 1$.

On observe aussi qu'en divisant par $1 - x^2$, les coefficients de y' et de y sont respectivement $-2x/(1 - x^2)$ et $\alpha(\alpha + 1)/(1 - x^2)$. On considère d'abord le point $x = 1$. Par conséquent, à partir des équations (29) et (30), on calcule

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \frac{-2x}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(-2x)}{(1 - x)(1 + x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{1 + x} = 1$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^2 \frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2 \alpha(\alpha + 1)}{(1 - x)(1 + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(-\alpha)(\alpha + 1)}{1 + x} = 0. \end{aligned}$$

Puisque ces limites existent, le point $x = 1$ est un point singulier régulier. On peut montrer de manière semblable que $x = -1$ est aussi un point singulier régulier.

Exemple 5

Déterminez les points singuliers de l'équation différentielle

$$2x(x - 2)^2 y'' + 3xy' + (x - 2)y = 0$$

et précisez s'ils sont réguliers ou irréguliers.

En divisant l'équation différentielle par $2x(x - 2)^2$, on a

$$y'' + \frac{3}{2(x - 2)^2} y' + \frac{1}{2x(x - 2)} y = 0.$$

Donc, $p(x) = Q(x)/P(x) = 3/2(x - 2)^2$ et $q(x) = R(x)/P(x) = 1/2x(x - 2)$.Les points singuliers sont $x = 0$ et $x = 2$. On considère $x = 0$. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} x p(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{3}{2(x - 2)^2} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 q(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{1}{2x(x - 2)} = 0.$$

Puisque ces limites existent, $x = 0$ est un point singulier régulier. Pour $x = 2$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) p(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \frac{3}{2(x - 2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{2(x - 2)},$$

donc la limite n'existe pas. Ainsi, $x = 2$ est un point singulier irrégulier.**Exemple 6**

Déterminez les points singuliers de

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 y'' + (\cos x)y' + (\sin x)y = 0$$

et précisez s'ils sont réguliers ou irréguliers.

Le seul point singulier est $x = \pi/2$. Pour l'étudier, on considère les fonctions

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right) p(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{\cos x}{x - \pi/2}$$

et

$$\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 q(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \sin x.$$

En commençant à partir de la série de Taylor pour $\cos x$ autour de $x = \pi/2$, on trouve

$$\frac{\cos x}{x - \pi/2} = -1 + \frac{(x - \pi/2)^2}{3!} - \frac{(x - \pi/2)^4}{5!} + \dots,$$

qui converge pour tout x . De la même manière, $\sin x$ est analytique en $x = \pi/2$. Par conséquent, on conclut que $\pi/2$ est un point singulier régulier de cette équation.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 12, déterminez la solution générale à l'équation différentielle qui est valide dans un intervalle qui n'inclut pas le point singulier.

1. $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$
2. $(x+1)^2 y'' + 3(x+1)y' + 0,75y = 0$
3. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$
4. $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$
5. $x^2 y'' - xy' + y = 0$
6. $(x-1)^2 y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0$
7. $x^2 y'' + 6xy' - y = 0$
8. $2x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$
9. $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$
10. $(x-2)^2 y'' + 5(x-2)y' + 8y = 0$
11. $x^2 y'' + 2xy' + 4y = 0$
12. $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$

■ Dans les problèmes 13 à 16, trouvez la solution au problème de valeur initiale. Tracez le graphe de la solution, puis décrivez comment la solution se comporte lorsque $x \rightarrow 0$.

- Ⓢ 13. $2x^2 y'' + xy' - 3y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$
- Ⓢ 14. $4x^2 y'' + 8xy' + 17y = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = -3$
- Ⓢ 15. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$, $y(-1) = 2$, $y'(-1) = 3$
- Ⓢ 16. $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$

■ Dans les problèmes 17 à 34, déterminez tous les points singuliers de l'équation et précisez s'ils sont réguliers ou irréguliers.

17. $xy'' + (1-x)y' + xy = 0$
18. $x^2(1-x)^2 y'' + 2xy' + 4y = 0$
19. $x^2(1-x)y'' + (x-2)y' - 3xy = 0$
20. $x^2(1-x^2)y'' + (2/x)y' + 4y = 0$
21. $(1-x^2)^2 y'' + x(1-x)y' + (1+x)y = 0$
22. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$ (équation de Bessel)
23. $(x+3)y'' - 2xy' + (1-x^2)y = 0$
24. $x(1-x^2)^3 y'' + (1-x^2)^2 y' + 2(1+x)y = 0$
25. $(x+2)^2(x-1)y'' + 3(x-1)y' - 2(x+2)y = 0$
26. $x(3-x)y'' + (x+1)y' - 2y = 0$
27. $(x^2 + x - 2)y'' + (x+1)y' + 2y = 0$
28. $xy'' + e^x y' + (3 \cos x)y = 0$
29. $y'' + (\ln |x|)y' + 3xy = 0$
30. $x^2 y'' + 2(e^x - 1)y' + (e^{-x} \cos x)y = 0$
31. $x^2 y'' - 3(\sin x)y' + (1+x^2)y = 0$
32. $xy'' + y' + (\cot x)y = 0$
33. $(\sin x)y'' + xy' + 4y = 0$
34. $(x \sin x)y'' + 3y' + xy = 0$
35. Trouvez toutes les valeurs de α pour lesquelles toutes les solutions de $x^2 y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ s'approchent de zéro lorsque $x \rightarrow 0$.
36. Trouvez toutes les valeurs de β pour lesquelles toutes les solutions de $x^2 y'' + \beta y = 0$ s'approchent de zéro lorsque $x \rightarrow 0$.
37. Trouvez γ de sorte que la solution au problème de valeur initiale $x^2 y'' - 2y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \gamma$ soit bornée lorsque $x \rightarrow 0$.
38. Trouvez toutes les valeurs de α pour lesquelles toutes les solutions de $x^2 y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ s'approchent de zéro lorsque $x \rightarrow \infty$.
39. Considérez l'équation d'Euler $x^2 y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$. Trouvez les conditions s'appliquant à α et à β de sorte que
 - a) toutes les solutions s'approchent de zéro lorsque $x \rightarrow 0$;
 - b) toutes les solutions soient bornées lorsque $x \rightarrow 0$;
 - c) toutes les solutions s'approchent de zéro lorsque $x \rightarrow \infty$;
 - d) toutes les solutions soient bornées lorsque $x \rightarrow \infty$;
 - e) toutes les solutions soient bornées lorsque $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow \infty$.

40. En utilisant la méthode de réduction d'ordre, montrez que si r_1 est une racine multiple de $r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$, alors x^{r_1} et $x^{r_1} \ln x$ sont des solutions à $x^2 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$ pour $x > 0$.

■ Dans les problèmes 41 et 42, montrez que le point $x = 0$ est un point singulier régulier. Dans chaque problème, essayez de trouver des solutions de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrez qu'il y a seulement une solution non nulle de cette forme dans le problème 41, et qu'il y en a plus d'une dans le problème 42. Par conséquent, dans un cas comme dans l'autre, il est impossible de trouver la solution générale de cette manière. Ce cas est un exemple typique des équations avec des points singuliers.

41. $2xy'' + 3y' + xy = 0$

42. $2x^2 y'' + 3xy' - (1+x)y = 0$

43. **Les singularités à l'infini** Les définitions d'un point ordinaire et d'un point singulier régulier données dans les sections précédentes s'appliquent seulement si le point x_0 est fini. Dans des travaux plus avancés sur les équations différentielles, il est souvent nécessaire d'étudier le point à l'infini. On y arrive en effectuant le changement de variable $\xi = 1/x$ et en étudiant l'équation résultante en $\xi = 0$. Montrez que pour l'équation différentielle $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$, le point à l'infini est un point ordinaire si

$$\frac{1}{P(1/\xi)} \left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2} \right] \quad \text{et} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^4 P(1/\xi)}$$

admettent des développements en série de Taylor autour de $\xi = 0$. Montrez aussi que le point à l'infini est un point singulier régulier si au moins une des fonctions ci-dessus n'admet pas de développement en série de Taylor, mais que

$$\frac{\xi}{P(1/\xi)} \left[\frac{2P(1/\xi)}{\xi} - \frac{Q(1/\xi)}{\xi^2} \right] \quad \text{et} \quad \frac{R(1/\xi)}{\xi^2 P(1/\xi)}$$

admettent de tels développements.

■ Dans les problèmes 44 à 49, utilisez les résultats du problème 43 pour déterminer si le point à l'infini est un point ordinaire, un point singulier régulier ou un point singulier irrégulier de l'équation différentielle.

44. $y'' + y = 0$

45. $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$

46. $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$ (équation de Legendre)

47. $x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ (équation de Bessel)

48. $y'' - 2xy' + \lambda y = 0$ (équation d'Hermite)

49. $y'' - xy = 0$ (équation d'Airy)

7.5 Les solutions en série près d'un point singulier régulier – première partie

Voyons maintenant comment résoudre l'équation linéaire du deuxième ordre générale

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0 \quad (1)$$

au voisinage d'un point singulier régulier $x = x_0$. Par commodité, on suppose que $x_0 = 0$. Si $x_0 \neq 0$, on peut transformer l'équation en une équation pour laquelle le point singulier régulier se trouve à l'origine en posant $x - x_0$ égal à t .

Le fait que $x = 0$ est un point régulier de l'équation (1) signifie que $xQ(x)/P(x) = xp(x)$ et $x^2 R(x)/P(x) = x^2 q(x)$ ont des limites finies lorsque $x \rightarrow 0$ et sont analytiques en $x = 0$. Ainsi, elles admettent des développements en série de puissances convergentes de la forme

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (2)$$

dans un intervalle $|x| < \rho$ autour de l'origine, où $\rho > 0$. Pour que les quantités $xP(x)$ et $x^2Q(x)$ apparaissent dans l'équation (1), il suffit de diviser l'équation (1) par $P(x)$, puis de la multiplier par x^2 pour obtenir

$$x^2y'' + x[xP(x)]y' + [x^2Q(x)]y = 0, \quad (3)$$

ou

$$x^2y'' + x(p_0 + p_1x + \dots + p_nx^n + \dots)y' + (q_0 + q_1x + \dots + q_nx^n + \dots)y = 0. \quad (4)$$

Si tous les coefficients p_n et q_n sont nuls sauf peut-être

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xQ(x)}{P(x)} \quad \text{et} \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2R(x)}{P(x)}, \quad (5)$$

alors l'équation (4) se réduit à l'équation d'Euler

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0, \quad (6)$$

étudiée dans la section précédente. En général, bien sûr, certaines des fonctions p_n et q_n , où $n \geq 1$, ne sont pas nulles. Cependant, le caractère essentiel des solutions à l'équation (4) est identique à celui des solutions à l'équation d'Euler (6). La présence des termes $p_1x + \dots + p_nx^n + \dots$ et $q_1x + \dots + q_nx^n + \dots$ complique à peine les calculs.

Cette étude se limitera à l'intervalle $x > 0$. On peut traiter l'intervalle $x < 0$, comme on l'a fait avec l'équation d'Euler, en effectuant le changement de variable $x = -\xi$, puis en résolvant l'équation résultante pour $\xi > 0$.

On peut considérer les coefficients de l'équation (4) comme des « coefficients d'Euler » multipliés par des séries de puissances. Pour le constater, il suffit d'écrire le coefficient de y' dans l'équation (4) sous la forme

$$p_0x[1 + (p_1/p_0)x + (p_2/p_0)x^2 + \dots + (p_n/p_0)x^n + \dots],$$

et de faire la même chose pour le coefficient de y . Par conséquent, il peut sembler normal de chercher des solutions à l'équation (4) sous la forme de « solutions d'Euler » multipliées par des séries de puissances. Ainsi, on suppose que

$$y = x^r(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{r+n}, \quad (7)$$

où $a_0 \neq 0$. En d'autres mots, r est l'exposant du premier terme de la série et a_0 est son coefficient. Comme partie de la solution, on doit déterminer :

1. les valeurs de r pour lesquelles l'équation (1) admet une solution de la forme (7) ;
2. la relation de récurrence pour les coefficients a_n ;
3. le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$.

La théorie générale a été conçue par Ferdinand Frobenius¹² et elle est assez complexe. Au lieu d'essayer de présenter cette théorie, dans cette section et les deux suivantes, on suppose simplement qu'il existe une solution de la forme établie. En particulier, on supposera que toute série de puissances dans l'expression d'une solution admet un rayon de convergence non nul, et on montrera comment déterminer les coefficients d'une telle série. Pour illustrer la méthode de Frobenius, on considère d'abord un exemple.

12. Ferdinand Frobenius (1849-1917) a été (comme Fuchs) étudiant puis professeur à l'Université de Berlin. En 1874, il a démontré comment construire des solutions en série autour de points réguliers. Cependant, son travail le plus reconnu porte sur l'algèbre. En effet, il a été un des premiers créateurs de la théorie des groupes.

Exemple 1

Résolvez l'équation différentielle

$$2x^2y'' - xy' + (1+x)y = 0. \quad (8)$$

Il est facile de montrer que $x = 0$ est un point singulier de l'équation (8). De plus, $xp(x) = -1/2$ et $x^2q(x) = (1+x)/2$. Ainsi, $p_0 = -1/2$, $q_0 = 1/2$, $q_1 = 1/2$ et toutes les autres fonctions p et q sont nulles. Alors, d'après l'équation (6), l'équation d'Euler correspondant à l'équation (8) est

$$2x^2y'' - xy' + y = 0. \quad (9)$$

Pour résoudre l'équation (8), on suppose qu'il existe une solution de la forme (7). Alors, y' et y'' sont données par

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1} \quad (10)$$

et

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}. \quad (11)$$

En substituant les expressions de y , de y' et de y'' dans l'équation (8), on obtient

$$\begin{aligned} 2x^2y'' - xy' + (1+x)y &= \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n} \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1}. \end{aligned} \quad (12)$$

On peut écrire le dernier terme dans l'équation (12) sous la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n}$. Donc, en regroupant les termes dans l'équation (12), on obtient

$$\begin{aligned} 2x^2y'' - xy' + (1+x)y &= a_0 [2r(r-1) - r + 1] x^r \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \{ [2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1] a_n + a_{n-1} \} x^{r+n} = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Si l'équation (13) doit être satisfaite pour tout x , le coefficient de chaque puissance de x dans l'équation (13) doit être nul. À partir du coefficient de x^r , on obtient, puisque $a_0 \neq 0$,

$$2r(r-1) - r + 1 = 2r^2 - 3r + 1 = (r-1)(2r-1) = 0. \quad (14)$$

L'équation (14) est l'**équation indicelle** de l'équation (8). Il faut noter qu'il s'agit exactement de l'équation polynomiale qu'on veut obtenir pour l'équation d'Euler (9) associée à l'équation (8). Les racines de l'équation indiquée sont

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1/2. \quad (15)$$

Ces valeurs de r sont les **exposants à la singularité** pour le point singulier régulier $x = 0$. Ils déterminent le comportement qualitatif de la solution (7) au voisinage du point singulier. Revenons maintenant à l'équation (13) et posons le coefficient de x^{r+n} égal à zéro. On obtient la relation

$$[2(r+n)(r+n-1) - (r+n) + 1] a_n + a_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \quad (16)$$

ou

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{a_{n-1}}{2(r+n)^2 - 3(r+n) + 1} \\ &= -\frac{a_{n-1}}{[(r+n)-1][2(r+n)-1]}, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Pour chaque racine r_1 et r_2 de l'équation indicelle, on utilise la relation de récurrence (17) pour déterminer un ensemble de coefficients $a_1, a_2, \dots$. Pour $r = r_1 = 1$, l'équation (17) devient

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{(2n+1)n}, \quad n \geq 1.$$

▶ Ainsi,

$$a_1 = -\frac{a_0}{3 \cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{5 \cdot 2} = \frac{a_0}{(3 \cdot 5)(1 \cdot 2)}$$

et

$$a_3 = -\frac{a_2}{7 \cdot 3} = -\frac{a_0}{(3 \cdot 5 \cdot 7)(1 \cdot 2 \cdot 3)}.$$

En général, on a

$$a_n = \frac{(-1)^n}{[3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)]n!} a_0, \quad n \geq 4. \quad (18)$$

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur du membre de droite de l'équation (18) par $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n n!$, on peut réécrire a_n sous la forme

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} a_0, \quad n \geq 1.$$

Ainsi, si on omet le facteur a_0 , une solution à l'équation (8) devient

$$y_1(x) = x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)!} x^n \right], \quad x > 0. \quad (19)$$

Pour déterminer le rayon de convergence de la série de l'équation (19), on utilise le test du rapport :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2|x|}{(2n+2)(2n+3)} = 0$$

pour tout x . Ainsi, la série converge pour tout x .

Si on considère la deuxième racine $r = r_2 = \frac{1}{2}$, on procède de la même manière. À partir de l'équation (17), on a

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{2n \left(n - \frac{1}{2} \right)} = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)}, \quad n \geq 1.$$

Ainsi,

$$a_1 = -\frac{a_0}{1 \cdot 1},$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2 \cdot 3} = \frac{a_0}{(1 \cdot 2)(1 \cdot 3)},$$

$$a_3 = -\frac{a_2}{3 \cdot 5} = -\frac{a_0}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 3 \cdot 5)},$$

et, en général,

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n![1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)]} a_0, \quad n \geq 4. \quad (20)$$

De façon similaire au cas de la racine r_1 , on multiplie le numérateur et le dénominateur du membre de droite de l'équation (20) par $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n n!$. Il en découle que

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} a_0, \quad n \geq 1.$$

Une fois de plus, en omettant le facteur a_0 , on obtient la deuxième solution

$$y_2(x) = x^{1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(2n)!} x^n \right], \quad x > 0. \quad (21)$$

Comme précédemment, on peut montrer que la série dans l'équation (21) converge pour tout x . Puisque les termes dominants des solutions en série y_1 et y_2 sont respectivement x et $x^{1/2}$, il s'ensuit que les solutions sont linéairement indépendantes. Ainsi, la solution générale à l'équation (8) est

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad x > 0.$$

L'exemple précédent montre que si $x = 0$ est un point singulier régulier, alors il existe parfois deux solutions de la forme (7) au voisinage de ce point. De la même manière, s'il y a un point singulier régulier en $x = x_0$, alors il peut y avoir deux solutions de la forme

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (22)$$

qui sont valides au voisinage de $x = x_0$. Cependant, puisqu'une équation d'Euler peut ne pas avoir deux solutions de la forme $y = x^r$, alors une équation plus générale avec un point singulier régulier peut ne pas avoir deux solutions de la forme (7) ou (22). Dans la prochaine section, on montre en particulier que si les racines r_1 et r_2 de l'équation indicelle sont identiques ou qu'elles diffèrent d'un entier, alors la deuxième solution a normalement une structure plus complexe.

Dans tous les cas, cependant, il est possible de trouver au moins une solution de la forme (7) ou (22). Si r_1 et r_2 diffèrent d'un entier, cette solution correspond à la plus grande valeur de r . S'il n'existe qu'une telle solution, alors la deuxième solution implique un terme logarithmique, comme c'est le cas pour l'équation d'Euler quand les racines de l'équation caractéristique sont identiques. Dans de tels cas, on peut recourir à la méthode de réduction d'ordre ou à d'autres méthodes pour déterminer la deuxième solution. Ce sujet sera discuté dans les sections 7.6 et 7.7.

Si les racines de l'équation indicelle sont complexes, alors elles ne peuvent pas être identiques ou différer d'un entier. Donc, il y a toujours deux solutions de la forme (7) ou (22). Bien sûr, ces solutions sont des fonctions de x à valeurs complexes. Cependant, comme pour l'équation d'Euler, il est possible d'obtenir des solutions à valeurs réelles en prenant les parties réelles et imaginaires des solutions complexes.

Finalement, mentionnons un aspect technique. Si P , Q et R sont des polynômes, il est souvent préférable de travailler directement avec l'équation (1) plutôt qu'avec l'équation (3). Ce choix permet d'éviter la nécessité d'exprimer $xQ(x)/P(x)$ et $x^2R(x)/P(x)$ en série de puissances. Par exemple, il est préférable de considérer l'équation

$$x(1+x)y'' + 2y' + xy = 0$$

que de l'écrire sous la forme

$$x^2 y'' + \frac{2x}{1+x} y' + \frac{x^2}{1+x} y = 0,$$

ce qui demande de développer $2x/(1+x)$ et $x^2/(1+x)$ en série de puissances.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 10,

- montrez que l'équation différentielle admet un point singulier régulier en $x = 0$;
- déterminez l'équation indicelle, la relation de récurrence et les racines de l'équation indicelle;
- trouvez la solution en série ($x > 0$) correspondant à la plus grande racine;
- si les racines ne sont pas identiques et qu'elles ne diffèrent pas d'un entier, trouvez aussi la solution en série correspondant à la plus petite racine.

1. $2xy'' + y' + xy = 0$

3. $xy'' + y = 0$

5. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$

7. $xy'' + (1-x)y' - y = 0$

9. $x^2y'' - x(x+3)y' + (x+3)y = 0$

2. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$

4. $xy'' + y' - y = 0$

6. $x^2y'' + xy' + (x-2)y = 0$

8. $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$

10. $x^2y'' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0$

11. L'équation de Legendre d'ordre α est

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0.$$

On a discuté la solution à cette équation près du point ordinaire $x = 0$ dans les problèmes 22 et 23 de la section 7.3. Dans l'exemple 4 de la section 7.4, on a montré que $x = \pm 1$ sont des points singuliers réguliers.

a) Déterminez l'équation indicelle et ses racines pour le point $x = 1$.

b) Trouvez une solution en série de puissances de $x - 1$ pour $x - 1 > 0$.

Suggestion : Écrivez $1 + x = 2 + (x - 1)$ et $x = 1 + (x - 1)$. Autrement dit, effectuez le changement de variable $x - 1 = t$ et déterminez une solution en série de puissances en t .

12. L'équation de Tchebychev est

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

où α est une constante (voir le problème 10 de la section 7.3).

a) Montrez que $x = 1$ et $x = -1$ sont des points singuliers réguliers et trouvez les exposants à chacune de ces irrégularités.

b) Trouvez deux solutions linéairement indépendantes autour de $x = 1$.

13. L'équation différentielle de Laguerre¹³ est

$$xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0.$$

a) Montrez que $x = 0$ est un point singulier régulier.

b) Déterminez l'équation indicelle, ses racines, la relation de récurrence et une solution ($x > 0$).

c) Montrez que si $\lambda = m$, un entier positif, cette solution se réduit à un polynôme. Une fois normalisé correctement, ce polynôme est le polynôme de Laguerre, $L_m(x)$.

14. L'équation de Bessel d'ordre zéro est

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0.$$

a) Montrez que $x = 0$ est un point singulier régulier.

b) Montrez que les racines de l'équation indicelle sont $r_1 = r_2 = 0$.

c) Montrez qu'une solution pour $x > 0$ est

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}.$$

d) Montrez que la série converge pour tout x . La fonction J_0 est la fonction de Bessel de premier type et d'ordre zéro.

15. En vous reportant au problème 14, utilisez une réduction d'ordre pour montrer que la deuxième solution à l'équation de Bessel d'ordre zéro contient un terme logarithmique.

Suggestion : Si $y_2(x) = J_0(x)v(x)$, alors

$$y_2(x) = J_0(x) \int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}.$$

Trouvez le premier terme du développement en série de $1/x[J_0(x)]^2$.

16. L'équation de Bessel d'ordre un est

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0.$$

a) Montrez que $x = 0$ est un point singulier régulier.

b) Montrez que les racines de l'équation indicelle sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$.

c) Montrez qu'une solution pour $x > 0$ est

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)!n!2^{2n}}.$$

13. Edmond Nicolas Laguerre (1834-1886), géomètre et analyste français, a étudié les polynômes qui portent son nom vers 1879.

- d) Montrez que la série converge pour tout x . La fonction J_1 est la fonction de Bessel de premier type et d'ordre un.
- e) Montrez qu'il est impossible de déterminer une deuxième solution de la forme

$$x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad x > 0.$$

7.6 Les solutions en série près d'un point singulier régulier – deuxième partie

Voyons maintenant le problème général servant à déterminer une solution à l'équation

$$L[y] = x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0, \quad (1)$$

où

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (2)$$

et où les deux séries convergent dans l'intervalle $|x| < \rho$ pour $\rho > 0$. Le point $x = 0$ est un point singulier régulier, et l'équation d'Euler correspondante est

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0. \quad (3)$$

On recherche une solution à l'équation (1) pour $x > 0$, et on suppose qu'elle est de la forme

$$y = \phi(r, x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \quad (4)$$

où $a_0 \neq 0$. On a écrit $y = \phi(r, x)$ pour mettre l'accent sur le fait que ϕ dépend de r et de x . Il s'ensuit que

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}, \quad y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1) a_n x^{r+n-2}. \quad (5)$$

Ensuite, en substituant les expressions des équations (2), (4) et (5) dans l'équation (1), on obtient

$$\begin{aligned} & a_0 r(r-1)x^r + a_1(r+1)rx^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \cdots \\ & + (p_0 + p_1x + \cdots + p_nx^n + \cdots) \\ & \times [a_0rx^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \cdots + a_n(r+n)x^{r+n} + \cdots] \\ & + (q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + \cdots) \\ & \times (a_0x^r + a_1x^{r+1} + \cdots + a_nx^{r+n} + \cdots) = 0. \end{aligned}$$

En multipliant les séries infinies ensemble, puis en regroupant les termes, on obtient

$$\begin{aligned} & a_0 F(r)x^r + [a_1 F(r+1) + a_0(p_1r + q_1)]x^{r+1} \\ & + \{a_2 F(r+2) + a_0(p_2r + q_2) + a_1[p_1(r+1) + q_1]\}x^{r+2} \\ & + \cdots + \{a_n F(r+n) + a_0(p_nr + q_n) + a_1[p_{n-1}(r+1) + q_{n-1}] \\ & + \cdots + a_{n-1}[p_1(r+n-1) + q_1]\}x^{r+n} + \cdots = 0 \end{aligned}$$

ou, sous une forme plus compacte,

$$L[\phi](r, x) = a_0 F(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] \right\} x^{r+n} = 0, \quad (6)$$

où

$$F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0. \quad (7)$$

Pour que l'équation (6) soit satisfaite, le coefficient de chaque puissance de x doit être nul.

Puisque $a_0 \neq 0$, le terme impliquant x^r conduit à l'équation $F(r) = 0$. Cette équation est l'équation indicielle. Il faut noter qu'il s'agit exactement de l'équation qu'on obtiendrait en recherchant des solutions $y = x^r$ à l'équation d'Euler (3). On note maintenant les racines de l'équation indicielle r_1 et r_2 avec $r_1 \geq r_2$ si les racines sont réelles. Si les racines sont complexes, on ne peut pas les ordonner. Ce n'est que pour ces valeurs de r qu'on peut s'attendre à trouver des solutions à l'équation (1) de la forme (4). Les racines r_1 et r_2 sont les exposants à la singularité. Ils déterminent la nature qualitative de la solution au voisinage du point singulier.

En posant les coefficients de x^{r+n} dans l'équation (6) égaux à zéro, on obtient la relation de récurrence

$$F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0, \quad n \geq 1. \quad (8)$$

L'équation (8) montre qu'en général, a_n dépend de la valeur de r et de tous les coefficients précédents $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$. Elle montre aussi qu'on peut calculer successivement $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ en fonction de a_0 et les coefficients des séries pour $xp(x)$ et $x^2q(x)$ à la condition que $F(r+1), F(r+2), \dots, F(r+n), \dots$ ne soient pas nuls. Les seules valeurs de r pour lesquelles $F(r) = 0$ sont $r = r_1$ et $r = r_2$. Puisque $r_1 \geq r_2$, il s'ensuit que $r_1 + n$ est différent de r_1 et de r_2 si $n \geq 1$. Par conséquent, $F(r_1 + n) \neq 0$ si $n \geq 1$. Ainsi, on peut toujours déterminer une solution à l'équation (1) sous la forme (4), soit

$$y_1(x) = x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n \right], \quad x > 0. \quad (9)$$

Ici, on a introduit la notation $a_n(r_1)$ pour indiquer que a_n a été déterminé à partir de l'équation (8) avec $r = r_1$. Pour préciser la constante arbitraire de la solution, on a pris $a_0 = 1$.

Si r_2 n'est pas égal à r_1 et que $r_1 - r_2$ n'est pas un entier, alors $r_2 + n$ est différent de r_1 pour toute valeur de $n \geq 1$. Ainsi, $F(r_2 + n) \neq 0$ et on peut aussi obtenir une deuxième solution, soit

$$y_2(x) = x^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n \right], \quad x > 0. \quad (10)$$

Tout comme pour les solutions en série autour de points ordinaires qu'on a discutées à la section 7.3, les séries dans les équations (9) et (10) convergent au moins dans l'intervalle $|x| < \rho$, où les séries pour $xp(x)$ et $x^2q(x)$ convergent. À l'intérieur de leurs intervalles de convergence, les séries de puissances $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1)x^n$ et $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2)x^n$ définissent des fonctions qui sont analytiques en $x = 0$. Ainsi, le comportement singulier, s'il y en a, des solutions y_1 et y_2 est dû aux facteurs x^{r_1} et x^{r_2} qui multiplient ces deux fonctions analytiques. Ensuite, pour obtenir des solutions à valeurs réelles pour $x < 0$, on peut faire la substitution $x = -\xi$ avec $\xi > 0$. Selon notre étude sur l'équation d'Euler, on peut s'attendre à remplacer seulement x^{r_1} dans l'équation (9) et x^{r_2} dans l'équation (10) respectivement par $|x|^{r_1}$ et $|x|^{r_2}$. Finalement, il faut noter que si r_1 et r_2 sont des nombres complexes, alors ils sont nécessairement conjugués et $r_2 \neq r_1 + N$. Ainsi, dans ce cas, on peut toujours trouver deux solutions en série de la forme (4). Cependant, ces solutions sont des fonctions à valeurs complexes. On peut obtenir des solutions à valeurs réelles en prenant les parties réelles et imaginaires des solutions à valeurs complexes. Les cas exceptionnels où $r_1 = r_2$ ou $r_1 - r_2 = N$, où N est un entier positif, nécessitent une étude plus approfondie. Ils seront considérés plus loin dans cette section.

Il convient de réaliser que r_1 et r_2 , les exposants au point singulier, sont faciles à trouver et qu'ils déterminent le comportement qualitatif des solutions. Pour calculer r_1 et r_2 , il suffit de résoudre l'équation indicielle quadratique

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0, \quad (11)$$

dont les coefficients sont donnés par

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xp(x), \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2q(x). \quad (12)$$

Il faut noter que ces limites sont exactement celles qui doivent être évaluées afin de classer la singularité comme point singulier régulier. Ainsi, elles ont généralement été déterminées à un stade préalable de la recherche.

De plus, si $x = 0$ est un point singulier régulier de l'équation

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0, \quad (13)$$

où les fonctions P , Q et R sont des polynômes, alors $xP(x) = xQ(x)/P(x)$ et $x^2q(x) = x^2R(x)/P(x)$. Ainsi,

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{Q(x)}{P(x)}, \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)}. \quad (14)$$

Finalement, les rayons de convergence des séries des équations (9) et (10) sont au moins égaux à la distance de l'origine jusqu'au zéro le plus près de P autre que $x = 0$ lui-même.

Exemple 1

Discutez la nature des solutions à l'équation

$$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$$

au voisinage des points singuliers.

Cette équation est de la forme (13) avec $P(x) = 2x(1+x)$, $Q(x) = 3+x$ et $R(x) = -x$. Les points $x = 0$ et $x = -1$ sont les seuls points singuliers. Le point $x = 0$ est un point singulier régulier, puisque

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{Q(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{3+x}{2x(1+x)} = \frac{3}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{-x}{2x(1+x)} = 0. \end{aligned}$$

De plus, à partir de l'équation (14), $p_0 = \frac{3}{2}$ et $q_0 = 0$. Ainsi, l'équation indicielle est $r(r-1) + \frac{3}{2}r = 0$, et ses racines sont $r_1 = 0$, $r_2 = -\frac{1}{2}$. Puisque ces racines ne sont pas identiques et qu'elles ne diffèrent pas d'un entier, il existe deux solutions linéairement indépendantes de la forme

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)x^n \quad \text{et} \quad y_2(x) = |x|^{-1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(-\frac{1}{2} \right) x^n \right]$$

pour $0 < |x| < \rho$. Une borne inférieure pour le rayon de convergence de chaque série est 1, la distance de $x = 0$ à $x = -1$, l'autre zéro de $P(x)$. Il faut noter que la solution y_1 est bornée lorsque $x \rightarrow 0$ (en fait, elle est analytique ici) et que la deuxième solution y_2 est non bornée lorsque $x \rightarrow 0$.

Le point $x = -1$ est aussi un point singulier régulier, puisque

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) \frac{Q(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(3+x)}{2x(1+x)} = -1, \\ \lim_{x \rightarrow -1} (x+1)^2 \frac{R(x)}{P(x)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(-x)}{2x(1+x)} = 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, $p_0 = -1$ et $q_0 = 0$. Donc, l'équation indicielle est $r(r-1) - r = 0$. Les racines de l'équation indicielle sont $r_1 = 2$ et $r_2 = 0$. Si on considère la plus grande racine, on a une solution de la forme

$$y_1(x) = (x+1)^2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(2)(x+1)^n \right].$$

Les séries convergent au moins pour $|x+1| < 1$, et y_1 est ici une fonction analytique. Puisque les deux racines diffèrent d'un entier positif, il peut exister une deuxième solution de la forme

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)(x+1)^n.$$

On ne peut en dire plus sans une analyse plus poussée.

Il faut noter qu'aucun calcul difficile n'a été nécessaire pour obtenir l'information sur les solutions présentées dans cet exemple. Il a suffi d'évaluer quelques limites, puis de résoudre deux équations quadratiques.

On considère maintenant les cas où les racines de l'équation indicelle sont identiques ou qu'elles ne diffèrent que par un entier positif, par exemple $r_1 - r_2 = N$. Comme on l'a montré plus tôt, il existe toujours une solution de la forme (9) correspondant à la plus grande racine r_1 de l'équation indicelle. Par analogie avec l'équation d'Euler, on peut s'attendre à ce que si $r_1 = r_2$, la deuxième solution contienne un terme logarithmique. Cela peut aussi être vrai si les racines diffèrent d'un entier.

Les racines doubles La méthode permettant de trouver la deuxième solution est essentiellement la même que celle qui a été utilisée pour trouver la deuxième solution à l'équation d'Euler (voir la section 7.4) quand les racines de l'équation indicelle étaient identiques. On considère r comme une variable continue, et on détermine a_n comme fonction de r en résolvant la relation de récurrence (8). En ce qui concerne ce choix de $a_n(r)$ pour $n \geq 1$, l'équation (6) se réduit à

$$L[\phi](r, x) = a_0 F(r) x^r = a_0 (r - r_1)^2 x^r, \quad (15)$$

puisque r_1 est une racine multiple de $F(r)$. En posant $r = r_1$ dans l'équation (15), on trouve $L[\phi](r_1, x) = 0$. Ainsi, comme on l'a déjà vu, $y_1(x)$ donnée par l'équation (9) est une solution à l'équation (1). Toutefois, chose plus importante encore, il découle aussi de l'équation (15), tout comme de l'équation d'Euler, que

$$\begin{aligned} L\left[\frac{\partial \phi}{\partial r}\right](r_1, x) &= a_0 \frac{\partial}{\partial r} [x^r (r - r_1)^2] \Big|_{r=r_1} \\ &= a_0 [(r - r_1)^2 x^r \ln x + 2(r - r_1) x^r] \Big|_{r=r_1} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Par conséquent, une deuxième solution à l'équation (1) est

$$\begin{aligned} y_2(x) &= \frac{\partial \phi(r, x)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ x^r \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r) x^n \right] \right\} \Big|_{r=r_1} \\ &= (x^{r_1} \ln x) \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n \\ &= y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n, \quad x > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

où $a'_n(r_1)$ signifie da_n/dr , qui a été évaluée en $r = r_1$.

Même si l'équation (17) définit explicitement la seconde solution $y_2(x)$, il pourrait être difficile de déterminer $a_n(r)$ en fonction de r à partir de la relation de récurrence (8), puis de dériver l'expression résultante par rapport à r . Une autre méthode consiste simplement à supposer que la solution y a la forme de l'équation (17), autrement dit,

$$y = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n, \quad x > 0, \quad (18)$$

où $y_1(x)$ a déjà été trouvé. On calcule les coefficients b_n , comme d'habitude, en faisant la substitution dans l'équation différentielle, en regroupant les termes et en posant le coefficient de chaque puissance de x égal à zéro. Une troisième possibilité est d'utiliser la méthode de réduction d'ordre pour trouver $y_2(x)$ une fois que l'on connaît $y_1(x)$.

Les racines dont la différence est le nombre entier N Lorsque la différence des racines est entière, l'obtention de la deuxième solution est considérablement plus compliquée et ne sera pas présentée ici. La forme de cette solution est définie dans l'équation (24) (voir le théorème 7.6.1). Les coefficients $c_n(r_2)$ dans l'équation (24) sont donnés par

$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr} [(r - r_2) a_n(r)] \Big|_{r=r_2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (19)$$

où $a_n(r)$ est déterminé à partir de la relation de récurrence (8) avec $a_0 = 1$. De plus, le coefficient a dans l'équation (24) est

$$a = \lim_{r \rightarrow r_2} (r - r_2) a_N(r). \quad (20)$$

Si $a_N(r_2)$ est fini, alors $a = 0$ et il n'y a pas de terme logarithmique en y_2 . On montre comment obtenir les formules (19) et (20) dans l'ouvrage de Coddington (*voir le chapitre 4*).

En pratique, la meilleure manière de déterminer si a est nul dans la deuxième solution est simplement d'essayer de calculer le a_n correspondant à la racine r_2 et de vérifier s'il est possible de déterminer $a_N(r_2)$. Si c'est possible, il n'y a pas d'autre problème. Sinon, on doit utiliser la forme (24) avec $a \neq 0$.

Lorsque $r_1 - r_2 = N$, il existe trois méthodes pour trouver une deuxième solution. La première consiste à calculer a et $c_n(r_2)$ directement en substituant l'expression (24) pour y dans l'équation (1). La deuxième demande de calculer $c_n(r_2)$ et a de l'équation (24) en utilisant les formules (19) et (20). S'il s'agit de la démarche planifiée, alors en calculant la solution correspondant à $r = r_1$, il faut s'assurer d'obtenir la formule générale pour $a_n(r)$ plutôt que seulement $a_n(r_1)$. La troisième méthode consiste à utiliser la méthode de réduction d'ordre.

Le théorème suivant résume les résultats que nous avons obtenus dans cette section.

Théorème 7.6.1

Considérez l'équation différentielle (1),

$$x^2 y'' + x[xp(x)]y' + [x^2 q(x)]y = 0,$$

où $x = 0$ est un point singulier régulier. Alors, $xp(x)$ et $x^2 q(x)$ sont analytiques en $x = 0$ admettant des développements en série de puissances convergentes

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

pour $|x| < \rho$, où $\rho > 0$ est le minimum des rayons de convergence des séries de puissances pour $xp(x)$ et $x^2 q(x)$. Soit r_1 et r_2 les racines de l'équation indicelle

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

avec $r_1 \geq r_2$ si r_1 et r_2 sont réelles. Alors, dans les intervalles $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, il existe une solution de la forme

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right], \quad (21)$$

où les $a_n(r_1)$ sont donnés par la relation de récurrence (8) avec $a_0 = 1$ et $r = r_1$.

Si $r_1 - r_2$ est non nul ou un entier positif, alors dans les intervalles $-\rho < x < 0$ ou $0 < x < \rho$, il existe une deuxième solution linéairement indépendante de la forme

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right]. \quad (22)$$

Les $a_n(r_2)$ sont aussi déterminés par la relation de récurrence (8) avec $a_0 = 1$ et $r = r_2$. Les séries de puissances dans les équations (21) et (22) convergent au moins pour $|x| < \rho$.

Si $r_1 = r_2$, alors la deuxième solution est

$$y_2(x) = y_1(x) \ln |x| + |x|^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(r_1) x^n. \quad (23)$$

Si $r_1 - r_2 = N$, un entier positif, alors

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln |x| + |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2) x^n \right]. \quad (24)$$

On peut déterminer les coefficients $a_n(r_1)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ et la constante a en substituant la forme des solutions en série de y dans l'équation (1). La constante a peut être nulle. Dans ce cas, il n'y a pas de terme logarithmique dans la solution (24). Chacune des séries des équations (23) et (24) converge au moins pour $|x| < \rho$ et définit une fonction qui est analytique au voisinage de $x = 0$.

Dans ces trois cas, les deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x)$ forment un ensemble fondamental de solutions à l'équation (1).

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 12,

- trouvez tous les points singuliers réguliers de l'équation différentielle;
- déterminez l'équation indiciale et les exposants à la singularité pour chaque point singulier régulier.

- $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$
- $x^2 y'' - x(2+x)y' + (2+x^2)y = 0$
- $x(x-1)y'' + 6x^2 y' + 3y = 0$
- $y'' + 4xy' + 6y = 0$
- $x^2 y'' + 3(\sin x)y' - 2y = 0$
- $2x(x+2)y'' + y' - xy = 0$
- $x^2 y'' + \frac{1}{2}(x + \sin x)y' + y = 0$
- $(x+1)^2 y'' + 3(x^2 - 1)y' + 3y = 0$
- $x^2(1-x)y'' - (1+x)y' + 2xy = 0$
- $(x-2)^2(x+2)y'' + 2xy' + 3(x-2)y = 0$
- $(4-x^2)y'' + 2xy' + 3y = 0$
- $x(x+3)^2 y'' - 2(x+3)y' - xy = 0$

■ Dans les problèmes 13 à 17, procédez comme suit.

- Montrez que $x = 0$ est un point singulier régulier de l'équation différentielle.
- Trouvez les exposants au point singulier $x = 0$.
- Trouvez les trois premiers termes non nuls de chacune des solutions linéairement indépendantes autour de $x = 0$.

- $xy'' + y' - y = 0$
- $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$ (voir le problème 1)
- $x(x-1)y'' + 6x^2 y' + 3y = 0$ (voir le problème 3)
- $xy'' + y = 0$
- $x^2 y'' + (\sin x)y' - (\cos x)y = 0$
- a) Montrez que

$$(\ln x)y'' + \frac{1}{2}y' + y = 0$$

a un point singulier régulier en $x = 1$.

- Déterminez les racines de l'équation indiciale en $x = 1$.

c) Trouvez les trois premiers termes non nuls de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{r+n}$ correspondant à la plus grande racine. Considérez $x-1 > 0$.

d) Selon vous, quel sera le rayon de convergence de la série ?

- Dans divers problèmes de physique mathématique, il est nécessaire d'étudier l'équation différentielle

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]y' - \alpha\beta y = 0, \quad (i)$$

où α , β et γ sont des constantes. Cette équation est l'équation **hypergéométrique**.

- Montrez que $x = 0$ est un point singulier régulier et que les racines de l'équation indiciale sont 0 et $1 - \gamma$.

- b) Montrez que $x = 1$ est un point singulier régulier et que les racines de l'équation indiciale sont 0 et $\gamma - \alpha - \beta$.
- c) En supposant que $1 - \gamma$ n'est pas un entier positif, montrez qu'au voisinage de $x = 0$, une solution de (i) est

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2 + \dots$$

Selon vous, quel est le rayon de convergence de cette série ?

- d) En supposant que $1 - \gamma$ n'est pas un entier ou zéro, montrez qu'une deuxième solution pour $0 < x < 1$ est

$$y_2(x) = x^{1-\gamma} \left[1 + \frac{(\alpha - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 1)}{(2 - \gamma)!}x + \frac{(\alpha - \gamma + 1)(\alpha - \gamma + 2)(\beta - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 2)}{(2 - \gamma)(3 - \gamma)2!}x^2 + \dots \right].$$

- e) Montrez que le point à l'infini est un point singulier régulier et que les racines de l'équation indiciale sont α et β (voir le problème 43 de la section 7.4).

20. Considérez l'équation différentielle

$$x^3 y'' + \alpha x y' + \beta y = 0,$$

où α et β sont des constantes réelles et $\alpha \neq 0$.

- a) Montrez que $x = 0$ est un point singulier régulier.
- b) En tentant de déterminer une solution de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$, montrez que l'équation indiciale pour r est linéaire et, par conséquent, qu'il existe une solution formelle de la forme supposée.
- c) Montrez que si $\beta/\alpha = -1, 0, 1, 2, \dots$, alors la solution en série est une série finie et, par conséquent, elle est une solution réelle. Pour d'autres valeurs de β/α , montrez que la solution en série donne une série dont le rayon de convergence est nul et qu'elle ne représente donc pas une solution réelle dans un intervalle.

21. Considérez l'équation différentielle

$$y'' + \frac{\alpha}{x^s} y' + \frac{\beta}{x^t} y = 0, \quad (i)$$

où $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$ sont des nombres réels, et s et t sont des entiers positifs qui, pour le moment, sont arbitraires.

- a) Montrez que si $s > 1$ ou $t > 2$, alors le point $x = 0$ est un point singulier régulier.
- b) Essayez de trouver une solution à l'équation (i) de la forme

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \quad x > 0. \quad (ii)$$

Montrez que si $s = 2$ et $t = 2$, alors une seule valeur possible de r existe pour laquelle il y a une solution à l'équation (i) de la forme (ii).

- c) Montrez que si $s = 1$ et $t = 3$, alors il n'y a pas de solution à l'équation (i) de la forme (ii).
- d) Montrez que les valeurs maximales de s et de t pour lesquelles l'équation indiciale est quadratique en r [et qu'ainsi on peut espérer trouver deux solutions de la forme (ii)] sont $s = 1$ et $t = 2$. Précisément, ces conditions permettent de distinguer une singularité faible ou un point singulier régulier d'un point singulier irrégulier, comme on les a définis dans la section 7.4. Il convient de préciser que même si on peut parfois obtenir une solution en série de la forme (ii) en un point singulier régulier, la série peut ne pas avoir un rayon de convergence positif (voir l'exemple présenté dans le problème 20).

7.7 L'équation de Bessel

Dans la présente section, nous allons considérer trois cas particuliers de l'équation de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad (1)$$

où ν est constant, pour illustrer la théorie discutée dans la section 7.6. Il est facile de montrer que $x = 0$ est un point singulier régulier. On a

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{1}{x} = 1,$$

$$q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{x^2 - \nu^2}{x^2} = -\nu^2.$$

Ainsi, l'équation indiciale est donnée par

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + r - \nu^2 = r^2 - \nu^2 = 0,$$

dont les racines sont $r = \pm \nu$. Nous allons considérer les trois cas $\nu = 0$, $\nu = 1/2$ et $\nu = 1$ dans l'intervalle $x > 0$.

L'équation de Bessel d'ordre zéro Dans ce cas $\nu = 0$. En posant $\nu = 0$ dans l'équation (1), on obtient

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \quad (2)$$

et les racines de l'équation indiciale sont identiques : $r_1 = r_2 = 0$. En faisant la substitution

$$y = \phi(r, x) = a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad (3)$$

dans l'équation (2), on obtient

$$L[\phi](r, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [(r+n)(r+n-1) + (r+n)] x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2}$$

$$= a_0 [r(r-1) + r] x^r + a_1 [(r+1)r + (r+1)] x^{r+1}$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n [(r+n)(r+n-1) + (r+n)] + a_{n-2}\} x^{r+n} = 0. \quad (4)$$

Comme on l'a déjà noté, les racines de l'équation indiciale $F(r) = r(r-1) + r = 0$ sont $r_1 = 0$ et $r_2 = 0$. Ainsi, on obtient le cas des racines doubles. La relation de récurrence est

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)(r+n-1) + (r+n)} = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2}, \quad n \geq 2. \quad (5)$$

Pour déterminer $y_1(x)$, on pose $r = 0$. Ensuite, d'après l'équation (4), il s'ensuit que pour que le coefficient de x^{r+1} soit nul, on doit choisir $a_1 = 0$. Ainsi, à partir de l'équation (5), $a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0$. De plus,

$$a_n(0) = -a_{n-2}(0)/n^2, \quad n = 2, 4, 6, 8, \dots$$

ou, en posant $n = 2m$, on obtient

$$a_{2m}(0) = -a_{2m-2}(0)/(2m)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Ainsi,

$$a_2(0) = -\frac{a_0}{2^2}, \quad a_4(0) = \frac{a_0}{2^4 2^2}, \quad a_6(0) = -\frac{a_0}{2^6 (3 \cdot 2)^2}$$

et, en général,

$$a_{2m}(0) = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

Donc,

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} \right], \quad x > 0. \quad (7)$$

La fonction entre crochets est la fonction de Bessel de premier type et d'ordre zéro et on la note $J_0(x)$. Il s'ensuit, d'après le théorème 7.6.1, que la série converge pour tout x et que J_0 est analytique en $x = 0$. On considère quelques propriétés importantes de J_0 dans les problèmes à la fin de cette section. La figure 7.7.1 présente les graphes de $y = J_0(x)$ et certaines des sommes partielles de la série (7).

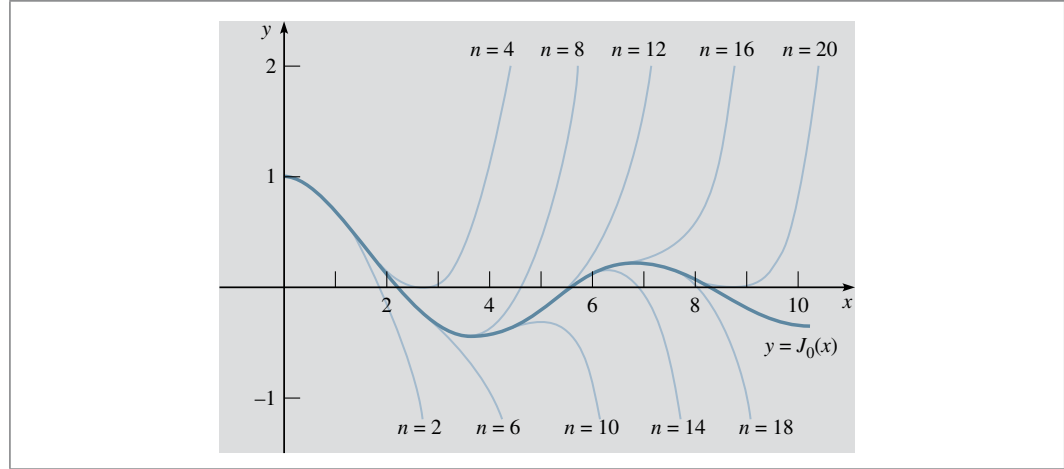


Figure 7.7.1 Approximations polynomiales de $J_0(x)$, la fonction de Bessel de premier type et d'ordre zéro. La valeur de n est le degré du polynôme approché.

Pour déterminer $y_2(x)$, on calcule¹⁴ $a'_n(0)$. D'abord, il faut noter que d'après le coefficient de x^{r+1} dans l'équation (4), $(r+1)^2 a_1(r) = 0$. Alors, $a_1(r) = 0$ pour tout r proche de $r = 0$. Par conséquent, non seulement $a_1(0) = 0$, mais $a'_1(0) = 0$ aussi. Il est facile de déduire, d'après la relation de récurrence (5), que $a'_3(0) = a'_5(0) = \dots = a'_{2m+1}(0) = \dots = 0$. Ainsi, il suffit de calculer $a'_{2m}(0)$, $m = 1, 2, 3, \dots$. À partir de l'équation (5), on a

$$a_{2m}(r) = -a_{2m-2}(r)/(r+2m)^2, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

En résolvant cette relation de récurrence, on obtient

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+2)^2}, \quad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+2)^2(r+4)^2},$$

et

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+2)^2 \dots (r+2m)^2}, \quad m \geq 3. \quad (8)$$

On peut effectuer le calcul de $a'_{2m}(r)$ en notant que si

$$f(x) = (x - \alpha_1)^{\beta_1} (x - \alpha_2)^{\beta_2} (x - \alpha_3)^{\beta_3} \dots (x - \alpha_n)^{\beta_n},$$

et si x n'est pas égal à $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, alors

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x - \alpha_1} + \frac{\beta_2}{x - \alpha_2} + \dots + \frac{\beta_n}{x - \alpha_n}.$$

En appliquant ce résultat à $a_{2m}(r)$ à partir de l'équation (8), on trouve

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2 \left(\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4} + \dots + \frac{1}{r+2m} \right)$$

et, en posant $r = 0$, on obtient

$$a'_{2m}(0) = -2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} \right] a_{2m}(0).$$

14. Dans le problème 10, on étudie une méthode alternative qui consiste à substituer simplement la forme (23) de la section 7.6 dans l'équation (2), puis à déterminer b_n .

En faisant la substitution de $a_{2m}(0)$ à partir de l'équation (6) et en posant

$$H_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}, \quad (9)$$

on obtient finalement

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} (m!)^2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

On trouve la deuxième solution à l'équation de Bessel d'ordre zéro en posant $a_0 = 1$ et en faisant la substitution pour $y_1(x)$ et $a'_{2m}(0) = b_{2m}(0)$ dans l'équation (23) de la section 7.6. On obtient

$$y_2(x) = J_0(x) \ln(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m}, \quad x > 0. \quad (10)$$

Au lieu de y_2 , on considère généralement la deuxième solution comme une combinaison linéaire de J_0 et de y_2 . On l'appelle fonction de Bessel de deuxième type et d'ordre zéro et on la note Y_0 . Selon Copson (voir les références à la fin du chapitre), on définit¹⁵

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} [y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_0(x)]. \quad (11)$$

Ici, γ est constant et on l'appelle constante d'Euler-Mascheroni¹⁶. Elle est définie par l'équation

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \ln n) \cong 0,5772. \quad (12)$$

En substituant l'expression de $y_2(x)$ dans l'équation (11), on obtient

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi} \left[\left(\gamma + \ln \frac{x}{2} \right) J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m} (m!)^2} x^{2m} \right], \quad x > 0. \quad (13)$$

La solution générale à l'équation de Bessel d'ordre zéro pour $x > 0$ est

$$y = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x).$$

Il faut noter que $J_0(x) \rightarrow 1$ lorsque $x \rightarrow 0$ et que $Y_0(x)$ a une singularité logarithmique en $x = 0$. Autrement dit, $Y_0(x)$ se comporte comme $(2/\pi) \ln x$ lorsque $x \rightarrow 0$ par la droite. Ainsi, si on recherche des solutions à l'équation de Bessel d'ordre zéro qui sont finies à l'origine, ce qui est souvent le cas, on doit se débarrasser de Y_0 . Les graphes des fonctions J_0 et Y_0 sont illustrés dans la figure 7.7.2.

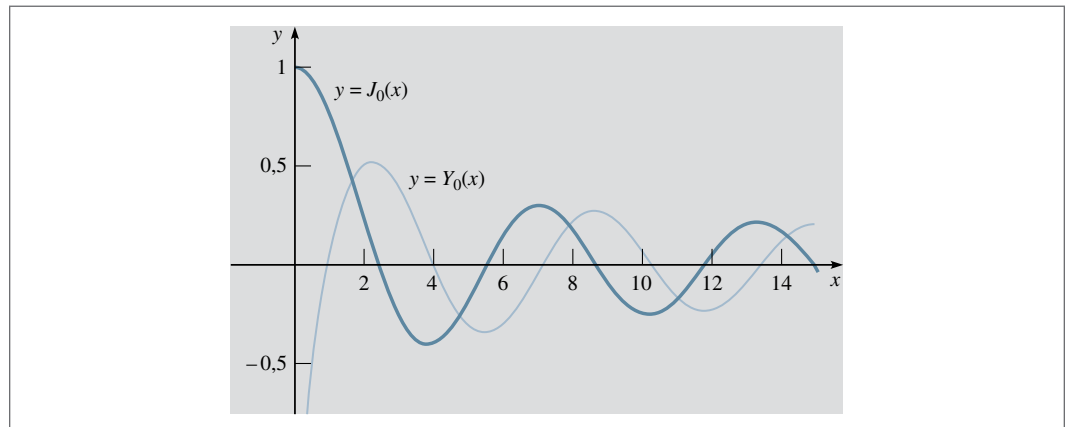


Figure 7.7.2 Fonctions de Bessel d'ordre zéro.

15. Certains auteurs utilisent d'autres définitions pour Y_0 . La fonction de Bessel est aussi appelée fonction de Weber, d'après Heinrich Weber (1842-1913), qui a enseigné dans plusieurs universités allemandes.

16. La constante d'Euler-Mascheroni a été présentée pour la première fois dans un article d'Euler en 1734. L'Italien Lorenzo Mascheroni (1750-1800) était prêtre et professeur à l'Université de Pavia. Il a calculé les 19 premières décimales de la constante γ en 1790.

Il est intéressant de noter, dans la figure 7.7.2, que pour un grand x , $J_0(x)$ et $Y_0(x)$ sont oscillatoires. On peut prévoir un tel comportement à partir de l'équation initiale. En effet, ce qui précède est vrai pour les solutions à l'équation de Bessel d'ordre ν . Si on divise l'équation (1) par x^2 , on obtient

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

Lorsque x est grand, il est raisonnable de supposer que les termes $(1/x)y'$ et $(\nu^2/x^2)y$ sont petits et, par conséquent, qu'on peut les négliger. Dans ce cas, l'équation de Bessel d'ordre ν peut alors être approximée par

$$y'' + y = 0.$$

Les solutions à cette équation sont $\sin x$ et $\cos x$. Ainsi, on peut prévoir que les solutions à l'équation de Bessel lorsque x est grand sont similaires aux combinaisons linéaires de $\sin x$ et de $\cos x$. Cette prédiction est correcte jusqu'à maintenant, puisque les fonctions de Bessel sont oscillatoires; cependant, elle ne l'est que partiellement. Lorsque x est grand, les fonctions J_0 et Y_0 tendent à diminuer. L'équation $y'' + y = 0$ n'est donc plus une approximation appropriée de l'équation de Bessel lorsque x est grand, et une analyse plus approfondie est maintenant nécessaire. En fait, il est possible de montrer que

$$J_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{lorsque} \quad x \rightarrow \infty, \quad (14)$$

et que

$$Y_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{lorsque} \quad x \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Ces approximations asymptotiques, lorsque $x \rightarrow \infty$, sont en réalité très bonnes. Par exemple, la figure 7.7.3 montre que l'approximation asymptotique (14) de $J_0(x)$ est raisonnablement précise pour tout $x \geq 1$. Ainsi, afin d'approximer $J_0(x)$ entre zéro et l'infini, on peut utiliser deux ou trois termes de la série (7) pour $x \leq 1$ et l'approximation asymptotique (14) pour $x \geq 1$.

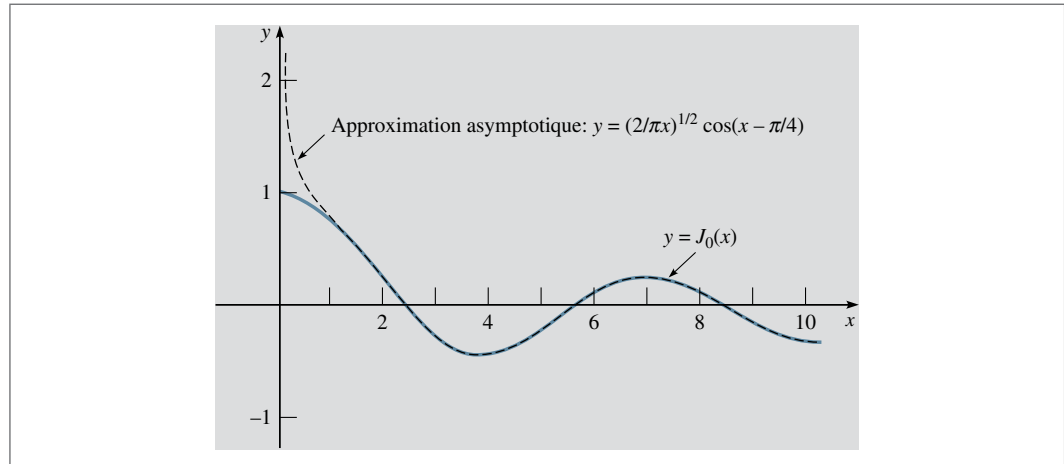


Figure 7.7.3 Approximation asymptotique de $J_0(x)$.

L'équation de Bessel d'ordre un demi Cet exemple illustre le cas où les racines de l'équation indiciale diffèrent par un entier positif, mais où il n'y a pas de terme logarithmique dans la deuxième solution. En posant $\nu = \frac{1}{2}$ dans l'équation (1), on obtient

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0. \quad (16)$$

Si on substitue la série (3) à $y = \phi(r, x)$, on obtient

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(r+n)(r+n-1) + (r+n) - \frac{1}{4} \right] a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} \\ &= \left(r^2 - \frac{1}{4} \right) a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - \frac{1}{4} \right] a_1 x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left[(r+n)^2 - \frac{1}{4} \right] a_n + a_{n-2} \right\} x^{r+n} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Les racines de l'équation indicelle sont $r_1 = 1/2$, $r_2 = -1/2$. Ainsi, les racines diffèrent par un entier. La relation de récurrence est

$$\left[(r+n)^2 - \frac{1}{4} \right] a_n = -a_{n-2}, \quad n \geq 2. \quad (18)$$

Si on considère la plus grande racine $r_1 = 1/2$ correspondante, à partir du coefficient de x^{r+1} de l'équation (17), on trouve que $a_1 = 0$. Ainsi, à partir de l'équation (18), $a_3 = a_5 = \dots = a_{2n+1} = \dots = 0$. De plus, pour $r = 1/2$,

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}, \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

ou, en posant $n = 2m$, on obtient

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

En résolvant cette relation de récurrence, on trouve

$$a_2 = -\frac{a_0}{3!}, \quad a_4 = \frac{a_0}{5!}, \dots$$

et, en général,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Alors, en prenant $a_0 = 1$, on obtient

$$y_1(x) = x^{1/2} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!} \right] = x^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad x > 0. \quad (19)$$

La seconde série de puissances dans l'équation (19) est précisément la série de Taylor pour $\sin x$. Ainsi, une solution à l'équation de Bessel d'ordre un demi est $x^{-1/2} \sin x$. La fonction de Bessel de premier type et d'ordre un demi, $J_{1/2}$, est définie par $(2/\pi)^{1/2} y_1$. Donc,

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \sin x, \quad x > 0. \quad (20)$$

Si on considère la racine $r_2 = -1$ correspondante, il peut être difficile de calculer a_1 puisque $N = r_1 - r_2 = 1$. Toutefois, à partir de l'équation (17) pour $r = -1/2$, les coefficients de x^r et de x^{r+1} sont nuls, peu importe le choix de a_0 et de a_1 . Ainsi, on peut choisir arbitrairement a_0 et a_1 . D'après la relation de récurrence (18), on obtient un ensemble de coefficients d'indices pairs correspondant à a_0 et un ensemble de coefficients d'indices impairs correspondant à a_1 . Donc, on n'a besoin ici d'aucun terme logarithmique pour obtenir une deuxième solution. En exercice, on vous demande de montrer que pour $r = -1/2$,

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}, \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{-1/2} \left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \\ &= a_0 \frac{\cos x}{x^{1/2}} + a_1 \frac{\sin x}{x^{1/2}}, \quad x > 0. \end{aligned} \quad (21)$$

La constante a_1 introduit simplement un multiple de $y_1(x)$. La deuxième solution linéairement indépendante à l'équation de Bessel d'ordre un demi est généralement considérée comme la solution pour laquelle $a_0 = (2/\pi)^{1/2}$ et $a_1 = 0$. Elle est notée $J_{-1/2}$. Alors,

$$J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x} \right)^{1/2} \cos x, \quad x > 0. \quad (22)$$

La solution générale à l'équation (16) est $y = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$.

En comparant les équations (20) et (22) avec les équations (14) et (15), on voit qu'à l'exception d'un déphasage de $\pi/4$, les fonctions $J_{-1/2}$ et $J_{1/2}$ ressemblent respectivement à J_0 et à Y_0 lorsque x est grand. Les graphes de $J_{1/2}$ et de $J_{-1/2}$ sont illustrés dans la figure 7.7.4.

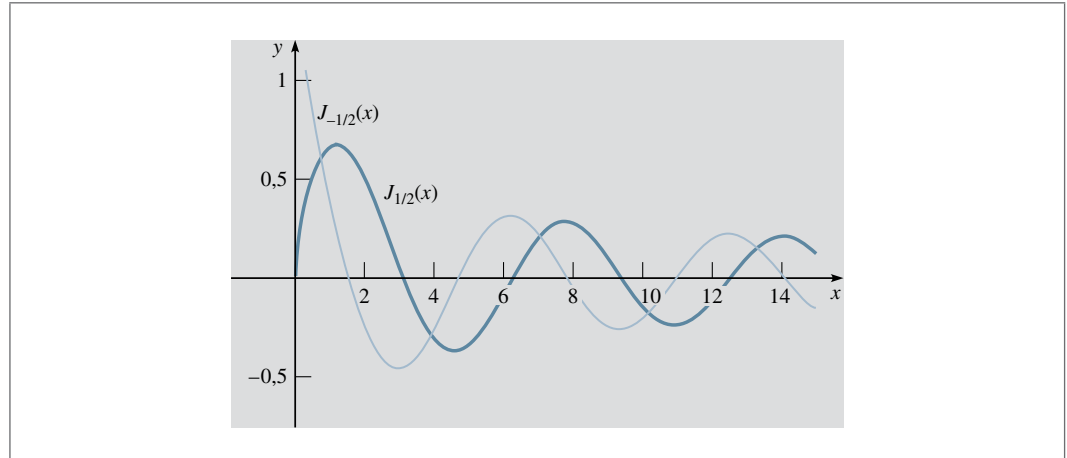


Figure 7.7.4 Fonctions de Bessel $J_{1/2}$ et $J_{-1/2}$.

L'équation de Bessel d'ordre un Cet exemple illustre le cas où les racines de l'équation indicelle diffèrent d'un entier positif et où la deuxième solution inclut un terme logarithmique. En posant $\nu = 1$ dans l'équation (1), on a

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0. \quad (23)$$

Si on substitue la série (3) à $y = \phi(r, x)$ et si on regroupe les termes comme dans les cas précédents, on obtient

$$\begin{aligned} L[\phi](r, x) &= a_0(r^2 - 1)x^r + a_1[(r+1)^2 - 1]x^{r+1} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \{[(r+n)^2 - 1]a_n + a_{n-2}\}x^{r+n} = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Les racines de l'équation indicelle sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -1$. La relation de récurrence est

$$[(r+n)^2 - 1]a_n(r) = -a_{n-2}(r), \quad n \geq 2. \quad (25)$$

Si on considère la plus grande racine $r = 1$, la relation de récurrence devient

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+2)n}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

On trouve aussi, à partir du coefficient de x^{r+1} dans l'équation (24), que $a_1 = 0$. Ainsi, à partir de la relation de récurrence, $a_3 = a_5 = \dots = 0$. Pour les valeurs paires de n , on pose $n = 2m$. Alors,

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+2)(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(m+1)m}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

En résolvant cette relation de récurrence, on obtient

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!m!}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

La fonction de Bessel de premier type et d'ordre un, notée J_1 , est obtenue en choisissant $a_0 = 1/2$. Ainsi,

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m+1)!m!}. \quad (27)$$

La série converge absolument pour tout x , et la fonction J_1 est analytique partout.

En déterminant une deuxième solution à l'équation de Bessel d'ordre un, on illustre la méthode de substitution directe. Le calcul du terme général dans l'équation (28) ci-dessous est plutôt complexe, mais on peut trouver les premiers coefficients assez facilement. Selon le théorème 7.6.1, on suppose que

$$y_2(x) = aJ_1(x) \ln x + x^{-1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right], \quad x > 0. \quad (28)$$

On calcule $y_2'(x), y_2''(x)$. Ensuite, en faisant la substitution dans l'équation (23) et en considérant le fait que J_1 est une solution à l'équation (23), on a

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n]x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0, \quad (29)$$

où $c_0 = 1$. À partir de l'équation (27), on fait la substitution de l'expression de $J_1(x)$ en translatant les indices de sommation dans les deux séries, puis on effectue quelques manipulations algébriques pour obtenir

$$\begin{aligned} -c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 - 1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n \\ = -a \left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!m!} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

À partir de l'équation (30), on note d'abord que $c_1 = 0$ et que $a = -c_0 = -1$. De plus, puisqu'il n'y a que des puissances impaires de x dans le second membre de l'équation, le coefficient de chaque puissance paire de x dans le premier membre doit être nul. Ainsi, puisque $c_1 = 0$, on a $c_3 = c_5 = \dots = 0$. Si on considère les puissances impaires de x correspondantes, on obtient la relation de récurrence [on pose $n = 2m + 1$ dans la série du premier membre de l'équation (30)]

$$[(2m+1)^2 - 1]c_{2m+2} + c_{2m} = \frac{(-1)^m (2m+1)}{2^{2m}(m+1)!m!}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Quand on pose $m = 1$ dans l'équation (31), on obtient

$$(3^2 - 1)c_4 + c_2 = (-1)3/(2^2 \cdot 2!).$$

Il faut noter que si on choisit arbitrairement c_2 , alors cette équation détermine c_4 . De plus, il convient de préciser que dans l'équation du coefficient de x [voir l'équation (30)], c_2 est multiplié par zéro et on a utilisé cette équation pour déterminer a . Il n'est pas surprenant que c_2

soit arbitraire, puisqu'il s'agit du coefficient de x dans l'expression $x^{-1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n \right]$. Par conséquent, c_2 ne fait qu'engendrer un multiple de J_1 , et y_2 est déterminé jusqu'à un multiple additif de J_1 seulement. Selon la pratique habituelle, on choisit $c_2 = 1/2^2$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{-1}{2^4 \cdot 2} \left[\frac{3}{2} + 1 \right] = \frac{-1}{2^4 2!} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \right) + 1 \right] \\ &= \frac{(-1)}{2^4 \cdot 2!} (H_2 + H_1). \end{aligned}$$

Il est possible de montrer que la solution à la relation de récurrence (31) est

$$c_{2m} = \frac{(-1)^{m+1} (H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m! (m-1)!}, \quad m = 1, 2, \dots$$

en considérant que $H_0 = 0$. Ainsi,

$$y_2(x) = -J_1(x) \ln x + \frac{1}{x} \left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m! (m-1)!} x^{2m} \right], \quad x > 0. \quad (32)$$

Le calcul de $y_2(x)$ avec la méthode alternative (voir les équations (19) et (20) de la section 7.6) dans laquelle on détermine le $c_n(r_2)$ est un peu plus facile. En particulier, la dernière démarche donne la formule générale pour c_{2m} sans qu'on ait à résoudre une relation de récurrence de la forme (31) (voir le problème 11). À cet égard, les lecteurs peuvent aussi comparer les calculs de la deuxième solution à l'équation de Bessel d'ordre zéro du problème 10 de la présente section. La deuxième solution à l'équation (23), la fonction de Bessel de premier type et d'ordre un, Y_1 , est généralement considérée comme une combinaison linéaire de J_1 et de y_2 . Selon Copson (voir les références à la fin du chapitre), Y_1 est définie par

$$Y_1(x) = \frac{2}{\pi} [-y_2(x) + (\gamma - \ln 2) J_1(x)], \quad (33)$$

où γ est défini par l'équation (12). La solution générale à l'équation (23) pour $x > 0$ est

$$y = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x).$$

Il faut noter que bien que J_1 soit analytique en $x = 0$, la deuxième solution Y_1 devient non bornée de la même manière que $1/x$ lorsque $x \rightarrow 0$. La figure 7.7.5 illustre les graphes de J_1 et de Y_1 .

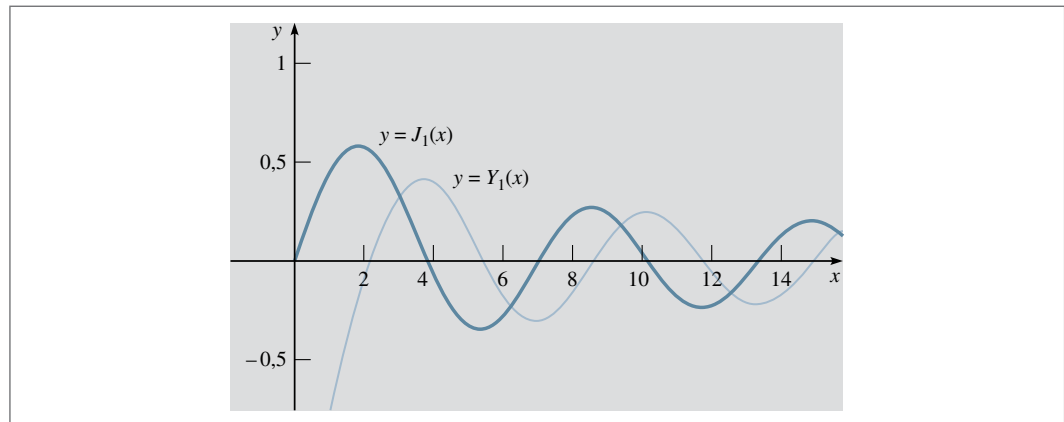


Figure 7.7.5 Fonctions de Bessel J_1 et Y_1 .

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 4, montrez que l'équation différentielle a un point singulier régulier en $x = 0$, puis déterminez deux solutions linéairement indépendantes pour $x > 0$.

1. $x^2 y'' + 2xy' + xy = 0$

2. $x^2 y'' + 3xy' + (1+x)y = 0$

3. $x^2 y'' + xy' + 2xy = 0$

4. $x^2 y'' + 4xy' + (2+x)y = 0$

5. Trouvez deux solutions linéairement indépendantes à l'équation de Bessel d'ordre $\frac{3}{2}$

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{9}{4}\right)y = 0, \quad x > 0.$$

6. Montrez que l'équation de Bessel d'ordre un demi,

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = 0, \quad x > 0,$$

peut se réduire à l'équation

$$v'' + v = 0$$

avec le changement de variable dépendante $y = x^{-1/2}v(x)$. De là, concluez que $y_1(x) = x^{-1/2} \cos x$ et $y_2(x) = x^{-1/2} \sin x$ sont des solutions à l'équation de Bessel d'ordre un demi.

7. Montrez directement que la série pour $J_0(x)$, l'équation (7), converge absolument pour tout x .
 8. Montrez directement que la série pour $J_1(x)$, l'équation (27), converge absolument pour tout x et que $J'_0(x) = -J_1(x)$.
 9. Considérez l'équation de Bessel d'ordre ν ,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad x > 0.$$

Supposez que ν est réel et supérieur à zéro.

- a) Montrez que $x = 0$ est un point singulier régulier et que les racines de l'équation indicelle sont ν et $-\nu$.

- b) Correspondant à la plus grande racine ν , montrez qu'une solution est

$$y_1(x) = x^\nu \left[1 - \frac{1}{1!(1+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1+\nu)(2+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1+\nu) \cdots (m+\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \right].$$

- c) Si 2ν n'est pas un entier, montrez qu'une deuxième solution est

$$y_2(x) = x^{-\nu} \left[1 - \frac{1}{1!(1-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1-\nu)(2-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(1-\nu) \cdots (m-\nu)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \right].$$

Vous devez noter que $y_1(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow 0$, et que $y_2(x)$ est non bornée lorsque $x \rightarrow 0$.

- d) Vérifiez, à l'aide de méthodes directes, que les séries de puissances dans les expressions pour $y_1(x)$ et $y_2(x)$ convergent absolument pour tout x . Vérifiez aussi que y_2 est une solution à la condition que ν ne soit pas un entier.

10. Dans cette section, on a montré qu'une solution à l'équation de Bessel d'ordre zéro

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0$$

est J_0 , où $J_0(x)$ est donnée par l'équation (7) avec $a_0 = 1$. Selon le théorème 7.6.1, une deuxième solution est de la forme ($x > 0$), soit

$$y_2(x) = J_0(x) \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n.$$

- a) Montrez que

$$L[y_2](x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2} + 2x J'_0(x). \quad (i)$$

- b) En substituant la représentation en série à $J_0(x)$ dans l'équation (i), montrez que

$$b_1 x + 2^2 b_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2}) x^n = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n}}{2^{2n} (n!)^2}. \quad (ii)$$

- c) Vous devez noter que seules les puissances paires de x apparaissent dans le second membre de l'équation (ii). Montrez que $b_1 = b_3 = b_5 = \dots = 0$, $b_2 = 1/2^2(1!)^2$ et que

$$(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = -2(-1)^n (2n)/2^{2n}(n!)^2, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

Déduisez que

$$b_4 = -\frac{1}{2^2 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \text{et que} \quad b_6 = \frac{1}{2^2 4^2 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right).$$

La solution générale à la relation de récurrence est $b_{2n} = (-1)^{n+1} H_n / 2^{2n} (n!)^2$. Dans l'expression, en substituant b_n à $y_2(x)$, vous obtenez la solution donnée dans l'équation (10).

11. Trouvez une deuxième solution à l'équation de Bessel d'ordre un en calculant le $c_n(r_2)$ et le a de l'équation (24) à la section 7.7, conformément aux formules (19) et (20) de cette section. Voici certaines directives à suivre. Premièrement, utilisez l'équation (24) de cette section pour montrer que $a_1(-1)$ et $a'_1(-1)$ égalent 0. Ensuite, montrez que $c_1(-1) = 0$ et, d'après la relation de récurrence, que $c_n(-1) = 0$ pour $n = 3, 5, \dots$. Finalement, utilisez l'équation (25) afin de montrer que

$$a_2(r) = -\frac{a_0}{(r+1)(r+3)}, \quad a_4(r) = \frac{a_0}{(r+1)(r+3)(r+5)}$$

et

$$a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+1) \cdots (r+2m-1)(r+3) \cdots (r+2m+1)}, \quad m \geq 3.$$

Puis montrez que

$$c_{2m}(-1) = (-1)^{m+1} (H_m + H_{m-1}) / 2^{2m} m!(m-1)!, \quad m \geq 1.$$

12. En effectuant un changement de variables approprié, on peut parfois transformer une autre équation différentielle en une équation de Bessel. Par exemple, montrez qu'une solution à

$$x^2 y'' + \left(\alpha^2 \beta^2 x^{2\beta} + \frac{1}{4} - \nu^2 \beta^2 \right) y = 0, \quad x > 0$$

est donnée par $y = x^{1/2} f(\alpha x^\beta)$, où $f(\xi)$ est une solution à l'équation de Bessel d'ordre ν .

13. En utilisant le résultat du problème 12, montrez que la solution générale à l'équation d'Airy

$$y'' - xy = 0, \quad x > 0$$

est $y = x^{1/2} \left[c_1 f_1 \left(\frac{2}{3} i x^{3/2} \right) + c_2 f_2 \left(\frac{2}{3} i x^{3/2} \right) \right]$, où $f_1(\xi)$ et $f_2(\xi)$ constituent un ensemble fondamental de solutions à l'équation de Bessel d'ordre un tiers.

14. On peut montrer que J_0 a des zéros à l'infini pour $x > 0$. En particulier, les trois premiers zéros sont d'environ 2,405, 5,520 et 8,653 (voir la figure 7.7.1). Soit $\lambda_j, j = 1, 2, 3, \dots$, la notation des zéros de J_0 . Il s'ensuit que

$$J_0(\lambda_j x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Vérifiez que $y = J_0(\lambda_j x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \lambda_j^2 y = 0, \quad x > 0.$$

Par conséquent, montrez que

$$\int_0^1 x J_0(\lambda_i x) J_0(\lambda_j x) dx = 0 \quad \text{si} \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Cette importante propriété de $J_0(\lambda_j x)$, appelée propriété d'orthogonalité, est utile pour résoudre des problèmes à valeurs bornées.

Suggestion: Écrivez l'équation différentielle pour $J_0(\lambda_i x)$. Multipliez-la par $x J_0(\lambda_j x)$ et soustrayez-la de $x J_0(\lambda_j x)$ multiplié par l'équation différentielle pour $J_0(\lambda_i x)$. Ensuite, intégrez de 0 à 1.

Références

CODDINGTON, E. A. *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1961 ; New York, Dover, 1989.

CODDINGTON, E. A. et R. CARLSON. *Linear Ordinary Differential Equations*, Philadelphie, Pennsylvanie, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

COPSON, E. T. *An Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford, Oxford University, 1935.

- Vous trouverez des preuves des théorèmes 7.3.1 et 7.6.1 dans des manuels de niveau intermédiaire ou avancé. Par exemple, reportez-vous aux chapitres 3 et 4 de l'ouvrage de Coddington, aux chapitres 5 et 6 de l'ouvrage de Coddington et Carlson ou aux chapitres 3 et 4 de l'ouvrage suivant :

RAINVILLE, E. D. *Intermediate Differential Equations*, 2^e édition, New York, Macmillan, 1964.

- Reportez-vous aussi aux ouvrages précédents pour une étude sur le point à l'infini, dont on a parlé dans le problème 43 de la section 7.4. Le comportement des solutions au voisinage d'un point singulier irrégulier est une matière encore plus avancée. Vous trouverez une brève étude sur ce sujet dans le chapitre 5 de l'ouvrage suivant :

CODDINGTON, E. A. et N. LEVINSON. *Theory of Ordinary Differential Equations*, New York, McGraw-Hill, 1955.

- Vous trouverez des études plus approfondies sur l'équation de Bessel, l'équation de Legendre et plusieurs autres équations dans des manuels avancés sur les équations différentielles, les méthodes de mathématiques appliquées et les fonctions particulières. Voici un manuel portant sur les fonctions particulières comme les polynômes de Legendre et les fonctions de Bessel :

HOCHSTADT, H. *Special Functions of Mathematical Physics*, New York, Holt, 1961.

- Voici une excellente compilation de formules, de graphes et de tableaux des fonctions de Bessel, des fonctions de Legendre et d'autres fonctions particulières de physique mathématique :

ABRAMOWITZ, M. et I. A. STEGUN (éditeurs). *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover, 1965 ; publication originale du National Bureau of Standards, Washington, district de Columbia, 1964.

La compilation des formules est également disponible sur le site de la Digital Library of Mathematical Functions à l'adresse suivante : dlmf.nist.gov.

Les équations aux dérivées partielles et les séries de Fourier

Dans plusieurs problèmes de physique, il existe au moins deux variables indépendantes, de sorte que les modèles mathématiques correspondants sont composés d'équations aux dérivées partielles plutôt que d'équations différentielles ordinaires. Dans ce chapitre, nous décrirons une méthode de résolution des équations aux dérivées partielles appelée la séparation des variables. La principale caractéristique de cette méthode consiste à substituer un ensemble d'équations différentielles ordinaires à l'équation aux dérivées partielles. Cet ensemble d'équations doit être résolu selon certaines conditions initiales ou conditions limites.

Dans la première section de ce chapitre, nous présenterons quelques généralités sur les équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires, une classification des équations linéaires du deuxième ordre à deux variables indépendantes ainsi que les conditions limites et initiales. Nous verrons également le concept de la méthode de séparation des variables.

Dans la deuxième section de ce chapitre, nous examinerons certaines propriétés fondamentales des problèmes de valeur limite pour les équations différentielles ordinaires. Nous aborderons par la suite les problèmes de valeurs et de fonctions propres qui découlent de l'application de la méthode de séparation des variables.

Nous exprimerons ensuite la solution recherchée à l'équation aux dérivées partielles sous la forme d'une série infinie constituée des solutions aux équations différentielles ordinaires. Dans plusieurs cas, comme il faudra traiter une série de sinus ou une série de cosinus, nous consacrerons une partie de ce chapitre à l'analyse de telles séries appelées séries de Fourier. Nous illustrerons ensuite la technique de séparation des variables en résolvant divers problèmes issus de la conduction de la chaleur, de la propagation des ondes et de la théorie du potentiel.

8.1 Généralités sur les équations aux dérivées partielles

Les équations aux dérivées partielles linéaires du deuxième ordre Les équations aux dérivées partielles (notées EDP) linéaires du deuxième ordre à deux variables indépendantes ont la forme générale

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (1)$$

où A, B, C, D, E, F et G sont des fonctions des variables indépendantes x et y tout en étant indépendantes de la variable dépendante u et de ses dérivées partielles.

Si l'équation n'est pas de la forme (1), elle est dite non linéaire. L'équation aux dérivées partielles linéaire du deuxième ordre (1) est une équation homogène si le terme $G(x, y)$ est égal à zéro. Sinon, l'équation (1) est non homogène.

Classification des équations aux dérivées partielles linéaires du deuxième ordre Les équations aux dérivées partielles dont la théorie est la plus développée et dont les applications sont les plus importantes et les plus variées sont les équations linéaires du deuxième ordre. On peut classer ces équations en trois catégories : elliptique, parabolique et hyperbolique.

L'équation aux dérivées partielles linéaire du deuxième ordre

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

où A, B, C, D, E et F sont des constantes réelles, est de type

1. **elliptique** si $AC - B^2 > 0$;
2. **parabolique** si $AC - B^2 = 0$;
3. **hyperbolique** si $AC - B^2 < 0$.

Exemple 1

L'équation de Laplace ou du potentiel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

est de type elliptique, car $AC - B^2 = 1 \cdot 1 - 0 = 1 > 0$.

L'équation de la chaleur

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

est parabolique, car $AC - B^2 = \alpha^2 \cdot 0 - 0 = 0$.

L'équation d'onde

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

est de type hyperbolique, car $AC - B^2 = a^2 \cdot (-1) - 0 = -a^2 < 0$.

Note 1 : L'équation de conduction de la chaleur, l'équation d'onde et l'équation de Laplace sont respectivement des prototypes pour chacune de ces catégories. Ainsi, l'étude de ces trois équations nous apporte beaucoup d'information sur les équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre en général.

Les équations aux dérivées partielles de base pour la conduction de la chaleur, la propagation des ondes et la théorie du potentiel, que nous avons introduites dans ce chapitre, sont reliées à trois types distincts de phénomènes physiques : les processus de diffusion, les processus d'oscillation et les processus indépendants du temps ou processus stables. Par conséquent, ces équations revêtent une importance cruciale dans plusieurs branches en physique, mais également en mathématiques.

Note 2 : La classification des équations aux dérivées partielles linéaires du deuxième ordre est directement liée au type de conditions à imposer pour obtenir une solution unique. Si l'équation contient des variables spatiales, des conditions aux frontières ou des conditions limites sont imposées. Si l'équation contient par exemple la dérivée partielle d'ordre deux de la variable dépendante u par rapport à la variable temps t , alors sa solution u et sa dérivée partielle u_t doivent être données au temps initial $t = t_0$. Il s'agit dans ce cas de conditions initiales.

La méthode de séparation des variables – le concept de la méthode La méthode de séparation des variables est la méthode systématique la plus ancienne. Elle a été utilisée par Jean Le Rond D'Alembert, Daniel Bernoulli et Leonhard Euler, vers 1750, dans leurs études sur les ondes et les vibrations. Depuis, cette méthode a considérablement été améliorée et généralisée. De nos jours, elle demeure encore très importante et elle est fréquemment utilisée.

Pour comprendre le fonctionnement de la méthode de séparation des variables, on considère d'abord un problème de base sur la conduction de la chaleur dans un corps solide.

La variation de température dans une tige est régie par une équation aux dérivées partielles dont la construction apparaît dans l'annexe A, à la fin de ce chapitre. Cette équation est appelée **équation de conduction de la chaleur** et est de la forme

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (2)$$

où α^2 est une constante appelée **diffusivité thermique**. Le paramètre α^2 dépend uniquement du matériel composant la tige. De plus, on suppose que la distribution de la température initiale dans la tige est connue. Ainsi,

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3)$$

où f est une fonction donnée. Finalement, on suppose que la température aux extrémités de la tige est nulle :

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4)$$

On cherche à trouver d'autres solutions non nulles à l'équation différentielle et aux conditions limites. Pour trouver les solutions nécessaires, on doit formuler une hypothèse de base concernant la forme des solutions ayant des conséquences imprévues et une portée considérable. L'hypothèse est que $u(x, t)$ est un produit de deux autres fonctions, l'une dépendant uniquement de x et l'autre seulement de t . Ainsi,

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (5)$$

On omet souvent les variables indépendantes x et t pour simplifier le développement ci-après ; notre notation vise à indiquer que les fonctions X et T dépendent respectivement des variables x et t .

À partir de l'équation (5), on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = XT' \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''T.$$

En substituant les dérivées partielles de u dans l'équation différentielle (2), on obtient

$$\alpha^2 X''T = XT', \quad (6)$$

où les dérivées sont maintenant des dérivées ordinaires par rapport aux variables indépendantes x et t . L'équation (6) est équivalente à

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T}, \quad (7)$$

dans laquelle les variables sont séparées. Autrement dit, le premier membre ne dépend que de x et le second dépend seulement de t .

On a ainsi

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{X''}{X} \right) = 0 = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T} \right).$$

À partir de

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T} \right) = 0,$$

on obtient

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T} = \lambda,$$

où λ est une constante de séparation.

On a ainsi,

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda. \quad (8)$$

En d'autres termes, pour que l'équation (7) soit respectée pour $0 < x < L$, $t > 0$, ses deux membres doivent être constants et égaux. Si on garde une variable indépendante (par exemple x) fixe et que l'on fait varier l'autre, un membre (le premier, dans ce cas) de l'équation (7) demeure inchangé tandis que le second varie, ce qui rompt l'égalité.

À partir de l'équation (8), on obtient donc les équations différentielles ordinaires suivantes pour $X(x)$ et $T(t)$:

$$X'' - \lambda X = 0, \quad (9)$$

$$T' - \alpha^2 \lambda T = 0. \quad (10)$$

L'hypothèse (5) a permis de substituer deux équations différentielles ordinaires (9) et (10) à l'équation aux dérivées partielles (2). On peut facilement résoudre chacune de ces équations, quelle que soit la valeur de λ . Le produit des deux solutions aux équations (9) et (10), respectivement, constitue une solution à l'équation aux dérivées partielles (2). Cependant, on s'intéresse uniquement aux solutions à l'équation (2) qui satisfont aussi aux conditions limites (4). En faisant la substitution de $u(x, t)$ à partir de l'équation (5) dans la condition limite en $x = 0$, on obtient

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0. \quad (11)$$

Si l'équation (11) est satisfaite en posant $T(t)$ égal à zéro quel que soit t , alors $u(x, t)$ est nulle quels que soient x et t , et on a déjà rejeté cette possibilité. Par conséquent, l'équation (11) indique qu'on doit avoir

$$X(0) = 0. \quad (12)$$

De même, la condition limite en $x = L$ indique que

$$X(L) = 0. \quad (13)$$

L'équation (9) et les conditions limites (12) et (13) constituent un problème de valeur limite en deux points linéaire homogène. Ce problème de valeur limite est le prototype d'une grande classe de problèmes importants en mathématiques appliquées. Ces problèmes sont connus sous le nom de problèmes de valeur limite de Sturm-Liouville et seront abordés à la section suivante.

Pour poursuivre la démarche, on doit résoudre l'équation (9) selon les conditions limites (12) et (13). Pour certaines valeurs de λ , appelées **valeurs propres**, il existe des solutions non triviales appelées **fonctions propres**. Ces fonctions propres constituent la base des solutions en série d'une variété de problèmes comportant des équations aux dérivées partielles.

Dans la dernière partie du processus de résolution, on utilise les solutions obtenues en résolvant l'équation (9) soumise aux conditions (12) et (13), et celles de l'équation (10) pour exprimer la solution à l'équation (2) soumise aux conditions limites (4) et à la condition initiale (3) sous la forme d'une série infinie. Cette dernière étape sera présentée aux sections 8.6, 8.7 et 8.8.

Exemple 2

On considère l'équation suivante

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (14)$$

En supposant que $u(x, y) = X(x)Y(y)$, trouvez les équations différentielles ordinaires satisfaites par $X(x)$ et $Y(y)$.

$$\text{Par dérivation on a } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''.$$

En substituant les dérivées partielles de u dans l'équation différentielle (14), on obtient

$$yX''Y + XY'' = 0,$$

► qui est équivalente à

$$yX''Y = -XY''. \quad (15)$$

En divisant l'équation (15) par yXY , on obtient

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{yY}, \quad (16)$$

dans laquelle les variables sont séparées. Autrement dit, le premier terme dépend seulement de x et le second dépend seulement de y . Si on désigne par λ la constante de séparation, l'équation (16) devient

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{yY} = \lambda.$$

Finalement, on obtient les équations différentielles ordinaires suivantes pour $X(x)$ et $Y(y)$.

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \text{et} \quad Y'' + \lambda y Y = 0.$$

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 6, déterminez si vous pouvez utiliser la méthode de séparation des variables pour substituer deux équations différentielles ordinaires à l'équation aux dérivées partielles. Le cas échéant, trouvez ces équations.

1. $xu_{xx} + u_t = 0$
2. $tu_{xx} + xu_t = 0$
3. $u_{xx} + u_{xt} + u_t = 0$
4. $[p(x)u_x]_x - r(x)u_{tt} = 0$
5. $u_{xx} + (x + y)u_{yy} = 0$
6. $u_{xx} + u_{yy} + xu = 0$
7. L'équation de la conduction de la chaleur dans un espace bidimensionnel est

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t.$$

En supposant que $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$, trouvez des équations différentielles ordinaires satisfaites par $X(x)$, $Y(y)$ et $T(t)$.

8. On peut exprimer l'équation de la conduction de la chaleur dans un espace bidimensionnel en fonction des coordonnées polaires par

$$\alpha^2[u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta}] = u_t.$$

En supposant que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, trouvez des équations différentielles ordinaires satisfaites par $R(r)$, $\Theta(\theta)$ et $T(t)$.

8.2 Les problèmes de valeur limite en deux points

Jusqu'à maintenant, nous avons abordé des problèmes de valeur initiale constitués d'une équation différentielle jumelée à des conditions initiales spécifiques en un point donné. Un exemple typique que nous avons discuté en détail dans le chapitre 3 est l'équation différentielle

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (1)$$

avec les conditions initiales

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0. \quad (2)$$

Les applications physiques mènent souvent à un autre type de problème où la valeur de la variable dépendante y et de sa dérivée sont spécifiées en deux points différents. On appelle ces conditions des **conditions limites** pour les distinguer des conditions initiales qui précisent les valeurs de y et de y' en un même point. Une équation différentielle et ses conditions limites constituent un **problème de valeurs limites en deux points**. Un exemple typique de ce genre de problème est l'équation différentielle

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad (3)$$

avec les conditions limites

$$y(\alpha) = y_0, \quad y(\beta) = y_1. \quad (4)$$

Les problèmes de valeurs limites admettent habituellement comme variable indépendante une coordonnée spatiale. On utilisera donc x plutôt que t dans les équations (3) et (4). Pour résoudre le problème de valeur limite (3), (4), on doit trouver une fonction $y = \phi(x)$ qui satisfait à l'équation différentielle (3) dans l'intervalle $\alpha < x < \beta$ et qui prend les valeurs spécifiques y_0 et y_1 aux extrémités de l'intervalle. Habituellement, on trouve d'abord la solution générale à l'équation différentielle et on utilise les conditions limites pour déterminer les valeurs des constantes arbitraires.

Les problèmes de valeurs limites apparaissent aussi sous la forme d'équations différentielles non linéaires, mais notre étude sera limitée aux équations linéaires. On classe les problèmes de valeurs limites linéaires en deux catégories : les problèmes homogènes et les problèmes non homogènes. Si la fonction g est nulle quel que soit x et si les valeurs limites y_0 et y_1 sont également nulles, alors le problème (3), (4) est **homogène**. Dans les autres cas, le problème est **non homogène**.

De prime abord, bien que le problème de valeur initiale (1), (2) et le problème de valeur limite (3), (4) semblent similaires, leurs solutions diffèrent considérablement. Avec des conditions simples portant sur les coefficients, les problèmes de valeurs initiales admettront une solution unique. Dans des conditions similaires, les problèmes de valeurs limites peuvent admettre une solution unique, mais ils peuvent aussi n'admettre aucune solution ou, dans certains cas, admettre une infinité de solutions. À cet égard, les problèmes de valeurs limites linéaires sont similaires aux systèmes d'équations linéaires.

Il convient de se rappeler certains résultats (voir la section 5.3) concernant le système

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad (5)$$

où $\mathbf{A}$ est une matrice de dimensions $n \times n$, $\mathbf{b}$ est un vecteur de dimensions $n \times 1$ et $\mathbf{x}$ est le vecteur de dimensions $n \times 1$ recherché. Si $\mathbf{A}$ est non singulière, alors le système (5) admet une solution unique, quel que soit $\mathbf{b}$. Toutefois, si $\mathbf{A}$ est singulière, alors le système (5) n'admet aucune solution à moins que $\mathbf{b}$ ne satisfasse à certaines conditions additionnelles et, dans ce cas, le système admet un nombre infini de solutions. On considère maintenant le système homogène correspondant

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{0}, \quad (6)$$

obtenu à partir du système (5) en posant $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Le système homogène (6) admet toujours au moins la solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{A}$ est non singulière, cette solution est unique, mais si $\mathbf{A}$ est singulière, alors il existe un nombre infini de solutions (non nulles). De toute évidence, il est impossible que le système homogène n'admette aucune solution. On peut résumer ce qui précède comme suit : le système non homogène (5) admet une solution unique si et seulement si le système homogène (6) n'admet que la solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, et le système non homogène (5) n'admet aucune solution ou un nombre infini de solutions si et seulement si le système homogène (6) admet des solutions non nulles.

On considère maintenant certains problèmes de valeurs limites linéaires admettant des comportements similaires.

Exemple 1

Résolvez le problème de valeur limite

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0. \quad (7)$$

La solution générale à l'équation différentielle (7) est

$$y = c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x. \quad (8)$$

À partir de la première condition limite, on a $c_1 = 1$ et, à partir de la seconde condition limite, on obtient $c_1 \cos \sqrt{2}\pi + c_2 \sin \sqrt{2}\pi = 0$, d'où $c_1 = -\cot \sqrt{2}\pi \cong -0,2762$. La solution au problème de valeur limite (7) est donc

$$y = \cos \sqrt{2}x - \cot \sqrt{2}\pi \sin \sqrt{2}x. \quad (9)$$

Cet exemple est un problème de valeur limite non homogène qui admet une solution unique.

Exemple 2

Résolvez le problème de valeur limite

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = a, \quad (10)$$

où a est un nombre spécifique.

La solution générale à cette équation différentielle est

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x \quad (11)$$

et, à partir de la première condition limite, on trouve $c_1 = 1$. La seconde condition limite indique que $-c_1 = a$. Ces deux conditions portant sur c_1 sont incompatibles si $a \neq -1$, et le problème n'admet alors aucune solution. Cependant, si $a = -1$, alors les deux conditions limites sont satisfaites à condition que $c_1 = 1$, peu importe la valeur de c_2 . Dans ce cas, il y a une infinité de solutions de la forme

$$y = \cos x + c_2 \sin x, \quad (12)$$

où c_2 est arbitraire. Cet exemple illustre le fait qu'un problème de valeur limite non homogène peut n'admettre aucune solution ou, selon les circonstances, admettre une infinité de solutions.

Le problème homogène correspondant au problème de valeur limite non homogène (3) est constitué de l'équation différentielle

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (13)$$

et des conditions limites

$$y(\alpha) = 0, \quad y(\beta) = 0. \quad (14)$$

Il faut noter que ce problème admet comme solution $y = 0$ pour tout x , peu importe les coefficients $p(x)$ et $q(x)$. Cette solution est une solution triviale et est rarement utile. On cherche plutôt à savoir si le problème admet d'autres solutions non nulles. On considère maintenant les deux exemples suivants.

Exemple 3

Résolvez le problème de valeur limite

$$y'' + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (15)$$

La solution générale à l'équation différentielle est de nouveau donnée par l'équation (8),

$$y = c_1 \cos \sqrt{2}x + c_2 \sin \sqrt{2}x.$$

À partir de la première condition limite, on a $c_1 = 0$ et à partir de la seconde condition limite, on obtient $c_2 \sin \sqrt{2}\pi = 0$. Puisque $\sin \sqrt{2}\pi \neq 0$, on a aussi $c_2 = 0$. Par conséquent, $y = 0$ pour tout x est la seule solution au problème (15). Cet exemple illustre le fait qu'un problème de valeur limite homogène peut n'admettre que la solution triviale $y = 0$.

Exemple 4

Résolvez le problème de valeur limite

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (16)$$

La solution générale est donnée par l'équation (11),

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

et, à partir de la première condition limite, on a $c_1 = 0$. Puisque $\sin \pi = 0$, la seconde condition limite est également satisfaite, peu importe la valeur de c_2 . Ainsi, la solution au problème (16) est $y = c_2 \sin x$, où c_2 est arbitraire. Cet exemple illustre le fait qu'un problème de valeur limite homogène peut admettre une infinité de solutions.

Les exemples 1 à 4 illustrent (mais ne prouvent pas) le fait qu'il existe une relation étroite entre les problèmes de valeurs limites linéaires homogènes et non homogènes, et les systèmes d'équations linéaires homogènes et non homogènes. Un problème de valeur limite non homogène (voir l'exemple 1) admet une solution unique, et le problème homogène correspondant (voir l'exemple 3) n'admet que la solution triviale. De plus, un problème non homogène (voir l'exemple 2) n'admet aucune solution ou un nombre infini de solutions, et le problème homogène correspondant (voir l'exemple 4) admet des solutions non triviales.

Les problèmes de valeur propre On a introduit l'équation matricielle

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \quad (17)$$

à la section 5.3. L'équation (17) admet la solution $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pour toute valeur de λ mais, pour certaines valeurs de λ appelées valeurs propres, il existe aussi d'autres solutions non nulles appelées vecteurs propres. La situation est similaire pour les problèmes de valeurs limites.

On considère le problème constitué de l'équation différentielle

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (18)$$

avec les conditions limites

$$y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \quad (19)$$

Le problème (18), (19) est le même que les problèmes des exemples 3 et 4 si on pose respectivement $\lambda = 2$ et $\lambda = 1$. Compte tenu des résultats obtenus à partir de ces exemples, on note que lorsque $\lambda = 2$, les équations (18), (19) n'admettent que la solution triviale $y = 0$, alors que si $\lambda = 1$, le problème (18), (19) admet d'autres solutions non triviales. En utilisant la terminologie associée à l'équation (17), les valeurs de λ pour lesquelles on a des solutions non triviales pour le problème (18), (19) sont les **valeurs propres** et les solutions non triviales elles-mêmes, les **fonctions propres**. On tire des exemples 3 et 4 que $\lambda = 1$ est une valeur propre pour le problème (18), (19), mais que ce n'est pas le cas pour $\lambda = 2$. De plus, tous les multiples non nuls de $\sin x$ sont des fonctions propres correspondant à la valeur propre $\lambda = 1$.

On passe maintenant au problème qui consiste à trouver d'autres valeurs propres et fonctions propres pour le problème (18), (19). On doit considérer séparément les cas $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$, puisque les solutions à l'équation (18) diffèrent dans chacun de ces cas. On suppose d'abord que $\lambda > 0$. Pour éliminer les racines, on pose $\lambda = \mu^2$ et on réécrit l'équation (18) sous la forme

$$y'' + \mu^2 y = 0. \quad (20)$$

L'équation caractéristique pour l'équation (20) est $r^2 + \mu^2 = 0$, et ses racines sont $r = \pm i\mu$, d'où la solution générale

$$y = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x. \quad (21)$$

On note que μ est non nulle (puisque $\lambda > 0$) et on suppose également sans perte de généralité que μ est positive. La première condition limite indique que $c_1 = 0$. Alors, la seconde condition limite devient

$$c_2 \sin \mu\pi = 0. \quad (22)$$

Comme on recherche des solutions non triviales, il faut que $c_2 \neq 0$. Par conséquent, $\sin \mu\pi$ doit être nul et il faut choisir μ en conséquence. La fonction sinus étant nulle pour tout multiple entier de π , μ peut prendre n'importe quelle valeur entière positive. Les valeurs correspondantes de λ sont les carrés des entiers positifs, d'où

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 9, \quad \dots, \quad \lambda_n = n^2, \quad \dots \quad (23)$$

sont les valeurs propres pour le problème (18), (19). Les fonctions propres sont données par l'équation (21) avec $c_1 = 0$ et sont simplement des multiples des fonctions $\sin nx$ avec $n = 1, 2, 3, \dots$. On note que la constante c_2 dans l'équation (21) n'est jamais fixée, donc que les fonctions propres sont déterminées uniquement à une constante multiplicative arbitraire près, tout comme le sont les vecteurs propres de la matrice du problème (17). En posant cette constante multiplicative égale à 1, on obtient les fonctions propres

$$y_1(x) = \sin x, \quad y_2(x) = \sin 2x, \quad \dots, \quad y_n(x) = \sin nx, \quad \dots, \quad (24)$$

en se rappelant que les multiples de ces fonctions sont aussi des fonctions propres.

Maintenant, on suppose que $\lambda < 0$. Si on pose $\lambda = -\mu^2$, l'équation (18) devient

$$y'' - \mu^2 y = 0. \quad (25)$$

L'équation caractéristique pour l'équation (25) est $r^2 - \mu^2 = 0$, et ses racines sont $r = \pm\mu$. Donc, on peut écrire la solution générale sous la forme

$$y = c_1 \cosh \mu x + c_2 \sinh \mu x. \quad (26)$$

On a choisi les fonctions hyperboliques $\cosh \mu x$ et $\sinh \mu x$ comme ensemble fondamental de solutions plutôt que les fonctions exponentielles $\exp(\mu x)$ et $\exp(-\mu x)$ pour simplifier l'application des conditions limites. La première condition limite entraîne $c_1 = 0$, et la seconde indique que $c_2 \sinh \mu\pi = 0$. Puisque $\mu \neq 0$, il s'ensuit que $\sinh \mu\pi \neq 0$ et, par conséquent, il faut que $c_2 = 0$. Ainsi, $y = 0$ et il n'y a aucune solution non triviale dans le cas où $\lambda < 0$. En d'autres mots, le problème (18), (19) n'admet aucune valeur propre négative.

Finalement, on considère le cas où $\lambda = 0$. Alors, l'équation (18) devient

$$y'' = 0, \quad (27)$$

et sa solution générale est

$$y = c_1 x + c_2. \quad (28)$$

Les conditions limites (19) ne peuvent être satisfaites qu'en posant $c_1 = 0$ et $c_2 = 0$, et on n'obtient que la solution triviale $y = 0$ dans ce cas également. Autrement dit, $\lambda = 0$ n'est pas une valeur propre.

On résume maintenant les résultats obtenus. On a montré que le problème (18), (19) admet une infinité de valeurs propres positives $\lambda_n = n^2$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$ et que les fonctions propres correspondantes sont proportionnelles à $\sin nx$. De plus, il n'y a aucune autre valeur propre réelle. Il pourrait toutefois y avoir des valeurs propres complexes. Il convient de se rappeler qu'une matrice dont les éléments sont réels peut admettre des valeurs propres complexes. Dans le problème 23, on introduit un argument montrant que le problème (18), (19) n'admet aucune valeur propre complexe.

Dans certaines sections de ce chapitre, on posera souvent le problème

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0, \quad (29)$$

qui diffère du problème (18), (19) seulement par le fait que la seconde condition limite est imposée en un point arbitraire $x = L$ plutôt qu'en $x = \pi$. La démarche de la solution est exactement la même qu'auparavant jusqu'à l'application de la seconde condition limite. Pour le problème (29), cette condition exige que

$$c_2 \sin \mu L = 0 \quad (30)$$

plutôt que l'équation (22), comme dans le cas précédent. Par conséquent, μL doit être un multiple entier de π , d'où $\mu = n\pi/L$, où n est un entier positif. Ainsi, les valeurs propres et les fonctions propres du problème (29) sont

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 / L^2, \quad y_n(x) = \sin(n\pi x / L), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (31)$$

Comme d'habitude, les fonctions propres $y_n(x)$ sont déterminées de façon unique à une constante multiplicative arbitraire près. De la même manière que pour (18), (19), on peut montrer que le problème (29) n'admet aucune valeur propre ou fonction propre autre que celles de l'équation (31).

Les problèmes qui suivent permettent d'explorer dans une certaine mesure l'effet de la modification des conditions limites sur les valeurs propres et les fonctions propres.

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 13, résolvez le problème de valeur limite ou montrez que celui-ci n'admet aucune solution.

1. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 1$
2. $y'' + 2y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = 0$
3. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0$
4. $y'' + y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(L) = 0$
5. $y'' + y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
6. $y'' + 2y = x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
7. $y'' + 4y = \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
8. $y'' + 4y = \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
9. $y'' + 4y = \cos x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
10. $y'' + 3y = \cos x, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
11. $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad y(1) = -1, \quad y(2) = 1$
12. $x^2 y'' + 3xy' + y = x^2, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0$
13. $x^2 y'' + 5xy' + (4 + \pi^2)y = \ln x, \quad y(1) = 0, \quad y(e) = 0$

- Dans les problèmes 14 à 20, trouvez les valeurs propres et les fonctions propres du problème de valeur limite. Supposez que toutes les valeurs propres sont réelles.

14. $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
15. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(\pi) = 0$
16. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0$
17. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(L) = 0$
18. $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(L) = 0$
19. $y'' - \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0$
20. $x^2 y'' - xy' + \lambda y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y(L) = 0, \quad L > 1$
21. L'écoulement laminaire à symétrie axiale d'un fluide incompressible visqueux dans un long tube selon un gradient de pression constant est appelé l'écoulement de Poiseuille¹. La vitesse axiale w est une fonction du rayon r seulement et satisfait au problème de valeur limite

$$w'' + \frac{1}{r} w' = -\frac{G}{\mu}, \quad w(R) = 0, \quad w(r) \text{ est borné pour } 0 < r < R,$$

1. Jean Louis Marie Poiseuille (1797-1869) était un médecin français qui avait aussi une formation en mathématiques et en physique. Il était particulièrement intéressé par le débit sanguin et a publié son premier article sur ce sujet en 1840.

où R est le rayon du tube, G est le gradient de pression et μ est le coefficient de viscosité du fluide.

a) Déterminez le profil des vitesses $w(r)$.

b) En intégrant $w(r)$ sur une section transversale, montrez que le débit total Q est donné par

$$Q = \pi R^4 G / 8\mu.$$

Puisqu'on peut mesurer Q , R et G , ce résultat offre une façon pratique de déterminer la viscosité μ .

c) Supposez qu'on réduit R à $\frac{3}{4}$ de sa valeur initiale. Quelle est la réduction correspondante de Q ? Ce résultat a des implications en ce qui concerne le débit sanguin dans les artères obstruées par la plaque.

22. Considérez une poutre métallique horizontale de longueur L soumise à une charge verticale $f(x)$ par unité de longueur. Le déplacement vertical résultant de la poutre $y(x)$ satisfait à l'équation différentielle

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = f(x),$$

où E est le module d'élasticité de Young et I est le moment d'inertie de la section transversale autour d'un axe qui passe par le centroïde perpendiculaire au plan xy . Supposez que $f(x)/EI$ est une constante k . Pour chacune des conditions limites ci-dessous, déterminez le déplacement $y(x)$ et tracez le graphique de y en fonction de x pour le cas où $L = 1$ et $k = -1$.

a) Simplement appuyée aux deux extrémités: $y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0$.

b) Fixée aux deux extrémités: $y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0$.

c) Fixée en $x = 0$, libre en $x = L$: $y(0) = y'(0) = y''(L) = y'''(L) = 0$.

23. Dans ce problème, on prouve que toutes les valeurs propres du problème de valeur limite (18), (19) sont réelles.

a) Écrivez la solution à l'équation (18) sous la forme $y = k_1 \exp(i\mu x) + k_2 \exp(-i\mu x)$, où $\lambda = \mu^2$, et imposez les conditions limites (19). Montrez qu'il existe des solutions non triviales si et seulement si

$$\exp(i\mu\pi) - \exp(-i\mu\pi) = 0. \quad (i)$$

b) Soit $\mu = \nu + i\sigma$. Utilisez la relation d'Euler $\exp(i\nu\pi) = \cos(\nu\pi) + i \sin(\nu\pi)$ pour déterminer les parties réelles et imaginaires de l'équation (i).

c) En considérant les équations trouvées dans la partie b), montrez que $\sigma = 0$. Ainsi, μ est réelle et λ l'est aussi. Montrez également que $\nu = n$, où n est un entier.

8.3 Les séries de Fourier

Plus loin dans ce chapitre, nous verrons qu'il est possible de résoudre plusieurs problèmes comportant des équations aux dérivées partielles en développant une fonction donnée en une série infinie de termes en sinus ou en cosinus, ou les deux à la fois. Dans cette section et dans les deux suivantes, nous expliquerons en détail comment obtenir ces séries. Ces séries trigonométriques sont appelées les **séries de Fourier**². Elles sont analogues aux séries de Taylor en ce sens que les deux séries permettent d'exprimer des fonctions complexes en termes de fonctions élémentaires.

2. Les séries de Fourier ont été introduites par Joseph Fourier. Il en a fait la première utilisation systématique, quoique non rigoureuse, en 1807 et en 1811, dans des rapports de recherche sur la conduction de la chaleur. Selon Bernhard Riemann, quand Joseph Fourier a présenté son premier rapport à l'Académie de Paris en 1807, déclarant qu'on pouvait développer une fonction arbitraire en une série de la forme (1), le mathématicien Lagrange a été si surpris qu'il a catégoriquement rejeté cette affirmation. Bien que les résultats avancés par Joseph Fourier n'aient pas été aussi généraux qu'il le croyait, ils ont inspiré beaucoup de sujets de recherche importants qui sont encore d'actualité à ce jour. Le lecteur peut consulter Grattan-Guinness ou Carslaw (*Historical Introduction*) pour obtenir un historique détaillé des séries de Fourier (voir les références à la fin du chapitre).

On commence par une série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right). \quad (1)$$

Dans l'ensemble des points où la série (1) converge, celle-ci définit une fonction f dont la valeur en chaque point est la somme de la série pour cette valeur de x . Dans ce cas, la série (1) est la série de Fourier de f . Notre objectif premier est de caractériser les fonctions qui peuvent être développées en série de Fourier et d'établir comment calculer les coefficients dans la série correspondant à une fonction donnée. On note le premier terme dans la série (1) $a_0/2$ plutôt que a_0 pour simplifier l'écriture de la formule permettant d'obtenir les coefficients. Outre le fait que les séries de Fourier sont intimement liées à la méthode de séparation des variables et aux équations aux dérivées partielles, elles réapparaissent notamment dans l'analyse des systèmes mécaniques ou électriques soumis à des forces externes périodiques.

La périodicité des fonctions sinus et cosinus Pour étudier les séries de Fourier, on doit porter attention à certaines propriétés des fonctions trigonométriques $\sin(m\pi x/L)$ et $\cos(m\pi x/L)$, où m est un entier naturel. La première propriété est la périodicité. La fonction f est **périodique** de période $T > 0$ si x et $x + T$ font partie du domaine de f et si

$$f(x + T) = f(x) \quad (2)$$

pour tout x . La figure 8.3.1 illustre un exemple de fonction périodique. Il s'ensuit immédiatement, à partir de la définition, que si T est une période de f , alors $2T$ en est aussi une période ainsi que tout multiple entier de T .

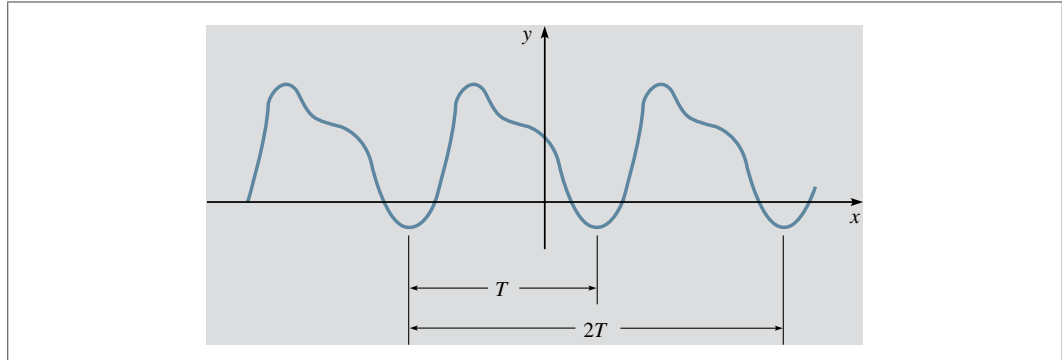


Figure 8.3.1 Fonction périodique de période T .

La plus petite valeur de T telle que l'équation (2) est vérifiée est la **période fondamentale** de f . Il faut noter qu'une constante peut être considérée comme une fonction périodique de période arbitraire mais sans période fondamentale.

Si f et g sont deux fonctions périodiques de même période T , alors leur produit fg et toute combinaison linéaire $c_1f + c_2g$ sont aussi périodiques de période T . Pour prouver cet énoncé, on suppose que $F(x) = c_1f(x) + c_2g(x)$. Alors, quel que soit x , on a

$$F(x + T) = c_1f(x + T) + c_2g(x + T) = c_1f(x) + c_2g(x) = F(x). \quad (3)$$

On peut aussi montrer que la somme d'un nombre (quelconque) fini, ou même qu'une série infinie convergente, de fonctions de période T est aussi périodique de période T .

En particulier, les fonctions $\sin(m\pi x/L)$ et $\cos(m\pi x/L)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, sont périodiques de période fondamentale $T = 2L/m$. Pour le montrer, il faut se rappeler que $\sin x$ et $\cos x$ sont de période fondamentale 2π et $\sin \alpha x$ et $\cos \alpha x$, de période fondamentale $2\pi/\alpha$. Si on pose $\alpha = m\pi/L$, la période T de $\sin(m\pi x/L)$ et de $\cos(m\pi x/L)$ devient $T = 2\pi L/m\pi = 2L/m$.

Il faut également noter que, puisque tout multiple entier positif d'une période est aussi une période, les fonctions $\sin(m\pi x/L)$ et $\cos(m\pi x/L)$ admettent une période commune $2L$.

L'orthogonalité des fonctions sinus et cosinus Une deuxième propriété essentielle des fonctions $\sin(m\pi x/L)$ et $\cos(m\pi x/L)$ est la généralisation de la notion d'orthogonalité de vecteurs (voir la section 5.2). On définit le **produit scalaire** (u, v) de deux fonctions à valeurs réelles u et v dans l'intervalle $\alpha \leq x \leq \beta$ par

$$(u, v) = \int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x) dx. \quad (4)$$

Les fonctions u et v sont **orthogonales** dans $\alpha \leq x \leq \beta$ si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire si

$$\int_{\alpha}^{\beta} u(x)v(x) dx = 0. \quad (5)$$

Un ensemble de fonctions est **mutuellement orthogonal** si toutes les fonctions dans l'ensemble sont orthogonales deux à deux.

Les fonctions $\sin(m\pi x/L)$ et $\cos(m\pi x/L)$, $m = 1, 2, \dots$ constituent un ensemble mutuellement orthogonal dans l'intervalle $-L \leq x \leq L$. En fait, elles satisfont aux relations d'orthogonalité

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n; \end{cases} \quad (6)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0, \quad \text{quels que soient } m \text{ et } n; \quad (7)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ L, & m = n. \end{cases} \quad (8)$$

On peut vérifier ces résultats en intégrant directement. Par exemple, pour l'équation (8), on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \frac{(m-n)\pi x}{L} - \cos \frac{(m+n)\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{L}{\pi} \left\{ \frac{\sin[(m-n)\pi x/L]}{m-n} - \frac{\sin[(m+n)\pi x/L]}{m+n} \right\} \Big|_{-L}^L \\ &= 0, \end{aligned}$$

en supposant que $m+n$ et $m-n$ sont non nuls. Puisque m et n sont positifs, $m+n \neq 0$. Toutefois, si $m-n=0$, alors $m=n$ et il faut évaluer l'intégrale autrement. Dans ce cas,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx &= \int_{-L}^L \left(\sin \frac{m\pi x}{L} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[1 - \cos \frac{2m\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ x - \frac{\sin(2m\pi x/L)}{2m\pi/L} \right\} \Big|_{-L}^L \\ &= L, \end{aligned}$$

ce qui permet d'établir l'équation (8). On peut vérifier les équations (6) et (7) de façon similaire.

Les formules d'Euler-Fourier Supposons maintenant qu'une série de la forme (1) converge et notons sa somme par $f(x)$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right). \quad (9)$$

On peut relier les coefficients a_m et b_m à $f(x)$ selon les conditions d'orthogonalité (6), (7) et (8). On multiplie d'abord l'équation (9) par $\cos(n\pi x/L)$, où n est un entier positif fixe ($n > 0$), et on intègre par rapport à x de $-L$ à L . Si on suppose qu'on peut intégrer terme à terme la série³, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Il convient de se rappeler que n est fixe et que m est un entier positif quelconque. Il s'ensuit, d'après les relations d'orthogonalité (6) et (7), que le seul terme non nul dans le second membre de l'équation (10) est celui pour lequel $m = n$ dans la première somme. Ainsi,

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = L a_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Pour déterminer a_0 , on intègre l'équation (9) de $-L$ à L , et on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= L a_0, \end{aligned} \quad (12)$$

puisque chaque intégrale comportant une fonction trigonométrique est nulle. Par conséquent,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

En écrivant le terme constant de l'équation (9) sous la forme $a_0/2$, on obtient tous les a_n à partir de l'équation (13). Sinon, il faut utiliser une formule distincte pour déterminer a_0 .

On peut obtenir une expression similaire pour déterminer a_n en multipliant l'équation (9) par $\sin(n\pi x/L)$, en intégrant terme à terme de $-L$ à L et en utilisant les relations d'orthogonalité (7) et (8). Ainsi,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (14)$$

Les équations (13) et (14) sont les formules d'Euler-Fourier pour les coefficients de la série de Fourier. Ainsi, si la série (9) converge vers $f(x)$ et si on peut intégrer la série terme à terme, alors les coefficients doivent être ceux qui apparaissent aux équations (13) et (14).

Il faut noter que les formules (13) et (14) déterminent explicitement les coefficients a_n et b_n en fonction de f et que le calcul d'un coefficient particulier ne dépend aucunement des autres. Bien sûr, la difficulté liée à l'évaluation des intégrales dans les équations (13) et (14) dépend de la fonction f dont il est question.

De plus, les formules (13) et (14) dépendent uniquement des valeurs de $f(x)$ dans l'intervalle $-L \leq x \leq L$. Puisque chaque terme de la série de Fourier (9) est périodique de période $2L$, la série converge pour tout x quand elle converge dans $-L \leq x \leq L$, et sa somme est aussi une fonction périodique de période $2L$. Ainsi, $f(x)$ est déterminée pour tout x par ses valeurs dans l'intervalle $-L \leq x \leq L$.

Il est possible de montrer (voir le problème 27) que si g est périodique de période T , alors l'intégrale de g dans tout intervalle de longueur T admet la même valeur. Si on applique ce résultat aux formules d'Euler-Fourier (13) et (14), il s'ensuit qu'on peut remplacer l'intervalle d'intégration $-L \leq x \leq L$, si on le souhaite, par tout autre intervalle de longueur $2L$.

3. Cette hypothèse est peu banale, puisqu'on ne peut intégrer de la sorte toutes les séries convergentes dont les termes sont des fonctions. Dans le cas particulier des séries de Fourier, l'intégration terme à terme est toujours valide.

Exemple 1

Supposez qu'il existe une série de Fourier convergeant vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 2; \end{cases} \quad (15)$$

$$f(x+4) = f(x).$$

Déterminez les coefficients dans cette série de Fourier.

Cette fonction décrit une onde triangulaire (voir la figure 8.3.2) et elle est périodique de période 4. Par conséquent, on a $L = 2$ et la série de Fourier est de la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{2} + b_m \sin \frac{m\pi x}{2} \right), \quad (16)$$

où les coefficients sont obtenus à partir des équations (13) et (14) avec $L = 2$. En remplaçant $f(x)$ par son expression analytique dans l'équation (13) et en posant $m = 0$, on obtient

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x dx = 1 + 1 = 2. \quad (17)$$

Si $m > 0$, l'équation (13) devient

$$a_m = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 (-x) \cos \frac{m\pi x}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^2 x \cos \frac{m\pi x}{2} dx.$$

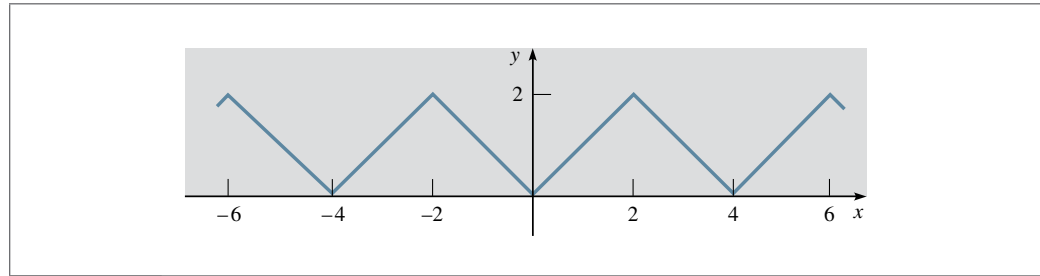


Figure 8.3.2 Onde triangulaire.

On peut évaluer ces intégrales par parties, d'où

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{2} \left[-\frac{2}{m\pi} x \sin \frac{m\pi x}{2} - \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{2} \right]_{-2}^0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{2}{m\pi} x \sin \frac{m\pi x}{2} + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos \frac{m\pi x}{2} \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos m\pi + \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \cos m\pi - \left(\frac{2}{m\pi} \right)^2 \right] \\ &= \frac{4}{(m\pi)^2} (\cos m\pi - 1), \quad m = 1, 2, \dots \\ &= \begin{cases} -8/(m\pi)^2, & m \text{ est impair,} \\ 0, & m \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

Finalement, à partir de l'équation (14), on obtient de manière similaire

$$b_m = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (19)$$

► En substituant les coefficients tirés des équations (17), (18) et (19) dans la série (16), on obtient la série de Fourier f :

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \left(\cos \frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\cos(m\pi x/2)}{m^2} \\ &= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Exemple 2

Soit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -1 \\ 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 3. \end{cases} \quad (21)$$

Supposez que $f(x+6) = f(x)$ (voir la figure 8.3.3). Trouvez les coefficients de la série de Fourier correspondant à f .

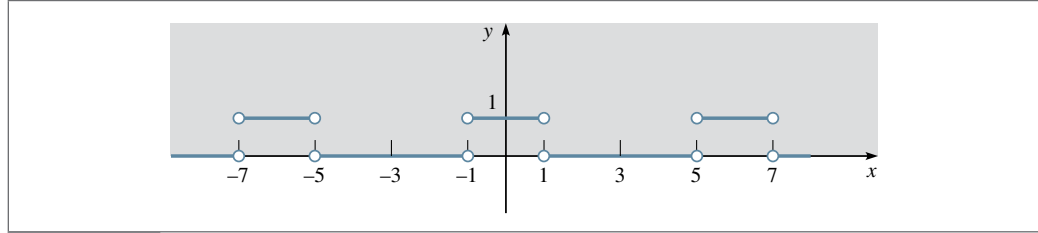


Figure 8.3.3 Graphique de $f(x)$.

Remarquez qu'on n'assigne aucune valeur à $f(x)$ aux points de discontinuité, tels que $x = -1$ et $x = 1$. Cela n'a pas d'incidence sur les valeurs des coefficients de Fourier, car elles résultent de l'évaluation des intégrales, et la valeur de l'intégrande en un point unique ou en un nombre fini de points n'influe pas sur la valeur d'une intégrale. Par conséquent, les coefficients restent les mêmes peu importe la valeur assignée à $f(x)$ en un point de discontinuité.

Puisque f est de période 6, on a $L = 3$. Par conséquent, la série de Fourier correspondant à f est de la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{3} + b_n \sin \frac{n\pi x}{3} \right), \quad (22)$$

où les coefficients a_n et b_n sont obtenus à partir des équations (13) et (14) avec $L = 3$. On a

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 dx = \frac{2}{3}. \quad (23)$$

De même,

$$a_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \cos \frac{n\pi x}{3} dx = \frac{1}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (24)$$

et

$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \sin \frac{n\pi x}{3} dx = -\frac{1}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_{-1}^1 = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

Ainsi, la série de Fourier correspondant à f est

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{n\pi x}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[\cos(\pi x/3) + \frac{\cos(2\pi x/3)}{2} - \frac{\cos(4\pi x/3)}{4} - \frac{\cos(5\pi x/3)}{5} + \dots \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Exemple 3

Considérez de nouveau la fonction de l'exemple 1 et sa série de Fourier (20). Établissez à quelle vitesse la série converge. En particulier, déterminez combien de termes sont nécessaires pour que l'erreur d'approximation ne dépasse pas 0,01, quel que soit x . La m -ième somme partielle de la série,

$$s_m(x) = 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^m \frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}, \quad (27)$$

sert d'approximation pour la fonction f . Les valeurs des coefficients diminuent d'un coefficient de $(2n-1)^{-2}$. Donc, la série converge rapidement. La figure 8.3.4 illustre ce phénomène ; les sommes partielles avec $m=1$ et $m=2$ y sont tracées. Pour faire une analyse plus détaillée de la convergence, on considère l'erreur $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$. La figure 8.3.5 illustre le graphe de $|e_6(x)|$ en fonction de x dans $0 \leq x \leq 2$. Il faut noter que $|e_6(x)|$ est plus élevée en $x=0$ et en $x=2$, là où $f(x)$ n'est pas différentiable. Il est plus difficile d'approximer la fonction par la série au voisinage de ces points. De plus, pour un n spécifique, l'erreur est plus élevée. On peut obtenir des graphes similaires pour d'autres valeurs de m .

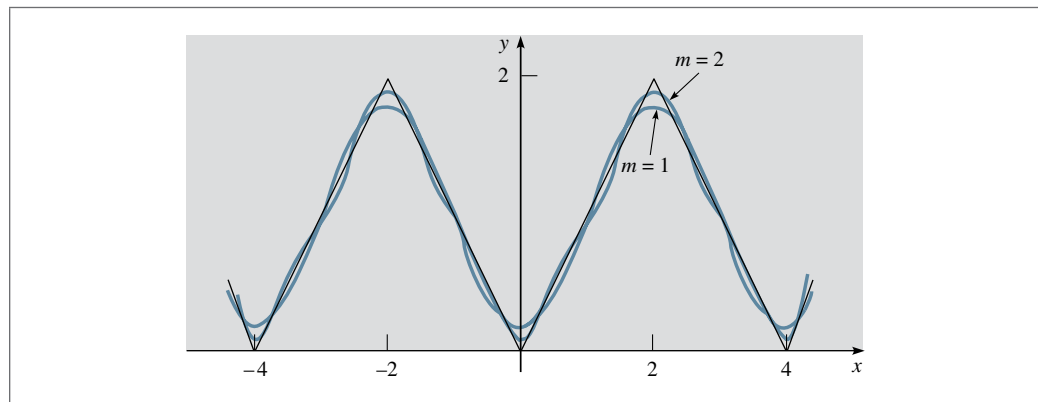


Figure 8.3.4 Sommes partielles de la série de Fourier, équation (20), pour l'onde triangulaire.

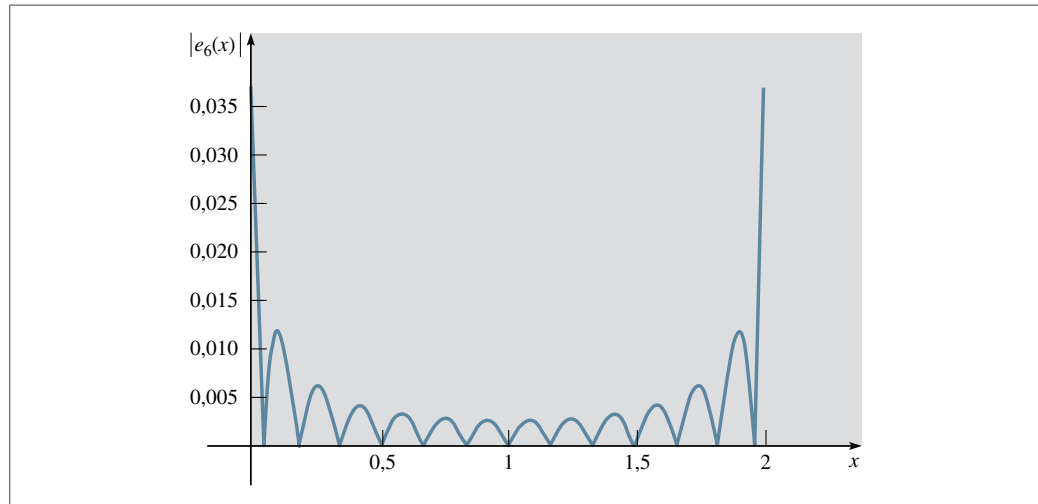
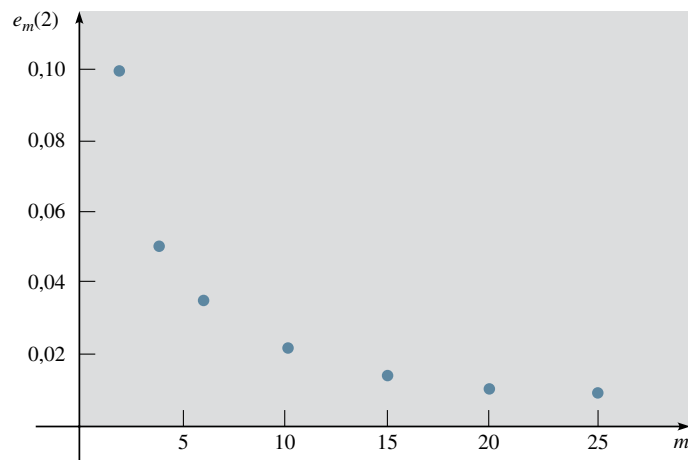


Figure 8.3.5 Graphique de $|e_6(x)|$ en fonction de x pour l'onde triangulaire.

Ayant constaté que l'erreur maximale survient en $x=0$ ou en $x=2$, on peut obtenir une borne uniforme concernant l'erreur quel que soit m si on évalue simplement $|e_m(x)|$ en un des deux points. Par exemple, pour $m=6$, on a $e_6(2) = 0,03370$. Donc, $|e_6(x)| < 0,034$ dans $0 \leq x \leq 2$ et, par conséquent, pour tout x . Le tableau 8.3.1 à la page suivante présente des données du même type pour d'autres valeurs de m . La figure 8.3.6 qui le suit illustre le graphe de ces données. À partir de cette information, on peut évaluer le nombre de termes requis dans la série pour atteindre un certain niveau de précision en ce qui concerne l'approximation. Par exemple, pour s'assurer que $|e_m(x)| \leq 0,01$, on doit choisir $m=21$.

Tableau 8.3.1 Valeurs de l'erreur $e_m(2)$ pour l'onde triangulaire

m	$e_m(2)$
2	0,099 37
4	0,050 40
6	0,033 70
10	0,020 25
15	0,013 50
20	0,010 13
25	0,008 10

Figure 8.3.6 Graphique de $e_m(2)$ en fonction de m pour l'onde triangulaire.

Dans ce manuel, on présente les séries de Fourier surtout comme une méthode de résolution d'équations aux dérivées partielles. Ces séries sont toutefois utilisées à profusion en sciences et en ingénierie, et elles constituent en règle générale des outils précieux pour analyser les phénomènes périodiques. Par exemple, la décomposition d'un signal d'entrée en ses composantes harmoniques revient à établir son développement en série de Fourier. Dans certaines gammes de fréquences, les termes distincts correspondent à différentes couleurs ou à différentes tonalités audibles. L'ampleur du coefficient détermine l'amplitude de chaque composante, ce qu'on appelle l'analyse spectrale du signal.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 8, déterminez si la fonction est périodique. Le cas échéant, trouvez sa période fondamentale.

1. $\sin 5x$

2. $\cos 2\pi x$

3. $\sinh 2x$

4. $\sin \pi x/L$

5. $\tan \pi x$

6. x^2

7. $f(x) = \begin{cases} 0, & 2n-1 \leq x < 2n, \\ 1, & 2n \leq x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

8. $f(x) = \begin{cases} (-1)^n, & 2n-1 \leq x < 2n, \\ 1, & 2n \leq x < 2n+1; \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

9. Si $f(x) = -x$ dans $-L < x < L$ et si $f(x + 2L) = f(x)$, trouvez une expression pour $f(x)$ dans l'intervalle $L < x < 2L$; dans l'intervalle $-3L < x < -2L$.

10. Si $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \end{cases}$ et si $f(x+2) = f(x)$, trouvez une expression pour $f(x)$ dans l'intervalle $1 < x < 2$; dans l'intervalle $8 < x < 9$.

11. Si $f(x) = L - x$ dans $0 < x < 2L$, et si $f(x + 2L) = f(x)$, trouvez une expression pour $f(x)$ dans l'intervalle $-L < x < 0$.

12. Vérifiez les équations (6) et (7) par intégration directe.

■ Dans les problèmes 13 à 18, procédez comme suit.

a) Tracez le graphique de la fonction donnée sur trois périodes.

b) Trouvez la série de Fourier pour la fonction.

13. $f(x) = -x, \quad -L \leq x < L; \quad f(x + 2L) = f(x)$

14. $f(x) = \begin{cases} 1, & -L \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < L; \end{cases} \quad f(x + 2L) = f(x)$

15. $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi; \end{cases} \quad f(x + 2\pi) = f(x)$

16. $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x < 1; \end{cases} \quad f(x + 2) = f(x)$

17. $f(x) = \begin{cases} x+L, & -L \leq x \leq 0, \\ L, & 0 < x < L; \end{cases} \quad f(x + 2L) = f(x)$

18. $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 \leq x < 2; \end{cases} \quad f(x + 4) = f(x)$

■ Dans les problèmes 19 à 24, procédez comme suit.

a) Tracez le graphique de la fonction sur trois périodes.

b) Trouvez la série de Fourier pour la fonction.

c) Tracez le graphique de $s_m(x)$ en fonction de x pour $m = 5, 10$ et 20 .

d) Décrivez le comportement de la série de Fourier en fonction de sa convergence.

Ⓢ 19. $f(x) = \begin{cases} -1, & -2 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 2; \end{cases} \quad f(x + 4) = f(x)$

Ⓢ 20. $f(x) = x, \quad -1 \leq x < 1; \quad f(x + 2) = f(x)$

Ⓢ 21. $f(x) = x^2/2, \quad -2 \leq x \leq 2; \quad f(x + 4) = f(x)$

Ⓢ 22. $f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x < 0, \\ 2-2x, & 0 \leq x < 2; \end{cases} \quad f(x + 4) = f(x)$

Ⓢ 23. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & -2 \leq x < 0, \\ 2x - \frac{1}{2}x^2, & 0 \leq x < 2; \end{cases} \quad f(x + 4) = f(x)$

Ⓢ 24. $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \leq x \leq 0, \\ x^2(3-x), & 0 < x < 3; \end{cases} \quad f(x + 6) = f(x)$

Ⓢ 25. Considérez la fonction f définie au problème 21 et supposez que $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$. Tracez le graphique de $|e_m(x)|$ en fonction de x dans $0 \leq x \leq 2$ pour différentes valeurs de m . Trouvez la plus petite valeur de m pour laquelle $|e_m(x)| \leq 0,01$ pour tout x .

- ▶ 26. Considérez la fonction f définie au problème 24 et supposez que $e_m(x) = f(x) - s_m(x)$. Tracez le graphique de $|e_m(x)|$ en fonction de x dans $0 \leq x \leq 3$ pour différentes valeurs de m . Trouvez la plus petite valeur de m pour laquelle $|e_m(x)| \leq 0,01$ pour tout x .

27. Supposez que g est une fonction périodique intégrable de période T .

- a) Si $0 \leq a \leq T$, montrez que

$$\int_0^T g(x) dx = \int_a^{a+T} g(x) dx.$$

Suggestion : Montrez d'abord que $\int_0^a g(x) dx = \int_a^{a+T} g(x) dx$. Appliquez le changement de variable $s = x - T$ dans la seconde intégrale.

- b) Montrez que pour toute valeur de a , pas nécessairement telle que $0 \leq a \leq T$, on a

$$\int_0^T g(x) dx = \int_a^{a+T} g(x) dx.$$

- c) Montrez que pour toute valeur de a et de b ,

$$\int_0^{a+T} g(x) dx = \int_0^{b+T} g(x) dx.$$

28. Si f est différentiable et périodique de période T , montrez que f' est aussi périodique de période T . Déterminez si

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

est également périodique.

29. Dans ce problème, certaines similarités sont mentionnées entre les vecteurs géométriques tridimensionnels et les séries de Fourier.

- a) Soit $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ un ensemble de vecteurs orthogonaux deux à deux en trois dimensions et soit $\mathbf{u}$ un vecteur tridimensionnel. Montrez que

$$\mathbf{u} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2 + a_3 \mathbf{v}_3, \quad (\text{i})$$

où

$$a_i = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}_i}{\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{ii})$$

Montrez que vous pouvez interpréter a_i comme la projection de $\mathbf{u}$ dans la direction de $\mathbf{v}_i$ divisée par la longueur de $\mathbf{v}_i$.

- b) Définissez le produit scalaire (u, v) par

$$(u, v) = \int_{-L}^L u(x)v(x) dx. \quad (\text{iii})$$

De plus, soit

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \cos(n\pi x/L), & n &= 0, 1, 2, \dots; \\ \psi_n(x) &= \sin(n\pi x/L), & n &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{iv})$$

Montrez que vous pouvez réécrire l'équation (10) sous la forme

$$(f, \phi_n) = \frac{a_0}{2} (\phi_0, \phi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m (\phi_m, \phi_n) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (\psi_m, \phi_n). \quad (\text{v})$$

- c) Utilisez l'équation (v) et l'équation correspondante pour (f, ψ_n) avec les relations d'orthogonalité afin de montrer que

$$a_n = \frac{(f, \phi_n)}{(\phi_0, \phi_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad b_n = \frac{(f, \psi_n)}{(\psi_n, \phi_n)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (\text{vi})$$

Vous devez noter la similitude entre les équations (vi) et (ii). Pour les fonctions, ϕ_n et ψ_n jouent un rôle similaire à celui des vecteurs orthogonaux $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ dans l'espace tridimensionnel.

On peut interpréter les coefficients a_n et b_n comme des projections de la fonction f sur les fonctions de base ϕ_n et ψ_n .

Vous devez aussi noter qu'on peut écrire tout vecteur en trois dimensions comme une combinaison linéaire de trois vecteurs mutuellement orthogonaux. De façon similaire, on peut exprimer toute fonction suffisamment lisse définie dans $-L \leq x \leq L$ comme une combinaison linéaire des fonctions mutuellement orthogonales $\cos(n\pi x/L)$ et $\sin(n\pi x/L)$. Autrement dit, on peut la développer en série de Fourier.

8.4 Le théorème de convergence de Fourier

Dans la section précédente, nous avons montré que si la série de Fourier

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right) \quad (1)$$

converge et que, par conséquent, elle définit une fonction f , alors f est périodique de période $2L$, et les coefficients a_m et b_m sont reliés à $f(x)$ par les formules d'Euler-Fourier

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m = 0, 1, 2, \dots; \quad (2)$$

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Nous utiliserons ici l'approche inverse. Soit f une fonction périodique de période $2L$ et intégrable dans l'intervalle $[-L, L]$. On peut donc calculer un ensemble de coefficients a_m et b_m à partir des équations (2) et (3), et on peut construire formellement une série de la forme (1). Le problème consiste à déterminer si la série converge pour tout x et, le cas échéant, si sa somme est bien $f(x)$. Certains exemples ont montré que la série de Fourier correspondant à une fonction f pouvait ne pas converger vers $f(x)$ et qu'elle pouvait même diverger. Les fonctions pour lesquelles les séries de Fourier ne convergent pas vers la valeur de la fonction en des points isolés sont faciles à construire et quelques exemples seront présentés dans cette section. Les fonctions dont la série de Fourier diverge en un ou plusieurs points sont plus incongrues et elles ne seront pas abordées ici.

Pour assurer la convergence d'une série de Fourier vers la fonction à partir de laquelle on a calculé ses coefficients, il faut imposer des conditions quant à la fonction. Ces conditions devraient être suffisamment larges pour permettre de traiter les situations classiques et assez simples pour qu'on puisse facilement vérifier qu'elles s'appliquent. Au fil des ans, on a considéré plusieurs ensembles de conditions de cette sorte.

Avant d'énoncer le théorème de la convergence pour les séries de Fourier, voici une définition importante : la fonction f est **continue par morceaux** dans l'intervalle $a \leq x \leq b$ s'il est possible de partitionner l'intervalle à l'aide d'un nombre fini de points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de sorte que

1. f soit continue dans chaque sous-intervalle ouvert $x_{i-1} < x < x_i$;
2. f tende vers une limite finie quand on approche des extrémités de chaque sous-intervalle par l'intérieur du sous-intervalle.

La figure 8.4.1 à la page suivante illustre le graphique d'une fonction continue par morceaux.

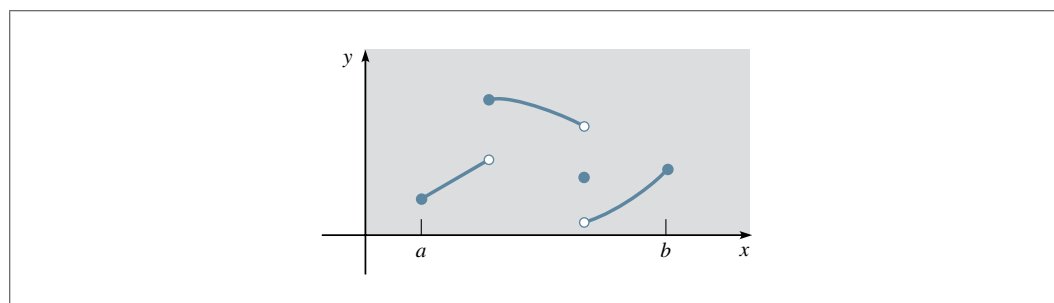


Figure 8.4.1 Fonction continue par morceaux.

La notation $f(c+)$ indique la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow c$ à partir de la droite. De même, $f(c-)$ est la limite de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow c$ à partir de la gauche.

Il faut noter qu'il n'est pas essentiel que la fonction soit définie aux points de partition x_i . Par exemple, dans le théorème suivant, on suppose que f' est continue par morceaux. Toutefois, f' n'existe pas en ces points où f elle-même est discontinue. Aussi, l'intervalle peut ne pas être fermé ; il peut être ouvert ou il peut être ouvert à une extrémité et fermé à l'autre.

Théorème 8.4.1

Supposez que f et f' sont continues par morceaux dans l'intervalle $-L \leq x < L$. De plus, supposez que f est définie à l'extérieur de l'intervalle $-L \leq x < L$ et périodique de période $2L$. Alors, f admet un développement en série de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \frac{m\pi x}{L} + b_m \sin \frac{m\pi x}{L} \right), \quad (4)$$

où les coefficients sont donnés par les équations (2) et (3). La série de Fourier converge vers $f(x)$ en tout point où f est continue et vers $[f(x+) + f(x-)]/2$ en tout point où f est discontinue.

Il faut noter que $[f(x+) + f(x-)]/2$ est la valeur moyenne des limites à droite et à gauche du point x . En tout point où f est continue, $f(x+) = f(x-) = f(x)$, d'où la série de Fourier converge vers $[f(x+) + f(x-)]/2$ en tout point. Lorsqu'on dit qu'une série de Fourier converge vers une fonction f , on sous-entend toujours qu'elle converge en ce sens.

Il faut insister sur le fait que les conditions données dans le théorème sont uniquement suffisantes pour la convergence d'une série de Fourier. Elles ne sont pas nécessaires. De plus, ces conditions suffisantes ne sont pas les plus générales qui ont été établies. Néanmoins, la preuve du théorème est relativement difficile et ne sera pas donnée ici⁴. Pour saisir la portée du théorème, il est intéressant de considérer certaines classes de fonctions qui ne satisfont pas aux conditions stipulées. Les fonctions qui ne sont pas visées par le théorème sont principalement celles qui admettent au moins une discontinuité lorsqu'elles tendent vers l'infini dans l'intervalle $[-L, L]$, par exemple $1/x^2$ lorsque $x \rightarrow 0$ et $\ln |x - L|$ lorsque $x \rightarrow L$. Les fonctions admettant un nombre infini de discontinuités de type saut dans l'intervalle, qui sont rarement rencontrées, ne seront pas abordées dans le présent manuel.

Il faut noter qu'une série de Fourier peut converger sans que sa somme ne soit différentiable ni même continue, et ce, en dépit du fait que chaque terme dans la série (4) est continu et différentiable une infinité de fois. L'exemple suivant illustre ce phénomène, tout comme l'exemple 2 de la section 8.3.

4. Le lecteur trouvera des preuves de la convergence des séries de Fourier dans certains ouvrages d'analyse, par exemple dans le chapitre 7 de celui de Kaplan ou dans le chapitre 6 de celui de Buck (voir les références à la fin du chapitre).

Exemple 1 Soit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -L < x < 0, \\ L, & 0 < x < L. \end{cases} \quad (5)$$

De plus, on suppose que f est définie à l'extérieur de cet intervalle de sorte que $f(x + 2L) = f(x)$ pour tout x . Toutefois, pour l'instant, on ne définit pas f aux points $x = 0, \pm L$, mais les valeurs qu'elle prend en ces points doivent être finies. Trouvez la série de Fourier pour cette fonction et déterminez à quel moment elle converge.

La fonction $y = f(x)$ admet le graphe illustré à la figure 8.4.2, qui est prolongé à l'infini dans les deux directions. Elle décrit une onde carrée. On peut diviser l'intervalle $[-L, L]$ en deux sous-intervalles ouverts $(-L, 0)$ et $(0, L)$. Dans $(0, L)$, $f(x) = L$ et $f'(x) = 0$. De toute évidence, f et f' sont continues, et leurs limites existent lorsque $x \rightarrow 0$ par la droite et lorsque $x \rightarrow L$ par la gauche. La situation concernant $(-L, 0)$ est similaire. Par conséquent, f et f' sont continues par morceaux dans $[-L, L]$ et f satisfait aux conditions du théorème 8.4.1. Si on calcule les coefficients a_m et b_m à partir des équations (2) et (3), la convergence de la série de Fourier vers $f(x)$ est assurée en tout point où f est continue. Il faut noter que les valeurs de a_m et de b_m sont les mêmes, peu importe la définition de f en ses points de discontinuité. Cela est dû au fait que la valeur d'une intégrale ne subit pas l'influence des discontinuités de type saut de l'intégrande en un nombre fini de points. À partir de l'équation (2),

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \int_0^L dx = L; \\ a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \frac{L}{m\pi} (\sin m\pi - 0) = 0, \quad m \neq 0. \end{aligned}$$

De même, à partir de l'équation (3),

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \int_0^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx \\ &= \frac{L}{m\pi} (1 - \cos m\pi) = \begin{cases} 0, & m \text{ est pair;} \\ 2L/m\pi, & m \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{L} + \dots \right) \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin(m\pi x/L)}{m} \\ &= \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x/L}{2n-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

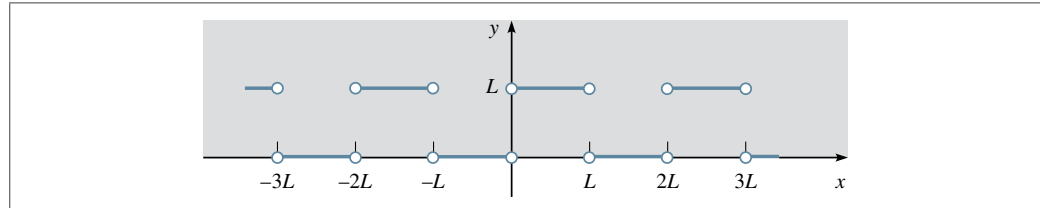


Figure 8.4.2 Onde carrée.

Aux points $x = 0, \pm nL$, donc là où la fonction f n'est pas continue, tous les termes de la série après le premier sont nuls et la somme vaut $L/2$. Il s'agit de la valeur moyenne des limites de droite et de gauche, comme on l'a mentionné précédemment. En conséquence, on définira f en ces points comme prenant la valeur $L/2$. Si on choisit de la définir autrement, la série convergera tout de même vers la valeur $L/2$ en ces points, car aucun des résultats précédents n'est modifié. Elle ne converge donc pas vers la fonction en ces points, sauf si f est définie comme prenant cette valeur en ces points. Cette

- situation montre que la série de Fourier correspondant à une fonction peut ne pas converger vers elle en ses points de discontinuité, sauf si la fonction est définie de façon appropriée en ces points.

Le comportement des sommes partielles

$$s_n(x) = \frac{L}{2} + \frac{2L}{\pi} \left(\sin \frac{\pi x}{L} + \dots + \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{L} \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

de la série de Fourier (6) en ce qui concerne la convergence vers $f(x)$ est illustré à la figure 8.4.3 : on a posé L égale à 1 et on a tracé le graphique de $s_8(x)$. La figure indique qu'aux points où f est continue, les sommes partielles tendent vers $f(x)$ lorsque n augmente. Cependant, au voisinage des points de discontinuité $x = 0$ et $x = L$, les sommes partielles ne convergent pas uniformément vers la valeur moyenne. Elles tendent plutôt à dépasser la fonction à chaque fin du saut, comme si elles ne pouvaient pas s'adapter au tournant abrupt requis en ce point. Ce comportement est typique des séries de Fourier aux points de discontinuité ; on appelle ce comportement le phénomène de Gibbs⁵.

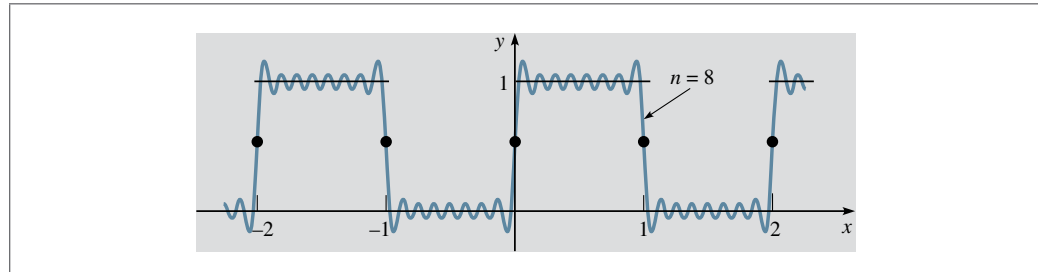


Figure 8.4.3 Somme partielle $s_8(x)$ de la série de Fourier, équation (6), pour l'onde carrée.

Il est plus facile d'interpréter le graphe quand on considère l'erreur $e_n(x) = f(x) - s_n(x)$. La figure 8.4.4 illustre le graphe de $|e_n(x)|$ en fonction de x pour $n = 8$ et pour $L = 1$. Le supremum de $|e_8(x)|$ est de 0,5 et il est quasiment atteint lorsque $x \rightarrow 0$ et lorsque $x \rightarrow 1$. À mesure que n augmente, l'erreur diminue à l'intérieur de l'intervalle [où $f(x)$ est continue], mais le supremum ne diminue pas même si n augmente. Ainsi, on ne peut pas réduire de manière uniforme l'erreur dans l'intervalle en augmentant le nombre de termes.

Les figures 8.4.3 et 8.4.4 montrent aussi que la série obtenue ici converge plus lentement que celle de l'exemple 1 de la section 8.3. Dans le cas présent, cela découle du fait que les coefficients de la série (6) sont divisés par $1/(2n - 1)$.

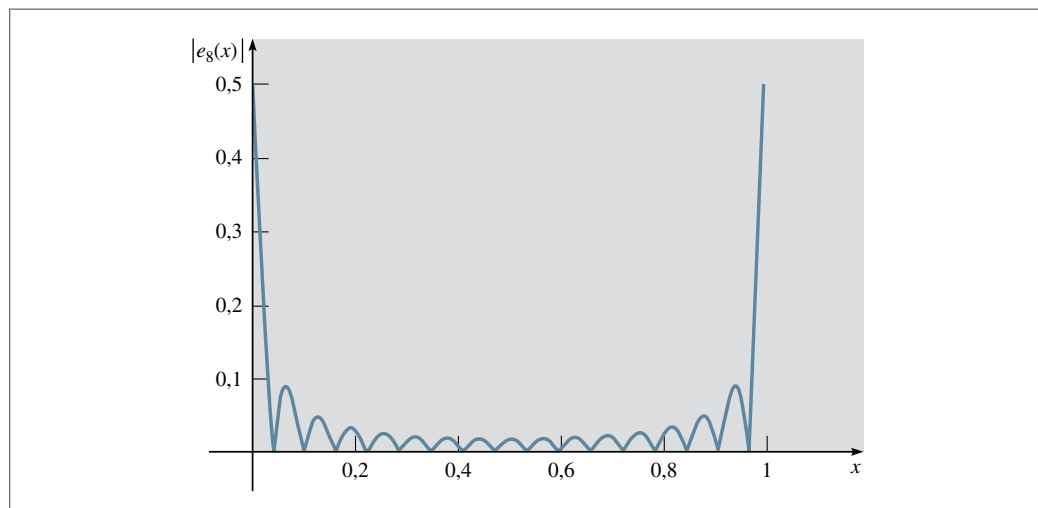


Figure 8.4.4 Graphique de l'erreur $|e_8(x)|$ en fonction de x pour l'onde carrée.

5. Le phénomène de Gibbs nous vient de Josiah Willard Gibbs (1839-1903), connu surtout pour ses travaux concernant l'analyse vectorielle et la mécanique statistique. Il a été professeur de physique mathématique à l'Université Yale et l'un des premiers scientifiques américains à se tailler une réputation internationale.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 6, supposez que la fonction est prolongée périodiquement à l'extérieur de l'intervalle original.

a) Trouvez la série de Fourier pour le prolongement de la fonction.

b) Tracez le graphique de la fonction vers laquelle la série converge sur trois périodes.

$$1. f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0, \\ x, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} L+x, & -L \leq x < 0, \\ L-x, & 0 \leq x < L \end{cases}$$

$$4. f(x) = 1 - x^2, \quad -1 \leq x < 1$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < -\pi/2, \\ 1, & -\pi/2 \leq x < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

■ Dans les problèmes 7 à 12, supposez que la fonction est prolongée périodiquement à l'extérieur de l'intervalle original.

a) Trouvez la série de Fourier pour la fonction.

b) Soit $e_n(x) = f(x) - s_n(x)$. Trouvez le supremum de $|e_n(x)|$ pour $n = 10, 20$ et 40 .

c) Si c'est possible, trouvez la plus petite valeur de n pour laquelle $|e_n(x)| \leq 0,01$ pour tout x .

$$\textcircled{u} 7. f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi; \end{cases} \quad f(x+2\pi) = f(x) \quad (\text{voir la section 8.3, problème 15})$$

$$\textcircled{u} 8. f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x < 1; \end{cases} \quad f(x+2) = f(x) \quad (\text{voir la section 8.3, problème 16})$$

$$\textcircled{u} 9. f(x) = x, \quad -1 \leq x < 1; \quad f(x+2) = f(x) \quad (\text{voir la section 8.3, problème 20})$$

$$\textcircled{u} 10. f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x < 0, \\ 2-2x, & 0 \leq x < 2; \end{cases} \quad f(x+4) = f(x) \quad (\text{voir la section 8.3, problème 22})$$

$$\textcircled{u} 11. f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ x^2, & 0 \leq x < 1; \end{cases} \quad f(x+2) = f(x) \quad (\text{voir le problème 6})$$

$$\textcircled{u} 12. f(x) = x - x^3, \quad -1 \leq x < 1; \quad f(x+2) = f(x)$$

■ **Les fonctions de contrainte périodiques** Dans ce chapitre, nous illustrons l'utilisation des séries de Fourier afin de résoudre des problèmes de valeur limite pour certaines équations aux dérivées partielles. Cependant, les séries de Fourier sont utilisées dans beaucoup d'autres situations où des phénomènes périodiques sont mis en cause. Les problèmes 13 à 16 montrent comment on peut les utiliser pour résoudre des problèmes de valeur initiale ayant des fonctions de contrainte périodiques.

13. Trouvez la solution au problème de valeur initiale

$$y'' + \omega^2 y = \sin nt, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où n est un entier positif et $\omega^2 \neq n^2$. Que se produit-il si $\omega^2 = n^2$?

14. Trouvez la solution formelle au problème de valeur initiale

$$y'' + \omega^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où $\omega > 0$ n'est pas un entier positif. Comment la solution sera-t-elle modifiée si $\omega = m$, où m est un entier positif?

15. Trouvez la solution formelle au problème de valeur initiale

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

où f est périodique de période 2π et

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi; \\ 0, & t = 0, \pi, 2\pi; \\ -1, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$$

Reportez-vous au problème 1.

16. Trouvez la solution formelle au problème de valeur initiale

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

où f est périodique de période 2 et

$$f(t) = \begin{cases} 1-t, & 0 \leq t < 1; \\ -1+t, & 1 \leq t < 2. \end{cases}$$

Reportez-vous au problème 8.

17. En supposant que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (i)$$

montrez formellement que

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Cette relation entre la fonction f et ses coefficients de Fourier est appelée l'identité de Parseval⁶. L'identité de Parseval est fondamentale dans la théorie des séries de Fourier.

Suggestion : Multipliez l'équation (i) par $f(x)$, intégrez de $-L$ à L et utilisez les formules d'Euler-Fourier.

18. Ce problème permet d'obtenir une preuve de la convergence d'une série de Fourier dans des conditions plus restrictives que celles du théorème 8.4.1. *Suggestion :* Intégrez par parties.

a) Si f et f' sont continues par morceaux dans $-L \leq x < L$ et si f est périodique de période $2L$, montrez que na_n et nb_n sont bornés lorsque $n \rightarrow \infty$.

b) Si f est continue dans $-L \leq x < L$ et périodique de période $2L$, et si f' et f'' sont continues par morceaux dans $-L \leq x \leq L$, montrez que $n^2 a_n$ et $n^2 b_n$ sont bornés lorsque $n \rightarrow \infty$. Utilisez ce qui précède afin de montrer que la série de Fourier pour f converge en tout point dans $-L \leq x \leq L$. Pourquoi f doit-elle être continue dans l'intervalle fermé ?

- **L'accélération de la convergence** Dans le problème suivant, on montre comment il est parfois possible d'améliorer la vitesse de convergence d'une série de Fourier ou d'une autre série infinie.

19. Supposez qu'on cherche à calculer les valeurs de la fonction g , où

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{1+(2n-1)^2} \sin(2n-1)\pi x. \quad (i)$$

On peut montrer que cette série converge, mais lentement. Cependant, vous devez noter que si n est grand, les termes dans la série (i) sont approximativement égaux à $[\sin(2n-1)\pi x]/(2n-1)$ et que les derniers termes sont similaires à ceux de l'équation (6) de cette section.

- a) Montrez que

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\sin(2n-1)\pi x]/(2n-1) = (\pi/2) \left[f(x) - \frac{1}{2} \right], \quad (ii)$$

où f est l'onde carrée de l'exemple avec $L = 1$.

6. Marc-Antoine Parseval (1755-1836) était un mathématicien français relativement peu connu en l'honneur duquel on a nommé un résultat important. Il avait présenté un aperçu de ce résultat en 1799, mais ce n'était pas dans le contexte des séries de Fourier.

b) Soustrayez l'équation (ii) de l'équation (i) et montrez que

$$g(x) = \frac{\pi}{2} \left[f(x) - \frac{1}{2} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)[1+(2n-1)^2]} \quad (\text{iii})$$

La série (iii) converge beaucoup plus rapidement que la série (i), et elle est plus efficace pour calculer les valeurs de $g(x)$.

8.5 Les fonctions paires et impaires

Avant d'examiner d'autres exemples des séries de Fourier, il est utile de classer en deux catégories les fonctions pour lesquelles on peut simplifier les formules d'Euler-Fourier. Les fonctions paires et les fonctions impaires sont caractérisées de manière géométrique à cause de leur symétrie par rapport respectivement à l'axe des y et à l'origine (voir la figure 8.5.1).

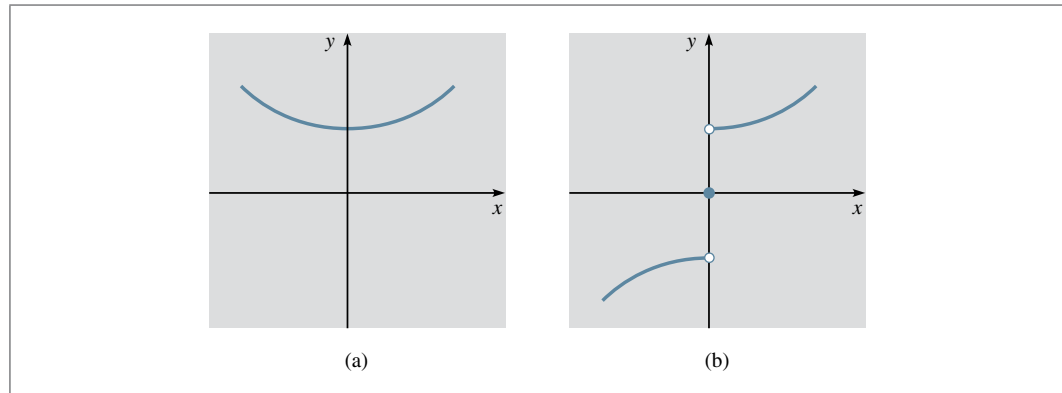


Figure 8.5.1 a) Fonction paire. b) Fonction impaire.

La fonction f est une **fonction paire** si son domaine contient le point $-x$ quand il contient le point x et si

$$f(-x) = f(x) \quad (1)$$

pour tout x dans le domaine de f . De même, f est une **fonction impaire** si son domaine contient $-x$ quand il contient x et si

$$f(-x) = -f(x) \quad (2)$$

pour tout x dans le domaine de f . Par exemple, les fonctions 1 , x^2 , $\cos nx$, $|x|$ et x^{2n} sont paires, et les fonctions x , x^3 , $\sin nx$ et $x^{2n} + 1$ sont impaires. Il faut noter que, selon l'équation (2), $f(0)$ doit être nulle si f est une fonction impaire dont le domaine contient l'origine. La plupart des fonctions ne sont ni paires ni impaires, par exemple e^x . Seule la fonction identiquement nulle est à la fois paire et impaire.

Les propriétés élémentaires des fonctions paires et impaires incluent :

1. La somme (la différence) et le produit (le quotient) de deux fonctions paires sont pairs.
2. La somme (la différence) de deux fonctions impaires est impaire ; le produit (le quotient) de deux fonctions impaires est pair.
3. La somme (la différence) d'une fonction impaire et d'une fonction paire n'est ni paire ni impaire ; le produit (le quotient) de deux fonctions de ce type est impair⁷.

7. Ces énoncés doivent être modifiés si l'une ou l'autre des fonctions est identiquement nulle.

Les preuves de tous ces énoncés sont simples et découlent directement des définitions.

Par exemple, si f_1 et f_2 sont impaires et si $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$, alors

$$\begin{aligned} g(-x) &= f_1(-x) + f_2(-x) = -f_1(x) - f_2(x) \\ &= -[f_1(x) + f_2(x)] = -g(x). \end{aligned} \quad (3)$$

Donc, $f_1 + f_2$ est aussi une fonction impaire. De même, si $h(x) = f_1(x)f_2(x)$, alors

$$h(-x) = f_1(-x)f_2(-x) = [-f_1(x)][-f_2(x)] = f_1(x)f_2(x) = h(x), \quad (4)$$

de sorte que le produit $f_1 f_2$ est pair.

Les deux propriétés suivantes sont également importantes en ce qui concerne les fonctions paires et impaires :

4. Si f est une fonction paire, alors

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx. \quad (5)$$

5. Si f est une fonction impaire, alors

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0. \quad (6)$$

Ces propriétés sont claires quand on pense à l'intégrale comme étant l'aire sous une courbe et découlent directement des définitions. Par exemple, si f est paire, alors

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^0 f(x) dx + \int_0^L f(x) dx.$$

On pose $x = -s$ dans le premier terme du second membre. En utilisant l'équation (1), on obtient

$$\int_{-L}^L f(x) dx = - \int_L^0 f(s) ds + \int_0^L f(x) dx = 2 \int_0^L f(x) dx.$$

La preuve de la propriété correspondante pour les fonctions impaires est similaire.

Les fonctions paires et impaires sont particulièrement importantes dans les applications des séries de Fourier, puisque leurs séries de Fourier admettent des formes particulières et reviennent fréquemment en physique.

Les séries de cosinus On suppose que f et f' sont continues par morceaux dans $-L \leq x < L$ et que f est une fonction périodique paire de période $2L$. À partir des propriétés 1 et 3, on sait que $f(x) \cos(n\pi x/L)$ est paire et que $f(x) \sin(n\pi x/L)$ est impaire. Selon les équations (5) et (6), les coefficients de Fourier de f sont alors

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ b_n &= 0, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Ainsi, la série de Fourier de f est

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Autrement dit, la série de Fourier de toute fonction paire comporte uniquement des fonctions trigonométriques paires $\cos(n\pi x/L)$ et un terme constant. On appelle ces séries des **séries de Fourier cosinus**. Il faut noter que dans ce cas, seuls les coefficients a_n , pour $n = 0, 1, 2, \dots$, doivent être évalués à partir de la formule intégrale (7). Chaque b_n , pour $n = 1, 2, \dots$, est effectivement nul pour toute fonction paire.

Les séries de sinus On suppose que f et f' sont continues par morceaux dans $-L \leq x < L$ et que f est une fonction périodique impaire de période $2L$. Selon les propriétés 2 et 3, on constate que $f(x) \cos(n\pi x/L)$ est impaire et que $f(x) \sin(n\pi x/L)$ est paire. Dans ce cas, les coefficients de Fourier de f sont

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (8)$$

et la série de Fourier pour f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Ainsi, la série de Fourier pour une fonction impaire est constituée uniquement des fonctions trigonométriques impaires $\sin(n\pi x/L)$. On appelle une série de ce type une **série de Fourier sinus**. Il faut noter que seule la moitié des coefficients doit être évaluée puisque a_n , pour $n = 0, 1, 2, \dots$, est nul pour toute fonction impaire.

Exemple 1

Soit $f(x) = x$, $-L < x < L$ et $f(-L) = f(L) = 0$. On suppose aussi que f est définie ailleurs, de sorte qu'elle est périodique avec une période $2L$ (voir la figure 8.5.2). Cette fonction décrit une onde en dents de scie. Trouvez la série de Fourier correspondant à cette fonction.

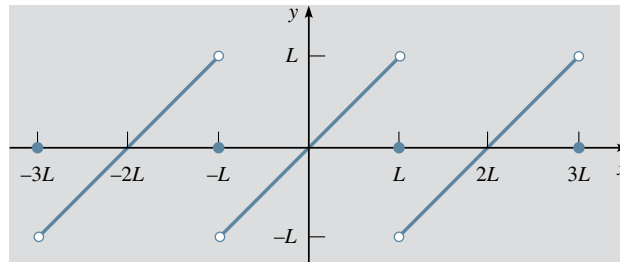


Figure 8.5.2 Onde en dents de scie.

Puisque f est une fonction impaire, ses coefficients de Fourier sont, selon l'équation (8),

$$\begin{aligned} a_n &= 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L x \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{2}{L} \left(\frac{L}{n\pi} \right)^2 \left\{ \sin \frac{n\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} \right\} \Bigg|_0^L \\ &= \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ainsi, la série de Fourier correspondant à f , l'onde en dents de scie, est

$$f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (9)$$

Il faut noter que la fonction périodique f est discontinue aux points $\pm L, \pm 3L, \dots$ (voir la figure 8.5.2). En ces points, la série (9) converge vers la valeur moyenne des limites de gauche et droite, c'est-à-dire

vers zéro. La figure 8.5.3 illustre la somme partielle de la série (9) pour $n = 9$. Le phénomène de Gibbs (mentionné dans la section 8.4) survient de nouveau au voisinage des points de discontinuité.

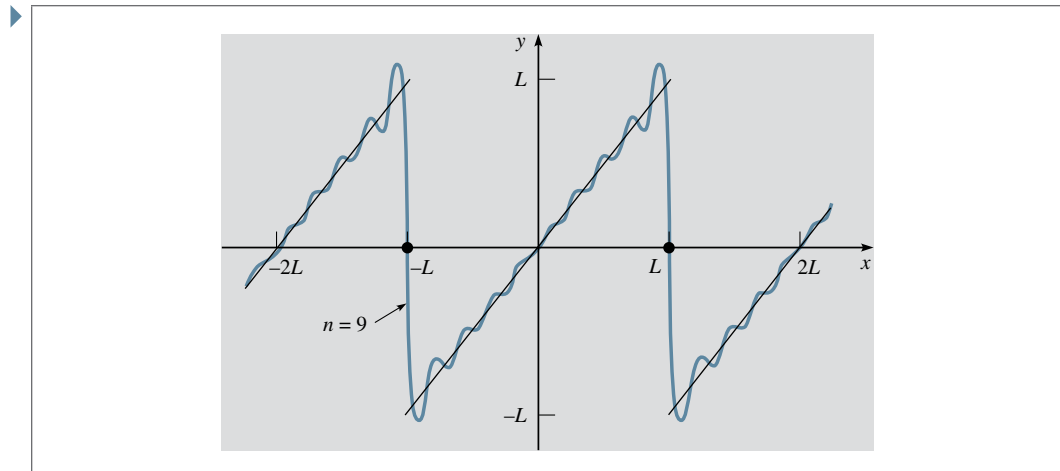


Figure 8.5.3 Somme partielle dans la série de Fourier, équation (9), pour l'onde en dents de scie.

Il faut noter qu'on a ici $f(-L) = f(L) = 0$ ainsi que $f(0) = 0$, ce qui est indispensable pour que la fonction f soit impaire et périodique de période $2L$. Quand on parle de la construction d'une série de sinus pour une fonction définie dans $0 \leq x \leq L$, on doit d'abord, s'il y a lieu, redéfinir la fonction pour qu'elle soit nulle en $x = 0$ et en $x = L$.

Il faut noter que la fonction d'onde triangulaire (voir l'exemple 1 de la section 8.3) et la fonction d'onde en dents de scie qu'on vient de traiter coïncident dans l'intervalle $0 \leq x < L$. Par conséquent, leurs séries de Fourier convergent vers la même fonction $f(x) = x$ dans cet intervalle. Ainsi, si on doit représenter la fonction $f(x) = x$ dans $0 \leq x < L$ par une série de Fourier, il est possible de le faire à l'aide d'une série de cosinus ou d'une série de sinus. Dans le premier cas, f est développée comme fonction paire dans l'intervalle $-L < x < 0$ et elle est prolongée périodiquement (l'onde triangulaire). Dans le dernier cas, f est développée dans $-L < x < 0$ comme fonction impaire et elle est prolongée périodiquement (l'onde en dents de scie). Si f est développée d'une autre manière, la série de Fourier qui en découle convergera tout de même vers x dans $0 \leq x < L$, mais elle comportera des termes sinus et cosinus.

En résolvant les problèmes des équations différentielles, il est souvent utile de prolonger une fonction f définie au départ uniquement dans l'intervalle $[0, L]$. Ainsi, on peut alors la développer en série de Fourier si on considère qu'elle est de période $2L$. Comme on l'a mentionné précédemment, pour la fonction $f(x) = x$, on dispose de plusieurs possibilités. Explicitement, on peut procéder de la manière qui suit.

1. On définit une fonction g de période $2L$ de sorte que

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ f(-x), & -L < x < 0. \end{cases} \quad (10)$$

La fonction g est ainsi le prolongement périodique pair de f . Sa série de Fourier, qui est une série de cosinus, représente f dans $[0, L]$.

2. On définit une fonction h de période $2L$ de sorte que

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < L, \\ 0, & x = 0, L, \\ -f(-x), & -L < x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

La fonction h est ainsi le prolongement périodique impair de f . Sa série de Fourier, qui est une série de sinus, représente également f dans $(0, L)$.

3. On définit une fonction k de période $2L$ de sorte que

$$k(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (12)$$

De plus, $k(x)$ est définie pour $(-L, 0)$, ce qui respecte les conditions du théorème 8.4.1. Parfois, il est pratique de définir $k(x)$ égale à zéro dans $-L < x < 0$. La série de Fourier pour k , qui comporte des termes sinus et cosinus, représente aussi f dans $[0, L]$, peu importe la manière dont $k(x)$ est définie dans $(-L, 0)$. Ainsi, il existe un nombre infini de ces séries, lesquelles convergent toutes vers $f(x)$ dans l'intervalle initial.

En général, le type de développement à utiliser dépendra de l'objectif visé. Si on doit choisir le type de série de Fourier à utiliser, la sélection peut se faire en fonction de la vitesse de convergence. Par exemple, la série de sinus pour l'onde triangulaire (voir l'équation (20) de la section 8.3) converge plus rapidement que la série de sinus pour l'onde en dents de scie (voir l'équation (9) de cette section), bien que toutes les deux convergent vers la même fonction dans $0 \leq x < L$. Cela résulte du fait que l'onde triangulaire est une fonction plus lisse que l'onde en dents de scie et qu'elle est donc plus aisée à approximer. Habituellement, plus une fonction admet de dérivées continues dans tout l'intervalle $-\infty < x < \infty$, plus la série de Fourier convergera de façon rapide (voir le problème 18 de la section 8.4).

Exemple 2

Supposez que

$$f(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2. \end{cases} \quad (13)$$

Comme on l'a déjà précisé, on peut développer f soit en série de cosinus, soit en série de sinus. Tracez le graphique de la somme de chaque série pour $-6 \leq x \leq 6$.

Dans cet exemple, $L = 2$ et la série de cosinus pour f converge vers le prolongement périodique pair de f de période 4 (voir le graphe de la figure 8.5.4).

De même, la série de sinus pour f converge vers le prolongement périodique impair de f de période 4 (voir le graphe de cette fonction à la figure 8.5.5).

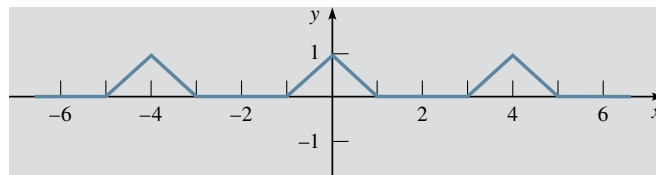


Figure 8.5.4 Prolongement périodique pair de $f(x)$ donné par l'équation (13).

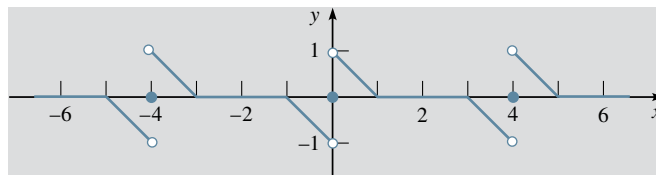


Figure 8.5.5 Prolongement périodique impair de $f(x)$ donné par l'équation (13).

Problèmes

- Dans les problèmes 1 à 6, déterminez si la fonction est paire, impaire ou ni l'un ni l'autre.

1. $x^3 - 2x$

2. $x^3 - 2x + 1$

3. $\tan 2x$

4. $\sec x$

5. $|x|^3$

6. e^{-x}

- Dans les problèmes 7 à 12, la fonction f est définie dans un intervalle de longueur L . Pour chaque cas, tracez les graphiques des prolongements pair et impair de f de période $2L$.

7. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & 2 \leq x < 3 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

9. $f(x) = 2 - x, \quad 0 < x < 2$

10. $f(x) = x - 3, \quad 0 < x < 4$

11. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$

12. $f(x) = 4 - x^2, \quad 0 < x < 1$

13. Prouvez que toute fonction peut être exprimée comme la somme de deux autres fonctions dont l'une est paire et l'autre impaire. Autrement dit, quelle que soit la fonction f dont le domaine contient $-x$ quand il contient x , montrez qu'il existe une fonction paire g et une fonction impaire h telles que $f(x) = g(x) + h(x)$.

Suggestion : Si vous supposez que $f(x) = g(x) + h(x)$, quelle est la valeur de $f(-x)$?

14. Trouvez les coefficients dans les séries de sinus et cosinus de l'exemple 2.

- Dans les problèmes 15 à 22, trouvez la série de Fourier correspondant à la fonction et tracez le graphique de la fonction vers laquelle la série converge sur trois périodes.

15. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2; \end{cases}$ une série de sinus de période 4.

Comparez avec l'exemple 1 et le problème 5 de la section 8.4.

16. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2; \end{cases}$ une série de sinus de période 4.

17. $f(x) = 1, \quad 0 \leq x \leq \pi;$ une série de cosinus de période 2π .

18. $f(x) = 1, \quad 0 < x < \pi;$ une série de sinus de période 2π .

19. $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < \pi, \\ 1, & \pi < x < 2\pi, \\ 2, & 2\pi < x < 3\pi; \end{cases}$ une série de sinus de période 6π .

20. $f(x) = x, \quad 0 \leq x < 1;$ une série de sinus de période 1.

21. $f(x) = L - x, \quad 0 \leq x \leq L;$ une série de cosinus de période $2L$.

Comparez avec l'exemple 1 de la section 8.3.

22. $f(x) = L - x, \quad 0 \leq x \leq L;$ une série de sinus de période $2L$.

- Dans les problèmes 23 à 26, procédez comme suit.

a) Trouvez la série de Fourier correspondant à la fonction.

b) Tracez le graphique de la fonction vers laquelle la série converge sur trois périodes.

c) Tracez le graphique d'une ou de plusieurs des sommes partielles de la série.

Ⓢ 23. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & \pi < x < 2\pi; \end{cases}$ une série de cosinus de période 4π .

Ⓢ 24. $f(x) = -x, \quad -\pi < x < 0;$ une série de sinus de période 2π .

Ⓢ 25. $f(x) = 2 - x^2, \quad 0 < x < 2;$ une série de sinus de période 4.

Ⓢ 26. $f(x) = x^2 - 2x, \quad 0 < x < 4;$ une série de cosinus de période 8.

■ Dans les problèmes 27 à 30, la fonction est définie dans l'intervalle $0 < x < L$.

- Tracez les graphiques du prolongement pair $g(x)$ et du prolongement impair $h(x)$ de la fonction donnée de période $2L$ sur trois périodes.
- Trouvez les séries de Fourier sinus et cosinus pour la fonction.
- Tracez quelques sommes partielles pour chaque série.
- Pour chaque série, déterminez comment l'erreur maximale dans $[0, L]$ dépend de n .

Ⓜ 27. $f(x) = 3 - x, \quad 0 < x < 3$

Ⓜ 28. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$

Ⓜ 29. $f(x) = (4x^2 - 4x - 3)/4, \quad 0 < x < 2$

Ⓜ 30. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 1, \quad 0 < x < 3$

31. Prouvez que si f est une fonction impaire, alors

$$\int_{-L}^L f(x) dx = 0.$$

32. Prouvez les propriétés 2 et 3 des fonction paires et impaires telles qu'elles ont été énoncées dans cette section.

33. Prouvez que la dérivée d'une fonction paire est impaire et que la dérivée d'une fonction impaire est paire.

34. Soit $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Montrez que si f est paire, alors F est impaire et que si f est impaire, alors F est paire.

35. À partir de la série de Fourier de l'onde carrée (*exemple 1, section 8.4*), montrez que

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Cette relation entre π et les entiers positifs impairs a été découverte par Leibniz en 1674.

36. À partir de la série de Fourier pour l'onde triangulaire (*voir l'exemple 1 de la section 8.3*), montrez que

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

37. Supposez que f admet un développement en série de Fourier sinus

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/L), \quad 0 \leq x \leq L.$$

a) Montrez que

$$\frac{2}{L} \int_0^L [f(x)]^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Comparez ce résultat (équation de Parseval) avec celui du problème 17 de la section 8.4. Quel est le résultat correspondant si f admet un développement en série de Fourier cosinus ?

b) Appliquez les résultats de la partie a) à la série pour l'onde en dents de scie donnée dans l'équation (9), puis montrez que

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Cette relation a été découverte par Euler vers 1735.

- ■ **Les séries de Fourier plus spécialisées** Soit f une fonction définie au départ dans $0 \leq x \leq L$. À l'intérieur de cette section, on a montré qu'il était possible de développer f soit en série de sinus, soit en série de cosinus en considérant respectivement des prolongements périodiques impairs ou pairs de f . Les problèmes 38 à 40 portent sur certaines séries de Fourier plus spécialisées qui convergent vers la fonction f dans $(0, L)$.

38. Supposez que f est prolongée dans $[L, 2L]$ de façon arbitraire. Ensuite, prolongez la fonction résultante dans $(-2L, 0)$ comme fonction impaire et ailleurs comme fonction périodique de période $4L$ [voir la figure 8.5.6 a)]. Montrez que cette fonction admet un développement en série de Fourier de sinus relativement aux fonctions $\sin(n\pi x/2L)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Autrement dit,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x/2L),$$

où

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} f(x) \sin(n\pi x/2L) dx.$$

Cette série converge vers la fonction originale dans $(0, L)$.

39. Supposez que f est prolongée dans $(L, 2L)$ symétriquement par rapport à $x = L$, c'est-à-dire de sorte que $f(2L - x) = f(x)$ dans $0 \leq x < L$. Soit la fonction résultante prolongée dans $(-2L, 0)$ comme fonction impaire et ailleurs [voir la figure 8.5.6 b)] comme fonction périodique de période $4L$. Montrez que cette fonction admet un développement en série de Fourier relatif aux fonctions $\sin(\pi x/2L)$, $\sin(3\pi x/2L)$, $\sin(5\pi x/2L)$, $\dots$. Autrement dit,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

où

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx.$$

Cette série converge vers la fonction originale dans $[0, L]$.

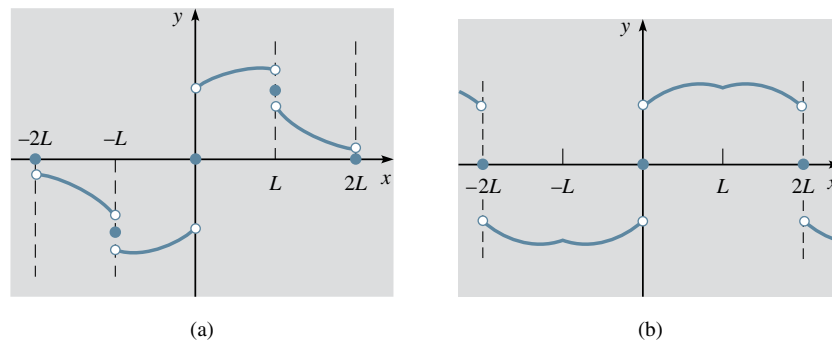


Figure 8.5.6 a) Graphique de la fonction du problème 38. b) Graphique de la fonction du problème 39.

40. Comment f , définie au départ dans $[0, L]$, peut-elle être prolongée afin d'obtenir une série de Fourier comportant uniquement les fonctions $\cos(\pi x/2L)$, $\cos(3\pi x/2L)$, $\cos(5\pi x/2L)$, $\dots$? Reportez-vous aux problèmes 38 et 39. Si $f(x) = x$ dans $0 \leq x \leq L$, tracez le graphe de la fonction vers laquelle la série de Fourier converge dans $-4L \leq x \leq 4L$.

8.6 La conduction de la chaleur dans une tige

L'étude mathématique de la conduction de la chaleur a d'abord été entamée⁸ vers 1800, et elle continue d'intéresser les scientifiques modernes. Par exemple, l'analyse de la dissipation et du transfert de la chaleur à partir de ses sources dans des machines à grand rendement est un problème technologique important.

On considère un problème de conduction de la chaleur dans une tige droite dont la coupe transversale est uniforme et qui est constituée de matériaux homogènes. L'axe des x longe l'axe de la tige, et $x = 0$ et $x = L$ en sont les extrémités (voir la figure 8.6.1). On suppose aussi que les côtés de la tige sont parfaitement isolés de sorte qu'aucune chaleur ne s'échappe par les côtés. Les dimensions de la coupe transversale sont si petites qu'on peut considérer la température u comme étant constante sur toute coupe transversale donnée. Ainsi, u est une fonction uniquement de la coordonnée axiale x et du temps t .

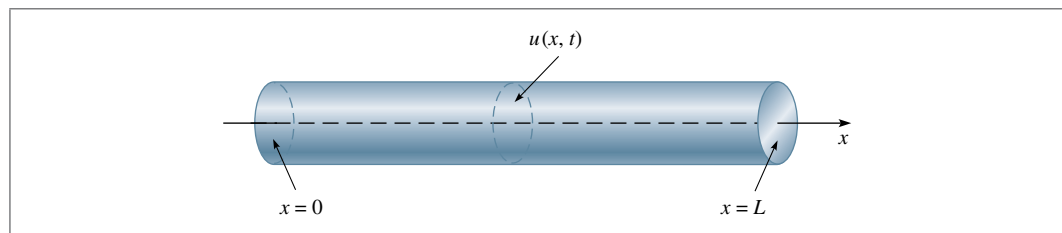


Figure 8.6.1 Tige solide de conduction de la chaleur.

La variation de température dans la tige est régie par une équation aux dérivées partielles dont la construction apparaît dans l'annexe A, à la fin de ce chapitre. Cette équation est appelée **équation de conduction de la chaleur** et est de la forme

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1)$$

où α^2 est une constante appelée **diffusivité thermique**. Le paramètre α^2 dépend uniquement du matériel composant la tige, et il est défini par

$$\alpha^2 = \kappa / \rho s, \quad (2)$$

où κ est la conductivité thermique, ρ est la densité et s est la chaleur spécifique du matériel dans la tige. Les unités de α^2 sont exprimées par la longueur au carré divisée par le temps. Des valeurs typiques de α^2 sont données dans le tableau 8.6.1.

Tableau 8.6.1 Valeurs de la diffusivité thermique pour certains matériaux communs

Matériau	α^2 (cm ² /s)
Argent	1,71
Cuivre	1,14
Aluminium	0,86
Fer forgé	0,12
Granite	0,011
Brique	0,0038
Eau	0,001 44

8. La première recherche importante sur la conduction de la chaleur a été menée par Joseph Fourier (1768-1835), alors qu'il occupait le poste de préfet du département d'Isère (à Grenoble), de 1801 à 1815. Il a présenté des articles sur le sujet à l'Académie des sciences de Paris en 1807 et en 1811. Cependant, ses écrits ont été critiqués par les examinateurs (surtout Joseph Louis Lagrange) à cause de leur manque de rigueur et ils n'ont donc pas été publiés. Joseph Fourier a pourtant continué à approfondir ses idées. Finalement, il a écrit un des ouvrages classiques en mathématiques appliquées, intitulé *Théorie analytique de la chaleur*, qui a été publié en 1822.

De plus, on suppose que la distribution de la température initiale dans la tige est connue. Ainsi,

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (3)$$

où f est une fonction donnée. Finalement, on suppose que la température aux extrémités de la tige est maintenue constante : la température est de T_1 en $x = 0$ et de T_2 en $x = L$. On verra qu'il suffit de considérer le cas où $T_1 = T_2 = 0$. Dans la section 8.7, on explique comment réduire le problème général à ce cas particulier. Ainsi, on supposera ici que u est toujours nulle lorsque $x = 0$ et lorsque $x = L$:

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (4)$$

Le problème fondamental de la conduction de la chaleur consiste à trouver $u(x, t)$ qui satisfait à l'équation différentielle (1) dans $0 < x < L$ et lorsque $t > 0$, la condition initiale (3) lorsque $t = 0$, et les conditions limites (4) en $x = 0$ et en $x = L$.

Le problème décrit par les équations (1), (3) et (4) est un problème de valeur initiale en la variable temps t . On dispose d'une condition initiale, et l'équation différentielle détermine ce qui se produit par la suite. Cependant, en ce qui a trait à la variable spatiale x , le problème en est un de valeur limite. Des conditions limites sont imposées à chaque extrémité de la tige, et l'équation différentielle décrit l'évolution de la température dans l'intervalle entre ces extrémités. On peut considérer le problème comme un problème de valeur limite dans le plan xt (voir la figure 8.6.2). La solution $u(x, t)$ à l'équation (1) est recherchée dans la bande à moitié infinie $0 < x < L, t > 0$, soumise à la contrainte selon laquelle $u(x, t)$ doit prendre une valeur spécifique en tout point sur la borne de cette bande.

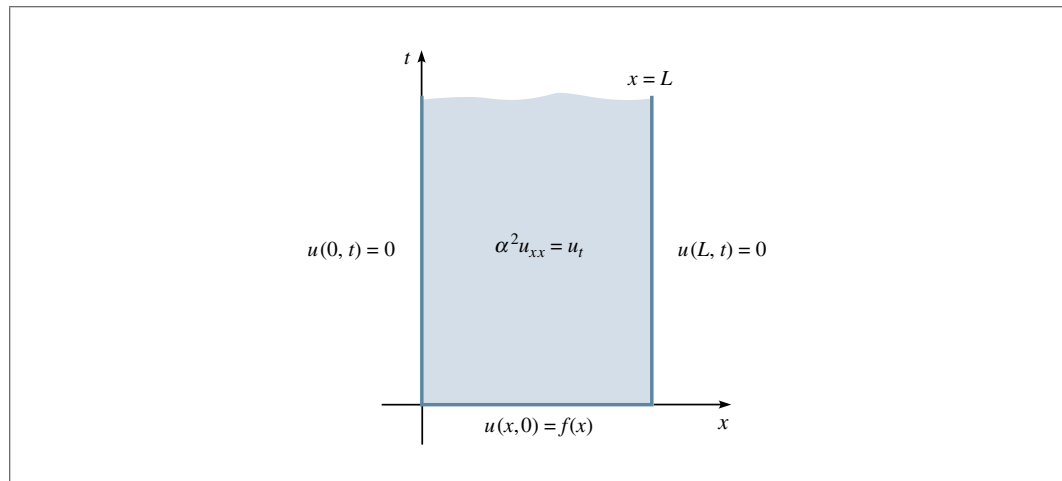


Figure 8.6.2 Problème de valeur limite pour l'équation de conduction de la chaleur.

Le problème de conduction de la chaleur (1), (3), (4) est linéaire puisque u n'y apparaît qu'à la première puissance. L'équation différentielle et les conditions limites sont également homogènes. On peut donc aborder le problème en recherchant des solutions à l'équation différentielle avec des conditions limites, puis en les superposant afin de satisfaire à la condition initiale. La manière de procéder sera décrite dans le reste de la section.

Une solution à l'équation différentielle (1) qui satisfait aux conditions limites (4) est la fonction $u(x, t) = 0$, mais cette solution ne satisfait pas à la condition initiale (3), sauf dans le cas trivial où $f(x)$ est également nulle. Par conséquent, on cherche à trouver d'autres solutions non nulles à l'équation différentielle et aux conditions limites.

Pour appliquer la méthode de séparation des variables, on suppose que

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (5)$$

À partir de l'équation (5), en substituant u dans l'équation différentielle (1), on obtient

$$\alpha^2 X'' T = X T', \quad (6)$$

où les dérivées sont maintenant des dérivées ordinaires par rapport aux variables indépendantes x et t . L'équation (6) est équivalente à

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T}, \quad (7)$$

dans laquelle les variables sont séparées. Autrement dit, le premier membre ne dépend que de x et le second, que de t .

Comme dans la section 8.1, il est maintenant essentiel de réaliser que pour que l'équation (7) soit valide pour $0 < x < L$, $t > 0$, ses deux membres doivent être égaux et constants. Si on garde une variable indépendante fixe (par exemple, x) et que l'on fait varier l'autre, un des membres (celui de gauche, dans ce cas) de l'équation (7) restera inchangé, mais l'autre variera, rompant ainsi l'égalité. Si on désigne cette constante de séparation par $-\lambda$, alors l'équation (7) devient

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T} = -\lambda. \quad (8)$$

On obtient donc les équations différentielles ordinaires suivantes pour $X(x)$ et $T(t)$:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (9)$$

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0. \quad (10)$$

On note la constante de séparation $-\lambda$ (plutôt que λ), car elle doit être négative. De plus, il est pratique d'afficher explicitement le signe négatif.

Le produit des deux solutions aux équations (9) et (10), respectivement, constitue une solution à l'équation aux dérivées partielles (1). Cependant, on s'intéresse uniquement aux solutions à l'équation (1) qui satisfont aussi aux conditions limites (4). Comme on le montre maintenant, cela restreint les valeurs possibles pour λ .

En faisant la substitution de $u(x, t)$ à partir de l'équation (5) dans la condition limite en $x = 0$, on obtient

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0. \quad (11)$$

Si l'équation (11) est satisfaite en posant $T(t)$ égal à zéro quel que soit t , alors $u(x, t)$ est nulle quels que soient x et t , et on a déjà rejeté cette possibilité. Par conséquent, l'équation (11) indique qu'on doit avoir

$$X(0) = 0. \quad (12)$$

De même, la condition limite en $x = L$ indique que

$$X(L) = 0. \quad (13)$$

On doit maintenant examiner l'équation (9) soumise aux conditions limites (12) et (13). Il s'agit d'un problème de valeur propre et, en fait, du même problème que celui qui a été étudié de façon détaillée à la section 8.2. En particulier, le lecteur peut se référer au paragraphe suivant l'équation (29) de la section 8.2. La seule différence est qu'on note la variable dépendante y au lieu de X . Si on se reporte aux résultats obtenus plus tôt, (voir l'équation (31) de la section 8.2), les seules solutions non triviales aux équations (9), (12) et (13) sont les fonctions propres

$$X_n(x) = \sin(n\pi x/L), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

qui sont associées aux valeurs propres

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 / L^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

En se penchant maintenant sur l'équation (10) pour déterminer $T(t)$ et en substituant $n^2\pi^2/L^2$ à λ , on obtient

$$T' + (n^2\pi^2\alpha^2/L^2)T = 0. \quad (16)$$

Ainsi, $T(t)$ est proportionnel à $\exp(-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2)$. Par conséquent, en multipliant les solutions aux équations (9) et (10) et en négligeant les constantes arbitraires de proportionnalité, on peut conclure que les fonctions

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin(n\pi x/L), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

satisfont à l'équation aux dérivées partielles (1) et aux conditions limites (4) pour chaque valeur entière positive de n . Les fonctions u_n sont parfois appelées des solutions fondamentales au problème de conduction de la chaleur (1), (3) et (4).

Il ne reste qu'à satisfaire à la condition initiale (3),

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (18)$$

Il convient de se rappeler qu'on a souvent résolu les problèmes de valeur initiale en considérant les combinaisons linéaires d'un ensemble de solutions fondamentales, puis en choisissant les coefficients pour satisfaire aux conditions initiales. L'étape similaire dans le présent problème consiste à prendre une combinaison linéaire des fonctions (17), puis à choisir les coefficients pour satisfaire à l'équation (18). Maintenant, la principale différence par rapport aux problèmes précédents réside dans un nombre infini de fonctions (17), et cette combinaison linéaire est une série infinie. Par conséquent, on suppose que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (19)$$

où les coefficients c_n doivent être déterminés. Les termes individuels de la série (19) satisfont à l'équation différentielle (1) et aux conditions limites (4). On suppose que la série infinie de l'équation (19) converge et satisfait également aux équations (1) et (4). Pour satisfaire à la condition initiale (3), il faut que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x). \quad (20)$$

En d'autres mots, on doit choisir les coefficients c_n de sorte que la série de fonctions sinus de l'équation (20) converge vers la distribution de température initiale $f(x)$ pour $0 \leq x \leq L$. La série de l'équation (20) est simplement une série de Fourier sinus pour f . Par conséquent, selon l'équation (8) de la section 8.5, ses coefficients sont donnés par

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (21)$$

Ainsi, la solution au problème de conduction de la chaleur des équations (1), (3) et (4) est donnée par la série de l'équation (19) avec les coefficients calculés à partir de l'équation (21).

Exemple 1

Trouvez la température $u(x, t)$ au temps t dans une tige de métal de 50 cm de longueur, isolée sur les côtés. Initialement, la température est uniforme à 20 °C, et la température aux extrémités est maintenue à 0 °C pour tout $t > 0$.

La température dans la tige satisfait aux exigences du problème de conduction de la chaleur (1), (3) et (4) avec $L = 50$ et $f(x) = 20$ pour $0 < x < 50$. Ainsi, à partir de l'équation (19), la solution est

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/2500} \sin \frac{n\pi x}{50}, \quad (22)$$

► où, à partir de l'équation (21),

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{4}{5} \int_0^{50} \sin \frac{n\pi x}{50} dx \\ &= \frac{40}{n\pi} (1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 80/n\pi, & n \text{ est impair;} \\ 0, & n \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned} \quad (23)$$

Finalement, en faisant la substitution de c_n dans l'équation (22), on obtient

$$u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / 2500} \sin \frac{n\pi x}{50}. \quad (24)$$

L'expression (24) pour la température est complexe, mais le facteur exponentiel négatif dans chaque terme de la série assure une convergence rapide de la série, sauf pour de faibles valeurs de t ou de α^2 . Par conséquent, on obtient souvent des résultats précis en utilisant seulement quelques termes de la série.

En termes de résultats quantitatifs, on mesure t en secondes et α^2 en centimètres carrés par seconde. Pour simplifier, on pose $\alpha^2 = 1$, ce qui correspond à une tige dont les matériaux admettent des propriétés thermiques voisines de celles du cuivre et de l'aluminium. On peut observer le comportement de la solution sur les graphiques des figures 8.6.3 à 8.6.5. La figure 8.6.3 illustre la distribution de la température dans la tige en différents temps. Il faut noter que la température diminue de façon stable à mesure que de la chaleur s'échappe des extrémités de la tige. La figure 8.6.4 illustre comment la température décroît ; la température est tracée en fonction du temps pour quelques points précis de la

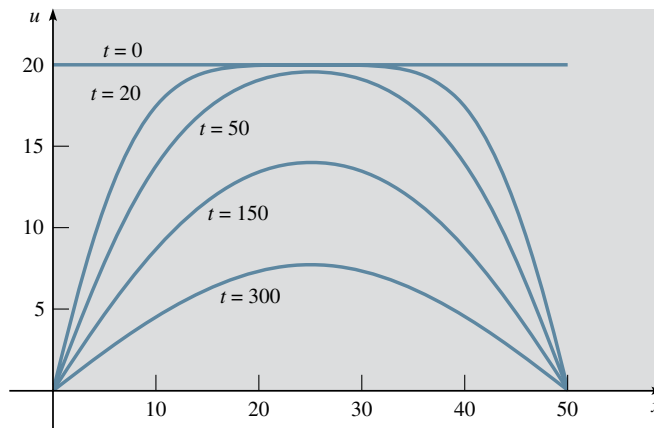


Figure 8.6.3 Distributions de la température en divers temps pour le problème de conduction de la chaleur.

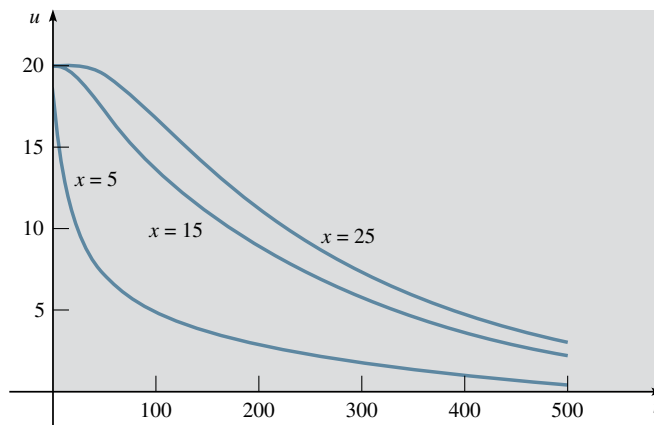


Figure 8.6.4 Dépendance de la température en fonction du temps à plusieurs endroits pour le problème de conduction de la chaleur.

► tige. Enfin, la figure 8.6.5 illustre un graphique tridimensionnel de u en fonction de x et de t . Il convient aussi de souligner que les graphiques des figures 8.6.3 et 8.6.4 sont obtenus en croisant la surface de la figure 8.6.5 avec des plans sur lesquels x ou t est constant. La légère ondulation de la figure 8.6.5 en $t = 0$ vient du fait qu'on n'a utilisé qu'un nombre fini de termes dans la série pour $u(x, t)$ et de la convergence lente de la série en $t = 0$.

Un problème pratique consiste à déterminer le temps τ requis pour que la température de la tige atteigne une valeur spécifique. Par exemple, à quel moment la température dans toute la tige est-elle inférieure à 1°C ? En raison de la symétrie de la distribution de la température initiale et des conditions limites, le point le plus chaud dans la tige est toujours le centre. Ainsi, on trouve τ en isolant t dans $u(25, t) = 1$. En utilisant le premier terme dans le développement en série (24), on obtient

$$\tau = \frac{2500}{\pi^2} \ln(80/\pi) \approx 820 \text{ s.}$$

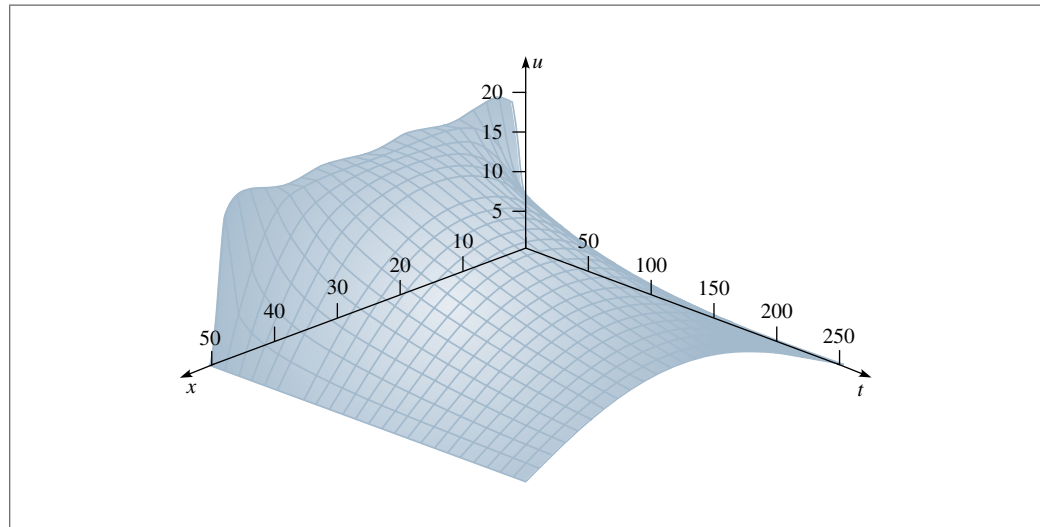


Figure 8.6.5 Graphique de la température de u en fonction de x et de t pour le problème de conduction de la chaleur.

Problèmes

1. Trouvez la solution au problème de conduction de la chaleur

$$\begin{aligned} 100u_{xx} &= u_t, & 0 < x < 1, & \quad t > 0; \\ u(0, t) &= 0, & u(1, t) &= 0, & \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= \sin 2\pi x - \sin 5\pi x, & 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

2. Trouvez la solution au problème de conduction de la chaleur

$$\begin{aligned} u_{xx} &= 4u_t, & 0 < x < 2, & \quad t > 0; \\ u(0, t) &= 0, & u(2, t) &= 0, & \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= 2 \sin(\pi x/2) - \sin \pi x + 4 \sin 2\pi x, & 0 \leq x \leq 2. \end{aligned}$$

- Considérez la conduction de chaleur dans une tige de 40 cm de longueur dont les extrémités sont maintenues à 0°C pour tout $t > 0$. Dans les problèmes 3 à 6, trouvez une expression pour représenter la température $u(x, t)$ si la distribution de température initiale dans la tige est la fonction spécifiée. Posez $\alpha^2 = 1$.

3. $u(x, 0) = 50, \quad 0 < x < 40$

4. $u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 20, \\ 40 - x, & 20 \leq x \leq 40 \end{cases}$
5. $u(x, 0) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 10, \\ 50, & 10 \leq x \leq 30, \\ 0, & 30 < x \leq 40 \end{cases}$
6. $u(x, 0) = x, \quad 0 < x < 40$
7. Considérez de nouveau la tige dans le problème 3. Pour $t = 5$ et $x = 20$, déterminez combien de termes sont nécessaires pour trouver la solution à trois décimales près. Pour ce faire, vous pouvez trouver n de sorte que si vous incluez un terme de plus, vous ne modifierez pas les trois premières décimales de $u(20, 5)$. Répétez ce processus pour $t = 20$ et $t = 80$. Tirez une conclusion sur la vitesse de convergence de la série pour $u(x, t)$.
8. Suivez les instructions ci-dessous pour la tige décrite au problème 3.
- Tracez le graphique de u en fonction de x pour $t = 5, 10, 20, 40, 100$ et 200 . Illustrez ces graphiques dans un même plan. Vous obtiendrez ainsi une vue d'ensemble du comportement de la distribution de la température en fonction du temps.
 - Tracez le graphique de u en fonction de t pour $x = 5, 10, 15$ et 20 .
 - Tracez un graphique tridimensionnel de u en fonction de x et de t .
 - Combien de temps toute la tige prendra-t-elle pour se refroidir à une température inférieure à 1°C ?
9. Suivez les instructions données au problème 8 pour la tige décrite au problème 4.
10. Suivez les instructions données au problème 8 pour la tige décrite au problème 5.
11. Suivez les instructions ci-dessous pour la tige décrite au problème 6.
- Tracez le graphique de u en fonction de $t = 5, 10, 20, 40, 100$ et 200 .
 - Pour chaque valeur de t utilisée dans la partie a), estimez la valeur de x pour laquelle la température est la plus grande. Tracez ces valeurs en fonction de t pour voir comment l'emplacement du point le plus chaud dans la tige varie avec le temps.
 - Tracez le graphique de u en fonction de t pour $x = 10, 20$ et 30 .
 - Tracez un graphique tridimensionnel de u en fonction de x et de t .
 - Combien de temps toute la tige prendra-t-elle pour se refroidir à une température inférieure à 1°C ?
12. Supposez qu'une tige métallique de 20 cm est chauffée à une température uniforme de 100°C . Supposez aussi qu'en $t = 0$, les extrémités de la tige sont plongées dans un bain de glace de 0°C et qu'elles sont par la suite maintenues à cette température sans qu'aucune chaleur ne puisse s'échapper par la surface latérale. Trouvez une expression pour représenter la température en tout point dans la tige en tout temps ultérieur. Déterminez la température au centre de la tige au temps $t = 30$ s si la tige est
- en argent;
 - en aluminium;
 - en fer forgé.
13. Pour la tige décrite au problème 12, trouvez le temps qui s'écoulera avant que le centre de la tige ne se refroidisse à une température de 5°C si elle est
- en argent;
 - en aluminium;
 - en fer forgé.
14. Quand on résout des équations différentielles, on peut presque toujours simplifier les calculs en utilisant des variables adimensionnelles.
- Montrez que, si la variable adimensionnelle $\xi = x/L$ est introduite, l'équation de conduction de la chaleur devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{L^2}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad 0 < \xi < 1, \quad t > 0.$$

- b) Puisque L^2/α^2 inclut les unités de temps, il est pratique d'utiliser cette quantité pour définir une variable temporelle adimensionnelle $\tau = (\alpha^2/L^2)t$. Ensuite, montrez que l'équation de conduction de la chaleur se réduit à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad 0 < \xi < 1, \quad \tau > 0.$$

15. Considérez l'équation

$$au_{xx} - bu_t + cu = 0, \quad (i)$$

où a , b et c sont des constantes.

- a) Soit $u(x, t) = e^{\delta t} w(x, t)$, où δ est une constante. Trouvez l'équation aux dérivées partielles correspondante pour w .
- b) Si $b \neq 0$, montrez qu'on peut choisir δ de sorte que l'équation aux dérivées partielles trouvée à la partie a) n'admette aucun terme dans w . Ainsi, avec un changement de la variable dépendante, il est possible de réduire l'équation (i) à l'équation de la conduction de la chaleur.

8.7 Quelques problèmes additionnels sur la conduction de la chaleur

Dans la section 8.6, nous avons considéré l'équation de la conduction de la chaleur

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1)$$

avec les conditions limites

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2)$$

et la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3)$$

On a montré que la solution était

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \sin \frac{n \pi x}{L}, \quad (4)$$

où les coefficients c_n sont ceux de la série

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n \pi x}{L}. \quad (5)$$

La série de l'équation (5) est simplement la série de Fourier sinus pour f . Conformément à la section 8.5, ses coefficients sont

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n \pi x}{L} dx. \quad (6)$$

Ainsi, la solution au problème de conduction de la chaleur, de l'équation (1) à l'équation (3), est donnée par la série de l'équation (4) avec les coefficients calculés à partir de l'équation (6).

On insiste sur le fait qu'ici, on doit considérer la solution (4) comme une solution formelle. Autrement dit, cette solution a été obtenue sans justification rigoureuse du processus limite concerné. Cette justification dépasse le cadre établi dans le présent manuel. Cependant, une fois qu'on a obtenu la série (4), il est possible de montrer que dans $0 < x < L$, quel que soit $t > 0$, la série converge vers une fonction continue. On peut aussi montrer qu'on peut calculer les dérivées u_{xx} et u_t en dérivant la série (4) terme à terme et que celle-ci satisfait à l'équation de la conduction de la chaleur (1). La justification repose sur le fait que chaque terme de la série (4)

contient un facteur exponentiel négatif et que cela entraîne une convergence relativement rapide de la série. De plus, on peut établir que la fonction u , de l'équation (4), satisfait aussi aux conditions limites et initiales. Ainsi, on peut justifier formellement la solution avancée.

Il faut noter que même si f satisfait aux conditions du théorème de convergence de Fourier (voir le théorème 8.4.1), elle peut admettre des points de discontinuité. Dans ce cas, la distribution de température initiale $u(x, 0) = f(x)$ est discontinue en un ou plusieurs points. Néanmoins, la solution $u(x, t)$ est continue pour des valeurs arbitrairement petites de $t > 0$. Cela illustre le fait que la conduction de la chaleur est un processus de diffusion qui adoucit les discontinuités éventuellement présentes dans la distribution de température initiale. Enfin, puisque f est bornée, à partir de l'équation (6), il s'ensuit que les coefficients c_n sont également bornés. Ainsi, la présence du facteur exponentiel négatif dans chaque terme de la série (4) assure que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (7)$$

pour tout x , peu importe la condition initiale. Cela concorde avec le résultat physique auquel on pouvait intuitivement s'attendre.

On considère maintenant deux autres problèmes de conduction de la chaleur unidimensionnelle. Ces problèmes seront traités à l'aide de la méthode élaborée dans la section 8.6.

Les conditions limites non homogènes On suppose maintenant qu'une extrémité de la tige est maintenue à une température constante T_1 et que l'autre est maintenue à une température constante T_2 . Alors, les conditions limites sont

$$u(0, t) = T_1, \quad u(L, t) = T_2, \quad t > 0. \quad (8)$$

L'équation différentielle (1) et la condition initiale (3) demeurent inchangées.

Ce problème est un peu plus difficile que celui de la section 8.6 à cause des conditions limites non homogènes. On peut le résoudre en le réduisant d'abord à un problème où les conditions limites sont homogènes, puis en le résolvant comme dans la section 8.6. Le raisonnement suivant nous montre la technique requise pour y arriver.

Après un long moment, autrement dit lorsque $t \rightarrow \infty$, on prévoit atteindre une distribution de température stable $v(x)$ indépendante du temps t et des conditions initiales. Puisque $v(x)$ doit satisfaire à l'équation de la conduction de la chaleur (1), on a

$$v''(x) = 0, \quad 0 < x < L. \quad (9)$$

Ainsi, la distribution de température à l'état stable est une fonction linéaire de x . De plus, $v(x)$ doit satisfaire aux conditions limites

$$v(0) = T_1, \quad v(L) = T_2, \quad (10)$$

qui s'appliquent même lorsque $t \rightarrow \infty$. La solution à l'équation (9) satisfaisant à l'équation (10) est

$$v(x) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1. \quad (11)$$

Si on revient au problème initial, on a les équations (1), (3) et (8). On tente d'exprimer $u(x, t)$ comme la somme d'une distribution de température à l'état stable $v(x)$ et d'une autre distribution de température (transitoire) $w(x, t)$. Par conséquent, on pose

$$u(x, t) = v(x) + w(x, t). \quad (12)$$

Puisque $v(x)$ est donnée par l'équation (11), on peut résoudre le problème pourvu qu'on puisse déterminer $w(x, t)$. On construit le problème de valeur limite pour $w(x, t)$ en substituant l'expression dans l'équation (12) à $u(x, t)$ dans les équations (1), (3) et (8). À partir de l'équation (1), on a

$$\alpha^2(v + w)_{xx} = (v + w)_t.$$

Il s'ensuit que

$$\alpha^2 w_{xx} = w_t \quad (13)$$

puisque $v_{xx} = 0$ et $v_t = 0$. De même, à partir des équations (12), (8) et (10),

$$\begin{aligned} w(0, t) &= u(0, t) - v(0) = T_1 - T_1 = 0, \\ w(L, t) &= u(L, t) - v(L) = T_2 - T_2 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Finalement, à partir des équations (12) et (3),

$$w(x, 0) = u(x, 0) - v(x) = f(x) - v(x), \quad (15)$$

où $v(x)$ est donnée par l'équation (11). Ainsi, on trouve la partie transitoire de la solution au problème original en résolvant le problème constitué des équations (13), (14) et (15). Ce dernier problème est précisément celui qui a été résolu dans la section 8.6 en considérant $f(x) - v(x)$ comme la distribution de température initiale. Par conséquent,

$$u(x, t) = (T_2 - T_1) \frac{x}{L} + T_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \sin \frac{n \pi x}{L}, \quad (16)$$

où

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - (T_2 - T_1) \frac{x}{L} - T_1 \right] \sin \frac{n \pi x}{L} dx. \quad (17)$$

Il s'agit d'un autre cas où on résout un problème en le réduisant à un problème plus simple qui a déjà été résolu. Cette technique, qui consiste à réduire un problème avec des conditions limites non homogènes à un problème avec des conditions limites homogènes en soustrayant la solution à l'état stable, est très souvent utilisée.

Exemple 1

Considérez le problème de la conduction de la chaleur

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0, \quad (18)$$

$$u(0, t) = 20, \quad u(30, t) = 50, \quad t > 0, \quad (19)$$

$$u(x, 0) = 60 - 2x, \quad 0 < x < 30. \quad (20)$$

Trouvez la distribution de température à l'état stable et le problème de valeur limite qui détermine la distribution transitoire.

La température à l'état stable satisfait à $v''(x) = 0$ et aux conditions limites $v(0) = 20$ et $v(30) = 50$. Par conséquent, $v(x) = 20 + x$. La distribution transitoire $w(x, t)$ satisfait à l'équation de la conduction de la chaleur

$$w_{xx} = w_t, \quad (21)$$

aux conditions limites homogènes

$$w(0, t) = 0, \quad w(30, t) = 0, \quad (22)$$

et à la condition initiale modifiée

$$w(x, 0) = 60 - 2x - (20 + x) = 40 - 3x. \quad (23)$$

Il faut noter que ce problème est de la forme (1), (2) et (3) avec $f(x) = 40 - 3x$, $\alpha^2 = 1$ et $L = 30$. Ainsi, la solution est donnée par les équations (4) et (6).

La figure 8.7.1 illustre le graphique de la distribution de température initiale $60 - 2x$, la distribution de température finale $20 + x$ et la température en deux temps intermédiaires trouvée en résolvant les équations (21) à (23). Il faut aussi noter que la température intermédiaire satisfait aux conditions limites (19) pour tout $t > 0$. Quand t augmente, l'effet des conditions limites se déplace graduellement des extrémités de la tige vers son centre.

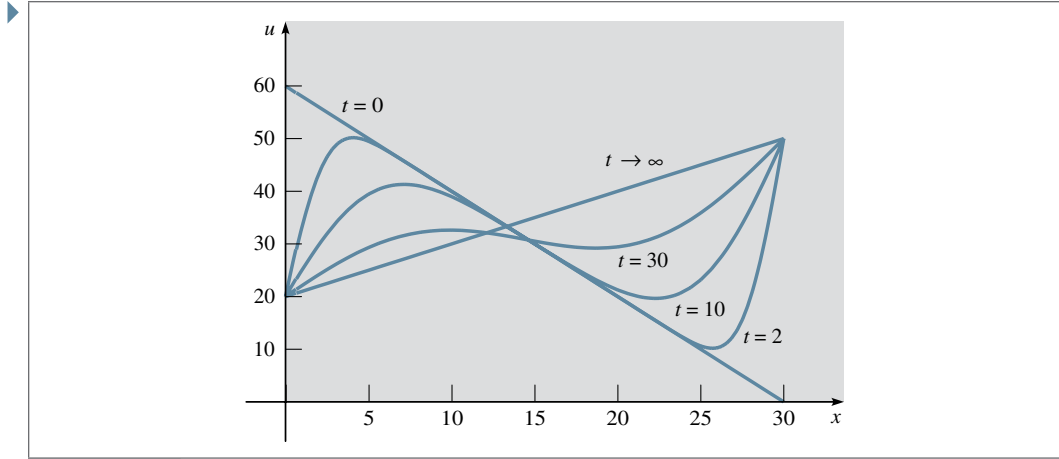


Figure 8.7.1 Distributions de température en divers temps pour le problème de conduction de la chaleur de l'exemple 1.

Une tige avec des extrémités isolées Un problème légèrement différent se présente si les extrémités de la tige sont isolées de sorte que la chaleur ne puisse les traverser. Selon l'équation (2) de l'annexe A, le débit de chaleur passant par la coupe transversale est proportionnel au taux de variation de la température dans la direction de l'axe des x . Ainsi, dans le cas où il n'y a aucun débit de chaleur, les conditions limites sont

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (24)$$

On peut aussi résoudre le problème posé par les équations (1), (3) et (24) à l'aide de la méthode de séparation des variables. On pose

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (25)$$

et on fait la substitution de u dans l'équation (1). Comme dans la section 8.6, on a

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{T'}{T} = -\lambda, \quad (26)$$

où λ est la constante de séparation. Ainsi, on obtient de nouveau les deux équations différentielles ordinaires

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (27)$$

$$T' + \alpha^2 \lambda T = 0. \quad (28)$$

Quelle que soit la valeur de λ , un produit des solutions aux équations (27) et (28) constitue une solution à l'équation aux dérivées partielles (1). Cependant, on s'intéresse uniquement aux solutions qui satisfont aussi aux conditions limites (24).

Si on substitue l'expression de $u(x, t)$ de l'équation (25) dans la condition limite en $x = 0$, on obtient $X'(0)T(t) = 0$. On ne peut permettre que $T(t)$ soit nulle pour tout t , puisque $u(x, t)$ sera aussi nulle pour tout t . Ainsi, on doit avoir

$$X'(0) = 0. \quad (29)$$

En procédant de la même manière avec la condition limite en $x = L$, on trouve

$$X'(L) = 0. \quad (30)$$

Par conséquent, on désire résoudre l'équation (27), qui est soumise aux conditions limites (29) et (30). On peut montrer que les solutions non triviales à ce problème existent seulement si λ est réelle (voir le problème 18). On supposera donc que λ est réelle et on considérera successivement les cas où $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda > 0$.

Si $\lambda < 0$, on pose $\lambda = -\mu^2$, où μ est réelle et positive. Alors, l'équation (27) devient $X'' - \mu^2 X = 0$, et sa solution générale est

$$X(x) = k_1 \sinh \mu x + k_2 \cosh \mu x. \quad (31)$$

Dans ce cas, les conditions limites sont satisfaites uniquement en choisissant $k_1 = k_2 = 0$. Puisque cela ne mène à rien, il s'ensuit que λ ne peut être négative. Autrement dit, le problème (27), (29) et (30) n'admet aucune valeur propre négative.

Si $\lambda = 0$, alors l'équation (27) est $X'' = 0$. Donc,

$$X(x) = k_1 x + k_2. \quad (32)$$

Les conditions limites (29) et (30) exigent que $k_1 = 0$, mais elles ne déterminent pas k_2 . Ainsi, $\lambda = 0$ est une valeur propre correspondant à la fonction propre $X(x) = 1$. Pour $\lambda = 0$, à partir de l'équation (28), il s'ensuit que $T(t)$ est également une constante qu'on peut combiner avec k_2 . Ainsi, pour $\lambda = 0$, on obtient la solution constante $u(x, t) = k_2$.

Finalement, si $\lambda > 0$, on pose $\lambda = \mu^2$, où μ est réelle et positive. L'équation (27) devient $X'' + \mu^2 X = 0$ et, par conséquent,

$$X(x) = k_1 \sin \mu x + k_2 \cos \mu x. \quad (33)$$

La condition limite (29) fait en sorte que $k_1 = 0$ et la condition limite (30), que $\mu = n\pi/L$ pour $n = 1, 2, 3, \dots$, mais k_2 demeure arbitraire. Par conséquent, le problème (27), (29) et (30) possède une suite infinie de valeurs propres positives $\lambda = n^2\pi^2/L^2$, et les fonctions propres correspondantes sont $X(x) = \cos(n\pi x/L)$. Pour ces valeurs de λ , les solutions $T(t)$ à l'équation (28) sont proportionnelles à $\exp(-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2)$.

En combinant ces résultats, on obtient les solutions fondamentales au problème (1), (3) et (24):

$$u_0(x, t) = 1, \quad (34)$$

$$u_n(x, t) = e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

où les constantes arbitraires de proportionnalité ont été omises. Chacune de ces fonctions satisfait à l'équation différentielle (1) et aux conditions limites (24). Puisque l'équation différentielle et les conditions limites sont linéaires et homogènes, toute combinaison linéaire finie des solutions fondamentales les satisfait. On supposera que cela s'applique également aux combinaisons linéaires infinies convergentes des solutions fondamentales. Ainsi, pour satisfaire à la condition initiale (3), on suppose que $u(x, t)$ est de la forme

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} u_0(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t)$$

$$= \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2\pi^2\alpha^2 t/L^2} \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (35)$$

On détermine les coefficients c_n selon

$$u(x, 0) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{L} = f(x). \quad (36)$$

Ainsi, les coefficients inconnus de l'équation (35) doivent être les coefficients de la série de Fourier cosinus de période $2L$ pour f . Par conséquent,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

Avec le choix des coefficients $c_0, c_1, c_2, \dots$, la série (35) donne la solution au problème de conduction de la chaleur dans une tige dont les extrémités sont isolées, soit les équations (1), (3) et (24).

Il faut noter qu'on peut aussi considérer la solution (35) comme la somme d'une distribution de température à l'état stable (donnée par la constante $c_0/2$), qui est indépendante du temps t , et d'une distribution transitoire (donnée par les autres termes de la série infinie) qui tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini. Le fait que l'état stable soit une constante concorde avec la prévision selon laquelle le processus de conduction de la chaleur permettra graduellement d'égaler la distribution de température dans la tige si aucune chaleur ne s'échappe vers l'extérieur. L'interprétation physique du terme

$$\frac{c_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) dx \quad (38)$$

est la valeur moyenne de la distribution de température originale.

Exemple 2

Trouvez la température dans une tige de métal d'une longueur de 25 cm dont les extrémités et les côtés sont isolés et dont la distribution de température initiale est $u(x, 0) = x$ pour $0 < x < 25$.

La température dans la tige satisfait au problème de conduction de la chaleur (1), (3) et (24) avec $L = 25$. Ainsi, à partir de l'équation (35), la solution est

$$u(x, t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / 625} \cos \frac{n \pi x}{25}, \quad (39)$$

où les coefficients sont déterminés à partir de l'équation (37). On a

$$c_0 = \frac{2}{25} \int_0^{25} x \, dx = 25 \quad (40)$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2}{25} \int_0^{25} x \cos \frac{n \pi x}{25} \, dx \\ &= 50(\cos n \pi - 1)/(n \pi)^2 = \begin{cases} -100/(n \pi)^2, & n \text{ est impair;} \\ 0, & n \text{ est pair.} \end{cases} \end{aligned} \quad (41)$$

Ainsi,

$$u(x, t) = \frac{25}{2} - \frac{100}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / 625} \cos(n \pi x / 25) \quad (42)$$

est la solution au problème.

Pour $\alpha^2 = 1$, la figure 8.7.2 illustre les graphiques de la distribution de la température dans la tige en différents temps. Une fois de plus, la convergence de la série est rapide, de sorte que quelques termes seulement sont nécessaires pour obtenir ces graphiques.

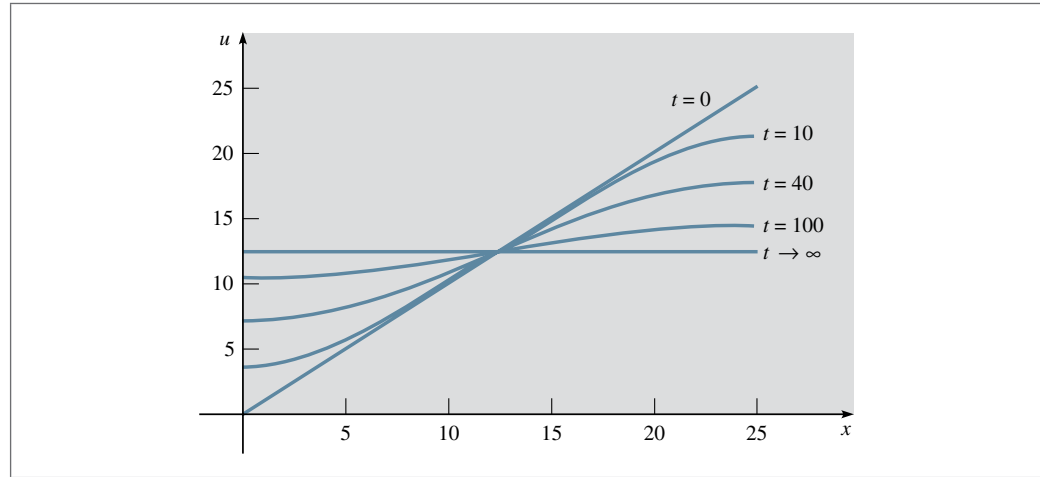


Figure 8.7.2 Distributions de température en différents temps pour le problème de conduction de la chaleur de l'exemple 2.

Quelques problèmes plus généraux On peut aussi utiliser la méthode de séparation des variables pour résoudre des problèmes de conduction de la chaleur avec d'autres conditions limites que celles qui ont été données par les équations (8) et (24). Par exemple, l'extrémité gauche de la tige peut être maintenue à une température fixe T , tandis que l'autre extrémité est isolée. Dans ce cas, les conditions limites sont

$$u(0, t) = T, \quad u_x(L, t) = 0, \quad t > 0. \quad (43)$$

La première étape pour résoudre ce problème consiste à réduire les conditions limites données à des conditions homogènes en soustrayant la solution à l'état stable. On résout le problème résultant à l'aide de la même démarche que celle qui a été utilisée pour les problèmes considérés

précédemment. Le développement de la fonction initiale f à l'extérieur de l'intervalle $[0, L]$ est toutefois différent de celui des cas considérés jusqu'à maintenant (voir le problème 15).

Une condition limite plus générale survient quand le flux de chaleur passant par l'extrémité de la tige est proportionnel à la température. Dans l'annexe A, on montrera que les conditions limites dans ce cas sont de la forme

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) + h_2 u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (44)$$

où h_1 et h_2 sont des constantes non négatives. Si on applique la méthode de séparation des variables au problème constitué par les équations (1), (3) et (44), on trouve que $X(x)$ doit être une solution à

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) - h_1 X(0) = 0, \quad X'(L) + h_2 X(L) = 0, \quad (45)$$

où λ est la constante de séparation. Une fois de plus, il est possible de montrer que des solutions non triviales peuvent exister uniquement pour des valeurs réelles non négatives de λ , qui sont les valeurs propres. Toutefois, ces valeurs sont tirées d'une formule complexe (voir le problème 20). On peut aussi montrer que les solutions correspondant aux équations (45), qui sont les fonctions propres, satisfont à la relation d'orthogonalité et que la condition initiale (3) est satisfaite en superposant les solutions aux équations (45). Les séries ainsi obtenues ne seront pas abordées ici.

Problèmes

■ Dans les problèmes 1 à 8, trouvez la solution à l'état stable à l'équation de conduction de la chaleur $\alpha^2 u_{xx} = u_t$, satisfaisant à l'ensemble donné de conditions limites.

1. $u(0, t) = 10, \quad u(50, t) = 40$

2. $u(0, t) = 30, \quad u(40, t) = -20$

3. $u_x(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$

4. $u_x(0, t) = 0, \quad u(L, t) = T$

5. $u(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0$

6. $u(0, t) = T, \quad u_x(L, t) = 0$

7. $u_x(0, t) - u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = T$

8. $u(0, t) = T, \quad u_x(L, t) + u(L, t) = 0$

⊙ 9. Supposez qu'une tige d'aluminium de 20 cm de longueur est d'une température uniforme initiale de 25 °C. Supposez aussi qu'au temps $t = 0$, l'extrémité $x = 0$ est refroidie à 0 °C, tandis que l'extrémité $x = 20$ est chauffée à 60 °C et que toutes les deux sont maintenues par la suite à ces températures.

a) Trouvez la distribution de la température dans la tige au temps t .

b) Tracez les graphiques de la distribution de la température initiale, de la distribution de la température finale (à l'état stable) et des distributions de la température en deux temps intermédiaires et illustrez-les dans un même plan.

c) Tracez le graphique de u en fonction de t pour $x = 5, 10$ et 15 .

d) Déterminez l'intervalle de temps qui s'écoule avant que la température en $x = 5$ cm atteigne moins de 1 % de sa valeur à l'état stable (et qu'elle y demeure).

⊙ 10. a) Supposez que les extrémités d'une tige de cuivre de 100 cm de longueur sont maintenues à 0 °C. Supposez aussi que le centre de la tige est chauffé à 100 °C par une source de chaleur externe et que cette situation est maintenue jusqu'à ce qu'un état stable soit atteint. Trouvez cette distribution de température à l'état stable.

b) Au temps $t = 0$ [après avoir atteint l'état stable de la partie a)], supposez que la source de chaleur est retirée. Parallèlement, supposez que l'extrémité $x = 0$ est mise en contact thermique avec un réservoir à 20 °C, tandis que l'autre extrémité demeure à 0 °C. Trouvez la température en fonction de la position et du temps.

c) Tracez le graphique de u en fonction de plusieurs valeurs de t . De plus, tracez le graphique de u en fonction de t pour plusieurs valeurs de x .

d) Quelle valeur limite la température au centre de la tige approche-t-elle après un long moment ? Combien de temps doit-il s'écouler avant que le centre de la tige ne se refroidisse à moins de 1 °C de sa valeur limite ?

- 11. Considérez une tige d'une longueur de 30 cm pour laquelle $\alpha^2 = 1$. Supposez que la distribution de température initiale est donnée par $u(x, 0) = x(60 - x)/30$ et que les conditions limites sont $u(0, t) = 30$ et $u(30, t) = 0$.
- Trouvez la température dans la tige en fonction de la position et du temps.
 - Tracez le graphique de u en fonction de plusieurs valeurs de t . De plus, tracez le graphique de u en fonction de t pour plusieurs valeurs de x .
 - Tracez le graphique de u en fonction de t pour $x = 12$. Vous devez noter que u diminue au départ, puis qu'elle augmente pendant un certain temps et diminue finalement pour s'approcher de sa valeur à l'état stable. Expliquez, sur le plan physique, la raison pour laquelle on observe alors ce comportement.
12. Considérez une tige uniforme de longueur L dont la température initiale est donnée par $u(x, 0) = \sin(\pi x/L)$, $0 \leq x \leq L$. Supposez que les deux extrémités de la tige sont isolées.
- Trouvez la température $u(x, t)$.
 - Quelle est la température à l'état stable lorsque $t \rightarrow \infty$?
 - Soit $\alpha^2 = 1$ et $L = 40$. Tracez le graphe de u en fonction de x pour différentes valeurs de t . De plus, tracez le graphique de u en fonction de t pour différentes valeurs de x .
 - Décrivez brièvement comment la température dans la tige varie avec le temps.
13. Considérez une tige de 40 cm de longueur dont la température initiale est donnée par $u(x, 0) = x(60 - x)/30$. Supposez que $\alpha^2 = 1/4 \text{ cm}^2/\text{s}$ et que les deux extrémités de la tige sont isolées.
- Trouvez la température $u(x, t)$.
 - Tracez le graphique de u en fonction de x pour plusieurs valeurs de t . De plus, tracez le graphique de u en fonction de t pour plusieurs valeurs de x .
 - Déterminez la température à l'état stable dans la tige.
 - Déterminez combien de temps s'écoulera avant que la température en $x = 40$ se situe à moins de 1°C de sa valeur à l'état stable.
14. Considérez une tige de 30 cm de longueur fabriquée à partir d'un matériau pour lequel $\alpha^2 = 1$ et dont les extrémités sont isolées. Supposez que la température initiale est nulle, sauf dans l'intervalle $5 < x < 10$, où la température initiale est de 25°C .
- Trouvez la température $u(x, t)$.
 - Tracez le graphique de u en fonction de x pour plusieurs valeurs de t . De plus, tracez le graphique de u en fonction de t pour plusieurs valeurs de x .
 - Tracez le graphique de $u(4, t)$ et de $u(11, t)$ en fonction de t . Vous devez noter que les points $x = 4$ et $x = 11$ sont positionnés symétriquement en fonction de l'impulsion de température initiale, mais que leurs graphiques de température sont très différents. Expliquez ce phénomène sur le plan physique.
15. Considérez une tige uniforme de longueur L dont la distribution de température initiale est donnée par $f(x)$, $0 \leq x \leq L$. Supposez que la température à l'extrémité $x = 0$ est maintenue à 0°C et que l'extrémité $x = L$ est isolée de sorte qu'aucune chaleur ne la traverse.
- Montrez que les solutions fondamentales à l'équation aux dérivées partielles et aux conditions limites sont

$$u_n(x, t) = e^{-(2n-1)^2 \pi^2 \alpha^2 t / 4L^2} \sin[(2n-1)\pi x / 2L], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Trouvez un développement en série pour la température $u(x, t)$,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t),$$

qui satisfait également à la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$.

Suggestion : Même si les solutions fondamentales ne comportent que les sinus impairs, il reste possible de représenter f à l'aide d'une série de Fourier comportant uniquement ces fonctions. Reportez-vous au problème 39 de la section 8.5.

- 16. Pour la tige du problème 15, supposez que $L = 30$, $\alpha^2 = 1$ et que la distribution de température initiale est $f(x) = 30 - x$ dans $0 < x < 30$.
- Trouvez la température $u(x, t)$.
-

-
- b) Tracez le graphique de u en fonction de x pour plusieurs valeurs de t . De plus, tracez le graphique de u en fonction de t pour plusieurs valeurs de x .
- c) Comment l'emplacement x_m du point le plus chaud dans la tige change-t-il lorsque t augmente ? Tracez un graphique de x_m en fonction de t .
- d) Tracez le graphique de la température maximale dans la tige en fonction de t .
- ④ 17. Supposez que les conditions sont les mêmes que dans les problèmes 15 et 16, sauf que la condition limite en $x = 0$ est $u(0, t) = 40$.
- a) Trouvez la température $u(x, t)$.
- b) Tracez le graphique de u en fonction de x pour plusieurs valeurs de t . De plus, tracez le graphique de u en fonction de t pour plusieurs valeurs de x .
- c) Comparez les graphiques obtenus dans ce problème à ceux du problème 16. Expliquez comment le changement dans la condition limite en $x = 0$ provoque les différences notées dans le comportement de la température dans la tige.
18. Considérez le problème

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0. \quad (i)$$

Soit $\lambda = \mu^2$, où $\mu = \nu + i\sigma$ avec ν et σ réelles. Montrez que si $\sigma \neq 0$, alors la seule solution aux équations (i) est la solution triviale $X(x) = 0$.

Suggestion : Utilisez un raisonnement similaire à celui du problème 17 de la section 8.2.

19. L'extrémité droite d'une tige de longueur a ayant une conductivité thermique κ_1 et une superficie de section transversale A_1 est reliée à l'extrémité gauche d'une tige de conductivité thermique κ_2 et de section transversale A_2 . La tige composée a une longueur totale L . Supposez que l'extrémité $x = 0$ est maintenue à une température nulle et que l'extrémité $x = L$ est conservée à une température T . Trouvez la température à l'état stable de la tige composée en supposant que la température et le débit de chaleur sont continus en $x = a$.

Suggestion : Reportez-vous à l'équation (2) de l'annexe A.

20. Considérez le problème

$$\begin{aligned} \alpha^2 u_{xx} &= u_t, & 0 < x < L, & \quad t > 0; \\ u(0, t) &= 0, & u_x(L, t) + \gamma u(L, t) &= 0, & \quad t > 0; \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq L. \end{aligned} \quad (i)$$

- a) Soit $u(x, t) = X(x)T(t)$. Montrez que

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0, \quad X'(L) + \lambda X(L) = 0 \quad (ii)$$

et

$$T' + \lambda \alpha^2 T = 0,$$

où λ est une constante de séparation.

- b) Supposez que λ est réelle et montrez que le problème (ii) n'admet aucune solution non triviale si $\lambda \leq 0$.
- c) Si $\lambda > 0$, supposez que $\lambda = \mu^2$ et que $\mu > 0$. Montrez que le problème (ii) admet des solutions non triviales seulement si μ est une solution à l'équation

$$\mu \cos \mu L + \gamma \sin \mu L = 0. \quad (iii)$$

- d) Réécrivez l'équation (iii) sous la forme $\tan \mu L = -\mu/\gamma$. Ensuite, en traçant les graphiques de $y = \tan \mu L$ et de $y = -\mu L/\gamma L$ lorsque $\mu > 0$ sur un même ensemble d'axes, montrez que l'équation (iii) est satisfaite par un nombre infini de valeurs positives de μ . Notez-les $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$, placées en ordre croissant.
- e) Déterminez l'ensemble de solutions fondamentales $u_n(x, t)$ correspondant aux valeurs μ_n trouvées dans la partie d).

8.8 L'équation d'onde – la corde vibrante

Une deuxième équation aux dérivées partielles qu'on rencontre souvent en mathématiques appliquées est l'équation d'onde⁹. Cette équation, sous la forme présentée ici ou sous une forme plus générale, apparaît systématiquement dans toute analyse mathématique des phénomènes de propagation des ondes dans un milieu continu. Par exemple, les études portant sur les ondes acoustiques, les ondes sur l'eau, les ondes électromagnétiques et les ondes sismiques sont toutes basées sur cette équation.

Pour représenter la situation, on considère les vibrations mécaniques. Une corde vibrante de longueur L est étirée entre deux supports au même niveau horizontal de sorte que l'axe des x se situe le long de la corde (voir la figure 8.8.1). On peut imaginer que cette corde vibrante est une corde de violon, un étai ou même un fil électrique. On suppose que la corde est mise en mouvement (en la pinçant, par exemple) afin qu'elle vibre sur un plan vertical. On suppose aussi que $u(x, t)$ mesure le déplacement vertical de la corde au point x et au temps t . Si on ne tient pas compte de l'effet des forces d'amortissement, comme la résistance de l'air, et si l'amplitude du mouvement n'est pas trop prononcée, alors $u(x, t)$ satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad (1)$$

dans le domaine $0 < x < L, t > 0$. L'équation (1) est l'**équation d'onde** et on montre comment l'obtenir dans l'annexe B, à la fin du chapitre. Le coefficient constant a^2 qui apparaît dans l'équation (1) est

$$a^2 = T/\rho, \quad (2)$$

où T est la tension (la force) dans la corde et ρ la masse par unité de longueur du matériau de la corde. Il s'ensuit que a admet des unités de temps divisé par la longueur, autrement dit de vitesse. Dans le problème 14, on montre que a est la vitesse de propagation des ondes le long de la corde.

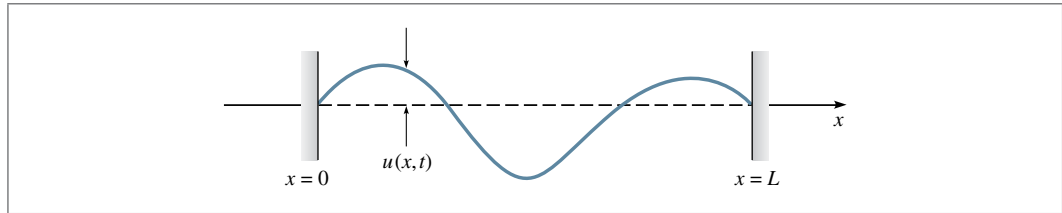


Figure 8.8.1 Corde vibrante.

Pour décrire le mouvement de la corde, on doit préciser les conditions initiales et limites appropriées pour le déplacement $u(x, t)$. On suppose que les extrémités demeurent fixes et, par conséquent, les conditions limites sont

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Puisque l'équation différentielle (1) est du deuxième ordre en fonction de t , on a besoin de deux conditions initiales. Il s'agit de la position initiale de la corde

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (4)$$

9. La solution à l'équation d'onde a été l'un des principaux problèmes mathématiques du milieu du XVIII^e siècle. Jean Le Rond D'Alembert a été le premier à obtenir et à étudier l'équation d'onde en 1746. Celle-ci a également intéressé Leonhard Euler (1748), Daniel Bernoulli (1753) et Joseph Louis Lagrange (1759). Différentes formes de solutions ont été obtenues. Les attributs et les relations entre ces solutions ont fait l'objet de vifs débats dans une série d'articles publiés sur une période de plus de 25 ans. Les principaux points discutés portaient sur la nature d'une fonction et les types de fonctions qu'on pouvait représenter au moyen de séries trigonométriques. Ces problèmes n'ont été résolus qu'au XIX^e siècle.

et de sa vitesse initiale

$$u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (5)$$

où f et g sont des fonctions données. Pour que les équations (3), (4) et (5) soient cohérentes, il faut que

$$f(0) = f(L) = 0, \quad g(0) = g(L) = 0. \quad (6)$$

Le problème mathématique consiste donc à déterminer la solution à l'équation d'onde (1) qui satisfait également aux conditions limites (3) et aux conditions initiales (4) et (5). Tout comme le problème de conduction de la chaleur des sections 8.6 et 8.7, ce problème est un problème de valeur initiale relativement à la variable temporelle t et un problème de valeur limite relativement à la variable spatiale x . On peut aussi le considérer comme un problème de valeur limite dans la bande semi-infinie $0 < x < L, t > 0$ du plan xt (voir la figure 8.8.2). Une condition est imposée en chaque point sur les côtés semi-infinis, et deux conditions sont imposées en chaque point de la base finie.

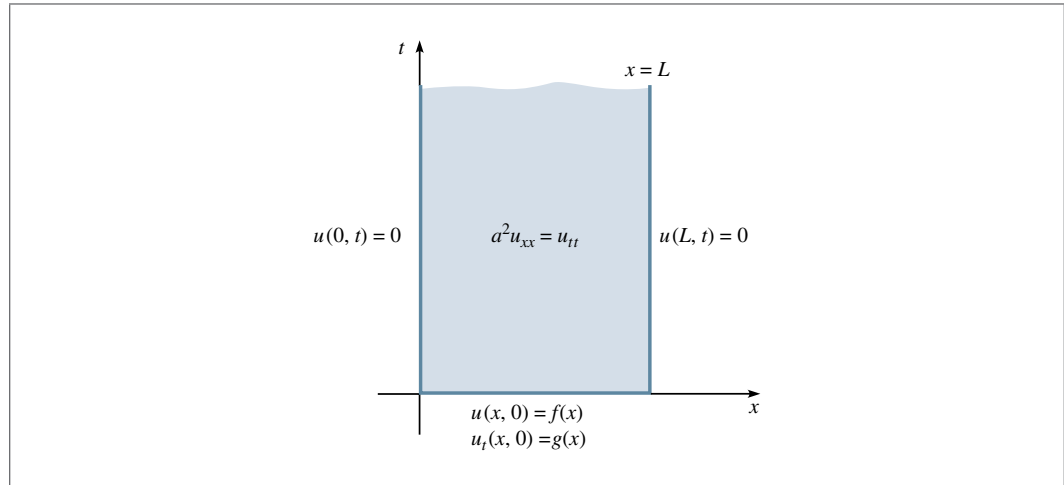


Figure 8.8.2 Problème de valeur limite pour l'équation d'onde.

Il est à noter que l'équation (1) régit un grand nombre de problèmes de propagation des ondes en plus des vibrations verticales d'une corde vibrante. En interprétant la fonction u et la constante a de façon appropriée, on peut par exemple traiter les problèmes du comportement des vagues dans l'océan, des ondes acoustiques et électromagnétiques dans l'atmosphère ou des ondes élastiques d'un corps solide. Si cette équation fait intervenir plus d'une variable spatiale, il faut la généraliser. L'équation d'onde en deux dimensions est

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}. \quad (7)$$

Cette équation apparaît, par exemple, quand on étudie le mouvement d'une mince feuille élastique, comme la peau d'un tambour. D'une façon similaire, en trois dimensions, l'équation d'onde est

$$a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}. \quad (8)$$

Dans les deux dernières équations, il faut aussi généraliser de façon appropriée les conditions limites et initiales.

On résout maintenant certains problèmes typiques de valeur limite comprenant l'équation d'onde unidimensionnelle.

Une corde vibrante avec un déplacement initial non nul On suppose d'abord qu'on déplace la corde de sa position d'équilibre et qu'on la relâche ensuite au temps $t = 0$ avec une

vitesse nulle de sorte qu'elle vibre librement. Le déplacement vertical $u(x, t)$ doit alors satisfaire à l'équation d'onde

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

aux conditions limites (3)

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0$$

et aux conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \quad (9)$$

où f est une fonction décrivant la configuration de la corde en $t = 0$.

On peut utiliser la méthode de séparation des variables pour obtenir la solution aux équations (1), (3) et (9). En supposant que

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (10)$$

et en substituant cette expression à u dans l'équation (1), on obtient

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{a^2} \frac{T''}{T} = -\lambda, \quad (11)$$

où λ est la constante de séparation. Ainsi, $X(x)$ et $T(t)$ doivent satisfaire aux équations différentielles ordinaires

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (12)$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \quad (13)$$

De plus, en substituant l'expression de l'équation (10) à $u(x, t)$ dans les conditions limites (3), $X(x)$ doit satisfaire aux conditions limites

$$X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \quad (14)$$

Finalement, à partir de l'équation (10), en faisant la substitution dans la deuxième des conditions initiales (9), $T(t)$ doit satisfaire à la condition initiale

$$T'(0) = 0. \quad (15)$$

Il faut maintenant déterminer $X(x)$, $T(t)$ et λ en résolvant l'équation (12), qui est soumise aux conditions limites (14) et l'équation (13), qui est soumise à la condition initiale (15).

Le problème consistant à résoudre l'équation différentielle (12) avec les conditions limites (14) est précisément le même problème que celui qui a été introduit dans la section 8.6 pour l'équation de la conduction de chaleur. Par conséquent, on peut utiliser les résultats obtenus dans ce problème et à la fin de la section 8.2 : les problèmes (12) et (14) admettent des solutions non triviales si et seulement si λ est une valeur propre

$$\lambda = n^2 \pi^2 / L^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (16)$$

et $X(x)$ est proportionnelle à la fonction propre correspondante $\sin(n\pi x/L)$.

En reportant dans l'équation (13) les valeurs de λ données dans l'équation (16), on obtient

$$T'' + \frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} T = 0. \quad (17)$$

Par conséquent,

$$T(t) = k_1 \cos \frac{n\pi a t}{L} + k_2 \sin \frac{n\pi a t}{L}, \quad (18)$$

où k_1 et k_2 sont des constantes arbitraires. La condition initiale (15) fait en sorte que $k_2 = 0$ et $T(t)$ doit donc être proportionnelle à $\cos(n\pi a t/L)$.

Ainsi, les fonctions

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (19)$$

satisfont à l'équation aux dérivées partielles (1), aux conditions limites (3) et à la deuxième condition initiale (9). Ces fonctions sont les solutions fondamentales au problème.

Pour satisfaire complètement à la condition initiale (9), qui n'est pas homogène, on doit superposer les solutions fondamentales (19) en choisissant correctement les coefficients. On suppose que $u(x, t)$ est de la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L}, \quad (20)$$

où il faut déterminer les coefficients c_n . La condition initiale $u(x, 0) = f(x)$ exige que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} = f(x). \quad (21)$$

Donc, les coefficients c_n doivent être les coefficients de la série de Fourier sinus de période $2L$ pour f . Ainsi,

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (22)$$

Par conséquent, la solution au problème des équations (1), (3) et (9) est donnée par l'équation (20), où les coefficients sont calculés à partir de l'équation (22).

Pour une valeur fixe de n , l'expression $\sin(n\pi x/L) \cos(n\pi at/L)$ de l'équation (19) est périodique en t de période $2L/na$. Ainsi, elle représente une vibration de la corde admettant cette période ou ayant la fréquence $n\pi a/L$. Les quantités $\lambda_a = n\pi a/L$ pour $n = 1, 2, \dots$ sont les fréquences naturelles de la corde, soit les fréquences auxquelles la corde vibrera librement. Le facteur $\sin(n\pi x/L)$ représente le mode de déplacement se produisant dans la corde quand elle subit des vibrations de la fréquence donnée. Chaque mode de déplacement est un mode naturel de vibration et il est périodique en la variable spatiale x . La période spatiale $2L/n$ est la longueur d'onde du mode de fréquence $n\pi a/L$. Ainsi, les valeurs propres $n^2\pi^2/L^2$ du problème (12), (14) sont proportionnelles aux carrés des fréquences naturelles, et les fonctions propres $\sin(n\pi x/L)$ donnent les modes naturels. La figure 8.8.3 illustre les graphiques des trois premiers modes naturels. Le mouvement global de la corde décrit par la fonction $u(x, t)$ de l'équation (20) est donc une combinaison des modes naturels de vibration et est aussi une fonction périodique en t de période $2L/a$.

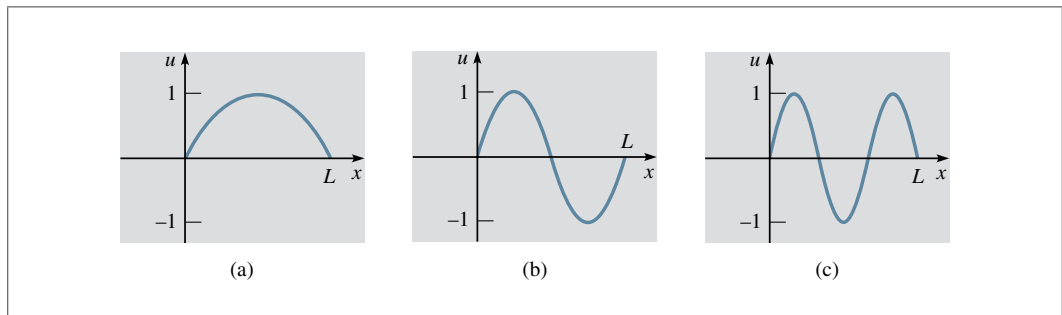


Figure 8.8.3 Trois premiers modes fondamentaux de vibration d'une corde vibrante :
 a) fréquence = $\pi a/L$, longueur d'onde = $2L$; b) fréquence = $2\pi a/L$, longueur d'onde = L ; c) fréquence = $3\pi a/L$, longueur d'onde = $2L/3$.

Exemple 1

Considérez une corde vibrante de longueur $L = 30$ qui satisfait à l'équation d'onde

$$4u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < 30, \quad t > 0. \quad (23)$$

Supposez que les extrémités de la corde sont fixes et que la corde est mise en mouvement avec une vitesse initiale nulle à partir de la position initiale

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x/10, & 0 \leq x \leq 10, \\ (30-x)/20, & 10 < x \leq 30. \end{cases} \quad (24)$$

Trouvez le déplacement $u(x, t)$ de la corde et décrivez son mouvement sur une période.

La solution est donnée par l'équation (20) avec $a = 2$ et $L = 30$, soit

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{30} \cos \frac{2n\pi t}{30}, \quad (25)$$

où c_n est obtenu à partir de l'équation (22). En substituant les résultats de l'équation (24) dans l'équation (22), on obtient

$$c_n = \frac{2}{30} \int_0^{10} \frac{x}{10} \sin \frac{n\pi x}{30} dx + \frac{2}{30} \int_{10}^{30} \frac{30-x}{20} \sin \frac{n\pi x}{30} dx. \quad (26)$$

En évaluant les intégrales dans l'équation (26), on trouve

$$c_n = \frac{9}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{3}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

La solution (25), (27) décrit le déplacement de la corde en tout point x , quel que soit le temps t . Le mouvement est périodique en t de période 30 et on n'a donc qu'à analyser la solution dans $0 \leq t \leq 30$.

Afin de se représenter la solution, on considère une animation informatisée présentant le comportement dynamique de la corde en vibration. On indique le mouvement de la corde dans les figures 8.8.4, 8.8.5 et 8.8.6. La figure 8.8.4 présente des graphiques de u en fonction de x pour $t = 0, 4, 7, 5, 11$ et 15. Il faut noter que le déplacement initial maximal est positif et qu'il se produit en $x = 10$, tandis qu'en $t = 15$, soit une demi-période plus tard, le déplacement maximal est négatif et se produit en $x = 20$. La corde revient alors sur son mouvement et retourne à sa configuration initiale en $t = 30$. La figure 8.8.5 à la page suivante montre le comportement des points $x = 10, 15$ et 20 avec les graphiques de u en fonction de t pour ces valeurs fixes de x . Les graphiques confirment que le mouvement est en effet périodique avec la période 30. Il faut également noter que chaque point de la corde n'est soumis à aucun mouvement à chaque tiers de période. La figure 8.8.6 à la page suivante illustre le graphique tridimensionnel de u en fonction de x et de t , à partir duquel la nature globale de la solution apparaît. Les courbes des figures 8.8.4 et 8.8.5 se trouvent sur la surface présentée à la figure 8.8.6.

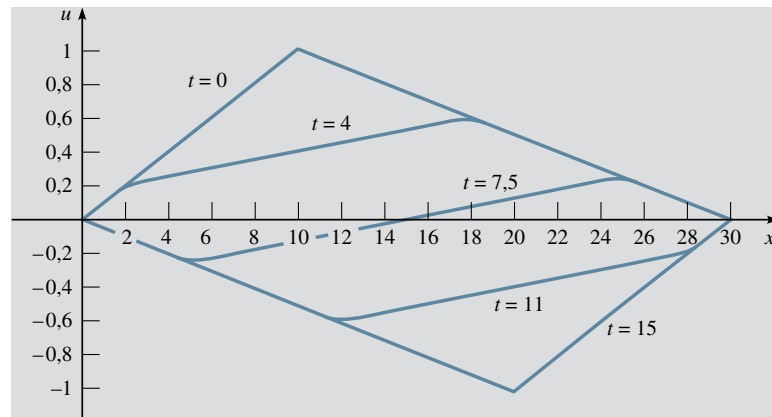


Figure 8.8.4 Graphiques de u en fonction de x pour des valeurs fixes de t relativement à la corde de l'exemple 1.

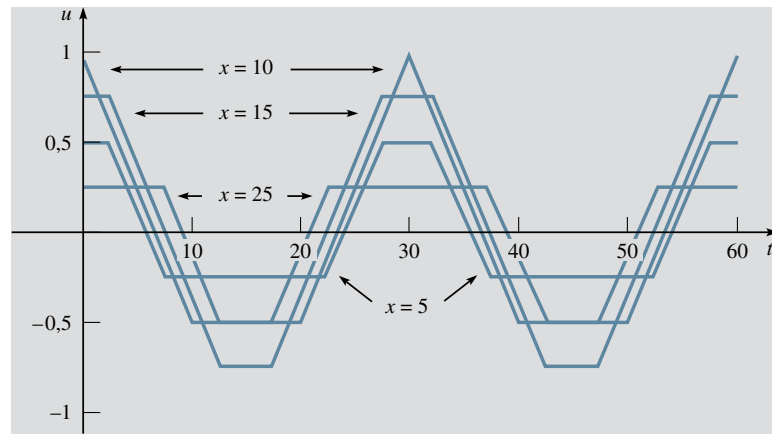


Figure 8.8.5 Graphiques de u en fonction de t pour des valeurs fixes de x relativement à la corde de l'exemple 1.

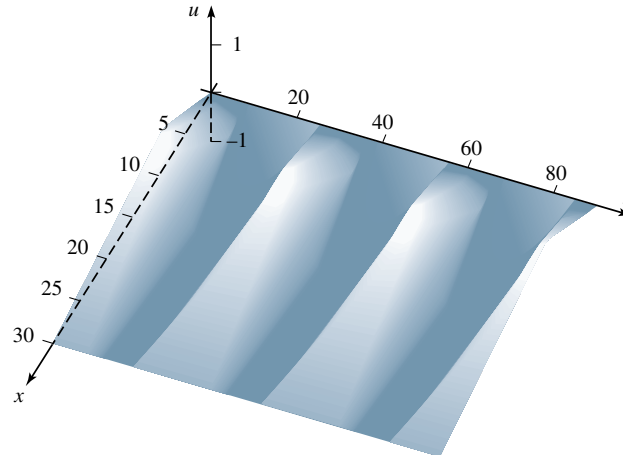


Figure 8.8.6 Graphique de u en fonction de x et de t pour la corde de l'exemple 1.

Justification de la solution Comme dans le problème de conduction de la chaleur considéré plus haut, l'équation (20), où les coefficients c_n sont donnés par l'équation (22), n'est qu'une solution formelle aux équations (1), (3) et (9). Pour s'assurer que l'équation (20) représente effectivement la solution au problème donné, on doit effectuer une autre recherche. Comme pour le problème de conduction de chaleur, il est tentant de le démontrer directement en substituant l'équation (20) à $u(x, t)$ dans les équations (1), (3) et (9). Cependant, en calculant u_{xx} , par exemple, on obtient

$$u_{xx}(x, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L}$$

et à cause de la présence du facteur n^2 dans le numérateur, cette série peut ne pas converger. Cela ne signifie pas nécessairement que la série (20) pour $u(x, t)$ est incorrecte, mais que la série (20) ne peut servir à calculer u_{xx} et u_{tt} . Une différence essentielle entre les solutions à l'équation d'onde et celle correspondant à l'équation de conduction de la chaleur est que cette dernière contient des termes exponentiels négatifs qui tendent rapidement vers zéro lorsque n augmente, ce qui assure la convergence de la solution en série et de ses dérivées. Toutefois, les solutions

en série à l'équation d'onde ne contiennent que des termes oscillatoires qui ne décroissent pas lorsque n augmente.

Il existe une autre méthode pour établir indirectement la validité de l'équation (20), qui permet même d'obtenir plus d'information sur la structure de la solution. Premièrement, on montre que l'équation (20) est équivalente à

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [h(x - at) + h(x + at)], \quad (28)$$

où h est la fonction obtenue en prolongeant la fonction initiale f dans $(-L, 0)$ comme fonction impaire, et à d'autres valeurs de x comme fonction périodique de période $2L$. Autrement dit,

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq L, \\ -f(-x), & -L < x < 0; \end{cases} \quad (29)$$

$$h(x + 2L) = h(x).$$

Pour établir l'équation (28), il faut noter que h admet comme série de Fourier

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (30)$$

Ensuite, en utilisant les identités trigonométriques pour le sinus d'une somme ou d'une différence, on obtient

$$h(x - at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} - \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L} \right),$$

$$h(x + at) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi at}{L} + \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L} \right)$$

et l'équation (28) en découle directement quand on additionne les deux dernières équations. À partir de l'équation (28), on voit que $u(x, t)$ est continue dans $0 < x < L$, $t > 0$ si h est continue dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Cela requiert que f soit continue dans l'intervalle original $[0, L]$. De même, u est deux fois différentiable de manière continue par rapport à l'une ou l'autre des variables dans $0 < x < L$, $t > 0$, si h est deux fois différentiable de manière continue dans $(-\infty, \infty)$. Pour que ce soit le cas, f' et f'' doivent être continues dans $[0, L]$. De plus, puisque h'' est le prolongement impair de f'' , il faut aussi que $f''(0) = f''(L) = 0$. Cependant, puisque h' est le prolongement pair de f' , aucune autre condition n'est imposée à f' . Si ces conditions sont satisfaites, on peut calculer u_{xx} et u_{tt} à partir de l'équation (28), et il s'agit d'un exercice élémentaire qui montre que ces dérivées satisfont à l'équation d'onde. Certains renseignements supplémentaires sont donnés dans les problèmes 19 et 20.

Si certaines des exigences de continuité énoncées dans le paragraphe précédent ne sont pas satisfaites, alors u n'est pas différentiable en certains points dans la bande à moitié finie $0 < x < L$, $t > 0$ et ne constitue donc qu'une solution restreinte à l'équation d'onde. Une conséquence physique importante qui en résulte est que si la fonction initiale f admet des discontinuités, alors celles-ci apparaîtront dans la solution $u(x, t)$. Pour ce qui est des problèmes de conduction de la chaleur, au contraire, les discontinuités initiales sont automatiquement distribuées (voir la section 8.7). On suppose que le déplacement initial f admet une discontinuité de type saut en $x = x_0$, $0 \leq x_0 \leq L$. Puisque h est un développement périodique de f , cette même discontinuité se retrouve pour $h(\xi)$ en $\xi = x_0 + 2nL$ et en $\xi = -x_0 + 2nL$, où n est un entier. Ainsi, $h(x - at)$ est discontinue quand $x - at = x_0 + 2nL$ ou quand $x - at = -x_0 + 2nL$. Pour un x fixe dans $[0, L]$, la discontinuité qui se trouvait au départ en x_0 réapparaîtra en $h(x - at)$ aux temps $t = (x \pm x_0 - 2nL)/a$. De la même manière, $h(x + at)$ est discontinue au point x aux temps $t = (-x \pm x_0 + 2mL)/a$, où m est un entier. Si on se reporte à l'équation (28), il s'ensuit que la solution $u(x, t)$ est également discontinue au point x en ces temps. Puisque le problème physique est posé lorsque $t > 0$, seules ces valeurs de m et de n produisant des valeurs positives de t sont intéressantes.

Le problème général pour la corde vibrante On modifie maintenant le problème considéré précédemment en supposant que la corde est mise en mouvement à partir de sa position d'équilibre avec une vitesse initiale non nulle. Le déplacement vertical $u(x, t)$ doit alors satisfaire à l'équation d'onde (1)

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

aux conditions limites (3)

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0$$

et aux conditions initiales

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \quad (31)$$

où $g(x)$ est la vitesse initiale au point x de la corde.

On peut obtenir la solution à ce nouveau problème en suivant la démarche décrite plus haut pour le problème (1), (3) et (9). En séparant les variables, le problème relatif à $X(x)$ est exactement le même qu'auparavant. Ainsi, une fois de plus, $\lambda = n^2\pi^2/L^2$ et $X(x)$ est proportionnelle à $\sin(n\pi x/L)$. L'équation différentielle pour $T(t)$ est de nouveau l'équation (17), mais la condition initiale connexe est maintenant

$$T(0) = 0, \quad (32)$$

ce qui correspond à la première des conditions initiales (31). La solution générale à l'équation (17) est donnée par l'équation (18), mais la condition initiale (32) a pour résultat que $k_1 = 0$. Par conséquent, $T(t)$ est maintenant proportionnelle à $\sin(n\pi at/L)$, et les solutions fondamentales au problème (1), (3) et (31) sont

$$u_n(x, t) = \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (33)$$

Chacune des fonctions $u_n(x, t)$ satisfait à l'équation d'onde (1), aux conditions limites (3) et à la première des conditions initiales (31). La principale conséquence liée à l'utilisation des conditions initiales (31) plutôt que (9) est que le facteur dépendant du temps dans $u_n(x, t)$ comporte un sinus plutôt qu'un cosinus.

Pour satisfaire au reste de la condition initiale (non homogène), on suppose qu'on peut exprimer $u(x, t)$ comme combinaison linéaire des solutions fondamentales (33); autrement dit,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi at}{L}. \quad (34)$$

Pour déterminer les valeurs des coefficients k_n , on dérive l'équation (34) par rapport à t , on pose $t = 0$ et on utilise la deuxième condition initiale (31). On obtient ainsi l'équation

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{L} k_n \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x). \quad (35)$$

Ainsi, les quantités $(n\pi a/L)k_n$ sont les coefficients de la série de Fourier sinus de période $2L$ pour g . Par conséquent,

$$\frac{n\pi a}{L} k_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (36)$$

Ainsi, l'équation (34), dont les coefficients sont donnés par l'équation (36), constitue une solution au problème des équations (1), (3) et (31). La validité de cette solution formelle peut être établie grâce à des raisonnements similaires à ceux qui ont été précédemment mentionnés pour la solution aux équations (1), (3) et (9).

Enfin, on étudie le problème qui comporte l'équation d'onde (1), les conditions limites (3) et les conditions initiales générales (4), (5):

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < L, \quad (37)$$

où $f(x)$ et $g(x)$ représentent respectivement la position initiale et la vitesse de la corde. Bien qu'on puisse résoudre ce problème en séparant les variables, comme dans les cas étudiés précédemment, il est important de noter qu'on peut aussi le résoudre simplement en additionnant les deux solutions précédentes obtenues respectivement à partir des conditions initiales (9) et (31). Pour le démontrer, on suppose que $v(x, t)$ est la solution au problème (1), (3) et (9) et que $w(x, t)$ est la solution au problème (1), (3) et (31). Alors, $v(x, t)$ est donnée par les équations (20) et (22), tandis que $w(x, t)$ est donnée par les équations (34) et (36). Maintenant, soit $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$. Quel problème $u(x, t)$ satisfait-elle ? Il faut d'abord noter que

$$a^2 u_{xx} - u_{tt} = (a^2 v_{xx} - v_{tt}) + (a^2 w_{xx} - w_{tt}) = 0 + 0 = 0, \quad (38)$$

donc que $u(x, t)$ satisfait à l'équation d'onde (1). Ensuite, on a

$$u(0, t) = v(0, t) + w(0, t) = 0 + 0 = 0, \quad u(L, t) = v(L, t) + w(L, t) = 0 + 0 = 0. \quad (39)$$

Alors, $u(x, t)$ satisfait aussi aux conditions limites (3). Finalement, on a

$$u(x, 0) = v(x, 0) + w(x, 0) = f(x) + 0 = f(x) \quad (40)$$

et

$$u_t(x, 0) = v_t(x, 0) + w_t(x, 0) = 0 + g(x) = g(x). \quad (41)$$

Ainsi, $u(x, t)$ satisfait aux conditions initiales générales (37).

On peut énoncer le résultat qu'on vient d'obtenir comme suit. Pour résoudre l'équation d'onde avec les conditions initiales générales (37), il est possible, plutôt, de résoudre les problèmes en quelque sorte plus simples respectivement avec les conditions initiales (9) et (31), puis d'additionner les deux solutions. Il s'agit d'une autre application du principe de superposition.

Problèmes

■ Considérez une corde vibrante de longueur L dont les extrémités sont fixées. La corde est mise en mouvement avec une vitesse initiale nulle à partir d'une position initiale $u(x, 0) = f(x)$. Dans les problèmes 1 à 4, suivez les étapes suivantes. Soit $L = 10$ et $a = 1$ dans les parties b) à d).

- Trouvez le déplacement de $u(x, t)$ pour la position initiale $f(x)$.
- Tracez le graphique de $u(x, t)$ en fonction de x dans $0 \leq x \leq 10$ et pour différentes valeurs de t entre $t = 0$ et $t = 20$.
- Tracez le graphique de $u(x, t)$ en fonction de x dans $0 \leq x \leq 20$ et pour différentes valeurs de x .
- Créez une animation de la solution dans le temps pour au moins une période.
- Décrivez le mouvement de la corde en quelques phrases.

1. $f(x) = \begin{cases} 2x/L, & 0 \leq x \leq L/2, \\ 2(L-x)/L, & L/2 < x \leq L \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 4x/L, & 0 \leq x \leq L/4, \\ 1, & L/4 < x < 3L/4, \\ 4(L-x)/L, & 3L/4 \leq x \leq L \end{cases}$

3. $f(x) = 8x(L-x)^2/L^3$

4. $f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 (L > 2), \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$

■ Considérez une corde vibrante de longueur L dont les extrémités sont fixées. La corde est mise en mouvement à partir de sa position d'équilibre avec une vitesse initiale $u_t(x, 0) = g(x)$. Dans les problèmes 5 à 8, suivez les étapes ci-après. Soit $L = 10$ et $a = 1$ dans les parties b) à d).

- Trouvez le déplacement $u(x, t)$ pour la position initiale $g(x)$.
- Tracez le graphique de $u(x, t)$ en fonction de x pour $0 \leq x \leq 10$ et pour différentes valeurs de t entre $t = 0$ et $t = 20$.

- c) Tracez le graphique de $u(x, t)$ en fonction de t dans $0 \leq x \leq 20$ et pour différentes valeurs de x .
 d) Créez une animation de la solution dans le temps pour au moins une période.
 e) Décrivez le mouvement de la corde en quelques phrases.

Ⓢ 5. $g(x) = \begin{cases} 2x/L, & 0 \leq x \leq L/2, \\ 2(L-x)/L, & L/2 < x \leq L \end{cases}$

Ⓢ 6. $g(x) = \begin{cases} 4x/L, & 0 \leq x \leq L/4, \\ 1, & L/4 < x < 3L/4, \\ 4(L-x)/L, & 3L/4 \leq x \leq L \end{cases}$

Ⓢ 7. $g(x) = 8x(L-x)^2/L^3$

Ⓢ 8. $g(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 (L > 2), \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$

9. Si une corde vibrante est libre à une extrémité, la condition limite à satisfaire est $u_x = 0$. Trouvez le déplacement $u(x, t)$ dans une corde vibrante de longueur L , fixée en $x = 0$ et libre en $x = L$. Cette corde est mise en mouvement avec une vitesse initiale nulle à partir de la position initiale $u(x, 0) = f(x)$, où f est une fonction donnée.

Suggestion: Montrez que les solutions fondamentales à ce problème, qui satisfont à toutes les conditions sauf la condition initiale non homogène, sont

$$u_n(x, t) = \sin \lambda_n x \cos \lambda_n a t,$$

où $\lambda_n = (2n-1)\pi/2L$, $n = 1, 2, \dots$. Comparez ce problème avec le problème 15 de la section 8.7. Portez une attention particulière au développement des fonctions initiales à l'extérieur de l'intervalle original $[0, L]$.

- Ⓢ 10. Considérez une corde vibrante de longueur L . L'extrémité $x = 0$ est maintenue fixe, tandis que l'extrémité $x = L$ est libre. Ainsi, les conditions limites sont $u(0, t)$ et $u_x(L, t)$. La corde est mise en mouvement avec une vitesse initiale nulle à partir de la position initiale $u(x, 0) = f(x)$, où

$$f(x) = \begin{cases} 1, & L/2 - 1 < x < L/2 + 1 (L > 2), \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- a) Trouvez le déplacement $u(x, t)$.
 b) Avec $L = 10$ et $a = 1$, tracez le graphique de u en fonction de x dans $0 \leq x \leq 10$ et pour différentes valeurs de t . Portez une attention particulière aux valeurs de t entre 3 et 7. Observez comment la perturbation initiale est réfléchiée à chaque extrémité de la corde.
 c) Avec $L = 10$ et $a = 1$, tracez le graphique de u en fonction de t pour différentes valeurs de x .
 d) Créez une animation de la solution dans le temps pour au moins une période.
 e) Décrivez le mouvement de la corde en quelques phrases.
 Ⓢ 11. Supposez que la corde du problème 10 est mise en mouvement à partir de la position initiale $f(x) = 8x(L-x)^2/L^3$. Suivez les instructions données au problème 10 pour ce nouveau problème.
 12. On peut introduire des variables adimensionnelles dans l'équation d'onde $a^2 u_{xx} = u_{tt}$ de la manière décrite ci-après.

- a) Soit $s = x/L$. Montrez que l'équation d'onde devient

$$a^2 u_{ss} = L^2 u_{tt}$$

- b) Montrez que L/a a les dimensions du temps et qu'on peut ainsi l'utiliser comme unité sur l'échelle temporelle. Finalement, soit $\tau = at/L$; montrez que l'équation d'onde se réduit à

$$u_{ss} = u_{\tau\tau}.$$

- Les problèmes 13 et 14 indiquent la forme de la solution générale à l'équation d'onde et la signification physique de la constante a .

13. a) Montrez que l'équation d'onde

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

peut être réduite à la forme $u_{\xi\eta} = 0$ en effectuant le changement de variables $\xi = x - at$, $\eta = x + at$.

b) Montrez que $u(x, t)$ peut s'écrire sous la forme

$$u(x, t) = \phi(x - at) + \psi(x + at),$$

où ϕ et ψ sont des fonctions arbitraires.

14. a) Tracez le graphique de la valeur de $\phi(x - at)$ lorsque $t = 0, 1/a, 2/a$ et t_0/a si $\phi(s) = \sin s$. Vous devez noter que pour tout $t \neq 0$, le graphique de $y = \phi(x - at)$ est le même que celui de $y = \phi(x)$ lorsque $t = 0$, mais qu'il est déphasé d'une distance at dans la direction positive de l'axe des x . Ainsi, a représente la vitesse à laquelle une perturbation se déplace le long de la corde.

b) Quelle est l'interprétation de $\phi(x + at)$?

15. Un fil d'acier d'une longueur de 5 pi est étiré par un effort de traction de 50 lb. Le fil a un poids par longueur unitaire de 0,026 lb/pi.

a) Trouvez la vitesse de propagation des ondes transversales dans le fil.

b) Trouvez les fréquences naturelles de vibration.

c) Si on augmente la tension dans le fil, comment les fréquences naturelles varient-elles ? Les modes naturels varient-ils également ?

16. Considérez l'équation d'onde

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

dans un milieu unidimensionnel infini soumis aux conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

- a) À l'aide de la forme de la solution obtenue au problème 13, montrez que ϕ et ψ doivent satisfaire à

$$\begin{aligned} \phi(x) + \psi(x) &= f(x), \\ -\phi'(x) + \psi'(x) &= 0. \end{aligned}$$

- b) Résolvez les équations de la partie a) pour ϕ et ψ et, par conséquent, montrez que

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - at) + f(x + at)].$$

D'Alembert a obtenu cette forme de solution en 1746.

Suggestion : Vous devez noter qu'il faut résoudre l'équation $\psi'(x) = \phi'(x)$ en choisissant $\psi(x) = \phi(x) + c$.

- c) Soit

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x < 1, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Montrez que

$$f(x - at) = \begin{cases} 2, & -1 + at < x < 1 + at, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

De plus, déterminez $f(x + at)$.

- d) Tracez le graphique de la solution trouvée à la partie b) en $t = 0, t = 1/2a, t = 1/a$ et $t = 2/a$, pour obtenir les résultats présentés à la figure 8.8.7 de la page suivante. Vous devez noter qu'un déplacement initial produit deux ondes se déplaçant dans des directions opposées depuis l'emplacement original. Chaque onde est constituée de la moitié du déplacement initial.

17. Considérez l'équation d'onde

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}$$

dans un milieu unidimensionnel infini soumis aux conditions initiales

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

- a) À l'aide de la forme de la solution obtenue au problème 13, montrez que

$$\begin{aligned} \phi(x) + \psi(x) &= 0, \\ -a\phi'(x) + a\psi'(x) &= g(x). \end{aligned}$$

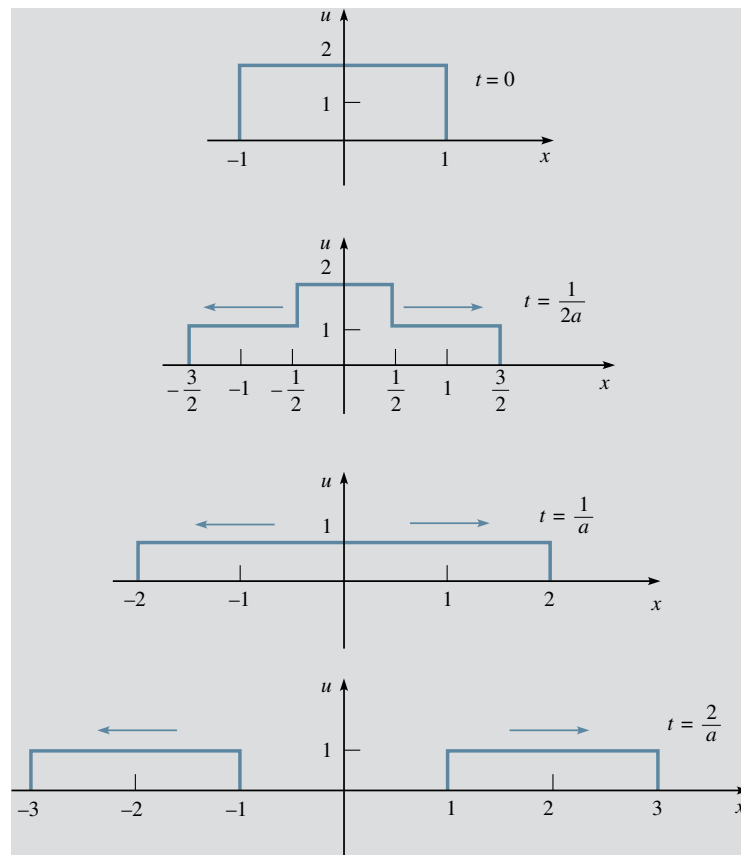


Figure 8.8.7 Propagation de la perturbation initiale dans un milieu unidimensionnel infini.

- b)** Utilisez la première équation de la partie a) pour montrer que $\psi'(x) = -\phi'(x)$. Ensuite, utilisez la deuxième équation pour montrer que $-2a\phi'(x) = g(x)$ et que, par conséquent,

$$\phi(x) = -\frac{1}{2a} \int_{x_0}^x g(\xi) d\xi + \phi(x_0),$$

où x_0 est arbitraire. Finalement, déterminez $\psi(x)$.

- c)** Montrez que

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi.$$

- 18.** En combinant les résultats des problèmes 16 et 17, montrez que la solution au problème

$$\begin{aligned} a^2 u_{xx} &= u_{tt}, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty \end{aligned}$$

est donnée par

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi.$$

- Les problèmes 19 et 20 indiquent comment on peut démontrer que la solution formelle (20), (22) aux équations (1), (3) et (9) peut constituer la solution à ce problème.

- 19.** En utilisant l'identité trigonométrique $\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)]$, montrez que la solution (20) au problème des équations (1), (3) et (9) peut s'écrire sous la forme (28).

- 20.** Soit $h(\xi)$ le déplacement initial dans $[0, L]$ prolongé sur $(-L, 0)$ comme fonction impaire et prolongé ailleurs comme fonction périodique de période $2L$. En supposant que h , h' et h'' sont toutes

continues, montrez par dérivation que $u(x, t)$ tel qu'il est donné dans l'équation (28) satisfait à l'équation d'onde (1) ainsi qu'aux conditions initiales (9). De plus, vous devez noter que puisque l'équation (20) satisfait clairement aux conditions limites (3), la même chose s'applique à l'équation (28). En comparant l'équation (28) à la solution au problème correspondant pour la corde infinie (voir le problème 16), on constate qu'elles ont la même forme pourvu que les données initiales pour la corde finie, d'abord définies seulement dans l'intervalle $0 \leq x \leq L$, soient prolongées de la manière donnée sur tout l'axe des x . Le cas échéant, la solution à la corde infinie est également applicable à la corde finie.

21. Le mouvement d'une membrane élastique circulaire, comme la peau d'un tambour, est régi par l'équation d'onde bidimensionnelle en coordonnées polaires

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = a^{-2}u_{tt}.$$

En supposant que $u(r, \theta, t) = R(r)\Theta(\theta)T(t)$, trouvez l'équation différentielle satisfaite par $R(r)$, $\Theta(\theta)$ et $T(t)$.

22. L'énergie totale d'une corde en vibration est donnée en fonction du temps par

$$E(t) = \int_0^L \left[\frac{1}{2} \rho u_t^2(x, t) + \frac{1}{2} T u_x^2(x, t) \right] dx, \quad (i)$$

où le premier terme est l'énergie cinétique causée par le mouvement de la corde et le deuxième terme est l'énergie potentielle créée par le déplacement de la corde qui s'éloigne de sa position d'équilibre.

Pour le déplacement $u(x, t)$ donné par l'équation (20), autrement dit pour la solution au problème de la corde ayant une vitesse initiale nulle, montrez que

$$E(t) = \frac{\pi^2 T}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 c_n^2. \quad (ii)$$

Vous devez noter que le second membre de l'équation (ii) ne dépend pas de t . Ainsi, l'énergie totale E est une constante et elle est donc conservée durant le mouvement de la corde.

Suggestion : Utilisez l'identité de Parseval (voir le problème 37 de la section 8.5 et le problème 17 de la section 8.4) et rappelez-vous que $a^2 = T/\rho$.

23. **Les ondes dispersives** Considérez l'équation d'onde modifiée

$$a^{-2}u_{tt} + \gamma^2 u = u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (i)$$

soumise aux conditions limites

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (ii)$$

et aux conditions initiales

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < L. \quad (iii)$$

- a) Montrez qu'on peut écrire la solution sous la forme

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \left(\sqrt{\frac{n^2 \pi^2}{L^2} + \gamma^2} at \right) \sin \frac{n\pi x}{L},$$

où

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

- b) En utilisant les identités trigonométriques, réécrivez la solution sous la forme

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left[\sin \frac{n\pi}{L} (x + a_n t) + \sin \frac{n\pi}{L} (x - a_n t) \right].$$

Déterminez a_n , la vitesse de propagation de l'onde.

- c) Remarquez que a_n , déterminé à la partie b), dépend de n . Cela signifie que les composantes de longueurs d'onde (ou de fréquences) différentes se propagent à des vitesses différentes, ce qui produit une distorsion de l'onde initiale au fil du temps. Ce phénomène s'appelle la **dispersion**. Trouvez la condition sous laquelle a_n est indépendant de n , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de dispersion.

- ▶ 24. Considérez la situation décrite au problème 23, où $a^2 = 1$, $L = 10$ et

$$f(x) = \begin{cases} x - 4, & 4 \leq x \leq 5, \\ 6 - x, & 5 \leq x \leq 6, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

- a) Déterminez les coefficients c_n dans la solution du problème 23 a).
b) Tracez le graphique de

$$\sum_{n=1}^N c_n \sin \frac{n\pi x}{10} \text{ pour } 0 \leq x \leq 10,$$

en choisissant une valeur de N suffisamment grande pour que le graphique corresponde avec précision au graphique de $f(x)$. Utilisez cette valeur de N pour les autres graphiques demandés dans ce problème.

- c) Posez $\gamma = 0$. Tracez le graphique de $u(x, t)$ en fonction de x pour $t = 60$.
d) Posez $\gamma = 1/8$. Tracez le graphique de $u(x, t)$ en fonction de x pour $t = 20, 40$ et 60 .
e) Posez $\gamma = 1/4$. Tracez le graphique de $u(x, t)$ en fonction de x pour $t = 20, 40$ et 60 .

8.9 L'équation de Laplace

Une des équations aux dérivées partielles les plus importantes qu'on rencontre en mathématiques appliquées est associée au nom de Laplace¹⁰. En deux dimensions, c'est l'équation

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1)$$

et en trois dimensions,

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \quad (2)$$

Par exemple, dans un problème de conduction de la chaleur bidimensionnelle, la température $u(x, y, t)$ doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t, \quad (3)$$

où α^2 est la diffusivité thermique. S'il existe un état stable, u est une fonction de x et de y seulement et la dérivée temporelle disparaît. Dans ce cas, l'équation (3) se réduit à l'équation (1). De même, pour le problème de conduction de chaleur à l'état stable en trois dimensions, la température doit satisfaire à la forme tridimensionnelle de l'équation de Laplace. On rencontre aussi les équations (1) et (2) dans d'autres domaines de la physique mathématique. Quand on considère les champs électrostatiques, la fonction de potentiel électrique dans un milieu diélectrique ne contenant aucune charge électrique doit satisfaire soit à l'équation (1), soit à l'équation (2), selon le nombre de dimensions spatiales en jeu. De même, la fonction de potentiel d'une particule dans un espace libre sur lequel seules les forces gravitationnelles agissent satisfait aux mêmes équations. Par conséquent, l'équation de Laplace est souvent appelée **l'équation du potentiel**. Un autre exemple provient de l'étude du mouvement irrotationnel, exempt de viscosité, bidimensionnel et stable (en fonction du temps) d'un fluide incompressible, qui se situe autour du centre de deux fonctions appelées fonction potentielle de vitesse et fonction d'écoulement, qui satisfont toutes les deux à l'équation (1). En ce qui concerne l'élasticité, les déplacements qui se produisent quand une tige parfaitement élastique est tordue sont décrits par la fonction de gauchissement, qui satisfait également à l'équation (1).

10. L'équation de Laplace a été nommée en l'honneur de Pierre-Simon de Laplace qui, dès 1782, a étudié sa solution en détail tout en analysant l'attraction gravitationnelle de corps arbitraires dans l'espace. Cependant, on a vu l'équation pour la première fois en 1752, dans un rapport de recherche sur l'hydrodynamique présenté par Leonhard Euler.

Puisqu'il n'y a aucune dépendance temporelle dans les problèmes mentionnés précédemment, les solutions à l'équation (1) ou (2) ne sont sujettes à aucune condition initiale. Toutefois, elles doivent satisfaire à certaines conditions limites sur la courbe limite ou la surface de la région dans laquelle l'équation différentielle doit être résolue. Puisque l'équation de Laplace est du deuxième ordre, deux conditions limites devraient être requises pour déterminer complètement la solution, ce qui n'est pas le cas. Il convient de se rappeler que dans le problème de conduction de la chaleur de la tige finie (voir les sections 8.6 et 8.7), on devait imposer une condition pour chaque extrémité de la tige, autrement dit une condition en chaque point limite. Si on généralise cette observation aux problèmes multidimensionnels, on devrait imposer une condition sur la fonction u en chaque point limite de la région dans laquelle on recherche une solution à l'équation (1) ou à l'équation (2). La condition limite la plus courante consiste à préciser la valeur de u en chaque point limite. Dans un problème de conduction de chaleur, cela équivaut à spécifier la température à la limite. Dans certains problèmes, on précise plutôt la valeur de la dérivée ou du taux de variation de u dans la direction normale vers la limite. La condition imposée à la limite d'un corps isolé sur le plan thermique, par exemple, est de ce type. On peut aussi rencontrer des conditions limites plus complexes. Par exemple, on peut restreindre u sur une partie de la limite et sa dérivée normale sur l'autre partie. Le problème qui consiste à trouver une solution à l'équation de Laplace avec des valeurs limites est le **problème de Dirichlet**, nommé ainsi en l'honneur de Peter Gustav Lejeune Dirichlet¹¹. Si ce sont les valeurs de la dérivée normale qui sont imposées à la limite, le problème est défini comme étant le **problème de Neumann**, nommé ainsi en l'honneur de Carl Gottfried Neumann¹². Les problèmes de Dirichlet et de Neumann sont aussi connus respectivement comme des problèmes de valeur limite du premier ordre et du second ordre dans la théorie du potentiel.

Physiquement, on peut s'attendre à ce que les types de conditions limites qu'on vient de mentionner suffisent à déterminer entièrement la solution. En effet, il est possible d'établir l'existence et l'unicité de la solution à l'équation de Laplace selon les conditions limites mentionnées, pourvu que la forme de la limite et les fonctions apparaissant dans les conditions limites satisfassent à certaines exigences. Cependant, les preuves de ces théorèmes et même leurs énoncés précis ne seront pas abordés ici. On tentera simplement de résoudre certains problèmes typiques à l'aide de la séparation des variables et des séries de Fourier.

Bien que les problèmes choisis à titre d'exemples admettent des interprétations physiques intéressantes (en ce qui concerne les potentiels électrostatiques ou de distribution de température à l'état stable, par exemple), notre objectif est de souligner les caractéristiques qui apparaissent dans leur résolution mathématique. Il faut noter de nouveau qu'on peut utiliser le principe de superposition pour résoudre des problèmes plus complexes en exprimant la solution en termes de somme des solutions à certains problèmes plus simples (voir les problèmes 3 et 4).

Le problème de Dirichlet pour un rectangle On considère le problème qui consiste à trouver la fonction u satisfaisant à l'équation de Laplace (1)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ et satisfaisant aux conditions limites

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0, & u(x, b) &= 0, & 0 < x < a, \\ u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= f(y), & 0 \leq y \leq b, \end{aligned} \quad (4)$$

11. Peter Gustav Dirichlet (1805-1859) a été professeur à Berlin, puis à Göttingen à la suite du décès de Carl Friedrich Gauss. En 1829, il a présenté le premier ensemble de conditions suffisantes pour assurer la convergence d'une série de Fourier. La définition d'une fonction, qui est habituellement utilisée aujourd'hui dans le calcul différentiel élémentaire, est essentiellement celle que Dirichlet a introduite en 1837. Bien qu'il soit davantage connu pour son travail en analyse et en équations différentielles, Dirichlet a également été un des principaux spécialistes de la théorie des nombres au XIX^e siècle.

12. Karl Gottfried Neumann (1832-1925), professeur à Leipzig, a apporté d'importantes contributions dans le domaine des équations différentielles, des équations intégrales et des variables complexes.

où f est une fonction définie dans $0 \leq y \leq b$ (voir la figure 8.9.1).

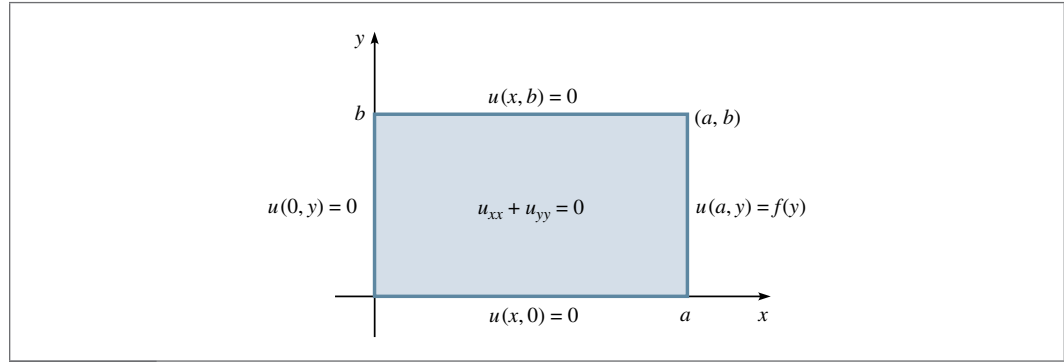


Figure 8.9.1 Problème de Dirichlet pour un rectangle.

Afin de résoudre ce problème, on doit obtenir un ensemble fondamental de solutions satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles et aux conditions limites homogènes. Ensuite, on superpose ces solutions de manière à satisfaire à la condition limite restante. On suppose que

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (5)$$

et on substitue l'expression de u dans l'équation (1). On obtient ainsi

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda,$$

où λ est la constante de séparation. Par conséquent, on obtient les deux équations différentielles ordinaires

$$X'' - \lambda X = 0, \quad (6)$$

$$Y'' + \lambda Y = 0. \quad (7)$$

Si on substitue maintenant l'expression de u de l'équation (5) dans chacune des conditions limites homogènes, on trouve

$$X(0) = 0 \quad (8)$$

et

$$Y(0) = 0, \quad Y(b) = 0. \quad (9)$$

On détermine d'abord la solution à l'équation différentielle (7), soumise aux conditions limites (9). Ce problème est essentiellement identique à celui qui a été étudié dans les sections 8.2 et 8.8. Il existe une solution non triviale si et seulement si λ est une valeur propre, soit

$$\lambda = (n\pi/b)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (10)$$

et si $Y(y)$ est proportionnelle à la fonction propre correspondante $\sin(n\pi y/b)$. Ensuite, à partir de l'équation (10), on substitue l'expression de λ dans l'équation (6) et on résout cette équation soumise à la condition limite (8). On écrit la solution générale à l'équation (6) sous la forme

$$X(x) = k_1 \cosh(n\pi x/b) + k_2 \sinh(n\pi x/b), \quad (11)$$

et la condition limite (8) entraîne alors $k_1 = 0$. Par conséquent, $X(x)$ doit être proportionnelle à $\sinh(n\pi x/b)$. On obtient alors les solutions fondamentales

$$u_n(x, y) = \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Ces fonctions satisfont à l'équation différentielle (1) et à toutes les conditions limites homogènes pour toute valeur de n .

Pour satisfaire à la condition limite non homogène qui subsiste en $x = a$, on suppose typiquement qu'on peut exprimer la solution $u(x, y)$ sous la forme

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (13)$$

Les coefficients c_n sont déterminés selon la condition limite non homogène

$$u(a, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(y). \quad (14)$$

Par conséquent, les quantités $c_n \sinh(n\pi a/b)$ doivent être les coefficients dans la série de Fourier sinus de période $2b$ pour f et sont données par

$$c_n \sinh \frac{n\pi a}{b} = \frac{2}{b} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (15)$$

Ainsi, la solution à l'équation aux dérivées partielles (1) satisfaisant aux conditions limites (4) est donnée par l'équation (13), où les coefficients c_n sont obtenus à partir de l'équation (15).

En se basant sur les équations (13) et (15), on voit que la solution contient le facteur $\sinh(n\pi x/b)/\sinh(n\pi a/b)$. Pour estimer cette quantité lorsque n est grand, on utilise l'approximation $\sin \xi \cong e^{\xi}/2$ afin d'obtenir

$$\frac{\sinh(n\pi x/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \cong \frac{\frac{1}{2} \exp(n\pi x/b)}{\frac{1}{2} \exp(n\pi a/b)} = \exp[-n\pi(a-x)/b].$$

Alors, ce facteur se comporte comme une fonction exponentielle négative. Par conséquent, la série (13) converge rapidement sauf si $a - x$ est très petit.

Exemple 1

Pour illustrer ces résultats, on suppose que $a = 3$, $b = 2$ et que

$$f(y) = \begin{cases} y, & 0 \leq y \leq 1, \\ 2 - y, & 1 \leq y \leq 2. \end{cases} \quad (16)$$

En évaluant c_n à partir de l'équation (15), on trouve

$$c_n = \frac{8 \sin(n\pi/2)}{n^2 \pi^2 \sinh(3n\pi/2)}. \quad (17)$$

Ensuite, on obtient $u(x, y)$ grâce à l'équation (13). En prenant les 20 premiers termes dans la série, on obtient le graphique de u en fonction de x et de y (voir la figure 8.9.2). De même, on peut construire un graphique pour les courbes de niveau de $u(x, y)$. La figure 8.9.3 à la page suivante illustre ce phénomène avec un accroissement de 0,1 entre les courbes adjacentes.

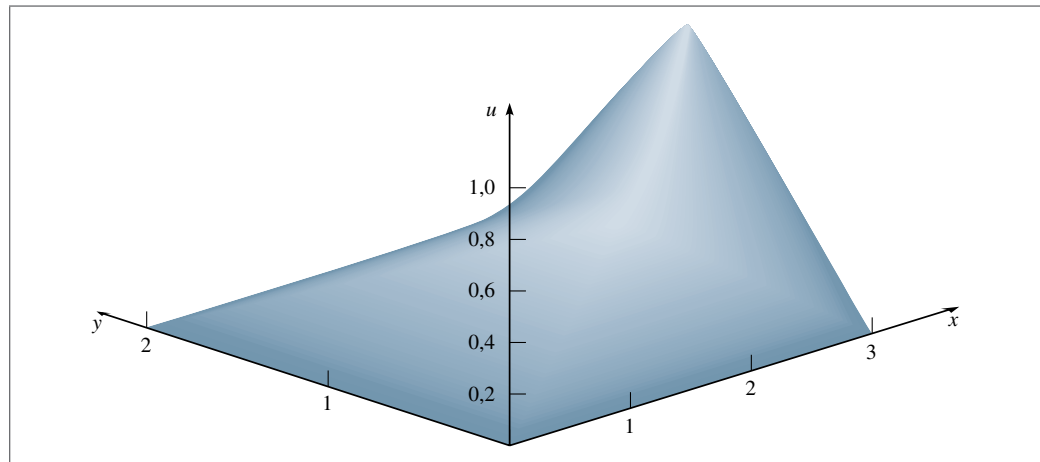


Figure 8.9.2 Graphique de u en fonction de x et de y .

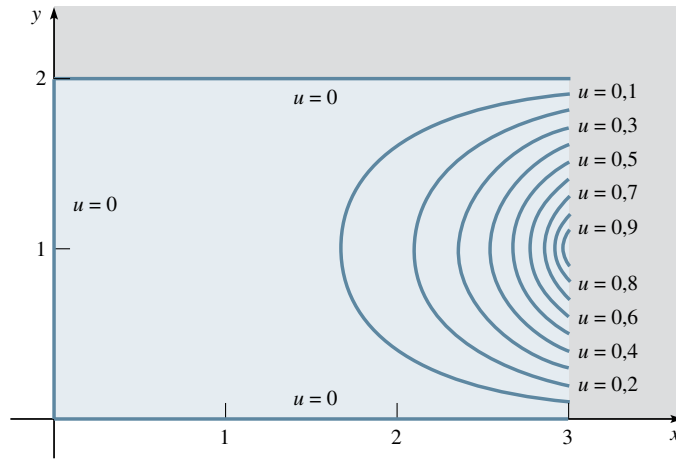


Figure 8.9.3 Courbes de niveau de $u(x, y)$.

Le problème de Dirichlet pour un cercle Considérez le problème qui consiste à résoudre l'équation de Laplace dans la région circulaire $r < a$ soumise à la condition limite

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad (18)$$

où f est une fonction définie pour $0 \leq \theta < 2\pi$ (voir la figure 8.9.4). En coordonnées polaires, l'équation de Laplace prend la forme

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0. \quad (19)$$

Pour que $u(r, \theta)$ admette une expression simple, il faut noter que u doit être périodique en θ de période 2π . De plus, on suppose que $u(r, \theta)$ est bornée pour $r \leq a$, ce qui sera important plus loin dans ce chapitre.

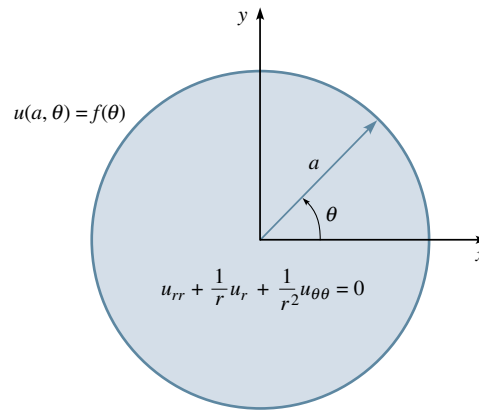


Figure 8.9.4 Problème de Dirichlet pour un cercle.

Afin d'appliquer la séparation des variables à ce problème, on suppose que

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (20)$$

et on substitue l'expression de u dans l'équation différentielle (19). On obtient

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0$$

ou

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda, \quad (21)$$

où λ est la constante de séparation. Ainsi, on obtient les deux équations différentielles ordinaires

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0, \quad (22)$$

$$\Theta'' + \lambda \Theta = 0. \quad (23)$$

Dans ce problème, il n'existe aucune condition limite homogène. Toutefois, il convient de se rappeler que les solutions doivent être bornées et périodiques en θ de période 2π . On peut montrer que la condition de périodicité entraîne que λ soit réelle (voir le problème 9). On considère les cas respectifs où λ est négative, nulle et positive.

Si $\lambda < 0$, on pose $\lambda = -\mu^2$, où $\mu > 0$. L'équation (23) devient $\Theta'' - \mu^2 \Theta = 0$. Par conséquent,

$$\Theta(\theta) = c_1 e^{\mu\theta} + c_2 e^{-\mu\theta}. \quad (24)$$

Ainsi, $\Theta(\theta)$ sera périodique seulement si $c_1 = c_2 = 0$, et on conclut que λ ne peut être négative.

Si $\lambda = 0$, alors l'équation (23) devient $\Theta'' = 0$ et

$$\Theta(\theta) = c_1 + c_2 \theta. \quad (25)$$

Pour que $\Theta(\theta)$ soit périodique, il faut que $c_2 = 0$, donc $\Theta(\theta)$ est constante. De plus, avec $\lambda = 0$, l'équation (22) devient

$$r^2 R'' + rR' = 0. \quad (26)$$

Cette équation est du type d'Euler et elle admet comme solution

$$R(r) = k_1 + k_2 \ln r. \quad (27)$$

Le terme logarithmique pose un problème si $u(r, \theta)$ doit être bornée lorsque $r \rightarrow 0$. Donc, $k_2 = 0$. Par conséquent, dans le cas où $\lambda = 0$, $u(r, \theta)$ doit être une constante, c'est-à-dire qu'elle doit être proportionnelle à la solution

$$u_0(r, \theta) = 1. \quad (28)$$

Finalement, si $\lambda > 0$, on pose $\lambda = \mu^2$, où $\mu > 0$. Les équations (22) et (23) deviennent alors respectivement

$$r^2 R'' + rR' - \mu^2 R = 0 \quad (29)$$

et

$$\Theta'' + \mu^2 \Theta = 0. \quad (30)$$

L'équation (29) est une équation d'Euler et admet comme solution

$$R(r) = k_1 r^\mu + k_2 r^{-\mu}, \quad (31)$$

tandis que l'équation (30) admet comme solution

$$\Theta(\theta) = c_1 \sin \mu\theta + c_2 \cos \mu\theta. \quad (32)$$

Pour que Θ soit périodique de période 2π , μ doit être un entier positif n . Si $\mu = n$, il s'ensuit que la solution $r^{-\mu}$ dans l'équation (31) doit être écartée puisqu'elle est non bornée lorsque $r \rightarrow 0$. Par conséquent, $k_2 = 0$ et les solutions à l'équation (19) sont

$$u_n(r, \theta) = r^n \cos n\theta, \quad v_n(r, \theta) = r^n \sin n\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (33)$$

Ces fonctions, combinées à $u_0(r, \theta) = 1$, constituent un ensemble de solutions fondamentales au problème.

On suppose maintenant que u est écrite sous la forme d'une combinaison linéaire de solutions fondamentales. Autrement dit,

$$u(r, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta). \quad (34)$$

La condition limite (18) exige alors que

$$u(a, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta) = f(\theta) \quad (35)$$

pour $0 \leq \theta < 2\pi$. On peut prolonger la fonction f à l'extérieur de cet intervalle et la considérer comme étant périodique de période 2π . Elle admet alors un développement en série de Fourier de la forme (35). Puisque la fonction prolongée est de période 2π , on peut calculer ses coefficients de Fourier en intégrant sur n'importe quel intervalle d'une période. En particulier, on peut utiliser l'intervalle original $(0, 2\pi)$. Ainsi,

$$a^n c_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad (36)$$

$$a^n k_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta, \quad n = 1, 2, \dots \quad (37)$$

Avec ces choix de coefficients, l'équation (34) constitue la solution au problème de valeur limite des équations (18) et (19). Il faut noter que, dans ce problème, on avait besoin des termes sinus et cosinus dans la solution puisque les données limites étaient spécifiées dans $0 \leq \theta < 2\pi$ avec une période de 2π . Par conséquent, on a besoin de la série de Fourier au complet plutôt que seulement des développements en sinus ou en cosinus.

Problèmes

1. a) Trouvez la solution $u(x, y)$ à l'équation de Laplace dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ qui satisfait aux conditions limites

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= 0, & 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, b) &= g(x), & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

- b) Trouvez la solution si

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq a/2, \\ a - x, & a/2 \leq x \leq a. \end{cases}$$

- c) Pour $a = 3$ et $b = 1$, tracez le graphique de u en fonction de x pour différentes valeurs de y , puis tracez le graphique de u en fonction de y pour différentes valeurs de x .
d) Tracez le graphique de u en fonction de x et de y en trois dimensions, puis tracez différentes courbes de niveau de $u(x, y)$ dans le plan xy .

2. Trouvez la solution $u(x, y)$ à l'équation de Laplace dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ qui satisfait aux conditions limites

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= 0, & 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= h(x), & u(x, b) &= 0, & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

3. a) Trouvez la solution $u(x, y)$ à l'équation de Laplace dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ qui satisfait aux conditions limites

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= f(y), & 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= h(x), & u(x, b) &= 0, & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Suggestion: Considérez la possibilité d'additionner les solutions à deux problèmes, l'une avec des conditions limites homogènes, sauf pour $u(a, y) = f(y)$, et l'autre avec des conditions limites homogènes, sauf pour $u(x, 0) = h(x)$.

b) Trouvez la solution si $h(x) = (x/a)^2$ et $f(y) = 1 - (y/b)$.

c) Soit $a = 2$ et $b = 2$. Tracez la solution de différentes manières : avec u en fonction de x , avec u en fonction de y et avec u en fonction de x et de y .

4. **Les conditions limites non homogènes** Montrez comment trouver la solution $u(x, y)$ à l'équation de Laplace dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ qui satisfait aux conditions limites

$$\begin{aligned} u(0, y) &= k(y), & u(a, y) &= f(y), & 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= h(x), & u(x, b) &= g(x), & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Suggestion : Pour résoudre ce problème, il faut additionner les solutions de quatre problèmes, chacun avec trois conditions limites homogènes et une condition limite non homogène. Il s'agit d'une autre application du principe de superposition. Reportez-vous au problème 3.

5. Trouvez la solution $u(r, \theta)$ à l'équation de Laplace

$$u_{rr} + (1/r)u_r + (1/r^2)u_{\theta\theta} = 0$$

à l'extérieur du cercle $r = a$, qui satisfait à la condition limite

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

sur le cercle. Supposez que $u(r, \theta)$ admet une seule valeur et que celle-ci est bornée lorsque $r > a$.

6. a) Trouvez la solution $u(r, \theta)$ à l'équation de Laplace dans la région semi-circulaire $r < a$, $0 < \theta < \pi$ qui satisfait aux conditions limites

$$\begin{aligned} u(r, 0) &= 0, & u(r, \pi) &= 0, & 0 \leq r < a, \\ u(a, \theta) &= f(\theta), & 0 \leq \theta \leq \pi. \end{aligned}$$

Supposez que u admet une valeur unique et que celle-ci est bornée dans la région donnée.

b) Trouvez la solution si $f(\theta) = \theta(\pi - \theta)$.

c) Soit $a = 2$. Tracez le graphique de la solution de différentes manières : avec u en fonction de r , avec u en fonction de θ et avec u en fonction de r et de θ .

7. Trouvez la solution $u(r, \theta)$ à l'équation de Laplace dans le secteur circulaire $0 < r < a$, $0 < \theta < \alpha$ qui satisfait aux conditions limites

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \alpha) = 0, \quad 0 \leq r < a, \quad u(a, \theta) = f(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq \alpha.$$

Supposez que u admet une valeur unique, que celle-ci est bornée dans le secteur et que $0 < \alpha < 2\pi$.

8. a) Trouvez la solution $u(x, y)$ à l'équation de Laplace dans la bande à moitié infinie $0 < x < a$, $y > 0$ qui satisfait aux conditions limites

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= 0, & y > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

et à la condition additionnelle selon laquelle $u(x, y) \rightarrow 0$ lorsque $y \rightarrow \infty$.

b) Trouvez la solution si $f(x) = x(a - x)$.

c) Soit $a = 5$. Trouvez la plus petite valeur de y_0 pour laquelle $u(x, y) \leq 0,1$ pour tout $y \geq y_0$.

9. Montrez que l'équation (23) admet des solutions périodiques uniquement si λ est réelle.

Suggestion : Soit $\lambda = -\mu^2$, où $\mu = \nu + i\sigma$ avec ν et σ réelles.

10. Considérez le problème qui consiste à trouver une solution $u(x, y)$ à l'équation de Laplace dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ qui satisfait aux conditions limites

$$\begin{aligned} u_x(0, y) &= 0, & u_x(a, y) &= f(y), & 0 < y < b, \\ u_y(x, 0) &= 0, & u_y(x, b) &= 0, & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un exemple d'un problème de Neumann.

- a) Montrez que l'équation de Laplace ainsi que les conditions limites homogènes déterminent l'ensemble fondamental de solutions

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= c_0, \\ u_n(x, y) &= c_n \cosh(n\pi x/b) \cos(n\pi y/b), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

- b) En superposant les solutions fondamentales de la partie a), déterminez une fonction u qui satisfait aussi à la condition limite non homogène $u_x(a, y) = f(y)$. Vous devez noter que lorsqu'on calcule $u_x(a, y)$, le terme constant de $u(x, y)$ est éliminé et on ne dispose d'aucune condition

permettant de déterminer c_0 . De plus, on doit pouvoir exprimer f à l'aide d'une série de Fourier cosinus de période $2b$ sans terme constant. Autrement dit,

$$\int_0^b f(y) dy = 0$$

est une condition nécessaire pour pouvoir résoudre le problème donné. Finalement, vous devez aussi noter que c_0 est arbitraire et que la solution est unique à cette constante additive près. Il s'agit d'une propriété commune à tous les problèmes de Neumann.

11. Trouvez une solution $u(r, \theta)$ à l'équation de Laplace à l'intérieur du cercle $r = a$ qui satisfait aux conditions limites sur le cercle

$$u_r(a, \theta) = g(\theta), \quad 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Vous devez noter qu'il s'agit d'un problème de Neumann et que la solution est unique à une constante additive arbitraire près. Énoncez une condition nécessaire concernant $g(\theta)$ pour pouvoir résoudre ce problème à l'aide de la méthode de séparation des variables (voir le problème 10).

12. a) Trouvez la solution $u(x, y)$ à l'équation de Laplace dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ qui satisfait aux conditions limites

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= 0, & 0 < y < b, \\ u_y(x, 0) &= 0, & u(x, b) &= g(x), & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Il ne s'agit ici ni d'un problème de Dirichlet ni d'un problème de Neumann, mais d'un problème mixte dans lequel u est spécifiée sur une partie de la limite, et sa dérivée normale sur l'autre partie.

- b) Trouvez la solution si

$$g(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq a/2, \\ a - x, & a/2 \leq x \leq a. \end{cases}$$

- c) Soit $a = 3$ et $b = 1$. En traçant les graphiques appropriés, comparez cette solution à la solution au problème 1.

13. a) Trouvez la solution $u(x, y)$ à l'équation de Laplace dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ qui satisfait aux conditions limites

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(a, y) &= f(y), & 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= 0, & u_y(x, b) &= 0, & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

Suggestion: Il faut développer $f(y)$ en série en utilisant les fonctions $\sin(\pi y/2b)$, $\sin(3\pi y/2b)$, $\sin(5\pi y/2b)$, ... (voir le problème 39 de la section 8.5).

- b) Trouvez la solution si $f(y) = y(2b - y)$.

- c) Soit $a = 3$ et $b = 2$. Tracez le graphique de la solution de plusieurs manières.

14. a) Trouvez la solution $u(x, y)$ à l'équation de Laplace dans le rectangle $0 < x < a$, $0 < y < b$ qui satisfait aux conditions limites

$$\begin{aligned} u_x(0, y) &= 0, & u_x(a, y) &= 0, & 0 < y < b, \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, b) &= g(x), & 0 \leq x \leq a. \end{aligned}$$

- b) Trouvez la solution si $g(x) = 1 + x^2(x - a)^2$.

- c) Soit $a = 3$ et $b = 2$. Tracez le graphique de la solution de plusieurs manières.

15. En réécrivant l'équation de Laplace en coordonnées cylindriques r , θ et z , puis en supposant que la solution est symétrique par rapport aux axes (donc, en supposant qu'elle est indépendante de θ), on obtient l'équation

$$u_{rr} + (1/r)u_r + u_{zz} = 0.$$

En supposant maintenant que $u(r, z) = R(r)Z(z)$, montrez que R et Z satisfont aux équations

$$rR'' + R' + \lambda^2 rR = 0, \quad Z'' - \lambda^2 Z = 0.$$

L'équation pour déterminer R est l'équation de Bessel d'ordre zéro en la variable indépendante λr .

16. L'écoulement dans un aquifère Considérez l'écoulement de l'eau dans un milieu poreux, comme le sable, c'est-à-dire dans un aquifère. L'écoulement est produit par la charge hydraulique, une mesure de l'énergie potentielle de l'eau qui se trouve au-dessus de l'aquifère. Soit R : $0 < x < a$, $0 < z < b$, une section verticale d'un aquifère. Dans un milieu uniforme et homogène, la charge hydraulique $u(x, z)$ satisfait à l'équation de Laplace

$$u_{xx} + u_{zz} = 0 \text{ dans } R. \quad (\text{i})$$

Si l'eau ne peut pas s'écouler par les côtés et le fond de R , alors les conditions limites en ces endroits sont

$$u_x(0, z) = 0, \quad u_x(a, z) = 0, \quad 0 \leq z \leq b, \quad (\text{ii})$$

$$u_z(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \quad (\text{iii})$$

Enfin, supposez que la condition limite en $z = b$ est

$$u(x, b) = b + \alpha x, \quad 0 \leq x \leq a, \quad (\text{iv})$$

où α est la pente de la nappe phréatique.

- Résolvez ce problème de valeur limite pour déterminer $u(x, z)$.
- Posez $a = 1000$, $b = 500$ et $\alpha = 0,1$. Tracez un graphique des courbes de niveau de la solution dans R ; autrement dit, tracez quelques courbes de niveau de $u(x, z)$.
- L'eau s'écoule dans R selon des trajectoires orthogonales aux courbes de niveau de $u(x, z)$, dans la direction décroissante de u . Tracez quelques-unes de ces trajectoires d'écoulement.

Annexe A

L'équation de la conduction de la chaleur Dans cette section, nous construirons l'équation différentielle qui régit approximativement la conduction de la chaleur dans les solides. L'analyse mathématique d'une situation ou d'un processus physique de ce type repose sur une connaissance empirique du phénomène. Au départ, le mathématicien doit adopter un point de vue basé sur l'expérimentation. On considère une tige uniforme isolée sur sa surface latérale de sorte que la chaleur ne puisse circuler que dans la direction axiale. On a vérifié à plusieurs reprises que si deux sections transversales parallèles de même aire A et de températures différentes T_1 et T_2 , respectivement, sont distantes de d , une certaine quantité de chaleur par unité de temps passera de la section plus chaude à la section plus froide. Cette quantité de chaleur est proportionnelle à l'aire A , à la différence de température $|T_2 - T_1|$ et est inversement proportionnelle à la distance d . Ainsi,

$$\text{quantité de chaleur par unité de temps} = \kappa A |T_2 - T_1| / d, \quad (1)$$

où le facteur positif de proportionnalité κ est la conductivité thermique, qui dépend principalement du matériau¹³ constituant la tige. La relation (1) est la loi de conduction de la chaleur de Fourier. Il faut noter que l'équation (1) est un résultat empirique et non théorique et qu'elle peut être vérifiée (ce qui a été souvent le cas) sur une base expérimentale. Elle constitue le fondement de la théorie mathématique sur la conduction de la chaleur.

On considère maintenant une tige droite dont la coupe transversale est uniforme et constituée d'un matériau homogène. Elle est orientée de sorte que l'axe des x se trouve le long de l'axe de la tige (voir la figure 8.A.1 à la page suivante). Soit $x = 0$ et $x = L$ les extrémités de la tige.

On suppose que les côtés de la tige sont parfaitement isolés, de sorte qu'aucune chaleur ne les traverse et que la température u dépend uniquement de la position axiale x et du temps t , mais non des coordonnées latérales y et z . Autrement dit, on suppose que la température demeure constante dans toute coupe transversale de la tige. Cette hypothèse est habituellement satisfaisante quand les dimensions latérales de la tige sont petites lorsqu'on les compare avec la longueur.

13. En fait, κ dépend également de la température, mais si l'amplitude de la température n'est pas trop élevée, il est satisfaisant de supposer que κ est fonction de la température.

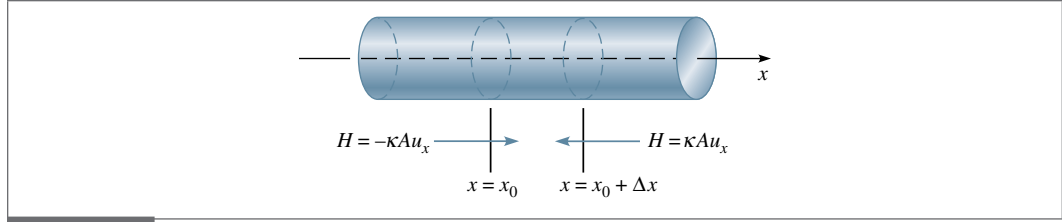


Figure 8.A.1 Conduction de la chaleur dans un élément d'une tige.

L'équation différentielle qui régit la température dans la tige exprime un équilibre physique fondamental. Le taux auquel la chaleur circule dans quelque portion que ce soit de la tige est égal au taux auquel la chaleur est absorbée dans cette portion de la tige. Les termes de l'équation sont appelés respectivement le terme du flux (l'écoulement) et le terme de l'absorption.

On calcule d'abord le terme du flux. On considère un élément dans la tige se trouvant entre les coupes transversales $x = x_0$ et $x = x_0 + \Delta x$, où x_0 est arbitraire et Δx est petit. Le taux instantané de transfert de chaleur $H(x_0, t)$ de gauche à droite par la section transversale $x = x_0$ est donné par

$$\begin{aligned} H(x_0, t) &= -\lim_{d \rightarrow 0} \kappa A \frac{u(x_0 + d/2, t) - u(x_0 - d/2, t)}{d} \\ &= -\kappa A u_x(x_0, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Le signe négatif apparaît ici car le flux de chaleur est positif quand il se déplace de gauche à droite seulement si la température à gauche est supérieure de $x = x_0$ à celle de droite. Dans ce cas, $u_x(x_0, t)$ est négative. De même, le taux auquel la chaleur circule de gauche à droite dans la section transversale $x = x_0 + \Delta x$ est donné par

$$H(x_0 + \Delta x, t) = -\kappa A u_x(x_0 + \Delta x, t). \quad (3)$$

Le taux net auquel la chaleur circule dans le segment de la tige entre $x = x_0$ et $x = x_0 + \Delta x$ est ainsi donné par

$$Q = H(x_0, t) - H(x_0 + \Delta x, t) = \kappa A [u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)] \quad (4)$$

et la quantité de chaleur entrant dans cet élément de la tige au temps Δt est

$$Q\Delta t = \kappa A [u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)]\Delta t. \quad (5)$$

On calcule maintenant le terme d'absorption. Le changement de température moyen Δu dans l'intervalle de temps Δt est proportionnel à la quantité de chaleur $Q\Delta t$ introduite, et il est inversement proportionnel à la masse Δm de l'élément. Ainsi,

$$\Delta u = \frac{1}{s} \frac{Q\Delta t}{\Delta m} = \frac{Q\Delta t}{s\rho A\Delta x}, \quad (6)$$

où la constante de proportionnalité s est la chaleur spécifique du matériau dans la tige et ρ sa densité¹⁴. Le changement de température moyen Δu dans l'élément de la tige considéré est le changement de température réel en un point intermédiaire $x = x_0 + \theta\Delta x$, où $0 < \theta < 1$. Ainsi, on peut écrire l'équation (6) sous la forme

$$u(x_0 + \theta\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\Delta x, t) = \frac{Q\Delta t}{s\rho A\Delta x} \quad (7)$$

ou

$$Q\Delta t = [u(x_0 + \theta\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\Delta x, t)]s\rho A\Delta x. \quad (8)$$

Pour équilibrer les termes de flux et d'absorption, on considère les deux expressions de $Q\Delta t$ comme étant égales :

$$\kappa A [u_x(x_0 + \Delta x, t) - u_x(x_0, t)]\Delta t = s\rho A [u(x_0 + \theta\Delta x, t + \Delta t) - u(x_0 + \theta\Delta x, t)]\Delta x. \quad (9)$$

14. La dépendance de la densité et de la chaleur spécifique par rapport à la température est relativement petite et elle sera négligée. Ainsi, ρ et s seront considérées comme étant constantes.

- En divisant l'équation (9) par $\Delta x \Delta t$ et lorsque $\Delta x \rightarrow 0$ et $\Delta t \rightarrow 0$, on obtient l'équation de la conduction ou de la diffusion de la chaleur

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t. \quad (10)$$

La quantité α^2 définie par

$$\alpha^2 = \kappa / \rho s \quad (11)$$

est la **diffusivité thermique**, et ce paramètre dépend uniquement du matériau constituant la tige. Les unités de α^2 sont exprimées par la longueur au carré divisée par le temps. Des valeurs typiques de α^2 apparaissent au tableau 8.6.1.

On peut imposer plusieurs conditions simples aux extrémités de la tige. Par exemple, la température à une extrémité peut être maintenue à une valeur constante T . On peut y arriver en plaçant l'extrémité de la tige en contact avec un réservoir de taille suffisante, de sorte que toute chaleur qui circule entre la tige et le réservoir n'altère pas de façon significative la température dans le réservoir. À l'extrémité soumise à cette condition, la condition limite est

$$u = T. \quad (12)$$

Une autre condition limite simple consiste à considérer que l'extrémité est isolée et qu'aucune chaleur ne la traverse. Si on reprend l'expression (2) pour la quantité de chaleur traversant une section transversale de la tige, la condition d'isolation nécessite que cette quantité soit nulle. Ainsi,

$$u_x = 0 \quad (13)$$

est la condition limite en une extrémité isolée.

Un type plus général de condition limite consiste à considérer que le taux du flux de chaleur dans une extrémité de la tige est proportionnel à la température à cet endroit. On considère l'extrémité $x = 0$, où le taux du flux de chaleur circulant de gauche à droite est donné par $-\kappa A u_x(0, t)$ [voir l'équation (2)]. Ainsi, le taux de chaleur qui circule dans la tige (de gauche à droite) en $x = 0$ est de $\kappa A u_x(0, t)$. Si cette quantité est proportionnelle à la température $u(0, t)$, alors on obtient la condition limite

$$u_x(0, t) - h_1 u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (14)$$

où h_1 est une constante de proportionnalité non négative. Il faut noter que $h_1 = 0$ correspond à une extrémité isolée, tandis que $h_1 \rightarrow \infty$ correspond à une extrémité maintenue à une température de zéro.

Si le flux de chaleur prend naissance à l'extrémité droite de la tige ($x = L$), alors on obtient similairement la condition limite

$$u_x(L, t) + h_2 u(L, t) = 0, \quad t > 0, \quad (15)$$

où h_2 est encore une constante de proportionnalité non négative.

Enfin, pour déterminer complètement le flux de chaleur dans la tige, on doit établir la distribution de température en un instant précis. En général, cette distribution de température est évaluée au temps $t = 0$. Cette condition initiale est de la forme

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L. \quad (16)$$

Le problème consiste alors à déterminer la solution à l'équation différentielle (10) soumise à une des conditions limites (12) à (15) à chaque extrémité et à la condition initiale (16) en $t = 0$.

On peut généraliser l'équation de la chaleur (10). Premièrement, le matériau constituant la tige peut ne pas être uniforme, et la section transversale peut ne pas être constante le long de la tige. Dans ce cas, les paramètres κ , ρ , s et A peuvent dépendre de la variable axiale x . En revenant à l'équation (2), on voit que le taux de transfert de la chaleur de gauche à droite dans la section transversale en $x = x_0$ est alors donné par

$$H(x_0, t) = -\kappa(x_0) A(x_0) u_x(x_0, t) \quad (17)$$

et on dispose d'une expression similaire pour $H(x_0 + \Delta x, t)$. En substituant ces expressions dans l'équation (4) puis dans l'équation (9) et en procédant comme ci-dessus, on obtient l'équation aux dérivées partielles

$$(\kappa A u_x)_x = s \rho A u_t. \quad (18)$$

- ▶ On écrit généralement l'équation (18) sous la forme

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x, \quad (19)$$

où $p(x) = \kappa(x)A(x)$ et $r(x) = s(x)\rho(x)A(x)$. Il faut noter que ces deux quantités sont intrinsèquement positives.

Il pourrait aussi exister d'autres modes selon lesquels la chaleur entre dans la tige ou quitte celle-ci. On suppose qu'il existe une source qui injecte de la chaleur dans la tige au taux de $G(x, t, u)$ par unité de temps par unité de longueur, où $G(x, t, u) > 0$. Dans ce cas, on doit additionner le terme $G(x, t, u) \Delta x \Delta t$ au premier membre de l'équation (9), ce qui mène à l'équation différentielle

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x + G(x, t, u). \quad (20)$$

Si $G(x, t, u) < 0$, alors on parle d'un dissipateur qui retire de la chaleur de la tige au taux de $G(x, t, u)$ par unité de temps par unité de longueur. Pour que le problème soit soluble, on suppose que G est linéaire en u et que le coefficient de u ne dépend pas de t . Ainsi, on écrit

$$G(x, t, u) = F(x, t) - q(x)u. \quad (21)$$

On a introduit le signe négatif dans l'équation (21) afin que certaines des équations apparaissant plus loin soient cohérentes. En substituant l'expression de l'équation (21) dans l'équation (20), on obtient

$$r(x)u_t = [p(x)u_x]_x - q(x)u + F(x, t). \quad (22)$$

Cette équation est parfois appelée l'équation généralisée de la conduction de la chaleur.

Finalement, au lieu d'une tige unidimensionnelle, si on considère un corps de plus d'une dimension spatiale, alors la température est une fonction de deux ou trois variables spatiales plutôt que d'une seule. À l'aide de considérations semblables à celles qui mènent à l'équation (10), on obtient l'équation de la conduction de la chaleur en deux dimensions

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t \quad (23)$$

et en trois dimensions

$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_t. \quad (24)$$

Les conditions limites correspondant aux équations (12) et (13) pour les problèmes multidimensionnels correspondent à une distribution de chaleur spécifiée à la limite ou au cas où une limite est isolée. De même, la distribution de température initiale sera en général une fonction de x et de y pour l'équation (23) et une fonction de x , y et z pour l'équation (24).

Annexe B

L'équation d'onde Dans cette annexe, nous construirons l'équation d'onde à une dimension, qui régit les vibrations transversales d'une corde vibrante ou d'un câble. On peut considérer la corde vibrante comme une corde de violon, un étai ou encore un fil électrique. On rencontre la même équation, avec les variables adéquatement interprétées, dans plusieurs autres problèmes d'onde à une variable spatiale.

On considère une corde vibrante parfaitement élastique tendue entre des supports fixés au même niveau horizontal [voir la figure 8.B.1 a)]. On suppose que l'axe des x longe la corde, dont les extrémités sont situées en $x = 0$ et en $x = L$. Si la corde est mise en mouvement au temps $t = 0$ (en la pinçant, par exemple) et qu'on ne la touche plus par la suite, elle vibrera librement dans le plan vertical si on néglige les forces d'amortissement comme la résistance de l'air. Pour obtenir l'équation différentielle qui régit le mouvement, on considérera les forces qui agissent sur un petit élément de la corde de longueur Δx se trouvant entre les points x et $x + \Delta x$ [voir la figure 8.B.1 b)]. On suppose que les oscillations sont faibles et, par conséquent, que chaque point sur la corde se déplace seulement à la verticale. Soit $u(x, t)$ le déplacement au point x et au temps t . Soit $T(x, t)$ la tension dans la corde qui agit toujours dans la direction tangentielle, et soit ρ la masse de la corde par unité de longueur.

La loi de Newton appliquée à l'élément Δx établit que la force nette due à la tension aux extrémités de l'élément doit être égale au produit de la masse de l'élément et de l'accélération de son centre de masse. Puisqu'il n'y a pas d'accélération horizontale, les composantes horizontales doivent satisfaire à

$$T(x + \Delta x, t) \cos(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \cos \theta = 0. \quad (1)$$

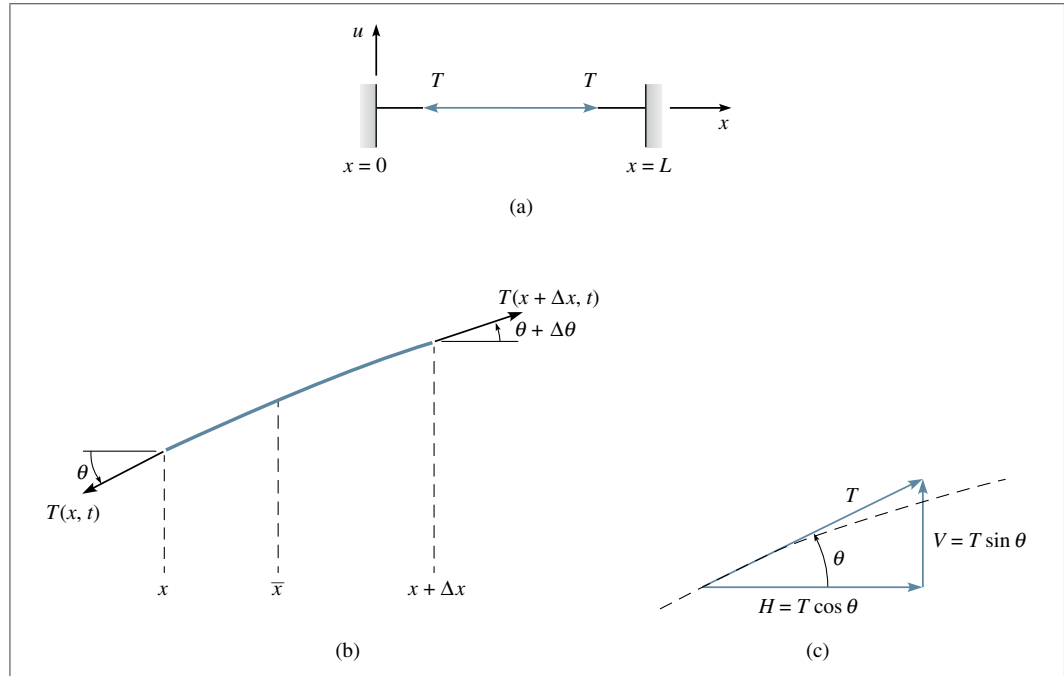


Figure 8.B.1 a) Corde vibrante sous tension. b) Élément de la corde déplacée. c) Décomposition de la tension T selon ses composantes.

Si on note H la composante horizontale de la tension [voir la figure 8.B.1 c)], alors l'équation (1) établit que H est indépendante de x .

D'un autre côté, les composantes verticales satisfont à

$$T(x + \Delta x, t) \sin(\theta + \Delta\theta) - T(x, t) \sin \theta = \rho \Delta x u_{tt}(\bar{x}, t), \quad (2)$$

où $\bar{x}$ est la coordonnée du centre de la masse de l'élément considéré. Il est évident que $\bar{x}$ se trouve dans l'intervalle $x < \bar{x} < x + \Delta x$. On suppose que le poids de la corde, qui agit verticalement vers le bas, est négligeable.

Si la composante verticale de T est notée V , alors on peut écrire l'équation (2) sous la forme

$$\frac{V(x + \Delta x, t) - V(x, t)}{\Delta x} = \rho u_{tt}(\bar{x}, t).$$

En passant à la limite lorsque $\Delta x \rightarrow 0$, on obtient

$$V_x(x, t) = \rho u_{tt}(x, t). \quad (3)$$

Pour exprimer l'équation (3) uniquement en termes de u , on note que

$$V(x, t) = H(t) \tan \theta = H(t) u_x(x, t).$$

Ainsi, l'équation (3) devient

$$(Hu_x)_x = \rho u_{tt}$$

ou, puisque H est indépendante de x ,

$$Hu_{xx} = \rho u_{tt}. \quad (4)$$

Si les oscillations de la corde sont petites, on peut approximer $H = T \cos \theta$ par T . Alors, l'équation (4) prend la forme habituelle

$$a^2 u_{xx} = u_{tt}, \quad (5)$$

où

$$a^2 = T/\rho. \quad (6)$$

- ▶ On suppose aussi que a^2 est une constante, bien que cela ne soit pas indispensable, même dans le cas de petites oscillations. L'équation (5) est l'équation d'onde à une dimension. Comme T est une force et que ρ est une mesure de masse divisée par la longueur, la constante a est une mesure de vitesse. On peut interpréter a comme la vitesse à laquelle une petite perturbation (une onde) se déplace le long de la corde. Selon l'équation (6), la vitesse a de l'onde varie proportionnellement avec la tension dans la corde, mais inversement avec la densité du matériau qui constitue la corde, ce qui peut être vérifié de manière expérimentale.

Comme pour l'équation de la conduction de la chaleur, on peut appliquer l'équation d'onde (5) dans plusieurs cas. L'équation télégraphique, par exemple, est de la forme

$$u_{tt} + cu_t + ku = a^2 u_{xx} + F(x, t), \quad (7)$$

où c et k sont des constantes non négatives. Les termes cu_t , ku et $F(x, t)$ dépendent respectivement d'une force d'amortissement visqueux, d'une force de rappel élastique et d'une force externe. Il faut noter la similarité de l'équation (7), sauf pour le terme $a^2 u_{xx}$, avec l'équation du système masse-ressort obtenue à la section 3.8. Le terme additionnel $a^2 u_{xx}$ est dû aux forces élastiques externes.

L'équation télégraphique régit également le flux de tension (le courant) dans une ligne de transport d'électricité (d'où son nom). Dans ce cas, les coefficients sont liés aux paramètres électriques de la ligne.

Pour un système en vibration avec plus d'une coordonnée spatiale, on considère l'équation d'onde à deux dimensions

$$a^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_{tt}, \quad (8)$$

ou à trois dimensions,

$$a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_{tt}. \quad (9)$$

Références

- Les ouvrages suivants contiennent des résultats supplémentaires sur les séries de Fourier :
 BUCK, R. C. et E. F. BUCK. *Advanced Calculus*, 3^e édition, New York, McGraw-Hill, 1978.
 CARSLAW, H. S. *Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals*, 3^e édition, Cambridge, Cambridge University Press, 1930 ; New York, Dover, 1952.
 COURANT, R. et F. JOHN. *Introduction to Calculus and Analysis*, New York, Wiley-Interscience, 1965 ; réimpression par Springer-Verlag, New York, 1989.
 KAPLAN, W. *Advanced Calculus*, 4^e édition, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1991.
- L'ouvrage suivant comprend une courte biographie de Fourier et une copie annotée de son article publié en 1807 :
 GRATTAN-GUINNESS, I. *Joseph Fourier 1768-1830*, Cambridge, Massachusetts, MIT Press, 1973.
- Voici des références classiques sur les équations aux dérivées partielles et la méthode de séparation des variables :
 CHURCHILL, R. V. et J. W. BROWN. *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 5^e édition, New York, McGraw-Hill, 1993.
 HABERMAN, R. *Elementary Applied Partial Differential Equations*, 3^e édition, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall, 1998.
 PINSKY, M. A. *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications*, 3^e édition, Boston, WCB/McGraw-Hill, 1998.
 POWERS, D. L. *Boundary Value Problems*, 4^e édition, San Diego, Academic Press, 1999.
 STRAUSS, W. A. *Partial Differential Equations, an Introduction*, New York, Wiley, 1992.
 WEINBERGER, H. F. *A First Course in Partial Differential Equations*, New York, Wiley, 1965 ; New York, Dover, 1995.

Réponses aux problèmes

Chapitre 1 Section 1.1

1. $y \rightarrow \frac{3}{2}$ quand $t \rightarrow \infty$
2. y diverge de $\frac{3}{2}$ quand $t \rightarrow \infty$
3. y diverge de $-\frac{3}{2}$ quand $t \rightarrow \infty$
4. $y \rightarrow -\frac{1}{2}$ quand $t \rightarrow \infty$
5. y diverge de $-\frac{1}{2}$ quand $t \rightarrow \infty$
6. y diverge de -2 quand $t \rightarrow \infty$
7. $y' = 3 - y$
8. $y' = 2 - 3y$
9. $y' = y - 2$
10. $y' = 3y - 1$
11. $y = 0$ et $y = 4$ sont des solutions d'équilibre; $y \rightarrow 4$ si la valeur initiale est positive; y diverge de 0 si la valeur initiale est négative.
12. $y = 0$ et $y = 5$ sont des solutions d'équilibre; y diverge de 5 si la valeur initiale est supérieure à 5; $y \rightarrow 0$ si la valeur initiale est inférieure à 5.
13. $y = 0$ est une solution d'équilibre; $y \rightarrow 0$ si la valeur initiale est négative; y diverge de 0 si la valeur initiale est positive.
14. $y = 0$ et $y = 2$ sont des solutions d'équilibre; y diverge de 0 si la valeur initiale est négative; $y \rightarrow 2$ si la valeur initiale se situe entre 0 et 2; y diverge de 2 si la valeur initiale est supérieure à 2.
15. j)
16. c)
17. g)
18. b)
19. h)
20. e)
21. a) $dq/dt = 300(10^{-2} - q10^{-6})$ b) $q \rightarrow 10^4$ g; non
22. $dV/dt = -kV^{2/3}$ pour un certain $k > 0$.
23. $du/dt = -0,05(u - 70)$; u en °F, t en min
24. a) $dq/dt = 500 - 0,4q$ b) $q \rightarrow 1250$ mg
25. a) $mv' = mg - kv^2$ b) $v \rightarrow \sqrt{mg/k}$ c) $k = 2/49$
26. y est asymptotique à $t - 3$ quand $t \rightarrow \infty$
27. $y \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$
28. $y \rightarrow \infty$, 0, ou $-\infty$ selon la valeur initiale de y
29. $y \rightarrow \infty$ ou $-\infty$ selon la valeur initiale de y
30. $y \rightarrow \infty$ ou $-\infty$ ou y oscille selon la valeur initiale de y
31. $y \rightarrow -\infty$ ou est asymptotique à $\sqrt{2t-1}$ selon la valeur initiale de y
32. $y \rightarrow 0$ puis n'existe pas après un certain $t_f \geq 0$
33. $y \rightarrow \infty$ ou $-\infty$ selon la valeur initiale de y

Section 1.2

1. a) $y = 5 + (y_0 - 5)e^{-t}$ b) $y = (5/2) + [y_0 - (5/2)]e^{-2t}$ c) $y = 5 + (y_0 - 5)e^{-2t}$

La solution d'équilibre est $y = 5$ en a) et c), $y = 5/2$ en b); la solution s'approche de l'équilibre plus rapidement en b) et en c) qu'en a).

2. a) $y = 5 + (y_0 - 5)e^t$ b) $y = (5/2) + [y_0 - (5/2)]e^{2t}$ c) $y = 5 + (y_0 - 5)e^{2t}$

La solution d'équilibre est $y = 5$ en a) et c), $y = 5/2$ en b); la solution diverge de l'équilibre plus rapidement en b) et en c) qu'en a).

3. a) $y = ce^{-at} + (b/a)$

c) i) L'équilibre est plus bas et on s'en approche plus rapidement.

ii) L'équilibre est plus élevé.

iii) L'équilibre reste inchangé et on s'en approche plus rapidement.

4. a) $y_e = b/a$ b) $Y' = aY$

5. a) $y_1(t) = ce^{at}$ b) $y = ce^{at} + (b/a)$

6. $y = ce^{-at} + (b/a)$

7. a) $T = 2 \ln 18 \cong 5,78$ mois b) $T = 2 \ln[900/(900 - p_0)]$ mois c) $p_0 = 900(1 - e^{-6}) \cong 897,8$

8. a) $r = (\ln 2)/30$ jour⁻¹ b) $r = (\ln 2)/N$ jour⁻¹

9. a) $T = 5 \ln 50 \cong 19,56$ s b) 718,34 m

10. a) $dv/dt = 9,8$, $v(0) = 0$ b) $T = \sqrt{300/4,9} \cong 7,82$ s c) $v \cong 76,68$ m/s

11. b) $v = 49 \tanh(t/5)$ m/s e) $x = 245 \ln \cosh(t/5)$ m f) $T \cong 9,48$ s

12. a) $r \cong 0,02828$ jour⁻¹ b) $Q(t) = 100e^{-0,02828t}$ c) $T \cong 24,5$ jours

14. $1620 \ln(4/3)/\ln 2 \cong 672,4$ ans

15. a) $u = T + (u_0 - T)e^{-kt}$ b) $k\tau = \ln 2$

16. 6,69 h

17. a) $Q(t) = CV(1 - e^{-t/RC})$ b) $Q(t) \rightarrow CV = Q_L$ c) $Q(t) = CV \exp[-(t - t_1)/RC]$

18. a) $Q' = 3(1 - 10^{-4}Q)$, $Q(0) = 0$

b) $Q(t) = 10^4(1 - e^{-3t/10^4})$, t en heures; après 1 an $Q \cong 9277,77$ g

c) $Q' = -3Q/10^4$, $Q(0) = 9277,77$

d) $Q(t) = 9277,77e^{-3t/10^4}$, t en heures; après 1 an $Q \cong 670,07$ g

e) $T \cong 2,60$ ans

19. a) $q' = -q/300$, $q(0) = 5000$ g

b) $q(t) = 5000e^{-t/300}$

c) Non

d) $T = 300 \ln(25/6) \cong 7,136$ h

e) $r = 250 \ln(25/6) \cong 256,78$ gal/min

Section 1.3

1. Deuxième ordre, linéaire

2. Deuxième ordre, non linéaire

3. Quatrième ordre, linéaire

4. Premier ordre, non linéaire

5. Deuxième ordre, non linéaire

6. Troisième ordre, linéaire

15. $r = -2$

16. $r = \pm 1$

17. $r = 2, -3$

18. $r = 0, 1, 2$

19. $r = -1, -2$

20. $r = 1, 4$

21. Deuxième ordre, linéaire

22. Deuxième ordre, non linéaire

23. Quatrième ordre, linéaire

24. Deuxième ordre, non linéaire

Chapitre 2 Section 2.1

1. $3y^2 - 2x^3 = c$; $y \neq 0$
2. $3y^2 - 2 \ln|1 + x^3| = c$; $x \neq -1$, $y \neq 0$
3. $y^{-1} + \cos x = c$ si $y \neq 0$; de plus $y = 0$; partout
4. $3y + y^2 - x^3 + x = c$; $y \neq -3/2$
5. $2 \tan 2y - 2x - \sin 2x = c$ si $\cos 2y \neq 0$; de plus $y = \pm(2n+1)\pi/4$ pour tout entier n ; partout
6. $y = \sin[\ln|x| + c]$ si $x \neq 0$ et $|y| < 1$; de plus $y = \pm 1$
7. $y^2 - x^2 + 2(e^y - e^{-x}) = c$; $y + e^y \neq 0$
8. $3y + y^3 - x^3 = c$; partout
9. a) $y = 1/(x^2 - x - 6)$ c) $-2 < x < 3$
10. a) $y = -\sqrt{2x - 2x^2 + 4}$ c) $-1 < x < 2$
11. a) $y = [2(1-x)e^x - 1]^{1/2}$ c) $-1,68 < x < 0,77$ environ
12. a) $r = 2/(1 - 2 \ln \theta)$ c) $0 < \theta < \sqrt{e}$
13. a) $y = -[2 \ln(1 + x^2) + 4]^{1/2}$ c) $-\infty < x < \infty$
14. a) $y = [3 - 2\sqrt{1 + x^2}]^{-1/2}$ c) $|x| < \frac{1}{2}\sqrt{5}$
15. a) $y = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 - 15}$ c) $x > \frac{1}{2}\sqrt{15}$
16. a) $y = -\sqrt{(x^2 + 1)/2}$ c) $-\infty < x < \infty$
17. a) $y = 5/2 - \sqrt{x^3 - e^x + 13/4}$ c) $-1,4445 < x < 4,6297$ environ
18. a) $y = -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{65 - 8e^x - 8e^{-x}}$ c) $|x| < 2,0794$ environ
19. a) $y = [\pi - \arcsin(3 \cos^2 x)]/3$ c) $|x - \pi/2| < 0,6155$
20. a) $y = \left[\frac{3}{2}(\arcsin x)^2\right]^{1/3}$ c) $-1 < x < 1$
21. $y^3 - 3y^2 - x - x^3 + 2 = 0$, $|x| < 1$
22. $y^3 - 4y - x^3 = -1$, $|x^3 - 1| < 16/3\sqrt{3}$ ou $-1,28 < x < 1,60$
23. $y = -1/(x^2/2 + 2x - 1)$; $x = -2$
24. $y = -3/2 + \sqrt{2x - e^x + 13/4}$; $x = \ln 2$
25. $y = -3/2 + \sqrt{\sin 2x + 1/4}$; $x = \pi/4$
26. $y = \tan(x^2 + 2x)$; $x = -1$
27. a) $y \rightarrow 4$ si $y_0 > 0$; $y = 0$ si $y_0 = 0$; $y \rightarrow -\infty$ si $y_0 < 0$ b) $T = 3,29527$
28. a) $y \rightarrow 4$ quand $t \rightarrow \infty$ b) $T = 2,84367$ c) $3,6622 < y_0 < 4,4042$
29. $x = \frac{c}{a}y + \frac{ad - bc}{a^2} \ln|ay + b| + k$; $a \neq 0$, $ay + b \neq 0$
30. b) $\arctan(y/x) - \ln|x| = c$
31. b) $x^2 + y^2 - cx^3 = 0$
32. b) $|y - x| = c|y + 3x|^5$; aussi $y = -3x$
33. b) $|y + x||y + 4x|^2 = c$
34. b) $2x/(x + y) + \ln|x + y| = c$; aussi $y = -x$
35. b) $x/(x + y) + \ln|x| = c$; aussi $y = -x$
36. b) $|x|^3 |x^2 - 5y^2| = c$
37. b) $c|x|^3 = |y^2 - x^2|$

Section 2.2

1. $x^2 + 3x + y^2 - 2y = c$
2. Pas exacte
3. $x^3 - x^2y + 2x + 2y^3 + 3y = c$
4. $x^2y^2 + 2xy = c$
5. $ax^2 + 2bxy + cy^2 = k$
6. Pas exacte
7. $e^x \sin y + 2y \cos x = c$; de plus $y = 0$
8. Pas exacte
9. $e^{xy} \cos 2x + x^2 - 3y = c$
10. $y \ln x + 3x^2 - 2y = c$
11. Pas exacte
12. $x^2 + y^2 = c$
13. $y = [x + \sqrt{28 - 3x^2}]/2$, $|x| < \sqrt{28/3}$
14. $y = [x - (24x^3 + x^2 - 8x - 16)^{1/2}]/4$, $x > 0,9846$

15. $b = 3$; $x^2y^2 + 2x^3y = c$
19. $x^2 + 2 \ln |y| - y^{-2} = c$; de plus $y = 0$
21. $xy^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c$
24. $\mu(t) = \exp \int R(t) dt$, où $t = xy$
26. $\mu(x) = e^{-x}$; $y = ce^x + 1 + e^{2x}$
28. $\mu(y) = e^{2y}/y$; $xe^{2y} - \ln |y| = c$; de plus $y = 0$
30. $\mu(y) = y^2$; $x^4 + 3xy + y^4 = c$
16. $b = 1$; $e^{2xy} + x^2 = c$
20. $e^x \sin y + 2y \cos x = c$
22. $x^2 e^x \sin y = c$
25. $\mu(x) = e^{3x}$; $(3x^2y + y^3)e^{3x} = c$
27. $\mu(y) = y$; $xy + y \cos y - \sin y = c$
29. $\mu(y) = \sin y$; $e^x \sin y + y^2 = c$
31. $\mu(x, y) = xy$; $x^3y + 3x^2 + y^3 = c$

Section 2.3

1. c) $y = ce^{-3t} + (t/3) - (1/9) + e^{-2t}$; y est asymptotique à $t/3 - 1/9$ quand $t \rightarrow \infty$
2. c) $y = ce^{2t} + t^3 e^{2t}/3$; $y \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$
3. c) $y = ce^{-t} + 1 + t^2 e^{-t}/2$; $y \rightarrow 1$ quand $t \rightarrow \infty$
4. c) $y = (c/t) + (3 \cos 2t)/4t + (3 \sin 2t)/2$; y est asymptotique à $(3 \sin 2t)/2$ quand $t \rightarrow \infty$
5. c) $y = ce^{2t} - 3e^t$; $y \rightarrow \infty$ ou $-\infty$ quand $t \rightarrow \infty$
6. c) $y = (c - t \cos t + \sin t)/t^2$; $y \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$
7. c) $y = t^2 e^{-t^2} + ce^{-t^2}$; $y \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$
8. c) $y = (\arctan t + c)/(1 + t^2)^2$; $y \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$
9. c) $y = ce^{-t/2} + 3t - 6$; y est asymptotique à $3t - 6$ quand $t \rightarrow \infty$
10. c) $y = -te^{-t} + ct$; $y \rightarrow \infty, 0$, ou $-\infty$ quand $t \rightarrow \infty$
11. c) $y = ce^{-t} + \sin 2t - 2 \cos 2t$; y est asymptotique à $\sin 2t - 2 \cos 2t$ quand $t \rightarrow \infty$
12. c) $y = ce^{-t/2} + 3t^2 - 12t + 24$; y est asymptotique à $3t^2 - 12t + 24$ quand $t \rightarrow \infty$
13. $y = 3e^t + 2(t-1)e^{2t}$
14. $y = (t^2 - 1)e^{-2t}/2$
15. $y = (3t^4 - 4t^3 + 6t^2 + 1)/12t^2$
16. $y = (\sin t)/t^2$
17. $y = (t+2)e^{2t}$
18. $y = t^{-2}[(\pi^2/4) - 1 - t \cos t + \sin t]$
19. $y = -(1+t)e^{-t}/t^4$, $t \neq 0$
20. $y = (t-1+2e^{-t})/t$, $t \neq 0$
21. b) $y = -\frac{4}{5} \cos t + \frac{8}{5} \sin t + \left(a + \frac{4}{5}\right)e^{t/2}$; $a_0 = -\frac{4}{5}$ c) y oscille pour $a = a_0$
22. b) $y = -3e^{t/3} + (a+3)e^{t/2}$; $a_0 = -3$ c) $y \rightarrow -\infty$ pour $a = a_0$
23. b) $y = [2e^{2t/3} + a(3\pi+4)e^{2t/3} - 2e^{-\pi t/2}]/(3\pi+4)$; $a_0 = -2/(3\pi+4)$ c) $y \rightarrow 0$ pour $a = a_0$
24. b) $y = te^{-t} + (ea-1)e^{-t}/t$; $a_0 = 1/e$ c) $y \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$ pour $a = a_0$
25. b) $y = -\cos t/t^2 + \pi^2 a/4t^2$; $a_0 = 4/\pi^2$ c) $y \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $t \rightarrow 0$ pour $a = a_0$
26. b) $y = (e^t - e + a \sin 1)/\sin t$; $a_0 = (e-1)/\sin 1$ c) $y \rightarrow 1$ pour $a = a_0$
27. $(t, y) = (1,364\ 312; 0,820\ 082)$
28. $y_0 = -1,642\ 876$
29. a) $y = 12 + \frac{8}{65} \cos 2t + \frac{64}{65} \sin 2t - \frac{788}{65} e^{-t/4}$; y oscille autour de 12 quand $t \rightarrow \infty$ b) $t = 10,065\ 778$
30. $y_0 = -5/2$
31. $y_0 = -16/3$; $y \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \infty$ pour $y_0 = -16/3$
39. Voir le problème 2.
40. Voir le problème 4.
41. Voir le problème 6.
42. Voir le problème 12.
43. $y = \pm[5t/(2+5ct^5)]^{1/2}$
44. $y = r/(k + cre^{-rt})$
45. $y = \pm[\epsilon/(\sigma + c\epsilon e^{-2\epsilon t})]^{1/2}$
46. $y = \pm \left\{ \mu(t) / \left[2 \int_{t_0}^t \mu(s) ds + c \right] \right\}^{1/2}$, où $\mu(t) = \exp(2\Gamma \sin t + 2Tt)$

Problèmes supplémentaires

1. $y = (c/x^2) + (x^3/5)$
2. $2y + \cos y - x - \sin x = c$
3. $x^2 + xy - 3y - y^3 = 0$
4. $y = -3 + ce^{x-x^2}$
5. $x^2y + xy^2 + x = c$
6. $y = x^{-1}(1 - e^{1-x})$
7. $x^4 + x - y^2 - y^3 = c$
8. $y = (4 + \cos 2 - \cos x)/x^2$
9. $x^2y + x + y^2 = c$
10. $x + \ln|x| + x^{-1} + y - 2 \ln|y| = c$; aussi $y = 0$
11. $(x^3/3) + xy + e^y = c$
12. $y = ce^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^x)$
13. $y = \tan(x + x^2 + c)$
14. $x^2 + 2xy + 2y^2 = 34$
15. $y = c/\cosh^2(x/2)$
16. $e^{-x} \cos y + e^{2y} \sin x = c$
17. $y = ce^{3x} - e^{2x}$
18. $y = e^{-2x} \int_0^x e^{-s^2} ds + 3e^{-2x}$
19. $2xy + xy^3 - x^3 = c$
20. $e^x + e^{-y} = c$
21. $2xy^2 + 3x^2y - 4x + y^3 = c$
22. $y^3 + 3y - x^3 + 3x = 2$
23. $y = \frac{e^{2t}}{3t} + c \frac{e^{-t}}{t}$
24. $\sin y \sin^2 x = c$
25. $(x^2/y) + \arctan(y/x) = c$
26. $e^{-y/x} + \ln|x| = c$
27. $(x^2 + y^2 + 1)e^{-y^2} = c$
28. $x^3 + x^2y = c$
29. $\arctan(y/x) - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = c$
30. $(y^2/x^3) + (y/x^2) = c$
31. $x^3y^2 + xy^3 = -4$
32. $\frac{1}{y} = -x \int_1^x \frac{e^{2s}}{s^2} ds + \frac{x}{2}$
34. a) $y = t + (c - t)^{-1}$ b) $y = t^{-1} + 2t(c - t^2)^{-1}$ c) $y = \sin t + (c \cos t - \frac{1}{2} \sin t)^{-1}$
35. a) $v' - [x(t) + b]v = b$ b) $v = \left[b \int \mu(t) dt + c \right] \mu(t)$, $\mu(t) = \exp[-(at^2/2) - bt]$

Section 2.4

1. $0 < t < 3$
2. $0 < t < 4$
3. $\pi/2 < t < 3\pi/2$
4. $-\infty < t < -2$
5. $-2 < t < 2$
6. $1 < t < \pi$
7. $2t + 5y > 0$ ou $2t + 5y < 0$
8. $t^2 + y^2 < 1$
9. $1 - t^2 + y^2 > 0$ ou $1 - t^2 + y^2 < 0$, $t \neq 0$, $y \neq 0$
10. Partout
11. $y \neq 0$, $y \neq 3$
12. $t \neq n\pi$ pour $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $y \neq -1$
13. $y = \pm \sqrt{y_0^2 - 4t^2}$ si $y_0 \neq 0$; $|t| < |y_0|/2$
14. $y = [(1/y_0) - t^2]^{-1}$ si $y_0 \neq 0$; $y = 0$ si $y_0 = 0$; l'intervalle est $|t| < 1/\sqrt{y_0}$ si $y_0 > 0$; $-\infty < t < \infty$ si $y_0 \leq 0$
15. $y = y_0/\sqrt{2ty_0^2 + 1}$ si $y_0 \neq 0$; $y = 0$ si $y_0 = 0$; l'intervalle est $-1/2y_0^2 < t < \infty$ si $y_0 \neq 0$; $-\infty < t < \infty$ si $y_0 = 0$
16. $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3} \ln(1 + t^3) + y_0^2}$; $-[1 - \exp(-3y_0^2/2)]^{1/3} < t < \infty$
17. $y \rightarrow 3$ si $y_0 > 0$; $y = 0$ si $y_0 = 0$; $y \rightarrow -\infty$ si $y_0 < 0$
18. $y \rightarrow -\infty$ si $y_0 < 0$; $y \rightarrow 0$ si $y_0 \geq 0$
19. $y \rightarrow 0$ si $y_0 \leq 9$; $y \rightarrow \infty$ si $y_0 > 9$
20. $y \rightarrow -\infty$ si $y_0 < y_c \approx -0,019$; autrement, y est asymptotique à $\sqrt{t-1}$
21. a) Non b) Oui; posez $t_0 = 1/2$ dans l'équation (19) de la section. c) $|y| \leq (4/3)^{3/2} \approx 1,5396$
22. a) $y_1(t)$ est une solution pour $t \geq 2$; $y_2(t)$ est une solution pour tout t .
b) f_y n'est pas continue en $(2, -1)$.
26. a) $y_1(t) = \frac{1}{\mu(t)}$; $y_2(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int_{t_0}^t \mu(s)g(s) ds$

$$27. y = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t}) \text{ pour } 0 \leq t \leq 1; \quad y = \frac{1}{2}(e^2 - 1)e^{-2t} \text{ pour } t > 1$$

$$28. y = e^{-2t} \text{ pour } 0 \leq t \leq 1; \quad y = e^{-(t+1)} \text{ pour } t > 1$$

Section 2.5

$$1. t = 100 \ln 100 \text{ min} \approx 460,5 \text{ min}$$

$$2. Q(t) = 120\gamma [1 - \exp(-t/60)]; \quad 120\gamma$$

$$3. Q = 50e^{-0.2}(1 - e^{-0.2}) \text{ lb} \approx 7,42 \text{ lb}$$

$$4. Q(t) = 200 + t - [100(200)^2/(200 + t)^2] \text{ lb}, \quad t < 300; \quad c = 121/125 \text{ lb/gal}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c = 1 \text{ lb/gal}$$

$$5. \text{ a) } Q(t) = \frac{63150}{2501}e^{-t/50} + 25 - \frac{625}{2501} \cos t + \frac{25}{5002} \sin t$$

$$\text{ c) Niveau} = 25; \quad \text{ amplitude} = 25\sqrt{2501/5002} \approx 0,24995$$

$$6. \text{ c) } 130,41 \text{ s}$$

$$7. \text{ a) } (\ln 2)/r \text{ ans} \quad \text{ b) } 9,90 \text{ ans} \quad \text{ c) } 8,66 \%$$

$$8. \text{ a) } k(e^{rt} - 1)/r \quad \text{ b) } k \approx 3930 \$ \quad \text{ c) } 9,77 \%$$

$$9. k = 3086,64 \$/\text{an}; \quad 1259,92 \$$$

$$10. \text{ a) } 209\,641,74 \$ (20 \text{ ans}); \quad 250\,410,33 \$ (30 \text{ ans})$$

$$\text{ b) } 150\,358,26 \$ (20 \text{ ans}); \quad 289\,589,67 \$ (30 \text{ ans})$$

$$11. \text{ a) } 1788,77 \$ (20 \text{ ans}); \quad 1497,54 \$ (30 \text{ ans})$$

$$\text{ b) } 179\,303,83 \$ (20 \text{ ans}); \quad 289\,115,13 \$ (30 \text{ ans})$$

$$12. \text{ a) } t \approx 146,54 \text{ mois} \quad \text{ b) } 246\,758,02 \$$$

$$13. \text{ a) } 0,000\,120\,97 \text{ an}^{-1} \quad \text{ b) } Q_0 \exp(-0,000\,120\,97t), \quad t \text{ en années} \quad \text{ c) } 13\,305 \text{ ans}$$

$$14. \text{ a) } \tau \approx 2,9632; \quad \text{ non} \quad \text{ b) } \tau = 10 \ln 2 \approx 6,9315 \quad \text{ c) } \tau = 6,3805$$

$$15. \text{ b) } y_c \approx 0,83$$

$$16. t = \ln \frac{13}{8} / \ln \frac{13}{12} \text{ min} \approx 6,07 \text{ min}$$

$$17. \text{ a) } u(t) = 2000/(1 + 0,048t)^{1/3} \quad \text{ c) } \tau \approx 750,77 \text{ s}$$

$$18. \text{ a) } u(t) = ce^{-kt} + T_0 + kT_1(k \cos \omega t + \omega \sin \omega t)/(k^2 + \omega^2) \quad \text{ b) } R \approx 9,11 ^\circ\text{F}; \quad \tau = 3,51 \text{ h}$$

$$\text{ c) } R = kT_1/\sqrt{k^2 + \omega^2}; \quad \tau = (1 + \omega) \arctan(\omega/k)$$

$$19. \text{ a) } c = k + (P/r) + [c_0 - k - (P/r)]e^{-rt/V}; \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c = k + (P/r) \quad \text{ b) } T = (V \ln 2)/r; \quad T = (V \ln 10)/r$$

$$\text{ c) Supérieur, } T = 431 \text{ ans}; \quad \text{ Michigan, } T = 71,4 \text{ ans}; \quad \text{ Érié, } T = 6,05 \text{ ans}; \quad \text{ Ontario, } T = 17,6 \text{ ans}$$

$$20. \text{ a) } 50,408 \text{ m} \quad \text{ b) } 5,248 \text{ s}$$

$$21. \text{ a) } 45,783 \text{ m} \quad \text{ b) } 5,129 \text{ s}$$

$$22. \text{ a) } 48,562 \text{ m} \quad \text{ b) } 5,194 \text{ s}$$

$$23. \text{ a) } 176,7 \text{ pi/s} \quad \text{ b) } 1074,5 \text{ pi} \quad \text{ c) } 15 \text{ pi/s} \quad \text{ d) } 256,6 \text{ s}$$

$$24. \text{ a) } dv/dx = -\mu v \quad \text{ b) } \mu = (66/25) \ln 10 \text{ mi}^{-1} \approx 6,0788 \text{ mi}^{-1} \quad \text{ c) } \tau = 900/(11 \ln 10) \text{ s} \approx 35,533 \text{ s}$$

$$25. \text{ a) } x_m = -\frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \right) + \frac{mv_0}{k}; \quad t_m = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \right)$$

$$26. \text{ a) } v = -(mg/k) + [v_0 + (mg/k)] \exp(-kt/m) \quad \text{ b) } v = v_0 - gt; \quad \text{ oui} \quad \text{ c) } v = 0 \text{ pour } t > 0$$

$$27. \text{ a) } v_L = 2a^2 g(\rho - \rho')/9\mu \quad \text{ b) } e = 4\pi a^3 g(\rho - \rho')/3E$$

$$28. \text{ a) } 11,58 \text{ m/s} \quad \text{ b) } 13,45 \text{ m} \quad \text{ c) } k \geq 0,2394 \text{ kg/s}$$

$$29. \text{ a) } v = R\sqrt{2g/(R+x)} \quad \text{ b) } 50,6 \text{ h}$$

$$30. \text{ b) } x = ut \cos A, \quad y = -gt^2/2 + ut \sin A + h \quad \text{ d) } -16L^2/(u^2 \cos^2 A) + L \tan A + 3 \geq H$$

$$\text{ e) } 0,63 \text{ rad} \leq A \leq 0,96 \text{ rad} \quad \text{ f) } u = 106,89 \text{ pi/s}, \quad A = 0,7954 \text{ rad}$$

31. a) $v = (u \cos A)e^{-rt}$, $w = -g/r + (u \sin A + g/r)e^{-rt}$
 b) $x = u \cos A(1 - e^{-rt})/r$, $y = -gt/r + (u \sin A + g/r)(1 - e^{-rt})/r + h$
 d) $u = 145,3 \text{ pi/s}$, $A = 0,644 \text{ rad}$
32. d) $k = 2,193$

Section 2.6

1. $y = 0$ est instable.
2. $y = -a/b$ est asymptotiquement stable, $y = 0$ est instable.
3. $y = 1$ est asymptotiquement stable, $y = 0$ et $y = 2$ sont instables.
4. $y = 0$ est instable.
5. $y = 0$ est asymptotiquement stable.
6. $y = 0$ est asymptotiquement stable.
7. c) $y = [y_0 + (1 - y_0)kt]/[1 + (1 - y_0)kt]$
8. $y = 1$ est semi-stable.
9. $y = -1$ est asymptotiquement stable, $y = 0$ est semi-stable, $y = 1$ est instable.
10. $y = -1$ et $y = 1$ sont asymptotiquement stables, $y = 0$ est instable.
11. $y = 0$ est asymptotiquement stable, $y = b^2/a^2$ est instable.
12. $y = 2$ est asymptotiquement stable, $y = 0$ est semi-stable, $y = -2$ est instable.
13. $y = 0$ et $y = 1$ sont semi-stables.
15. a) $\tau = (1/r) \ln 4$; 55,452 ans
 b) $T = (1/r) \ln [\beta(1 - \alpha)/(1 - \beta)\alpha]$; 175,78 ans
16. a) $y = 0$ est instable, $y = K$ est asymptotiquement stable.
 b) Concave vers le haut pour $0 < y \leq K/e$, concave vers le bas pour $K/e \leq y < K$
17. a) $y = K \exp\{\ln(y_0/K)e^{-rt}\}$ b) $y(2) \cong 0,7153K \cong 57,6 \times 10^6 \text{ kg}$ c) $\tau \cong 2,215 \text{ ans}$
18. b) $(h/a)\sqrt{k/\alpha\pi}$; oui c) $k/\alpha \leq \pi a^2$
19. b) $k^2/2g(\alpha a)^2$
20. c) $Y = Ey_2 = KE[1 - (E/r)]$ d) $Y_m = Kr/4$ pour $E = r/2$
21. a) $y_{1,2} = K[1 \mp \sqrt{1 - (4h/rK)}]/2$
22. a) $y = 0$ est instable, $y = 1$ est asymptotiquement stable. b) $y = y_0/[y_0 + (1 - y_0)e^{-at}]$
23. a) $y = y_0 e^{-\beta t}$ b) $x = x_0 \exp[-\alpha y_0(1 - e^{-\beta t})/\beta]$ c) $x_0 \exp(-\alpha y_0/\beta)$
24. b) $z = 1/[v + (1 - v)e^{\beta t}]$ c) 0,0927
25. a), b) $a = 0$: $y = 0$ est semi-stable.
 $a > 0$: $y = \sqrt{a}$ est asymptotiquement stable et $y = -\sqrt{a}$ est instable.
26. a) $a \leq 0$: $y = 0$ est asymptotiquement stable.
 $a > 0$: $y = 0$ est instable; $y = \sqrt{a}$ et $y = -\sqrt{a}$ est asymptotiquement stable.
27. a) $a < 0$: $y = 0$ est asymptotiquement stable et $y = a$ est instable.
 $a = 0$: $y = 0$ est semi-stable.
 $a > 0$: $y = 0$ est instable et $y = a$ est asymptotiquement stable.
28. a) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \min(p, q)$; $x(t) = \frac{pq[e^{\alpha(q-p)t} - 1]}{qe^{\alpha(q-p)t} - p}$
 b) $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = p$; $x(t) = \frac{p^2 \alpha t}{p \alpha t + 1}$

Chapitre 3 Section 3.1

1. $y = c_1 t^{-1} + c_2 + \ln t$
2. $y = c_1 \ln t + c_2 + t$
3. $y = (1/k) \ln |(k-t)/(k+t)| + c_2$ si $c_1 = k^2 > 0$; $y = (2/k) \arctan(t/k) + c_2$ si $c_1 = -k^2 < 0$;
 $y = -2t^{-1} + c_2$ si $c_1 = 0$; de plus $y = c$
4. $y = \pm \frac{2}{3}(t-2c_1)\sqrt{t+c_1} + c_2$; de plus $y = c$ *Suggestion: $\mu(v) = v^{-3}$ est un facteur intégrant.*
5. $y = c_1 e^{-t} + c_2 - t e^{-t}$
6. $c_1^2 y = c_1 t - \ln |1 + c_1 t| + c_2$ si $c_1 \neq 0$; $y = \frac{1}{2} t^2 + c_2$ si $c_1 = 0$; de plus $y = c$
7. $y^2 = c_1 t + c_2$
8. $y = c_1 \sin(t + c_2) = k_1 \sin t + k_2 \cos t$
9. $\frac{1}{3} y^3 - 2c_1 y + c_2 = 2t$; de plus $y = c$
10. $t + c_2 = \pm \frac{2}{3}(y - 2c_1)(y + c_1)^{1/2}$
11. $y \ln |y| - y + c_1 y + t = c_2$; de plus $y = c$
12. $e^y = (t + c_2)^2 + c_1$
13. $y = \frac{4}{3}(t+1)^{3/2} - \frac{1}{3}$
14. $y = 2(1-t)^{-2}$
15. $y = 3 \ln t - \frac{3}{2} \ln(t^2 + 1) - 5 \arctan t + 2 + \frac{3}{2} \ln 2 + \frac{5}{4} \pi$
16. $y = \frac{1}{2} t^2 + \frac{3}{2}$

Section 3.2

1. $y = c_1 e^t + c_2 e^{-3t}$
2. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$
3. $y = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{-t/3}$
4. $y = c_1 e^{t/2} + c_2 e^t$
5. $y = c_1 + c_2 e^{-5t}$
6. $y = c_1 e^{3t/2} + c_2 e^{-3t/2}$
7. $y = c_1 \exp[(9 + 3\sqrt{5})t/2] + c_2 \exp[(9 - 3\sqrt{5})t/2]$
8. $y = c_1 \exp[(1 + \sqrt{3})t] + c_2 \exp[(1 - \sqrt{3})t]$
9. $y = e^t$; $y \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$
10. $y = \frac{5}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t}$; $y \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$
11. $y = 12e^{t/3} - 8e^{t/2}$; $y \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \infty$
12. $y = -1 - e^{-3t}$; $y \rightarrow -1$ quand $t \rightarrow \infty$
13. $y = \frac{1}{26}(13 + 5\sqrt{13}) \exp[(-5 + \sqrt{13})t/2] + \frac{1}{26}(13 - 5\sqrt{13}) \exp[(-5 - \sqrt{13})t/2]$; $y \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$
14. $y = (2/\sqrt{33}) \exp[(-1 + \sqrt{33})t/4] - (2/\sqrt{33}) \exp[(-1 - \sqrt{33})t/4]$; $y \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$
15. $y = \frac{1}{10} e^{-9(t-1)} + \frac{9}{10} e^{t-1}$; $y \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$
16. $y = -\frac{1}{2} e^{(t+2)/2} + \frac{3}{2} e^{-(t+2)/2}$; $y \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \infty$
17. $y'' + y' - 6y = 0$
18. $2y'' + 5y' + 2y = 0$
19. $y = \frac{1}{4} e^t + e^{-t}$; le minimum est $y = 1$ en $t = \ln 2$
20. $y = -e^t + 3e^{t/2}$; le maximum est $y = \frac{9}{4}$ en $t = \ln(9/4)$, $y = 0$ quand $t = \ln 9$
21. $\alpha = -2$
22. $\beta = -1$
23. $y \rightarrow 0$ pour $\alpha < 0$; y devient non borné pour $\alpha > 1$.
24. $y \rightarrow 0$ pour $\alpha < 1$; il n'y a pas de α pour lequel toutes les solutions non nulles deviennent non bornées.
25. a) $y = \frac{1}{5}(1 + 2\beta)e^{-2t} + \frac{1}{5}(4 - 2\beta)e^{t/2}$
 b) $y \cong 0,71548$ quand $t = \frac{2}{5} \ln 6 \cong 0,71670$
 c) $\beta = 2$
26. a) $y = (6 + \beta)e^{-2t} - (4 + \beta)e^{-3t}$
 b) $t_m = \ln[(12 + 3\beta)/(12 + 2\beta)]$, $y_m = \frac{4}{27}(6 + \beta)^3/(4 + \beta)^2$
 c) $\beta = 6(1 + \sqrt{3}) \cong 16,3923$
 d) $t_m \rightarrow \ln(3/2)$, $y_m \rightarrow \infty$

27. a) $y = d/c$ b) $aY'' + bY' + cY = 0$

28. a) $b > 0$ et $0 < c < b^2/4a$ b) $c < 0$ c) $b < 0$ et $0 < c < b^2/4a$

Section 3.3

1. $-\frac{7}{2}e^{t/2}$

2. 1

3. e^{-4t}

4. x^2e^x

5. $-e^{2t}$

6. 0

7. $0 < t < \infty$

8. $-\infty < t < 1$

9. $0 < t < 4$

10. $0 < t < \infty$

11. $0 < x < 3$

12. $2 < x < 3\pi/2$

14. L'équation est non linéaire.

15. L'équation est non homogène.

16. Non

17. $3te^{2t} + ce^{2t}$

18. $te^t + ct$

19. $5W(f, g)$

20. $-4(t \cos t - \sin t)$

21. y_3 et y_4 forment un ensemble fondamental de solutions si et seulement si $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

22. $y_1(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t, \quad y_2(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$

23. $y_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-3(t-1)} + \frac{3}{2}e^{-(t-1)}, \quad y_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-3(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-(t-1)}$

24. Oui 25. Oui 26. Oui 27. Oui

28. b) Oui

c) $[y_1(t), y_3(t)]$ et $[y_1(t), y_4(t)]$ sont des ensembles fondamentaux de solutions ;
 $[y_2(t), y_3(t)]$ et $[y_4(t), y_5(t)]$ ne le sont pas.

29. ct^2e^t

30. $c \cos t$

31. c/x

32. $c/(1-x^2)$

34. $2/25$

35. $3\sqrt{e} \cong 4,946$

36. $p(t) = 0$ pour tout t

40. Si t_0 est un point d'inflexion et $y = \phi(t)$ est une solution, alors à partir de l'équation différentielle $p(t_0)\phi'(t_0) + q(t_0)\phi(t_0) = 0$.

42. Oui, $y = c_1e^{-x^2/2} \int_{x_0}^x e^{t^2/2} dt + c_2e^{-x^2/2}$

43. Non

44. Oui, $y = \frac{1}{\mu(x)} \left[c_1 \int_{x_0}^x \frac{\mu(t)}{t} dt + c_2 \right], \quad \mu(x) = \exp \left[- \int \left(\frac{1}{x} + \frac{\cos x}{x} \right) dx \right]$

45. Oui, $y = c_1x^{-1} + c_2x$

47. $x^2\mu'' + 3x\mu' + (1+x^2-v^2)\mu = 0$

48. $(1-x^2)\mu'' - 2x\mu' + \alpha(\alpha+1)\mu = 0$

49. $\mu'' - x\mu = 0$

51. Les équations de Legendre et d'Airy sont autoadjointes.

Section 3.4

1. $e \cos 2 + ie \sin 2 \cong -1,1312 + 2,4717i$

2. $e^2 \cos 3 - ie^2 \sin 3 \cong -7,3151 - 1,0427i$

3. -1

4. $e^2 \cos(\pi/2) - ie^2 \sin(\pi/2) = -e^2i \cong -7,3891i$

5. $2 \cos(\ln 2) - 2i \sin(\ln 2) \cong 1,5385 - 1,2779i$

6. $\pi^{-1} \cos(2 \ln \pi) + i\pi^{-1} \sin(2 \ln \pi) \cong -0,20957 + 0,23959i$
7. $y = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t$
8. $y = c_1 e^t \cos \sqrt{5}t + c_2 e^t \sin \sqrt{5}t$
9. $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-4t}$
10. $y = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t$
11. $y = c_1 e^{-3t} \cos 2t + c_2 e^{-3t} \sin 2t$
12. $y = c_1 \cos(3t/2) + c_2 \sin(3t/2)$
13. $y = c_1 e^{-t} \cos(t/2) + c_2 e^{-t} \sin(t/2)$
14. $y = c_1 e^{t/3} + c_2 e^{-4t/3}$
15. $y = c_1 e^{-t/2} \cos t + c_2 e^{-t/2} \sin t$
16. $y = c_1 e^{-2t} \cos(3t/2) + c_2 e^{-2t} \sin(3t/2)$
17. $y = \frac{1}{2} \sin 2t$; oscillation stable
18. $y = e^{-2t} \cos t + 2e^{-2t} \sin t$; oscillation décroissante
19. $y = -e^{t-\pi/2} \sin 2t$; oscillation croissante
20. $y = (1 + 2\sqrt{3}) \cos t - (2 - \sqrt{3}) \sin t$; oscillation stable
21. $y = 3e^{-t/2} \cos t + \frac{5}{2} e^{-t/2} \sin t$; oscillation décroissante
22. $y = \sqrt{2} e^{-(t-\pi/4)} \cos t + \sqrt{2} e^{-(t-\pi/4)} \sin t$; oscillation décroissante
23. a) $u = 2e^{t/6} \cos(\sqrt{23}t/6) - (2/\sqrt{23})e^{t/6} \sin(\sqrt{23}t/6)$ b) $t = 10,7598$
24. a) $u = 2e^{-t/5} \cos(\sqrt{34}t/5) + (7/\sqrt{34})e^{-t/5} \sin(\sqrt{34}t/5)$ b) $T = 14,5115$
25. a) $y = 2e^{-t} \cos \sqrt{5}t + [(\alpha + 2)/\sqrt{5}]e^{-t} \sin \sqrt{5}t$ b) $\alpha = 1,50878$
- c) $t = \{\pi - \arctan[2\sqrt{5}/(2 + \alpha)]\} / \sqrt{5}$ d) $\pi/\sqrt{5}$
26. a) $y = e^{-at} \cos t + ae^{-at} \sin t$ b) $T = 1,8763$
- c) $\alpha = \frac{1}{4}$, $T = 7,4284$; $\alpha = \frac{1}{2}$, $T = 4,3003$; $\alpha = 2$, $T = 1,5116$
35. $y = c_1 \cos(\ln t) + c_2 \sin(\ln t)$
36. $y = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2}$
37. $y = c_1 t^{-1} \cos\left(\frac{1}{2} \ln t\right) + c_2 t^{-1} \sin\left(\frac{1}{2} \ln t\right)$
38. $y = c_1 t^6 + c_2 t^{-1}$
39. $y = c_1 t^2 + c_2 t^3$
40. $y = c_1 t \cos(2 \ln t) + c_2 t \sin(2 \ln t)$
41. $y = c_1 t + c_2 t^{-3}$
42. $y = c_1 t^{-3} \cos(\ln t) + c_2 t^{-3} \sin(\ln t)$
44. Oui, $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, $x = \int e^{-t^2/2} dt$
45. Non
46. Oui, $y = c_1 e^{-t^2/4} \cos(\sqrt{3}t^2/4) + c_2 e^{-t^2/4} \sin(\sqrt{3}t^2/4)$

Section 3.5

1. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t$
2. $y = c_1 e^{-t/3} + c_2 t e^{-t/3}$
3. $y = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{3t/2}$
4. $y = c_1 e^{-3t/2} + c_2 t e^{-3t/2}$
5. $y = c_1 e^t \cos 3t + c_2 e^t \sin 3t$
6. $y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$
7. $y = c_1 e^{-t/4} + c_2 e^{-4t}$
8. $y = c_1 e^{-3t/4} + c_2 t e^{-3t/4}$
9. $y = c_1 e^{2t/5} + c_2 t e^{2t/5}$
10. $y = e^{-t/2} \cos(t/2) + c_2 e^{-t/2} \sin(t/2)$
11. $y = 2e^{2t/3} - \frac{7}{3} t e^{2t/3}$, $y \rightarrow -\infty$ quand $t \rightarrow \infty$
12. $y = 2t e^{3t}$, $y \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$
13. $y = -e^{-t/3} \cos 3t + \frac{5}{9} e^{-t/3} \sin 3t$, $y \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$
14. $y = 7e^{-2(t+1)} + 5t e^{-2(t+1)}$, $y \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$

15. a) $y = e^{-3t/2} - \frac{5}{2}te^{-3t/2}$ b) $t = \frac{2}{5}$ c) $t_0 = 16/15, \quad y_0 = -\frac{5}{3}e^{-8/5} \cong -0,33649$

d) $y = e^{-3t/2} + \left(b + \frac{3}{2}\right)te^{-3t/2}; \quad b = -\frac{3}{2}$

16. $y = 2e^{t/2} + (b-1)te^{t/2}; \quad b = 1$

17. a) $y = e^{-t/2} + \frac{5}{2}te^{-t/2}$ b) $t_0 = \frac{8}{5}, \quad y_0 = 5e^{-4/5} \cong 2,24664$ c) $y = e^{-t/2} + \left(b + \frac{1}{2}\right)te^{-t/2}$

d) $t_M = 4b/(1+2b) \rightarrow 2$ quand $b \rightarrow \infty$; $y_M = (1+2b)\exp[-2b/(1+2b)] \rightarrow \infty$ quand $b \rightarrow \infty$

18. a) $y = ae^{-2t/3} + \left(\frac{2}{3}a-1\right)te^{-2t/3}$ b) $a = \frac{3}{2}$

23. $y_2(t) = t^3$

24. $y_2(t) = t^{-2}$

25. $y_2(t) = t^{-1} \ln t$

26. $y_2(t) = te^t$

27. $y_2(x) = \cos x^2$

28. $y_2(x) = x$

29. $y_2(x) = x^{1/4}e^{-2\sqrt{x}}$

30. $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$

31. $y = c_1e^{-\delta x^2/2} \int_0^x e^{\delta s^2/2} ds + c_2e^{-\delta x^2/2}$

32. $y_2(t) = y_1(t) \int_{t_0}^t y_1^{-2}(s) \exp\left[-\int_{s_0}^s p(r) dr\right] ds$

33. $y_2(t) = t^{-1} \ln t$

34. $y_2(t) = \cos t^2$

35. $y_2(x) = x$

36. $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$

38. b) $y_0 + (a/b)y'_0$

40. $y = c_1t^2 + c_2t^2 \ln t$

41. $y = c_1t^{-1/2} + c_2t^{-1/2} \ln t$

42. $y = c_1t + c_2t^{5/2}$

43. $y = c_1t^{-1} + c_2t^{-1} \ln t$

44. $y = c_1t^{3/2} + c_2t^{3/2} \ln t$

45. $y = c_1t^{-2} \cos(3 \ln t) + c_2t^{-2} \sin(3 \ln t)$

Section 3.6

1. $y = c_1e^{3t} + c_2e^{-t} - e^{2t}$

2. $y = c_1e^{-t} \cos 2t + c_2e^{-t} \sin 2t + \frac{3}{17} \sin 2t - \frac{12}{17} \cos 2t$

3. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - \frac{7}{2} + 3t - 2t^2$

4. $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t} + 2e^{3t} - 3e^{-2t}$

5. $y = c_1e^{3t} + c_2e^{-t} + \frac{3}{16}te^{-t} + \frac{3}{8}t^2e^{-t}$

6. $y = c_1 + c_2we^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{1}{2} \sin 2t - \frac{1}{2} \cos 2t$

7. $y = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + \frac{1}{162}(9t^2 - 6t + 1)e^{3t} + \frac{2}{3}$

8. $y = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + t^2e^{-t}$

9. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{-t/2} + t^2 - 6t + 14 - \frac{3}{10} \sin t - \frac{9}{10} \cos t$

10. $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t - \frac{1}{3}t \cos 2t - \frac{5}{9} \sin 2t$

11. $u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + (\omega_0^2 + \omega^2)^{-1} \cos \omega t$

12. $u = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + (1/2\omega_0)t \sin \omega_0 t$

13. $y = c_1e^{-t/2} \cos(\sqrt{15}t/2) + c_2e^{-t/2} \sin(\sqrt{15}t/2) + \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$

$$14. y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + \frac{1}{6} t e^{2t} + \frac{1}{8} e^{-2t}$$

$$15. y = e^t - \frac{1}{2} e^{-2t} - t - \frac{1}{2}$$

$$16. y = \frac{7}{10} \sin 2t - \frac{19}{40} \cos 2t + \frac{1}{4} t^2 - \frac{1}{8} + \frac{3}{5} e^t$$

$$17. y = 4te^t - 3e^t + \frac{1}{6} t^3 e^t + 4$$

$$18. y = e^{3t} + \frac{2}{3} e^{-t} - \frac{2}{3} e^{2t} - t e^{2t}$$

$$19. y = 2 \cos 2t - \frac{1}{8} \sin 2t - \frac{3}{4} t \cos 2t$$

$$20. y = e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t + t e^{-t} \sin 2t$$

$$21. \text{ a) } Y(t) = t(A_0 t^4 + A_1 t^3 + A_2 t^2 + A_3 t + A_4) + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2) e^{-3t} + D \sin 3t + E \cos 3t$$

$$\text{ b) } A_0 = 2/15, \quad A_1 = -2/9, \quad A_2 = 8/27, \quad A_3 = -8/27, \quad A_4 = 16/81, \quad B_0 = -1/9, \quad B_1 = -1/9, \quad B_2 = -2/27, \\ D = -1/18, \quad E = -1/18$$

$$22. \text{ a) } Y(t) = A_0 t + A_1 + t(B_0 t + B_1) \sin t + t(D_0 t + D_1) \cos t$$

$$\text{ b) } A_0 = 1, \quad A_1 = 0, \quad B_0 = 0, \quad B_1 = 1/4, \quad D_0 = -1/4, \quad D_1 = 0$$

$$23. \text{ a) } Y(t) = e^t (A \cos 2t + B \sin 2t) + (D_0 t + D_1) e^{2t} \sin t + (E_0 t + E_1) e^{2t} \cos t$$

$$\text{ b) } A = -1/20, \quad B = -3/20, \quad D_0 = -3/2, \quad D_1 = -5, \quad E_0 = 3/2, \quad E_1 = 1/2$$

$$24. \text{ a) } Y(t) = A e^{-t} + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2) e^{-t} \cos t + t(D_0 t^2 + D_1 t + D_2) e^{-t} \sin t$$

$$\text{ b) } A = 3, \quad B_0 = -2/3, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 1, \quad D_0 = 0, \quad D_1 = 1, \quad D_2 = 1$$

$$25. \text{ a) } Y(t) = A_0 t^2 + A_1 t + A_2 + t^2(B_0 t + B_1) e^{2t} + (D_0 t + D_1) \sin 2t + (E_0 t + E_1) \cos 2t$$

$$\text{ b) } A_0 = 1/2, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 3/4, \quad B_0 = 2/3, \quad B_1 = 0, \quad D_0 = 0, \quad D_1 = -1/16, \quad E_0 = 1/8, \quad E_1 = 1/16$$

$$26. \text{ a) } Y(t) = t(A_0 t^2 + A_1 t + A_2) \sin 2t + t(B_0 t^2 + B_1 t + B_2) \cos 2t$$

$$\text{ b) } A_0 = 0, \quad A_1 = 13/16, \quad A_2 = 7/4, \quad B_0 = -1/12, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = 13/32$$

$$27. \text{ a) } Y(t) = (A_0 t^2 + A_1 t + A_2) e^t \sin 2t + (B_0 t^2 + B_1 t + B_2) e^t \cos 2t + e^{-t} (D \cos t + E \sin t) + F e^t$$

$$\text{ b) } A_0 = 1/52, \quad A_1 = 10/169, \quad A_2 = -1233/35152, \quad B_0 = -5/52, \quad B_1 = 73/676, \quad B_2 = -4105/35152, \\ D = -3/2, \quad E = 3/2, \quad F = 2/3$$

$$28. \text{ a) } Y(t) = t(A_0 t + A_1) e^{-t} \cos 2t + t(B_0 t + B_1) e^{-t} \sin 2t + (D_0 t + D_1) e^{-2t} \cos t + (E_0 t + E_1) e^{-2t} \sin t$$

$$\text{ b) } A_0 = 0, \quad A_1 = 3/16, \quad B_0 = 3/8, \quad B_1 = 0, \quad D_0 = -2/5, \quad D_1 = -7/25, \quad E_0 = 1/5, \quad E_1 = 1/25$$

$$29. \text{ b) } w = -\frac{2}{5} + c_1 e^{5t}$$

$$30. y = c_1 \cos \lambda t + c_2 \sin \lambda t + \sum_{m=1}^N [a_m / (\lambda^2 - m^2 \pi^2)] \sin m \pi t$$

$$31. y = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \pi \\ -(1 + \pi/2) \sin t - (\pi/2) \cos t + (\pi/2) e^{\pi-t}, & t > \pi \end{cases}$$

$$32. y = \begin{cases} \frac{1}{5} - \frac{1}{10} e^{-t} \sin 2t - \frac{1}{5} e^{-t} \cos 2t, & 0 \leq t \leq \pi/2 \\ -\frac{1}{5} (1 + e^{\pi/2}) e^{-t} \cos 2t - \frac{1}{10} (1 + e^{\pi/2}) e^{-t} \sin 2t, & t > \pi/2 \end{cases}$$

33. Non

$$36. y = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} - \frac{1}{2} e^{2t}$$

Section 3.7

$$1. Y(t) = e^t$$

$$2. Y(t) = -\frac{2}{3} t e^{-t}$$

$$3. Y(t) = \frac{3}{2} t^2 e^{-t}$$

$$4. Y(t) = 2t^2 e^{t/2}$$

$$5. y = c_1 \cos t + c_2 \sin t - (\cos t) \ln (\tan t + \sec t)$$

$$6. y = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t + (\sin 3t) \ln (\tan 3t + \sec 3t) - 1$$

$$7. y = c_1 e^{-2t} + c_2 t e^{-2t} - e^{-2t} \ln t$$

8. $y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{3}{4}(\sin 2t) \ln \sin 2t - \frac{3}{2}t \cos 2t$
9. $y = c_1 \cos(t/2) + c_2 \sin(t/2) + t \sin(t/2) + 2[\ln \cos(t/2)] \cos(t/2)$
10. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t - \frac{1}{2} e^t \ln(1+t^2) + t e^t \arctan t$
11. $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + \int [e^{3(t-s)} - e^{2(t-s)}] g(s) ds$
12. $y = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{2} \int [\sin 2(t-s)] g(s) ds$
13. $Y(t) = \frac{1}{2} + t^2 \ln t$
14. $Y(t) = -2t^2$
15. $Y(t) = \frac{1}{2}(t-1)e^{2t}$
16. $Y(t) = -\frac{1}{2}(2t-1)e^{-t}$
17. $Y(x) = \frac{1}{6}x^2(\ln x)^3$
18. $Y(x) = -\frac{3}{2}x^{1/2} \cos x$
19. $Y(x) = \int \frac{x e^t - t e^x}{(1-t)^2 e^t} g(t) dt$
20. $Y(x) = x^{-1/2} \int t^{-3/2} \sin(x-t) g(t) dt$
23. b) $y = y_0 \cos t + y'_0 \sin t + \int_{t_0}^t \sin(t-s) g(s) ds$
24. $y = (b-a)^{-1} \int_{t_0}^t [e^{b(t-s)} - e^{a(t-s)}] g(s) ds$
25. $y = \mu^{-1} \int_{t_0}^t e^{\lambda(t-s)} \sin \mu(t-s) g(s) ds$
26. $y = \int_{t_0}^t (t-s) e^{a(t-s)} g(s) ds$
29. $y = c_1 t + c_2 t^2 + 4t^2 \ln t$
30. $y = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-5} + \frac{1}{12} t$
31. $y = c_1(1+t) + c_2 e^t + \frac{1}{12}(t-1)e^{2t}$
32. $y = c_1 e^t + c_2 t - \frac{1}{2}(2t-1)e^{-t}$

Section 3.8

1. $u = 5 \cos(2t - \delta)$, $\delta = \arctan(4/3) \cong 0,9273$
2. $u = 2 \cos(t - 2\pi/3)$
3. $u = 2\sqrt{5} \cos(3t - \delta)$, $\delta = -\arctan(1/2) \cong -0,4636$
4. $u = \sqrt{13} \cos(\pi t - \delta)$, $\delta = \pi + \arctan(3/2) \cong 4,1244$
5. $u = \frac{1}{4} \cos 8t$ pi, t en s; $\omega = 8$ rad/s, $T = \pi/4$ s, $R = 1/4$ pi
6. $u = \frac{5}{7} \sin 14t$ cm, t en s; $t = \pi/14$ s
7. $u = (1/4\sqrt{2}) \sin(8\sqrt{2}t) - \frac{1}{12} \cos(8\sqrt{2}t)$ pi, t en s; $\omega = 8\sqrt{2}$ rad/s,
 $T = \pi/4\sqrt{2}$ s, $R = \sqrt{11/288} \cong 0,1954$ pi, $\delta = \pi - \arctan(3/\sqrt{2}) \cong 2,0113$
8. $Q = 10^{-6} \cos 2000t$ coulombs, t en s
9. $u = e^{-10t} [2 \cos(4\sqrt{6}t) + (5\sqrt{6}) \sin(4\sqrt{6}t)]$ cm, t en s;
 $\mu = 4\sqrt{6}$ rad/s, $T_d = \pi/2\sqrt{6}$ s, $T_d/T = 7/2\sqrt{6} \cong 1,4289$, $\tau \cong 0,4045$ s
10. $u = (1/8\sqrt{31})e^{-2t} \sin(2\sqrt{31}t)$ pi, t en s; $t = \pi/2\sqrt{31}$ s, $\tau \cong 1,5927$ s
11. $u \cong 0,057198e^{-0,15t} \cos(3,87008t - 0,50709)$ m, t en s; $\mu = 3,87008$ rad/s,
 $\mu/\omega_0 = 3,87008/\sqrt{15} \cong 0,99925$
12. $Q = 10^{-6}(2e^{-500t} - e^{-1000t})$ coulombs; t en s
13. $\gamma = \sqrt{20/9} \cong 1,4907$

16. $r = \sqrt{A^2 + B^2}$, $r \cos \theta = B$, $r \sin \theta = -A$; $R = r$; $\delta = \theta + (4n + 1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$
17. $\gamma = 8 \text{ lb}\cdot\text{s}/\pi$
18. $R = 10^3 \text{ ohms}$
20. $v_0 < -\gamma u_0/2m$
22. $2\pi/\sqrt{31}$
23. $\gamma = 5 \text{ lb}\cdot\text{s}/\pi$
24. $k = 6$, $v = \pm 2\sqrt{5}$
25. a) $\tau \cong 41,715$ d) $\gamma_0 \cong 1,73$, $\min \tau \cong 4,87$ e) $\tau = (2/\gamma) \ln(400/\sqrt{4 - \gamma^2})$
26. a) $u(t) = e^{-\gamma t/2m} [u_0 \sqrt{4km - \gamma^2} \cos \mu t + (2mv_0 + \gamma u_0) \sin \mu t] / \sqrt{4km - \gamma^2}$
 b) $R^2 = 4m(ku_0^2 + \gamma u_0 v_0 + mv_0^2) / (4km - \gamma^2)$
27. $\rho l u'' + \rho_0 g u = 0$, $T = 2\pi \sqrt{\rho l / \rho_0 g}$
28. a) $u = \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t$ c) Dans le sens horaire
29. a) $u = (16/\sqrt{127})e^{-t/8} \sin(\sqrt{127}t/8)$ c) Dans le sens horaire
30. b) $u = a \cos(\sqrt{k/mt}) + b \sqrt{m/k} \sin(\sqrt{k/mt})$
32. b) $u = \sin t$, $A = 1$, $T = 2\pi$ c) $A = 0,98$, $T = 6,07$
 d) $\epsilon = 0,2$, $A = 0,96$, $T = 5,90$; $\epsilon = 0,3$, $A = 0,94$, $T = 5,74$
 f) $\epsilon = -0,1$, $A = 1,03$, $T = 6,55$; $\epsilon = -0,2$, $A = 1,06$, $T = 6,90$; $\epsilon = -0,3$, $A = 1,11$, $T = 7,41$

Section 3.9

1. $-2 \sin 8t \sin t$
2. $2 \sin(t/2) \cos(13t/2)$
3. $2 \cos(3\pi t/2) \cos(\pi t/2)$
4. $2 \sin(7t/2) \cos(t/2)$
5. $u'' + 256u = 16 \cos 3t$, $u(0) = \frac{1}{6}$, $u'(0) = 0$, u en pi, t en s
6. $u'' + 10u' + 98u = 2 \sin(t/2)$, $u(0) = 0$, $u'(0) = 0,03$, u en min, t en s
7. a) $u = \frac{151}{1482} \cos 16t + \frac{16}{247} \cos 3t$ c) $\omega = 16 \text{ rad/s}$
8. a) $u = \frac{1}{153\,281} \left[160e^{-5t} \cos(\sqrt{73}t) + \frac{383\,443}{7300} e^{-5t} \sin(\sqrt{73}t) - 160 \cos(t/2) + 3128 \sin(t/2) \right]$
 b) Les deux premiers termes constituent la partie transitoire. d) $\omega = 4\sqrt{3} \text{ rad/s}$
9. $u = \frac{64}{45} (\cos 7t - \cos 8t) = \frac{128}{45} \sin(t/2) \sin(15t/2)$ pi, t en s
10. $u = (\cos 8t + \sin 8t - 8t \cos 8t)/4$ pi, t en s; $1/8$, $\pi/8$, $\pi/4$, $3\pi/8$ s
11. a) $\frac{8}{901} (30 \cos 2t + \sin 2t)$ pi, t en s b) $m = 4$ coups
12. $u = (\sqrt{2}/6) \cos(3t - 3\pi/4)$ m, t en s
15. $u = \begin{cases} F_0(t - \sin t), & 0 \leq t \leq \pi \\ F_0[(2\pi - t) - 3 \sin t], & \pi < t \leq 2\pi \\ -4F_0 \sin t, & 2\pi < t < \infty \end{cases}$
16. $Q(t) = 10^{-6}(e^{-4000t} - 4e^{-1000t} + 3)$ coulombs, t en s, $Q(0,001) \cong 1,5468 \times 10^{-6}$; $Q(0,01) \cong 2,9998 \times 10^{-6}$;
 $Q(t) \rightarrow 3 \times 10^{-6}$ quand $t \rightarrow \infty$
17. a) $u = [32(2 - \omega^2) \cos \omega t + 8\omega \sin \omega t] / (64 - 63\omega^2 + 16\omega^4)$
 b) $A = 8/\sqrt{64 - 63\omega^2 + 16\omega^4}$
 d) $\omega = 3\sqrt{14}/8 \cong 1,4031$, $A = 64/\sqrt{127} \cong 5,6791$
18. a) $u = 3(\cos t - \cos \omega t)/(\omega^2 - 1)$
19. a) $u = [(\omega^2 + 2) \cos t - 3 \cos \omega t]/(\omega^2 - 1) + \sin t$

Chapitre 4 Section 4.1

1. $-\infty < t < \infty$
2. $t > 0$ ou $t < 0$
3. $t > 1$, ou $0 < t < 1$, ou $t < 0$
4. $t > 0$
5. $\dots, -3\pi/2 < x < -\pi/2, -\pi/2 < x < 1, 1 < x < \pi/2, \pi/2 < x < 3\pi/2, \dots$
6. $-\infty < x < -2, -2 < x < 2, 2 < x < \infty$
7. Linéairement indépendant
8. Linéairement dépendant; $f_1(t) + 3f_2(t) - 2f_3(t) = 0$
9. Linéairement dépendant; $2f_1(t) + 13f_2(t) - 3f_3(t) - 7f_4(t) = 0$
10. Linéairement indépendant
11. 1
12. 1
13. $-6e^{-2t}$
14. e^{-2t}
15. $6x$
16. $6/x$
17. $\sin^2 t = \frac{1}{10}(5) - \frac{1}{2} \cos 2t$
19. a) $a_0[n(n-1)(n-2)\cdots 1] + a_1[n(n-1)\cdots 2]t + \cdots + a_n t^n$
 b) $(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_n) e^{rt}$
 c) $e^t, e^{-t}, e^{2t}, e^{-2t}$; oui, $W(e^t, e^{-t}, e^{2t}, e^{-2t}) \neq 0, -\infty < t < \infty$
21. $W = ce^{-2t}$
22. $W = c$
23. $W = c/t^2$
24. $W = c/t$
27. $y = c_1 e^t + c_2 t + c_3 t e^t$
28. $y = c_1 t^2 + c_2 t^3 + c_3(t+1)$

Section 4.2

1. $\sqrt{2}e^{i[(\pi/4)+2m\pi]}$
2. $2e^{i[(2\pi/3)+2m\pi]}$
3. $3e^{i(\pi+2m\pi)}$
4. $e^{i[(3\pi/2)+2m\pi]}$
5. $2e^{i[(11\pi/6)+2m\pi]}$
6. $\sqrt{2}e^{i[(5\pi/4)+2m\pi]}$
7. 1, $\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$
8. $2^{1/4}e^{-\pi i/8}, 2^{1/4}e^{7\pi i/8}$
9. 1, $i, -1, -i$
10. $(\sqrt{3}+i)/\sqrt{2}, -(\sqrt{3}+i)/\sqrt{2}$
11. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t}$
12. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$
13. $y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t}$
14. $y = c_1 + c_2 t + c_3 e^{2t} + c_4 t e^{2t}$
15. $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + e^{\sqrt{3}t/2} \left(c_3 \cos \frac{1}{2}t + c_4 \sin \frac{1}{2}t \right) + e^{-\sqrt{3}t/2} \left(c_5 \cos \frac{1}{2}t + c_6 \sin \frac{1}{2}t \right)$
16. $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + c_4 e^{-2t}$
17. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t + c_4 e^{-t} + c_5 t e^{-t} + c_6 t^2 e^{-t}$
18. $y = c_1 + c_2 t + c_3 e^t + c_4 e^{-t} + c_5 \cos t + c_6 \sin t$
19. $y = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{2t} + c_4 \cos t + c_5 \sin t$
20. $y = c_1 + c_2 e^{2t} + e^{-t} (c_3 \cos \sqrt{3}t + c_4 \sin \sqrt{3}t)$
21. $y = e^t [(c_1 + c_2 t) \cos t + (c_3 + c_4 t) \sin t] + e^{-t} [(c_5 + c_6 t) \cos t + (c_7 + c_8 t) \sin t]$
22. $y = (c_1 + c_2 t) \cos t + (c_3 + c_4 t) \sin t$
23. $y = c_1 e^t + c_2 e^{(2+\sqrt{5})t} + c_3 e^{(2-\sqrt{5})t}$
24. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{(-2+\sqrt{2})t} + c_3 e^{(-2-\sqrt{2})t}$
25. $y = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-t/3} \cos(t/\sqrt{3}) + c_3 e^{-t/3} \sin(t/\sqrt{3})$
26. $y = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{(3+\sqrt{3})t} + c_4 e^{(3-\sqrt{3})t}$
27. $y = c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-t/4} + c_3 e^{-t} \cos 2t + c_4 e^{-t} \sin 2t$

28. $y = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t + c_3 e^{-2t} \cos(\sqrt{3}t) + c_4 e^{-2t} \sin(\sqrt{3}t)$
29. $y = 2 - 2 \cos t + \sin t$
30. $y = \frac{1}{2} e^{-t/\sqrt{2}} \sin(t/\sqrt{2}) - \frac{1}{2} e^{-t/\sqrt{2}} \sin(t/\sqrt{2})$
31. $y = 2t - 3$
32. $y = 2 \cos t - \sin t$
33. $y = -\frac{2}{3} e^t - \frac{1}{10} e^{2t} - \frac{1}{6} e^{-2t} - \frac{16}{15} e^{-t/2}$
34. $y = \frac{2}{13} e^{-t} + \frac{24}{13} e^{t/2} \cos t + \frac{3}{13} e^{t/2} \sin t$
35. $y = 8 - 18e^{-t/3} + 8e^{-t/2}$
36. $y = \frac{21}{13} e^{-t} \cos t - \frac{38}{13} e^{-t} \sin t - \frac{8}{13} e^{-2t} \cos(\sqrt{3}t) + \frac{17\sqrt{3}}{39} e^{-2t} \sin(\sqrt{3}t)$
37. $y = \frac{1}{2}(\cosh t - \cos t) + \frac{1}{2}(\sinh t - \sin t)$
38. a) $W(t) = c$, une constante b) $W(t) = -8$ c) $W(t) = 4$
39. b) $u_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 \cos \sqrt{6}t + c_4 \sin \sqrt{6}t$

Section 4.3

1. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 e^{-t} + \frac{1}{2} t e^{-t} + 3$
2. $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 \cos t + c_4 \sin t - 3t - \frac{1}{4} t \sin t$
3. $y = c_1 e^{-t} + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \frac{1}{2} t e^t + 4(t-1)$
4. $y = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} + \cos t$
5. $y = c_1 + c_2 t + c_3 e^{-2t} + c_4 e^{2t} - \frac{1}{3} e^t - \frac{1}{48} t^4 - \frac{1}{16} t^2$
6. $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t + 3 + \frac{1}{9} \cos 2t$
7. $y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 e^{-t} + e^{t/2} [c_5 \cos(\sqrt{3}t/2) + c_6 \sin(\sqrt{3}t/2)] + \frac{1}{24} t^4$
8. $y = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 e^{-t} + \frac{1}{20} \sin 2t + \frac{1}{40} \cos 2t$
9. $y = \frac{3}{16} (1 - \cos 2t) + \frac{1}{8} t^2$
10. $y = (t-4) \cos t - \left(\frac{3}{2} t + 4 \right) \sin t + 3t + 4$
11. $y = 1 + \frac{1}{4} (t^2 + 3t) - t e^t$
12. $y = -\frac{2}{5} \cos t - \frac{4}{5} \sin t + \frac{1}{20} e^{-t} + \frac{81}{40} e^t + \frac{73}{520} e^{-3t} + \frac{77}{65} \cos 2t - \frac{49}{130} \sin 2t$
13. $Y(t) = t(A_0 t^3 + A_1 t^2 + A_2 t + A_3) + B t^2 e^t$
14. $Y(t) = t(A_0 t + A_1) e^{-t} + B \cos t + C \sin t$
15. $Y(t) = A t^2 e^t + B \cos t + C \sin t$
16. $Y(t) = A t^2 + (B_0 t + B_1) e^t + t(C \cos 2t + D \sin 2t)$
17. $Y(t) = t(A_0 t^2 + A_1 t + A_2) + (B_0 t + B_1) \cos t + (C_0 t + C_1) \sin t$
18. $Y(t) = A e^t + (B_0 t + B_1) e^{-t} + t e^{-t} (C \cos t + D \sin t)$
19. $k_0 = a_0, \quad k_n = a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n$

Section 4.4

1. $y = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t - \ln \cos t - (\sin t) \ln(\sec t + \tan t)$
2. $y = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} - \frac{1}{2} t^2$
3. $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{2t} + \frac{1}{30} e^{4t}$
4. $y = c_1 + c_2 \cos t + c_3 \sin t + \ln(\sec t + \tan t) - t \cos t + (\sin t) \ln \cos t$
5. $y = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t - \frac{1}{5} e^{-t} \cos t$
6. $y = c_1 \cos t + c_2 \sin t + c_3 t \cos t + c_4 t \sin t - \frac{1}{8} t^2 \sin t$
7. $y = c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t - \frac{1}{2} (\cos t) \ln \cos t + \frac{1}{2} (\sin t) \ln \cos t - \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{2} t \sin t + \frac{1}{2} e^t \int_{t_0}^t (e^{-s} / \cos s) ds$
8. $y = c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t} - \ln \sin t + \ln(\cos t + 1) + \frac{1}{2} e^t \int_{t_0}^t (e^{-s} / \sin s) ds + \frac{1}{2} e^{-t} \int_{t_0}^t (e^s / \sin s) ds$
9. $c_1 = 0, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = 1$ en réponse au problème 4
10. $c_1 = 2, \quad c_2 = \frac{7}{8}, \quad c_3 = -\frac{7}{8}, \quad c_4 = \frac{1}{2}$ en réponse au problème 6
11. $c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = -\frac{5}{2}, \quad t_0 = 1$ en réponse au problème 7
12. $c_1 = 3, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -e^{\pi/2}, \quad t_0 = \pi/2$ en réponse au problème 8
13. $Y(x) = x^4/15$
14. $Y(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [e^{t-s} - \sin(t-s) - \cos(t-s)] g(s) ds$
15. $Y(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t [\sinh(t-s) - \sin(t-s)] g(s) ds$
16. $Y(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t e^{(t-s)} (t-s)^2 g(s) ds; \quad Y(t) = -te^t \ln|t|$
17. $Y(x) = \frac{1}{2} \int_{x_0}^x [(x/t^2) - 2(x^2/t^3) + (x^3/t^4)] g(t) dt$

Chapitre 5 Section 5.1

1. $x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -2x_1 - 0,5x_2$
2. $x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -2x_1 - 0,5x_2 + 3 \sin t$
3. $x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -(1 - 0,25t^{-2})x_1 - t^{-1}x_2$
4. $x'_1 = x_2, \quad x'_2 = x_3, \quad x'_3 = x_4, \quad x'_4 = x_1$
5. $x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -4x_1 - 0,25x_2 + 2 \cos 3t, \quad x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -2$
6. $x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -q(t)x_1 - p(t)x_2 + g(t), \quad x_1(0) = u_0, \quad x_2(0) = u'_0$
7. a) $x_1 = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t}, \quad x_2 = c_1 e^{-t} - c_2 e^{-3t}$
 b) $c_1 = 5/2, \quad c_2 = -1/2$ en réponse à la partie a).
 c) Le graphe s'approche de l'origine dans le premier quadrant le long de la droite $x_1 = x_2$.
8. a) $x''_1 - x'_1 - 2x_1 = 0$
 b) $x_1 = \frac{11}{3} e^{2t} - \frac{2}{3} e^{-t}, \quad x_2 = \frac{11}{6} e^{2t} - \frac{4}{3} e^{-t}$
 c) Le graphe est asymptotique à la droite $x_1 = 2x_2$ dans le premier quadrant.

9. a) $2x_1'' - 5x_1' + 2x_1 = 0$
 b) $x_1 = -\frac{3}{2}e^{t/2} - \frac{1}{2}e^{2t}$, $x_2 = \frac{3}{2}e^{t/2} - \frac{1}{2}e^{2t}$
 c) Le graphe est asymptotique à la droite $x_1 = x_2$ dans le troisième quadrant.
10. a) $x_1'' + 3x_1' + 2x_1 = 0$
 b) $x_1 = -7e^{-t} + 6e^{-2t}$, $x_2 = -7e^{-t} + 9e^{-2t}$
 c) Le graphe s'approche de l'origine dans le troisième quadrant le long de la droite $x_1 = x_2$.
11. a) $x_1'' + 4x_1 = 0$
 b) $x_1 = 3 \cos 2t + 4 \sin 2t$, $x_2 = -3 \sin 2t + 4 \cos 2t$
 c) Le graphe est un cercle centré à l'origine de rayon 5 parcouru dans le sens horaire.
12. a) $x_1'' + x_1' + 4,25x_1 = 0$
 b) $x_1 = -2e^{-t/2} \cos 2t + 2e^{-t/2} \sin 2t$, $x_2 = 2e^{-t/2} \cos 2t + 2e^{-t/2} \sin 2t$
 c) Le graphe est une spirale parcourue dans le sens horaire, s'approchant de l'origine.
13. $LRCI'' + LI' + RI = 0$
18. $y_1' = y_3$, $y_2' = y_4$, $m_1 y_3' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 + F_1(t)$, $m_2 y_4' = k_2 y_1 - (k_2 + k_3)y_2 + F_2(t)$
22. a) $Q_1' = \frac{3}{2} - \frac{1}{10}Q_1 + \frac{3}{40}Q_2$, $Q_1(0) = 25$
 $Q_2' = 3 + \frac{1}{10}Q_1 - \frac{1}{5}Q_2$, $Q_2(0) = 15$
 b) $Q_1^E = 42$, $Q_2^E = 36$
 c) $x_1' = -\frac{1}{10}x_1 + \frac{3}{40}x_2$, $x_1(0) = -17$
 $x_2' = \frac{1}{10}x_1 - \frac{1}{5}x_2$, $x_2(0) = -21$
23. a) $Q_1' = 3q_1 - \frac{1}{15}Q_1 + \frac{1}{100}Q_2$, $Q_1(0) = Q_1^0$
 $Q_2' = q_2 + \frac{1}{30}Q_1 - \frac{3}{100}Q_2$, $Q_2(0) = Q_2^0$
 b) $Q_1^E = 6(9q_1 + q_2)$, $Q_2^E = 20(3q_1 + 2q_2)$ c) Non
 d) $\frac{10}{9} \leq Q_2^E / Q_1^E \leq \frac{20}{3}$

Section 5.2

1. a) $\begin{pmatrix} 6 & -6 & 3 \\ 5 & 9 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -15 & 6 & -12 \\ 7 & -18 & -1 \\ -26 & -3 & -5 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 6 & -12 & 3 \\ 4 & 3 & 7 \\ 9 & 12 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -8 & -9 & 11 \\ 14 & 12 & -5 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}$
2. a) $\begin{pmatrix} 1-i & -7+2i \\ -1+2i & 2+3i \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3+4i & 6i \\ 11+6i & 6-5i \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -3+5i & 7+5i \\ 2+i & 7+2i \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 8+7i & 4-4i \\ 6-4i & -4 \end{pmatrix}$
3. a) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ c), d) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}$
4. a) $\begin{pmatrix} 3-2i & 2-i \\ 1+i & -2+3i \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3+2i & 1-i \\ 2+i & -2-3i \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3+2i & 2+i \\ 1-i & -2-3i \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 10 & 6 & -4 \\ 0 & 4 & 10 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$6. \text{ a) } \begin{pmatrix} 7 & -11 & -3 \\ 11 & 20 & 17 \\ -4 & 3 & -12 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 6 & -8 & -11 \\ 9 & 15 & 6 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$8. \text{ a) } 4i \quad \text{b) } 12 - 8i \quad \text{c) } 2 + 2i \quad \text{d) } 16$$

$$10. \begin{pmatrix} \frac{3}{11} & -\frac{4}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

$$11. \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$12. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$13. \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

14. Singulière

$$15. \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$16. \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

17. Singulière

$$18. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$19. \begin{pmatrix} 6 & \frac{13}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{2}{5} \\ 5 & \frac{11}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ -2 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$21. \text{ a) } \begin{pmatrix} 7e^t & 5e^{-t} & 10e^{2t} \\ -e^t & 7e^{-t} & 2e^{2t} \\ 8e^t & 0 & -e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2e^{2t} - 2 + 3e^{3t} & 1 + 4e^{-2t} - e^t & 3e^{3t} + 2e^t - e^{4t} \\ 4e^{2t} - 1 - 3e^{3t} & 2 + 2e^{-2t} + e^t & 6e^{3t} + e^t + e^{4t} \\ -2e^{2t} - 3 + 6e^{3t} & -1 + 6e^{-2t} - 2e^t & -3e^{3t} + 3e^t - 2e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} e^t & -2e^{-t} & 2e^{2t} \\ 2e^t & -e^{-t} & -2e^{2t} \\ -e^t & -3e^{-t} & 4e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{d) } (e-1) \begin{pmatrix} 1 & 2e^{-1} & \frac{1}{2}(e+1) \\ 2 & e^{-1} & -\frac{1}{2}(e+1) \\ -1 & 3e^{-1} & e+1 \end{pmatrix}$$

Section 5.3

$$1. x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{7}{3}, \quad x_3 = -\frac{1}{3}$$

$$3. x_1 = -c, \quad x_2 = c + 1, \quad x_3 = c, \text{ où } c \text{ est arbitraire.}$$

$$5. x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

7. Linéairement indépendant

$$9. 2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} + 4\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$$

$$11. \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$$

14. Linéairement indépendant

$$16. \lambda_1 = 2, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 4, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Pas de solution

$$4. x_1 = c, \quad x_2 = -c, \quad x_3 = -c, \text{ où } c \text{ est arbitraire.}$$

$$6. x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_3 = c_1 + 2c_2 + 2$$

$$8. \mathbf{x}^{(1)} - 5\mathbf{x}^{(2)} + 2\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$$

10. Linéairement indépendant

$$13. 3\mathbf{x}^{(1)}(t) - 6\mathbf{x}^{(2)}(t) + \mathbf{x}^{(3)}(t) = \mathbf{0}$$

$$17. \lambda_1 = 1 + 2i, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1 - 2i, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$$

$$18. \lambda_1 = -3, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$19. \lambda_1 = 0, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$20. \lambda_1 = 2, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -2, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$21. \lambda_1 = -1/2, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -3/2, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$22. \lambda_1 = -1, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1 + 2i, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 1 - 2i, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$23. \lambda_1 = 1, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 3, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$24. \lambda_1 = 1, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = -1, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$25. \lambda_1 = -1, \quad \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1, \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 8, \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Section 5.4

$$2. \text{ c) } W(t) = c \exp \int [p_{11}(t) + p_{22}(t)] dt$$

$$6. \text{ a) } W(t) = t^2$$

b) $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ sont linéairement indépendants en tout point sauf en $t = 0$; ils sont linéairement indépendants dans tout intervalle.

c) Au moins un coefficient doit être discontinu en $t = 0$.

$$\text{d) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2t^{-2} & 2t^{-1} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$7. \text{ a) } W(t) = t(t-2)e^t$$

b) $\mathbf{x}^{(1)}$ et $\mathbf{x}^{(2)}$ sont linéairement indépendants en tout point sauf en $t = 0$ et en $t = 2$; ils sont linéairement indépendants dans tout intervalle.

c) Il doit y avoir au moins un coefficient discontinu en $t = 0$ et en $t = 2$.

$$\text{d) } \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2-2t}{t^2-2t} & \frac{t^2-2}{t^2-2t} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Section 5.5

$$1. \text{ a) } \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$2. \text{ a) } \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$3. \text{ a) } \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$4. \text{ a) } \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$5. \mathbf{a)} \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$6. \mathbf{a)} \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t/2} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$7. \mathbf{a)} \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$8. \mathbf{a)} \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$$9. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$10. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2+i \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-it}$$

$$11. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$12. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{8t}$$

$$13. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$14. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$15. \mathbf{x} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$$

$$16. \mathbf{x} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t}$$

$$17. \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$18. \mathbf{x} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix} e^{4t}$$

$$20. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$$

$$21. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^2 + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^4$$

$$22. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-2}$$

$$23. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2$$

$$29. \mathbf{a)} x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -(c/a)x_1 - (b/a)x_2$$

$$30. \mathbf{a)} \mathbf{x} = -\frac{55}{8} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t/20} + \frac{29}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t/4} \quad \mathbf{c)} T \cong 74,39$$

$$31. \mathbf{a)} \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-2+\sqrt{2})t/2} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-2-\sqrt{2})t/2}; \quad r_{1,2} = (-2 \pm \sqrt{2})/2; \quad \text{nœud}$$

$$\mathbf{b)} \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{(-1+\sqrt{2})t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{(-1-\sqrt{2})t}; \quad r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}; \quad \text{point de selle}$$

$$\mathbf{c)} r_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\alpha}; \quad \alpha = 1$$

$$32. \mathbf{a)} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$33. \mathbf{a)} \left(\frac{1}{CR_2} - \frac{R_1}{L} \right)^2 - \frac{4}{CL} > 0$$

Section 5.6

$$1. \mathbf{a)} \mathbf{x} = c_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix}$$

$$2. \mathbf{a)} \mathbf{x} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \sin 2t \\ \cos 2t \end{pmatrix}$$

$$3. \mathbf{a)} \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 5 \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

$$4. \mathbf{a)} \mathbf{x} = c_1 e^{t/2} \begin{pmatrix} 5 \cos \frac{3}{2}t \\ 3 \left(\cos \frac{3}{2}t + \sin \frac{3}{2}t \right) \end{pmatrix} + c_2 e^{t/2} \begin{pmatrix} 5 \sin \frac{3}{2}t \\ 3 \left(-\cos \frac{3}{2}t + \sin \frac{3}{2}t \right) \end{pmatrix}$$

$$5. \mathbf{a) } \mathbf{x} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

$$6. \mathbf{a) } \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -2 \cos 3t \\ \cos 3t + 3 \sin 3t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \sin 3t \\ \sin 3t - 3 \cos 3t \end{pmatrix}$$

$$7. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos 2t \\ \sin 2t \end{pmatrix} + c_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$$

$$8. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \sin \sqrt{2} t \\ \cos \sqrt{2} t \\ -\cos \sqrt{2} t - \sqrt{2} \sin \sqrt{2} t \end{pmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \sqrt{2} t \\ \sin \sqrt{2} t \\ \sqrt{2} \cos \sqrt{2} t - \sin \sqrt{2} t \end{pmatrix}$$

$$9. \mathbf{x} = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t - 3 \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

$$10. \mathbf{x} = e^{-2t} \begin{pmatrix} \cos t - 5 \sin t \\ -2 \cos t - 3 \sin t \end{pmatrix}$$

$$11. \mathbf{a) } r = -\frac{1}{4} \pm i$$

$$12. \mathbf{a) } r = \frac{1}{5} \pm i$$

$$13. \mathbf{a) } r = \alpha \pm i \quad \mathbf{b) } \alpha = 0$$

$$14. \mathbf{a) } r = (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 20})/2 \quad \mathbf{b) } \alpha = -\sqrt{20}, 0, \sqrt{20}$$

$$15. \mathbf{a) } r = \pm \sqrt{4 - 5\alpha} \quad \mathbf{b) } \alpha = 4/5$$

$$16. \mathbf{a) } r = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3\alpha} \quad \mathbf{b) } \alpha = 0, 25/12$$

$$17. \mathbf{a) } r = -1 \pm \sqrt{-\alpha} \quad \mathbf{b) } \alpha = -1, 0$$

$$18. \mathbf{a) } r = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{49 - 24\alpha} \quad \mathbf{b) } \alpha = 2, 49/24$$

$$19. \mathbf{a) } r = \frac{1}{2} \alpha - 2 \pm \sqrt{\alpha^2 + 8\alpha - 24} \quad \mathbf{b) } \alpha = -4 - 2\sqrt{10}, -4 + 2\sqrt{10}, 5/2$$

$$20. \mathbf{a) } r = -1 \pm \sqrt{25 + 8\alpha} \quad \mathbf{b) } \alpha = -25/8, -3$$

$$21. \mathbf{x} = c_1 t^{-1} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2} \ln t) \\ \sqrt{2} \sin(\sqrt{2} \ln t) \end{pmatrix} + c_2 t^{-1} \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{2} \ln t) \\ -\sqrt{2} \cos(\sqrt{2} \ln t) \end{pmatrix}$$

$$22. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 5 \cos(\ln t) \\ 2 \cos(\ln t) + \sin(\ln t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \sin(\ln t) \\ -\cos(\ln t) + 2 \sin(\ln t) \end{pmatrix}$$

$$23. \mathbf{a) } r = -\frac{1}{4} \pm i, -\frac{1}{4}$$

$$24. \mathbf{a) } r = -\frac{1}{4} \pm i, \frac{1}{10}$$

$$25. \mathbf{b) } \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ 4 \sin(t/2) \end{pmatrix} + c_2 e^{-t/2} \begin{pmatrix} \sin(t/2) \\ -4 \cos(t/2) \end{pmatrix}$$

c) Utilisez $c_1 = 2$, $c_2 = -\frac{3}{4}$ en réponse à la partie b).

$$\mathbf{d) } \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0; \quad \text{non}$$

$$26. \mathbf{b) } \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = c_1 e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

c) Utilisez $c_1 = 2$ et $c_2 = 3$ en réponse à la partie b).

$$\mathbf{d) } \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0; \quad \text{non}$$

28. b) $r = \pm i\sqrt{k/m}$ d) $|r|$ est la fréquence naturelle.

29. c) $r_1^2 = -1$, $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$; $r_2^2 = -4$, $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

d) $x_1 = 3c_1 \cos t + 3c_2 \sin t + 3c_3 \cos 2t + 3c_4 \sin 2t$,
 $x_2 = 2c_1 \cos t + 2c_2 \sin t - 4c_3 \cos 2t - 4c_4 \sin 2t$

e) $x_1' = -3c_1 \sin t + 3c_2 \cos t - 6c_3 \sin 2t + 6c_4 \cos 2t$,
 $x_2' = 2c_1 \sin t + 2c_2 \cos t + 8c_3 \sin 2t - 8c_4 \cos 2t$

30. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -4 & 3 & 0 & 0 \\ 9/4 & -13/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $r_1 = i$, $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$; $r_2 = -i$, $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}$; $r_3 = \frac{5}{2}i$, $\xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 10i \\ -\frac{15}{2}i \end{pmatrix}$; $r_4 = -\frac{5}{2}i$, $\xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -10i \\ \frac{15}{2}i \end{pmatrix}$

c) $y = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 4 \cos \frac{5}{2}t \\ -3 \cos \frac{5}{2}t \\ -10 \sin \frac{5}{2}t \\ \frac{15}{2} \sin \frac{5}{2}t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 4 \sin \frac{5}{2}t \\ -3 \sin \frac{5}{2}t \\ 10 \cos \frac{5}{2}t \\ -\frac{15}{2} \cos \frac{5}{2}t \end{pmatrix}$

e) $c_1 = \frac{10}{7}$, $c_2 = 0$, $c_3 = \frac{1}{7}$, $c_4 = 0$ Période = 4π

31. a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $r_1 = i$, $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ i \\ i \end{pmatrix}$; $r_2 = -i$, $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -i \\ -i \end{pmatrix}$; $r_3 = \sqrt{3}i$, $\xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{3}i \\ -\sqrt{3}i \end{pmatrix}$; $r_4 = -\sqrt{3}i$, $\xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{3}i \\ \sqrt{3}i \end{pmatrix}$

c) $y = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t \\ \cos t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos \sqrt{3}t \\ -\cos \sqrt{3}t \\ -\sqrt{3} \sin \sqrt{3}t \\ \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \sin \sqrt{3}t \\ -\sin \sqrt{3}t \\ \sqrt{3} \cos \sqrt{3}t \\ -\sqrt{3} \cos \sqrt{3}t \end{pmatrix}$

e) $c_1 = 1$, $c_2 = 0$, $c_3 = -2$, $c_4 = 0$

Section 5.7

1. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} & \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{2}{3}e^{2t} \\ -\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{2}{3}e^{2t} & \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t} \end{pmatrix}$

3. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{-t} \\ \frac{3}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{3}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$

5. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 2 \sin t & -5 \sin t \\ \sin t & \cos t - 2 \sin t \end{pmatrix}$

2. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-t/2} + \frac{1}{2}e^{-t} & e^{-t/2} - e^{-t} \\ \frac{1}{4}e^{-t/2} - \frac{1}{4}e^{-t} & \frac{1}{2}e^{-t/2} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$

4. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} & -\frac{1}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} \\ -\frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{4}{5}e^{2t} & \frac{4}{5}e^{-3t} + \frac{1}{5}e^{2t} \end{pmatrix}$

6. $\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos 2t & -2e^{-t} \sin 2t \\ \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2t & e^{-t} \cos 2t \end{pmatrix}$

$$7. \Phi(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t} \\ -\frac{3}{2}e^{2t} + \frac{3}{2}e^{4t} & \frac{3}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}e^{4t} \end{pmatrix}$$

$$8. \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t & e^{-t} \sin t \\ 5e^{-t} \sin t & e^{-t} \cos t - 2e^{-t} \sin t \end{pmatrix}$$

$$9. \Phi(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-2t} + 3e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} & -e^{-2t} + e^{-t} \\ \frac{5}{2}e^{-2t} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{2t} & \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{13}{12}e^{2t} & \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{12}e^{2t} \\ \frac{7}{2}e^{-2t} - 2e^{-t} - \frac{3}{2}e^{2t} & \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{13}{12}e^{2t} & \frac{7}{4}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{12}e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$10. \Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & -\frac{1}{3}e^t + \frac{1}{3}e^{-2t} & \frac{1}{2}e^t - e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \\ -\frac{2}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} + e^{3t} & \frac{4}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} & -2e^t + e^{-2t} + e^{3t} \\ -\frac{1}{6}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} & \frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t} & -\frac{1}{2}e^t + e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$11. \mathbf{x} = \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$12. \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} \cos 2t + \begin{pmatrix} -2 \\ 3/2 \end{pmatrix} e^{-t} \sin 2t$$

$$17. \mathbf{x} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \cos \omega t + \begin{pmatrix} v_0 \\ -\omega^2 u_0 \end{pmatrix} \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

Section 5.8

$$1. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t \right]$$

$$2. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right]$$

$$3. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} \right]$$

$$4. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t/2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2/5 \end{pmatrix} e^{-t/2} \right]$$

$$5. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \right]$$

$$6. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$7. \mathbf{a}) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3+4t \\ 2+4t \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$$8. \mathbf{a}) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} - 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{-t}$$

$$9. \mathbf{a}) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} e^{t/2} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{t/2}$$

$$10. \mathbf{a}) \mathbf{x} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 14 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} t$$

$$11. \mathbf{a}) \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -33 \end{pmatrix} e^t + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} t e^t + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$12. \mathbf{a}) \mathbf{x} = \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} e^{-7t/2}$$

$$13. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \ln t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \right]$$

$$14. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^{-3} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t^{-3} \ln t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1/4 \end{pmatrix} t^{-3} \right]$$

$$16. \mathbf{b)} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t/2} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} t e^{-t/2} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t/2} \right]$$

$$17. \mathbf{d)} \xi = -\xi^{(1)} \quad \mathbf{e)} \xi = -(k_1 + k_2)\xi^{(1)}, \quad k_1 + k_2 \neq 0$$

$$18. \mathbf{b)} \mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} \quad \mathbf{c)} \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\mathbf{d)} \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} (t^2/2) e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} e^{2t} \quad \mathbf{e)} \Psi(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & t+2 \\ 1 & t+1 & (t^2/2)+t \\ -1 & -t & -(t^2/2)+3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f)} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$19. \mathbf{a)} \mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^t, \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} e^t \quad \mathbf{d)} \mathbf{x}^{(3)}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} t e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$$\mathbf{e)} \Psi(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2t \\ 0 & 2 & -4t \\ 2 & -3 & 2t+1 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad e^t \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2t \\ 0 & -4 & -4t \\ 2 & 2 & 2t+1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{f)} \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ -2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$20. \mathbf{a)} \mathbf{J}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^3 = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^4 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 4\lambda^3 \\ 0 & \lambda^4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c)} \exp(\mathbf{J}t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{d)} \mathbf{x} = \exp(\mathbf{J}t) \mathbf{x}^0$$

$$21. \mathbf{c)} \exp(\mathbf{J}t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$22. \mathbf{c)} \exp(\mathbf{J}t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Section 5.9

$$1. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-2t} - \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} -1 \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$3. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 5 \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 5 \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t \cos t - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \sin t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t$$

$$4. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

$$5. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ln t + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} t^{-1} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-2}$$

$$6. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ln t + \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{4}{25} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$7. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} e^t$$

$$8. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^t$$

$$9. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t/2} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$$

$$10. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} t e^{-t} + \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2} \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$11. \mathbf{x} = \left(\frac{1}{2} \sin^2 t + c_1 \right) \begin{pmatrix} 5 \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2} t - \frac{1}{2} \sin t \cos t + c_2 \right) \begin{pmatrix} 5 \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

$$12. \mathbf{x} = \left[\frac{1}{5} \ln(\sin t) - \ln(-\cos t) - \frac{2}{5} t + c_1 \right] \begin{pmatrix} 5 \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} + \left[\frac{2}{5} \ln(\sin t) - \frac{4}{5} t + c_2 \right] \begin{pmatrix} 5 \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix}$$

$$13. \mathbf{a) } \Psi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t/2} \cos \frac{1}{2} t & e^{-t/2} \sin \frac{1}{2} t \\ 4e^{-t/2} \sin \frac{1}{2} t & -4e^{-t/2} \cos \frac{1}{2} t \end{pmatrix} \quad \mathbf{b) } \mathbf{x} = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \sin \frac{1}{2} t \\ 4 - 4 \cos \frac{1}{2} t \end{pmatrix}$$

$$14. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t \ln t - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} t^2$$

$$15. \mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^2 + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} t + \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t^4 - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} t^2$$

Section 5.10

1. **a)** $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 2)^T$; $r_2 = 2$, $\xi^{(2)} = (2, 1)^T$ **b)** point de selle, instable
2. **a)** $r_1 = 2$, $\xi^{(1)} = (1, 3)^T$; $r_2 = 4$, $\xi^{(2)} = (1, 1)^T$ **b)** nœud, instable
3. **a)** $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 3)^T$; $r_2 = 1$, $\xi^{(2)} = (1, 1)^T$ **b)** point de selle, instable
4. **a)** $r_1 = r_2 = -3$, $\xi^{(1)} = (1, 1)^T$ **b)** nœud impropre, asymptotiquement stable
5. **a)** $r_1, r_2 = -1 \pm i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2 \pm i, 1)^T$ **b)** point spirale, asymptotiquement stable
6. **a)** $r_1, r_2 = \pm i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2 \pm i, 1)^T$ **b)** centre, stable
7. **a)** $r_1, r_2 = 1 \pm 2i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (1, 1 \mp i)^T$ **b)** point spirale, stable
8. **a)** $r_1 = -1$, $\xi^{(1)} = (1, 0)^T$; $r_2 = -1/4$, $\xi^{(2)} = (4, -3)^T$ **b)** nœud, asymptotiquement stable
9. **a)** $r_1 = r_2 = 1$, $\xi^{(1)} = (2, 1)^T$ **b)** nœud impropre, instable
10. **a)** $r_1, r_2 = \pm 3i$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (2, -1 \pm 3i)^T$ **b)** centre, stable
11. **a)** $r_1 = r_2 = -1$; $\xi^{(1)} = (1, 0)^T$, $\xi^{(2)} = (0, 1)^T$ **b)** nœud propre, asymptotiquement stable
12. **a)** $r_1, r_2 = (1 \pm 3i)/2$; $\xi^{(1)}, \xi^{(2)} = (5, 3 \mp 3i)^T$ **b)** point spirale, instable
13. $x_0 = 1$, $y_0 = 1$; $r_1 = \sqrt{2}$, $r_2 = -\sqrt{2}$; point de selle, instable
14. $x_0 = -1$, $y_0 = 0$; $r_1 = -1$, $r_2 = -3$; nœud, asymptotiquement stable
15. $x_0 = -2$, $y_0 = 1$; $r_1, r_2 = -1 \pm \sqrt{2}i$; point spirale, asymptotiquement stable
16. $x_0 = \gamma/\delta$, $y_0 = \alpha/\beta$; $r_1, r_2 = \pm \sqrt{\beta\delta}i$; centre, stable
17. $\gamma^2 > 4km$, nœud, asymptotiquement stable; $\gamma^2 = 4km$, nœud impropre, asymptotiquement stable; $\gamma^2 < 4km$, point spirale, asymptotiquement stable

Section 5.11

1. linéaire et non linéaire : point de selle, instable
2. linéaire et non linéaire : point spirale, asymptotiquement stable
3. linéaire : centre, stable; non linéaire : point spirale ou centre, indéterminé

4. linéaire : nœud impropre, instable ; non linéaire : nœud ou point spirale, instable
5. **a), b), c)** (0, 0) ; $u' = -2u + 2v$, $v' = 4u + 4v$; $r = 1 \pm \sqrt{17}$; point de selle, instable
 (-2, 2) ; $u' = 4u$, $v' = 6u + 6v$; $r = 4, 6$; nœud, instable
 (4, 4) ; $u' = -6u + 6v$, $v' = -8u$; $r = -3 \pm \sqrt{39}i$; point spirale, asymptotiquement stable
6. **a), b), c)** (0, 0) ; $u' = u$, $v' = 3v$; $r = 1, 3$; nœud, instable
 (1, 0) ; $u' = -u - v$, $v' = 2v$; $r = -1, 2$; point de selle, instable
 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$; $u' = -\frac{1}{2}u$, $v' = -\frac{3}{2}u - 3v$; $r = -\frac{1}{2}, -3$; nœud, asymptotiquement stable
 (-1, 2) ; $u' = u + v$, $v' = -2u - 4v$; $r = (-3 \pm \sqrt{17})/2$; point de selle, instable
7. **a), b), c)** (1, 1) ; $u' = -v$, $v' = 2u - 2v$; $r = -1 \pm i$; point spirale, asymptotiquement stable
 (-1, 1) ; $u' = -v$, $v' = -2u - 2v$; $r = -1 \pm \sqrt{3}$; point de selle, instable
8. **a), b), c)** (0, 0) ; $u' = u$, $v' = \frac{1}{2}v$; $r = 1, \frac{1}{2}$; nœud, instable
 (0, 2) ; $u' = -u$, $v' = -3/2u - \frac{1}{2}v$; $r = -1, -\frac{1}{2}$; nœud, asymptotiquement stable
 (1, 0) ; $u' = -u - v$, $v' = -\frac{1}{4}v$; $r = -1, -\frac{1}{4}$; nœud, asymptotiquement stable
 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $u' = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v$, $v' = -\frac{3}{8}u - \frac{1}{8}v$; $r = (-5 \pm \sqrt{57})/16$; point de selle, instable
9. **a), b), c)** (0, 0) ; $u' = -u + 2v$, $v' = u + 2v$; $r = (1 \pm \sqrt{17})/2$; point de selle, instable
 (2, 1) ; $u' = -\frac{3}{2}u + 3v$, $v' = -2u$; $r = (-3 \pm \sqrt{87}i)/4$; point spirale, asymptotiquement stable
 (2, -2) ; $u' = -3v$, $v' = u$; $r = \pm\sqrt{3}i$; centre ou point spirale, indéterminé
 (4, -2) ; $u' = -4v$, $v' = -u - 2v$; $r = -1 \pm \sqrt{5}$; point de selle, instable
10. **a), b), c)** (0, 0) ; $u' = u$, $v' = v$; $r = 1, 1$; nœud ou point spirale, instable
 (-1, 0) ; $u' = -u$, $v' = 2v$; $r = -1, 2$; point de selle, instable
11. **a), b), c)** (0, 0) ; $u' = 2u + v$, $v' = u - 2v$; $r = \pm\sqrt{5}$; point de selle, instable
 (-1, 1935, -1, 4797) ; $u' = -1,2399u - 6,8393v$, $v' = 2,4797u - 0,8065v$;
 $r = -1,0232 \pm 4,1125i$; point spirale, asymptotiquement stable
12. **a), b), c)** (0, $\pm 2n\pi$), $n = 0, 1, 2, \dots$; $u' = v$, $v' = -u$; $r = \pm i$; centre ou point spirale, indéterminé
 $[2, \pm (2n - 1)\pi]$, $n = 1, 2, 3, \dots$; $u' = -3v$, $v' = -u$; $r = \pm\sqrt{3}$; point de selle, instable
13. **a), b), c)** (0, 0) ; $u' = u$, $v' = v$; $r = 1, 1$; nœud ou point spirale, instable
 (1, 1) ; $u' = u - 2v$, $v' = -2u + v$; $r = 3, -1$; point de selle, instable
14. **a), b), c)** (1, 1) ; $u' = -u - v$, $v' = u - 3v$; $r = -2, -2$; nœud ou point spirale, asymptotiquement stable
 (-1, -1) ; $u' = u + v$, $v' = u - 3v$; $r = -1 \pm \sqrt{5}$; point de selle, instable
15. **a), b), c)** (0, 0) ; $u' = -2u - v$, $v' = u - v$; $r = (-3 \pm \sqrt{3}i)/2$; point spirale, asymptotiquement stable
 (-0,3307 6, 1,0924) et (0,3307 6, -1,0924) ; $u' = -3,5216u - 0,2773v$, $v' = 0,2773u + 2,6895v$;
 $r = -3,5092, 2,6771$; point de selle, instable
16. **a), b), c)** (0, 0) ; $u' = u + v$, $v' = -u + v$; $r = 1 \pm i$; point spirale, instable
17. **a), b), c)** (2, 2) ; $u' = -4v$, $v' = -\frac{7}{2}u + \frac{7}{2}v$; $r = (7 \pm \sqrt{273})/4$; point de selle, instable
 (-2, -2) ; $u' = 4v$, $v' = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v$; $r = (-1 \pm \sqrt{33})/4$; point de selle, instable
 $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$; $u' = -4v$, $v' = \frac{7}{2}u$; $r = \pm\sqrt{14}i$; centre ou point spirale, indéterminé
 $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$; $u' = 4v$, $v' = -1/2u$; $r = \pm\sqrt{2}i$; centre ou point spirale, indéterminé
18. **a), b), c)** (0, 0) ; $u' = 2u - v$, $v' = 2u - 4v$; $r = -1 \pm \sqrt{7}$; point de selle, instable
 (2, 1) ; $u' = -3v$, $v' = 4u - 8v$; $r = -2, -6$; nœud, asymptotiquement stable
 (-2, 1) ; $u' = 5v$, $v' = -4u$; $r = \pm 2\sqrt{5}i$; centre ou point spirale, indéterminé
 (-2, -4) ; $u' = 10u - 5v$, $v' = 6u$; $r = 5 \pm \sqrt{5}i$; point spirale, instable
21. **b), c)** (Voir le tableau 5.11.1.)
23. **a)** $R = A$, $T \cong 3,17$ **b)** $R = A$, $T \cong 3,20; 3,35; 3,63; 4,17$ **c)** $T \rightarrow \pi$ lorsque $A \rightarrow 0$ **d)** $A = \pi$
24. **b)** $v_c \cong 4,00$ **25. b)** $v_c \cong 4,51$

30. a) $dx/dt = y$, $dy/dt = -g(x) - c(x)y$
 b) Le système linéaire est $dx/dt = y$, $dy/dt = -g'(0)x - c(0)y$.
 c) Les valeurs propres satisfont à $r^2 + c(0)r + g'(0) = 0$.

Chapitre 6 Section 6.1

1. Continue par morceaux
2. Ni l'un ni l'autre
3. Continue
4. Continue par morceaux
5. a) $F(s) = 1/s^2$, $s > 0$ b) $F(s) = 2/s^3$, $s > 0$ c) $F(s) = n!/s^{n+1}$, $s > 0$
6. $F(s) = s/(s^2 + a^2)$, $s > 0$
7. $F(s) = \frac{s}{s^2 - b^2}$, $s > |b|$
8. $F(s) = \frac{b}{s^2 - b^2}$, $s > |b|$
9. $F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 - b^2}$, $s-a > |b|$
10. $F(s) = \frac{b}{(s-a)^2 - b^2}$, $s-a > |b|$
11. $F(s) = \frac{b}{s^2 + b^2}$, $s > 0$
12. $F(s) = \frac{s}{s^2 + b^2}$, $s > 0$
13. $F(s) = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$, $s > a$
14. $F(s) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$, $s > a$
15. $F(s) = \frac{1}{(s-a)^2}$, $s > a$
16. $F(s) = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2}$, $s > 0$
17. $F(s) = \frac{s^2 + a^2}{(s-a)^2(s+a)^2}$, $s > |a|$
18. $F(s) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$
19. $F(s) = \frac{2a(3s^2 - a^2)}{(s^2 + a^2)^3}$, $s > 0$
20. $F(s) = \frac{2a(3s^2 + a^2)}{(s^2 - a^2)^3}$, $s > |a|$
21. $F(s) = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s}$
22. $F(s) = \frac{1 - (s+1)e^{-s}}{s^2}$
23. $F(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s^2}$
24. $F(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}$
25. Converge 26. Converge 27. Diverge 28. Converge
30. d) $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$; $\Gamma(11/2) = 945\sqrt{\pi}/32$

Section 6.2

1. $\frac{3}{2} \sin 2t$
2. $2t^2 e^t$
3. $\frac{2}{5} e^t - \frac{2}{5} e^{-4t}$
4. $\frac{9}{5} e^{3t} + \frac{6}{5} e^{-2t}$
5. $2e^{-t} \cos 2t$
6. $2 \cosh 2t - \frac{3}{2} \sinh 2t$
7. $2e^t \cos t + 3e^t \sin t$
8. $3 - 2 \sin 2t + 5 \cos 2t$
9. $-2e^{-2t} \cos t + 5e^{-2t} \sin t$
10. $2e^{-t} \cos 3t - \frac{5}{3} e^{-t} \sin 3t$
11. $y = \frac{1}{5}(e^{3t} + 4e^{-2t})$
12. $y = 2e^{-t} - e^{-2t}$
13. $y = e^t \sin t$
14. $y = e^{2t} - te^{2t}$
15. $y = 2e^t \cosh \sqrt{3}t - (2/\sqrt{3})e^t \sinh \sqrt{3}t$
16. $y = 2e^{-t} \cos 2t + \frac{1}{2} e^{-t} \sin 2t$
17. $y = te^t - t^2 e^t + \frac{2}{3} t^3 e^t$
18. $y = \cosh t$

19. $y = \cos \sqrt{2}t$
21. $y = \frac{1}{5}(\cos t - 2 \sin t + 4e^t \cos t - 2e^t \sin t)$
23. $y = 2e^{-t} + te^{-t} + 2t^2e^{-t}$
25. $Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} - \frac{e^{-s}(s + 1)}{s^2(s^2 + 1)}$
27. $Y(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2(s^2 + 1)}$
31. $2b(3s^2 - b^2)/(s^2 + b^2)^3$
33. $n!/(s - a)^{n+1}$
35. $[(s - a)^2 - b^2]/[(s - a)^2 + b^2]^2$
37. a) $Y' + s^2Y = s$ b) $s^2Y'' + 2sY' - [s^2 + \alpha(\alpha + 1)]Y = -1$
20. $y = (\omega^2 - 4)^{-1}[(\omega^2 - 5) \cos \omega t + \cos 2t]$
22. $y = \frac{1}{5}(e^{-t} - e^t \cos t + 7e^t \sin t)$
24. $Y(s) = \frac{s}{s^2 + 4} + \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(s^2 + 4)}$
26. $Y(s) = (1 - e^{-s})/s^2(s^2 + 4)$
30. $1/(s - a)^2$
32. $n!/s^{n+1}$
34. $2b(s - a)/[(s - a)^2 + b^2]^2$

Section 6.3

7. b) $f(t) = -2u_3(t) + 4u_5(t) - u_7(t)$
8. b) $f(t) = 1 - 2u_1(t) + 2u_2(t) + 2u_3(t) + u_4(t)$
9. b) $f(t) = 1 + u_2(t) [e^{-(t-2)} - 1]$
10. b) $f(t) = t^2 + u_2(t) (1 - t^2)$
11. b) $f(t) = t - u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)(t - 2)$
12. b) $f(t) = t + u_2(t)(2 - t) + u_5(t)(5 - t) - u_7(t)(7 - t)$
13. $F(s) = 2e^{-2s}/s^3$
14. $F(s) = e^{-s}(s^2 + 2)/s^3$
15. $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2} - \frac{e^{-2\pi s}}{s^2}(1 + \pi s)$
16. $F(s) = \frac{1}{s}(e^{-s} + 2e^{-3s} - 6e^{-4s})$
17. $F(s) = s^{-2}[(1 - s)e^{-2s} - (1 + s)e^{-3s}]$
18. $F(s) = (1 - e^{-s})/s^2$
19. $f(t) = t^3 e^{2t}$
20. $f(t) = \frac{1}{3}u_2(t)[e^{t-2} - e^{-2(t-2)}]$
21. $f(t) = 2u_2(t)e^{t-2} \cos(t - 2)$
22. $f(t) = u_2(t) \sinh 2(t - 2)$
23. $f(t) = u_1(t)e^{2(t-1)} \cosh(t - 1)$
24. $f(t) = u_1(t) + u_2(t) - u_3(t) - u_4(t)$
26. $f(t) = 2(2t)^n$
27. $f(t) = \frac{1}{2}e^{-t/2} \cos t$
28. $f(t) = \frac{1}{6}e^{t/3}(e^{2t/3} - 1)$
29. $f(t) = \frac{1}{2}e^{t/2}u_2(t/2)$
30. $F(s) = s^{-1}(1 - e^{-s}), \quad s > 0$
31. $F(s) = s^{-1}(1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s}), \quad s > 0$

$$32. F(s) = \frac{1}{s} [1 - e^{-s} + \dots + e^{-2ns} - e^{-(2n+1)s}] = \frac{1 - e^{-(2n+2)s}}{s(1 + e^{-s})}, \quad s > 0$$

$$33. F(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-ns} = \frac{1/s}{1 + e^{-s}}, \quad s > 0$$

$$35. \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1/s}{1 + e^{-s}}, \quad s > 0$$

$$36. \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 + e^{-s})}, \quad s > 0$$

$$37. \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 - (1+s)e^{-s}}{s^2(1 - e^{-s})}, \quad s > 0$$

$$38. \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 + e^{-\pi s}}{(1 + s^2)(1 - e^{-\pi s})}, \quad s > 0$$

$$39. \text{a) } \mathcal{L}\{f(t)\} = s^{-1}(1 - e^{-s}), \quad s > 0 \quad \text{b) } \mathcal{L}\{g(t)\} = s^{-2}(1 - e^{-s}), \quad s > 0 \quad \text{c) } \mathcal{L}\{h(t)\} = s^{-2}(1 - e^{-s})^2, \quad s > 0$$

$$40. \text{b) } \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1 - e^{-s}}{s^2(1 + e^{-s})}, \quad s > 0$$

Section 6.4

$$1. \text{ a) } y = 1 - \cos t + \sin t - u_{3\pi}(t)(1 - \cos t)$$

$$2. \text{ a) } y = e^{-t} \sin t + \frac{1}{2} u_{\pi}(t) [1 + e^{-(t-\pi)} \cos t + e^{-(t-\pi)} \sin t] - \frac{1}{2} u_{2\pi}(t) [1 - e^{-(t-2\pi)} \cos t + e^{-(t-2\pi)} \sin t]$$

$$3. \text{ a) } y = \frac{1}{6} [1 - u_{2\pi}(t)] (2 \sin t - \sin 2t)$$

$$4. \text{ a) } y = \frac{1}{6} (2 \sin t - \sin 2t) - \frac{1}{6} u_{\pi}(t) (2 \sin t + \sin 2t)$$

$$5. \text{ a) } y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2t} - e^{-t} - u_{10}(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-2(t-10)} - e^{-(t-10)} \right]$$

$$6. \text{ a) } y = e^{-t} - e^{-2t} + u_2(t) \left[\frac{1}{2} - e^{-(t-2)} + \frac{1}{2} e^{-2(t-2)} \right]$$

$$7. \text{ a) } y = \cos t + u_{3\pi}(t) [1 - \cos(t - 3\pi)]$$

$$8. \text{ a) } y = h(t) - u_{\pi/2}(t) h(t - \pi/2), \quad h(t) = \frac{4}{25} (-4 + 5t + 4e^{-t/2} \cos t - 3e^{-t/2} \sin t)$$

$$9. \text{ a) } y = \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2} u_6(t) [t - 6 - \sin(t - 6)]$$

$$10. \text{ a) } y = h(t) + u_{\pi}(t) h(t - \pi), \quad h(t) = \frac{4}{17} [-4 \cos t + \sin t + 4e^{-t/2} \cos t + e^{-t/2} \sin t]$$

$$11. \text{ a) } y = u_{\pi}(t) \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(2t - 2\pi) \right] - u_{3\pi}(t) \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(2t - 6\pi) \right]$$

$$12. \text{ a) } y = u_1(t) h(t - 1) - u_2(t) h(t - 2), \quad h(t) = -1 + (\cos t + \cosh t)/2$$

$$13. \text{ a) } y = h(t) - u_{\pi}(t) h(t - \pi), \quad h(t) = (3 - 4 \cos t + \cos 2t)/12$$

$$14. f(t) = [u_{t_0}(t)(t - t_0) - u_{t_0+k}(t)(t - t_0 - k)](h/k)$$

$$15. g(t) = [u_{t_0}(t)(t - t_0) - 2u_{t_0+k}(t)(t - t_0 - k) + u_{t_0+2k}(t)(t - t_0 - 2k)](h/k)$$

$$16. \text{ b) } u(t) = 4ku_{3/2}(t)h\left(t - \frac{3}{2}\right) - 4ku_{5/2}(t)h\left(t - \frac{5}{2}\right),$$

$$h(t) = \frac{1}{4} - (\sqrt{7}/84)e^{-t/8} \sin(3\sqrt{7}t/8) - \frac{1}{4}e^{-t/8} \cos(3\sqrt{7}t/8)$$

$$\text{d) } k = 2,51 \quad \text{e) } \tau = 25,6773$$

17. a) $k = 5$

b) $y = [u_5(t)h(t-5) - u_{5+k}(t)h(t-5-k)]/k, \quad h(t) = \frac{1}{4}t - \frac{1}{8}\sin 2t$

18. b) $f_k(t) = [u_{4-k}(t) - u_{4+k}(t)]/2k; \quad y = [u_{4-k}(t)h(t-4+k) - u_{4+k}(t)h(t-4-k)]/2k,$
 $h(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-t/6}\cos(\sqrt{143}t/6) - (\sqrt{143}/572)e^{-t/6}\sin(\sqrt{143}t/6)$

19. b) $y = 1 - \cos t + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k u_{k\pi}(t) [1 - \cos(t - k\pi)]$

21. b) $y = 1 - \cos t + \sum_{k=1}^n (-1)^k u_{k\pi}(t) [1 - \cos(t - k\pi)]$

23. a) $y = 1 - \cos t + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k u_{11k/4}(t) [1 - \cos(t - 11k/4)]$

Section 6.5

1. a) $y = e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t + u_{\pi}(t)e^{-(t-\pi)} \sin(t - \pi)$

2. a) $y = \frac{1}{2}u_{\pi}(t)\sin 2(t - \pi) - \frac{1}{2}u_{2\pi}(t)\sin 2(t - 2\pi)$

3. a) $y = -\frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t} + u_5(t)[-e^{-2(t-5)} + e^{-(t-5)}] + u_{10}(t)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2(t-10)} - e^{-(t-10)}\right]$

4. a) $y = \cosh(t) - 20u_3(t) \sinh(t - 3)$

5. a) $y = \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{4}\cos t + \frac{1}{4}e^{-t} \cos \sqrt{2}t + (1/\sqrt{2})u_{3\pi}(t) e^{-(t-3\pi)} \sin \sqrt{2}(t - 3\pi)$

6. a) $y = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}u_{4\pi}(t)\sin 2(t - 4\pi)$

7. a) $y = \sin t + u_{2\pi}(t)\sin(t - 2\pi)$

8. a) $y = u_{\pi/4}(t)\sin 2(t - \pi/4)$

9. a) $y = u_{\pi/2}(t)[1 - \cos(t - \pi/2)] + 3u_{3\pi/2}(t)\sin(t - 3\pi/2) - u_{2\pi}(t)[1 - \cos(t - 2\pi)]$

10. a) $y = (1/\sqrt{31})u_{\pi/6}(t)\exp\left[-\frac{1}{4}(t - \pi/6)\right]\sin(\sqrt{31}/4)(t - \pi/6)$

11. a) $y = \frac{1}{5}\cos t + \frac{2}{5}\sin t - \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{3}{5}e^{-t}\sin t + u_{\pi/2}(t)e^{-(t-\pi/2)}\sin(t - \pi/2)$

12. a) $y = u_1(t)[\sinh(t - 1) - \sin(t - 1)]/2$

13. a) $-e^{-T/4}\delta(t - 5 - T), \quad T = 8\pi/\sqrt{15}$

14. a) $y = (4/\sqrt{15})u_1(t)e^{-(t-1)/4}\sin(\sqrt{15}/4)(t - 1)$

b) $t_1 \cong 2,3613, \quad y_1 \cong 0,71153$

c) $y = (8\sqrt{7}/21)u_1(t)e^{-(t-1)/8}\sin(3\sqrt{7}/8)(t - 1); \quad t_1 \cong 2,4569, \quad y_1 \cong 0,83351$

d) $t_1 = 1 + \pi/2 \cong 2,5708, \quad y_1 = 1$

15. a) $k_1 \cong 2,8108 \quad$ b) $k_1 \cong 2,3995 \quad$ c) $k_1 = 2$

16. a) $\phi(t, k) = [u_{4-k}(t)h(t - 4 + k) - u_{4+k}(t)h(t - 4 - k)]/2k, \quad h(t) = 1 - \cos t$

b) $u_4(t) \sin(t - 4) \quad$ c) Oui

17. b) $y = \sum_{k=1}^{20} u_{k\pi}(t)\sin(t - k\pi)$

18. b) $y = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} u_{k\pi}(t)\sin(t - k\pi)$

$$19. \text{ b) } y = \sum_{k=1}^{20} u_{k\pi/2}(t) \sin(t - k\pi/2)$$

$$20. \text{ b) } y = \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} u_{k\pi/2}(t) \sin(t - k\pi/2)$$

$$21. \text{ b) } y = \sum_{k=1}^{15} u_{(2k-1)\pi}(t) \sin[t - (2k-1)\pi]$$

$$22. \text{ b) } y = \sum_{k=1}^{40} (-1)^{k+1} u_{11k/4}(t) \sin(t - 11k/4)$$

$$23. \text{ b) } y = \frac{20}{\sqrt{399}} \sum_{k=1}^{20} (-1)^{k+1} u_{k\pi}(t) e^{-(t-k\pi)/20} \sin[\sqrt{399}(t - k\pi)/20]$$

$$24. \text{ b) } y = \frac{20}{\sqrt{399}} \sum_{k=1}^{15} u_{(2k-1)\pi}(t) e^{-[t-(2k-1)\pi]/20} \sin\{\sqrt{399}[t - (2k-1)\pi]/20\}$$

Section 6.6

$$3. \sin t * \sin t = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t) \text{ est négatif quand } t = 2\pi, \text{ par exemple.}$$

$$4. F(s) = 2/s^2(s^2 + 4)$$

$$5. F(s) = 1/(s+1)(s^2 + 1)$$

$$6. F(s) = 1/s^2(s-1)$$

$$7. F(s) = s/(s^2 + 1)^2$$

$$8. f(t) = \frac{1}{6} \int_0^t (t-\tau)^3 \sin \tau \, d\tau$$

$$9. f(t) = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \cos 2\tau \, d\tau$$

$$10. f(t) = \frac{1}{2} \int_0^t (t-\tau) e^{-(t-\tau)} \sin 2\tau \, d\tau$$

$$11. f(t) = \int_0^t \sin(t-\tau) g(\tau) \, d\tau$$

$$12. \text{ c) } \int_0^1 u^m (1-u)^n \, du = \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}$$

$$13. y = \frac{1}{\omega} \sin \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega(t-\tau) g(\tau) \, d\tau$$

$$14. y = \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin(t-\tau) \sin \alpha \tau \, d\tau$$

$$15. y = \frac{1}{8} \int_0^t e^{-(t-\tau)/2} \sin 2(t-\tau) g(\tau) \, d\tau$$

$$16. y = e^{-t/2} \cos t - \frac{1}{2} e^{-t/2} \sin t + \int_0^t e^{-(t-\tau)/2} \sin(t-\tau) [1 - u_\pi(\tau)] \, d\tau$$

$$17. y = 2e^{-2t} + te^{-2t} + \int_0^t (t-\tau) e^{-2(t-\tau)} g(\tau) \, d\tau$$

$$18. y = 2e^{-t} - e^{-2t} + \int_0^t [e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)}] \cos \alpha \tau \, d\tau$$

19. $y = \frac{1}{2} \int_0^t [\sinh(t-\tau) - \sin(t-\tau)] g(\tau) d\tau$
20. $y = \frac{4}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t + \frac{1}{6} \int_0^t [2 \sin(t-\tau) - \sin 2(t-\tau)] g(\tau) d\tau$
21. $\Phi(s) = \frac{F(s)}{1+K(s)}$
22. a) $\phi(t) = \frac{1}{3}(4 \sin 2t - 2 \sin t)$
23. a) $\phi(t) = \cos t$ b) $\phi''(t) + \phi(t) = 0, \quad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0$
24. a) $\phi(t) = \cosh(t)$ b) $\phi''(t) - \phi(t) = 0, \quad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0$
25. a) $\phi(t) = (1 - 2t + t^2)e^{-t}$
 b) $\phi''(t) + 2\phi'(t) + \phi(t) = 2e^{-t}, \quad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = -3$
26. a) $\phi(t) = \frac{1}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{i/2} \cos(\sqrt{3}t/2) + \frac{1}{\sqrt{3}}e^{i/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$
 b) $\phi'''(t) + \phi(t) = 0, \quad \phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi''(0) = 1$
27. a) $\phi(t) = \cos t$
 b) $\phi^{(4)}(t) - \phi(t) = 0, \quad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi''(0) = -1, \quad \phi'''(0) = 0$
28. a) $\phi(t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-t/2} \sin(\sqrt{3}t/2)$
 b) $\phi'''(t) + \phi''(t) + \phi'(t) = 0, \quad \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = -1, \quad \phi''(0) = 1$

Chapitre 7 Section 7.1

1. $\rho = 1$ 2. $\rho = 2$ 3. $\rho = \infty$ 4. $\rho = \frac{1}{2}$ 5. $\rho = \frac{1}{2}$ 6. $\rho = 1$ 7. $\rho = 3$ 8. $\rho = e$
9. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \rho = \infty$
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \rho = \infty$
11. $1 + (x-1), \quad \rho = \infty$
12. $1 - 2(x+1) + (x+1)^2, \quad \rho = \infty$
13. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}, \quad \rho = 1$
14. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \rho = 1$
15. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \rho = 1$
16. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (x-2)^n, \quad \rho = 1$
17. $y' = 1 + 2^2 x + 3^2 x^2 + 4^2 x^3 + \cdots + (n+1)^2 x^n + \cdots$
 $y'' = 2^2 + 3^2 \cdot 2x + 4^2 \cdot 3x^2 + 5^2 \cdot 4x^3 + \cdots + (n+2)^2 (n+1)x^n + \cdots$
18. $y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + (n+1)a_{n+1} x^n + \cdots$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$
 $y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + 20a_5 x^3 + \cdots + (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \cdots$
 $= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$

$$21. \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$22. \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}x^n$$

$$23. \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_nx^n$$

$$24. \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n]x^n$$

$$25. \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n]x^n$$

$$26. a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} + a_{n-1}]x^n$$

$$27. \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)na_{n+1} + a_n]x^n$$

$$28. a_n = (-2)^n a_0 / n!, \quad n = 1, 2, \dots; \quad a_0 e^{-2x}$$

Section 7.2

$$1. \text{ a) } a_{n+2} = a_n / (n+2)(n+1)$$

$$\text{b), d) } y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x$$

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x$$

$$2. \text{ a) } a_{n+2} = a_n / (n+2)$$

$$\text{b), d) } y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

$$y_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \frac{x^7}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n! x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$3. \text{ a) } (n+2)a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$$

$$\text{b) } y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1)^4 + \dots$$

$$y_2(x) = (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \frac{1}{4}(x-1)^4 + \dots$$

$$4. \text{ a) } a_{n+4} = -k^2 a_n / (n+4)(n+3); \quad a_2 = a_3 = 0$$

$$\text{b), d) } y_1(x) = 1 - \frac{k^2 x^4}{3 \cdot 4} + \frac{k^4 x^8}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} - \frac{k^6 x^{12}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12} + \dots$$

$$= 1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (k^2 x^4)^{m+1}}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdots (4m+3)(4m+4)}$$

$$y_2(x) = x - \frac{k^2 x^5}{4 \cdot 5} + \frac{k^4 x^9}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9} - \frac{k^6 x^{13}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13} + \dots$$

$$= x \left[1 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} (k^2 x^4)^{m+1}}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdots (4m+4)(4m+5)} \right]$$

Suggestion : Poser $n = 4m$ dans la relation de récurrence, $m = 1, 2, 3, \dots$

$$5. \text{ a) } (n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n+1)a_{n+1} + a_n = 0, \quad n \geq 1; \quad a_2 = -\frac{1}{2}a_0$$

$$\text{b) } y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + \dots,$$

$$y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{24}x^5 + \dots$$

6. a) $a_{n+2} = -(n^2 - 2n + 4)a_n / [2(n+1)(n+2)], \quad n \geq 2; \quad a_2 = -a_0, \quad a_3 = -\frac{1}{4}a_1$

b) $y_1(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{30}x^6 + \dots, \quad y_2(x) = x - \frac{1}{4}x^3 - \frac{7}{160}x^5 - \frac{19}{1920}x^7 + \dots$

7. a) $a_{n+2} = -a_n / (n+1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$

b), d) $y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1 \cdot 3} - \frac{x^6}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}$
 $y_2(x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} - \frac{x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)}$

8. a) $a_{n+2} = -[(n+1)^2 a_{n+1} + a_n + a_{n-1}] / (n+1)(n+2), \quad n = 1, 2, \dots$
 $a_2 = -(a_0 + a_1)/2$

b) $y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \dots$
 $y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{6}(x-1)^3 - \frac{1}{6}(x-1)^4 + \dots$

9. a) $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n-2)(n-3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

b) $y_1(x) = 1 - 3x^2, \quad y_2(x) = x - x^3/3$

10. a) $4(n+2)a_{n+2} - (n-2)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

b), d) $y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{4}, \quad y_2(x) = x - \frac{x^3}{12} - \frac{x^5}{240} - \frac{x^7}{2240} - \dots = x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{4^n(2n-1)(2n+1)}$

11. a) $3(n+2)a_{n+2} - (n+1)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

b), d) $y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{5}{432}x^6 + \dots + \frac{3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{3^n \cdot 2 \cdot 4 \dots (2n)}x^{2n} + \dots$
 $y_2(x) = x + \frac{2}{9}x^3 + \frac{8}{135}x^5 + \frac{16}{945}x^7 + \dots + \frac{2 \cdot 4 \dots (2n)}{3^n \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}x^{2n+1} + \dots$

12. a) $(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n+1)na_{n+1} + (n-1)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

b), d) $y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - x, \quad y_2(x) = x$

13. a) $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

b), d) $y_1(x) = 1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{5}{32}x^4 - \frac{7}{384}x^6 + \dots + (-1)^n \frac{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2^n(2n)!}x^{2n} + \dots$
 $y_2(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{20} - \frac{x^7}{210} + \dots + (-1)^n \frac{4 \cdot 6 \dots (2n+2)}{2^n(2n+1)!}x^{2n+1} + \dots$

14. a) $2(n+2)(n+1)a_{n+2} + 3(n+1)a_{n+1} + (n+3)a_n = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$

b) $y_1(x) = 1 - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{3}{8}(x-2)^3 - \frac{1}{64}(x-2)^4 + \dots$
 $y_2(x) = (x-2) - \frac{3}{4}(x-2)^2 + \frac{1}{24}(x-2)^3 + \frac{9}{64}(x-2)^4 + \dots$

15. a) $y = 2 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots$ c) pour $|x| < 0,7$

16. a) $y = -1 + 3x + x^2 - \frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \dots$ c) pour $|x| < 0,7$

17. a) $y = 4 - x - 4x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{4}{3}x^4 + \dots$ c) pour $|x| < 0,5$

18. a) $y = -3 + 2x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^4 + \dots$ c) pour $|x| < 0,9$

19. a) $y_1(x) = 1 - \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{12}(x-1)^4 + \frac{1}{18}(x-1)^6 + \dots$
 $y_2(x) = (x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^4 - \frac{1}{20}(x-1)^5 + \frac{1}{28}(x-1)^7 + \dots$

$$21. \text{ a) } y_1(x) = 1 - \frac{\lambda}{2!}x^2 + \frac{\lambda(\lambda-4)}{4!}x^4 - \frac{\lambda(\lambda-4)(\lambda-8)}{6!}x^6 + \dots$$

$$y_2(x) = x - \frac{\lambda-2}{3!}x^3 + \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)}{5!}x^5 - \frac{(\lambda-2)(\lambda-6)(\lambda-10)}{7!}x^7 + \dots$$

$$\text{b) } 1, \quad x, \quad 1-2x^2, \quad x-\frac{2}{3}x^3, \quad 1-4x^2+\frac{4}{3}x^4, \quad x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4}{15}x^5$$

$$\text{c) } 1, \quad 2x, \quad 4x^2-2, \quad 8x^3-12x, \quad 16x^4-48x^2+12, \quad 32x^5-160x^3+120x$$

$$22. \text{ b) } y = x - x^3/6 + \dots$$

Section 7.3

$$1. \phi''(0) = -1, \quad \phi'''(0) = 0, \quad \phi^{(4)}(0) = 3$$

$$2. \phi''(0) = 0, \quad \phi'''(0) = -2, \quad \phi^{(4)}(0) = 0$$

$$3. \phi''(1) = 0, \quad \phi'''(1) = -6, \quad \phi^{(4)}(1) = 42$$

$$4. \phi''(0) = 0, \quad \phi'''(0) = -a_0, \quad \phi^{(4)}(0) = -4a_1$$

$$5. \rho = \infty, \quad \rho = \infty$$

$$6. \rho = 1, \quad \rho = 3, \quad \rho = 1$$

$$7. \rho = 1, \quad \rho = \sqrt{3}$$

$$8. \rho = 1$$

$$9. \text{ a) } \rho = \infty \quad \text{b) } \rho = \infty \quad \text{c) } \rho = \infty \quad \text{d) } \rho = \infty \quad \text{e) } \rho = 1 \quad \text{f) } \rho = \sqrt{2} \quad \text{g) } \rho = \infty$$

$$\text{h) } \rho = 1 \quad \text{i) } \rho = 1 \quad \text{j) } \rho = 2 \quad \text{k) } \rho = \sqrt{3} \quad \text{l) } \rho = 1 \quad \text{m) } \rho = \infty \quad \text{n) } \rho = \infty$$

$$10. \text{ a) } y_1(x) = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}x^2 - \frac{(2^2 - \alpha^2)\alpha^2}{4!}x^4 - \frac{(4^2 - \alpha^2)(2^2 - \alpha^2)\alpha^2}{6!}x^6 - \dots$$

$$- \frac{[(2m-2)^2 - \alpha^2] \cdots (2^2 - \alpha^2)\alpha^2}{(2m)!}x^{2m} - \dots$$

$$y_2(x) = x + \frac{1-\alpha^2}{3!}x^3 + \frac{(3^2 - \alpha^2)(1-\alpha^2)}{5!}x^5 + \dots$$

$$+ \frac{[(2m-1)^2 - \alpha^2] \cdots (1-\alpha^2)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \dots$$

b) $y_1(x)$ ou $y_2(x)$ se termine avec x^n quand $\alpha = n$ est pair ou impair.

$$\text{c) } n = 0, \quad y = 1; \quad n = 1, \quad y = x; \quad n = 2, \quad y = 1 - 2x^2; \quad n = 3, \quad y = x - \frac{4}{3}x^3$$

$$11. y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{180}x^6 + \dots, \quad y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{504}x^7 + \dots, \quad \rho = \infty$$

$$12. y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \dots, \quad y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{60}x^6 + \dots, \quad \rho = \infty$$

$$13. y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + \dots, \quad y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{560}x^7 + \dots, \quad \rho = \pi/2$$

$$14. y_1(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{120}x^6 + \dots, \quad y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{7}{120}x^5 + \dots, \quad \rho = 1$$

15. On ne peut préciser de conditions initiales arbitraires en $x = 0$; ainsi, $x = 0$ est un point singulier.

$$16. y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = e^x$$

$$17. y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \dots$$

$$18. y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \dots$$

$$19. y = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$$

20. $y = a_0 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \right) + 2 \left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \right)$
 $= a_0 e^x + 2 \left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right) = ce^x - 2 - 2x - x^2$
21. $y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} - \frac{x^6}{2^3 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + \cdots \right) + \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \cdots \right)$
 $= a_0 e^{-x^2/2} + \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \cdots \right)$
23. $1, \quad 1 - 3x^2, \quad 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4; \quad x, \quad x - \frac{5}{3}x^3, \quad x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$
24. a) $1, \quad x, \quad (3x^2 - 1)/2, \quad (5x^3 - 3x)/2, \quad (35x^4 - 30x^2 + 3)/8, \quad (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$
 c) $P_1, \quad 0; \quad P_2, \quad \pm 0,57735; \quad P_3, \quad 0, \pm 0,77460; \quad P_4, \quad \pm 0,33998, \quad \pm 0,86114;$
 $P_5, \quad 0, \pm 0,53847, \quad \pm 0,90618$

Section 7.4

1. $y = c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$
2. $y = c_1 |x + 1|^{-1/2} + c_2 |x + 1|^{-3/2}$
3. $y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln|x|$
4. $y = c_1 x^{-1} \cos(2 \ln|x|) + c_2 x^{-1} \sin(2 \ln|x|)$
5. $y = c_1 x + c_2 x \ln|x|$
6. $y = c_1 (x - 1)^{-3} + c_2 (x - 1)^{-4}$
7. $y = c_1 |x|^{(-5+\sqrt{29})/2} + c_2 |x|^{(-5-\sqrt{29})/2}$
8. $y = c_1 |x|^{3/2} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \ln|x|\right) + c_2 |x|^{3/2} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \ln|x|\right)$
9. $y = c_1 x^3 + c_2 x^3 \ln|x|$
10. $y = c_1 (x - 2)^{-2} \cos(2 \ln|x - 2|) + c_2 (x - 2)^{-2} \sin(2 \ln|x - 2|)$
11. $y = c_1 |x|^{-1/2} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{15} \ln|x|\right) + c_2 |x|^{-1/2} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{15} \ln|x|\right)$
12. $y = c_1 x + c_2 x^4$
13. $y = 2x^{3/2} - x^{-1}$
14. $y = 2x^{-1/2} \cos(2 \ln x) - x^{-1/2} \sin(2 \ln x)$
15. $y = 2x^2 - 7x^2 \ln|x|$
16. $y = x^{-1} \cos(2 \ln x)$
17. $x = 0$, régulier
18. $x = 0$, régulier; $x = 1$, irrégulier
19. $x = 0$, irrégulier; $x = 1$, régulier
20. $x = 0$, irrégulier; $x = \pm 1$, régulier
21. $x = 1$, régulier; $x = -1$, irrégulier
22. $x = 0$, régulier
23. $x = -3$, régulier
24. $x = 0, -1$, régulier; $x = 1$, irrégulier
25. $x = 1$, régulier; $x = -2$, irrégulier
26. $x = 0, 3$, régulier
27. $x = 1, -2$, régulier
28. $x = 0$, régulier

29. $x = 0$, irrégulier30. $x = 0$, régulier31. $x = 0$, régulier32. $x = 0, \pm n\pi$, régulier33. $x = 0, \pm n\pi$, régulier34. $x = 0$, irrégulier; $x = \pm n\pi$, régulier35. $\alpha < 1$ 36. $\beta > 0$ 37. $\gamma = 2$ 38. $\alpha > 1$ 39. a) $\alpha < 1$ et $\beta > 0$ b) $\alpha < 1$ et $\beta \geq 0$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 0$ c) $\alpha > 1$ et $\beta > 0$ d) $\alpha > 1$ et $\beta \geq 0$, ou $\alpha = 1$ et $\beta > 0$ e) $\alpha = 1$ et $\beta > 0$

41. $y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 5} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9} - \dots \right)$

44. Point singulier irrégulier

45. Point singulier régulier

46. Point singulier régulier

47. Point singulier irrégulier

48. Point singulier irrégulier

49. Point singulier irrégulier

Section 7.5

1. b) $r(2r-1) = 0$; $a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+r)[2(n+r)-1]}$; $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 0$

c) $y_1(x) = x^{1/2} \left[1 - \frac{x^2}{2 \cdot 5} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13} + \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! 5 \cdot 9 \cdot 13 \dots (4n+1)} + \dots \right]$

d) $y_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 7} - \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11} + \dots \\ + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! 3 \cdot 7 \cdot 11 \dots (4n-1)} + \dots$

2. b) $r^2 - \frac{1}{9} = 0$; $a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+r)^2 - \frac{1}{9}}$; $r_1 = \frac{1}{3}$, $r_2 = -\frac{1}{3}$

c) $y_1(x) = x^{1/3} \left[1 - \frac{1}{1! \left(1 + \frac{1}{3}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(2 + \frac{1}{3}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^m}{m! \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(2 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(m + \frac{1}{3}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \dots \right]$

d) $y_2(x) = x^{-1/3} \left[1 - \frac{1}{1! \left(1 - \frac{1}{3}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(2 - \frac{1}{3}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 + \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^m}{m! \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(2 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(m - \frac{1}{3}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \dots \right]$

Suggestion : Poser $n = 2m$ dans la relation de récurrence, $m = 1, 2, 3, \dots$

$$3. \text{ b) } r(r-1) = 0; \quad a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n+r)(n+r-1)}; \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 0$$

$$\text{c) } y_1(x) = x \left[1 - \frac{x}{1!2!} + \frac{x^2}{2!3!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} x^n + \cdots \right]$$

$$4. \text{ b) } r^2 = 0; \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+r)^2}; \quad r_1 = r_2 = 0$$

$$\text{c) } y_1(x) = 1 + \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \cdots + \frac{x^n}{(n!)^2} + \cdots$$

$$5. \text{ b) } r(3r-1) = 0; \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+r)[3(n+r)-1]}; \quad r_1 = \frac{1}{3}, \quad r_2 = 0$$

$$\text{c) } y_1(x) = x^{1/3} \left[1 - \frac{1}{1!7} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{2!7 \cdot 13} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + \cdots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^m}{m!7 \cdot 13 \cdots (6m+1)} \left(\frac{x^2}{2} \right)^m + \cdots \right]$$

$$\text{d) } y_2(x) = 1 - \frac{1}{1!5} \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{2!5 \cdot 11} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!5 \cdot 11 \cdots (6m-1)} \left(\frac{x^2}{2} \right)^m + \cdots$$

Suggestion : Poser $n = 2m$ dans la relation de récurrence, $m = 1, 2, 3, \dots$

$$6. \text{ b) } r^2 - 2 = 0; \quad a_n = -\frac{a_{n-1}}{(n+r)^2 - 2}; \quad r_1 = \sqrt{2}, \quad r_2 = -\sqrt{2}$$

$$\text{c) } y_1(x) = x^{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{x}{1(1+2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})} + \cdots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n}{n!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2}) \cdots (n+2\sqrt{2})} x^n + \cdots \right]$$

$$\text{d) } y_2(x) = x^{-\sqrt{2}} \left[1 - \frac{x}{1(1-2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})} + \cdots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^n}{n!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2}) \cdots (n-2\sqrt{2})} x^n + \cdots \right]$$

$$7. \text{ b) } r^2 = 0; \quad (n+r)a_n = a_{n-1}; \quad r_1 = r_2 = 0$$

$$\text{c) } y_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$$

$$8. \text{ b) } 2r^2 + r - 1 = 0; \quad (2n+2r-1)(n+r+1)a_n + 2a_{n-2} = 0; \quad r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = -1$$

$$\text{c) } y_1(x) = x^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{7} + \frac{x^4}{2!7 \cdot 11} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!7 \cdot 11 \cdots (4m+3)} + \cdots \right)$$

$$\text{d) } y_2(x) = x^{-1} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!5} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!5 \cdot 9 \cdots (4m-3)} + \cdots \right)$$

$$9. \text{ b) } r^2 - 4r + 3 = 0; \quad (n+r-3)(n+r-1)a_n - (n+r-2)a_{n-1} = 0; \quad r_1 = 3, \quad r_2 = 1$$

$$\text{c) } y_1(x) = x^3 \left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{4} + \cdots + \frac{2x^n}{n!(n+2)} + \cdots \right)$$

$$10. \text{ b) } r^2 - r + \frac{1}{4} = 0; \quad \left(n+r-\frac{1}{2} \right) a_n + a_{n-2} = 0; \quad r_1 = r_2 = 1/2$$

$$\text{c) } y_1(x) = x^{1/2} \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m} (m!)^2} + \cdots \right)$$

$$11. \text{ a) } r^2 = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 0$$

$$\text{b) } y_1(x) = 1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \cdot 1^2} (x-1) - \frac{\alpha(\alpha+1)[1 \cdot 2 - \alpha(\alpha+1)]}{(2 \cdot 1^2)(2 \cdot 2^2)} (x-1)^2 + \cdots \\ + (-1)^{n+1} \frac{\alpha(\alpha+1)[1 \cdot 2 - \alpha(\alpha+1)] \cdots [n(n-1) - \alpha(\alpha+1)]}{2^n (n!)^2} (x-1)^n + \cdots$$

12. a) $r_1 = \frac{1}{2}$, $r_2 = 0$ pour les deux $x = \pm 1$

b) $y_1(x) = |x-1|^{1/2} \times \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+2\alpha) \cdots (2n-1+2\alpha)(1-2\alpha) \cdots (2n-1-2\alpha)}{2^n (2n+1)!} (x-1)^n \right]$

$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \alpha(1+\alpha) \cdots (n-1+\alpha)(-\alpha)(1-\alpha) \cdots (n-1-\alpha)}{n! \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} (x-1)^n$

13. $r^2 = 0$; $r_1 = 0$, $r_2 = 0$; $a_n = \frac{(n-1-\lambda)a_{n-1}}{n^2}$

$y_1(x) = 1 + \frac{-\lambda}{(1!)^2}x + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2}x^2 + \cdots + \frac{(-\lambda)(1-\lambda) \cdots (n-1-\lambda)}{(n!)^2}x^n + \cdots$

Pour $\lambda = n$, les coefficients de tous les termes suivant x^n sont nuls.

16. e) $[(n-1)^2 - 1]b_n = -b_{n-2}$ et il est impossible de déterminer b_2 .

Section 7.6

1. a) $x = 0$; b) $r(r-1) = 0$; $r_1 = 1$, $r_2 = 0$

2. a) $x = 0$; b) $r^2 - 3r + 2 = 0$; $r_1 = 2$, $r_2 = 1$

3. a) $x = 0$; b) $r(r-1) = 0$; $r_1 = 1$, $r_2 = 0$

a) $x = 1$; b) $r(r+5) = 0$; $r_1 = 0$, $r_2 = -5$

4. Aucun

5. a) $x = 0$; b) $r^2 + 2r - 2 = 0$; $r_1 = -1 + \sqrt{3} \cong 0,732$, $r_2 = -1 - \sqrt{3} \cong -2,73$

6. a) $x = 0$; b) $r\left(r - \frac{3}{4}\right) = 0$; $r_1 = \frac{3}{4}$, $r_2 = 0$

a) $x = -2$; b) $r\left(r - \frac{5}{4}\right) = 0$; $r_1 = \frac{5}{4}$, $r_2 = 0$

7. a) $x = 0$; b) $r^2 + 1 = 0$; $r_1 = i$, $r_2 = -i$

8. a) $x = -1$; b) $r^2 - 7r + 3 = 0$; $r_1 = (7 + \sqrt{37})/2 \cong 6,54$, $r_2 = (7 - \sqrt{37})/2 \cong 0,459$

9. a) $x = 1$; b) $r^2 + r = 0$; $r_1 = 0$, $r_2 = -1$

10. a) $x = -2$; b) $r^2 - (5/4)r = 0$; $r_1 = 5/4$, $r_2 = 0$

11. a) $x = 2$; b) $r^2 - 2r = 0$; $r_1 = 2$, $r_2 = 0$

a) $x = -2$; b) $r^2 - 2r = 0$; $r_1 = 2$, $r_2 = 0$

12. a) $x = 0$; b) $r^2 - (5/3)r = 0$; $r_1 = 5/3$, $r_2 = 0$

a) $x = -3$;

b) $r^2 - (r/3) - 1 = 0$; $r_1 = (1 + \sqrt{37})/6 \cong 1,18$; $r_2 = (1 - \sqrt{37})/6 \cong -0,847$

13. b) $r_1 = 0$, $r_2 = 0$

c) $y_1(x) = 1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \cdots$

$y_2(x) = y_1(x) \ln x - 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{108}x^3 + \cdots$

14. b) $r_1 = 1$, $r_2 = 0$

c) $y_1(x) = x - 4x^2 + \frac{17}{3}x^3 - \frac{47}{12}x^4 + \cdots$

$y_2(x) = -6y_1(x) \ln x + 1 - 33x^2 + \frac{449}{6}x^3 + \cdots$

15. b) $r_1 = 1$, $r_2 = 0$

c) $y_1(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^3 + \frac{51}{16}x^4 + \cdots$

$y_2(x) = 3y_1(x) \ln x + 1 - \frac{21}{4}x^2 - \frac{19}{4}x^3 + \cdots$

16. b) $r_1 = 1, \quad r_2 = 0$

c) $y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \dots$

$$y_2(x) = -y_1(x) \ln x + 1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{36}x^3 - \frac{35}{1728}x^4 + \dots$$

17. b) $r_1 = 1, \quad r_2 = -1$

c) $y_1(x) = x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{720}x^5 + \dots$

$$y_2(x) = -\frac{1}{3}y_1(x) \ln x + x^{-1} - \frac{1}{90}x^3 + \dots$$

18. b) $r_1 = \frac{1}{2}, \quad r_2 = 0$

c) $y_1(x) = (x-1)^{1/2} \left[1 - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{53}{480}(x-1)^2 + \dots \right]$ d) $\rho = 1$

19. c) *Suggestion:* $(n-1)(n-2) + (1+\alpha+\beta)(n-1) + \alpha\beta = (n-1+\alpha)(n-1+\beta)$

d) *Suggestion:* $(n-\gamma)(n-1-\gamma) + (1+\alpha+\beta)(n-\gamma) + \alpha\beta = (n-\gamma+\alpha)(n-\gamma+\beta)$

Section 7.7

1. $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!(n+1)!}$

$$y_2(x) = -y_1(x) \ln x + \frac{1}{x} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!(n-1)!} (-1)^n x^n \right]$$

2. $y_1(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}, \quad y_2(x) = y_1(x) \ln x - \frac{2}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n}{(n!)^2} x^n$

3. $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{(n!)^2} x^n, \quad y_2(x) = y_1(x) \ln x - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n H_n}{(n!)^2} x^n$

4. $y_1(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} x^n$

$$y_2(x) = -y_1(x) \ln x + \frac{1}{x^2} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!(n-1)!} (-1)^n x^n \right]$$

5. $y_1(x) = x^{3/2} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \left(1 + \frac{3}{2}\right) \left(2 + \frac{3}{2}\right) \dots \left(m + \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \right]$

$$y_2(x) = x^{-3/2} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \left(1 - \frac{3}{2}\right) \left(2 - \frac{3}{2}\right) \dots \left(m - \frac{3}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \right]$$

Suggestion: Poser $n = 2m$ dans la relation de récurrence, $m = 1, 2, 3, \dots$ Pour $r = -\frac{3}{2}$, $a_1 = 0$ et a_3 est arbitraire.

Chapitre 8 Section 8.1

1. $xX'' - \lambda X = 0, \quad T' + \lambda T = 0$

2. $X'' - \lambda x X = 0, \quad T' + \lambda t T = 0$

3. $X'' - \lambda(X' + X) = 0, \quad T' + \lambda T = 0$

4. $[p(x)X']' + \lambda r(x)X = 0, \quad T'' + \lambda T = 0$

5. Non séparable

6. $X'' + (x + \lambda)X = 0, \quad Y'' - \lambda Y = 0$

7. $X'' + \mu^2 X = 0$, $Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)Y = 0$, $T' + \alpha^2 \lambda^2 T = 0$
 8. $r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R = 0$, $\Theta'' + \mu^2 \Theta = 0$, $T' + \alpha^2 \lambda^2 T = 0$

Section 8.2

1. $y = -\sin x$
2. $y = (\cot \sqrt{2}\pi \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x)/\sqrt{2}$
3. $y = 0$ pour tout L ; $y = c_2 \sin x$ si $\sin L = 0$
4. $y = -\tan L \cos x + \sin x$ si $\cos L \neq 0$; pas de solution si $\cos L = 0$
5. Pas de solution
6. $y = (-\pi \sin \sqrt{2}x + x \sin \sqrt{2}\pi)/2 \sin \sqrt{2}\pi$
7. Pas de solution
8. $y = c_2 \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$
9. $y = c_1 \cos 2x + \frac{1}{3} \cos x$
10. $y = \frac{1}{2} \cos x$
11. $y = -\frac{5}{2}x + \frac{3}{2}x^2$
12. $y = -\frac{1}{9}x^{-1} + \frac{1}{9}(1 - e^3)x^{-1} \ln x + \frac{1}{9}x^2$
13. Pas de solution
14. $\lambda_n = [(2n-1)/2]^2$, $y_n(x) = \sin[(2n-1)x/2]$; $n = 1, 2, 3, \dots$
15. $\lambda_n = [(2n-1)/2]^2$, $y_n(x) = \cos[(2n-1)x/2]$; $n = 1, 2, 3, \dots$
16. $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$; $\lambda_n = n^2$, $y_n(x) = \cos nx$; $n = 1, 2, 3, \dots$
17. $\lambda_n = [(2n-1)\pi/2L]^2$, $y_n(x) = \cos[(2n-1)\pi x/2L]$; $n = 1, 2, 3, \dots$
18. $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = 1$; $\lambda_n = (n\pi/L)^2$, $y_n(x) = \cos(n\pi x/L)$; $n = 1, 2, 3, \dots$
19. $\lambda_n = -[(2n-1)\pi/2L]^2$, $y_n(x) = \sin[(2n-1)\pi x/2L]$; $n = 1, 2, 3, \dots$
20. $\lambda_n = 1 + (n\pi/\ln L)^2$, $y_n(x) = x \sin(n\pi \ln x/\ln L)$; $n = 1, 2, 3, \dots$
21. a) $W(r) = G(R^2 - r^2)/4\mu$ c) Q est réduit à 0,3164 de sa valeur originale.
22. a) $y = k(x^4 - 2Lx^3 + L^3x)/24$ b) $y = k(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2)/24$ c) $y = k(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2)/24$

Section 8.3

1. $T = 2\pi/5$
2. $T = 1$
3. Non périodique
4. $T = 2L$
5. $T = 1$
6. Non périodique
7. $T = 2$
8. $T = 4$
9. $f(x) = 2L - x$ dans $L < x < 2L$; $f(x) = -2L - x$ dans $-3L < x < -2L$

10. $f(x) = x - 1$ dans $1 < x < 2$; $f(x) = x - 8$ dans $8 < x < 9$
11. $f(x) = -L - x$ dans $-L < x < 0$
13. b) $f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$
14. b) $f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi x/L]}{2n-1}$
15. b) $f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} + \frac{(-1)^{n+1} \sin nx}{n} \right]$
16. b) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$
17. b) $f(x) = \frac{3L}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2L \cos[(2n-1)\pi x/L]}{(2n-1)^2 \pi^2} + \frac{(-1)^{n+1} L \sin(n\pi x/L)}{n\pi} \right]$
18. b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2} \right] \sin \frac{n\pi x}{2}$
19. b) $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi x/2]}{2n-1}$
20. b) $f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x$
21. b) $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$
22. b) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\pi x/2]}{(2n-1)^2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi x}{2}$
23. b) $f(x) = \frac{11}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 5}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4[1 - (-1)^n]}{n^3 \pi^3} - \frac{(-1)^n}{n\pi} \right] \sin \frac{n\pi x}{2}$
24. b) $f(x) = \frac{9}{8} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{162[(-1)^n - 1]}{n^4 \pi^4} - \frac{27(-1)^n}{n^2 \pi^2} \right] \cos \frac{n\pi x}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{108(-1)^n + 54}{n^3 \pi^3} \sin \frac{n\pi x}{3}$
25. $m = 81$
26. $m = 27$
28. $\int_0^x f(t) dt$ peut ne pas être périodique ; par exemple, prendre $f(t) = 1 + \cos t$.

Section 8.4

1. a) $f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$
2. a) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(2n-1)^2 \pi} \cos(2n-1)x + \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right]$
3. a) $f(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\pi x/L]}{(2n-1)^2}$
4. a) $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos n\pi x$
5. a) $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos(2n-1)x$
6. a) $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi x + b_n \sin n\pi x);$
- $$a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_n = \frac{2(-1)^n}{n^2 \pi^2}, \quad b_n = \begin{cases} -1/n\pi, & n \text{ pair} \\ 1/n\pi - 4/n^3 \pi^3, & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$7. \text{ a) } f(x) = -\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 - \cos n\pi}{\pi n^2} \cos nx - \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right]$$

$$\text{b) } n = 10; \quad \max |e| = 1,6025 \text{ à } x = \pm\pi$$

$$n = 20; \quad \max |e| = 1,5867 \text{ à } x = \pm\pi$$

$$n = 40; \quad \max |e| = 1,5788 \text{ à } x = \pm\pi$$

c) Impossible

$$8. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi x}{n^2} \cos n\pi x$$

$$\text{b) } n = 10; \quad \max |e| = 0,02020 \text{ à } x = 0, \pm 1$$

$$n = 20; \quad \max |e| = 0,01012 \text{ à } x = 0, \pm 1$$

$$n = 40; \quad \max |e| = 0,005065 \text{ à } x = 0, \pm 1$$

c) $n = 21$

$$9. \text{ a) } f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi x$$

$$\text{b) } n = 10, 20, 40; \quad \max |e| = 1 \text{ à } x = \pm 1$$

c) Impossible

$$10. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{6(1 - \cos n\pi)}{n^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \frac{2 \cos n\pi}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{2} \right]$$

$$\text{b) } n = 10; \quad \sup |e| = 1,0606 \text{ quand } x \rightarrow 2$$

$$n = 20; \quad \sup |e| = 1,0304 \text{ quand } x \rightarrow 2$$

$$n = 40; \quad \sup |e| = 1,0152 \text{ quand } x \rightarrow 2$$

c) Impossible

$$11. \text{ a) } f(x) = \frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2 \cos n\pi}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x - \frac{2 - 2 \cos n\pi + n^2 \pi^2 \cos n\pi}{n^3 \pi^3} \sin n\pi x \right]$$

$$\text{b) } n = 10; \quad \sup |e| = 0,5193 \text{ quand } x \rightarrow 1$$

$$n = 20; \quad \sup |e| = 0,5099 \text{ quand } x \rightarrow 1$$

$$n = 40; \quad \sup |e| = 0,5050 \text{ quand } x \rightarrow 1$$

c) Impossible

$$12. \text{ a) } f(x) = -\frac{12}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin n\pi x$$

$$\text{b) } n = 10; \quad \max |e| = 0,001345 \text{ à } x = \pm 0,9735$$

$$n = 20; \quad \max |e| = 0,0003534 \text{ à } x = \pm 0,9864$$

$$n = 40; \quad \max |e| = 0,00009058 \text{ à } x = \pm 0,9931$$

c) $n = 4$

$$13. y = (\omega \sin nt - n \sin \omega t) / (\omega^2 - n^2), \quad \omega^2 \neq n^2$$

$$y = (\sin nt - nt \cos nt) / 2n^2, \quad \omega^2 = n^2$$

$$14. y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n (\omega \sin nt - n \sin \omega t) / (\omega^2 - n^2), \quad \omega \neq 1, 2, 3, \dots$$

$$y = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq m}}^{\infty} b_n (m \sin nt - n \sin mt) / (m^2 - n^2) + b_m (\sin mt - mt \cos mt) / 2m^2, \quad \omega = m$$

$$15. y = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega^2 - (2n-1)^2} \left[\frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t - \frac{1}{\omega} \sin \omega t \right]$$

$$16. y = \cos \omega t + \frac{1}{2\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi t - \cos \omega t}{(2n-1)^2 [\omega^2 - (2n-1)^2 \pi^2]}$$

Section 8.5

1. Impair

3. Impair

5. Pair

2. Ni l'un ni l'autre

4. Pair

6. Ni l'un ni l'autre

$$14. \quad f(x) = \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\pi/2)}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\pi/2) - \sin(n\pi/2)}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$15. \quad f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2}$$

$$16. \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(-\cos n\pi + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$17. \quad f(x) = 1$$

$$18. \quad f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

$$19. \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{3} + \cos \frac{2n\pi}{3} - 2\cos n\pi \right) \sin \frac{nx}{3}$$

$$20. \quad f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$$

$$21. \quad f(x) = \frac{L}{2} + \frac{4L}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\pi x/L]}{(2n-1)^2}$$

$$22. \quad f(x) = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x/L)}{n}$$

$$23. \quad \text{a) } f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \right] \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$24. \quad f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$$

$$25. \quad \text{a) } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4n^2\pi^2(1 + \cos n\pi)}{n^3\pi^3} + \frac{16(1 - \cos n\pi)}{n^3\pi^3} \right] \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$26. \quad \text{a) } f(x) = \frac{4}{3} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 3\cos n\pi}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{4}$$

$$27. \quad \text{b) } g(x) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{3}$$

$$h(x) = \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{3}$$

$$28. \quad \text{b) } g(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\cos(n\pi/2) + 2n\pi\sin(n\pi/2) - 4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sin(n\pi/2) - 2n\pi\sin(n\pi/2)}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$29. \quad \text{b) } g(x) = -\frac{5}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12\cos n\pi + 4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2}$$

$$h(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\pi^2(3 + 5\cos n\pi) + 32(1 - \cos n\pi)}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi x}{2}$$

$$30. \text{ b) } g(x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^2\pi^2(2\cos n\pi - 5) + 324(1 - \cos n\pi)}{n^4\pi^4} \cos \frac{n\pi x}{3}$$

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4\cos n\pi + 2}{n\pi} + \frac{144\cos n\pi + 180}{n^3\pi^3} \right] \sin \frac{n\pi x}{3}$$

40. Prolongez $f(x)$ antisymétriquement dans $(L, 2L]$ de sorte que $f(2L - x) = -f(x)$ pour $0 \leq x < L$. Puis, prolongez cette fonction comme une fonction paire dans $(-2L, 0)$.

Section 8.6

1. $u(x, t) = e^{-400\pi^2 t} \sin 2\pi x - e^{-2500\pi^2 t} \sin 5\pi x$

2. $u(x, t) = 2e^{-\pi^2 t/16} \sin(\pi x/2) - e^{-\pi^2 t/4} \sin \pi x + 4e^{-\pi^2 t} \sin 2\pi x$

3. $u(x, t) = \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} e^{-n^2\pi^2 t/1600} \sin \frac{n\pi x}{40}$

4. $u(x, t) = \frac{160}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^2} e^{-n^2\pi^2 t/1600} \sin \frac{n\pi x}{40}$

5. $u(x, t) = \frac{100}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/4) - \cos(3n\pi/4)}{n} e^{-n^2\pi^2 t/1600} \sin \frac{n\pi x}{40}$

6. $u(x, t) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} e^{-n^2\pi^2 t/1600} \sin \frac{n\pi x}{40}$

7. $t = 5, \quad n = 16; \quad t = 20, \quad n = 8; \quad t = 80, \quad n = 4$

8. d) $t = 673,35$

9. d) $t = 451,60$

10. d) $t = 617,17$

11. b) $t = 5, \quad x = 33,20; \quad t = 10, \quad x = 31,13; \quad t = 20, \quad x = 28,62; \quad t = 40, \quad x = 25,73;$
 $t = 100, \quad x = 21,95; \quad t = 200, \quad x = 20,31$

e) $t = 524,81$

12. $u(x, t) = \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} e^{-n^2\pi^2 a^2 t/400} \sin \frac{n\pi x}{20}$

a) $35,91^\circ\text{C}$ b) $67,23^\circ\text{C}$ c) $99,96^\circ\text{C}$

13. a) $76,73 \text{ s}$ b) $152,56 \text{ s}$ c) $1093,36 \text{ s}$

15. a) $aw_{xx} - bw_t + (c - b\delta)w = 0$ b) $\delta = c/b$ si $b \neq 0$

Section 8.7

1. $u = 10 + \frac{3}{5}x$

2. $u = 30 - \frac{5}{4}x$

3. $u = 0$

4. $u = T$

5. $u = 0$

6. $u = T$

7. $u = T(1 + x)/(1 + L)$

8. $u = T(1 + L - x)/(1 + L)$

9. a) $u(x, t) = 3x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{70\cos n\pi + 50}{n\pi} e^{-0,86n^2\pi^2 t/400} \sin \frac{n\pi x}{20}$ d) $160,29 \text{ s}$

10. a) $f(x) = 2x, 0 \leq x \leq 50; \quad f(x) = 200 - 2x, 50 < x \leq 100$

b) $u(x, t) = 20 - \frac{x}{5} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-1,14n^2\pi^2 t/(100)^2} \sin \frac{n\pi x}{100}, \quad c_n = \frac{800}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{40}{n\pi}$

d) $u(50, t) \rightarrow 10$ quand $t \rightarrow \infty; \quad 3754 \text{ s}$

$$11. \text{ a) } u(x, t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t / 900} \sin \frac{n \pi x}{30}, \quad c_n = \frac{60}{n^3 \pi^3} [2(1 - \cos n \pi) - n^2 \pi^2 (1 + \cos n \pi)]$$

$$12. \text{ a) } u(x, t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \cos \frac{n \pi x}{L},$$

$$c_n = \begin{cases} 0, & n \text{ impair;} \\ -4/(n^2 - 1)\pi, & n \text{ pair} \end{cases}$$

$$\text{b) } \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 2/\pi$$

$$13. \text{ a) } u(x, t) = \frac{200}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t / 6400} \cos \frac{n \pi x}{40}, \quad c_n = -\frac{160}{3n^2 \pi^2} (3 + \cos n \pi)$$

$$\text{c) } 200/9 \quad \text{d) } 1543 \text{ s}$$

$$14. \text{ a) } u(x, t) = \frac{25}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 t / 900} \cos \frac{n \pi x}{30}, \quad c_n = \frac{50}{n \pi} \left(\sin \frac{n \pi}{3} - \sin \frac{n \pi}{6} \right)$$

$$15. \text{ b) } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2 \pi^2 \alpha^2 t / 4L^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx$$

$$16. \text{ a) } u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 3600} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{60}, \quad c_n = \frac{120}{(2n-1)^2 \pi^2} [2 \cos n \pi + (2n-1)\pi]$$

$$\text{c) } x_m \text{ augmente à partir de } x = 0 \text{ et atteint } x = 30 \text{ quand } t = 104,4.$$

$$17. \text{ a) } u(x, t) = 40 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(2n-1)^2 \pi^2 t / 3600} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{60}, \quad c_n = \frac{40}{(2n-1)^2 \pi^2} [6 \cos n \pi - (2n-1)\pi]$$

$$19. \quad u(x) = \begin{cases} T \frac{x}{a} \left[\frac{\xi}{\xi + (L/a) - 1} \right], & 0 \leq x \leq a, \\ T \left[1 - \frac{L-x}{a} \frac{1}{\xi + (L/a) - 1} \right], & a \leq x \leq L, \end{cases} \quad \text{où } \xi = k_2 A_2 / k_1 A_1.$$

$$20. \text{ e) } u_n(x, t) = e^{-\mu_n^2 \alpha^2 t} \sin \mu_n x$$

Section 8.8

$$1. \text{ a) } u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n \pi}{2} \sin \frac{n \pi x}{L} \cos \frac{n \pi a t}{L}$$

$$2. \text{ a) } u(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{n \pi}{4} + \sin \frac{3n \pi}{4} \right) \sin \frac{n \pi x}{L} \cos \frac{n \pi a t}{L}$$

$$3. \text{ a) } u(x, t) = \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + \cos n \pi}{n^3} \sin \frac{n \pi x}{L} \cos \frac{n \pi a t}{L}$$

$$4. \text{ a) } u(x, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \pi / 2) \sin(n \pi / L)}{n} \sin \frac{n \pi x}{L} \cos \frac{n \pi a t}{L}$$

$$5. \text{ a) } u(x, t) = \frac{8L}{a \pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n \pi}{2} \sin \frac{n \pi x}{L} \sin \frac{n \pi a t}{L}$$

$$6. \text{ a) } u(x, t) = \frac{8L}{a \pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \pi / 4) + \sin(3n \pi / 4)}{n^3} \sin \frac{n \pi x}{L} \sin \frac{n \pi a t}{L}$$

$$7. \text{ a) } u(x, t) = \frac{32L}{a \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \pi + 2}{n^4} \sin \frac{n \pi x}{L} \sin \frac{n \pi a t}{L}$$

$$8. \text{ a) } u(x, t) = \frac{4L}{a \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n \pi / 2) \sin(n \pi / L)}{n^2} \sin \frac{n \pi x}{L} \sin \frac{n \pi a t}{L}$$

$$9. \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \cos \frac{(2n-1)\pi a t}{2L},$$

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} dx$$

$$10. \text{ a) } u(x, t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi}{4} \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{2L}$$

$$11. \text{ a) } u(x, t) = \frac{512}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)\pi + 3 \cos n\pi}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{2L}$$

14. $\phi(x + at)$ représente une onde se déplaçant dans la direction négative de l'axe des x à une vitesse de $a > 0$.

$$15. \text{ a) } 248 \text{ pi/s} \quad \text{b) } 49,6\pi n \text{ rad/s}$$

c) Les fréquences augmentent ; les modes ne changent pas.

$$21. r^2 R'' + rR' + (\lambda^2 r^2 - \mu^2)R = 0, \quad \Theta'' + \mu^2 \Theta = 0, \quad T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$$

$$23. \text{ b) } a_n = a\sqrt{1 + (\gamma^2 L^2 / \pi^2)} \quad \text{c) } \gamma = 0$$

$$24. \text{ a) } c_n = \frac{20}{n^2 \pi^2} \left(2 \sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{2n\pi}{5} - \sin \frac{3n\pi}{5} \right)$$

Section 8.9

$$1. \text{ a) } u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}, \quad c_n = \frac{2/a}{\sinh(n\pi b/a)} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$\text{b) } u(x, y) = \frac{4a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{\sin(n\pi/2)}{\sinh(n\pi b/a)} \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

$$2. u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}, \quad c_n = \frac{2/a}{\sinh(n\pi b/a)} \int_0^a h(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$3. \text{ a) } u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(1)} \sinh \frac{n\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(2)} \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a},$$

$$c_n^{(1)} = \frac{2/b}{\sinh(n\pi a/b)} \int_0^b f(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy, \quad c_n^{(2)} = \frac{2/a}{\sinh(n\pi b/a)} \int_0^a h(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$\text{b) } c_n^{(1)} = \frac{2}{n\pi \sinh(n\pi a/b)}, \quad c_n^{(2)} = -\frac{2}{n^3 \pi^3} \frac{(n^2 \pi^2 - 2) \cos n\pi + 2}{\sinh(n\pi b/a)}$$

$$5. u(r, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta);$$

$$c_n = \frac{a^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad k_n = \frac{a^n}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$

$$6. \text{ a) } u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \sin n\theta, \quad c_n = \frac{2}{\pi a^n} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$

$$\text{b) } c_n = \frac{4}{\pi a^n} \frac{1 - \cos n\pi}{n^3}$$

$$7. u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^{n\pi/\alpha} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha}, \quad c_n = (2/\alpha) a^{-n\pi/\alpha} \int_0^{\alpha} f(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} d\theta$$

$$8. \text{ a) } u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n\pi y/a} \sin \frac{n\pi x}{a}, \quad c_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx$$

$$\text{b) } c_n = \frac{4a^2}{n^3 \pi^3} (1 - \cos n\pi)$$

$$\text{c) } y_0 \cong 6,6315$$

$$10. \text{ b) } u(x, y) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cosh \frac{n\pi x}{b} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad c_n = \frac{2/n\pi}{\sinh(n\pi a/b)} \int_0^b f(y) \cos \frac{n\pi y}{b} dy$$

$$11. \quad u(r, \theta) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (c_n \cos n\theta + k_n \sin n\theta),$$

$$c_n = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \int_0^{2\pi} g(\theta) \cos n\theta \, d\theta, \quad k_n = \frac{1}{n\pi a^{n-1}} \int_0^{2\pi} g(\theta) \sin n\theta \, d\theta;$$

$$\text{la condition nécessaire est } \int_0^{2\pi} g(\theta) \, d\theta = 0.$$

$$12. \quad \text{a) } u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi y}{a}, \quad c_n = \frac{2/a}{\cosh(n\pi b/a)} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} \, dx$$

$$\text{b) } c_n = \frac{4a \sin(n\pi/2)}{n^2 \pi^2 \cosh(n\pi b/a)}$$

$$13. \quad \text{a) } u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh \frac{(2n-1)\pi x}{2b} \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b},$$

$$c_n = \frac{2/b}{\sinh[(2n-1)\pi a/2b]} \int_0^b f(y) \sin \frac{(2n-1)\pi y}{2b} \, dy$$

$$\text{b) } c_n = \frac{32b^2}{(2n-1)^3 \pi^3 \sinh[(2n-1)\pi a/2b]}$$

$$14. \quad \text{a) } u(x, y) = \frac{c_0 y}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a}, \quad c_0 = \frac{2}{ab} \int_0^a g(x) \, dx,$$

$$c_n = \frac{2/a}{\sinh(n\pi b/a)} \int_0^a g(x) \cos \frac{n\pi x}{a} \, dx$$

$$\text{b) } c_0 = \frac{2}{b} \left(1 + \frac{a^4}{30} \right), \quad c_n = -\frac{24a^4 (1 + \cos n\pi)}{n^4 \pi^4 \sinh(n\pi b/a)}$$

$$16. \quad \text{a) } u(x, z) = b + \frac{\alpha a}{2} - \frac{4\alpha a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\pi x/a] \cosh[(2n-1)\pi z/a]}{(2n-1)^2 \cosh[(2n-1)\pi b/a]}$$

Index

A

Abel, Niels Henrik, 114, 180-181, 183, 194
Accélération de la convergence, 428
Adjointe, équation différentielle, 117-118
Airy, Sir George, 359
Algorithmes numériques, 21
Amortissement
 critique, 156
 force d', 150-151
Amplitude
 du mouvement, 153
 modulation d', 169
Analyse du modèle mathématique, 66
Annihileur, méthode de l', 192
Approximations
 asymptotiques, 395
 linéaire des systèmes non linéaires, 291-295
 polynomiales à l'équation d'Airy, 360-361
 polynomiales de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$, 357-358
 polynomiales de la fonction de Bessel, 393, 395
Autoadjointe
 équation, 118
 matrice, 221

B

Bernoulli, Daniel, 24, 93, 94, 404, 453
Bernoulli, équation de, 52-53
Bernoulli, frères, 24, 347
Bessel, Friedrich Wilhelm, 355
Bifurcation, 94-95, 239
 trans-critique, 96
Brachistochrone, problème du, 81

C

Capacité limite, 85
Capture d'une ressource renouvelable, 92
Cardano, Girolano, 183
Cayley, Arthur, 205
Centre
 origine et, 242
 valeurs propres imaginaires pures, 283
Champ(s)
 de direction, 3-4, 5
 de pente, 3
Changements de variables
 équation d'Euler, 374-375, 380
 équation de Bernoulli, 52-53
 équation du premier ordre, 33
 équations linéaires du deuxième ordre, 98-100, 125
 intégrales définies, 352
 solutions en série, 362
Chargement en pente, 331
Chute libre, objet en, 1-3, 12-13
Circuits électriques, 157-159, 198, 202-203, 239
Coefficients
 constants, équation homogène à, 181-186
 de la série de Fourier, 416, 423-424, 430-431, 440, 444
 discontinus, 65

 indéterminés, méthode des, 15, 135-141, 189-191, 270-271, 274
Concavité des courbes-solutions, 85
Conditions initiales, 11
 équation caractéristique, 103
 modes propres de vibration, 246-247
 problème d'oscillation, 151
 problème de valeur initiale, 98, 175, 199-200
 problème de valeur limite, 407-408, 438, 440
Conditions limites, 408
 conduction de la chaleur, équations de, 438-440, 444, 447-448, 449-450
 corde vibrante, équation de l'onde, 453-456, 460-461
 équation de Laplace, 467
 non homogènes, 445-447, 473
 problème de Dirichlet, 467-469
 problème de valeur limite, 406
 problème de valeur propre, 410-412
Conduction de la chaleur
 dans une tige, 437-442, 447-450
 équations de, 404-407, 444-450
Constante
 d'Euler-Mascheroni, 394
 de séparation, 405, 439, 447, 450, 455, 468, 471
Convergence
 accélération de la, 428, 433
 d'une série de puissances, 349-351
 des intégrales, 303, 305-306
 théorème de convergence de Fourier, 423-426
Convolution
 noyau et, 148
 produit de, 341-345
 théorème de, 341-342

Corde vibrante
 avec un déplacement initial non nul, 454-458
 construction de l'équation de l'onde, 478-480
 équation d'onde, 453-461, 478-480
 justification de la solution, 458-459
 problème général pour la, 460-461
Courant, flux du, 157-159
Courbes-solutions, 11, 63-64
Croissance
 exponentielle, 82
 logistique, 83-87, 89-90
Cycloïde, 81

D

D'Alembert, Jean, 126, 404, 453
Dal Ferro, Scipione, 183
Décroissement logarithmique, 160
Delta de Dirac, fonction, 337
Demi-vie en radioactivité, 16, 76
Dépendance linéaire, 177-178, 216-218
Dérivées partielles
 classification des équations aux, 404
 généralités sur les équations aux, 403-407
 linéaires du deuxième ordre, 403
 méthode de séparation des variables, 404-407
 problèmes de valeur limite en deux points, 407-412
Déterminant wronskien, 110-115

Diagonalisation de la matrice, 255-257, 269-270, 274
 Diagramme de bifurcation, 95
 Diffusivité thermique, 405, 437, 477
 Dirac, Paul, 337
 Dirichlet, Peter Gustav, 467
 Dispersion d'onde, 465
 Divergence des intégrales, 303, 305

E

Échange de stabilité, 96
 Écoulement dans un aquifère, 475
 Écoulement de Poiseuille, 412
 Élimination de Gauss, 209
 Elliptique, équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, 404
 Ensemble fondamental de solutions, 111-113, 177, 225, 226-227
 Épidémies, 93-94
 Équation(s)
 à variables séparables, 27-35
 adjointe, 117-118
 algébriques linéaires, 213-222
 autoadjointes, 118
 autonomes, 81-82
 aux dérivées partielles, 17-18, 403-407, *voir aussi*
 Équations de Laplace
 d'Airy, 118, 320, 359-362, 379
 d'Euler, 125, 133, 371, 373-376, 380, 383, 388, 471
 d'Hermite, 364, 379
 d'onde, 18, 404, 453-461, 478-480
 de Bernoulli, 52-53
 de Bessel, 117, 118, 320, 355, 378, 379
 de Bessel d'ordre un, 384-385, 397-399
 de Bessel d'ordre un demi, 395-397
 de Bessel d'ordre zéro, 384, 392-395
 de conduction de la chaleur, 18, 405-407, 437-440
 de Gompertz, 92
 de la chaleur (conduction), 18, 404, 405-407, 437-440
 de Laplace, 25, 404, 466-472
 de Legendre, 117, 118, 320, 355, 367, 369-370, 377, 379, 384
 de Liénard, 302
 de Lotka-Volterra, 18
 de Riccati, 56-57
 de Tchebychev, 368, 384
 de Verhulst, 83
 différentielle ordinaire, 20-21
 du pendule, 19
 du potentiel, 466, *voir aussi* Équations de Laplace
 elliptique, 404
 exactes, 37-40, 117
 homogène, définition, 33, 98
 homogènes d'ordre supérieur, 176-177
 homogènes linéaires du deuxième ordre, 107-115, 129-130, 310-311
 hyperbolique, 404
 hypergéométrique, 390
 indicielle, 381, 383, 386-388, 392, 395-396, 397
 intégrale de Volterra, 346
 intégral-différentielles, 347
 linéaires, 19-20, 97
 linéaires d'ordre supérieur, 175-195
 linéaires du deuxième ordre, *voir* Équations
 différentielles
 linéaires du premier ordre, 44-51
 logistique, 83
 matricielle, 218, 410

non homogène, 98, 134-141, 179, 189-195
 non linéaires, 19-20, 57-64, 98
 proie-prédateur, 198
 sans variable dépendante/indépendante, 98-100
 systèmes d'équation linéaires de premier ordre, 197-298
 télégraphique, 480
 Équations différentielles, 1, 19
 avec des fonctions discontinues, 328-332
 classification des, 17-22
 d'ordre n , 175-179
 du deuxième ordre, 97-115
 du pendule, 19, 295-298
 du premier ordre, 27-90
 équation caractéristique, 102, 118-123, 126-129, 182
 équation d'Euler, 125, 133, 371
 historique et origines, 23-26
 homogènes à coefficients constants, 101-105, 129-130, 181-186, 229-236, 239, 259, 276
 homogènes du deuxième ordre, 101-115, 129-130
 homogènes du premier ordre, 33-34
 intégrale/intégrale première, 63
 linéaires non homogènes, 98, 134-147, 179, 189-195, 200, 224, 268-274
 non linéaires, 19-20, 98, 200
 non linéaires et stabilité, 287-298
 ordinaires, définition, 17-18, 97, 197
 parabolique, 404
 point ordinaire, 365
 point singulier, 365, 371, 373, 375-376
 réduction d'ordre, 130-131, 179
 solutions aux, *voir* Solutions générales aux équations
 différentielles
 théorie fondamentale, 224-227
 transformées de Laplace et, 305-306, 310-312, 317-318
 variation des paramètres, 55, 143-147, 193-195, 272-274
 Équilibre
 écologique, 198
 instable, solution d', 86
 semi-stable, solution d', 91
 solution d', 3-4, 5
 Erreurs des séries de Fourier, 419-420, 426
 Euler, Léonard, 25, 56, 404, 453, 466
 équation d'Euler, 125, 133, *voir aussi* Équations
 formule d'Euler, 118-119, 141, 186
 Exponentielle
 d'une matrice, 254-255, 263
 d'un nombre complexe, 118-120
 Exposants à la singularité, 381, 386

F

Facteur intégrant, 41-42, 45-51, 58, 68
 Ferrari, Ludovico, 183
 Fonction(s)
 analytique, 352, 365, 386, 390
 continue par morceaux, 304-305, 423-426
 d'onde, 328
 d'ordre exponentiel, 306
 de Bessel d'ordre un, 398-399
 de Bessel d'ordre un demi, 395-397
 de Bessel d'ordre zéro, 392-395
 de contrainte périodiques, 427
 de Heaviside, 321
 de taux, 4
 de transfert, 345
 delta, 337
 discontinues, équations différentielles avec, 328-332
 gamma, 309

- homogène de degré n , 33
- impaire, 429-430
- impulsion, 335-339
- linéairement dépendantes/indépendantes, 177-179
- matricielles, 210-211
- mutuellement orthogonales, 415
- paire, 429-430
- périodiques, 414-420, 432-433, 456, 459
- propres, 406, 410-411
- unité échelon, 321-325
- Force
 - d'amortissement, 149-150
 - de gravité, 2, 150
 - externe, 151
- Formes de Jordan, 263-264, 270
- Formule
 - d'Abel, 132, 181, 194, 226
 - d'Euler, 118-119, 141, 186
 - d'Euler-Fourier, 415-416, 423, 429
 - de Rodrigues, 370
- Fourier
 - formule d'Euler-Fourier, 415-416, 423, 429
 - séries de, 413-426
 - théorème, 415
 - théorème de convergence de, 423-426
- Fourier, Joseph, 413, 437
- Foyer spirale, 281
- Fréquence naturelle
 - d'oscillation, 153
 - d'une corde vibrante, 456
- Frobenius, Ferdinand, 276, 380
- Frobenius, George, 205
- Fuchs, Immanuel Lazarus, 366

G

- Galois, Évariste, 183
- Gauss, Carl Friedrich, 182, 209
- Gibbs, Josiah Willard, 426
- Gravité, force de, 2, 150

H

- Heaviside, Oliver, 305
 - fonction de Heaviside, 321
- Hermite, Charles, 205, 364
- Histoire des équations différentielles, 23-26
- Homothétie, 256
- Hooke, Robert, 149
- Hyperbolique, équation aux dérivées partielles
 - du deuxième ordre, 404

I

- Identité, matrice, 208
- Identité de Parseval, 428, 435, 465
- Impulsion, fonctions, 335-339
- Impulsion, réponse d', 345
- Incidence de petites perturbations, 290-291
- Indépendance linéaire, 177-179, 216-218
 - solutions d', 363, 366, 371, 373, 376, 389, 397
- Indice, translation de l', 352-353
- Instabilité, *voir aussi* Stabilité
 - des équations différentielles non linéaires, 288-289
 - des systèmes linéaires, 284, 295
- Intégrale(s)
 - elliptique, 301
 - impropres, 303-304
 - produit de convolution et, 341-345

- Intérêts composés, exemple, 69-71

- Intervalle

- de convergence, 350

- de définition, 61-62

- Inverse de matrice, 208-210

J

- Jordan, Camille, 205

- Jordan, formes de, 263-264, 270

K

- Kirchhoff, Gustav, 158

L

- Lagrange, Joseph-Louis, 25, 143, 437, 453

- Laguerre, Edmond Nicolas, 384

- Laplace, équation de, 466-472

- Laplace, Pierre-Simon de, 25, 466

- Laplace, transformées de

- d'une onde carrée/en dents de scie/sinusoidale, 327-328

- de la fonction delta de Dirac, 337-338

- définition, 303-308

- des dérivées, 311

- existence, théorème, 306

- fonction impulsion, 335-339

- fonctions discontinues, 328-332

- fonctions unités échelons, 321-325

- formule de translation, 323, 325

- inverses, 313-314

- produit de convolution, 341-345

- systèmes d'équations différentielles, 317-318

- Legendre, Adrien-Marie, 369

- Leibniz, Gottfried Wilhelm, 23-24, 45, 52, 81, 435

- L'Hospital, Marquis de, 81

- Libby, Willard F., 76

- Liénard, Alfred-Marie, 302

- Ligne de phase, 84

- Linéarisation, 19-20

- Logiciels de calcul, 21

- Loi

- de Hooke, 149-150

- de Kirchhoff, 158

- de Newton, 2, 150

- de Stokes, 79

- Longueur d'onde d'une corde vibrante, 456-457

M

- Malthus, Thomas, 82

- Mascheroni, Lorenzo, 394

- Masse-ressort, système, 149-152, 162-164, 197, 198-199, 244-246, 316

- Matrice(s), 205-211

- addition des, 206

- adjointe, 205

- augmentée, 214-216

- autoadjointes (hermitiennes), 221

- conjuguée, 205

- diagonalisables, 255-257

- égalité des, 206

- élimination de Gauss, 209

- fondamentales, 251-257, 262-263

- forme de Jordan d'une, 263-264, 270

- hermitiennes (autoadjointes), 221

- identité, 208

- inversible/non inversible, 208-209

- jacobienne, 294

multiplication des, 206-208
 propriétés des, 206-208, 408
 réduction des, 209
 singulière/non singulière, 208
 soustraction des, 206
 transposée, 205
 valeurs propres des, 218-222, 235-236, 410-411
 zéro, 206
 Membrane élastique, équation d'onde, 465
 Méthode
 de facteur intégrant, 41-42, 45-51
 de Frobenius, 380-382
 de l'annihilateur, 192
 de la diagonalisation, 270-271, 274
 de résolution par élimination, 201
 des coefficients indéterminés, 135-141, 189-191, 270-271, 274
 de séparation des variables, 404-407, 449-450
 de transformées, *voir* Laplace, transformées de
 de variation des paramètres, 143-147, 193-195, 272-274
 numérique/analytique, 376
 Millikan, Robert Andrews, 80
 Modèle
 construction et analyse, 6, 66
 de Schaefer, 93
 du seuil critique, 87-90
 Modèle mathématique
 définition, 1
 équations du premier ordre, 65-74, 197-199
 étapes de construction du, 6
 inexactitude du, 13-14
 Modulation d'amplitude, 169
 Mouvement harmonique simple, 153
 Mouvement suramorti, 156
 Multiplication de matrices/vecteurs, 206-208
 Multiplicité géométrique de la valeur propre, 220

N

Neumann, Karl Gottfried, 467
 Newton, Isaac, 23-24
 deuxième loi, 2
 loi du mouvement, 150
 Niveau
 critique, 88
 de saturation, 85
 Nœud
 impropre, 262
 impropre/dégénéré, 280
 propre/étoilé, 279
 valeurs propres réelles, 234, 277, 278
 Nombres complexes, 114, 118-121
 Noyau
 convolution de, 148
 de la transformée intégrale, 305

O

Objet en chute libre, 1-3, 12-13
 Observation du modèle mathématique, 67-74
 Onde
 carrée, 327, 425-426
 dispersive, 465
 en dents de scie, 328, 431-432
 équation d', 18, 404, 453-461, 478-480
 fonction d', 328
 triangulaire, 417, 419-420, 432-433

Opérateur
 différentiel, 107
 linéaire, transformée de Laplace, 307
 Ordre
 d'une équation différentielle, 18
 n, équations d', 175-195
 réduction d', 130-131
 Orthogonalité
 des fonctions sinus et cosinus, 415
 des vecteurs, 208
 propriété d', 370, 401
 Oscillations
 forcées avec amortissement, 162-168
 forcées sans amortissement, 169-171
 libres amorties/non amorties, 152-157
 mécaniques, 149-152

P

Parabolique, équation aux dérivées partielles du deuxième ordre, 404
 Paramètres, variation des, 55, 143-147, 193-195, 272-274
 Parseval, Marc-Antoine, 428
 Pendule amorti, 293-294, 295-298
 Pente
 champ de, 3
 chargement en, 331
 Période du mouvement, 153, 155
 Périodicité des fonctions sinus et cosinus, 414
 Perturbations, incidence de petites, 290-291
 Phase
 angle de, 153
 ligne de, 84
 plan/portrait de, 229
 Phénomène de Gibbs, 426, 432
 Plan de phase, 229, 276-284
 Poincaré, Henri, 276
 Point(s)
 critiques, 83, 276, 284, 288-289
 critiques asymptotiquement stables, 288
 critiques globalement asymptotiquement stables, 298
 critiques isolés, 292
 de bifurcation, 94-95, 239
 de discontinuité d'une fonction, 418, 424-426, 445, 459
 de selle, 232, 278
 ordinaire, 364-368
 singulier, 356, 365, 371-377
 singulier irrégulier, 376
 singulier régulier, 371, 375-376, 379-390
 spirale, 242, 281-282
 Poiseuille, Jean Louis Marie, 412
 Polynôme
 approximation de fonction, 358, 360, 361, 393
 caractéristique, 182, 183
 d'Hermite, 364
 de Laguerre, 384
 de Legendre, 370
 de Tchebychev, 369
 point ordinaire, solutions en série, 355, 364-368
 point singulier régulier, solutions en série, 379, 383, 387
 Population
 capture d'une ressource renouvelable et, 92
 croissance ou décroissance, 81-90
 modèle de, 5-6, 9-10, 12, 66
 Portrait de phase, 229, 277
 Principe de superposition, 109, 224-225

Problème

- de conduction de la chaleur, 437-450
- de Dirichlet pour un cercle, 470-472
- de Dirichlet pour un rectangle, 467-469
- de la corde vibrante, 453-461
- de Neumann, 467, 473-474
- de valeur initiale, *voir* Problème de valeur initiale
- de valeur limite, *voir* Problème de valeur limite
- de valeur propre, 410-412
- homogène, 408-409
- mélange, 67-68
- non homogène, 408-409
- objet en chute libre, 1-3, 12-13
- proie-prédateur, 198

Problème de valeur initiale

- conduction de la chaleur, 438-440
- définition, 11
- équation différentielle du deuxième ordre, 98, 108-109, 111, 138-139
- équation différentielle du premier ordre, 30-31
- existence et unicité des solutions, 57-62
- systèmes d'équations différentielles, 252-255
- transformée de Laplace et, 344

Problème de valeur limite

- en deux points, 407-412
- équation d'onde, 454-461
- équation de conduction de la chaleur, 438, 445-446
- équation de Laplace, 467-472

Produit

- de convolution, 341-345
- scalaire, 207, 415

Prolongement périodique pair/impair, 432-433, 436, 459

Puits spirale, 281

Pulsation, 169-170, 334

Q

Quasi-fréquence, 155-156

Quasi-période, 155-156

R

Rayon de convergence, 350-351

Réactions chimiques, 96

Réduction

- d'ordre, 130-131, 179
- de Gauss, 209
- des systèmes d'équations, 216, 252, 273

Relation de récurrence, 357, 359-360, 362, 380-381, 386, 392-393, 396-399

Rendement équilibré maximal, 93

Réponse

- d'impulsion, 345
- forcée d'une oscillation, 165

Résonance, 166, 170, 171, 334

Ressort, force d'un, 150

Riccati, Jacopo Francesco, 56

Rodrigues, Benjamin Olinde, 370

S

Saturation, niveau de, 85

Schrödinger, Erwin, 337

Séparation des variables

- méthode de, 404-407
- pour l'équation de Laplace, 470-471
- pour la conduction de la chaleur, 438-439, 447, 449-450
- pour la corde vibrante, 455

Série(s)

- de cosinus, 430, 432
- de Fourier, 413-426
- de Fourier plus spécialisées, 436
- de Fourier sinus/cosinus, 430, 431
- de puissances, propriétés des, 349-352
- de Taylor, 119, 293, 352
- équation de Bessel, solutions en, 392-399
- équation indicelle, 381, 383, 386-388
- équations d'Euler, solutions en, 371-375
- point singulier régulier, solutions en, 375-377
- près d'un point ordinaire, solutions en, 355-368
- près d'un point singulier régulier, 379-383, 385-390
- relation de récurrence, 357, 359-360, 362, 380-381, 386, 392-393, 396-399

Seuil

- critique, 87-89
- croissance logistique avec, 89-90

Singularités à l'infini, 379

Sinus, périodicité/orthogonalité, 414-415

Solution(s)

- asymptotiquement stable, 86-87, 90
- aux problèmes de valeur initiale, 310-318, 331-332, 338-339, 344-345
- complémentaire, 135
- d'équilibre, 3-4, 5, 83, 276, *voir aussi* Points critiques
- d'équilibre instable, 86
- d'équilibre semi-stable, 91
- en série aux équations du deuxième ordre, 349-399, *voir aussi* Série(s)
- existence et unicité, 57-61
- générale, 62, 111, 177, 225
- générale, définition, 11-12
- implicites, 62-63
- particulière, équation non homogène, 134-138, 139, 140-141, 144-147
- permanente d'une oscillation, 165
- près d'un point singulier régulier, 379-390
- transitoire d'une oscillation, 164-165

Solutions générales aux équations différentielles

- avec racines complexes, 182-186
- d'un système non homogène, 268-269
- du premier ordre, 30, 62-63
- ensemble fondamental de solutions, 111-115, 177, 225
- homogènes à coefficients constants, 103-105
- homogènes du deuxième ordre, 129-130
- matrice fondamentale, 252
- modèles mathématiques, 9-14
- non homogènes, 134-135, 139, 179
- ordinaires, 20-21
- près d'un point singulier régulier, 379-390
- valeurs propres complexes, 243, 281
- valeurs propres réelles/égales, 277-280
- variation des paramètres, 146, 193, 272-273

Spirale, point, 281-282

Stabilité

- des équations différentielles non linéaires, 287-298
- des systèmes linéaires, 284, 295
- échange de, 96
- globalement asymptotiquement stable, 298
- instable, solution d'équilibre, 86-87, 90
- semi-stable, solution d'équilibre, 91

Stokes, George Gabriel, 79

Superposition, principe de, 109, 224-225

Sylvester, James, 205

Systèmes

- d'équations algébriques linéaires, 213-222
- d'équations différentielles, 18, 317-318
- d'équations linéaires du premier ordre, 197-298
- de matrices, 408
- héréditaires, 342
- homogènes/non homogènes, 200, 213-214, 229-236
- linéaires, plan de phase, 276-284
- linéaires homogènes à coefficients constants, 229-236
- linéaires non homogènes, 268-274
- localement linéaires, 290, 292
- masse-ressort, 149-152, 162-164, 197, 198-199, 244-246, 316
- non linéaires, approximation linéaire, 200, 291-295
- stabilité/instabilité, 284, 288-289, 295

T

Tautochrone, 347-348

Taux

- de croissance, 5-6, 82
- de croissance intrinsèque, 83
- de décroissance, 82
- de désintégration, 16, 76
- fonction de, 4

Taylor, Brook, 293

Tchebychev, Pafnouti L., 368

Température

- conditions limites non homogènes, 445-447
- problème de conduction de la chaleur, 441-442

Théorème

- d'Abel, 114-115, 226
- convergence des séries infinies, 305
- de convergence de Fourier, 423-426
- de convolution, 341-342, 345
- ensemble fondamental de solutions, 227
- équation différentielle exacte, 38-40
- équation non homogène, 134-135
- équations d'ordre n , 177
- existence/unicité des solutions, 58, 59, 176, 200, 355-356
- indépendance linéaire, 178-179
- principe de superposition, 109, 224-225
- problème de valeur initiale, 108
- solution à valeurs complexes, 114, 227
- solution générale, 111, 112, 225-226
- solutions en série aux équations du deuxième ordre, 366, 389-390
- stabilité du point critique, 290
- système localement linéaire, 294-295
- transformée de Laplace, 306, 310-311, 323, 325
- variation des paramètres, 146
- wronskien, 110, 226

Théorie

- fondamentale, systèmes d'équations linéaires du premier ordre, 224-227
- générale des équations d'ordre n , 175-179

Tige solide

- avec des extrémités isolées, 447-449
- conduction de la chaleur dans une, 437-442
- méthode de séparation des variables, 449-450

Trajectoire, 277

Transfert, fonction de, 345

Transformées

- de Laplace, 303-345, voir aussi Laplace, transformées de

intégrales, 305-308

inverses, 306, 313-314

Translation

- de fonction, 323
- de l'indice de sommation, 352-353

U

Unicité, 21

- des solutions à un problème de valeur initiale, 57-61
- théorème d'existence et d', 58, 59, 176, 200, 355-356

Unité échelon, fonction, 321-325

V

Valeur initiale

- problème de, 11, 108-109
- solution aux problèmes de, 310-318, 331-332, 338-339, 344-345
- théorème de, 108

Valeur(s) propre(s), 218

- complexes, 239-247, 281-282
- de la matrice, 218-222, 235-236
- de multiplicité trois, 266
- égales, 279-280
- imaginaires pures, 283-284
- méthode de séparation des variables, 406
- multiples, 259-264
- problèmes de, 410-412
- réelles de signes opposés, 278
- réelles distinctes/du même signe, 277-278
- simple, 220-222
- stabilité des systèmes linéaires, 284

Variables

- changements de, voir Changements de variables
- dépendantes/indépendantes, 197
- méthode de séparation des, 404-407
- séparables, équations à, 27-35
- transformées de Laplace, 306, 313, 323, 325, 342

Variation des paramètres, 55, 143-147, 193-195, 272-274

Vecteurs

- linéairement dépendants/indépendants, 216-218
- multiplication des, 207-208
- normalisés, 220
- orthogonaux, 208, 415
- propres, 218-222, 235
- propres généralisés, 262
- propres indépendants, 279-280

Verhulst, P. F., 83

Vibration(s)

- d'un système masse-ressort, 188
- de la corde vibrante, 453-461, 478-480
- mécaniques, 316, 321
- modes propres de, 246-247

Vitesse

- de convergence, 428, 433
- de libération, 73-74
- de propagation des ondes, 453, 480

W

Weber, Heinrich, 394

Wronski, Joseph Maria Hoëné-, 110

Wronskien

- des matrices, 225-227, 232, 235, 241
- équations homogènes d'ordre supérieur, 176-179
- équations homogènes du deuxième ordre, 110-115, 121, 128, 146
- théorème d'Abel et, 114, 194, 226

Aide-mémoire

Dérivation

Règles

$$(c_1 u + c_2 v)' = c_1 u' + c_2 v' \quad (c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des constantes})$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \quad (\text{dérivation en chaîne})$$

Formules

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

$$(e^u)' = e^u u'$$

$$(a^u)' = \ln(a) a^u u' \quad (a > 0)$$

$$(\ln |u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\sin(u))' = u' \cos(u)$$

$$(\cos(u))' = -u' \sin(u)$$

$$(\tan(u))' = u' \sec^2(u)$$

$$(\cot(u))' = -u' \csc^2(u)$$

$$(\sinh(u))' = u' \cosh(u)$$

$$(\cosh(u))' = u' \sinh(u)$$

$$(\sec(u))' = u' \sec(u) \tan(u)$$

$$(\csc(u))' = -u' \csc(u) \cot(u)$$

$$(\arcsin(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$$

Intégration

Règles

$$\int (c_1 f(u) + c_2 g(u)) du = c_1 \int f(u) du + c_2 \int g(u) du \quad (c_1 \text{ et } c_2 \text{ sont des constantes})$$

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (\text{intégration par parties})$$

Formules

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| + c$$

$$\int e^u du = e^u + c$$

$$\int \sin(u) du = -\cos(u) + c$$

$$\int \cos(u) du = \sin(u) + c$$

$$\int \sec^2(u) du = \tan(u) + c$$

$$\int \csc^2(u) du = -\cot(u) + c$$

$$\int \tan(u) du = -\ln |\cos(u)| + c$$

$$\int \cot(u) du = \ln |\sin(u)| + c$$

$$\int \sec(u) du = \ln |\sec(u) + \tan(u)| + c$$

$$\int \csc(u) du = \ln |\csc(u) - \cot(u)| + c$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 + a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 - a^2} \right| + c$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

Identités trigonométriques

$$\sin^2(u) + \cos^2(u) = 1$$

$$\cos(-u) = \cos(u)$$

$$\sin(-u) = -\sin(u)$$

$$\sin(u+v) = \sin(u)\cos(v) + \cos(u)\sin(v)$$

$$\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$$

$$\cos(u)\sin(v) = \frac{1}{2} [\sin(u+v) - \sin(u-v)]$$

$$\cos(u)\cos(v) = \frac{1}{2} [\cos(u+v) + \cos(u-v)]$$

$$\sin(u)\sin(v) = \frac{1}{2} [\cos(u-v) - \cos(u+v)]$$

Voici enfin la 2^e édition en français d'un classique des mathématiques conçu pour les étudiants des programmes universitaires de 1^{er} cycle en génie et en mathématiques. Réorganisé pour satisfaire les besoins actuels de cette clientèle, l'ouvrage se divise maintenant en huit chapitres, lesquels combinent toujours un solide exposé théorique et d'abondantes explications pratiques.

Tout a été pensé pour faciliter l'apprentissage: de nombreux problèmes riches et variés, des méthodes de résolution et d'analyse éprouvées, une orientation vers les nouvelles technologies pour favoriser la compréhension intuitive des concepts présentés, des notes historiques pour mieux cerner le développement de ces concepts et connaître les principaux mathématiciens qui les ont élaborés.

WILLIAM E. BOYCE a obtenu son baccalauréat en mathématiques au Collège Rhodes et sa maîtrise et son doctorat en mathématiques à l'Université Carnegie-Mellon. Il est membre de plusieurs associations de mathématiques et de mathématiques appliquées. Il a écrit de nombreux articles sur les problèmes de valeur limite et sur les équations différentielles aléatoires et leurs applications. Il est l'auteur de divers ouvrages, dont deux sur les équations différentielles. Il a également écrit, en collaboration, un ouvrage sur l'utilisation de Maple pour résoudre des problèmes de calcul différentiel et un cahier de laboratoires sur les équations différentielles.

RICHARD C. DIPRIMA, décédé en 1984, a obtenu sa licence, sa maîtrise et son doctorat en mathématiques à l'Université Carnegie-Mellon. Il s'est joint à la faculté de l'Institut polytechnique de Rensselaer après avoir effectué des recherches au Massachusetts Institute of Technology (MIT), à l'Université Harvard et à la Hughes Aircraft. Il a occupé plusieurs postes dans différentes associations et sociétés de mathématiques et de mathématiques appliquées. Il a été l'auteur de nombreux articles techniques sur la stabilité hydrodynamique et la théorie de la lubrification ainsi que de deux manuels sur les équations différentielles et les problèmes de valeur limite.

DONATIEN N'DRI a obtenu sa licence en mathématiques à l'Université de la Côte-d'Ivoire, sa maîtrise en mathématiques à l'Université Laval et son doctorat en mathématiques de l'ingénieur à l'École polytechnique de Montréal, où il enseigne depuis 2002. L'axe principal de ses activités de recherche porte sur le développement et la justification de méthodes d'éléments finis pour la simulation numérique d'écoulements dans le cadre d'applications médicales et industrielles.