

Erik Thomas

De la **MPSI** à
l'agrégation

44 problèmes olympiens de mathématiques



ellipses

Références sciences

44 problèmes olympiens de mathématiques

Problèmes corrigés de la MPSI à l'agrégation

Erik Thomas



Avant-propos

Pourquoi un tel ouvrage ?

Lorsque j'étais moi-même en MPSI, nous recevions nos devoirs maison les vendredis matin. À chaque fois, je me demandais ce que le professeur allait nous faire découvrir, quel résultat allait-on démontrer ou quelle théorie allait-on entrevoir.

Depuis, ayant acquis des connaissances, je vais essayer de faire la même chose : partager quelques morceaux intéressants de Mathématique, vous faire découvrir de jolis résultats.

La plupart de ces problèmes ne sont pas d'un accès facile, ils intéresseront en premier lieu les candidats qui visent les plus grandes écoles.

Ils pourront intéresser plus globalement tout public ayant un niveau de la MPSI jusqu'à l'Agrégation et qui aime chercher !

Comment utiliser un tel ouvrage ?

Ce livre *n'est pas* un livre de cours. Vous n'y apprendrez pas à faire un développement limité, à montrer qu'une application est linéaire ou à faire une intégration par parties. Ces indispensables connaissances seront supposées acquises.

Si ce n'est pas le cas, retravaillez les méthodes élémentaires, vous ne profiterez que plus des problèmes posés par la suite !

Si vous vous sentez prêts, parfait !

Ce livre est un recueil de problèmes de niveau MPSI, c'est-à-dire que leurs résolutions mobilisent seulement le programme de MPSI ; en particulier, toutes les notions nouvelles utilisées sont définies.

Certains de ces problèmes nécessitent dans leurs résolutions un important travail de recherche et d'obstination. Si vous ne trouvez pas une solution, cherchez encore. Si vous ne trouvez toujours pas, fermez le livre et revenez-y quelques jours plus tard.

Si c'est en forgeant que l'on devient forgeron, c'est en cherchant que l'on progresse en résolution de problèmes, que l'esprit s'aiguise pour les aborder et que l'on gagne en rapidité.

Les problèmes sont indépendants entre eux, mais il peut être parfois utile de traiter un problème pour mieux aborder un autre. De plus, dans certains problèmes, des résultats sont admis (généralement pour ne pas allonger davantage le problème) et prouvés dans un autre problème.

La majorité des problèmes proposés sont intéressants (je ne le dis pas seulement parce que je les ai écrits !) parce qu'ils vous feront découvrir des résultats intéressants, importants. Peut-être certaines idées rencontrées ici vous seront utiles pour les concours ?

Je vous souhaite du plaisir à travailler sur ces problèmes, en tout cas autant que j'en ai eu à les rédiger !

Une bibliographie est donnée en fin d'ouvrage pour permettre d'approfondir les problèmes.

Notations utilisées

Les notations utilisées dans ce livre sont les notations usuelles.

Rappelons-en certaines :

1. les lettres \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} et \mathbf{C} désignent respectivement l'ensemble des entiers naturels, l'ensemble des entiers relatifs, l'ensemble des nombres rationnels, l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des nombres complexes ;
2. i est le complexe de module 1 et d'argument principal $\frac{\pi}{2}$. On veillera à ne pas le confondre avec un éventuel indice i ;
3. si $x \in \mathbf{R}$, $[x]$ désigne la partie entière de x ;
4. \mathbf{P} désigne l'ensemble des nombres premiers ;
5. si $z \in \mathbf{C}$, $\Re(z)$ et $\Im(z)$ désignent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de z ;
6. si a et b sont deux entiers relatifs, $a \wedge b$ est le PGCD de a et b ;
7. si E est un ensemble fini, $\text{card}(E)$ est le nombre d'éléments de E ;
8. si $n \in \mathbf{N}^*$, \mathcal{S}_n est le groupe symétrique de l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$: c'est l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Plus généralement, si E est un ensemble non vide, on note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des bijections de E dans E ;
9. si E est un ensemble, $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de ses parties ;
10. si $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ et I un intervalle de \mathbf{R} , on note $\mathcal{C}^k(I, \mathbf{R})$ (ou plus simplement $\mathcal{C}^k(I)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'ensemble des fonctions définies sur I , k fois dérivable sur I et la dérivée k -ième est continue sur I ;
11. si f est une application linéaire, $\ker(f)$ et $\text{im}(f)$ désignent respectivement le noyau et l'image de f ;
12. si E est un \mathbf{K} -espace vectoriel, $\mathcal{L}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes de E ;
13. si n et p sont deux entiers naturels non nuls et \mathbf{K} un corps, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathcal{G}l_n(\mathbf{K})$, $\mathcal{S}l_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbf{K})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices à coefficients dans \mathbf{K} ayant n lignes et p colonnes, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n inversibles à coefficients dans \mathbf{K} , l'ensemble des matrices carrées d'ordre n de déterminant égal à 1 à coefficients dans \mathbf{K} et l'ensemble des matrices symétriques à coefficients dans \mathbf{K} ;
14. si n est un entier naturel non nul, les ensembles $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbf{R})$ désignent respectivement l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n à coefficients dans \mathbf{R} et l'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n à coefficients dans \mathbf{R} de déterminant 1 ;
15. la lettre \mathbf{P} désigne une probabilité sur un espace probabilisé Ω ;
16. les lettres \mathbf{E} et \mathbf{V} sont utilisées pour l'espérance et la variance d'une variable aléatoire.

Table des matières

Avant-propos	3
Notations utilisées	5
1 Inégalités classiques	9
2 Découverte des infinis	31
3 Discussion autour de deux axiomes	41
4 Géométrie du triangle	53
5 Coloriage sur les graphes	61
6 Développement en fraction continue	71
7 Étude de la suite logistique	85
8 Théorème de Coppel	107
9 Le système proie-prédateur	117
10 Anneau des fonctions arithmétiques	137
11 Nombres transcendants	147
12 Réseaux	161
13 Formule du crible, applications	179
14 Théorème des deux carrés	191
15 Sur les racines des polynômes	203
16 Sur les polynômes symétriques	221
17 Sur le rang des matrices	231
18 Réduction	243
19 Nombres complexes et groupe diédral	257
20 Groupes et algèbre linéaire	273
21 Algèbre linéaire avec les rationnels	287
22 Résultant de deux polynômes	301

23	Approximation numérique	319
24	Convexité du déterminant	335
25	Théorème d'approximation de Weierstrass	347
26	Une introduction aux fonctions convexes	371
27	Inégalité isopérimétrique	387
28	Décomposition en mille-feuille	403
29	Sur les suites convexes	415
30	Théorème de convergence dominée	427
31	Topologie et espaces complets	449
32	Autour de Fourier	471
33	Introduction à la théorie des distributions	483
34	Sur le « mélange » des décimales d'un réel	505
35	Inégalités de Wirtinger	523
36	Réduction des matrices symétriques réelles	539
37	Sur les quaternions	553
38	Autour de la convexité	571
39	Inversibilité de matrices aléatoires	591
40	Étude de l'opérateur diagonal	597
41	La méthode probabiliste	613
42	Convergence et probabilité	621
43	Inégalités de Khintchine	633
44	Inégalité de Hoeffding	649

Thème 1

Inégalités classiques

Thèmes abordés : Inégalité arithmético-géométrique, inégalité de Jensen, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité de Hölder, inégalité de Minkowski.

Difficulté : ■■□□□

Ce sujet présente des inégalités, qui sont parmi les plus importantes des Mathématiques, à savoir l'inégalité arithmético-géométrique, l'inégalité de Jensen, l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité de Hölder et l'inégalité de Minkowski.

Les techniques utilisées sont élémentaires : le sujet est accessible avec un niveau de fin de classe de Terminale.

Les parties de ce problème sont largement indépendantes les unes des autres.

1.1 Inégalité arithmético-géométrique

Le but de cette partie est de donner plusieurs preuves de l'inégalité arithmético-géométrique.

Proposition. *Inégalité arithmético-géométrique.*

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$. Alors,

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k. \quad (1.1)$$

Cette inégalité est une égalité si, et seulement si, $x_1 = \dots = x_n$.

Nous donnerons aussi des applications de cette inégalité.

1.1.1 Une première preuve

1. Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2$. Montrer que

$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y).$$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $(x_1, \dots, x_{2^n}) \in (\mathbf{R}_+)^{2^n}$,

$$\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{1/2^n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} x_k.$$

3. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Montrer qu'il existe $j \in \mathbf{N}$, unique, tel que

$$2^j \leq n < 2^{j+1}.$$

4. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$. Soit $m = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$.

En considérant le 2^k -uplet $(x_1, \dots, x_n, m, \dots, m) \in (\mathbf{R}_+)^{2^k}$ pour une « bonne » valeur de k , terminer la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

1.1.2 Une seconde preuve : en utilisant une inégalité de concavité

5. Montrer que

$$\forall t > 0, \quad \ln(t) \leq t - 1.$$

6. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ tel que $\prod_{k=1}^n x_k = 1$. Montrer que

$$1 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

7. Terminer la preuve de l'inégalité arithmético-géométrique.

1.1.3 Applications

8. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$.

Montrer l'inégalité entre la moyenne géométrique et la moyenne harmonique :

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k \right)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}}.$$

9. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ tel que $\prod_{k=1}^n x_k = 1$. Montrer que

$$\prod_{k=1}^n (x_k + 2) \geq 3^n.$$

1.2 Inégalité de Jensen

Définition. *Fonction convexe.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

On dit que f est convexe sur I si :

$$\forall t \in [0, 1], \forall (x, y) \in I^2, \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

10. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbf{R}_+)^n,$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right) \implies \left(f \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \right).$$

Indication : On pourra procéder par récurrence sur n . On écrira astucieusement $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k$ pour se ramener à la définition d'une fonction convexe.

11. Soit I un intervalle de \mathbf{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable telle que f' soit continue et croissante sur I .

Montrer que f est convexe sur I .

Indication : On pourra introduire la fonction g définie sur $[0, 1]$ par

$$g(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty),$$

montrer que g est dérivable, g' continue sur $[0, 1]$ et utiliser

$$\forall (a, b) \in [0, 1]^2, \quad g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t) dt.$$

12. En déduire que les fonctions $x \in \mathbf{R} \mapsto e^x$ et $x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto -\ln(x)$ sont convexes.

13. *Une application.* Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ non nul.

(a) Montrer que si $t \geq 1$, alors la fonction $x \mapsto x^t$ est convexe sur \mathbf{R}_+^* .

(b) Montrer que la fonction $p \in [1, +\infty[\mapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$ est croissante sur $[1, +\infty[$.

(c) En déduire que la fonction $p \mapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$ admet une limite en $+\infty$. Exprimer cette limite en fonction des x_k .

1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Le but de cette partie est d'établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition. *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$.

Alors,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}. \quad (1.2)$$

De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement s'il existe un réel λ tel que $b = \lambda a$ ou $a = \lambda b$.

Nous proposons plusieurs preuves de cette inégalité.

1.3.1 Une preuve élémentaire

14. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz lorsque, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b_k = 0$.

15. On suppose maintenant qu'il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $b_j \neq 0$.

En considérant la fonction $f : t \in \mathbf{R} \mapsto \sum_{k=1}^n (a_k + t b_k)^2$, terminer la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

16. Étudier le cas d'égalité dans (1.2).

1.3.2 Une autre preuve

17. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz par récurrence.

1.3.3 Une dernière preuve !

18. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

19. Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Indication : On pourra commencer par supposer $\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 = 1$.

1.3.4 Applications

20. Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

21. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}} \sqrt{2n+1}.$$

1.4 Inégalité de Hölder

Dans cette partie, nous prouvons et donnons des applications de l'inégalité de Hölder.

Proposition. *Inégalité de Hölder.*

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$. Alors,

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}. \quad (1.3)$$

1.4.1 Preuve

Soient p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

22. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad xy \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}.$$

Indication : On pourra utiliser la convexité de la fonction $x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto -\ln(x)$ établie à la question 12.

23. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$.

Montrer l'inégalité de Hölder dans le cas où $\sum_{k=1}^n |a_k|^p = \sum_{k=1}^n |b_k|^q = 1$.

24. Terminer la preuve de l'inégalité de Hölder.

25. Étudier le cas d'égalité de l'inégalité de Hölder.

1.4.2 Applications

26. Soit $(p, q) \in [1, +\infty[^2$ et soit $r \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$. Montrer la généralisation suivante de l'inégalité de Hölder

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k|^r \right)^{1/r} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

27. Soient p et q deux réels tels que $0 < p < 1$ et $q < 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$. En appliquant judicieusement l'inégalité de Hölder, montrer l'inégalité suivante dite de Hölder « inversée »

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

1.5 Inégalité de Minkowski

Le but de cette partie est de montrer l'inégalité de Minkowski.

Proposition. *Inégalité de Minkowski.*

Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$. Alors,

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}. \quad (1.4)$$

1.5.1 La preuve

28. Montrer l'inégalité de Minkowski lorsque $p = 1$.

29. On suppose $p > 1$.

Soient $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$.

En majorant la somme $\sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k)^{p-1}$, montrer l'inégalité de Minkowski.

1.5.2 Une inégalité de Minkowski « inversée »

30. Soit $p \in]0, 1[$.

Soient $a = (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbf{R}_+^*)^n$.

Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p}.$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Hölder « inversée ».

Correction du Thème 1

1. Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2$. On remarque que $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 = x - 2\sqrt{xy} + y \geq 0$. Il s'ensuit que $\boxed{\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)}$.
2. Soit, pour $n \in \mathbf{N}$, la proposition

$$\mathcal{P}_n : \left\langle \forall (x_1, \dots, x_{2^n}) \in (\mathbf{R}_+)^{2^n}, \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{1/2^n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} x_k \right\rangle.$$

La proposition \mathcal{P}_0 est vraie et la proposition \mathcal{P}_1 d'après la question 1. Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un entier naturel n , montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Soit $(x_1, \dots, x_{2^{n+1}}) \in (\mathbf{R}_+)^{2^{n+1}}$. On remarque que

$$\left(\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k \right)^{1/2^{n+1}} = \left(\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{1/2^n} \left(\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k \right)^{1/2^n} \right)^{1/2}.$$

En utilisant la question 1, on a

$$\left(\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k \right)^{1/2^{n+1}} \leq \frac{1}{2} \left(\left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{1/2^n} + \left(\prod_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k \right)^{1/2^n} \right).$$

En utilisant deux fois l'hypothèse de récurrence, il vient que :

$$\begin{aligned} \left(\prod_{k=1}^{2^{n+1}} x_k \right)^{1/2^{n+1}} &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} x_k + \frac{1}{2^n} \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} x_k \right) \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} x_k. \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n , ainsi

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \forall (x_1, \dots, x_{2^n}) \in (\mathbf{R}_+)^{2^n}, \left(\prod_{k=1}^{2^n} x_k \right)^{1/2^n} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} x_k.}$$

3. Rappelons que la fonction $x \mapsto 2^x$ est une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{R}_+^* dont la bijection réciproque est la fonction logarithme en base 2 noté \log_2 . En particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\log_2(2^x) = x$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Soit $k \in \mathbf{N}$. Par croissance de \log_2 sur \mathbf{R}_+^* , on a :

$$2^j \leq n < 2^{j+1} \iff j \leq \log_2(n) < j+1 \iff j = \lfloor \log_2(n) \rfloor.$$

On note que $j \geq 0$.

L'entier naturel $j = \lfloor \log_2(n) \rfloor$ convient et c'est le seul.

4. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$.

Si $x_1 = \dots = x_n = 0$, l'inégalité est claire.

On suppose que maintenant que $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$, en particulier, $m > 0$.

Soit j l'entier défini à la question 3 et soit $k = j + 1$.

Remarquons que l'uplet $(x_1, \dots, x_n, m, \dots, m)$ contient $2^k - n$ fois le nombre m .

D'après la question 2, on a :

$$\left(x_1 \times \dots \times x_n \times m^{2^k - n}\right)^{1/2^k} \leq \frac{1}{2^k} \left(x_1 + \dots + x_n + (2^k - n)m\right).$$

Comme $x_1 + \dots + x_n = nm$, il s'ensuit que

$$\left(x_1 \times \dots \times x_n\right)^{1/2^k} m^{(2^k - n)/2^k} \leq \frac{2^k m}{2^k} = m.$$

Après simplification par $m^{(2^k - n)/2^k} > 0$ et en élevant à la puissance $\frac{2^k}{n}$ (la fonction $x \mapsto x^{2^k/n}$ est croissante sur \mathbf{R}_+) il s'ensuit que

$$\forall n \geq 2, \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n, \left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

5. On définit sur \mathbf{R}_+^* la fonction f par $f(t) = \ln(t) - (t - 1)$.

f est dérivable sur \mathbf{R}_+^* et pour tout $t > 0$, $f'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}$.

Ainsi, f est strictement croissante sur $]0, 1]$ et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

f admet donc un maximum global en 1, ainsi pour tout $t > 0$, $f(t) \leq f(1) = 0$, ce qui entraîne

$$\forall t > 0, \ln(t) \leq t - 1.$$

6. On commence par remarquer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i > 0$.

Par la question 5, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $\ln(x_i) \leq x_i - 1$. En sommant entre 1 et n , il vient que

$$\sum_{i=1}^n \ln(x_i) \leq \sum_{i=1}^n x_i - n.$$

Or, $\sum_{i=1}^n \ln(x_i) = \ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) = 0$ car $\prod_{i=1}^n x_i = 1$, ainsi $1 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$.

7. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$.

Si l'un des $x_j = 0$ avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\prod_{i=1}^n x_i = 0$ et l'inégalité à prouver est évidente.

On suppose que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_j > 0$.

Pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $\tilde{x}_j = \frac{x_j}{\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n}}$ de sorte que l'on ait $\prod_{j=1}^n \tilde{x}_j = 1$.

D'après la question 6, on a

$$1 \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{x}_j \iff \boxed{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.}$$

8. On utilise l'inégalité arithmético-géométrique avec le n -uplet $\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}\right)$ pour obtenir

$$\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}.$$

En composant cette inégalité par la fonction inverse (décroissante sur \mathbf{R}_+^*)

$$\boxed{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}}.}$$

9. En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$x_k + 2 = x_k + 1 + 1 \geq 3(x_k \times 1 \times 1)^{1/3} = 3x_k^{1/3}.$$

Ainsi, on a

$$\prod_{k=1}^n (x_k + 2) \geq \prod_{k=1}^n (3x_k^{1/3}).$$

En utilisant le fait que $\prod_{k=1}^n x_k^{1/3} = 1$, il vient que

$$\boxed{\prod_{k=1}^n (x_k + 2) \geq 3^n.}$$

10. Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la proposition \mathcal{P}_n :

$$\ll \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbf{R}_+)^n,$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right) \Rightarrow \left(f \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \right) \gg.$$

\mathcal{P}_1 est manifestement vraie.

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un entier naturel non nul n , montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbf{R}_+)^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.

Si l'un des λ_i est nul, alors \mathcal{P}_{n+1} est vraie grâce à l'hypothèse de récurrence.

On suppose maintenant $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

En remarquant que $\sum_{j=1}^n \lambda_j + \lambda_{n+1} = 1$, en utilisant la convexité de f (on re-

marque que $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} x_k \in I$ car $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} = 1$), on a :

$$\begin{aligned} f \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \right) &= f \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \times \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f \left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} x_k \right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} = 1$, l'hypothèse de récurrence assure que

$$f \left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} x_k \right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)}{\sum_{j=1}^n \lambda_j},$$

ainsi

$$f \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k).$$

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$.

11. Soit $(x, y) \in I^2$ et soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$g(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty).$$

On a $g(0) = g(1) = 0$ et g est dérivable sur $[0, 1]$ car f l'est sur I et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= -f(x) + f(y) + (x - y) f'((1 - t)x + ty) \\ &= \alpha - \beta f'(\beta t + x) \end{aligned}$$

où l'on a posé $\alpha = f(y) - f(x)$ et $\beta = y - x > 0$.

Il est clair que g' est continue sur $[0, 1]$ car f' est continue sur I .

Comme f' est croissante, g' est décroissante sur $[0, 1]$ car $\beta > 0$.

Si $g'(1) > 0$, alors par décroissance de g' , pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t) > 0$.

On aurait alors $g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt > 0$, ce qui est impossible car

$g(1) = g(0)$. Ainsi $g'(1) \leq 0$.

On montre de même que $g'(0) \geq 0$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, g' s'annule en une valeur $\alpha \in [0, 1]$. Par décroissance de g' , on a

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad g'(t) \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall t \in [\alpha, 1], \quad g'(t) \leq 0.$$

Ainsi, g est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha, 1]$, donc

$$\forall t \in [0, 1], \quad g(t) \geq \min\{g(0), g(1)\} = 0$$

car $g(0) = g(1) = 0$. On a montré que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$

On a montré que f est convexe sur I .

12. • La fonction \exp est dérivable sur \mathbf{R} et sa dérivée \exp qui est une fonction croissante et continue sur \mathbf{R} . D'après la question 11, on en déduit que la fonction \exp est convexe sur \mathbf{R} .

- $x \mapsto -\ln(x)$ est dérivable sur \mathbf{R}_+^* et sa dérivée est $x \mapsto -\frac{1}{x}$ qui est une fonction croissante et continue sur \mathbf{R}_+^* . D'après la question 11, la fonction $-\ln$ est convexe sur \mathbf{R}_+^* .

13. (a) Soit $t \geq 1$. La fonction $x \mapsto x^t$ est dérivable sur \mathbf{R}_+^* et sa dérivée est la fonction $x \mapsto tx^{t-1}$. Comme $t - 1 \geq 0$, la fonction $x \mapsto tx^{t-1}$ est croissante et continue sur \mathbf{R}_+^* .

D'après la question 11, la fonction $x \mapsto x^t$ est convexe sur \mathbf{R}_+^* .

- (b) Soit $(p, q) \in [1, +\infty[{}^2$ tel que $q \geq p$. Montrons que

$$\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{1/q}.$$

Soit $t = \frac{q}{p} \geq 1$ et soit $f : x \mapsto x^t$. f est convexe sur \mathbf{R}_+^* d'après la question 13 (a). Ainsi, comme (x_1, \dots, x_n) est non nul, l'inégalité établie à la question 10 donne :

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k|^p\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(|x_i|^p)$$

d'où

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{q/p} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|x_i|^p)^{q/p}.$$

En élevant à la puissance $\frac{1}{q}$ ($x \mapsto x^{1/q}$ est croissante sur \mathbf{R}_+^*), on obtient :

$$\boxed{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^q\right)^{1/q}}.$$

(c) Soit $\|x\|_\infty := \max\{|x_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$. Comme $x \neq 0$, on a $\|x\|_\infty > 0$. Il s'ensuit :

$$\forall p \geq 1, \quad \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_\infty \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty}\right)^p\right)^{1/p}.$$

Par définition de $\|x\|_\infty$, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty} \leq 1$ et il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\frac{|x_j|}{\|x\|_\infty} = 1$, d'où

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty}\right)^p \leq n.$$

On a donc :

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p} \leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty}\right)^p\right)^{1/p} \leq 1.$$

Comme $\left(\frac{1}{n}\right)^{1/p} = \exp\left(-\frac{\ln(n)}{p}\right)$, on en déduit que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^{1/p} = 1.$$

Par encadrement,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{|x_i|}{\|x\|_\infty}\right)^p\right)^{1/p} = 1$$

et

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} = \|x\|_\infty.$$

14. Lorsque pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $b_k = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n b_k^2 = 0.$$

Ainsi les deux membres de l'inégalité sont nuls, donc

l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée dans ce cas.

15. On remarque que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad f(t) = \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) t^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) t + \sum_{k=1}^n a_k^2.$$

Par hypothèse $\sum_{k=1}^n b_k^2 \neq 0$, donc f est une fonction polynomiale de degré 2 et pour tout $t \in \mathbf{R}$, $f(t) \geq 0$.

Il s'ensuit que le discriminant Δ est négatif car f ne change pas de signe. Ainsi,

$$4 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq 0,$$

d'où en composant par la fonction racine carrée (croissante sur \mathbf{R}_+), on a

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

16. Soient $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$.

Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si, et seulement si, le discriminant de f est nul. Ce qui est équivalent à dire que f s'annule en une unique valeur $t_0 \in \mathbf{R}$.

Or, la condition $f(t_0) = 0$ est équivalente à : pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k + t_0 b_k = 0$ soit $a_k = -t_0 b_k$, ainsi, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $a = \alpha b$.

Par symétrie entre a et b , on a montré que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si, et seulement si, il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $a = \alpha b$ ou $b = \alpha a$.

17. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n :

$$\ll \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n, \forall (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n, \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \gg.$$

La proposition \mathcal{P}_1 est clairement vraie.

On suppose que \mathcal{P}_n est vraie pour un entier naturel non nul n , montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Soient $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $(b_1, \dots, b_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$. On a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k \right| &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n+1} b_k^2} \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k \right)^2 &\leq \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k^2 \right) \\ \Leftrightarrow \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} \sum_{k=1}^n a_k b_k + (a_{n+1}b_{n+1})^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) + (a_{n+1}b_{n+1})^2 + b_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + a_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n b_k^2. \end{aligned}$$

On remarque la présence de $(a_{n+1}b_{n+1})^2$ dans les deux membres de l'inégalité, d'après l'hypothèse de récurrence, pour montrer que \mathcal{P}_{n+1} est vraie, il suffit de montrer que

$$2a_{n+1}b_{n+1} \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq b_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 + a_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n b_k^2. \quad (1.5)$$

Or,

$$\begin{aligned} &\left(|b_{n+1}| \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} - |a_{n+1}| \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} \right)^2 = \\ &b_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n a_k^2 - 2|a_{n+1}||b_{n+1}| \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} + a_{n+1}^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Toujours d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} 2a_{n+1}b_{n+1} \sum_{k=1}^n a_k b_k &\leq \left| 2a_{n+1}b_{n+1} \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \\ &\leq 2|a_{n+1}||b_{n+1}| \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right), \end{aligned}$$

ce qui montre l'inégalité (1.5) et la véracité de \mathcal{P}_{n+1} .

On a montré par récurrence que l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vraie pour tout entier naturel n non nul.

18. L'inégalité $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ découle de l'inégalité $(x - y)^2 \geq 0$.

19. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit deux n -uplets (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) de \mathbb{R}^n .

- On suppose $\sum_{k=1}^n a_k^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 = 1$.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_k b_k \leq \frac{a_k^2}{2} + \frac{b_k^2}{2}$, d'où en sommant entre 1 et n ,

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n b_k^2 = 1 = \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

- On revient au cas général.

Si $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$ ou $\sum_{i=1}^n b_i^2 = 0$, alors l'inégalité est évidente. On suppose donc

$\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0$ et $\sum_{i=1}^n b_i^2 > 0$. On définit ainsi

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \tilde{a}_k = \frac{a_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}} \quad \text{et} \quad \tilde{b}_k = \frac{b_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}.$$

Il est clair que $\sum_{k=1}^n \tilde{a}_k^2 = \sum_{k=1}^n \tilde{b}_k^2 = 1$, ainsi $\sum_{k=1}^n \tilde{a}_k \tilde{b}_k \leq 1$, soit

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

Pour conclure, il suffit utiliser l'inégalité précédente avec les réels $|a_i|$ et $|b_i|$ et

remarquer que $\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i|$.

On a montré que

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}.$$

20. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = x_k$ et $b_k = 1$. On a donc :

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2}$$

d'où, en élevant au carré (la fonction carrée est croissante sur \mathbb{R}_+) :

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$

21. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = k$ et $b_k = \sqrt{k}$. On a donc :

$$\left| \sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n k}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \times \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

D'où, après simplifications, on a :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)}{2\sqrt{3}} \sqrt{2n+1}.}$$

22. On a montré à la question 12 que la fonction $-\ln$ est convexe sur \mathbf{R}_+^* ainsi pour tout $(u, v) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, en utilisant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a

$$-\ln\left(\frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v\right) \leq -\frac{1}{p}\ln(u) - \frac{1}{q}\ln(v) \iff \ln\left(\frac{1}{p}u + \frac{1}{q}v\right) \geq \ln\left(u^{1/p}v^{1/q}\right)$$

puis en composant par la fonction \exp , croissante sur \mathbf{R} , et en posant $x = u^p$ et $y = v^q$ (on note que les fonction $u \mapsto u^p$ et $v \mapsto v^q$ sont des bijections de \mathbf{R}_+^* sur \mathbf{R}_+^*)

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+^*)^2, \quad xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q = \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q.$$

On remarque que l'inégalité ci-dessus est évidente lorsque x et y n'ont pas le même signe car $xy \leq 0$ et elle reste vraie lorsque x et y sont tous les deux négatifs. Ainsi

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad xy \leq \frac{1}{p}|x|^p + \frac{1}{q}|y|^q.}$$

23. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$.

D'après la question 22, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $a_k b_k \leq \frac{1}{p}|a_k|^p + \frac{1}{q}|b_k|^q$.

En sommant entre 1 et n , on récupère

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n |a_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n |b_k|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser l'inégalité précédente avec les réels $|a_k|$ et $|b_k|$ et remarquer que $\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k b_k|$ (c'est l'inégalité triangulaire).

Lorsque $\sum_{k=1}^n |a_k|^p = \sum_{k=1}^n |b_k|^q = 1$, on a montré que

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

24. Soient deux n -uplets de réels (a_1, \dots, a_n) et (b_1, \dots, b_n) .

Si $\sum_{k=1}^n |x_k|^p = 0$ ou $\sum_{k=1}^n |b_k|^q = 0$, l'inégalité de Hölder est claire. On suppose donc $\sum_{k=1}^n |x_k|^p \neq 0$ et $\sum_{k=1}^n |y_k|^q \neq 0$. On définit ainsi

$$\forall i \in [1, n] \quad \tilde{a}_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p}} \quad \text{et} \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}}.$$

Il est clair que $\sum_{i=1}^n |\tilde{a}_i|^p = \sum_{i=1}^n |\tilde{b}_i|^q = 1$, ainsi $\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i \tilde{b}_i \leq 1$, soit

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q}.$$

Pour conclure, il suffit d'utiliser l'inégalité précédente avec les réels $|a_i|$ et $|b_i|$ et remarquer que $\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i b_i|$. On a montré que

$$\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^q \right)^{1/q}.$$

25. Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ qui réalise l'égalité dans l'inégalité de Hölder.

- Si $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$ ou $(b_1, \dots, b_n) = (0, \dots, 0)$, alors il y a clairement égalité dans l'inégalité de Hölder.
- On suppose $(a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0)$ et $(b_1, \dots, b_n) \neq (0, \dots, 0)$, ainsi

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^p > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n |b_k|^q > 0.$$

On pose

$$\forall i \in [1, n] \quad \tilde{a}_i = \frac{a_i}{\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p}} \quad \text{et} \quad \tilde{b}_i = \frac{b_i}{\left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}},$$

de sorte que l'on ait $\sum_{k=1}^n |\tilde{a}_k|^p = \sum_{k=1}^n |\tilde{b}_k|^q = 1$.

S'il existait $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que

$$|\tilde{a}_j \tilde{b}_j| < \frac{1}{p} |\tilde{a}_j|^p + \frac{1}{q} |\tilde{b}_j|^q,$$

en sommant cette inégalité avec les inégalités suivantes obtenues à la question 22, on aurait

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}, \quad |\tilde{a}_k \tilde{b}_k| \leq \frac{1}{p} |\tilde{a}_k|^p + \frac{1}{q} |\tilde{b}_k|^q.$$

On en déduirait

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\tilde{a}_k \tilde{b}_k| &< \frac{1}{p} \sum_{k=1}^n |\tilde{a}_k|^p + \frac{1}{q} \sum_{k=1}^n |\tilde{b}_k|^q \\ &< 1 \\ &< \left(\sum_{k=1}^n |\tilde{a}_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |\tilde{b}_k|^q \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

ce qui est exclu.

Ainsi,

$$k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\tilde{a}_k \tilde{b}_k| = \frac{1}{p} |\tilde{a}_k|^p + \frac{1}{q} |\tilde{b}_k|^q. \quad (1.6)$$

Soit $\alpha \geq 0$. Soit la fonction f définie sur \mathbf{R}_+ par

$$f(t) = \alpha t - \frac{1}{p} \alpha^p - \frac{1}{q} t^q.$$

f est dérivable sur \mathbf{R}_+ et pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = \alpha - t^{q-1}$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad f'(t) > 0 \iff t > \alpha^{1/(q-1)}.$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $\left[0, \alpha^{1/(q-1)}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\alpha^{1/(q-1)}, +\infty\right[$.

La relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ permet de montrer que $f(\alpha) = 0$, ainsi pour tout $t \in \mathbf{R}_+ \setminus \{\alpha\}$, $f(t) < 0$. De (1.6), on en déduit donc que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\tilde{b}_k| = |\tilde{a}_k|^{1/(q-1)} \iff |\tilde{b}_k|^q = |\tilde{a}_k|^p$$

car $\frac{q-1}{q} = p$. En utilisant la définition des \tilde{a}_k et \tilde{b}_k , on obtient

$$\begin{aligned} (|\tilde{a}_1|^p, \dots, |\tilde{a}_n|^p) &= \left(|\tilde{b}_1|^q, \dots, |\tilde{b}_n|^q \right) \\ \iff \exists (\lambda, \mu) \in (\mathbf{R}_+)^2, \quad (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n) &= (\mu b_1, \dots, \mu b_n). \end{aligned}$$

On remarque que cette précédente équivalence recouvre le cas où l'un des deux n -uplets est nul.

Réciproquement, si $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ sont tels qu'il existe $(\lambda, \mu) \in (\mathbf{R}_+)^2$ tel que $\lambda(a_1, \dots, a_n) = \mu(b_1, \dots, b_n)$, alors il y a égalité dans l'inégalité de Hölder.

On a montré que pour $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ et pour tout $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$, l'inégalité de Hölder est une égalité si, et seulement si, il existe $(\lambda, \mu) \in (\mathbf{R}_+)^2$ tel que $\lambda(a_1, \dots, a_n) = \mu(b_1, \dots, b_n)$.

26. On a $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \iff 1 = \frac{1}{\frac{r}{p}} + \frac{1}{\frac{r}{q}}$. On utilise l'inégalité de Hölder avec les n -uplets $(|a_1|^r, \dots, |a_n|^r)$ et $(|b_1|^r, \dots, |b_n|^r)$ pour obtenir

$$\left| \sum_{k=1}^n |a_k b_k|^r \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n (|a_i|^r)^{p/r} \right)^{r/p} \left(\sum_{i=1}^n (|b_i|^r)^{q/r} \right)^{r/q}$$

soit, après simplifications

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k|^r \right)^{1/r} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

27. Soient $p' = \frac{1}{p}$ et $q' = -\frac{q}{p}$. On remarque que p et q sont des réels strictement positifs et

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = p - \frac{p}{q} = p \left(1 - \frac{1}{q} \right) = \frac{p}{p} = 1.$$

On utilise l'inégalité de Hölder avec les n -uplets $(b_1^{-p}, \dots, b_n^{-p})$ et $((a_1 b_1)^p, \dots, (a_n b_n)^p)$ pour obtenir

$$\sum_{k=1}^n a_k^p = \sum_{k=1}^n (a_k b_k)^p b_k^{-p} \leq \left(\sum_{k=1}^n (a_k b_k)^{pp'} \right)^{1/p'} \left(\sum_{k=1}^n b_k^{-pq'} \right)^{1/q'}$$

soit après simplifications

$$\sum_{k=1}^n a_k^p \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^p \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{-p/q},$$

d'où

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \geq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^q \right)^{1/q}.$$

28. Lorsque $p = 1$, l'inégalité de Minkowski est l'inégalité triangulaire, elle est donc vraie.

29. On remarque

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p &= \sum_{k=1}^n |a_k + b_k| |a_k + b_k|^{p-1} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |a_k| |a_k + b_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |b_k| |a_k + b_k|^{p-1}. \end{aligned}$$

Pour majorer $\sum_{k=1}^n |a_k| |a_k + b_k|^{p-1}$, on utilise l'inégalité de Hölder avec les réels $p' = p$ et $q' = \frac{p}{p-1}$.

Il est facile de voir que $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$, ainsi, en utilisant l'inégalité de Hölder, on a :

$$\sum_{k=1}^n |a_k| |a_k + b_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1-1/p}.$$

Le même raisonnement montre que

$$\sum_{k=1}^n |b_k| |a_k + b_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1-1/p}.$$

En sommant ces deux précédentes inégalités, on obtient finalement

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^p \right)^{1/p}}.$$

30. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} (a_k + b_k)^p &= (a_k + b_k) (a_k + b_k)^{p-1} \\ &= a_k (a_k + b_k)^{p-1} + b_k (a_k + b_k)^{p-1}. \end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Hölder « inversée » avec $p \in]0, 1[$ et $q = \frac{p}{p-1} < 0$ de sorte que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On obtient

$$\sum_{k=1}^n a_k (a_k + b_k) \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1-1/p}.$$

Le même raisonnement montre que

$$\sum_{k=1}^n b_k (a_k + b_k) \geq \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1-1/p}.$$

Il s'ensuit que

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \geq \left(\left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \right) \left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1-1/p}.$$

On a bien montré que

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \geq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} .}$$

Thème 2

Découverte des infinis

Thèmes abordés : Relation d'ordre, injectivité, surjectivité, bijectivité, ensemble.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet commence par prouver le théorème de Cantor-Bernstein, célèbre résultat de la théorie des ensembles. Ensuite, on montre deux façons différentes que \mathbf{R} et \mathbf{N} ne peuvent pas être mis en bijection : l'une des méthodes utilise la notion de développement décimal illimité propre et l'autre utilise un résultat de Cantor (encore !) qui stipule qu'il n'existe pas de surjection entre un ensemble et l'ensemble de ses parties.

Ce sujet nécessite les connaissances élémentaires de MPSI abordées généralement en début d'année : les notions d'injectivité, surjectivité et bijectivité.

Les deux parties sont largement indépendantes.

2.1 Théorème de Cantor-Bernstein

Le but de cette partie est d'établir le théorème suivant.

Théorème. *Théorème de Cantor-Bernstein.*

Soient E et F deux ensembles. On suppose qu'il existe une injection de E vers F et une injection de F vers E .

Alors, il existe une bijection de E sur F .

Nous commençons par prouver le lemme suivant.

Lemme. *Lemme de Knaster-Tarski.*

Soit E un ensemble et soit $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ croissante, i.e.

$$\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \quad (A \subset B) \implies (f(A) \subset f(B)).$$

Alors, f admet un point fixe : il existe $M \in \mathcal{P}(E)$ tel que $f(M) = M$.

Soit

$$B = \{M \in \mathcal{P}(E), f(M) \subset M\}$$

muni de la relation d'ordre \subset (inclusion).

1. Justifier que B est non vide. En déduire l'existence de $\inf B$.
Dans la suite, on pose $N = \inf B$.

2. Montrer que pour tout $M \in B$, $f(N) \subset f(M) \subset M$.

En déduire que $f(N)$ minore B .

3. En déduire que $f(N) \subset N$, puis $f(f(N)) \subset f(N)$.

4. En déduire que $f(N) \in B$, puis que $f(N) = N$.

Nous pouvons maintenant prouver le théorème de Cantor-Bernstein.

Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux injections. Soit

$$k : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$$

définie par :

$$\forall M \in \mathcal{P}(E), \quad k(M) = E \setminus g(F \setminus f(M)).$$

5. Montrer que k est croissante pour l'inclusion. En déduire que k a un point fixe que l'on note A_0 .

Soit enfin h l'application définie sur E par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_0 \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in E \setminus A_0 \end{cases}$$

où, par abus, $g^{-1}(x)$ désigne l'éventuel (i.e. sous réserve d'existence) unique antécédent de x par g .

6. Montrer que l'application h est bien définie.

7. Montrer que h est injective.

8. Montrer que h est surjective.

9. Conclure.

2.2 Non dénombrabilité de l'ensemble des réels

Théorème. Théorème de Cantor.

Il n'existe pas de bijection de \mathbf{R} vers \mathbf{N} .

2.2.1 Développement décimal illimité propre

Cette preuve utilise l'argument classique dit procédé diagonal de Cantor.

Avant, nous devons définir la notion de développement décimal illimité propre.

Définition. Développement décimal illimité propre.

Soit $x \in \mathbf{R}$. On dit que x admet un développement décimal illimité propre s'il existe $a_0 \in \mathbf{Z}$ et une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^} \in \llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbf{N}^*}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

10. Montrer qu'un tel développement décimal illimité propre existe et est unique.

2.2.2 Une première preuve du théorème de Cantor

11. Montrer que pour prouver le théorème de Cantor, il suffit de prouver qu'il n'existe pas de surjection de \mathbf{N}^* sur $]0, 1[$.

Soit $\varphi : \mathbf{N}^* \rightarrow]0, 1[$ une application.

12. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe une unique suite $(a_n(m))_{m \in \mathbf{N}^*}$ de $[[0, 9]]^{\mathbf{N}^*}$ telle que

$$\varphi(n) = 0, a_n(1) a_n(2) a_n(3) \dots$$

13. On définit la suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad b_n = \begin{cases} 3 & \text{si } a_n(n) = 2 \\ 2 & \text{si } a_n(n) \neq 2 \end{cases}$$

Soit $x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$

- (a) Montrer que $x \in]0, 1[$.
 (b) Montrer que x n'admet pas d'antécédent par φ .
14. Terminer la preuve du théorème de Cantor.

2.2.3 Une seconde preuve

Dans cette partie, on commence par établir un lemme dû à Cantor.

Lemme. *Lemme de Cantor.*

Soit E un ensemble.

Il n'existe pas de surjection de E vers $\mathcal{P}(E)$.

Nous prouvons le lemme de Cantor. Soit $\varphi : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$ une application.

15. Montrer que l'ensemble $A = \{x \in E, x \notin \varphi(x)\}$ n'a pas d'antécédent par φ et conclure.

Nous reprenons la preuve du théorème de Cantor.

16. (a) Montrer qu'il existe une injection de $]0, 1[$ dans $\mathcal{P}(\mathbf{N})$.
Indication : On pourra utiliser le développement décimal illimité propre.
 (b) Montrer qu'il existe une injection de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ dans $]0, 1[$.
 (c) En déduire qu'il existe une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$.
 (d) Donner une bijection explicite entre $]0, 1[$ et \mathbf{R} .
17. Terminer la preuve du théorème de Cantor.

Correction du Thème 2

1. B est non vide car $E \in B$.

B est non vide, minorée par l'ensemble vide, donc

B admet une borne inférieure.

2. Par définition de N , pour tout $M \in B$, $N \subset M$, donc par croissance de f , $f(N) \subset f(M)$.

De plus, comme $M \in B$, on a $f(M) \subset M$.

On a montré que pour tout $M \in B$, $f(N) \subset f(M) \subset M$.

En particulier, $f(N)$ minore B .

3. D'après la question 2, $f(N)$ est un minorant de B . Or, N est le plus grand des minorants de B , on a $f(N) \subset N$.

Par croissance de f , on a $f(f(N)) \subset f(N)$.

4. Par définition de B et d'après la question 3, on a $f(N) \in B$.

Or, $f(N) \in B$ et N est un minorant de B , $N \subset f(N)$, d'où en utilisant la question 3, $f(N) = N$.

5. Soit $(M, N) \in \mathcal{P}(E)^2$ tel que $M \subset N$.

On a $f(M) \subset f(N)$, d'où $F \setminus f(N) \subset F \setminus f(M)$.

Il s'ensuit que $g(F \setminus f(N)) \subset g(F \setminus f(M))$, puis

$$E \setminus g(F \setminus f(M)) \subset E \setminus g(F \setminus f(N)),$$

ce qui donne $k(M) \subset k(N)$.

On a montré que k est croissante pour l'inclusion.

D'après le *Lemme de Knaster-Tarski* (question 4),

k admet au moins un point fixe.

6. Soit $x \in E$.

- Si $x \in A_0$, $h(x) = f(x)$, donc $h(x)$ est bien défini ;
- si $x \in E \setminus A_0$. Par définition de A_0 , on a

$$A_0 = E \setminus g(F \setminus f(A_0)) \iff g(F \setminus f(A_0)) = E \setminus A_0.$$

Ainsi, x admet au moins un antécédent par g et celui-ci est unique par injectivité de g . $g^{-1}(x)$ est bien défini.

L'application h est bien définie.

7. Avant de traiter la question, une remarque. Soit $x \in E$. On note $B_0 = f(A_0)$.

- Si $x \in A_0$, alors $h(x) = f(x) \in B_0$.

- Si $x \in E \setminus A_0$. Par définition de A_0 et B_0 , on a $E \setminus A_0 = g(F \setminus B_0)$, donc $h(x) \in F \setminus B_0$.

Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $h(x) = h(x')$.

La remarque précédente montre que x et x' appartiennent à A_0 ou x et x' appartiennent à $E \setminus A_0$.

- Si x et x' appartiennent à A_0 , alors $h(x) = f(x)$ et $h(x') = f(x')$. Par injectivité de f , on en déduit $x = x'$.
- Si x et x' appartiennent à $E \setminus A_0$. Comme $E \setminus A_0 = g(F \setminus B_0)$: il existe u et u' dans $F \setminus B_0$ uniques (par injectivité de g) tels que $x = g(u)$ et $x' = g(u')$. Comme $h(x) = u$ et $h(x') = u'$, on en déduit $u = u'$, puis $x = x'$.

On a montré que h est injective.

8. Soit $y \in F$. Il y a deux cas :

- Si $y \in B_0$. Comme $B_0 = f(A_0)$, y admet un antécédent par h .
- Si $y \in F \setminus B_0$. Comme $E \setminus A_0 = g(F \setminus B_0)$, y admet un antécédent par h .

On a montré que h est surjective.

9. h est injective (question 7) et surjective (question 8), donc h est bijective.

10. On procède par analyse-synthèse.

- *Analyse*

On suppose qu'une telle suite existe. Alors, on a :

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^p \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^p}. \quad (2.1)$$

En prenant $p = 0$ dans (2.1), on a

$$a_0 \leq x < a_0 + 1,$$

donc $a_0 = \lfloor x \rfloor$: a_0 est unique.

Soit $n \in \mathbf{N}$, on suppose que a_0, a_1, \dots, a_n vérifient (2.1) et sont les seuls à vérifier la relation (2.1) avec $p = n$.

En prenant $p = n + 1$ dans (2.1), on a donc

$$\sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^{n+1}}$$

d'où

$$a_{n+1} \leq 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \right) < a_{n+1} + 1.$$

Il s'ensuit que $a_{n+1} = \lfloor 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \right) \rfloor$, ainsi a_{n+1} est uniquement défini.

Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ existe, elle est unique.

- *Synthèse*

Soit $x \in \mathbf{R}$. Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie ci-dessus : $a_0 = \lfloor x \rfloor$ et pour tout

$$n \in \mathbf{N}^*, a_n = \lfloor 10^n \left(x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{10^k} \right) \rfloor.$$

Par définition de la partie entière, il est clair que l'on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

Il est clair que $a_0 \in \mathbf{Z}$. Par définition de a_0 , on a $x - a_0 \in [0, 10[$. Ainsi :

$$a_1 = \lfloor 10(x - a_0) \rfloor \in \llbracket 0, 9 \rrbracket.$$

Si l'on suppose $a_1, \dots, a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$, par définition de a_{n+1} , on a

$$a_{n+1} = \lfloor 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \right) \rfloor.$$

Or, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n},$$

d'où

$$0 \leq 10^{n+1} \left(x - \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{10^k} \right) < 10.$$

Ainsi, $a_{n+1} \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.

Cela montre que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n \in \llbracket 0, 9 \rrbracket$.

On a montré qu'une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ existe et vérifie les conditions requises.

Ainsi, le développement décimal illimité propre d'un réel existe et est unique.

11. Comme \mathbf{N} et \mathbf{N}^* sont en bijection ($n \mapsto n+1$ en est une), ainsi il existe une surjection de \mathbf{N} sur $[0, 1[$ si et seulement s'il existe une surjection de \mathbf{N}^* sur $[0, 1[$.

Comme $[0, 1[\subset \mathbf{R}$, s'il n'existe pas de surjection de \mathbf{N}^* sur $[0, 1[$, il ne peut y avoir de surjection de \mathbf{N} sur \mathbf{R} .

Ainsi, pour montrer le théorème de Cantor, il suffit de montrer qu'il n'existe pas de surjection de \mathbf{N}^* sur $[0, 1[$.

12. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme $\varphi(n) \in [0, 1[$, le développement décimal illimité propre de $\varphi(n)$ est unique et de la forme

$$\varphi(n) = 0, a_n(1) a_n(2) \dots$$

13. (a) On a

$$0 \leq x \leq 0,33\dots = \frac{1}{3} < 1.$$

Ainsi, $x \in [0, 1[$.

- (b) Par construction de x , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n -ième décimale de x et de $\varphi(n)$ sont différentes.

Par unicité du développement décimal illimité propre, on a $x \neq \varphi(n)$ pour tout entier naturel non nul n .

Il s'ensuit que x n'a pas d'antécédent par φ .

14. Il n'existe pas de surjection de \mathbb{N}^* sur $]0, 1[$, donc

pas de surjection de \mathbb{N} sur \mathbb{R} d'après la question 11.

15. Supposons que A ait un antécédent x par φ . Il y a deux possibilités :

- si $x \in A$, alors par définition de A , $x \notin \varphi(x) = A$;
- si $x \notin A$, alors par définition de A , $x \in \varphi(x) = A$.

On a montré que A n'a pas d'antécédent par φ , donc φ n'est pas surjective.

16. (a) Si $x \in]0, 1[$, on note $0, a_1(x) a_2(x) a_3(x) \dots$ son développement décimal illimité propre.

Soit l'application ψ définie sur $]0, 1[$ définie par :

pour tout $x = 0, a_1(x) a_2(x) a_3(x) \dots \in]0, 1[$ (développement décimal illimité propre de x),

$$\psi(x) = \left\{ 1, \overline{1a_1(x)}, \overline{1a_1(x) a_2(x)}, \dots \right\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$

où, par exemple, si $x = 0,129\dots$, alors $\overline{1a_1(x)} = 11$ (onze),

$\overline{1a_1(x) a_2(x)} = 112$ (cent douze), $\overline{1a_1(x) a_2(x) a_3(x)} = 1129$ (mille cent vingt-neuf), etc.

On remarque que, pour tout $x \in]0, 1[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\overline{1a_1(x) \dots a_k(x)} \in [10^k, 10^{k+1}[.$$

Soit $(x, y) \in]0, 1[^2$ tel que $x \neq y$. Par unicité du développement décimal illimité propre, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_n(x) \neq a_n(y)$.

Déjà, il est clair que $\overline{1a_1(x) \dots a_n(x)} \neq \overline{1a_1(y) \dots a_n(y)}$.

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k \neq n$, on a

$$\overline{1a_1(y) \dots a_n(y)} \neq \overline{1a_1(x) \dots a_k(x)}$$

car

$$\overline{1a_1(y) \dots a_n(y)} \in [10^n, 10^{n+1}[,$$

$$\overline{1a_1(x) \dots a_k(x)} \in [10^k, 10^{k+1}[$$

et

$$[10^n, 10^{n+1}[\cap [10^k, 10^{k+1}[= \emptyset.$$

Cela prouve que $\overline{1a_1(x) \dots a_n(x)} \notin \psi(y)$, il s'ensuit que $\psi(x) \neq \psi(y)$.

ψ est injective : il existe une injection de $]0, 1[$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

- (b) Soit $A \subset \mathbf{N}$ non vide. On note A^* l'ensemble A dans lequel les éléments ont été rangé dans l'ordre croissant. Par exemple, si $A = \{2, 64, 38\}$, alors $A^* = \{2, 38, 64\}$. Soit l'application ϕ définie sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ telle que

$$\phi(\emptyset) = 0,2, \quad \phi(\{0\}) = 0,3,$$

$$\phi(A) = \overline{0,0 \underbrace{1 \dots 1}_{b_1} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{b_n} 00 \dots},$$

si $A^* = \{b_1, \dots, b_n\}$ est fini et

$$\phi(A) = \overline{0,0 \underbrace{1 \dots 1}_{b_1} 0 \underbrace{1 \dots 1}_{b_2} 0 \dots 0 \underbrace{1 \dots 1}_{b_n} 0 \dots},$$

si $A^* = \{b_1, b_2, \dots\}$ est infini.

Déjà, de toute évidence, pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$, $\phi(A) \in]0, 1[$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbf{N})^2$ tel que $A \neq B$. Par définition, il est clair que si l'un des deux ensembles est vide ou égal à $\{0\}$, alors $\phi(A) \neq \phi(B)$. Par symétrie des rôles entre A et B , il reste à traiter les cas suivants :

- A est fini et B infini.

On écrit $A^* = \{a_1, \dots, a_n\}$ et $B^* = \{b_1, b_2, \dots\}$ avec, rappelons-le, $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \dots$.

Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_k = b_k$, alors il est clair que $\phi(B) > \phi(A)$, donc $\phi(B) \neq \phi(A)$.

S'il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_k \neq b_k$, alors on peut introduire

$$j = \min \{i \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_i \neq b_i\}.$$

On peut supposer $a_j > b_j$. Alors, par définition de ψ , on a $\phi(A) > \phi(B)$ et $\phi(A) \neq \phi(B)$.

- A et B sont infinis.

On écrit $A^* = \{a_1, a_2, \dots\}$, avec $a_1 < a_2 < \dots$ et $B^* = \{b_1, b_2, \dots\}$ avec $b_1 < b_2 < \dots$.

Comme $A^* \neq B^*$ (car $A \neq B$), comme ci-dessus, on introduit

$$j = \min \{i \in \mathbf{N}^*, a_i \neq b_i\}.$$

Si l'on suppose $b_i > a_i$, alors on a $\phi(B) > \phi(A)$.

- A et B sont finis.

On écrit $A^* = \{a_1, \dots, a_n\}$, avec $a_1 < \dots < a_n$ et $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ avec $b_1 < \dots < b_m$.

On peut supposer $n \geq m$.

Si pour tout $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $a_k = b_k$ alors comme $A \neq B$, on a $n > m$. Par définition de ϕ , il s'ensuit que $\phi(A) > \phi(B)$.

On suppose maintenant qu'il existe $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ tel que $a_k \neq b_k$. Comme ci-dessus, en introduisant

$$j = \min \{i \in \llbracket 1, m \rrbracket, a_i \neq b_i\},$$

on montre que $\phi(A) \neq \phi(B)$.

Dans tous les cas, $\phi(A) \neq \phi(B)$, ϕ est injective : il existe une injection de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ dans $]0, 1[$.

- (c) Les questions 16 (a) et 16 (b) assurent qu'il existe une injection de $]0, 1[$ dans $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ et une injection de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ dans $]0, 1[$.

D'après le *Théorème de Cantor-Bernstein*, il existe une bijection de $]0, 1[$ sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$.

- (d) L'application $\begin{cases}]0, 1[& \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \tan\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ est une bijection de $]0, 1[$ sur \mathbf{R} car les applications

$$\begin{cases} \tan_{] \pi/2, \pi/2[} :]-\pi/2, \pi/2[& \rightarrow \mathbf{R} \\ x & \mapsto \tan(x) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases}]0, 1[& \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ x & \mapsto \pi x - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sont des bijections.

17. On suppose qu'il existe une bijection de \mathbf{R} sur \mathbf{N} .

D'après les questions 16 (c) et 16 (d), il existe une bijection de \mathbf{R} sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, donc une bijection de \mathbf{N} sur $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, ce qui est exclu grâce au résultat de la question 15.

Le théorème de Cantor est prouvé.

Quelques remarques culturelles

On définit la relation binaire \leq (attention, rien à voir avec la relation d'ordre usuelle sur \mathbf{R}) sur la classe des ensembles par : si A et B sont deux ensembles, alors $A \leq B$ si et seulement s'il existe une injection de A dans B .

Il est facile de montrer que la relation \leq est transitive et réflexive. Le théorème de Cantor-Bernstein assure que si $A \leq B$ et $B \leq A$, alors il existe une bijection entre A et B : A et B ne sont pas égaux mais ils ont la même **cardinalité**. \leq est « presque » antisymétrique.

Un autre résultat, le théorème de comparabilité cardinale, assure que l'« ordre » (qui n'en est pas un, car non antisymétrique) est total : si A et B sont deux ensembles, alors on a $A \leq B$ ou $B \leq A$. La preuve de ce résultat nécessite l'utilisation de l'axiome du choix (voir le Thème 3 : « Discussion autour de deux axiomes »).

Thème 3

Discussion autour de deux axiomes

Thèmes abordés : Logique.

Difficulté : ■■■■■■

Ce sujet permet d'initier aux axiomes du tiers exclu et du choix. On y montre quelques-unes de leurs applications possibles. Seules les questions 21, 22 et 23 nécessitent des connaissances du vocabulaire d'algèbre linéaire.

Ce sujet nécessite les connaissances élémentaires de logique. Toutes les autres notions abordées sont définies dans le sujet.

Les deux parties sont largement indépendantes.

3.1 Axiome du tiers exclu

3.1.1 Présentation de l'axiome du tiers exclu

Axiome. *Axiome du tiers exclu.*

L'axiome du tiers exclu dit que : pour toute proposition p , on a p ou $\neg p$ (la négation de p).

1. En utilisant l'axiome du tiers exclu, prouver qu'il existe deux irrationnels a et b tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.

Indication : On pourra considérer les couples $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$.

On admettra dans cette question que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Remarque. Pourquoi discuter sur cet axiome qui semble pourtant évident ? La question 1 fournit un début de réponse : on prouve qu'il existe deux nombres irrationnels α et β tels que α^β soit rationnel mais sans donner un exemple explicite.

Les preuves utilisant le tiers exclu ont parfois ce « défaut » de prouver un résultat sans donner de méthode explicite pour construire un tel objet.

Le lecteur pourra remarquer que la preuve du théorème des valeurs intermédiaires par dichotomie est une preuve utilisant le tiers exclu.

Principe. *Principe du raisonnement par l'absurde.*

Pour toute proposition p , on a : $\neg\neg p \implies p$.

2. On montre que le tiers exclu est équivalent au principe de raisonnement par l'absurde.
 - (a) Montrer que le tiers exclu entraîne le principe de raisonnement par l'absurde.
 - (b) Montrer que le principe de raisonnement par l'absurde entraîne le tiers exclu.

Principe. *Principe du raisonnement par contraposée.*

Pour toutes propositions p et q on a :

$$(\neg q \implies \neg p) \implies (p \implies q).$$

3. On montre que le principe de raisonnement par l'absurde est équivalent au principe de raisonnement par contraposition.
 - (a) Montrer que le principe de raisonnement par l'absurde entraîne le principe de raisonnement par contraposition.
 - (b) Montrer que le principe de raisonnement par contraposée entraîne le principe de raisonnement par l'absurde.

3.1.2 Applications

La logique sans tiers exclu est plus riche que l'on ne le pense. Un certain nombre de raisonnements qui semblent utiliser le principe de raisonnement par l'absurde (qui est équivalent au tiers exclu) ne sont pas de vrais raisonnements par l'absurde. Attention aux contrefaçons!

Traiter les questions suivantes **sans** faire de raisonnement par l'absurde.

4. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
5. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

3.2 Axiome du choix

3.2.1 Présentation de l'axiome du choix

Axiome. *Axiome du choix.*

*Pour tout ensemble E d'ensembles non vides, il existe une fonction définie sur E , appelée **fonction de choix**, qui à chaque ensemble A appartenant à E associe un élément de cet ensemble A .*

3.2.2 Lemme de Zorn

Avant d'énoncer le lemme de Zorn et montrer que l'axiome du choix implique le lemme de Zorn, nous introduisons quelques définitions.

Définitions. *Ensemble totalement ordonné, ensemble bien ordonné, chaîne, chaîne bien ordonnée, ensemble inductif, segment initial, élément maximal.*

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné (i.e. muni d'une relation d'ordre \leq qui n'a, a priori, rien à voir avec la relation « inférieur ou égal » des réels).

- *On dit que (E, \leq) est totalement ordonné si pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.*

- On dit que (E, \leq) est **bien ordonné** (ou que \leq est un **bon ordre** sur E) si toute partie non vide de E admet un plus petit élément.
- On appelle **chaîne** tout sous-ensemble A de E tel que l'ordre induit sur A soit total.
- On appelle **chaîne bien ordonnée** toute chaîne C de E telle que la restriction de l'ordre \leq à C soit un bon ordre.
- On dit que E est **inductif** si toute chaîne est majorée.
- Soient I et A deux parties de E . On dit que I est un **segment initial** de A si $I \subset A$ et si :

$$\forall x \in I, \quad \{y \in A, y < x\} \subset I.$$

- Un élément m est un **élément maximal** s'il n'admet aucun majorant strict :

$$\forall x \in E, \quad (m \leq x) \implies (m = x).$$

Nous pouvons énoncer le lemme de Zorn.

Lemme. *Lemme de Zorn.*

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné tel que toute chaîne bien ordonnée possède un majorant. Alors, E admet un élément maximal.

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et soit \mathcal{S} un ensemble de chaînes bien ordonnées de E tel que, étant donné deux chaînes C et D de \mathcal{S} , C est un segment initial de D ou D est un segment initial de C .

6. Montrer que tout élément de \mathcal{S} est un segment initial de $\Sigma := \bigcup_{E \in \mathcal{S}} E$.
7. On souhaite montrer que Σ est une chaîne bien ordonnée de E . Soit $X \subset \Sigma$ non vide.
 - (a) Montrer qu'il existe une chaîne C de \mathcal{S} tel que $C \cap X \neq \emptyset$. En déduire que $C \cap X$ admet un plus petit élément que l'on note a .
 - (b) Soit $y \in X$. En discutant selon l'appartenance de y à C , montrer que $a \leq y$.
Indication : Lorsque $y \notin C$, on pourra considérer un élément de D de \mathcal{S} tel que $y \in D$.
 - (c) Conclure.
8. En utilisant l'axiome du choix, montrer qu'il existe une application g définie sur l'ensemble des chaînes bien ordonnées de (E, \leq) qui possèdent un majorant strict, et telle que $g(C)$ est un majorant strict de C .

Définition. *g-chaîne.*

Étant donné une fonction g donnée par la question 8, on appelle **g-chaîne**, toute chaîne bien ordonnée C de (E, \leq) telle que

$$\forall x \in C, \quad x = g(\{y \in C, y < x\}).$$

Soient C et D deux g -chaînes et soit \mathcal{R} l'ensemble des chaînes bien ordonnées qui sont des segments initiaux de C et D .

9. Montrer que $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ est une chaîne bien ordonnée et que c'est un segment initial de C et D .

10. On suppose que $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \neq C$ et $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \neq D$.

(a) Montrer qu'il existe $x \in C \setminus \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ et $x' \in D \setminus \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ tels que

$$\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R = \{y \in C, y < x\} = \{y \in D, y < x'\}.$$

(b) En utilisant le fait que C et D sont des g -chaînes, montrer que $x = x'$.

(c) Montrer que la chaîne bien ordonnée $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \cup \{x\}$ est un segment initial de C et D .

11. En déduire que étant donné deux g -chaînes, l'une est un segment initial de l'autre.

On peut terminer la preuve du lemme de Zorn. Soit (E, \leq) un ensemble ordonné dont toutes les chaînes bien ordonnées possèdent un majorant. Soit g une fonction donnée par la question 8. Soit \mathcal{G} la réunion de toutes les g -chaînes de (E, \leq) .

12. En utilisant les questions 7 (c) et 11, montrer que \mathcal{G} est une chaîne bien ordonnée de E .

Soit $x \in \mathcal{G}$.

13. Justifier qu'il existe une g -chaîne C telle que $x \in C$.

14. Montrer que $\{y \in C, y < x\} = \{y \in \mathcal{G}, y < x\}$.

15. En déduire que \mathcal{G} est une g -chaîne.

16. Montrer que \mathcal{G} n'a pas de majorant strict.

17. Terminer la preuve du lemme de Zorn.

3.2.3 Applications

Nous donnons deux applications du lemme de Zorn : le théorème de Zermelo et l'existence de base pour n'importe quel espace vectoriel (i.e. pas d'hypothèse de dimension finie).

Théorème. Théorème de Zermelo.

Tout ensemble non vide peut être muni d'un bon ordre.

Nous prouvons le théorème de Zermelo. Soit E un ensemble non vide et soit \mathcal{A} l'ensemble des parties de E qui peuvent être munies d'un bon ordre.

On définit sur \mathcal{A} une relation d'ordre de la façon suivante : si (A_1, \leq_1) et (A_2, \leq_2) sont deux éléments de \mathcal{A} , on dit que $(A_1, \leq_1) < (A_2, \leq_2)$ si et seulement si : $A_1 \subset A_2$, la restriction de \leq_2 à A_1 est \leq_1 et tous les éléments de $B \setminus A$ sont plus grands que ceux de A .

18. Vérifier que \mathcal{A} est non vide.

19. Montrer que toute chaîne bien ordonnée de \mathcal{A} possède un majorant.

20. Justifier que $(\mathcal{A}, <)$ possède un élément maximal (M, \leq) .

21. Montrer que $M = E$.

Indication : On pourra supposer $M \neq E$. Si $x \in E \setminus M$, on pourra construire un ordre sur $M \cup \{x\}$.

Proposition. *Existence de base pour un espace vectoriel.*
Tout espace vectoriel admet des bases.

Nous prouvons la proposition. Soit E un espace vectoriel non nul sur un corps \mathbf{K} . Soit \mathcal{F} l'ensemble des familles libres de E . On ordonne \mathcal{F} avec la relation d'inclusion.

22. Montrer que \mathcal{F} n'est pas vide.
23. Montrer que toute chaîne bien ordonnée admet un majorant.
24. Justifier l'existence d'un élément maximal \mathcal{B} et montrer que \mathcal{B} est une base de E .

Correction du Thème 3

1.
 - Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, alors le couple $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ convient.
 - Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel, alors

$$\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{(\sqrt{2})^2} = (\sqrt{2})^2 = 2 \in \mathbf{Q},$$

auquel cas, le couple $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \sqrt{2})$ convient.

On a montré qu'il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel.

2. (a) Soit p une proposition et on suppose $\neg\neg p$.
Si p est réalisée, alors c'est terminé. Si $\neg p$ est réalisée, on obtient une contradiction car on a supposé $\neg\neg p$.

On a montré que le tiers exclu implique le principe de raisonnement par l'absurde.

- (b) Soit p une proposition.

La proposition $\neg(\neg p \text{ ou } p)$ est fausse car elle mène à $\neg\neg p$ et $\neg p$.

Ainsi, on a $\neg\neg(\neg p \text{ ou } p)$, donc comme l'on a supposé le principe de raisonnement par l'absurde, on a $\neg p \text{ ou } p$.

On a montré que le principe de raisonnement par l'absurde implique le tiers exclu.

3. (a) Soient p et q deux propositions. On suppose que $\neg q$ implique $\neg p$. On suppose que l'on a p .
Si l'on avait $\neg q$, par hypothèse, on aurait $\neg p$ et donc une contradiction.
On a donc $\neg\neg q$. Or, par le principe de raisonnement par l'absurde, $\neg\neg q$ implique q .

Ainsi, le principe de raisonnement par l'absurde entraîne celui de raisonnement par contraposée.

- (b) Soit p une proposition telle que $\neg\neg p$ soit vraie. Autrement dit, par définition de la négation, $\neg p$ aboutit à une contradiction.

Il s'ensuit que l'implication $(\neg p) \implies (1 + 1 = 2)$ est vraie (On rappelle qu'une implication dans laquelle la prémisse est fausse, est toujours vraie. Plus trivialement, on montre « n'importe quoi » à partir d'une prémisse fausse).

Par le principe de raisonnement par contraposée, l'implication

$$(1 + 1 = 2) \implies p$$

est vraie.

Or, une implication dont la prémisse est vraie, est vraie si, et seulement si, la conclusion est vraie.

On en déduit que p est vraie.

Ainsi, le principe de raisonnement par contraposée entraîne celui de raisonnement par l'absurde.

4. On suppose qu'il existe deux entiers naturels p et q non nuls tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Quitte à simplifier la fraction par $p \wedge q$ (le PGCD de p et q), on peut supposer $p \wedge q = 1$.

En élevant au carré, on obtient $p^2 = 2q^2$, donc 2 divise p^2 , puis comme 2 est premier, 2 divise p : il existe $p' \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2p'$.

On a donc $2p'^2 = q^2$. On a : 2 divise q , donc 2 divise q (car 2 est un nombre premier).

On a montré que 2 divise p et q , donc 2 divise $p \wedge q = 1$.

Ainsi $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Remarque. Ce raisonnement n'est pas un raisonnement par l'absurde : on utilise la définition de la négation c'est-à-dire, en supposant « $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ », on obtient une contradiction, donc on a $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

5. Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombres premiers p_1, \dots, p_n .

Soit $N = p_1 \cdots p_n + 1$. Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $p_i \geq 2$, on a $N > p_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, ainsi N n'est pas un nombre premier.

Comme N n'est pas premier, il est divisible par un certain nombre premier p_j avec $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Comme p_j divise $p_1 \cdots p_n$, p_j divise aussi 1, donc $p_j = 1$ car $p_j \geq 0$. Or, 1 n'est pas un nombre premier.

Il s'ensuit que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Remarque. Encore une fois, ce raisonnement n'est pas un raisonnement par l'absurde : on utilise la définition de la négation c'est-à-dire, en supposant que « l'ensemble des nombres premiers est fini », on obtient une contradiction, donc on a « l'ensemble des nombres premiers est infini ».

6. Soit $C \in \mathcal{S}$. Il est clair que $C \subset \Sigma$.

Soit $x \in C$. Soit $y \in \Sigma$ tel que $y < x$. Ainsi, il existe $D \in \mathcal{S}$ tel que $y \in D$.

Si D est un segment initial de C , alors $D \subset C$, donc $y \in C$.

Sinon, C est un segment initial de D et comme $y < x$, on a $y \in C$.

On a montré que C est un segment initial de Σ .

7. (a) Comme $X \subset \Sigma$, il existe $C \in \mathcal{S}$ tel que $X \cap C \neq \emptyset$.

Comme $X \cap C \subset C$ et C est bien ordonné,

$X \cap C$ admet un plus petit élément.

- (b) On suit l'indication et on distingue deux cas :

- Si $y \in C$, alors $y \in C \cap X$ et on a $a \leq y$ par définition de a .

- Si $y \notin C$, il existe $D \in \mathcal{S}$ tel que $y \in D$.

Comme $D \not\subset C$, C est un segment initial de D .

Comme $y \notin C$ et $a \in C$, par définition d'un segment initial et $a \leq y$ car D est une chaîne bien ordonnée.

On a montré que $a \leq y$.

- (c) On a montré que toute partie non vide de Σ admet un plus petit élément, donc Σ est bien ordonné.

En particulier, l'ordre sur Σ est total : si x et y sont deux éléments de Σ , l'ensemble $\{x, y\}$ admet un plus petit élément, donc on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Dans tous les cas, les éléments x et y sont comparables et la restriction de \leq à Σ est total.

On a montré que Σ est une chaîne bien ordonnée de E pour \leq .

8. Soit f une fonction de choix $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.
Si on note $\mathcal{M}(C)$ l'ensemble des majorants stricts d'une chaîne C bien ordonnée ayant des majorants stricts, on pose

$$g(C) = f(\mathcal{M}(C)).$$

9. • $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ est un sous-ensemble d'un ensemble bien ordonné (de C ou D), il est donc bien ordonné. En particulier, la restriction de \leq à $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ est total (remarque faite à la correction de la question 7 (c)).

- Nous allons montrer que $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ est donc un segment initial de C , un même raisonnement montre que $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ est un segment initial de D .

Il est clair que $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \subset C$.

Soit $x \in \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$. Soit $y \in C$ tel que $y < x$. Il existe $R_0 \in \mathcal{R}$ tel que $x \in R_0$.

Comme R_0 est un segment initial de C , on a $y \in R_0$, donc $y \in \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$.

Ainsi, $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ est un segment initial de C .

On a montré $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ que une chaîne bien ordonnée et que c'est un segment initial de C et D .

10. (a) Comme l'on suppose $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \neq C$, $C \setminus \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ est non vide.
Comme C est bien ordonné, $C \setminus \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ admet un plus petit élément x . Pour montrer que

$$\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R = \{y \in C, y < x\},$$

on procède par double inclusion.

\square Soit $y \in \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$, comme $x \notin \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ et comme $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ est un segment initial de C (question 9), on a $y < x$.

\square Soit $y \in C$ est tel que $y < x$, alors $y \notin C \setminus \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ par définition de x , ainsi $y \in \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$.

On a donc $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R = \{y \in C, y < x\}$.

Un même raisonnement montre qu'il existe $x' \in D$ tel que

$$\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R = \{y \in D, y < x'\}.$$

On a montré qu'il existe $x \in C$ et $x' \in D$ tels que

$$\boxed{\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R = \{y \in C, y < x\} = \{y \in D, y < x'\}.$$

(b) D'après la question 10 (a), on a

$$g\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R\right) = g(\{y \in C, y < x\}) = g(\{y \in D, y < x'\}).$$

Or, C et D sont des g -chaînes, donc

$$g(\{y \in C, y < x\}) = x \quad \text{et} \quad g(\{y \in D, y < x'\}) = x'.$$

$\boxed{\text{On a montré que } x = x'.$

(c) On montre que $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \cup \{x\}$ est un segment initial de C , un même raisonnement permet de montrer que $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \cup \{x\}$ est aussi un segment initial de D .

Clairement $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \cup \{x\} \subset C$.

Soit $y \in \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \cup \{x\}$ et soit $z \in C$ tel que $z < y$.

On distingue deux cas :

- Si $y \in \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$. D'après la question 9, $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ est un segment initial de C , donc $z \in \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \cup \{x\}$.
- Si $y = x$. D'après la question 10 (a), on a $z \in \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \cup \{x\}$.

Dans les deux cas, on a montré que $z \in \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \cup \{x\}$.

$\boxed{\text{On a montré que } \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \cup \{x\} \text{ est un segment initial de } C \text{ et } D.$

11. Si $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ (réunion de toutes chaînes bien ordonnées qui sont des segments initiaux de C et D) n'était pas un segment initial de C et de D , d'après les

questions 10 (a), 10 (b) et 10 (c), il existerait $x \in C \setminus \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ et $x \in D \setminus \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ tel que $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \cup \{x\}$ soit un segment initial de C et D . On aurait

$$\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \cup \{x\} \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R.$$

Cette inclusion est impossible.

On a montré que $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R = C$ ou $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R = D$.

Comme $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ est un segment initial de C et D (question 9), on en déduit que l'une des deux g -chaînes est un segment initial de l'autre.

On a montré qu'étant donné deux g -chaînes C et D , l'une est un segment initial de l'autre.

12. D'après la question 11, l'ensemble des g -chaînes est tel que étant donné deux g -chaînes, l'une est un segment initial de l'autre.

Par la question 7 (c), il s'ensuit que \mathcal{G} est une chaîne bien ordonnée.

13. Comme $x \in \mathcal{G}$ et par définition de \mathcal{G} , il existe une g -chaîne C telle que $x \in C$.
14. D'après la question 6, C est un segment initial de \mathcal{G} , donc

$$\{y \in C, y < x\} = \{y \in \mathcal{G}, y < x\}.$$

15. En reprenant l'égalité établie ci-dessus, on a

$$g(\{y \in C, y < x\}) = g(\{y \in \mathcal{G}, y < x\}).$$

Or, comme C est une g -chaîne, on a $g(\{y \in C, y < x\}) = x$, ainsi, on a montré que pour tout $x \in \mathcal{G}$,

$$x = g(\{y \in \mathcal{G}, y < x\}).$$

On a montré que \mathcal{G} est une g -chaîne.

16. Si \mathcal{G} avait un majorant strict, $\mathcal{G} \cup \{g(\mathcal{G})\}$ serait une g -chaîne. Par construction de \mathcal{G} , on aurait

$$\mathcal{G} \cup \{g(\mathcal{G})\} \subset \mathcal{G}.$$

Cette inclusion étant impossible par définition de g , \mathcal{G} n'a pas de majorant strict.

17. Soit m un majorant de \mathcal{G} (il existe par hypothèse), montrons que m un élément maximal de E .

Soit $x \in E$ tel que $m \leq x$. Si $m \neq x$, alors on a $m < x$. Il s'ensuit que x est un majorant strict de \mathcal{G} , ce qui est exclu d'après la question 16.

Ainsi, $x = m$ et m est un élément maximal de E .

Le lemme de Zorn est prouvé.

18. Un partie à un élément peut évident être munie d'un bon ordre!

19. Soit $X \subset \mathcal{A}$ une chaîne bien ordonnée. On note

$$X = \{(A_i, \leq_i), i \in I\}.$$

Soit $\mathcal{X} = \bigcup_{i \in I} A_i$. La restriction de \leq à \mathcal{X} prolonge clairement \leq_i pour tout $i \in I$.

Ainsi, $(\mathcal{X}, \leq_{\mathcal{X}})$ est un majorant de X .

On a montré que toute chaîne bien ordonnée possède un majorant.

20. Les hypothèses du *Lemme de Zorn* sont vérifiées par la question 19, par le *Lemme de Zorn* : (\mathcal{A}, \prec) admet un élément maximal (M, \leq) .

21. Si $M \neq E$, alors il existe $x \in E \setminus M$.

On construit alors $M \cup \{x\}$ un ordre $\tilde{\leq}$ de la façon suivante : $\tilde{\leq}|_M = \leq$ et pour tout $y \in M$, $y \tilde{\leq} x$.

Il est clair que $(M, \leq) \prec (M \cup \{x\}, \tilde{\leq})$.

Cela contredit la définition de (M, \leq) .

On en déduit que $M = E$.

22. Un ensemble constitué d'un élément non nul forme une famille libre, donc $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

23. Soit C une chaîne bien ordonnée de \mathcal{F} : on note $C = \{F_i, i \in I\}$.

Soit $M = \bigcup_{i \in I} F_i$. On montre maintenant que M est une famille libre.

Soient x_1, \dots, x_k des éléments de M et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ des scalaires tels que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0.$$

Par définition, il existe $j \in I$ tel que pour $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $x_i \in F_j$.

Comme F_j est une famille libre, on en déduit que

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0,$$

donc M est une famille libre.

On a montré que M est un majorant de C .

24. D'après le *Lemme de Zorn*, \mathcal{F} admet un élément maximal \mathcal{B} .

\mathcal{B} est une famille libre et maximal pour l'inclusion.

Si \mathcal{B} n'est pas une famille génératrice, alors il existe $x \in E$ et $x \notin \text{Vect}(\mathcal{B})$.

La famille $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cup \{x\}$ est une famille libre par construction de x .

Cela contredit le fait que \mathcal{B} est un élément maximal de \mathcal{F} .

Ainsi, \mathcal{B} est une famille génératrice, c'est donc une base de E .

Quelques remarques culturelles

L'axiome du tiers exclu est utilisé massivement par les mathématiciens et on ne mentionne pas lorsqu'on l'utilise. De plus, il semble « intuitivement » vrai.

L'axiome du choix semble également vrai, mais on ne peut le déduire des autres axiomes usuellement utilisés. L'une de ces conséquences est le paradoxe de Banach-Tarski qui stipule que l'on peut découper une sphère en un nombre fini de parties et « recoller » ces parties pour former deux sphères, toutes les deux identiques à la première. À partir de là, l'axiome du choix semble faux. En fait, les parties qui interviennent n'ont pas de sens physique car ce ne sont pas des parties mesurables (sens précis)...

Le lecteur intéressé pourra montrer que l'axiome du choix entraîne l'axiome du tiers exclu.

Thème 4

Géométrie du triangle

Thèmes abordés : Géométrie, trigonométrie.

Difficulté : ■■■□□□

Ce sujet présente quelques unes des nombreuses relations et formules de la géométrie du triangle : les formules d'Al-Kashi, la loi des sinus et la droite d'Euler.

Ce sujet ne nécessite que des connaissances de classe de Terminale.

Les parties sont largement indépendantes.

4.1 Les formules fondamentales

Notations. Soit ABC un triangle non aplati. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $\widehat{A} = \widehat{CAB}$, $\widehat{B} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{C} = \widehat{BCA}$.

4.1.1 Formules d'Al-Kashi

Proposition. Formules d'Al-Kashi.

Dans un triangle ABC , on a :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A}), \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\widehat{B})$$

et

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\widehat{C}).$$

1. Montrer que les formules d'Al-Kashi permettent de retrouver le théorème de Pythagore.
2. En remarquant que $a^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2$, montrer la première formule d'Al-Kashi. On admet les deux autres formules d'Al-Kashi.

4.1.2 La loi des sinus

Proposition. *Loi des sinus.*

Soit ABC un triangle non aplati dont on note S l'aire. On a

$$\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = \frac{abc}{2S}.$$

Nous prouvons la loi des sinus.

3. Montrer que $S = \frac{bc \sin(\widehat{A})}{2}$.

4. En déduire que $\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin(\widehat{A})}$.

5. Montrer de même les autres égalités.

4.1.3 Formule de Héron

Proposition. *Formule de Héron.*

Soit ABC un triangle non aplati dont on note S l'aire. On note $p = \frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre. Alors

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Nous prouvons la formule de Héron.

6. Justifier que l'on a

$$S = \frac{1}{2}bc \sin(\widehat{A}) \quad \text{et} \quad \cos(\widehat{A}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

7. En déduire que

$$16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2.$$

8. Vérifier que

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

9. Terminer la preuve de la formule de Héron.

4.1.4 Inégalité isopérimétrique pour le triangle

10. Montrer que

$$S^2 \leq \frac{p^4}{27}.$$

Indication : On pourra utiliser la formule de Héron et l'inégalité arithmético-géométrique vue au Thème 1 : « Inégalités classiques ».

11. En déduire que le triangle équilatéral est le triangle qui, à aire donnée, minimise le périmètre.

4.2 La droite d'Euler

Soit ABC un triangle non aplati. On note O le point de concours des médiatrices, H celui des hauteurs et G celui des médianes. Nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition. *Droite d'Euler.*

Dans un triangle ABC non aplati, les points O , G et H sont alignés.

Soient A' (resp. B' , resp. C') le milieu du segment $[BC]$ (resp. $[AC]$, $[AB]$). Soit M le point défini par la relation $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

12. Montrer que $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OA'}$.
13. En déduire que les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires.
14. Montrer de même que les droites (BM) (resp. (CM)) et (BC) (resp. (AB)) sont perpendiculaires.
15. En déduire que M est l'orthocentre du triangle ABC .
16. À partir de l'égalité $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, montrer que

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OA'}$$

17. Montrer que $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH}$.
18. Conclure.

Correction du Thème 4

1. Soit ABC un triangle rectangle, par exemple en A .
D'après une des formules d'Al-Kashi, on a

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A}).$$

Comme $\cos(\widehat{A}) = 0$ car $\widehat{A} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, on en déduit

$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

On a montré que chaque formule d'Al-Kashi implique le théorème de Pythagore.

2. On a

$$a^2 = \|\vec{BC}\|^2 = \|\vec{BA} + \vec{AC}\|^2 = \|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2.$$

En développant $\|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2$, on obtient

$$\|\vec{AC} - \vec{AB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} + \|\vec{AB}\|^2.$$

Or, $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = AC \times AB \times \cos(\widehat{A})$, d'où

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\widehat{A}).$$

3. Soit H_C la projection orthogonal de C sur la droite (AB) . On a

$$S = \frac{1}{2} AB \times CH_C.$$

Dans le triangle rectangle ACH_C , on a $\sin(\widehat{A}) = \frac{CH_C}{AC}$, d'où

$$CH_C = AC \sin(\widehat{A}).$$

On en déduit

$$S = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2} bc \sin(\widehat{A}).$$

4. En multipliant par a l'égalité établie à la question 3, on en déduit

$$Sa = \frac{abc \sin(\widehat{A})}{2}.$$

Comme le triangle ABC n'est pas aplati, on a $abc \neq 0$, $S > 0$ et $\sin(\widehat{A}) \neq 0$, d'où

$$\frac{abc}{2S} = \frac{a}{\sin(\widehat{A})}.$$

5. Par symétrie des longueurs BC , CA et AB on en déduit

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})} = \frac{abc}{2S}}$$

6. • La relation $S = \frac{1}{2}bc \sin(\widehat{A})$ est la relation établie à la question 3.

• La relation $\cos(\widehat{A}) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ découle d'une des formules d'Al-Kashi établie à la question 2.

7. De $S = \frac{1}{2}bc \sin(\widehat{A})$, on en déduit

$$16S^2 = 4b^2c^2 \sin^2(\widehat{A}).$$

Or,

$$\begin{aligned} \sin^2(\widehat{A}) &= 1 - \cos^2(\widehat{A}) \\ &= 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 \\ &= \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{16S^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}.$$

8. D'une part, en posant

$$\mathcal{S} = 16p(p-a)(p-b)(p-c),$$

on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= 16 \times \frac{a+b+c}{2} \left(\frac{a+b+c}{2} - a\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - b\right) \left(\frac{a+b+c}{2} - c\right) \\ &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \\ &= (-a^2 + b^2 + 2bc + c^2)(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc). \end{aligned}$$

D'autre part, on a (identité remarquable)

$$4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2).$$

On a montré que

$$\boxed{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

9. Par les questions 7 et 8, on a

$$16S^2 = 16p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Comme $S \geq 0$, on en déduit

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

10. D'après la formule de Héron établie à la question 9, on a

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

D'après l'inégalité arithmético-géométrique, on a

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3} \right)^3.$$

Or, $p-a+p-b+p-c = 3p - (a+b+c) = p$, d'où $S^2 \leq \frac{p^4}{27}$.

11. On s'intéresse au cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Dans la preuve de la question 10, seule l'inégalité arithmético-géométrique a été utilisée, ainsi l'inégalité de la question 10 est une égalité si, et seulement si, $p-a = p-b = p-c$ (cas d'égalité de l'inégalité arithmético-géométrique).

Or,

$$p-a = p-b = p-c \iff a = b = c.$$

On en déduit que l'inégalité établie à la question 10, est une égalité si, et seulement si, le triangle est équilatéral.

12. Par la relation de Chasles et par définition du point M , on a :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

$$\text{Or, } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'C} = 2\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C}.$$

Comme $\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} = \vec{0}$, on en déduit

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{OA'}.$$

13. En utilisant la question 12, on a :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{BC}.$$

Comme O est le point de concours des médiatrices, on a $\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

Les vecteurs \overrightarrow{AM} et \overrightarrow{BC} sont orthogonaux, ainsi

les droites (AM) et (BC) sont perpendiculaires.

14. Par symétrie des points A , B et C , on en déduit que les droites (BM) (resp. (CM)) et (BC) (resp. (AB)) sont perpendiculaires.

15. D'après les questions 13 et 14, M satisfait la définition de l'orthocentre d'un triangle.

16. En utilisant la relation de Chasles, on a

$$\vec{GA} = \vec{GO} + \vec{OA},$$

$$\vec{GB} = \vec{GO} + \vec{OB},$$

et

$$\vec{GC} = \vec{GO} + \vec{OC}.$$

On en déduit que

$$3\vec{GO} + \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}.$$

Comme $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA}'$ car A' est le milieu de $[BC]$, on en déduit que

$$\boxed{3\vec{OG} = \vec{OA} + 2\vec{OA}'}$$

17. À la question 15, on a montré que $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

Comme A' est le milieu de $[AB]$, on a $\vec{OB} + \vec{OC} = 2\vec{OA}'$, d'où

$$\vec{OH} = \vec{OA} + 2\vec{OA}'.$$

En utilisant cette dernière égalité avec celle établie à la question 16, on obtient finalement

$$\boxed{3\vec{OG} = \vec{OH}}.$$

18. La relation établie à la question 17 assure que les points O , G et H sont alignés ou confondus.

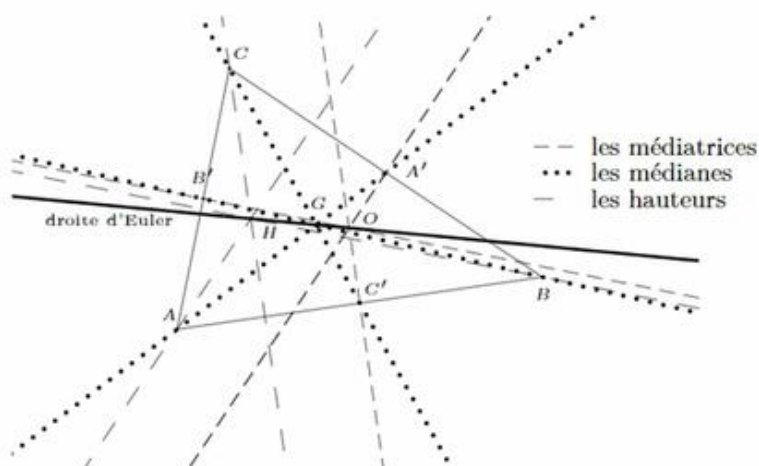


FIGURE 4.1 – Un triangle et sa droite d'Euler

Thème 5

Coloriage sur les graphes

Thèmes abordés : Graphe, récurrence, dénombrement, formule de Stirling.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet présente les problèmes de type Ramsey. On y calcule aussi quelques nombres de Ramsey. Le calcul de la plupart des nombres de Ramsey reste, à ce jour, sans réponse.

Ce sujet ne nécessite que des connaissances de classe de Terminale, sauf la question 10, mais sa résolution n'est pas nécessaire pour la suite du problème et pourra être admise.

La première partie introduit les graphes, la deuxième partie établit les premiers résultats sur les nombres de Ramsey et la dernière partie permet de calculer quelques nombres de Ramsey.

5.1 Graphe

Définition. *Graphe.*

Un graphe \mathcal{G} est la donnée :

- i) *d'un ensemble fini X qui sont les sommets du graphe ;*
- ii) *d'un ensemble fini de lignes, appelées arêtes qui relient deux sommets du graphe, appelés extrémités de l'arête.*

On notera que :

- *deux arêtes différentes peuvent avoir les mêmes extrémités ;*
- *les extrémités d'une arête peuvent être égales, on parle alors de boucle.*

Dans la suite, un graphe \mathcal{G} sera noté $\mathcal{G} = (X, A)$, X correspondant aux sommets et A aux arêtes.

Définition. *Degré d'un sommet.*

Soit $\mathcal{G} = (X, A)$ un graphe. Soit s un sommet du graphe.

On appelle degré du sommet s et on note $d(s)$ le nombre d'arêtes dont s est l'extrémité. Les boucles sont comptées deux fois (une fois par extrémité).

1. Soit $\mathcal{G} = (X, A)$ un graphe. Montrer l'égalité suivante, dite des poignées de mains

$$\sum_{x \in X} d(x) = 2 \operatorname{card}(A).$$

Définition. *Graphe complet.*

Soit $\mathcal{G} = (X, A)$ un graphe. Soit $n = \operatorname{card}(X)$.

On appelle **graphe complet** d'ordre n le graphe ayant n sommets et chaque couple de sommets est relié par une arête.

On le note K_n .

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Combien y-a-t-il d'arêtes dans K_n ?

Définition. *Sous-graphe.*

Soit $\mathcal{G} = (X, A)$ un graphe. Un **sous-graphe** \mathcal{G}' est la donnée de :

- i) d'un ensemble $X' \subset X$ qui constituent les sommets de \mathcal{G}' ;
- ii) d'un ensemble $A' \subset A$ qui constituent les arêtes de \mathcal{G}' .

Définition. *Graphe bicolore.*

Soit $\mathcal{G} = (X, A)$ un graphe. On dit que \mathcal{G} est **bicolore** s'il existe une application $\psi : A \rightarrow \{c_1, c_2\}$ où c_1 et c_2 sont deux éléments distincts d'un ensemble quelconque ayant au moins deux éléments.

Cette application associe à chaque arête une couleur.

5.2 Théorème de Ramsey

Définition. *Nombres de Ramsey bicolores.*

Soit $(p, q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

On appelle **nombre de Ramsey** $R(p, q)$ le plus petit entier naturel n (si un tel entier n'existe pas, on donne la valeur $+\infty$ à $R(p, q)$ mais on verra qu'un tel entier existe toujours) tel que, pour toute coloration bicolore en vert et rouge de K_n , il existe un sous-graphe K_p de K_n de couleur verte ou un sous-graphe K_q de K_n de couleur rouge.

3. Calculer $R(1, n)$ et $R(n, 1)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
4. Calculer $R(2, n)$ et $R(n, 2)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

On va montrer le théorème suivant prouvant que les nombres de Ramsey sont finis. La preuve donnera une majoration des nombres de Ramsey.

Théorème. *Théorème de Ramsey.*

Pour tout $(p, q) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, $R(p, q)$ est fini et

$$\forall (p, q) \in (\mathbf{N} \setminus \{0, 1\})^2, \quad R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1). \quad (5.1)$$

Nous allons montrer le théorème par récurrence sur $p + q$.

Pour tout $n \geq 2$, on introduit la proposition

\mathcal{P}_n : « pour tout $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $p + q = n$, $R(p, q)$ est fini ».

5. Montrer que \mathcal{P}_2 , \mathcal{P}_3 et \mathcal{P}_4 sont vraies.

6. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 4$. On suppose \mathcal{P}_k vraie pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $p + q = n + 1$.
- Pourquoi peut-on supposer p et q supérieurs ou égaux à 2 ?
 - Dans $K_{R(p-1, q) + R(p, q-1)}$ bicolore (de couleur verte et rouge), on fixe un sommet S .
On partitionne l'ensemble des autres sommets de $K_{R(p-1, q) + R(p, q-1)}$ en deux sous-ensembles \mathcal{R} et \mathcal{V} définis par : un sommet w appartient à \mathcal{R} (respectivement \mathcal{V}) si, et seulement si, l'arête qui le relie à S est de couleur rouge (respectivement verte).
Montrer que $\text{card}(\mathcal{V}) \geq R(p-1, q)$ ou $\text{card}(\mathcal{R}) \geq R(p, q-1)$.
 - On suppose dans cette question que $\text{card}(\mathcal{V}) \geq R(p-1, q)$.
Soit K_V le graphe complet formé des sommets de \mathcal{V} et de S .
 - Justifier que K_V contient un sous-graphe K_{p-1} de couleur verte ou un sous-graphe K_q de couleur rouge.
 - Montrer que dans K_V , il existe un sous-graphe complet K_p de couleur verte ou un sous-graphe complet K_q de couleur rouge.
 - En s'inspirant de la question 6 (c), montrer que le graphe complet K_R constitué des sommets de \mathcal{R} et de S contient un sous-graphe complet K_p de couleur verte ou un sous-graphe complet K_q de couleur rouge.
7. Terminer la récurrence et montrer que l'on a

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1).$$

8. Soient p et q deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si $R(p-1, q)$ et $R(p, q-1)$ sont pairs, alors

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1.$$

5.3 Calculs et majorations

5.3.1 Une majoration

9. En procédant par récurrence sur $p + q$, montrer que

$$\forall (p, q) \in (\mathbf{N} \setminus \{0, 1\})^2, \quad R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}.$$

10. En déduire que

$$R(s, s) \leq (1 + o(1)) \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}} \quad \text{lorsque } s \text{ tend vers } +\infty.$$

5.3.2 Calcul de $R(3, 3)$

- Montrer que $R(3, 3) \leq 6$.
- Donner un exemple de graphe K_5 bicolore (vert et rouge) n'ayant pas de sous-graphe K_3 de couleur rouge et aucun sous-graphe complet K_3 de couleur verte.
- En déduire que $R(3, 3) = 6$.

5.3.3 Calcul de $R(3, 4)$

14. Montrer que $R(3, 4) \leq 9$.
15. Donner un exemple de graphe K_8 bicolore (vert et rouge) n'ayant pas de sous-graphe K_3 de couleur rouge et aucun sous-graphe complet K_4 de couleur verte.
16. En déduire que $R(3, 4) = 9$.

Correction du Thème 5

1. Dans la somme $\sum_{x \in X} d(x)$, chaque arête est comptée deux fois (une fois par extrémité).

On a bien montré que $\sum_{x \in X} d(x) = 2 \text{ card}(A)$.

2. Par définition de K_n , il y a autant d'arêtes que de couples de sommets distincts. Or, il y a $\binom{n}{2}$ couples de sommets distincts.

On a montré qu'il y a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ arêtes dans K_n .

3. Les couleurs jouent des rôles symétriques, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$R(1, n) = R(n, 1).$$

Le graphe complet K_1 est unicolore, donc il contient un sous-graphe complet K_1 de couleur verte ou rouge.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R(1, n) = R(n, 1) = 1$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Par symétrie des couleurs, on a encore $R(2, n) = R(n, 2)$. Nous allons montrer que $R(2, n) = n$.

- Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Soit K_k le graphe complet ayant k sommets et monochromatique de couleur rouge.

Ce graphe ne contient aucun sous-graphe complet K_2 monochromatique de couleur verte et aucun sous-graphe complet K_n monochromatique de couleur rouge.

Ainsi, $R(2, n) \geq n$.

- Soit une coloration de K_n .

Si K_n est monochromatique, alors il contient un sous-graphe complet monochromatique K_2 de couleur verte ou un sous-graphe complet monochromatique K_n de couleur rouge.

Si K_n n'est pas monochromatique, il contient au moins une arête de couleur verte, donc il contient un sous-graphe complet K_2 monochromatique de couleur verte.

Ainsi, $R(2, n) \leq n$.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $R(2, n) = R(n, 2) = n$.

- 5.
- Pour $n = 2$.
On a $p = q = 1$, d'après la question 3, on a $R(p, q) = 1$, en particulier, $R(p, q)$ est fini, ainsi \mathcal{P}_2 est vraie.
 - Pour $n = 3$.
On a $p = 1$ et $q = 2$ ou bien $p = 2$ et $q = 1$. Dans tous les cas, d'après la question 3, on a $R(p, q) = 1$, donc $R(p, q)$ est fini et \mathcal{P}_3 est vraie.

- Pour $n = 4$.

Lorsque $p = q = 2$, alors d'après la question 4, on a $R(p, q) = 2$, donc $R(p, q)$ est fini.

Lorsque $p = 1$ et $q = 3$ ou bien $p = 3$ et $q = 1$, d'après la question 3, on a $R(p, q) = 1$, donc $R(p, q)$ est fini.

Ainsi, \mathcal{P}_4 est vraie.

6. (a) Si $p = 1$ ou $q = 1$, on sait que $R(p, q) = 1$ d'après la question 3.

- (b) Comme $(\mathcal{R}, \mathcal{V}, \{S\})$ est une partition des $R(p-1, q) + R(p, q-1)$ sommets de $K_{R(p-1, q) + R(p, q-1)}$, on a

$$R(p-1, q) + R(p, q-1) = \text{card}(\mathcal{V}) + \text{card}(\mathcal{R}) + 1.$$

Si $\text{card}(\mathcal{V}) < R(p-1, q)$ et $\text{card}(\mathcal{R}) < R(p, q-1)$, l'égalité établie ci-dessus serait mise en défaut.

On a montré que $\text{card}(\mathcal{V}) \geq R(p-1, q)$ ou $\text{card}(\mathcal{R}) \geq R(p, q-1)$.

- (c) i. Comme K_V contient au moins $R(p-1, q)$ sommets, par hypothèse de récurrence appliquée au sous-graphe complet K_V , K_V contient un sous-graphe complet K_{p-1} de couleur verte ou bien un sous-graphe complet K_q de couleur rouge.

- ii. On discute selon les cas qu'il existe un sous-graphe complet K_{p-1} de couleur verte ou un sous-graphe complet K_q de couleur rouge.

- S'il existe un sous-graphe complet K_{p-1} de couleur verte, comme les arêtes qui relient les arêtes de ce graphe sont de couleur verte, le sous-graphe complet constitué des arêtes de K_{p-1} et de S monochromatique de couleur verte est un sous-graphe complet K_p de couleur verte.

- S'il existe un sous-graphe complet K_q rouge, c'est terminé.

On a montré que K_R contient un sous-graphe complet K_p de couleur verte ou un sous-graphe complet de couleur rouge.

- (d) On suit les sous-questions de la question 6 (c).

On note K_R le sous-graphe complet constitué des arêtes de \mathcal{R} et de S .

Comme K_R contient au moins $R(p, q-1)$ arêtes, par hypothèse de récurrence, K_R contient au moins un sous-graphe complet K_p de couleur verte ou un sous-graphe complet K_{q-1} de couleur rouge.

Si K_R contient un sous-graphe K_p de couleur verte, c'est terminé.

S'il contient un sous-graphe complet K_{q-1} , les arêtes qui relient de graphe à S sont de couleur rouge (par définition de \mathcal{R}), ainsi le sous-graphe complet de K_R constitué des sommets du sous-graphe K_{q-1} et de S est de couleur rouge : c'est donc un sous-graphe K_q .

On a montré que K_R contient un sous-graphe complet K_p de couleur verte ou un sous-graphe complet de couleur rouge.

7. On a montré que pour tout couple d'entiers naturels (p, q) avec $p, q \geq 2$, (les autres cas ayant déjà été traité) le graphe complet $K_{R(p-1, q) + R(p, q-1)}$ contient au moins un sous-graphe complet K_p de couleur verte ou bien un sous-graphe complet K_q de couleur rouge.

De plus, par définition de $K(p, q)$, on a

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1).$$

8. On pose $n = R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1$. Soit S un sommet de K_n : S est donc l'extrémité de $n-1$ arêtes.

- Supposons que S soit l'extrémité d'au moins $R(p-1, q)$ arêtes de couleur verte ou $R(p, q-1)$ arêtes de couleur rouge. Par exemple, S est l'extrémité d'au moins $R(p-1, q)$ arêtes de couleur verte.

Soit \mathcal{S} un ensemble de $R(p-1, q)$ sommets dont les arêtes les relient à S sont de couleur verte.

D'après le *Théorème de Ramsey* (établi aux questions 5, 6 et 7), le graphe complet $K_{R(p-1, q)}$ dont les sommets sont les éléments de \mathcal{S} contient ou bien un sous-graphe complet K_{p-1} ou bien un sous-graphe complet K_q de couleur rouge.

★ Dans le cas, où le graphe complet $K_{R(p-1, q)}$ dont les sommets sont les éléments de \mathcal{S} contient un sous-graphe complet K_q de couleur rouge, la question est terminée.

★ Si le graphe complet $K_{R(p-1, q)}$ dont les sommets sont les éléments de \mathcal{S} contient un sous-graphe complet K_{p-1} de couleur verte. On note \mathcal{S}' l'ensemble de ses sommets.

Alors, le sous-graphe complet de K_n dont les sommets sont $\mathcal{S}' \cup \{S\}$ contient un sous-graphe K_p de couleur verte.

Le cas où $K_{R(p-1, q)}$ contient un sous-graphe complet K_{q-1} de couleur rouge se traite de manière analogue.

- Il reste à étudier le cas où aucun sommet de K_n n'a pas au moins $R(p-1, q)$ arêtes vertes ou $R(p, q-1)$ arêtes rouges. Comme

$$n-1 = R(p-1, q) + R(p, q-1) - 2,$$

il s'ensuit que tous les sommets de K_n sont l'extrémité d'exactement $R(p-1, q) - 1$ arêtes de couleur verte et de $R(p, q-1) - 1$ arêtes de couleur rouge.

Il s'ensuit que K_n contient $n \frac{R(p-1, q) - 1}{2}$ arêtes vertes (on divise par 2 par on compte deux fois les arêtes : une fois par extrémité).

Or, n et $R(p-1, q) - 1$ sont impairs, donc $n \frac{R(p-1, q) - 1}{2}$ n'est pas un entier, ce qui est exclu.

On a montré que si $R(p-1, q)$ et $R(p, q-1)$ sont pairs, alors

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1.$$

9. On procède par récurrence sur $p + q$.

Comme $p, q \geq 2$, on a $p + q \geq 4$, ainsi pour tout $n \geq 4$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « pour tout $p, q \geq 2$ tels que $p + q = n$, $R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}$ ».

Lorsque $p + q = 4$, on a $p = q = 2$ et d'après la question 4, $R(p, q) = 2$.

Or $\binom{2}{1} = 2$, donc on a bien montré que \mathcal{P}_4 est vraie.

On suppose la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel $n \geq 4$ fixé, montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Soient p, q deux entiers naturels avec $p, q \geq 2$ tels que $p + q = n + 1$.

Par la question 7, on a

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1).$$

En utilisant deux fois l'hypothèse de récurrence, on a

$$R(p-1, q) \leq \binom{p+q-3}{p-2} \quad \text{et} \quad R(p, q-1) \leq \binom{p+q-3}{p-1}.$$

En utilisant la formule de Pascal, on en déduit que

$$R(p, q) \leq \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{p+q-3}{p-1} = \binom{p+q-2}{p-1}.$$

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq 4$.

10. Lorsque $p = q = s$, d'après la question 9, on a

$$\forall s \in \mathbf{N}^*, \quad R(s, s) \leq \binom{2s-2}{s-1}.$$

Or,

$$\forall s \in \mathbf{N}^*, \quad \binom{2s-2}{s-1} = \frac{(2s-2)!}{((s-1)!)^2}.$$

En utilisant la formule de Stirling, on a

$$\frac{(2s-2)!}{((s-1)!)^2} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2s-2}{e}\right)^{2s-2} \sqrt{2\pi(2s-2)}}{\left(\left(\frac{s-1}{e}\right)^{s-1} \sqrt{2\pi(s-1)}\right)^2} \underset{s \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}}.$$

Ainsi,

$$R(s, s) \underset{s \rightarrow +\infty}{=} \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}} + o\left(\frac{4^{s-1}}{\sqrt{s}}\right) \underset{s \rightarrow +\infty}{=} \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}} (1 + o(1)).$$

On a montré que lorsque s tend vers $+\infty$,

$$R(s, s) \leq (1 + o(1)) \frac{4^{s-1}}{\sqrt{\pi s}}.$$

11. D'après la question 7, on a

$$R(3,3) \leq R(2,3) + R(3,2).$$

Or, en utilisant la question 4, on a $R(2,3) = R(3,2) = 3$, ainsi $R(3,3) \leq 6$.

12. Le graphe suivant montre un exemple de graphe complet K_5 n'ayant pas de sous-graphe K_3 de couleur rouge et aucun sous-graphe complet K_3 de couleur verte.

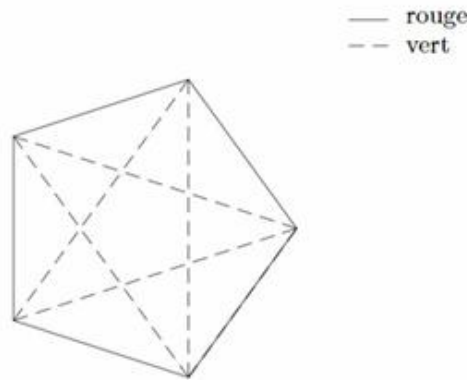


FIGURE 5.1

13. La question 12 montre que $R(3,3) \geq 6$, donc d'après la question 11,

$$R(3,3) = 6.$$

14. En utilisant la question 4 et la question 13, on a $R(2,4) = 4$ et $R(3,3) = 6$. Comme $R(2,4)$ et $R(3,3)$ sont pairs, d'après la question 8, on a

$$R(3,4) \leq R(2,4) + R(3,3) - 1 = 9.$$

15. Voici un exemple de graphe K_8 bicolore n'ayant pas de sous-graphe K_3 de couleur rouge et aucun sous-graphe complet K_4 de couleur verte.

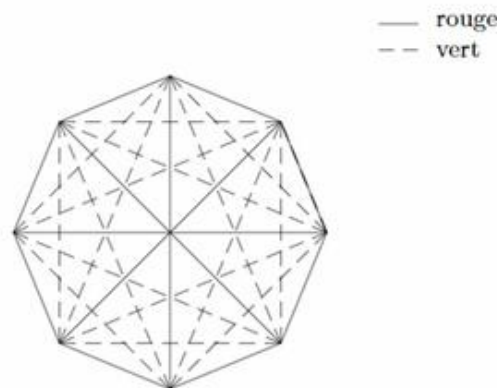


FIGURE 5.2

16. D'après la question 15, on a $R(3, 4) \geq 9$ et d'après la question 14, on a $R(3, 4) \leq 9$, on en déduit $R(3, 4) = 9$.

Thème 6

Développement en fraction continue

Thèmes abordés : Suite, récurrence.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet présente le développement en fraction continue d'un réel.

Sa résolution ne nécessite que des connaissances rudimentaires sur les suites réelles.

Les résultats de la partie 1 sont utilisés dans la partie 2. La partie 3 est indépendante des deux autres parties.

6.1 Définitions et étude de la convergence

Définition. *Fraction continue finie.*

Soit $q_0 \in \mathbf{Z}$ et $(q_1, \dots, q_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$. L'expression

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}}}$$

est appelée *fraction continue finie* et est notée $[q_0, q_1, \dots, q_n]$.

Définition. *Fraction continue infinie.*

Soit $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite telle que $q_0 \in \mathbf{Z}$ et $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $q_n \in \mathbf{N}^*$. L'expression (si elle existe)

$$q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \dots}}$$

est appelée *fraction continue infinie*.

Dans toute la suite, nous appellerons *fraction continue*, une fraction continue finie ou infinie.

Définition. *Convergence.*

Soit $[q_0, q_1, \dots]$ une fraction continue infinie.

Si la suite $([q_0, q_1, \dots, q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite α , nous dirons que la fraction continue infinie $[q_0, q_1, \dots]$ converge vers α et on note

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow +\infty} [q_0, q_1, \dots, q_n] = [q_0, q_1, \dots].$$

1. Soit $[q_0, q_1, \dots]$ une fraction continue infinie convergente.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fraction continue $[q_k, q_{k+1}, \dots]$ converge et

$$[q_0, q_1, q_2, \dots] = [q_0, \dots, q_{k-1}, [q_k, \dots]].$$

Le but de la fin de cette partie est de montrer la convergence de toute fraction continue infinie.

Avant de prouver cela, nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme. *Calcul des fractions continues.*

Soit $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers telle que $q_0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $i \geq 1$, $q_i \in \mathbb{N}^*$.

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$\begin{cases} a_0 = q_0, a_1 = q_0 q_1 + 1, & \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} q_{n+2} + a_n \\ b_0 = 1, b_1 = q_1, & \forall n \in \mathbb{N}, b_{n+2} = b_{n+1} q_{n+2} + b_n \end{cases}$$

Alors, nous avons :

$$\text{i) } \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha \geq 1, [q_0, q_1, \dots, q_n, \alpha] = \frac{\alpha a_n + a_{n-1}}{\alpha b_n + b_{n-1}};$$

$$\text{ii) } \forall n \in \mathbb{N}^*, [q_0, q_1, \dots, q_n] = \frac{a_n}{b_n}.$$

Nous prouvons le lemme.

2. Preuve de i). On prouve le résultat par récurrence sur n .

(a) Faire l'initialisation.

(b) Faire l'hérédité.

Indication : On pourra appliquer l'hypothèse de récurrence à $q_{n+1} + \frac{1}{\alpha}$.

3. Prouver ii).

Nous énonçons maintenant le théorème qui assure que toute fraction continue infinie converge.

Théorème. *Convergence des fractions continues infinies.*

Les mêmes notations sont les mêmes que celles utilisées au lemme précédent. On a :

i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = (-1)^{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}};$$

ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux;

- iii) La suite $(b_n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$;
- iv) Les suites $\left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ et $\left(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes ;
- v) La fraction continue $[q_0, q_1, \dots]$ converge.

Nous prouvons le théorème.

4. Montrer i) à l'aide des définitions des suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
5. En déduire ii).
6. À l'aide de la définition de la suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$, montrer iii).
7. En simplifiant $a_n b_{n+2} - a_{n+2} b_n$, montrer iv).
8. En utilisant le lemme *Calcul des fractions continues*, montrer v).

6.2 Développement en fraction continue d'un réel

9. Montrer que si $\alpha \notin \mathbf{Z}$, il existe un réel $\alpha_1 > 1$ et un entier relatif q_0 tels que

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{\alpha_1}.$$

Exprimer q_0 à l'aide de α .

10. (a) Montrer que, si $\alpha_1 \notin \mathbf{Z}$, alors il existe $q_1 \in \mathbf{N}^*$ et $\alpha_2 > 1$ tels que

$$\alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}.$$

(b) Montrer que l'on a aussi $\alpha = [q_0, q_1, \alpha_2]$.

11. Montrer qu'une telle construction peut se poursuivre tant que $\alpha_n \notin \mathbf{Z}$: il existe un réel $\alpha_{n+1} > 1$ et $q_n = [\alpha_n] \in \mathbf{Z}$ tels que $\alpha_n = q_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$ et on a alors

$$\alpha = [q_0, q_1, \dots, q_n, \alpha_{n+1}].$$

6.2.1 Développement en fraction continue d'un rationnel

12. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^*$. Montrer que $\alpha \in \mathbf{Q}$ si, et seulement si, il existe une fraction continue finie telle que $\alpha = [q_0, q_1, \dots, q_n]$.

6.2.2 Développement en fraction continue d'un irrationnel

Soit α un nombre irrationnel.

13. Montrer que l'on peut construire une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ de nombres irrationnels supérieurs à 1 tels que : $\alpha = [\alpha] + \frac{1}{\alpha_1}$ et pour tout $i \in \mathbf{N}^*$,

$$\alpha_i = [\alpha_i] + \frac{1}{\alpha_{i+1}}.$$

On notera dans la suite $(q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ la suite définie par $q_0 = [\alpha]$ et pour tout $i \geq 1$, $q_i = [\alpha_i]$.

14. Montrer que la fraction continue $[q_0, q_1, \dots]$ converge vers α .

15. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left| \alpha - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n^2}$$

où les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont définies au lemme *Calcul des fractions continues*.

16. Montrer que si $[q_0, q_1, q_2, \dots] = [q'_0, q'_1, q'_2, \dots] = \alpha$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $q_n = q'_n$.

6.3 Exemples et algorithmes

17. Écrire le développement en fraction continue de $\sqrt{2}$.

18. Écrire un programme Python qui prend en entrée un réel x et un entier naturel n et qui permet de calculer $[q_0, q_1, \dots, q_n]$.

Le tester pour $\sqrt{3}$ et $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Que remarque t-on ?

Correction du Thème 6

1. Soit $n > k$. On pose $\alpha_n = [q_0, q_1, \dots, q_n]$ et $\tilde{\alpha}_n = [q_k, q_{k+1}, \dots, q_n]$.

Pour tout $n > k$, on a

$$\alpha_n = [q_0, \dots, q_{k-1}, \tilde{\alpha}_n] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + \frac{1}{q_{k-1} + \frac{1}{\tilde{\alpha}_n}}}}}$$

Cette égalité se réécrit en : pour tout $n > k$,

$$\tilde{\alpha}_n = -q_{k-1} + \frac{1}{-q_{k-2} + \frac{1}{-q_{k-3} + \frac{1}{\dots + \frac{1}{-q_1 + \frac{1}{\alpha_n - q_0}}}}}$$

On notera que aucun des dénominateurs ci-dessus ne s'annule car $[q_0, q_1, \dots]$ est une fraction continue infinie.

Comme la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la suite $(\tilde{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Sa limite $\tilde{\alpha}$ vérifie $\alpha = [q_0, q_1, \dots, q_{k-1}, \tilde{\alpha}]$.

2. (a) Pour $n = 1$, pour tout $\alpha \geq 1$, on a :

$$[q_0, q_1, \alpha] = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\alpha}} = \frac{q_0 q_1 \alpha + \alpha + q_0}{q_1 \alpha + 1} = \frac{\alpha a_1 + a_0}{\alpha b_1 + b_0}.$$

(b) On suppose que tout réel $\tilde{\alpha} \geq 1$,

$$[q_0, q_1, \dots, q_n, \tilde{\alpha}] = \frac{\tilde{\alpha} a_n + a_{n-1}}{\tilde{\alpha} b_n + b_{n-1}}.$$

Soit $\alpha \geq 1$. L'hypothèse à récurrence appliquée à $q_{n+1} + \frac{1}{\alpha} \geq 1$ donne

$$\begin{aligned}
 [q_0, q_1, \dots, q_{n+1}, \alpha] &= \left[q_0, q_1, \dots, q_n, q_{n+1} + \frac{1}{\alpha} \right] \\
 &= \frac{\left(q_{n+1} + \frac{1}{\alpha} \right) a_n + a_{n-1}}{\left(q_{n+1} + \frac{1}{\alpha} \right) \beta_n + \beta_{n-1}} \\
 &= \frac{\alpha q_{n+1} a_n + \alpha a_{n-1} + a_n}{\alpha q_{n+1} \beta_n + \alpha a_{n-1} + a_n} \\
 &= \boxed{\frac{\alpha a_{n+1} + a_n}{\alpha \beta_{n+1} + \beta_n}}.
 \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \alpha \geq 1, \quad [q_0, q_1, \dots, q_n, \alpha] = \frac{\alpha a_n + a_{n-1}}{\alpha b_n + b_{n-1}}.}$$

3. On procède encore par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$\mathcal{P}_n : \ll [q_0, \dots, q_n] = \frac{a_n}{b_n} \gg.$$

Pour $n = 1$, on a bien $\frac{a_1}{b_1} = \frac{q_0 q_1 + 1}{q_1} = q_0 + \frac{1}{q_1}$. Ainsi, \mathcal{P}_1 est vraie.

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant l'égalité obtenue à la question 2 avec $\alpha = q_{n+1} \geq 1$, on a

$$\boxed{[q_0, q_1, \dots, q_n, q_{n+1}] = \frac{q_{n+1} a_n + a_{n-1}}{q_{n+1} b_n + b_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}.}$$

\mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad [q_0, q_1, \dots, q_n] = \frac{a_n}{b_n}.}$$

4. On traite séparément les deux égalités.

- *Première égalité*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n &= a_n (b_n q_{n+1} + b_{n-1}) \\ &\quad - b_n (a_n q_{n+1} + a_{n-1}) \\ &= -(a_{n-1} b_n - a_n b_{n-1}) \end{aligned}$$

La suite $(a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison -1 .
Or, $a_0 b_1 - a_1 b_0 = -1$, on obtient donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = (-1)^{n+1} .}$$

- *Seconde égalité*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour obtenir la seconde égalité, il suffit de diviser l'inégalité établie ci-dessus par $b_n b_{n+1} \neq 0$ pour obtenir

$$\frac{a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n}{b_n b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}} \iff \boxed{\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}} .}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. De l'égalité $a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n = (-1)^{n+1}$, on tire

$$a_n (-1)^{n+1} b_{n+1} + b_n (-1)^{n+2} a_{n+1} = 1.$$

De plus, une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des entiers relatifs.

$\boxed{\text{Par le théorème de Bezout, } a_n \text{ et } b_n \text{ sont premiers entre eux.}}$

6. Par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$b_{n+2} - b_{n+1} = (q_{n+2} - 1) b_{n+1} + b_n.$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_{n+2} \in \mathbb{N}^*$ et $b_n \geq 1$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{n+2} - b_{n+1} \geq 1.$$

$\boxed{\text{On en déduit que la suite } (b_n)_{n \geq 2} \text{ est strictement croissante.}}$

Une récurrence immédiate montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq n$.

$\boxed{\text{Le théorème de comparaison assure que } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty .}$

7. D'après une égalité établie à la question 4, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} a_n b_{n+2} - a_{n+2} b_n &= a_n (b_{n+1} q_{n+2} + b_n) - b_n (a_{n+1} q_{n+2} + a_n) \\ &= q_{n+2} (a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n) \\ &= (-1)^{n+1} q_{n+2}. \end{aligned}$$

En divisant l'égalité établie ci-dessus par $b_n b_{n+2} \neq 0$, on a :

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+2}}{b_{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1} q_{n+2}}{b_n b_{n+2}}.$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{a_{2n}}{b_{2n}} - \frac{a_{2n+2}}{b_{2n+2}} = -\frac{q_{2n+2}}{b_{2n}b_{2n+2}} \quad \text{et} \quad \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} - \frac{a_{2n+3}}{b_{2n+3}} = \frac{q_{2n+3}}{b_{2n+1}b_{2n+3}}.$$

Ainsi, la suite $\left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante et la suite $\left(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

De plus, en utilisant une égalité établie à la question 4, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}} - \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}} \right) = 0$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{b_{2n}b_{2n+1}} = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$ (question 6).

On a montré que les suites $\left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ et $\left(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes.

8. D'après la question 3, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$[q_0, q_1, \dots, q_n] = \frac{a_n}{b_n}.$$

Or, les suites $\left(\frac{a_{2n}}{b_{2n}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ et $\left(\frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ sont adjacentes, donc convergent vers une même limite ℓ .

Il s'ensuit que la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ .

On a montré que la fraction continue $[q_0, q_1, \dots]$ converge.

9. Si $\alpha \notin \mathbf{Z}$, on a $\alpha \neq [\alpha]$. On pose $q_0 = [\alpha]$.

Comme $0 < \alpha - q_0 < 1$, on a $\frac{1}{\alpha - q_0} > 1$. On pose $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - q_0}$.

10. (a) C'est le même raisonnement que celui de la question 9 : comme $\alpha_1 \notin \mathbf{Z}$, on a $[\alpha_1] \neq \alpha_1$.

On pose $q_1 = [\alpha_1]$. On a $0 < \alpha_1 - q_1 < 1$, ainsi si l'on $\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - q_1} > 1$,

on a

$$\alpha_2 > 1 \quad \text{et} \quad \alpha_1 = q_1 + \frac{1}{\alpha_2}.$$

(b) En utilisant les égalités établies aux questions 9 et 10 (a), on a :

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\alpha_2}} = [q_0, q_1, \alpha_2].$$

11. Par commodité, on pose $\alpha_0 = \alpha$.

On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n :

« si $\alpha_n \notin \mathbf{Z}$, il existe $\alpha_{n+1} > 1$ tel que $\alpha_n = q_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$ où $q_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$ et

$\alpha = [q_0, q_1, \dots, q_n, \alpha_{n+1}]$ ».

\mathcal{P}_1 est vraie d'après la question 10 (a).

Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel n non nul.

Si l'on pose $q_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$, on a $q_n < \alpha_n < q_n + 1$ et $0 < \alpha_n - q_n < 1$.

Il s'ensuit que $\alpha_n = q_n + (\alpha_n - q_n) = q_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$ où l'on a posé

$$\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - q_n} > 1.$$

On a aussi

$$\alpha = [q_0, q_1, \dots, q_n, \alpha_{n+1}].$$

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel non nul n .

12. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Soit $x \in \mathbf{Q}$: on écrit $x = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$. On écrit l'algorithme d'Euclide pour calculer $a \wedge b$ (le PGCD de a et b) :

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_0 \\ b &= r_0q_1 + r_1 \\ &\vdots \\ r_{k-1} &= r_kq_{k+1}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{b} \\ &= q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_0}} \\ &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_0}{r_1}}} \\ &\vdots \\ &= [q_0, q_1, \dots, q_k, q_{k+1}]. \end{aligned}$$

\Leftarrow On a $[q_0, \dots, q_n] \in \mathbf{Q}$ car les $q_i \in \mathbf{Z}^*$, ainsi $\alpha \in \mathbf{Q}$.

On a montré qu'un réel est rationnel si, et seulement si, son développement en fraction continue est fini.

13. Par commodité, on pose $\alpha_0 = \alpha$.

On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose la proposition

$$\mathcal{P}_n : \ll \text{il existe un irrationnel } \alpha_n > 1 \text{ tel que } \alpha_{n-1} = [\alpha_{n-1}] + \frac{1}{\alpha_n} \gg.$$

Comme $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a $\alpha \neq [\alpha]$. Or,

$$\alpha = [\alpha] + (\alpha - [\alpha]) = [\alpha] + \frac{1}{\alpha_1}$$

où $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - [\alpha]} > 1$ car $0 < \alpha - [\alpha] < 1$.

Il est clair que $\alpha_1 \notin \mathbb{Q}$ car $\alpha \notin \mathbb{Q}$, donc \mathcal{P}_1 est vraie.

Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel n non nul.

Comme $\alpha_n \notin \mathbb{Q}$, on a $\alpha_n \neq [\alpha_n]$. Or,

$$\alpha_n = [\alpha_n] + (\alpha_n - [\alpha_n]) = [\alpha_n] + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

où $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - [\alpha_n]} > 1$ car $0 < \alpha_n - [\alpha_n] < 1$.

On note aussi que α_{n+1} est irrationnel : en effet s'il était rationnel, alors α_n le serait, ce qui est exclu grâce à l'hypothèse de récurrence.

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, il existe une suite d'irrationnels $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant les conditions demandées.

14. La question 11 assure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha = [q_0, q_1, \dots, q_n, \alpha_{n+1}].$$

Or, par la question 2 (b), on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad [q_0, q_1, \dots, q_n, \alpha_{n+1}] = \frac{\alpha_{n+1}a_n + a_{n-1}}{\alpha_{n+1}b_n + b_{n-1}}.$$

En utilisant une égalité établie à la question 4, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha - \frac{a_n}{b_n} &= \frac{\alpha_{n+1}a_n + a_{n-1}}{\alpha_{n+1}b_n + b_{n-1}} - \frac{a_n}{b_n} \\ &= \frac{a_{n-1}b_n - a_nb_{n-1}}{b_n(\alpha_{n+1}b_n + b_{n-1})} \\ &= \frac{(-1)^n}{b_n(\alpha_{n+1}b_n + b_{n-1})}. \end{aligned}$$

De cette relation, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{a_{2n}}{b_{2n}} < \alpha < \frac{a_{2n+1}}{b_{2n+1}}.$$

Or, d'après la question 8, la suite $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge : elle converge donc vers α .

On a montré que la suite $([q_0, q_1, \dots, q_n])_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

15. À la question 14, on a établi en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, α est compris entre $\frac{a_n}{b_n}$ et $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$, ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \alpha - \frac{a_n}{b_n} \right| < \left| \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \right|,$$

l'inégalité étant stricte car α est irrationnel.

Or, en utilisant une égalité établie à la question 4, on récupère

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \alpha - \frac{a_n}{b_n} \right| < \left| \frac{a_n b_{n+1} - b_n a_{n+1}}{b_n b_{n+1}} \right| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}} \right| = \frac{1}{b_n b_{n+1}}.$$

Comme la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \alpha - \frac{a_n}{b_n} \right| < \frac{1}{b_n^2}.$$

16. On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}_n : \text{« } q_n = q'_n \text{ et } [q_{n+1}, q_{n+2}, \dots] = [q'_{n+1}, q'_{n+2}, \dots] \text{ »}.$$

D'après la question 13, il existe deux nombres irrationnels β et β' strictement supérieurs à 1 tels que

$$\alpha = q_0 + \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad \alpha = q_0 + \frac{1}{\beta'}.$$

On en déduit

$$|q_0 - q'_0| < \left| \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta'} \right| < 1$$

car β et β' sont strictement supérieurs à 1.

Comme q_0 et q'_0 sont des entiers, on a $q_0 = q'_0$, ainsi \mathcal{P}_0 est vraie. De plus, d'après la question 1,

$$[q_0, q_1, q_2, \dots] = [q_0, [q_1, q_2, \dots]]$$

et

$$[q'_0, q'_1, q'_2, \dots] = [q'_0, [q'_1, q'_2, \dots]]$$

et en utilisant le fait que $q_0 = q'_0$, on en déduit que

$$[q_1, q_2, \dots] = [q'_1, q'_2, \dots].$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose \mathcal{P}_n vraie. D'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$[q_{n+1}, q_{n+2}, \dots] = [q'_{n+1}, q'_{n+2}, \dots],$$

ainsi, il existe deux nombres irrationnels β et β' strictement supérieurs à 1 tels que

$$\alpha = q_{n+1} + \frac{1}{\beta} \quad \text{et} \quad \alpha = q'_{n+1} + \frac{1}{\beta'}.$$

Le même raisonnement fait lors de l'initialisation montre que

$$q_{n+1} = q'_{n+1} \quad \text{et} \quad [q_{n+2}, q_{n+3}, \dots] = [q'_{n+2}, q'_{n+3}, \dots].$$

\mathcal{P}_{n+1} est vraie. Par le principe de raisonnement par récurrence, en particulier, on a

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad q_n = q'_n.}$$

17. On garde les notations de la question 13. Comme $q_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, on a

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\alpha_1} \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \sqrt{2} + 1.$$

Or, $q_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor = 2$, donc on peut écrire

$$\alpha_1 = 2 + \frac{1}{\alpha_2} \quad \text{avec} \quad \alpha_2 = \sqrt{2} + 1.$$

Ainsi, $q_2 = 2$.

Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n = 2 \quad \text{et} \quad q_n = 2.$$

Ainsi,

$$\boxed{\sqrt{2} = [1, 2, 2, \dots].}$$

18. On peut écrire :

```

1 from math import *
2 def fractioncontinue(alpha,n):
3     l=[floor(alpha)]
4     a=alpha-floor(alpha)
5     for k in range(n):
6         if a==floor(a):
7             break
8         else:
9             a=1/(float(a-floor(a)))
10            l.append(floor(a))
11     return l

```

Le programme permet de conjecturer que

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots]$$

et

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = [1, 1, 1, \dots].$$

Dans les deux cas, on remarque que le développement est périodique à partir d'un certain rang.

Quelques remarques culturelles

Le résultat de la question 18 résulte d'un résultat général :

Théorème. *Théorème de Lagrange.*

Soit $x \in \mathbf{R}$.

Le développement en fraction continue de x est périodique à partir d'un certain rang si, et seulement si il existe $(a, b, c) \in \mathbf{Z}^3$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{6.1}$$

Un réel vérifiant (6.1) s'appelle un réel quadratique.

Thème 7

Étude de la suite logistique

Thèmes abordés : Suite, continuité, dérivabilité, série, développement limité.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet traite de la célèbre suite logistique : $u_{n+1} = au_n(1 - u_n)$. Dans ce sujet, on montre que la convergence a lieu pour tout $a \in]0, 3[$ et pour tout $u_0 \in [0, 1]$. Dans certains cas, on donne aussi une estimation de la vitesse de convergence.

Sa résolution ne nécessite que des connaissances rudimentaires sur les suites réelles, mais une bonne maîtrise des méthodes relatives aux suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ est indispensable.

Certains résultats de la partie 1 servent dans la partie 2.

7.1 Généralités

Nous commençons par prouver la proposition suivante sur l'attractivité des points fixes.

Proposition. *Attractivité des points fixes.*

Soient $a < b$ deux réels et soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Alors :

- i) Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , alors ℓ est un point fixe de f .
Dans toute la suite, ℓ est un point fixe de f .
- ii) Si $|f'(\ell)| > 1$ (**point fixe répulsif**), alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ si, et seulement si, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stationne à ℓ .
- iii) Si $|f'(\ell)| < 1$ (**point fixe attractif**), il existe un intervalle J non trivial contenant ℓ tel que pour tout $u_0 \in J$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

De plus, il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|.$$

- iv) Si $|f'(\ell)| = 1$, on ne peut rien conclure sur la convergence.

1. Prouver i).
2. Prouver ii).
3. Prouver iii).
4. Deux exemples pour la proposition iv).
 - (a) Soit $f : x \mapsto \sin(x)$. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Vérifier que 0 est un point fixe de f vérifiant $f'(0) = 1$ et montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.
 - (b) Soit $f : x \mapsto \ln(1+x) + x^2$. Soit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = f(v_n)$.
Vérifier que 0 est un point fixe de f vérifiant $f'(0) = 1$ et montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
5. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction dérivable. On suppose qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f'(x)| \leq k.$$

- (a) Montrer que f admet un unique point fixe ℓ sur $[a, b]$.
- (b) Montrer que pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ pour n'importe quelle valeur de $u_0 \in [a, b]$.
6. (a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un réel ℓ . Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .
- (b) En déduire que si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite telle que $(v_{n+1} - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ , alors la suite $\left(\frac{v_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ .
Cette conséquence de la question 6 (a) sera appelée *Lemme de l'escalier* dans la suite du problème.

7.2 Étude de la suite logistique

On note $I = [0, 1]$. Pour $a \in]0, 4]$, on définit sur I la fonction f_a par

$$f_a(x) = ax(1-x).$$

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par : $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = f_a(u_n).$$

7. Étudier les variations de f_a et montrer que f_a laisse stable I .
8. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie pour toute valeur de $u_0 \in I$.
9. Étudier les éventuels points fixes de f_a .

Le but de cette partie est d'établir la proposition suivante.

Proposition. *Convergence de la suite logistique.*

Lorsque $a \in]0, 3[$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour toute valeur $u_0 \in I$.

Pour prouver cette proposition, nous distinguons cinq cas.

7.2.1 Premier cas

Dans cette sous-partie, on suppose $a \in]0, 1[$.

10. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.
11. On suppose $u_0 \notin \{0, 1\}$. On se propose de donner un équivalent de u_n .
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$.
 - (b) En appliquant le *Lemme de l'escalier*, montrer que

$$\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(a)n.$$

- (c) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- (d) En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Aa^n$.

7.2.2 Second cas

Dans cette sous-partie, on suppose que $a = 1$.

12. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.
13. On suppose $u_0 \notin \{0, 1\}$. On se propose de donner un équivalent de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
 - (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \neq 0$.
 - (b) Montrer qu'il existe un réel β , dont on donnera la valeur, pour lequel la suite $(u_{n+1}^\beta - u_n^\beta)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un réel non nul.
 - (c) En appliquant le *Lemme de l'escalier*, donner un équivalent simple de u_n en $+\infty$.

7.2.3 Troisième cas

Dans cette sous-partie, on suppose $a \in]1, 2[$. On note α le point fixe non nul de f_a .

14. Conclure lorsque $u_0 \in \{0, 1, \alpha\}$.
15. On suppose $u_0 \notin \{0, 1, \alpha\}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers α .
16. On suppose dans cette question que $u_0 \notin \{0, 1, \alpha\}$. On se propose de donner un équivalent de $|u_n - \alpha|$.
On pose, pour $n \in \mathbf{N}$, $v_n = u_n - \alpha$. On suppose aussi que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas stationnaire.

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \neq 0$.
- (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \ln(|v_{n+1}|) = \ln(|v_n|) + \ln(|2 - a - v_n|).$$

- (c) En déduire que

$$\ln(|v_n|) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(2 - a)n.$$

- (d) Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} |v_n|$ converge. En déduire un équivalent de $|u_n - \alpha|$.

7.2.4 Quatrième cas

Dans cette sous-partie, on suppose $a = 2$.

17. Conclure lorsque $u_0 \in \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

18. On suppose $u_0 \notin \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad u_n < \frac{1}{2}.$$

(b) Donner une expression explicite de la suite $\left(\frac{1}{2} - u_n\right)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

(c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

7.2.5 Cinquième cas

Dans cette sous-partie, on suppose $a \in]2, 3[$.

19. Traiter les cas où $u_0 \in \left\{0, 1 - \frac{1}{a}, 1\right\}$.

20. On suppose $u_0 \notin \left\{0, 1 - \frac{1}{a}, 1\right\}$.

(a) Montrer que, quitte à considérer la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, on peut supposer $u_0 \in \left]0, 1 - \frac{1}{a}\right[$. On fait cette hypothèse dans la suite de la question 20.

(b) Montrer que l'ensemble $\left\{n \in \mathbf{N}, \frac{1}{a} \leq u_n \leq 1 - \frac{1}{a}\right\}$ n'est pas vide. Soit n_1 le plus petit élément de cet ensemble.

(c) Montrer que les suites $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies par : pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$v_{n+1} = f_a^2(v_n), \quad w_{n+1} = f_a^2(w_n) \quad \text{et} \quad v_0 = u_{n_1}, \quad w_0 = f_a(u_{n_1})$$

convergent.

Indication : L'application f_a^2 est $f_a \circ f_a$.

(d) Conclure.

7.3 Étude avec Python

21. Écrire un programme `suitelogistique(a,u0,n)`, qui calcule u_n où $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est la suite définie par $u_0 \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = au_n(1 - u_n)$ ($a \in [0, 3]$).

22. Modifier le programme précédent pour retrouver le résultat de la question 13 (c).

Correction du Thème 7 : Étude de la suite logistique

1. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leq u_n \leq b$, on a $\ell \in [a, b]$.

La continuité de f en $\ell \in [a, b]$ assure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$, par unicité de la limite, on a $\ell = f(\ell)$.

2. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Comme f est dérivable en ℓ et $|f'(\ell)| > 1$, par continuité de ℓ , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$, $|f'(x)| > 1$.

Soit $k = \min_{x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]} |f'(x)|$. Ce minimum existe en vertu du théorème des bornes atteintes de Weierstrass et est strictement supérieur à 1.

Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $u_n \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$.

En appliquant l'inégalité des accroissements finis, on obtient : pour tout $n \geq N$, $|f(u_n) - f(\ell)| \geq k|u_n - \ell|$, soit

$$|u_{n+1} - \ell| \geq k|u_n - \ell|.$$

Soit $n \geq N$, il est facile de montrer par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $|u_{n+p+1} - \ell| \geq k^p |u_n - \ell|$.

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} k^p = +\infty$, on en déduit que l'on doit avoir $|u_n - \ell| = 0$ soit $u_n = \ell$.

Il est alors facile de montrer que pour tout $m \geq n$, $u_m = \ell$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stationne.

\Leftarrow C'est immédiat.

L'équivalence est montrée.

3. Comme $|f'(\ell)| < 1$, par continuité de f' , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$ tel que $|f'(x)| < 1$.

Soit $k = \max_{x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]} |f'(x)|$. Ce maximum existe en vertu du théorème des bornes atteintes de Weierstrass et est strictement inférieur à 1.

Par l'inégalité des accroissements finis, pour tout $x \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$, on a :

$$|f(x) - f(\ell)| \leq k|x - \ell|$$

soit

$$|f(x) - \ell| \leq k|x - \ell|.$$

En particulier, $f(x) \in [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$.

Soit $J = [\ell - \alpha, \ell + \alpha] \cap [a, b]$.

Il est alors facile de montrer par récurrence que si

$u_0 \in J$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in J$

et

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell| .}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$ (car $k \in]-1, 1[$), par encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell .}$$

4. (a) Il est clair que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

En utilisant l'inégalité suivante : pour tout $x \geq 0$, $\sin(x) \leq x$, il est facile de montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

L'inégalité $\sin(x) \leq x$ valable pour tout $x \geq 0$ appliquée à $x = u_n$ donne $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 0$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante, minorée par 0 : elle converge.

Le seul point fixe de f dans l'intervalle $[0, 1]$ est 0, f étant continue sur $[0, 1]$, on a $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 .}$

- (b) Il est clair que $f(0) = 0$ et que $f'(0) = 1$.

Montrons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $v_n \geq 1$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition « $v_n \geq 1$ ».

Comme $v_0 = 1$, \mathcal{P}_0 est vraie.

On suppose que \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel n , montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par hypothèse de récurrence, $v_n \geq 1$, on a $\ln(1 + v_n) \geq 0$ et $v_n^2 \geq 1$, donc $v_{n+1} \geq 1$.

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \ln(v_n + 1) + v_n(v_n - 1) \geq 0.$$

La suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.

Si la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est majorée : elle converge vers un point fixe de f . Or, il est facile de voir que f n'a pas de point fixe sur $[1, +\infty[$.

Donc $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante et non majorée : $\boxed{\text{elle diverge vers } +\infty .}$

5. (a) • *Existence*

Soit g la fonction définie sur $[a, b]$ par $g(x) = f(x) - x$.

On a $g(a) = f(a) - a \geq 0$ car $f(a) \geq a$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ car $f(b) \leq b$.

g étant continue sur $[a, b]$ car f l'est, le théorème des valeurs intermédiaires assure que g s'annule sur $[a, b]$, donc f admet au moins un point fixe sur $[a, b]$.

- *Unicité*

Supposons que f ait deux points fixes x_1 et x_2 .

Comme f est dérivable sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f'(x)| \leq k < 1,$$

l'inégalité des accroissements finis assure que

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \leq k|x_1 - x_2|.$$

Cette inégalité ne peut être satisfaite que si $x_1 = x_2$.

On a montré que f admet un unique point fixe sur $[a, b]$.

(b) Soit $u_0 \in [a, b]$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|.$$

Ensuite, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|.$$

Comme $k \in]0, 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$, par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell.$$

6. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ , il existe $N_1 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $n \geq N_1$, on a

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &= \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n (u_k - \ell) \right| \\ &= \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{N_1-1} (u_k - \ell) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_1}^n (u_k - \ell) \right| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{N_1-1} (u_k - \ell) \right| + \frac{1}{n+1} \sum_{k=N_1}^n |u_k - \ell| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{N_1-1} (u_k - \ell) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \times \frac{n - N_1 + 1}{n+1} \\ &\leq \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{N_1-1} (u_k - \ell) \right| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Or, N_1 étant fixé, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{N_1-1} (u_k - \ell) \right| = 0,$$

donc, il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, \quad \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^{N_1-1} (u_k - \ell) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, on a

$$|v_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

On a montré que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ .

- (b) En utilisant le résultat de la question 6 (a), on en déduit que la suite $\left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) \right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ . Or, par télescopage,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (v_{k+1} - v_k) = \frac{1}{n+1} v_{n+1} - \frac{v_0}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_0}{n+1} = 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_{n+1}}{n+1} = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{n} = \ell.$$

7. Comme f_a est une fonction trinôme, on établit facilement que f_a est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et $f_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a$.

Comme $f_a(0) = f_a(1) = 0$, on a $f_a([0, 1]) \subset \left[0, \frac{1}{4}a\right] \subset [0, 1]$ car $a \in]0, 4]$.

On a montré que f_a est croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et que I est stable par f_a .

8. Soit $u_0 \in I$. Comme I est stable par f_a , on montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bien définie pour tout $u_0 \in I$.

9. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$f_a(x) = x \iff x(ax + (1-a)) = 0.$$

On en déduit que $x = 0$ ou $x = 1 - \frac{1}{a}$.

Il est clair que $0 \in I$ et $1 - \frac{1}{a} \in I \iff a \geq 1$.

Donc, si $a \in]0, 1]$, f_a admet un unique point fixe 0 et si $a \in]1, 4]$, f_a a deux points fixes 0 et $1 - \frac{1}{a}$.

10. Il est facile de voir que pour tout $x \in I$, $f_a(x) \leq x$.

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$ (question 8), ainsi $f_a(u_n) \leq u_n$ soit

$$u_{n+1} \leq u_n.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante, minorée par 0 : elle converge vers un point fixe de f dans $[0, 1]$.

Lorsque $a \in]0, 1[$, f_a admet un unique point fixe dans $[0, 1]$: 0.

$$\boxed{\text{On a montré que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.}$$

11. (a) On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « $0 < u_n < 1$ ».

Par hypothèse, \mathcal{P}_0 est vraie.

Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel n . Comme $u_n \in]0, 1[$ (hypothèse de récurrence), on a

$$u_{n+1} = au_n(1 - u_n) > 0.$$

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, on a en particulier montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > 0.}$$

(b) D'après la question 11 (a), pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n > 0$, donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + \ln(a) + \ln(1 - u_n). \quad (7.1)$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on obtient donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)) = \ln(a).$$

Par le *Lemme de l'escalier*, on récupère

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(a).$$

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k)) = \ln(u_n) - \ln(u_0),$$

on déduit donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(u_n) = \ln(a)$, soit

$$\boxed{\ln(u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(a) n.}$$

(c) D'après le résultat de la question 11 (b), il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \frac{\ln(u_n)}{\ln(a)n} \geq \frac{1}{2}.$$

$$\forall n \geq N, \quad \ln(u_n) \leq \frac{1}{2} \ln(a)n.$$

Ainsi, par croissance de la fonction \exp sur \mathbf{R} ,

$$\forall n \geq N, \quad u_n \leq \exp\left(\frac{1}{2} \ln(a)n\right).$$

Comme la série $\sum_{n \geq N} \exp\left(\frac{1}{2} \ln(a)n\right)$ converge (car $\ln(a) < 0$) et comme $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, par comparaison, on en déduit que la série $\sum_{n \geq N} u_n$

converge, ainsi $\boxed{\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge.}}$

(d) On reprend l'égalité (7.1) établie à la correction de la question 11 (b),

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + \ln(a) + \ln(1 - u_n).$$

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. En sommant l'inégalité précédente entre 0 et $N - 1$, on a

$$\ln(u_N) - \ln(u_0) = N \ln(a) + \sum_{n=0}^{N-1} \ln(1 - u_n).$$

D'où, en composant par la fonction \exp , on a

$$u_N = \exp\left(\ln(u_0) + \sum_{n=0}^{N-1} \ln(1 - u_n)\right) a^N.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on a $\ln(1 - u_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -u_n$. Comme la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge (question 11 (c)), par équivalence des séries à signe constant, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \ln(1 - u_n)$ converge. Soit

$$\alpha = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \ln(1 - u_n).$$

Par continuité de la fonction \exp , on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \exp\left(\ln(u_0) + \sum_{n=0}^{N-1} \ln(1 - u_n)\right) = \exp(\ln(u_0) + \alpha).$$

On pose $A = \exp(\ln(u_0) + \alpha)$. On a donc

$$\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} Aa^n.}$$

12. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$, ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est minorée, elle converge vers un point fixe de f_a dans I .

D'après la question 9, l'unique point fixe de f_a est 0.

On a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

13. (a) C'est la même récurrence que celle faite à la question 11 (a).

- (b) Soit $\beta \in \mathbf{R}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a (notons que u_n^β est bien défini d'après la question 13 (a)) :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^\beta &= u_n^\beta (1 - u_n)^\beta \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\beta (1 - \beta u_n + o(u_n)) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{=} u_n^\beta - \beta u_n^{\beta+1} + o(u_n^{\beta+1}). \end{aligned}$$

En prenant $\beta = -1$, on obtient

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1).$$

Pour $\beta = -1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}^\beta - u_n^\beta) = 1$.

- (c) En appliquant le *Lemme de l'escalier*, on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} 1 + o(1).$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}$, on obtient donc

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

On a montré que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

14. • Si $u_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $u_0 = \alpha$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \alpha$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.
- Si $u_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

15. On distingue plusieurs cas selon la valeur de u_0 .

- Si $u_0 \in]0, \alpha[$. Il est facile de vérifier que $f_a(]0, \alpha[) =]0, \alpha[$ et pour tout $x \in]0, \alpha[$, $f_a(x) \geq x$.

Il s'ensuit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante, majorée par α : elle converge vers un point fixe ℓ de f_a de $[0, \alpha]$.

Sur l'intervalle $[0, \alpha]$, f_a a deux points fixes : 0 et α .

Comme $u_0 > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante, ainsi $\ell \geq u_0 > 0$. Il s'ensuit que $\ell = \alpha$.

On a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

- On suppose $u_0 \in \left] \alpha, \frac{1}{2} \right[$. Il est facile de vérifier que $f_a\left(\left] \alpha, \frac{1}{2} \right[\right) = \left] \alpha, \frac{1}{2} \right[$ et pour tout $x \in \left] \alpha, \frac{1}{2} \right[$, $f_a(x) \leq x$.

Il s'ensuit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, minorée par α : elle converge vers un point fixe ℓ de f_a de $\left[\alpha, \frac{1}{2} \right]$.

Sur l'intervalle $\left[\alpha, \frac{1}{2} \right]$, f_a a un seul point fixe : α .

On a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

- Si $u_0 \in \left] \frac{1}{2}, \frac{1}{a} \right[$. Comme f_a est décroissante sur $\left] \frac{1}{2}, \frac{1}{a} \right[$, on a

$$u_1 \in \left] f_a\left(\frac{1}{a}\right), f_a\left(\frac{1}{2}\right) \right[.$$

Or $f_a\left(\frac{1}{a}\right) = \alpha$ et $f_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} \leq \frac{1}{2}$ car $a < 2$.

Il s'ensuit que $u_1 \in \left] \alpha, \frac{1}{2} \right[$. En suivant le deuxième point de cette question

15, on en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

- Si $u_0 = \frac{1}{a}$, alors $u_1 = 1 - \frac{1}{a} = \alpha$, donc la suite

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stationne sur α .

- Si $u_0 \in \left] \frac{1}{a}, 1 \right[$. La décroissance de f sur $\left] \frac{1}{a}, 1 \right[\subset \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$ (question 7)

assure que $u_1 \in \left] f_a(1), f_a\left(\frac{1}{a}\right) \right[=]0, \alpha[$.

On conclut, comme dans le premier point de cette question 15 que

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

16. (a) S'il existait un entier n tel que $v_n = 0$, alors $u_n = \alpha$: la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ serait stationnaire, ce qui est exclu.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = u_n + \alpha$, ainsi

$$v_{n+1} + \alpha = a(v_n + \alpha)(1 - v_n - \alpha).$$

En développant cette expression, en utilisant le fait que $\alpha = a\alpha(1 - \alpha)$ et $\alpha = 1 - \frac{1}{a}$ (question 9), on en déduit que :

$$v_{n+1} = v_n(2 - a - av_n),$$

soit

$$|v_{n+1}| = |v_n| |2 - a - av_n|.$$

Or, $|v_n| > 0$ et $|v_{n+1}| > 0$ (question 16 (a)), on a $|2 - a - av_n| > 0$, puis

$$\ln(|v_{n+1}|) = \ln(|v_n|) + \ln(|2 - a - av_n|). \quad (7.2)$$

Comme $(|v_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, ainsi la suite $(\ln(|v_{n+1}|) - \ln(|v_n|))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ln(2 - a) \neq 0$.

D'après le *Lemme de l'escalier*, on en déduit que la suite $\left(\frac{\ln(|v_n|)}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln(2 - a)$.

On a montré que $\ln(|v_n|) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(2 - a)n$.

- (c) C'est la même idée que celle utilisée pour la question 11 (c).
D'après le résultat de la question 16 (b), il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \ln(|v_n|) \leq \frac{1}{2} \ln(2 - a)n.$$

Ainsi, par croissance de la fonction exp sur \mathbb{R} ,

$$\forall n \geq N, \quad |v_n| \leq \exp\left(\frac{1}{2} \ln(2 - a)n\right).$$

Comme la série $\sum_{n \geq N} \exp\left(\frac{1}{2} \ln(2 - a)n\right)$ converge (car $\ln(2 - a) < 0$) et comme $|v_n| \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, par comparaison, on en déduit que

la série $\sum_{n \geq 0} |v_n|$ converge.

- (d) On reprend l'égalité (7.2) établie à la question 16 (b). On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ln(|v_{n+1}|) = \ln(|v_n|) + \ln(|2 - a - av_n|),$$

d'où (car $2 - a > 0$)

$$\ln(|v_{n+1}|) = \ln(|v_n|) + \ln(2 - a) + \ln\left(1 - \frac{a}{2 - a}v_n\right).$$

Soit $N \in \mathbf{N}^*$. En sommant cette inégalité entre 0 et $N - 1$, on récupère

$$\ln(|v_N|) = \ln(|v_0|) + N \ln(2 - a) + \sum_{k=0}^{N-1} \ln \left(\left| 1 - \frac{a}{2-a} v_k \right| \right),$$

puis en composant par la fonction \exp ,

$$|v_N| = \exp \left(\ln(|v_0|) + \sum_{k=0}^{N-1} \ln \left(\left| 1 - \frac{a}{2-a} v_k \right| \right) \right) (2-a)^N.$$

Comme $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0, il s'ensuit

$$\left| \ln \left(\left| 1 - \frac{a}{2-a} v_k \right| \right) \right| \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{2-a} |v_k|.$$

Or, la série $\sum_{k \geq 0} |v_k|$ converge (question 16 (c)), par équivalence des séries

à termes positifs, la série $\sum_{k \geq 0} \left| \ln \left(\left| 1 - \frac{a}{2-a} v_k \right| \right) \right|$ converge, donc la série $\sum_{k \geq 0} \ln \left(1 - \frac{a}{2-a} v_k \right)$ converge.

Soit $\alpha = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \ln \left(\left| 1 - \frac{a}{2-a} v_k \right| \right)$. Par continuité de la fonction \exp sur \mathbf{R} , on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \exp \left(\ln(|v_0|) + \sum_{k=0}^{N-1} \ln \left(\left| 1 - \frac{a}{2-a} v_k \right| \right) \right) = A.$$

où l'on a posé $A = \exp(\ln|v_0| + \alpha)$. On a montré que

$$\boxed{|u_n - \alpha| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} A(2-a)^n.}$$

17. • Si $u_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 0$, donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.}$
- Si $u_0 = \frac{1}{2}$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \frac{1}{2}$, donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$
- Si $u_0 = 1$, alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = 0$, donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.}$
18. (a) On procède par récurrence : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « $u_n < \frac{1}{2}$ ».
- Comme $u_0 \neq \frac{1}{2}$, on a $2u_0(1-u_0) < \frac{1}{2}$, donc \mathcal{P}_1 est vraie.
- On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel non nul n , montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

On a $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) < \frac{1}{2}$ car $u_n \neq \frac{1}{2}$ par hypothèse de récurrence.

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n non nul.

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < \frac{1}{2}$.

(b) On pose $v_n = \frac{1}{2} - u_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n) \iff v_{n+1} = 2v_n^2 = (\sqrt{2}v_n)^2.$$

Cette relation de récurrence permet de conjecturer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \sqrt{2}^{2^{n+1}-2} v_0^{2^n}.$$

On démontre cette conjecture par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « $v_n = \sqrt{2}^{2^{n+1}-2} v_0^{2^n}$ ».

De toute évidence, \mathcal{P}_0 est vraie.

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel n . On a

$$v_{n+1} = (\sqrt{2}v_n)^2 = \sqrt{2}^2 \sqrt{2}^{2^{n+2}-4} v_0^{2^{n+1}} = \sqrt{2}^{2^{n+2}-2} v_0^{2^{n+1}}.$$

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie. On a montré par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2} - u_n = \sqrt{2}^{2^{n+1}-2} \left(\frac{1}{2} - u_0\right)^{2^n}.$$

(c) Comme $u_0 \neq \frac{1}{2}$, l'expression de $\frac{1}{2} - u_n$ trouvée à la question 18 (b) donne

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2}^{2^{n+1}} \left(\frac{1}{2} - u_0\right)^{2^n} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} (1 - 2u_0)^{2^n}. \end{aligned}$$

Comme $u_0 \in]0, 1[$, on a $1 - 2u_0 \in]-1, 1[$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

19. On remarque facilement que si :

- si $u_0 = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$;
- si $u_0 = 1 - \frac{1}{a}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - \frac{1}{a}$;

- si $u_0 = 1$, alors $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, u_n = 0.}$

20. (a) • Si $u_0 \in \left]0, 1 - \frac{1}{a}\right[$, c'est terminé.

- On suppose donc $u_0 \in \left]1 - \frac{1}{a}, 1\right[$. Comme $a \in]2, 3[$, on a $1 - \frac{1}{a} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

Par la question 7, f_a est décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, donc sur $\left]1 - \frac{1}{a}, 1\right[$.

Comme f_a est continue sur $\left]1 - \frac{1}{a}, 1\right[$ et décroissante sur cet intervalle, on en déduit que

$$\begin{aligned} u_1 = f_a(u_0) \in f_a\left(\left]1 - \frac{1}{a}, 1\right[\right) &= \left]f_a(1), f_a\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right[\\ &= \left]0, 1 - \frac{1}{a}\right[. \end{aligned}$$

Ainsi, quitte à étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ à partir du rang 1, on peut supposer $u_0 \in \left]0, 1 - \frac{1}{a}\right[$.

(b) D'après la question 20 (a), on a $u_0 \in \left]0, 1 - \frac{1}{a}\right[$.

- Si $u_0 \in \left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]$, c'est terminé : $0 \in \left\{n \in \mathbf{N}, \frac{1}{a} \leq u_n \leq 1 - \frac{1}{a}\right\}$.
- On suppose $u_0 < \frac{1}{a}$ et on suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n < \frac{1}{a}$. On remarque

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{a}\right], \quad f_a(x) \geq x.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$. En prenant $x = u_n$ dans l'inégalité précédente (possible car $0 \leq u_n \leq \frac{1}{a}$), on a $u_{n+1} \geq u_n$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante, majorée par $\frac{1}{a}$: elle converge. On note ℓ sa limite.

Comme f_a est continue sur $[0, 1]$, ℓ est un point fixe de f_a , donc

$$\ell \in \left\{0, 1 - \frac{1}{a}\right\}.$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $0 < u_0 \leq u_n \leq \frac{1}{a} < 1 - \frac{1}{a}$, donc $u_0 \leq \ell \leq \frac{1}{a}$ et il n'est pas possible que $\ell \in \left\{0, 1 - \frac{1}{a}\right\}$. On obtient une contradiction.

Ainsi, l'ensemble $\left\{n \in \mathbf{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u_k \leq \frac{1}{a}\right\}$ est non vide (car il contient 0), majorée, donc il admet un plus grand élément n_0 .

Par définition de n_0 , on a $u_{n_0+1} > \frac{1}{a}$. De plus, comme

$$u_{n_0} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2},$$

par croissance de f_a sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a

$$u_{n_0+1} = f_a(u_{n_0}) \leq f_a\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - \frac{1}{a}.$$

On a donc $u_{n_0+1} \in \left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]$.

On a montré l'ensemble $\left\{n \in \mathbf{N}, \frac{1}{a} \leq u_n \leq 1 - \frac{1}{a}\right\}$ n'est pas vide.

(c) On procède par étapes.

- Une étude de la fonction f_a permet de montrer que

$$f_a\left(\left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]\right) = \left[1 - \frac{1}{a}, \frac{a}{4}\right].$$

et

$$\begin{aligned} f_a^2\left(\left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]\right) &= f_a\left(\left[1 - \frac{1}{a}, \frac{a}{4}\right]\right) \\ &= \left[f_a\left(\frac{a}{4}\right), f_a\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right] \\ &= \left[\frac{a^2(4-a)}{16}, 1 - \frac{1}{a}\right]. \end{aligned}$$

Or,

$$\frac{a^2(4-a)}{16} - \frac{1}{a} = \frac{a^3(4-a) - 16}{16}.$$

Une simple étude de la fonction

$$a \in]2, 3[\mapsto a^3(4-a) - 16$$

montre que pour tout $a \in]2, 3[$, $a^3(4-a) - 16 \geq 0$. Ainsi,

$$\frac{a^3(4-a)}{16} \geq \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad f_a^2\left(\left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]\right) \subset \left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right].$$

- L'étape précédente permet de montrer facilement par récurrence que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad v_n \in \left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a} \right] \quad \text{et} \quad w_n \in \left[1 - \frac{1}{a}, \frac{a}{4} \right].$$

- On montre que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge. On commence par donner l'expression de f_a^2 : pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f_a^2(x) &= aax(1-x)(1-ax(1-x)) \\ &= -a^3x^4 + 2a^3x^3 - a^2(1+a)x^2 + a^2x. \end{aligned}$$

On en déduit donc : pour tout $x \in [0, 1]$,

$$(f_a^2)'(x) = -4a^3x^3 + 6a^3x^2 - 2a^2(1+a)x + a^2$$

et

$$\begin{aligned} (f_a^2)''(x) &= -12a^3x^2 + 12a^3x - 2a^2(1+a) \\ &= -2a^2(6ax^2 - 6ax + 1 + a). \end{aligned}$$

Comme $v_n \in \left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a} \right]$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, nous allons étudier le signe de $(f_a^2)''(x)$ pour $x \in \left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a} \right]$.

Le discriminant Δ du trinôme $6ax^2 - 6ax + 1 + a$ vaut $\Delta = 12a(a-2)$ et est strictement positif car $a > 2$.

On en déduit que le trinôme $6ax^2 - 6ax + 1 + a$ a deux racines réelles $x_1 < x_2$.

Le calcul suivant

$$6a \times \left(\frac{1}{a} \right)^2 - 6a \times \frac{1}{a} + 1 + a = \frac{(a-2)(a-3)}{a} < 0$$

permet de conclure que $x_1 < \frac{1}{a}$.

De même, on a

$$6a \left(1 - \frac{1}{a} \right)^2 - 6a \left(1 - \frac{1}{a} \right) + 1 + a = \frac{-5a^2 + a + 6}{a}.$$

Le trinôme $-5a^2 + a + 6$ est aisé à étudier : son discriminant vaut 121 et ses racines sont $\frac{6}{5}$ et -1 .

Ainsi, pour tout $a \in]2, 3[$, $6a \left(1 - \frac{1}{a} \right)^2 - 6a \left(1 - \frac{1}{a} \right) + 1 + a \leq 0$.

Cela permet de conclure que $x_2 > 1 - \frac{1}{a}$. On en déduit donc que

$$\forall x \in \left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a} \right], \quad (f_a^2)''(x) \geq 0.$$

La fonction $(f_a^2)'$ est croissante sur $\left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]$. Or,

$$\forall x \in [0, 1], \quad (f_a^2)'(x) = f_a'(x) f_a'(f_a(x)).$$

Comme

$$\begin{aligned} (f_a^2)' \left(\frac{1}{a} \right) &= f_a' \left(\frac{1}{a} \right) f_a' \left(f_a \left(\frac{1}{a} \right) \right) \\ &= (a-2)a \left(1 - 2 \left(1 - \frac{1}{a} \right) \right) \\ &= -(a-2)^2 \end{aligned}$$

et

$$(f_a^2)' \left(1 - \frac{1}{a} \right) = f_a' \left(1 - \frac{1}{a} \right)^2 = (a-2)^2,$$

on a montré que

$$\forall x \in \left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a} \right], \quad -(a-2)^2 \leq (f_a^2)'(x) \leq (a-2)^2.$$

On a montré que f_a^2 est une application de $\left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]$ à valeurs dans $\left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]$ et vérifiant : pour tout $x \in \left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]$,

$$\left| (f_a^2)'(x) \right| \leq (a-2)^2 < 1,$$

car $a \in]2, 3[$.

D'après la question 5 (b), la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers l'unique point fixe de f_a^2 sur cet intervalle.

Or $1 - \frac{1}{a}$ est un point fixe de f_a sur $\left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]$, c'est aussi un point fixe de f_a^2 . Par unicité (question 5 (a)), c'est le seul point fixe de f_a^2 sur $\left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]$. On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $1 - \frac{1}{a}$.

- On montre que la suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

On remarque que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $w_n = f_a(v_n)$. Comme $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $1 - \frac{1}{a}$, par continuité de f_a sur $\left[\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right]$, on en déduit que la suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $f_a \left(1 - \frac{1}{a} \right) = 1 - \frac{1}{a}$.

On a montré que les suites $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers $1 - \frac{1}{a}$.

- (d) Il faut discuter si n_1 est pair ou impair.

- Si n_1 est pair, alors pour tout $n \geq \frac{n_1}{2}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
- Si n_1 est impair, alors pour tout $n \geq \frac{n_1}{2}$, $v_n = u_{2n+1}$ et $w_n = u_{2n}$.

Dans tous les cas, comme les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $1 - \frac{1}{a}$, on peut affirmer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $1 - \frac{1}{a}$.

21. On propose

```

1 def suitelogistique(a,u0,n):
2   u=u0
3   for k in range(n-1):
4     u=a*u*(1-u)
5   return u

```

22. On propose

```

1 def equivalent(u0,n):
2   u=u0
3   for k in range(n):
4     u=u*(1-u)
5   return n*u

```

La valeur renvoyée pour $n = 1000$ est proche de 0,993. Cela confirme le résultat trouvé à la question 13 (c) à savoir $\lim_{n \rightarrow +\infty} nu_n = 1$.

Quelques remarques culturelles

L'étude de la suite logistique lorsque $a \in [3, 4]$ est beaucoup plus ardu.

On peut montrer que la suite logistique converge lorsque $a = 3$ (voir Thème 8 : « Théorème de Coppel »).

Avant d'énoncer le surprenant théorème de Feigenbaum, on définit la notion de valeur d'adhérence.

Définition. *Valeur d'adhérence.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que ℓ est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Le lecteur intéressé pourra facilement montrer la proposition suivante :

Proposition. *Condition nécessaire et suffisante de convergence.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence.

Revenons à la suite logistique. Voici l'énoncé du théorème de Feigenbaum qui précise le comportement de la suite logistique.

Théorème. *Théorème de Feigenbaum.*

Il existe une suite strictement croissante $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ majorée par $\mu_\infty < 4$ telle que :

- i) *pour tout $a \in [\mu_n, \mu_{n+1}[$, pour toutes les valeurs de u_0 de $[0, 1]$ privé d'un ensemble au plus dénombrable de valeurs, la suite définie par $u_{n+1} = f_a(u_n)$ a 2^n valeurs d'adhérence ;*
- ii) *on a $\mu_0 = 0$, $\mu_1 = 3$ et $\mu_2 = 1 + \sqrt{6}$;*
- iii) *la suite $\left(\frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+2} - \mu_{n+1}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ;*
- iv) *on ne peut rien dire de général sur le comportement de la suite logistique lorsque $a \in [\mu_\infty, 4]$.*

Il va de soi que la preuve de ce résultat dépasse (de très loin) le niveau de ce problème.

Thème 8

Théorème de Coppel

Thèmes abordés : Fonction continue, suite récurrente.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet présente le théorème de Coppel, résultat utile pour étudier la convergence des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Ce sujet nécessite les connaissances élémentaires sur la continuité des fonctions.

Les résultats de la partie 2 servent dans la partie 3. La partie 4 est une application du théorème de Coppel énoncé à la partie 1 et démontré à la partie 3.

8.1 Énoncé du théorème de Coppel

Avant d'énoncer le théorème de Coppel, nous avons besoin de la définition suivante.

Définition. *Point n -périodique, n -cycle, $n \geq 2$.*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow I$ une fonction. Soit enfin $x \in I$.

- *On dit que x est n -périodique si :*

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_n(x) = x \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, f^k(x) \neq x.$$

- *On dit que f admet un n -cycle s'il existe un élément de I qui est n -périodique.*

Le but de ce problème est d'établir le résultat suivant.

Théorème. *Théorème de Coppel.*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue n'ayant pas de 2-cycle.

Alors, la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ converge pour n'importe quelle valeur de $x_0 \in [a, b]$.

8.2 Lemme préparatoire

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue n'ayant pas de 2-cycle.

Alors, pour tout $c \in [a, b]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$f(c) > c \text{ (resp. =, resp. <)} \implies (f^n(x) > c \text{ (resp. =, resp. <)}).$$

On procède par récurrence.

1. Montrer le lemme lorsque $n = 1$.

Soit $m \in \mathbf{N}$ tel que $m \geq 2$. On suppose le lemme vrai pour tout $n \leq m$. Montrons que le lemme est vrai pour l'entier $m + 1$.

2. Soit $c \in [a, b]$ tel que $f^{m+1}(c) = c$, montrons que $f(c) = c$. Pour cela, on suppose $f(c) > c$. On pose $d = f^m(c)$.

(a) Montrer que $d > c$.

(b) On souhaite montrer que $d < f(c)$. On suppose $d \geq f(c)$.

i. Montrer que l'on a $f^2(c) \geq f(c)$.

ii. En déduire que $f^{m+1}(c) \geq f(c)$.

iii. En déduire une contradiction.

(c) En déduire que $f(d) = c < d < f(c)$.

(d) Montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \{x \in [c, d], f(x) = d\}$ est non vide, en déduire qu'il admet une borne inférieure que l'on note e . Montrer que $e \in \mathcal{A}$.

(e) Justifier que $e \neq c$ et montrer que pour tout $x \in [c, e[$,

$$f(x) > d > e.$$

(f) En remarquant que l'on a alors $f^2(e) = f(d) = c < e$, montrer qu'il existe $x_0 \in]c, e[$ tel que $f^2(x_0) = x_0$.

(g) En déduire que $f(c) \leq c$.

On admet que l'hypothèse $f(c) < c$ mène aussi à une contradiction. Ainsi, on a bien $f(c) = c$.

3. Soit $c \in [a, b]$ tel que $f^{m+1}(c) < c$. Montrons que $f(c) < c$.

(a) Montrer que $f(c) \neq c$.

On suppose $f(c) > c$.

(b) Montrer qu'il existe $d \in [a, c[$ tel que $f^{m+1}(d) = d$ et pour tout $x \in]d, c[$, $f^{m+1}(x) < x$. Montrer que l'on a aussi $f(d) = d$.

Indication : On pourra s'inspirer de la question 2 (d).

(c) Montrer que

$$\forall x \in]d, c[, \quad f(x) > x.$$

(d) En déduire que $f^m(d) = d$ et

$$\forall x \in]d, c[, \quad f^m(x) > x > d.$$

(e) Montrer qu'il existe $e \in]d, c[$ tel que $d < f^m(e) < c$.

(f) Montrer que l'on a alors

$$f^{m+1}(e) > f^m(e) > e$$

et en déduire une contradiction.

On admet que si $c \in [a, b]$ est tel que $f^{m+1}(c) > c$, alors on a aussi $f(c) > c$.

(g) Terminer la preuve du lemme.

8.3 Preuve du théorème de Coppel

Nous prouvons le théorème de Coppel. Les notations utilisées sont les mêmes que celles du théorème. Soit $x_0 \in [a, b]$.

4. Montrer le théorème lorsqu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x_n = x_{n+1}$.
5. Montrer le théorème lorsque la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est monotone à partir d'un certain rang.

On suppose dans toute la suite que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'est pas monotone à partir d'un certain rang.

6. Montrer que les ensembles

$$\mathcal{Y} = \{n \in \mathbf{N}, x_n < x_{n+1}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} = \{n \in \mathbf{N}, x_n > x_{n+1}\}$$

sont tous les deux infinis et que $\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} = \mathbf{N}$.

On pose $y_k = x_{n_k}$ où la suite (infinie par la question 6) $n_0 < n_1 < \dots$ est une énumération de \mathcal{Y} . De même, on pose $z_k = x_{m_k}$ où la suite (infinie par la question 6) $m_0 < m_1 < \dots$ est une énumération de \mathcal{Z} .

On définit ainsi deux suites $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(z_k)_{k \in \mathbf{N}}$.

7. Montrer que la suite $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est croissante et que la suite $(z_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est décroissante.
8. En déduire que les suites $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(z_k)_{k \in \mathbf{N}}$ convergent. On note y et z leurs limites respectives.
9. Montrer que y et z vérifient $y = f(z)$ et $z = f(y)$.
10. En déduire que $y = z$.
11. Terminer la preuve du théorème de Coppel.

8.4 Une application

Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 3x(1-x)$.

Soit $x_0 \in [0, 1]$ et soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$.

12. Montrer que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$.
13. Étudier les points fixes de f et ceux de f^2 dans $[0, 1]$.

Indication : On pourra vérifier que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f^2(x) - x = -x(3x-2)(9x^2-12x+4).$$

14. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

Correction du Thème 8

1. $\text{Comme } f^1(c) = f(c)$, le lemme est clair lorsque $n = 1$.
2. (a) Comme $f(c) > c$, l'hypothèse de récurrence appliquée à l'entier m et à l'élément c donne $d = f^m(c) > c$.
 - (b) i. Si $f^2(c) = f(f(c)) < f(c)$, alors l'hypothèse de récurrence appliquée à l'entier $m - 1$ et à l'élément $f(c)$ donne $f^{m-1}(f(c)) < f(c)$, soit $d < f(c)$, ce qui est exclu d'après la question 2 (a).

On a montré que $f^2(c) \geq f(c)$.

- ii. D'après la question 2 (a) i, on a $f^2(c) = f(c)$ ou $f^2(c) > f(c)$.

- Si $f^2(c) = f(c)$, alors il est clair que $f^{m+1}(c) = f(c)$.

- On suppose donc $f^2(c) > f(c)$.

On utilise l'hypothèse de récurrence à l'entier m et à l'élément $f(c)$ à l'inégalité ci-dessus pour obtenir $f^m(f(c)) > f(c)$, soit $f^{m+1}(c) \geq f(c)$.

On a montré que $f^{m+1}(c) \geq f(c)$.

- iii. Comme $f^{m+1}(c) = c$, l'inégalité obtenue à la question 2 (b) ii donne $c \geq f(c)$, ce qui est exclu.

On a montré que $d < f(c)$.

- (c) Par définition de d , on a $f(d) = c$. La question 2 (a) montre que $c < d$, et la question 2 (b) montre que $d < f(c)$, ainsi

$$\boxed{f(d) = c < d < f(c)}.$$

- (d) Comme f est continue, l'encadrement de la question 2 (c) et le théorème des valeurs intermédiaires assurent que \mathcal{A} n'est pas vide.

Ainsi, \mathcal{A} est non vide, minoré par d , il admet une borne inférieure.

Par caractérisation de la borne inférieure, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in \mathcal{A} \cap \left[e, e + \frac{1}{n} \right].$$

Par définition de x_n , pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x_n) = d$ et par encadrement, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers e .

Par continuité de f en e , on récupère $f(e) = d$.

On a montré que \mathcal{A} a une borne inférieure e et $e \in \mathcal{A}$.

- (e) • D'après la question 2 (c), on a $f(c) > d$, donc $c \neq e$.

- Par définition de e , on a

$$\forall x \in [c, e[, \quad f(x) \neq d,$$

donc

$$\forall x \in [c, e[, \quad f(x) > d \quad \text{ou} \quad f(x) < d.$$

Par continuité de f , on a

$$(\forall x \in [c, e[, \quad f(x) > d) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in [c, e[, \quad f(x) < d).$$

Or $f(c) > d$ (question 2 (c)), donc on a

$$\forall x \in [c, e[, \quad f(x) > d.$$

Comme $e \in [c, d]$ et $f(d) < d$ (question 2 (c)), on a $e < d$.

Finalement, on a montré que

$$\boxed{\forall x \in [c, e[, \quad f(x) > d > e.}$$

- (f) Comme $f(e) = d$ (question 2 (d)), on a $f^2(e) = f(d)$. Or, par définition de d , on a $f(d) = c$, et $c < e$, d'après la question 2 (e).

Par hypothèse de récurrence appliquée à l'entier 2 et à l'élément c , on a $f^2(c) > c$, car $f(c) > c$.

Ainsi, $f^2(c) < c$ et $f^2(e) > e$, la fonction f^2 étant continue sur $[c, e]$, le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'il existe $x_0 \in]c, e[$ tel que

$$\boxed{f^2(x_0) = x_0.}$$

- (g) La question 2 (e) montre que pour tout $x \in [c, e[, \quad f(x) > e$.
L'hypothèse de récurrence appliquée à l'entier 2 à $x \in [c, e[$ montre que pour tout $x \in [c, e[, \quad f^2(x) > e$.
En particulier, $x_0 = f^2(x_0) > e$, ce qui est impossible car $x_0 < e$ (question 2 (f)).
L'hypothèse $f(c) > c$ mène à une contradiction, on en déduit que l'on a
$$\boxed{f(c) \leq c.}$$

3. (a) Si $f(c) = c$, $f^{m+1}(c) = c$, ce qui est exclu. Ainsi, $\boxed{f(c) \neq c.}$

- (b) • Soit $\mathcal{A} = \{x \in [a, c[, \quad f^{m+1}(x) = x\}$.

On a $f^{m+1}(a) \geq a$ (car $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$), $f^{m+1}(c) < c$ et f^{m+1} est continue sur $[a, c]$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, \mathcal{A} est non vide.

\mathcal{A} est non vide, majoré par c , il admet une borne supérieure que l'on note d . Comme $f^{m+1}(c) < c$, on a $d < c$.

Par définition de d , on a

$$\forall x \in]d, c[, \quad f^{m+1}(x) \neq x,$$

soit

$$\forall x \in]d, c], \quad (f^{m+1}(x) > x) \quad \text{ou} \quad (f^{m+1}(x) < x).$$

Par continuité de f^{m+1} , on a

$$(\forall x \in]d, c], \quad f^{m+1}(x) > x) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in]d, c], \quad f^{m+1}(x) < x).$$

Comme $f^{m+1}(c) < c$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in]d, c], \quad f^{m+1}(x) < x.}$$

- Par caractérisation de la borne supérieure, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists x_n \in \mathcal{A} \cap \left[d - \frac{1}{n}, d \right].$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $f^{m+1}(x_n) = x_n$. Comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers d et comme f^{m+1} est continue en d , on en déduit que $\boxed{f^{m+1}(d) = d.}$

- D'après le résultat de la question 2, l'égalité $f^{m+1}(d) = d$ implique $\boxed{f(d) = d.}$

(c) C'est le même argument que ci-dessus.

S'il existe $x \in]d, c[$ tel que $f(x) = x$, alors on aurait $f^{m+1}(x) = x$, ce qui est exclu grâce à la question 3 (b). On a donc

$$\forall x \in]d, c], \quad (f(x) > x) \quad \text{ou} \quad (f(x) < x).$$

Par continuité de f , on a

$$(\forall x \in]d, c], \quad f(x) > x) \quad \text{ou} \quad (\forall x \in]d, c], \quad f(x) < x).$$

Comme $f(c) > c$, en particulier, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in]d, c[, \quad f(x) > x.}$$

- (d) • Comme $f(d) = d$ (question 3 (b)), on en déduit facilement

$$\boxed{f^m(d) = d.}$$

- Par hypothèse de récurrence appliquée à l'entier m et à $x \in]d, c[$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in]d, c[, \quad f^m(x) > x > d.}$$

- (e) $\boxed{\text{On a } f^m(d) = d \text{ et pour tout } x \in]d, c[, f^m(x) > x \text{ (question 2 (d)), par continuité de } f^m \text{ à droite de } d, \text{ il existe } e \in]d, c[\text{ tel que } d < f^m(e) < c.}$

- (f) Comme $e \in]d, c[$, la question 3 (d) permet d'affirmer que $f^m(e) > e$.
Mais $f^m(e) \in]d, c[$ (question 3 (e)), la question 3 (c) assure alors que

$$f(f^m(e)) = f^{m+1}(e) > f^m(e).$$

On a montré que $f^{m+1}(e) > f^m(e) > e$.

Cette inégalité contredit l'inégalité $f^{m+1}(x) < x$ valable pour tout $x \in]d, c[$ établie à la question 3 (b).

On en déduit que $f(c) < c$.

- (g) Soit $c \in [a, b]$. Il y a trois cas :

- Si $f(c) = c$, alors il est clair que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f^n(c) = c$.
- Si $f(c) < c$ et s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^n(c) > c$. Alors, la question 3 montre que $f(c) < c$, ce qui est exclu.
- C'est un argument similaire à celui utilisé ci-dessus.

Le lemme est prouvé.

4. S'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $x_{n+1} = f(x_n)$, alors x_n est un point fixe de f , donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire.

Auquel cas, la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

5. Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est monotone à partir d'un certain rang, alors étant donné que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in [a, b]$, par le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

6. Comme la suite n'est pas monotone à partir d'un certain rang, en particulier, elle n'est pas décroissante à partir d'un certain rang :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \exists p \geq n, u_{p+1} > u_p,$$

ainsi l'ensemble \mathcal{Y} est infini. On montre de même que l'ensemble \mathcal{Z} est infini. Il est clair que $\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} \subset \mathbf{N}$ et supposons que $\mathcal{Z} \cup \mathcal{Z} \neq \mathbf{N}$.

Soit $m \in \mathbf{N} \setminus (\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z})$. On a donc $u_{m+1} = u_m$.

Par un même argument que celui utilisé pour la question 4, on montre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est alors stationnaire, donc monotone à partir d'un certain rang, ce qui est exclu.

On a montré que les ensembles \mathcal{Y} et \mathcal{Z} sont infinis et que $\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} = \mathbf{N}$.

7. Soit $p \in \mathbf{N}$. Il existe $n_p \in \mathcal{Z}$ tel que $y_p = x_{n_p}$.

Par définition de \mathcal{Y} , on a $x_{n_p+1} = f(x_{n_p}) > x_{n_p}$.

Par le lemme précédent, il s'ensuit que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, x_{n_p+k} = f^k(x_{n_p}) > x_{n_p}.$$

En particulier pour $k = n_{p+1} - n_p$ et on obtient ainsi

$$x_{n_{p+1}} = y_{p+1} > x_{n_p} = y_p.$$

La suite $(y_p)_{p \in \mathbf{N}}$ est croissante. On montre de même que la suite $(z_p)_{p \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

8. La $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ (resp. $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$) est croissante (resp. décroissante), majorée par a (resp. minorée par b), par le théorème de la limite monotone, elle converge.
9. Comme les ensembles \mathcal{Y} et \mathcal{Z} sont tous les deux infinis, il existe une infinité d'éléments de \mathcal{Y} dont le successeur appartient à \mathcal{Z} . On note $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une énumération strictement croissante de ces entiers : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc $n_k \in \mathcal{Y}$ et $n_k + 1 \in \mathcal{Z}$.
La suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers y car c'est une suite extraite de $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ qui converge vers y .
De même, la suite $(x_{n_k+1})_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers z car c'est une suite extraite de $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ qui converge vers z .
La relation : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_{n_k+1} = f(x_{n_k})$ et la continuité de f sur $[a, b]$ permettent d'obtenir la relation $z = f(y)$. La relation $y = f(z)$ s'obtient de manière analogue.
- On a montré que y et z vérifient $y = f(z)$ et $z = f(y)$.
10. Les relations obtenues à la question 9 donnent $y = f^2(y)$. Or, f n'a pas de 2-cycle, donc $y = f(y)$, donc $y = z$.
11. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(y_p)_{p \in \mathbb{N}}$ (resp. $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$) converge vers y , il existe $p_1 \in \mathbb{N}$ (resp. $p_2 \in \mathbb{N}$) tel que : pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$(p \geq p_1 \quad \text{resp. } p \geq p_2) \implies (|y_p - y| \leq \varepsilon \quad \text{resp. } |z_p - y| \leq \varepsilon).$$

Ainsi, pour tout $p \geq \max\{p_1, p_2\}$, on a

$$|x_{n_p} - y| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |x_{m_p} - y| \leq \varepsilon. \quad (8.1)$$

Soit $N = \max\{p_1, p_2\}$. Soient q_1 et q_2 deux entiers naturels tels que $n_{q_1} > N$ et $m_{q_2} > N$ (notons que de tels entiers existent car \mathcal{Y} et \mathcal{Z} ne sont pas bornés).

Soit enfin $\tilde{N} = \max\{n_{q_1}, m_{q_2}\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq \tilde{N}$.

Si $n \in \mathcal{Y}$, il existe $\ell \in \mathbb{N}$, $\ell \geq q_1$ (par croissance de la suite $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$) tel que $n = n_\ell$, ainsi, $x_n = x_{n_\ell}$.

Par croissance de la suite $(n_p)_{p \in \mathbb{N}}$, on a $n_\ell \geq n_{q_1}$. Puis par définition de N et par (8.1), on en déduit

$$|x_n - y| = |x_{n_\ell} - y| \leq \varepsilon.$$

Un raisonnement analogue montre que $|x_n - y| \leq \varepsilon$ lorsque $n \in \mathcal{Z}$.

On a montré que : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n \geq \tilde{N}) \implies (|x_n - y| \leq \varepsilon).$$

On a montré que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge : le théorème est prouvé.

12. Une simple étude de fonction permet de voir que f est positive sur $[0, 1]$, s'annule en 0 et 1, que f atteint son maximum en $\frac{1}{2}$ et que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

On en déduit que $f([0, 1]) = \left[0, \frac{3}{4}\right] \subset [0, 1]$.

13. • *Étude des points fixes de f*
Soit $x \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 3x(1-x) = x \\ &\iff x(2-3x) = 0 \\ &\iff x \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\}. \end{aligned}$$

On en déduit que les points fixes de f sont 0 et $\frac{2}{3}$.

- *Étude des points fixes de f^2*
Déjà,

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \quad f^2(x) &= 3(3x(1-x))(1-3x(1-x)) \\ &= 9x(1-x)(3x^2 - 3x + 1). \end{aligned}$$

On suit l'indication et un simple développement permet de remarquer que

$$\forall x \in [0, 1], \quad f^2(x) - x = -x(3x-2)(9x^2 - 12x + 4).$$

Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f^2(x) = x \iff x = 0 \text{ ou } 3x - 2 = 0 \text{ ou } 9x^2 - 12x + 4 = 0.$$

Le discriminant du trinôme $9x^2 - 12x + 4$ valant $-180 < 0$, on en déduit que l'équation $9x^2 - 12x + 4 = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $[0, 1]$.

On en déduit que les points fixes de f^2 sont 0 et $\frac{2}{3}$.

14. Comme f et f^2 ont les mêmes points fixes sur $[0, 1]$, il s'ensuit que f n'a pas de 2-cycle.

D'après le théorème de Coppel, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et ce, quel que soit $x_0 \in [0, 1]$.

Quelques remarques culturelles

On peut citer le résultat qui rentre dans les résultats généraux de dynamique des suites récurrentes :

Théorème. *Théorème de Sharkovskii.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} non trivial et soit $f : I \rightarrow I$ une fonction continue.

Si f a un point 3-périodique, alors f a un point n -périodique pour tout $n \in \mathbf{N}^$.*

Thème 9

Le système proie-prédateur

Thèmes abordés : Suite, équation différentielle, continuité, dérivabilité.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet traite du comportement d'une population de proies et de prédateurs en utilisant le modèle de Lotka-Volterra.

Sa résolution nécessite quelques connaissances (élémentaires) en dérivation.

Les parties de ce problème sont largement indépendantes.

9.1 Définition du schéma d'Euler explicite et étude sur un exemple

Définition. *Schéma d'Euler explicite.*

Soit I un intervalle ouvert de \mathbf{R} et soit $F : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

Soient $t_0 \in I$, $T > 0$ tels que $[t_0, t_0 + T] \subset I$ et $y_0 \in \mathbf{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \quad y'(t) = F(t, y(t)) \quad \text{et} \quad y(t_0) = y_0. \quad (9.1)$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On définit le pas h par $h = \frac{T}{n}$ et pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$t_{n,i} = t_0 + i \frac{T}{n}.$$

On définit la suite $(Y_{n,i})_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ par :

$$Y_{n,0} = y_0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad Y_{n,i+1} = Y_{n,i} + hF(t_{n,i}, Y_{n,i}).$$

On note Y_n définie sur $[t_0, t_0 + T]$ par : pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $Y_n(t_{n,i}) = y_{n,i}$ et Y_n affine par morceaux sur les intervalles $[y_{n,i}, y_{n,i+1}]$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

Soit l'équation différentielle suivante : pour tout $t \in [0, 1]$,

$$y'(t) = y(t) \quad \text{et} \quad y(0) = 1.$$

1. Résoudre explicitement l'équation différentielle précédente : on note y_{ex} la solution explicite.

2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Donner l'expression explicite de la suite $(Y_{n,i})_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$.
3. Montrer que Y_n est croissante sur $[0, 1]$.
4. (a) Soit $t \in [0, 1[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $i_n \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $t \in [t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1}[$. Préciser la valeur de i_n en fonction de t et n .
- (b) Montrer que

$$\forall t \in [0, 1[, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn \rfloor} = e^t.$$

- (c) En déduire que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n(t) = y_{\text{ex}}(t).$$

9.2 Retour au cas général

Nous utiliserons les définitions suivantes.

Définitions. *Erreur de consistance, consistance, erreur locale, schéma convergent.*

Soit I un intervalle ouvert de \mathbf{R} et soit $F : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Soient $t_0 \in I$, $T > 0$ tels que $[t_0, t_0 + T] \subset I$ et $y_0 \in \mathbf{R}$. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \quad y'(t) = F(t, y(t)) \quad \text{et} \quad y(t_0) = y_0.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note Y_n la fonction affine par morceaux obtenue grâce au schéma d'Euler explicite.

- On définit l'erreur de consistance ε_i ($i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$) par :

$$\varepsilon_i = y(t_{n,i+1}) - y(t_{n,i}) - hF(t_{n,i}, y(t_{n,i})).$$

- On dit que le schéma est consistant si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} |\varepsilon_i| = 0.$$

- On définit l'erreur locale $e_{n,i}$ ($i \in \llbracket 0, n \rrbracket$) par :

$$e_{n,i} = y(t_{n,i}) - Y_{n,i}.$$

- On dit que le schéma est convergent si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |e_{n,i}| = 0.$$

Nous allons établir le résultat suivant :

Théorème. *Convergence du schéma d'Euler explicite.*

Soit I un intervalle ouvert de \mathbf{R} , $t_0 \in I$ et $T > 0$ tel que $[t_0, t_0 + T] \subset I$ et soit $y_0 \in \mathbf{R}$. Soit $F : I \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

- pour tout $y \in \mathbf{R}$, $t \in I \mapsto F(t, y)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I ;

- pour tout $t \in I$, $y \in \mathbf{R} \mapsto F(t, y)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} ;
- il existe $L \geq 0$ tel que pour tout $(t, z_1, z_2) \in [t_0, t_0 + T] \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$,

$$|F(t, z_1) - F(t, z_2)| \leq L |z_1 - z_2|.$$

Alors, le schéma d'Euler explicite associé à toute solution (éventuelle) de classe \mathcal{C}^2 sur $[t_0, t_0 + T]$ de l'équation différentielle (9.1) est convergent.

Nous prouvons le théorème. Soit $y \in \mathcal{C}^2([t_0, t_0 + T])$ solution (éventuelle) de (9.1).

5. (a) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, il existe $\zeta_{n,i} \in]t_{n,i}, t_{n,i+1}[$ tel que

$$y(t_{n,i+1}) = y(t_{n,i}) + hy'(t_{n,i}) + \frac{h^2}{2} y''(\zeta_{n,i}).$$

Indication : On pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$t \mapsto y(t_{n,i+1}) - y(t) - (t_{n,i+1} - t)y'(t) - \lambda \frac{(t_{n,i+1} - t)^2}{2}$$

où λ est à « bien » choisir.

- (b) En déduire que

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad |\varepsilon_i| \leq \frac{M_2}{2} h^2$$

$$\text{où } M_2 = \sup_{t \in [t_0, t_0 + T]} |y''(t)|.$$

6. Vérifier que

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \begin{cases} y(t_{n,i+1}) &= y(t_{n,i}) + hF(t_{n,i}, y(t_{n,i})) + \varepsilon_i \\ Y_{n,i+1} &= Y_{n,i} + hF(t_{n,i}, Y_{n,i}) \end{cases}.$$

7. Montrer que

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad |e_{n,i+1}| \leq |e_{n,i}|(1 + hL) + |\varepsilon_i|.$$

8. (a) Soient a et α deux réels positifs. Soit $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$. Soit $(u_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite de réels positifs tels que

$$\forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad u_{n+1} \leq au_n + \alpha.$$

Montrer que

$$\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad u_n \leq a^n u_0 + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a^i.$$

- (b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \forall n \in \mathbf{N}, \quad (1+x)^n \leq e^{nx}.$$

- (c) En déduire que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad |e_{n,i}| \leq e^{iLh} |e_{n,0}| + \frac{M_2}{2L} h (e^{iLh} - 1).$$

9. Montrer que le schéma est convergent.

9.3 Étude du système proie-prédateur de Lokta-Volterra

9.3.1 Étude théorique

Définition. *Système proie-prédateur de Lokta-Volterra.*

Soient $(a, b, c, d) \in (\mathbf{R}_+^*)^4$. Soient x et y deux fonctions dérivables sur \mathbf{R}_+ . On dit que x et y satisfont le **système de Lokta-Volterra** si : pour tout $t \in \mathbf{R}_+$

$$\begin{cases} x'(t) = (a - by(t))x(t) \\ y'(t) = (-c + dx(t))y(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = x_0 \geq 0 \\ y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

$x(t)$ correspond au nombre de proies (en unité arbitraire) au temps $t \geq 0$ et $y(t)$ correspond au nombre de prédateur (en unité arbitraire) au temps $t \geq 0$.

On admet l'existence sur \mathbf{R}_+ et l'unicité (fondamentale dans la suite) de telles fonctions x et y vérifiant (9.2).

10. (a) Que dire de la fonction x lorsque $y(0) = 0$?
 (b) Que dire de la fonction y lorsque $x(0) = 0$?
 (c) Ces résultats sont-ils conformes à l'intuition ?
11. (a) Montrer que si, $x_0 = \frac{d}{c}$ et $y_0 = \frac{a}{b}$, alors les fonctions x et y sont constantes.
 (b) Montrer que s'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $x(t_0) = 0$ (resp. $y(t_0) = 0$), alors pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $x(t) = 0$ (resp. $y(t) = 0$).

On suppose dans toute la suite $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$.

12. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$.
13. Montrer que

$$\exists k \in \mathbf{R}, \forall t \in \mathbf{R}_+, \quad dx(t) - c \ln(x(t)) + by(t) - a \ln(y(t)) = k.$$

14. (a) Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$. Montrer que la fonction

$$x \mapsto \alpha x - \beta \ln(x)$$

est minorée sur \mathbf{R}_+^* .

- (b) Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie et non majoré sur un ensemble X . Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de X telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f(x_n) \geq n.$$

- (c) Montrer que les fonctions x et y sont bornées sur \mathbf{R}_+ .

Nous allons maintenant montrer la proposition suivante.

Proposition. *Périodicité des solutions.*

On suppose $(x_0, y_0) \notin \left\{ (0, 0), \left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b} \right) \right\}$. La fonction $t \mapsto (x(t), y(t))$ est périodique sur \mathbf{R}_+ .

Soient $A_1 = \left] 0, \frac{d}{c} \left[\times \left] 0, \frac{a}{b} \left[$, $A_2 = \left] \frac{d}{c}, +\infty \left[\times \left] 0, \frac{a}{b} \left[$, $A_3 = \left] \frac{d}{c}, +\infty \left[\times \left] \frac{a}{b}, +\infty \left[$
 et $A_4 = \left] 0, \frac{d}{c} \left[\times \left] \frac{a}{b}, +\infty \left[$.

On suppose, sans perte de généralité, que $(x_0, y_0) \in A_1$.

15. Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que si $(x(t), y(t)) \in A_1$ (resp. A_2 , resp. A_3 , resp. A_4), alors $x'(t) > 0$ et $y'(t) < 0$ (resp. $x'(t) > 0$ et $y'(t) > 0$, resp. $x'(t) < 0$ et $y'(t) > 0$, resp. $x'(t) < 0$ et $y'(t) < 0$).

16. Montrer qu'il existe $t \in \mathbf{R}_+$ tel que $(x(t), y(t)) \notin A_1$.

17. (a) Montrer que l'ensemble

$$\{t \in \mathbf{R}_+, \forall u \in [0, t], (x(u), y(u)) \in A_1\}$$

est non vide et majoré. En déduire qu'il admet une borne supérieure que l'on note t_1 .

(b) Montrer que

$$0 < y(t_1) < \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad x(t_1) = \frac{c}{d}.$$

(c) En déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall t \in [0, t_1[, (x(t), y(t)) \in A_1 \quad \text{et} \quad \forall t \in]t_1, t_1 + \varepsilon], (x(t), y(t)) \in A_2.$$

En procédant comme aux questions 16 et 17, on peut montrer et on admet qu'il existe un réel $t_2 > t_1$ et $\varepsilon_1 > 0$ tels que

$$\forall t \in]t_1, t_2[, (x(t), y(t)) \in A_2 \quad \text{et} \quad \forall t \in]t_2, t_2 + \varepsilon_1[, (x(t), y(t)) \in A_3.$$

De même, on montre il existe un réel $t_3 > t_2$ et $\varepsilon_2 > 0$ tels que

$$\forall t \in]t_2, t_3[, (x(t), y(t)) \in A_3 \quad \text{et} \quad \forall t \in]t_3, t_3 + \varepsilon_2[, (x(t), y(t)) \in A_4.$$

Similairement, on montre qu'il existe un réel $t_4 > t_3$ et $\varepsilon_3 > 0$ tels que

$$\forall t \in]t_3, t_4[, (x(t), y(t)) \in A_4 \quad \text{et} \quad \forall t \in]t_4, t_4 + \varepsilon_3[, (x(t), y(t)) \in A_1.$$

Finalement, on montre qu'il existe un réel $t_5 > t_4$ et $\varepsilon_4 > 0$ tels que

$$\forall t \in]t_4, t_5[, (x(t), y(t)) \in A_1 \quad \text{et} \quad \forall t \in]t_5, t_5 + \varepsilon_4[, (x(t), y(t)) \in A_2.$$

18. (a) Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$. Montrer que la fonction

$$h : x \mapsto \alpha x - \beta \ln(x)$$

est injective sur $\left] 0, \frac{\beta}{\alpha} \right]$.

(b) Montrer que $(x(t_5), y(t_5)) = (x(t_1), y(t_1))$.

Indication : On pourra utiliser la question 13.

19. En déduire que la fonction $t \mapsto (x(t), y(t))$ est périodique.

9.3.2 Étude avec Python

20. On reprend les notations du *schéma d'Euler explicite*.

Écrire une fonction `eulerexplicite(t0, Y0, T, F, n)` qui permet, étant donné une équation différentielle

$$y'(t) = F(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \quad \text{et} \quad y(t_0) = y_0,$$

de tracer le graphe de la fonction Y_n .

21. Écrire un programme qui permet, à l'aide du schéma d'Euler explicite, de tracer le portrait de phase des solutions du système (9.2) de Lokta-Volterra.
22. Pourquoi ne remarque-t-on pas la périodicité ?

Correction du Thème 9

1. L'équation différentielle $y'(t) = y(t)$ et $y(0) = 1$ a pour unique solution sur $[0, 1]$ la fonction $\exp|_{[0,1]}$.

2. Dans cet exemple, pour tout $(t, y) \in [0, 1] \times \mathbf{R}$, $F(t, y) = y$.
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a $Y_{n,0} = 1$ et pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$Y_{n,i+1} = Y_{n,i} + hY_{n,i} = (1+h)Y_{n,i}.$$

La suite $(Y_{n,i})_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est géométrique de raison $1+h$, ainsi

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad Y_{n,i} = (1+h)^i Y_{n,0} = (1+h)^i.$$

3. De toute évidence, la suite $(Y_{n,i})_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est croissante, ainsi pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la fonction Y_n est croissante sur $[y_{n,i}, y_{n,i+1}]$.

Soit $(x_1, x_2) \in [0, 1]^2$ tel que $x_1 \leq x_2$.

Soit $(i, j) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$ tel que $x_1 \in [y_{n,i}, y_{n,i+1}]$ et $x_2 \in [y_{n,j}, y_{n,j+1}]$.

Clairement, on a $i \leq j$.

- Si $i = j$, comme Y_n est croissante sur $[y_{n,i}, y_{n,i+1}]$ est croissante, on a $Y_n(x_1) \leq Y_n(x_2)$.
- Si $i < j$, alors $x_1 \leq y_{n,i+1} \leq y_{n,j} \leq x_2$.

En utilisant respectivement la croissance de Y_n sur $[y_{n,i}, y_{n,i+1}]$ et $[y_{n,j}, y_{n,j+1}]$, par définition de Y_n , on a

$$Y_n(x_1) \leq Y_n(y_{n,i+1}) = Y_{n,i+1} \quad \text{et} \quad Y_{n,j} = Y_n(y_{n,j}) \leq Y_n(x_2).$$

Par croissance de $(Y_{n,i})_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$, on a $Y_{n,i+1} \leq Y_{n,j}$, ainsi

$$Y_n(x_1) \leq Y_n(x_2).$$

Dans tous les cas, $Y_n(x_1) \leq Y_n(x_2)$.

On a montré que Y_n est croissante sur $[0, 1]$.

4. (a) Soit $i \in \mathbf{N}$. On a

$$t \in \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n} \right[\iff i \leq tn < i+1.$$

Cette dernière inégalité est satisfaite si, et seulement si, $i = \lfloor tn \rfloor$.

Comme $t \in [0, 1[$, on a $tn \in [0, n[$, donc $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

$$\text{Si l'on pose } i_n = \lfloor tn \rfloor, \text{ on a } t \in \left[\frac{i_n}{n}, \frac{i_n+1}{n} \right[= [t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1}[.$$

(b) • Pour $t = 0$, le résultat est clair.

- On suppose $t \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{[tn]} = \exp\left([tn] \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$tn - 1 \leq [tn] < tn \iff 1 - \frac{1}{tn} \leq \frac{[tn]}{tn} < 1,$$

on en déduit que $[tn] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} tn$, d'où

$$[tn] \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} t.$$

Par continuité de la fonction \exp en t , on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{[tn]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp\left([tn] \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = e^t.}$$

- (c) D'après la question 4 (a), $t \in [t_{n,i_n}, t_{n,i_n+1}[$ avec $i_n = [tn]$.
Or, d'après la question 3, Y_n est croissante sur $[0, 1]$, ainsi

$$Y_n(y_{n,i_n}) \leq Y_n(t) \leq Y_n(y_{n,i_n+1}).$$

On a aussi

$$Y_n(y_{n,i_n}) = (1 + h)^{i_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{[tn]}$$

et

$$Y_n(y_{n,i_n+1}) = (1 + h)^{i_n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{[tn]+1}.$$

D'après la question 4 (b), on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Y(y_{n,i_n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Y(y_{n,i_n+1}) = e^t.$$

Par encadrement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n(t) = e^t$.

On a aussi

$$Y_n(1) = Y_{n,n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

La même méthode utilisée que celle à la question 4 (b) montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n(1) = e.$$

On a montré que pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n(t) = y_{\exp}(t).}$$

5. (a) On suit l'indication et on introduit la fonction φ définie sur $[t_{n,i}, t_{n,i+1}]$ par

$$\varphi(t) = y(t_{n,i+1}) - y(t) - (t_{n,i+1} - t)y'(t) - \lambda \frac{(t_{n,i+1} - t)^2}{2}$$

où λ est choisi de sorte que $\varphi(t_{n,i}) = 0$.

Il est clair que $\varphi(t_{n,i+1}) = 0$.

φ est continue sur $[t_{n,i}, t_{n,i+1}]$, dérivable sur $]t_{n,i}, t_{n,i+1}[$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\zeta_{n,i} \in]t_{n,i}, t_{n,i+1}[$ tel que $\varphi'(\zeta_{n,i}) = 0$.

Or, pour tout $t \in [t_{n,i}, t_{n,i+1}]$,

$$\varphi'(t) = y''(t)(t - t_{n,i+1}) - \lambda(t - t_{n,i+1}),$$

ainsi

$$\varphi'(\zeta_{n,i}) = 0 \iff y''(\zeta_{n,i}) = \lambda.$$

Comme $\varphi(t_{n,i}) = 0$, en utilisant le fait que $t_{n,i+1} - t_{n,i} = h$, on obtient finalement

$$y(t_{n,i+1}) = y(t_{n,i}) + hy'(t_{n,i}) + \frac{h^2}{2}y''(\zeta_{n,i}).$$

- (b) Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, en utilisant la définition de ε_i et la question 5 (a), on a

$$\begin{aligned} |\varepsilon_i| &= |y(t_{n,i+1}) - y(t_{n,i}) - hF(t_{n,i}, y(t_{n,i}))| \\ &= \left| hy'(t_{n,i}) - hF(t_{n,i}, y(t_{n,i})) + \frac{h^2}{2}y''(\zeta_{n,i}) \right|. \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in I$, $y'(t) = F(t, y(t))$, donc

$$hy'(t_{n,i}) - hF(t_{n,i}, y(t_{n,i})) = 0.$$

Par définition de M_2 , il s'ensuit que

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad |\varepsilon_i| \leq \left| \frac{h^2}{2}y''(\zeta_{n,i}) \right| \leq \frac{M_2}{2}h^2.$$

6. Pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, en utilisant les définitions de $Y_{n,i+1}$ et ε_i , on a :

$$\begin{cases} Y_{n,i+1} &= Y_{n,i} + hF(t_{n,i}, Y_{n,i}) \\ \varepsilon_i &= y(t_{n,i+1}) - y(t_{n,i}) - hF(t_{n,i}, y(t_{n,i})) \end{cases},$$

soit

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \begin{cases} y(t_{n,i+1}) &= y(t_{n,i}) + hF(t_{n,i}, y(t_{n,i})) + \varepsilon_i \\ Y_{n,i+1} &= Y_{n,i} + hF(t_{n,i}, Y_{n,i}) \end{cases}.$$

7. Soit $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. D'après la question 6, on a

$$\begin{aligned} |e_{n,i+1}| &= |y(t_{n,i+1}) - Y_{n,i+1}| \\ &= |y(t_{n,i}) + hF(t_{n,i}, y(t_{n,i})) + \varepsilon_i - Y_{n,i} - hF(t_{n,i}, Y_{n,i})| \\ &= |e_{n,i} + h(F(t_{n,i}, y(t_{n,i})) - F(t_{n,i}, Y_{n,i})) + \varepsilon_i| \\ &\leq |e_{n,i}| + h|F(t_{n,i}, y(t_{n,i})) - F(t_{n,i}, Y_{n,i})| + |\varepsilon_i| \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse faite sur F , on a

$$|F(t_{n,i}, y(t_{n,i})) - F(t_{n,i}, Y_{n,i})| \leq L|y(t_{n,i}) - Y_{n,i}| = L|e_i|.$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, |e_{n,i+1}| \leq (1+hL)|e_{n,i}| + |\varepsilon_i|.$$

8. (a) On procède par récurrence : pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « $u_n \leq a^n u_0 + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a^i$ ».

\mathcal{P}_1 est vraie car, par hypothèse, $u_1 \leq au_0 + \alpha$.

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &\leq au_n + \alpha \\ &\leq a \left(a^n u_0 + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a^i \right) + \alpha \\ &\leq a^{n+1} u_0 + \alpha \sum_{i=1}^n a^i + \alpha \\ &\leq a^{n+1} u_0 + \alpha \sum_{i=0}^n a^i. \end{aligned}$$

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie, ainsi

$$\boxed{\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, u_n \leq a^n u_0 + \alpha \sum_{i=0}^{n-1} a^i.$$

(b) Une simple étude de la fonction $x \mapsto e^x - x - 1$ permet de montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, 1+x \leq e^x,$$

ainsi, par croissance de la fonction $t \mapsto t^n$ sur \mathbf{R}_+ , on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+, \forall n \in \mathbf{N}, (1+x)^n \leq e^{nx}.$$

(c) D'après les questions 5 (b) et 7, on a

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad |e_{n,i+1}| &\leq (1+hL)|e_{n,i}| + |\varepsilon_i| \\ &\leq (1+hL)|e_{n,i}| + \frac{M_2}{2}h. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question 8 (a), pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} |e_{n,i}| &\leq (1+hL)^i |e_{n,0}| + \frac{M_2}{2}h^2 \sum_{k=0}^{i-1} (1+hL)^k \\ &\leq (1+hL)^i |e_{n,0}| + \frac{M_2}{2L}h \left((1+hL)^i - 1 \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité établie à la question 8 (b), on a

$$(1+hL)^i \leq e^{ihL}.$$

Il en résulte que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |e_{n,i}| \leq e^{iLh} |e_{n,0}| + \frac{M_2}{2L}h \left(e^{iLh} - 1 \right).$$

L'inégalité à prouver étant claire pour $i = 0$, on a montré que

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad |e_{n,i}| \leq e^{iLh} |e_{n,0}| + \frac{M_2}{2L}h \left(e^{iLh} - 1 \right).}$$

9. On remarque que $|e_{n,0}| = |y(t_{n,0}) - Y_{n,0}| = |y_0 - y_0| = 0$, ainsi

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad |e_{n,i}| \leq \frac{M_2}{2L}h \left(e^{ihL} - 1 \right).$$

Comme $h = \frac{T}{n}$, on a :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad e^{ihL} \leq e^{TL}.$$

On récupère donc

$$\max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |e_{n,i}| \leq \frac{M_2}{2L}h \left(e^{TL} - 1 \right).$$

Comme $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{M_2}{2L}h \left(e^{TL} - 1 \right) = 0$, on en déduit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket} |e_{n,i}| = 0.$$

On a montré que la schéma est convergent.

10. (a) Lorsque $y(0) = 0$, on remarque que les fonctions x et y définies sur \mathbf{R}_+ par :

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad x(t) = x_0 e^{at} \quad \text{et} \quad y(t) = 0}$$

sont solutions du système d'équations différentielles.

Par unicité, on en déduit que ces solutions sont les seules.

- (b) Lorsque $x(0) = 0$, on remarque que les fonctions x et y définies sur \mathbf{R}_+ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad x(t) = 0 \quad \text{et} \quad y(t) = y_0 e^{-ct}$$

sont solutions du système d'équations différentielles.

Par unicité, on en déduit que ces solutions sont les seules.

- (c) • Lorsque $y(0) = 0$, il n'y a pas de prédateur au temps $t = 0$.

D'après la question 10 (a), pour tout $t \geq 0$, $x(t) = x_0 e^{at}$: la population de proies croît exponentiellement vite, ce qui est cohérent (sauf si l'on tient compte des ressources naturelles).

- Lorsque $x(0) = 0$, il n'y a pas de proies au temps $t = 0$.

D'après la question 10 (a), pour tout $t \geq 0$, $x(t) = y_0 e^{-ct}$: la population de prédateurs décroît exponentiellement vite, faute de nourriture disponible.

11. (a) On remarque que les fonctions x et y définies sur \mathbf{R}_+ par :

$$\forall t \geq 0, \quad x(t) = \frac{d}{c} \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{a}{b}$$

sont solutions du système.

Par unicité, on en déduit que ces solutions sont les seules.

- (b) La fonction nulle sur \mathbf{R}_+ , notée $\mathbf{0}_{\mathbf{R}_+}$, vérifie $\mathbf{0}_{\mathbf{R}_+}(t_0) = 0$.

Ainsi, si $x(t_0) = 0$ (resp. $y(t_0) = 0$), alors par unicité, on en déduit que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad x(t) = 0 \quad (\text{resp.} \quad y(t) = 0).$$

12. S'il existe $t_0 \in \mathbf{R}_+$ tel que $x(t_0) = 0$ (resp. $y(t_0) = 0$), alors d'après la question 11 (b), x (resp. y) est la fonction nulle sur \mathbf{R}_+ . En particulier, $x(0) = 0$ (resp. $y(0) = 0$), ce qui est exclu.

$$\text{On a montré que pour tout } t \in \mathbf{R}_+, \quad x(t) > 0 \quad \text{et} \quad y(t) > 0.$$

13. Soit φ la fonction définie sur \mathbf{R}_+ par

$$\varphi(t) = dx(t) - c \ln(x(t)) + by(t) - a \ln(y(t)).$$

D'après la question 12, pour tout $t \geq 0$, $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$, donc la fonction φ est définie et dérivable sur \mathbf{R}_+ et pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= x'(t) \left(d - c \frac{1}{x(t)} \right) + y'(t) \left(b - a \frac{1}{y(t)} \right) \\ &= (a - by(t)) (dx(t) - c) + (-c + dx(t)) (by(t) - a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme \mathbf{R}_+ est un intervalle, on en déduit que φ est constante sur \mathbf{R}_+ : il existe $k \in \mathbf{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad dx(t) - c \ln(x(t)) + by(t) - a \ln(y(t)) = k.$$

14. (a) Soit $h : x \mapsto \alpha x - \beta \ln(x)$. La fonction h est dérivable sur \mathbf{R}_+^* et pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = \alpha - \frac{\beta}{x} = \frac{\alpha x - \beta}{x}.$$

Il s'ensuit que h est décroissante sur $\left]0, \frac{\beta}{\alpha}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\beta}{\alpha}, +\infty\right[$, ainsi

$$\forall x > 0, \quad h(x) \geq h\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

On a montré que la fonction $x \mapsto \alpha x - \beta \ln(x)$ est minorée sur \mathbf{R}_+^* .

- (b) On construit la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ par récurrence. Déjà, on note que X est infini car sinon f serait bornée.

Comme f n'est pas majorée sur X , il existe $x_0 \in X$ tel que $f(x_0) \geq 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose que x_0, \dots, x_n construits tels que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f(x_i) \geq i$.

Comme f n'est pas majorée sur X , il existe $x_{n+1} \in X$ tel que

$$f(x_{n+1}) \geq n + 1.$$

On a construit par récurrence une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de X telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) \geq n$.

- (c) On suppose que x ou y n'est pas bornée, par exemple x .

Comme x minorée par 0 (d'après la question 12), x n'est pas majorée.

D'après la question 14 (a), la fonction $t \mapsto by(t) - a \ln(y(t))$ est minorée sur \mathbf{R}_+ : soit m un minorant de cette fonction.

Comme x n'est pas bornée et minorée : x n'est pas majorée sur \mathbf{R}_+ . D'après la question 14 (b), il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de réels positifs telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x(t_n) \geq n$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} k &= dx(t_n) - c \ln(x(t_n)) + by(t_n) - a \ln(y(t_n)) \\ &\geq dx(t_n) - c \ln(x(t_n)) + m \\ &\geq x(t_n) \left(d - c \frac{\ln(x(t_n))}{x(t_n)} + \frac{m}{x(t_n)} \right). \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m}{x(t_n)} = 0$. De plus, par crois-

sance comparée, on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x(t_n))}{x(t_n)} = 0$. On récupère

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x(t_n) \left(d - c \frac{\ln(x(t_n))}{x(t_n)} + \frac{m}{x(t_n)} \right) = +\infty.$$

Cela contredit l'inégalité

$$k \geq x(t_n) \left(d - c \frac{\ln(x(t_n))}{x(t_n)} + \frac{m}{x(t_n)} \right)$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

On a montré que les fonctions x et y sont bornées sur \mathbf{R}_+ .

15. Si $(x(t), y(t)) \in A_1$ (resp. A_2 , resp. A_3 , resp. A_4), alors $0 < x(t) < \frac{d}{c}$ et $0 < y(t) < \frac{a}{b}$ (resp. $\frac{d}{c} < x(t)$ et $0 < y(t) < \frac{a}{b}$, resp. $\frac{d}{c} < x(t)$ et $\frac{a}{b} < y(t)$, resp. $0 < x(t) < \frac{d}{c}$ et $\frac{a}{b} < y(t)$).

Comme $x'(t) = (a - by(t))x(t)$ et $y'(t) = (-c + dx(t))y(t)$, il s'ensuit que $x'(t) > 0$ et $y'(t) < 0$ (resp. $x'(t) > 0$ et $y'(t) > 0$, resp. $x'(t) < 0$ et $y'(t) > 0$, resp. $x'(t) < 0$ et $y'(t) < 0$).

16. On suppose que pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $(x(t), y(t)) \in A_1$, d'après la question 15, la fonction x (resp. y) est croissante (resp. décroissante) sur \mathbf{R}_+ . Ainsi, pour tout $t \geq 0$,

$$0 < y(t) \leq y(0) < \frac{a}{b} \implies a - by(t) \geq a - by(0) > 0.$$

Or, pour tout $t \geq 0$, $x(t) > 0$, on en déduit que : pour tout $t \geq 0$

$$x'(t) = (a - by(t))x(t) \geq (a - by(0))x(t),$$

soit

$$\frac{x'(t)}{x(t)} \geq a - by(0).$$

On récupère donc

$$\forall t \geq 0, \quad x(t) \geq e^{\ln(x(0))} e^{(a-by(0))t}.$$

Par comparaison, on en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$. Comme A_1 est borné, on en déduit une contradiction.

On a montré qu'il existe $t \geq 0$ tel que $(x(t), y(t)) \notin A_1$.

17. (a) Comme $(x(0), y(0)) \in A_1$, l'ensemble

$$\{t \in \mathbf{R}_+, \forall u \in [0, t], (x(u), y(u)) \in A_1\}$$

est non vide.

D'après la question 16, il existe $t \in \mathbf{R}_+$ tel que $(x(t), y(t)) \notin A_1$, donc l'ensemble

$$\{t \in \mathbf{R}_+, \forall u \in [0, t], (x(u), y(u)) \in A_1\}$$

est majoré.

Il s'ensuit que $\{t \in \mathbf{R}_+, \forall u \in [0, t], (x(u), y(u)) \in A_1\}$ admet une borne supérieure.

- (b) On remarque que pour tout $t \in [0, t_1[$, x est croissante et y est décroissante, ainsi : pour tout $t \in [0, t_1[$,

$$0 < y(t) \leq y(0) < \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad 0 < x(0) \leq x(t) < \frac{c}{d}.$$

En faisant tendre t vers t_1 dans les inégalités précédentes et en utilisant le résultat de la question 12, on obtient

$$0 < y(t_1) \leq y(0) \quad \text{et} \quad x(0) \leq x(t_1) \leq \frac{c}{d}.$$

Si $x(t_1) < \frac{c}{d}$, alors par continuité des fonctions x et y sur \mathbf{R}_+ , on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout

$$\forall t \in [t_1, t_1 + \varepsilon], \quad 0 < y(t) < \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad 0 < x(t) < \frac{c}{d}.$$

Cela montre que : pour tout $t \in [0, t_1 + \varepsilon]$, $(x(t), y(t)) \in A_1$, ce qui contredit la définition de t_1 .

On a donc montré que $x(t_1) = \frac{c}{d}$ et $0 < y(t_1) < \frac{a}{b}$.

- (c) Par continuité de y sur \mathbf{R}_+ , il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que :

$$\forall t \in [t_1, t_1 + \varepsilon_1], \quad 0 < y(t) < \frac{a}{b}.$$

Comme $x'(t_1) = (a - by(t_1))x(t_1) > 0$, par continuité de x' , il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que $x'(t) > 0$ pour tout $t \in [t_1, t_1 + \varepsilon_2]$, ainsi x est strictement croissante sur $[t_1, t_1 + \varepsilon_2]$.

Comme $x(t_1) = \frac{c}{d}$, on en déduit que pour tout $t \in]t_1, t_1 + \varepsilon_2]$, $x(t) > \frac{c}{d}$.

Soit $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Pour tout $t \in]t_1, t_1 + \varepsilon]$, on a

$$0 < y(t) < \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad x(t) > \frac{c}{d},$$

soit

$\forall t \in]t_1, t_1 + \varepsilon[, \quad (x(t), y(t)) \in A_2$

et

$\forall t \in [0, t_1[, \quad (x(t), y(t)) \in A_1.$

18. (a) h est dérivable sur $]0, \frac{\beta}{\alpha}]$ et

$$\forall x \in]0, \frac{\beta}{\alpha}], \quad h'(x) = \frac{\alpha x - \beta}{x} > 0.$$

On en déduit que h est strictement croissante sur $]0, \frac{\beta}{\alpha}]$, donc injective sur cet intervalle.

(b) On a déjà vu à la question 17 (b) que $x(t_1) = \frac{c}{d}$.

Comme pour tout $t \in]t_4, t_5[$, $(x(t), y(t)) \in A_1$, donc $x(t) < \frac{c}{d}$ et pour tout $t \in]t_5, t_5 + \varepsilon_4[$, $x(t) > \frac{c}{d}$, par le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que $x(t_5) = \frac{c}{d}$.

D'après la question 13, on a

$$\begin{aligned} & dx(t_1) - c \ln(x(t_1)) + by(t_1) - a \ln(y(t_1)) \\ &= dx(t_5) - c \ln(x(t_5)) + by(t_5) - a \ln(y(t_5)). \end{aligned}$$

Comme $x(t_1) = x(t_5)$, on a

$$by(t_1) - a \ln(y(t_1)) = by(t_5) - a \ln(y(t_5)) \iff h(y(t_1)) = h(y(t_5)).$$

Comme $y(t_1)$ et $y(t_5)$ sont des éléments de $]0, \frac{b}{a}]$, par la question 18 (a), on en déduit que $y(t_1) = y(t_5)$.

On a montré que $(x(t_5), y(t_5)) = (x(t_1), y(t_1))$.

19. Soient les fonction x_1, x_2, y_1 et y_2 définies sur \mathbf{R}_+ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad x_1(t) = x(t + t_1) \quad \text{et} \quad y_1(t) = y(t + t_1)$$

et

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad x_2(t) = x(t + t_5) \quad \text{et} \quad y_2(t) = y(t + t_5).$$

Les fonctions x_1 et y_1 vérifient : pour tout $t \in \mathbf{R}_+$

$$\begin{cases} x_1'(t) = (a - by_1(t))x_1(t) \\ y_1'(t) = (-c + dx_1(t))y_1(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_1(0) = x(t_1) \\ y_1(0) = y_1(t_1) \end{cases},$$

alors que les fonctions x_2 et y_2 vérifient : pour tout $t \in \mathbf{R}_+$

$$\begin{cases} x_2'(t) = (a - by_2(t))x_2(t) \\ y_2'(t) = (-c + dx_2(t))y_2(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2(0) = x(t_5) = x_1(t_1) \\ y_2(0) = y_2(t_5) = y_2(t_1) \end{cases}.$$

Par unicité des solutions, on en déduit : pour tout $t \in \mathbf{R}_+$,

$$\begin{cases} x_1(t) = x_2(t) \\ y_1(t) = y_2(t) \end{cases} \implies \begin{cases} x(t + (t_5 - t_1)) = x(t) \\ y(t + (t_5 - t_1)) = y(t) \end{cases}.$$

On a montré que les fonctions x et y sont $t_5 - t_1$ -périodiques.

20. On peut écrire

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 def eulerexplicite(t0,y0,T,n,F):
4     h=T/float(n)
5     t=t0
6     Y=y0

```

```

7   tt=[t]
8   YY=[Y]
9   for k in range(n):
10      Y=Y+h*F(t,Y)
11      YY.append(Y)
12      t=t+h
13      tt.append(t)
14   ZZ=np.exp(tt)
15   plt.plot(tt,YY,marker="+",label="euler")
16   plt.plot(tt,ZZ,marker="*",label="exp")
17   plt.legend()
18   plt.show()

```

Et pour tester la fonction

```

1   def test(t,y):
2       return y

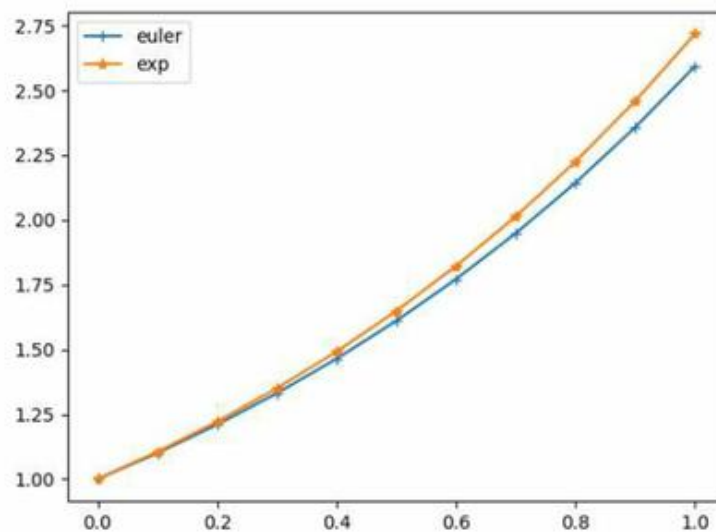
```

Voici les résultats obtenus, en entrant

```

1   eulerexplicite(0,1,1,10,test)

```

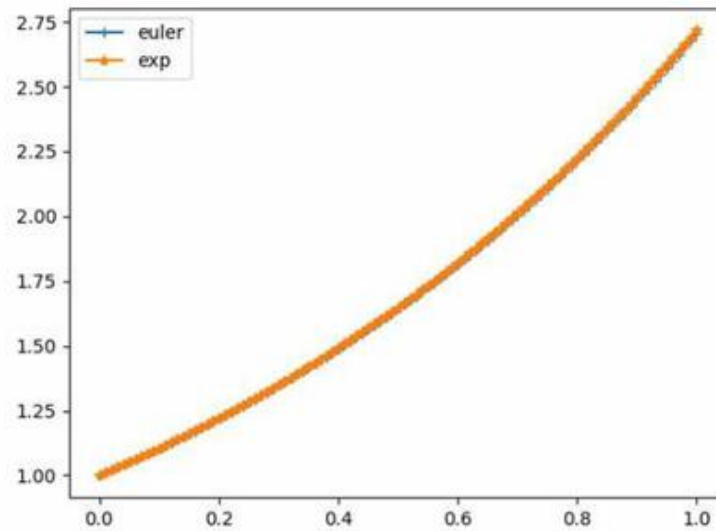


On remarque que le résultat n'est pas satisfaisant. Par contre, avec $n = 100$:

```

1   eulerexplicite(0,1,1,100,test)

```



On remarque que la courbe de la fonction exponentielle et la courbe donnée par Euler explicite sont superposées.

21. On peut écrire :

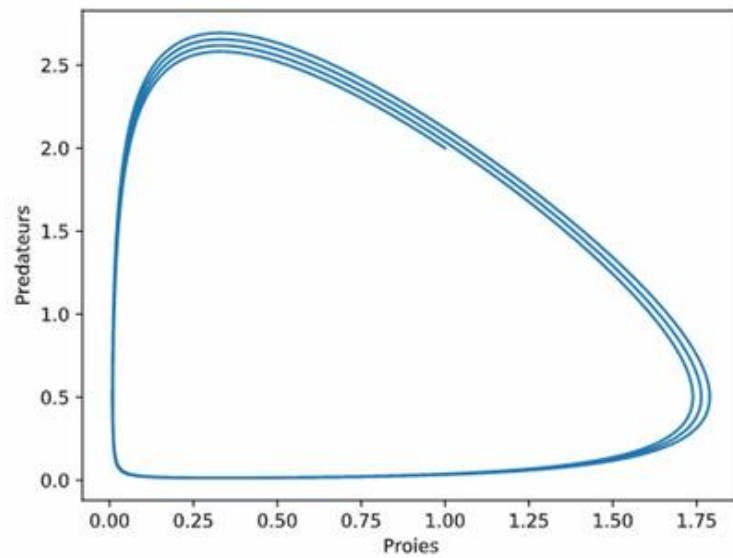
```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 def loktavolterra(a,b,c,d,x0,y0,T,n):
4     h=T/float(n)
5     x=x0
6     y=y0
7     z=x0
8     X=[x]
9     Y=[y]
10    for k in range(n):
11        x=x+(a-b*y)*x*h
12        y=y+(-c+d*z)*y*h
13        z=x
14        X.append(x)
15        Y.append(y)
16    plt.plot(X,Y)
17    plt.xlabel('Proies')
18    plt.ylabel('Predateurs')
19    plt.show()

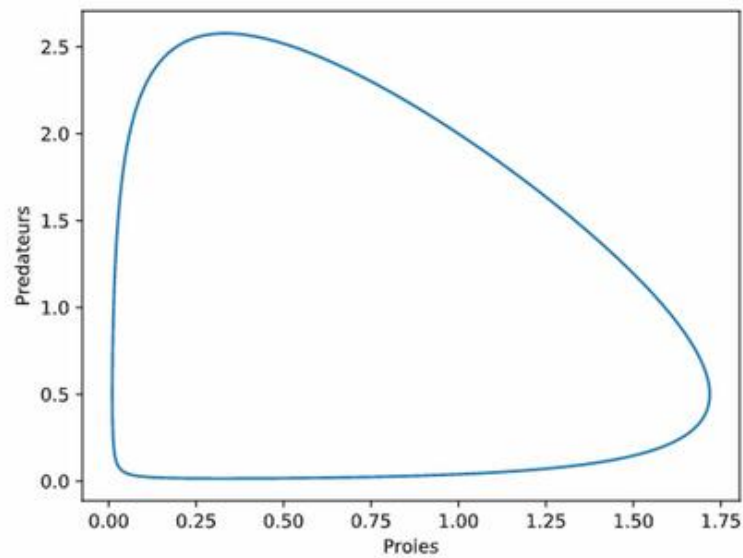
```

Voici le résultat obtenu, en entrant

```
1 loktavolterra(1,2,1,3,1,2,30,10000)
```



22. On ne retrouve pas la périodicité car la courbe ne « boucle pas ». Ce n'est pas dû à la machine, mais à la méthode d'Euler explicite qui n'est pas la mieux adaptée à cette situation. D'autres méthodes numériques permettent de résoudre ce problème. Voici ce que l'on devrait obtenir



Thème 10

Anneau des fonctions arithmétiques

Thèmes abordés : Arithmétique, structure algébrique.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet présente une méthode non abordée en cours de MPSI pour montrer des égalités arithmétiques : le calcul dans l'anneau des fonctions arithmétiques.

Sa résolution nécessite de savoir ce qu'est un groupe et un anneau, ainsi que des connaissances de base en arithmétique.

Les trois premières parties sont indépendantes. Les résultats des trois premières parties servent dans la partie 4.

10.1 Premières définitions

Définition. *Fonction arithmétique.*

On appelle *fonction arithmétique* toute application de \mathbf{N}^* vers \mathbf{C} .

Définition. *Fonction arithmétique multiplicative, complètement multiplicative.*

Soit f une fonction arithmétique.

- On dit que f est *complètement multiplicative* si :

$$\forall (n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2, \quad f(mn) = f(n)f(m).$$

- On dit que f est *multiplicative* si :

$$\forall (n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2, \quad (n \wedge m = 1) \implies f(nm) = f(n)f(m).$$

On note $\mathcal{A}(\mathbf{N}^*)$ l'ensemble des fonctions arithmétiques.

1. Montrer qu'une fonction complètement multiplicative est déterminée par la donnée de $f(p)$ pour tout $p \in \mathbf{P}$, \mathbf{P} étant l'ensemble des nombres premiers.
2. Montrer qu'une fonction multiplicative est déterminée par la donnée de $f(p^n)$ pour tout $p \in \mathbf{P}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. *Exemples.*
 - (a) Soit la fonction ζ définie par : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\zeta(n) = 1$. Montrer que ζ est complètement multiplicative.

- (b) Montrer que la fonction δ définie par $\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est complètement multiplicative.
- (c) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $\tau(n)$ comme le nombre de diviseurs positifs de n . Montrer que la fonction τ est multiplicative.
- (d) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on définit

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ (-1)^r & \text{si } n = p_1 \times \cdots \times p_r, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où p_1, \dots, p_r sont des nombres premiers deux à deux distincts. Montrer que μ (fonction de Möbius) est multiplicative.

10.2 Anneau des fonctions arithmétiques

Définitions. *Addition et produit (de convolution) de fonctions arithmétiques.*

Soit $(f, g) \in \mathcal{A}(\mathbf{N}^*)^2$. On définit les opérations suivantes :

- $f + g$ est la fonction arithmétique définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad (f + g)(n) = f(n) + g(n).$$

- $f \star g$ est la fonction arithmétique définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad (f \star g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

4. Vérifier que

$$\forall f \in \mathcal{A}(\mathbf{N}^*), \quad f \star \delta = \delta \star f = f.$$

5. Montrer que $(\mathcal{A}(\mathbf{N}^*), +, \star)$ est un anneau commutatif d'élément neutre δ pour le produit (de convolution).
6. Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbf{N}^*)$. Montrer que f est inversible dans $\mathcal{A}(\mathbf{N}^*)$ si, et seulement si, $f(1) \neq 0$.

Indication : Dans le sens réciproque, on pourra construire par récurrence $g \in \mathcal{A}(\mathbf{N}^*)$ telle que $f \star g = \delta$.

7. (a) Soit $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $n \wedge m = 1$. Soit $d \in \mathbf{N}^*$ un diviseur de nm . Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls uniques d' et d'' tels que $d'|n$, $d''|m$ et $d'd'' = d$.
- (b) Montrer que si f et g sont multiplicatives, alors $f \star g$ l'est aussi.

10.3 Formule d'inversion de Möbius

Définition. Si $f \in \mathcal{A}(\mathbf{N}^*)$, on définit F par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Le but de cette partie est de retrouver l'expression de f à partir de celle de F .
Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbf{N}^*)$.

8. Vérifier que $F = f \star \zeta$.
9. Vérifier que $\zeta \star \mu = \delta$.
10. En déduire la formule d'inversion de Möbius : $f = F \star \mu$.
11. Montrer que f est multiplicative si, et seulement si, F est multiplicative.

10.4 Applications à la fonction indicatrice d'Euler

Définition. *Fonction indicatrice d'Euler.*

La fonction φ indicatrice d'Euler est définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \varphi(n) = \text{card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \wedge n = 1\}.$$

12. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \varphi(n) = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

13. Donner une expression de φ à l'aide de la fonction de Möbius.
14. En déduire que φ est multiplicative.

Correction du Thème 10

1. Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{N}^*)^n, \quad f\left(\prod_{k=1}^n x_k\right) = \prod_{k=1}^n f(x_k).$$

Le résultat est alors clair car tout entier naturel non nul se décompose comme un produit de nombres premiers.

f est donc uniquement déterminée par la donnée de $f(p)$ pour $p \in \mathbf{P}$.

2. Il est clair qu'une fonction multiplicative vérifie aussi : pour toute suite d'entiers naturels non nuls a_1, \dots, a_n deux à deux premiers entre eux, on a

$$f\left(\prod_{i=1}^n a_i\right) = \prod_{i=1}^n f(a_i).$$

La preuve se fait par une récurrence immédiate.

Comme 1 est premier avec lui même, on a $f(1) = f(1)^2$, donc $f(1) \in \{0, 1\}$.

Si $f(1) = 0$, alors f est identiquement nulle car pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $1 \wedge n = 1$, donc $f(n) = f(1)f(n) = 0$.

On suppose maintenant que $f(1) = 1$.

Soit r un entier supérieur ou égal à 2. Il existe p_1, \dots, p_q des nombres premiers et $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ des entiers naturels non nuls tels que $r = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_q^{\alpha_q}$.

Comme les entiers $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_q^{\alpha_q}$ sont deux à deux premiers entre eux, on a

$f(m) = \prod_{i=1}^q f(p_i^{\alpha_i})$. Donc, la connaissance de $f(p^n)$ pour $p \in \mathbf{P}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$ entraîne la connaissance de $f(m)$ pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2.

On a montré que f est uniquement déterminée par la connaissance de $f(p^n)$ pour $p \in \mathbf{P}$ et $n \in \mathbf{N}$.

3. (a) Il est clair que pour tout $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on a

$$\zeta(nm) = \zeta(n)\zeta(m),$$

ainsi ζ est complètement multiplicative.

- (b) Soit $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on a :

$$\delta(nm) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Or $\delta(n)\delta(m) = 1$ si, et seulement si, $n = m = 1$ et $\delta(n)\delta(m) = 0$ sinon.

Ainsi, pour tout $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$, $\delta(nm) = \delta(n)\delta(m)$, donc

δ est complètement multiplicative.

(c) Soit $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $n \wedge m = 1$. On a $\tau(nm) = \sum_{d|nm} d$.

Or, si d divise nm , il existe deux entiers d' et d'' tels que $d = d'd''$ tels que d' divise n et d'' divise m .

$$\text{Ainsi } \tau(nm) = \sum_{\substack{d'|n \\ d''|m}} d'd'' = \left(\sum_{d|n} d \right) \left(\sum_{d''|m} d'' \right) = \tau(n) \tau(m).$$

On a montré que τ est multiplicative.

(d) Soit $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $n \wedge m = 1$.

Si $n = 1$ ou $m = 1$, on a bien $\mu(nm) = \mu(n) \mu(m)$.

On suppose $n \geq 2$ et $m \geq 2$. On écrit

$$n = p_1^{\alpha_1} \times \dots \times p_r^{\alpha_r} \quad \text{et} \quad m = q_1^{\beta_1} \times \dots \times q_\ell^{\beta_\ell}$$

avec les nombres $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_\ell$ des nombres premiers et $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_\ell$ des entiers naturels supérieurs ou égaux à 1.

Comme n et m sont premiers entre eux, les p_i et les q_j sont deux à deux distincts.

S'il existe α_i ou β_j supérieur ou égal à deux, on a $\mu(n) = 0$ ou $\mu(m) = 0$.

Comme nm possède, dans sa décomposition en produits de nombres premiers, un nombre premier dont la puissance est supérieur ou égal à 2, on a $\mu(nm) = 0$.

Il s'ensuit que $\mu(nm) = \mu(n) \mu(m)$.

On suppose que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ et pour tout $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, $\alpha_j = \beta_\ell = 1$.

On a $\mu(n) = (-1)^r$, $\mu(m) = (-1)^\ell$ et $\mu(nm) = (-1)^{r+\ell} = (-1)^r (-1)^\ell$, soit

$$\mu(nm) = \mu(n) \mu(m).$$

On a montré que μ est multiplicative.

4. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Comme pour tout $m \geq 2$, $\delta(m) = 0$, on a

$$(\delta \star f)(n) = \sum_{d|n} f(d) \delta\left(\frac{n}{d}\right) = f(n) \delta\left(\frac{n}{n}\right) = f(n).$$

Un calcul analogue montre que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(f \star \delta)(n) = f(n)$.

On a montré que pour tout $f \in \mathcal{A}(\mathbf{N}^*)$, $f \star \delta = \delta \star f = f$.

- 5.
- Il est clair que $(\mathcal{A}, +)$ est un groupe.
 - Il est clair que si $(f, g) \in \mathcal{A}^2$, alors $f \star g \in \mathcal{A}$.
 - Soit $(f, g) \in \mathcal{A}^2$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} (f \star g)(n) &= \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right) \\ &= \sum_{d'|n} f\left(\frac{n}{d'}\right) g(d') \\ &= (g \star f)(n). \end{aligned}$$

Ainsi, $f \star g = g \star f$: la loi \star est commutative.

- Soit $(f, g, h) \in \mathcal{A}^3$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} (f \star (g + h))(n) &= \sum_{d|n} f(d) (g + h) \left(\frac{n}{d} \right) \\ &= \sum_{d|n} f(d) g \left(\frac{n}{d} \right) + \sum_{d|n} f(d) h \left(\frac{n}{d} \right) \\ &= (f \star g)(n) + (f \star h)(n). \end{aligned}$$

Ainsi, $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$: la loi \star est distributive à gauche sur $+$. Comme \star est commutative, on en déduit que \star est distributive à droite sur $+$.

On a montré que $(\mathcal{A}, +, \star)$ est un anneau commutatif.

6. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Si f est inversible dans $\mathcal{A}(\mathbf{N}^*)$, il existe $g \in \mathcal{A}(\mathbf{N}^*)$ telle que

$$f \star g = g \star f = \delta.$$

En particulier, $(f \star g)(1) = \delta(1) = 1$.

Or, $(f \star g)(1) = \sum_{d|1} f(d) g \left(\frac{1}{d} \right) = f(1) g(1)$, donc $f(1) g(1) = 1$, d'où $f(1) \neq 0$.

\Leftarrow On procède par analyse-synthèse.

- *Analyse*

On suppose qu'il existe $g \in \mathcal{A}(\mathbf{N}^*)$ tel que $f \star g = \delta$, soit pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $(f \star g)(n) = \delta(n)$.

Pour $n = 1$, on obtient $f(1) g(1) = 1$, soit, comme $f(1) \neq 0$,

$$g(1) = \frac{1}{f(1)}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et on suppose que $g(1), \dots, g(n)$ construits.

On a

$$(f \star g)(n+1) = \sum_{d|n+1} f(d) g \left(\frac{n+1}{d} \right) = \delta(n+1) = 0.$$

On en déduit

$$f(1) g(n+1) = - \sum_{\substack{d|n+1 \\ d \neq n+1}} f(d) g \left(\frac{n+1}{d} \right),$$

puis comme $f(1) \neq 0$, on a

$$g(n+1) = - \frac{1}{f(1)} \sum_{\substack{d|n+1 \\ d \neq n+1}} f(d) g \left(\frac{n+1}{d} \right).$$

Ainsi, $g(n+1)$ est construit.

- *Synthèse*

La synthèse est claire : par construction de g , on a bien $f \star g = \delta$.

On a montré que f est inversible dans $\mathcal{A}(\mathbf{N}^*)$ si, et seulement si, $f(1) \neq 0$.

7. (a) On prouve d'abord l'existence, puis l'unicité.

Soit $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $n \wedge m = 1$ et soit d un diviseur de nm .

- *Existence*

On écrit les décompositions de n et m en produits de facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}$$

et

$$m = q_1^{\beta_1} \times \cdots \times q_\ell^{\beta_\ell}$$

où $p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_\ell$ sont des nombres premiers et $\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_\ell$ sont des entiers naturels non nuls.

Comme $n \wedge m = 1$, les p_i et les q_j sont deux à deux distincts.

Comme d divise nm : il existe des entiers $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ et $\delta_1, \dots, \delta_\ell$ vérifiant : pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\gamma_i \leq \alpha_i$ et pour tout $j \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, $\delta_j \leq \beta_j$ tels que

$$d = p_1^{\gamma_1} \times \cdots \times p_r^{\gamma_r} \times q_1^{\delta_1} \times \cdots \times q_\ell^{\delta_\ell}.$$

Si l'on pose $d' = p_1^{\gamma_1} \times \cdots \times p_r^{\gamma_r}$ et $d'' = q_1^{\delta_1} \times \cdots \times q_\ell^{\delta_\ell}$, il est clair que $d = d'd''$ et $d'|n$ et $d''|m$.

- *Unicité*

Soient $(d', d'') \in (\mathbf{N}^*)^2$ et $(\tilde{d}', \tilde{d}'') \in (\mathbf{N}^*)^2$ tels que $d = d'd'' = \tilde{d}'\tilde{d}''$ avec $d'|n$, $\tilde{d}'|n$, $d''|m$ et $\tilde{d}''|m$.

d' divise $\tilde{d}'\tilde{d}''$. Or $d' \wedge \tilde{d}'' = 1$ car $n \wedge m = 1$, donc d'après le théorème de Gauss, d' divise \tilde{d}' . On montre de même que \tilde{d}' divise d' . Il s'ensuit que $d' = \tilde{d}'$ car d', \tilde{d}' sont des entiers naturels.

Finalement, on a $d'' = \tilde{d}''$.

On a montré qu'il existe deux entiers naturels non nuls uniques d' et d'' tels que $d'|n$, $d''|m$ et $d'd'' = d$.

(b) Soit $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$ tel que $n \wedge m = 1$. D'après la question 7 (a), on a

$$(f \star g)(nm) = \sum_{d|nm} f(d) g\left(\frac{nm}{d}\right) = \sum_{\substack{d'|n \\ d''|m}} f(d'd'') g\left(\frac{nm}{d'd''}\right).$$

Comme $n \wedge m = 1$, on a $d' \wedge d'' = 1$ et $\frac{n}{d'} \wedge \frac{m}{d''} = 1$, ainsi

$$f(d'd'') = f(d') f(d'') = f(d') f(d'')$$

et

$$g\left(\frac{nm}{d'd''}\right) = g\left(\frac{n}{d'}\right) g\left(\frac{m}{d''}\right).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} (f \star g)(nm) &= \sum_{\substack{d'|n \\ d''|m}} f(d') f(d'') g\left(\frac{n}{d'}\right) g\left(\frac{m}{d''}\right) \\ &= \left(\sum_{d'|n} f(d') g\left(\frac{n}{d'}\right) \right) \left(\sum_{d''|m} f(d'') g\left(\frac{m}{d''}\right) \right) \\ &= (f \star g)(n) (f \star g)(m). \end{aligned}$$

On a montré que $f \star g$ est multiplicative.

8. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On a

$$(f \star \zeta)(n) = \sum_{d|n} f(d) \zeta\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} f(d) = F(n).$$

On a montré que $F = f \star \zeta$.

9. Comme $\zeta \star \mu$ est multiplicative car les fonctions ζ et μ le sont (question 7 (b)) et δ est multiplicative, il suffit de montrer que ces deux fonctions coïncident sur les puissances de nombres premiers (question 2).

Il est clair que

$$(\zeta \star \mu)(1) = \delta(1) = 1.$$

Soit $p \in \mathbf{P}$ et soit $r \in \mathbf{N}^*$. On a

$$(\zeta \star \mu)(p^r) = \sum_{d|p^r} \mu(d) = \sum_{k=0}^r \mu(p^k) = 0 = \delta(p^r)$$

car $\mu(p^0) = 1$, $\mu(p) = -1$ et pour tout $k \in \llbracket 2, r \rrbracket$, $\mu(p^k) = 0$.

On a montré que $\zeta \star \mu = \delta$.

10. On a $F = f \star \zeta$, d'où en multipliant par μ à droite, on a

$$F \star \mu = f \star \zeta \star \mu.$$

Or, d'après la question 9, $\zeta \star \mu = \delta$ et d'après la question 4,

$$f \star \delta = f.$$

On a montré que $f = F \star \mu$.

11. On montre les deux implications.

\Rightarrow Comme f et ζ sont multiplicatives, la question 7 (b) montre que $F = f \star \zeta$ est multiplicative.

\Leftarrow Comme F et μ sont multiplicatives, la question 7 (b) montre que $f = F \star \mu$ est multiplicative.

On a montré que f est multiplicative si, et seulement si, F l'est.

12. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour d diviseur de n , on définit

$$A_d = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \wedge n = d\}.$$

Il est clair que $n = \sum_{d|n} \text{card}(A_d)$ car la famille $(A_d)_{d|n}$ forme une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Or,

$$A_d = \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, k \wedge n = d\} = \left\{ k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \left(\frac{k}{d}\right) \wedge \left(\frac{n}{d}\right) = 1 \right\},$$

ainsi, par définition $\text{card}(A_d) = \varphi\left(\frac{n}{d}\right)$.

On a montré que $n = \sum_{d|n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \varphi(d)$, soit $\text{id}_{\mathbf{N}^*} = \varphi \star \delta$.

13. On a montré à la question 12 que $\text{id}_{\mathbf{N}^*} = \varphi \star \delta$.

En multipliant par μ à droite, on a $\text{id}_{\mathbf{N}^*} \star \mu = \varphi \star \zeta \star \mu = f$ car $\zeta \star \mu = \delta$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \varphi(n) = (\text{id}_{\mathbf{N}^*} \star \mu)(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}.$$

14. Il est clair que $\text{id}_{\mathbf{N}^*}$ est multiplicative. μ est aussi multiplicative (question 3 (d)).

Ainsi, d'après les questions 7 (b) et 13, φ est multiplicative.

Thème 11

Nombres transcendants

Thèmes abordés : Polynôme, suite, série.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet montre de 3 façons différentes l'existence de nombres transcendants sur \mathbf{Q} .

Sa résolution ne nécessite que des connaissances rudimentaires sur les polynômes. Seules les questions 10, 11 et 12 nécessitent des connaissances rudimentaires sur les séries et la résolution de ces questions n'est pas nécessaire pour la suite du sujet.

Les parties de ce problèmes sont largement indépendantes.

11.1 Définitions

Définition. *Nombre transcendant.*

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$.

On dit que α est *transcendant* (sur \mathbf{Q}) s'il n'existe pas de polynôme non nul à coefficients entiers relatifs P tel que $P(\alpha) = 0$.

Définitions. *Nombre algébrique, nombre algébrique de degré d .*

Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et $d \in \mathbf{N}^*$.

- On dit que α est un *nombre algébrique* (sur \mathbf{Q}) s'il n'est pas transcendant. On note \mathcal{A} l'ensemble des nombres algébriques.
- On dit que α est un *nombre algébrique de degré d* , s'il existe $P \in \mathbf{Z}[X]$ de degré d tel que $P(\alpha) = 0$ et si pour tout polynôme $Q \in \mathbf{Z}_{d-1}[X] \setminus \{0\}$, $Q(\alpha) \neq 0$.
Pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, on note \mathcal{A}_d l'ensemble des nombres algébriques de degré d .

11.2 Existence de nombres transcendants

11.2.1 Par un argument de cardinalité

1. (a) Montrer que $\sqrt{2}$ est algébrique.
(b) Donner son degré.
2. Montrer que $\mathcal{A} = \bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathcal{A}_d$.

3. Montrer que pour tout $d \in \mathbf{N}^*$, \mathcal{A}_d est au plus dénombrable.

Indication : On utilisera le fait que \mathbf{Z}^{d+1} est dénombrable pour tout $d \in \mathbf{N}$ et qu'un polynôme de degré d a plus d racines.

4. En déduire que \mathcal{A} est dénombrable, puis conclure.

Indication : On admet qu'une union au plus dénombrable d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.

11.2.2 Les nombres de Liouville

On commence par établir l'inégalité de Liouville.

Lemme. Inégalité de Liouville.

Soit d un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $\alpha \in \mathcal{A}_d$. Il existe $c > 0$ tel que

$$\forall \frac{p}{q} \in \mathbf{Q} \ (p \in \mathbf{N}, q \in \mathbf{Z}^*), \quad \left(\alpha \neq \frac{p}{q} \right) \implies \left(\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^d} \right).$$

Nous commençons par établir l'inégalité de Liouville. Soit $\alpha \in \mathcal{A}_d$ avec d un entier supérieur ou égal à 2 et soit P un polynôme de degré d tel que $P(\alpha) = 0$. Soit $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$.

5. Montrer que α est irrationnel.

6. (a) Montrer que $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$.

(b) Montrer que $\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{q^d}$.

7. Montrer que si $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq 1$, alors $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^d}$.

8. On suppose $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < 1$.

(a) Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq M \left| \frac{p}{q} - \alpha \right|$.

(b) En déduire que $\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq \frac{1}{Mq^d}$.

9. Terminer la preuve de l'inégalité de Liouville.

Théorème. Nombres de Liouville.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$ qui ne stationne pas sur 0.

Alors, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{10^{n!}}$ converge et sa somme est un nombre transcendant.

Nous prouvons le théorème.

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \in \{0, 1\}^{\mathbf{N}^*}$ qui ne stationne pas sur 0.

10. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{10^{n!}}$ converge.

On pose $\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^{n!}}$.

11. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On pose $q_n = 10^{n!}$.

Montrer qu'il existe un entier p_n tel que $\sum_{r=1}^n \frac{a_r}{10^{r!}} = \frac{p_n}{q_n}$.

12. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $10^{n!} \geq 10^n$.

(b) En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad 0 < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \frac{1}{q_n^n}.$$

13. En déduire que α est transcendant.

11.2.3 Un nombre transcendant bien connu

Proposition. *e est un nombre transcendant.*

Nous prouvons la proposition. On suppose qu'il existe un polynôme R non nul à coefficients dans \mathbf{Z} tel que $R(e) = 0$. On écrit $R = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ avec $n \in \mathbf{N}$.

14. Montrer que l'on peut supposer $a_0 \neq 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

On note \mathbf{P} l'ensemble des nombres premiers et soit $p \in \mathbf{P}$. Soient les polynômes

$$P = \frac{X^{p-1} (X-1)^p (X-2)^p \cdots (X-n)^p}{(p-1)!} \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^{np+p-1} P^{(k)}.$$

15. Montrer que la dérivée de $x \mapsto e^{-x} Q(x)$ est $x \mapsto -e^{-x} P(x)$.

16. En déduire que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad a_i \int_0^i e^{-x} P(x) dx = a_i (Q(0) - e^{-i} Q(i)).$$

17. En déduire que

$$\sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx = - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{np+p-1} a_i P^{(k)}(i).$$

18. Calcul de $P^{(k)}(i)$ pour $k \in \llbracket 0, np+p-1 \rrbracket$ et $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

(a) Montrer que

$$P^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket, \\ (-1)^{np} (n!)^p & \text{si } k = p-1, \\ p\mu_k & \text{si } k \in \llbracket p, np+p-1 \rrbracket, \end{cases}$$

avec $\mu_k \in \mathbf{Z}$.

(b) Montrer que : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$P^{(k)}(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \\ p\lambda_{k,i} & \text{si } k \in \llbracket p, np+p-1 \rrbracket, \end{cases}$$

avec $\lambda_{k,i} \in \mathbf{Z}$.

19. En déduire qu'il existe $m \in \mathbf{Z}$

$$\sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx = mp - a_0 (-1)^{np} (n!)^p.$$

20. Montrer que pour tout nombre premier p assez grand, on a

$$\sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx \in \mathbf{Z}^*.$$

21. Montrer que

$$\forall x \in [0, n], \quad |P(x)| \leq \frac{n^{np+p-1}}{(p-1)!}.$$

22. En déduire que

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx \right| \leq \sum_{i=0}^n |a_i e^i| \frac{in^{np+p-1}}{(p-1)!}.$$

23. Montrer que

$$\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbf{P}}} \sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx = 0.$$

24. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'entiers relatifs convergente. Montrer qu'elle est stationnaire.

25. Terminer la preuve de la transcendance de e .

Correction du Thème 11

1. (a) Soit $P = X^2 - 2 \in \mathbf{Z}[X]$.
De toute évidence, $P \neq 0$ et $P(\sqrt{2}) = 0$.

On a montré que $\sqrt{2}$ est algébrique.

- (b) D'après la preuve faite pour la question 1 (a), $\sqrt{2}$ est un nombre algébrique de degré inférieur ou égal à 2.

Pour conclure que $\sqrt{2}$ est un nombre algébrique de degré 2, il reste à montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbf{Z}_1[X]$ non nul, $Q(\sqrt{2}) \neq 0$.

Soit $Q = aX + b \in \mathbf{Z}_1[X]$ avec $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $Q(\sqrt{2}) = 0$, soit $a + b\sqrt{2} = 0$.

Si $a \neq 0$, on aurait $\sqrt{2} = -\frac{b}{a} \in \mathbf{Q}$.

Donc $a = 0$. Il s'ensuit que $b = 0$.

Ainsi, il n'existe pas de polynôme non nul $Q \in \mathbf{Z}_1[X]$ tel que $Q(\sqrt{2}) = 0$.

On a montré $\sqrt{2}$ est un nombre algébrique de degré 2.

2. On prouve les deux inclusions.

\supseteq L'inclusion $\mathcal{A} \supset \bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathcal{A}_d$ est claire.

\subseteq Soit $x \in \mathcal{A}$. Comme x est algébrique, il existe $P \in \mathbf{Z}[X]$ non nul (donc non constant) tel que $P(x) = 0$.

Si $d = \deg(P) \in \mathbf{N}^*$, on a $x \in \mathcal{A}_d$.

On a montré que $\mathcal{A} = \bigcup_{d=1}^{+\infty} \mathcal{A}_d$.

3. Soit $d \in \mathbf{N}^*$. Déjà \mathbf{Z}^{d+1} est dénombrable comme le produit cartésien de $d+1$ ensembles dénombrables.

De plus, l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{Z}^{d+1} & \longrightarrow \mathbf{Z}_d[X] \\ (a_0, a_1, \dots, a_d) & \longmapsto \sum_{k=0}^d a_k X^k \end{cases}$$

est clairement bijective, ainsi $\mathbf{Z}_d[X]$ est aussi dénombrable.

On en déduit $\mathbf{Z}_d[X] \setminus \mathbf{Z}_{d-1}[X] \subset \mathbf{Z}_d[X]$ est aussi dénombrable.

Par définition de \mathcal{A}_d , on a

$$\mathcal{A}_d = \bigcup_{P \in \mathbf{Z}_d[X] \setminus \mathbf{Z}_{d-1}[X]} P^{-1}(\{0\}).$$

Or, pour tout $P \in \mathbf{Z}_d[X] \setminus \mathbf{Z}_{d-1}[X]$, $P^{-1}(\{0\})$ est fini (car un polynôme de degré d a au plus d racines).

On peut conclure que \mathcal{A}_d est au plus dénombrable comme réunion dénombrables d'ensembles finis.

4. Comme \mathcal{A} est une réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrables, on en déduit que \mathcal{A} est au plus dénombrable.

Or, \mathcal{A} n'est pas fini car il contient \sqrt{p} pour tout $p \in \mathbf{P}$,

on en déduit que \mathcal{A} est dénombrable.

5. Si α est rationnel, on peut écrire $\alpha = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{N}^*$.

Soit $P = bX - a$, on a $P(\alpha) = 0$, donc α est un nombre algébrique de degré 1.

Par contraposée, tout nombre algébrique dont le degré est supérieur ou égal à 2, est irrationnel.

6. (a) Soit $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$.

Si $P\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, il existe $Q \in \mathbf{Q}[X]$ de degré $d - 1$ tel que

$$P = \left(X - \frac{p}{q}\right) Q.$$

Comme α est irrationnel, on a $Q\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ et Q est de degré $d - 1$.

Quitte à multiplier Q par le PPCM du dénominateur de ses coefficients, on peut supposer que $Q \in \mathbf{Z}[X]$.

Ainsi, il existe un polynôme de degré $d - 1$ à coefficients entiers tel que $Q(\alpha) = 0$.

Cela contredit le fait que α soit un nombre algébrique de degré d .

On a montré que pour tout $p \in \mathbf{Z}$, pour tout $q \in \mathbf{N}^*$, $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$.

- (b) On écrit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ où $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbf{Z}^{d+1}$.

Soit $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$. Comme $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$, on a

$$q^d P\left(\frac{p}{q}\right) = \sum_{k=0}^d a_k q^{d-k} \in \mathbf{Z}^*,$$

ainsi

$$\left|q^d \left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq 1.$$

On a donc montré que pour tout $p \in \mathbf{Z}$, pour tout $q \in \mathbf{N}^*$,

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^d}.$$

7. Comme $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq 1$ et $\frac{1}{q^d} \leq 1$, on en déduit que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{q^d}$.

8. (a) On pose $M = \sup_{t \in [\alpha-1, \alpha+1]} |P'(t)|$.

Comme $P(\alpha) = 0$, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\left| P\left(\frac{p}{q}\right) \right| \leq M \left| \frac{p}{q} - \alpha \right|.$$

- (b) En utilisant les résultats obtenus aux questions 6 (b) et 8 (a), on en déduit que

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq \frac{1}{Mq^d}.$$

9. Soit $c = \min\left\{1, \frac{1}{M}\right\}$. D'après les inégalités établies aux questions 7 et 8 (b), on a

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq \frac{c}{q^d}.$$

10. Par croissance comparée, on a $\frac{a_n}{10^{n!}} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $2 > 1$), par négligeabilité,

$$\text{la série } \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{10^{n!}} \text{ converge.}$$

11. On a $q_n \sum_{r=1}^n \frac{a_r}{10^{r!}} = \sum_{r=0}^n a_r 10^{n!-r!}$.

Comme pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_r \in \{0, 1\}$ et $10^{n!-r!} \in \mathbf{N}$, on en déduit que

$$\sum_{r=1}^n a_r 10^{n!-r!} \in \mathbf{N}.$$

$$\text{On pose } p_n = \sum_{r=1}^n a_r 10^{n!-r!}, \text{ on a donc } \frac{p_n}{q_n} = \sum_{r=1}^n \frac{a_r}{10^{r!}}.$$

12. (a) On commence par montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n! \geq n$.
On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « $n! \geq n$ ».
Il est clair que \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 sont vraies.
On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel n non nul.
Par hypothèse de récurrence, on a $n! \geq n$, d'où $(n+1)! \geq n(n+1)$.
Comme $n \geq 1$, on en déduit $(n+1)! \geq n+1$.
On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.
Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .
Par croissance de la fonction $x \mapsto 10^x$ sur \mathbf{R} , on en déduit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 10^{n!} \geq 10^n.$$

(b) Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ne stationne pas sur 0, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{r=n+1}^{+\infty} \frac{a_r}{10^{r!}} > 0.$$

D'après la question 12 (a), pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\alpha - \frac{p_n}{q_n} = \sum_{r=n+1}^{+\infty} \frac{a_r}{10^{r!}} \leq \frac{1}{10^{(n+1)!}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k}.$$

Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{10}{9} < 10$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$0 < \alpha - \frac{p_n}{q_n} < \frac{10}{10^{(n+1)!}} \leq \frac{10}{(10^{n!})^n 10^{n!}} \leq \frac{1}{q_n^n}.$$

13. Si α était un nombre algébrique, en notant d son degré, d'après l'*Inégalité de Liouville*, il existerait un réel $c > 0$ tel que pour tout $p \in \mathbf{Z}$, pour tout $q \in \mathbf{N}^*$,

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{c}{q^d} \iff q^d \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq c.$$

Or, d'après l'inégalité établie à la question 12 (b), pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$0 \leq q_n^d \left(\alpha - \frac{p_n}{q_n} \right) < \frac{1}{q_n^{n-d}}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n^d \left(\alpha - \frac{p_n}{q_n} \right) = 0.$$

Ceci implique $c = 0$, ce qui contredit le fait que $c > 0$.

On en déduit que α est un nombre transcendant.

14. Si $a_0 = 0$, 0 est racine de R . Si l'on note k l'ordre de multiplicité de 0, il existe $\tilde{R} \in \mathbf{Z}[X]$ tel que $R = X^k \tilde{R}$.

Comme $e \neq 0$, on a $\tilde{R}(e) = 0$ et 0 n'est pas racine de \tilde{R} .

Ainsi, quitte à considérer \tilde{R} défini ci-dessus, on peut supposer $a_0 \neq 0$.

15. On remarque que $\deg(P) = np + p - 1$, donc $P^{(np+p)} = 0$.

On a donc

$$\frac{d(e^{-x} Q(x))}{dx} = e^{-x} (Q'(x) - Q(x)) = -e^{-x} P(x).$$

On a montré que la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{-x} Q(x)$ est la fonction $x \mapsto -e^{-x} P(x)$.

16. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a

$$a_i \int_0^i e^{-x} P(x) dx = -a_i [e^{-x} Q(x)]_0^i = a_i (Q(0) - e^{-i} Q(i)).$$

17. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En multipliant par e^i l'égalité obtenue à la question 16 en sommant entre 0 et n , on a

$$\sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx = Q(0) \sum_{i=0}^n a_i e^i - \sum_{i=0}^n a_i Q(i).$$

Comme $R(e) = \sum_{i=0}^n a_i e^i = 0$ et en utilisant la définition de Q , on en déduit

$$\sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx = - \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^{np+p-1} a_k P^{(k)}(i).$$

18. (a) • 0 est racine d'ordre $p-1$ du polynôme P , ainsi

$$\forall k \in \llbracket 0, p-2 \rrbracket, \quad P^{(k)}(0) = 0.$$

• Pour $k = p-1$. On utilise la formule de Leibniz pour calculer $P^{(p-1)}$.
On a

$$P^{(p-1)} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\binom{p-1}{j}}{(p-1)!} (X^{p-1})^{(j)} \left(\prod_{\ell=1}^n (X-\ell)^p \right)^{(p-1-j)},$$

ainsi

$$\begin{aligned} P^{(p-1)}(0) &= \frac{\binom{p-1}{p-1}}{(p-1)!} (p-1)! ((0-1) \cdots (0-n))^p \\ &= \boxed{(-1)^{np} (n!)^p}. \end{aligned}$$

• Soit $k \in \llbracket p, np+p-1 \rrbracket$. On utilise à nouveau la formule de Leibniz.
On a

$$P^{(k)} = \sum_{j=0}^k \frac{\binom{k}{j}}{(p-1)!} (X^{p-1})^{(j)} \left(\prod_{\ell=1}^n (X-\ell)^p \right)^{(k-j)},$$

soit après simplifications,

$$P^{(k)} = \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\binom{k}{j}}{(p-1-j)!} X^{p-1-j} \left(\prod_{\ell=1}^n (X-\ell)^p \right)^{(k-j)}$$

car $(X^{p-1})^{(j)} = 0$ si $j \geq p$. On en déduit que

$$P^{(k)}(0) = \binom{k}{p-1} \left(\prod_{\ell=1}^n (X-\ell)^p \right)^{(k-p+1)}(0).$$

On pose

$$R = \prod_{\ell=1}^n (X-\ell).$$

On a $(R^p)' = pR'R^{p-1}$, ainsi $(R^p)'(0)$ est un multiple de p .

De plus, il est facile de montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $(R^p)^{(k)}(0)$ est un multiple de p , ainsi il existe $\mu_k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\boxed{P^{(k)}(0) = \mu_k p.}$$

(b) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

- i est racine d'ordre p du polynôme P , ainsi

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \quad \boxed{P^{(k)}(i) = 0.}$$

- Soit $k \in \llbracket p, np+p-1 \rrbracket$. La formule de Leibniz donne l'expression suivante pour $P^{(k)}$:

$$P^{(k)} = \sum_{j=0}^k \frac{\binom{k}{j}}{(p-1)!} ((X-i)^p)^{(j)} \left(X^{p-1} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n (X-\ell)^p \right)^{(k-j)}.$$

Après simplifications, on a :

$$P^{(k)} = \sum_{j=0}^p \frac{\binom{k}{j}^p}{(p-j)!} (X-i)^{p-j} \left(X^{p-1} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n (X-\ell)^p \right)^{(k-j)},$$

car $((X-i)^p)^{(j)} = 0$ si $j \geq p+1$. On en déduit

$$P^{(k)}(i) = p \binom{k}{p} \left(X^{p-1} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n (X-\ell)^p \right)^{(k-p)}(i).$$

Or,

$$\left(X^{p-1} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n (X - \ell)^p \right)^{(k-p)} \in \mathbf{Z}[X],$$

donc $(\mathbf{Z}, +, \times)$ étant un anneau, on en déduit que

$$\left(X^{p-1} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n (X - \ell)^p \right)^{(k-p)} (i) \in \mathbf{Z}.$$

Si l'on pose

$$\lambda_{k,i} = \binom{k}{p} \left(X^{p-1} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^n (X - \ell)^p \right)^{(k-p)} (i) \in \mathbf{Z},$$

on a alors

$$\boxed{P^{(k)}(i) = p\lambda_{k,i}.}$$

19. En utilisant les résultats établis aux questions 18 (a) et 18 (b) avec l'égalité établie à la question 17, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx &= -a_0 (-1)^{np} (n!)^p - a_0 p \sum_{k=p}^{np+p-1} \mu_k \\ &\quad - \sum_{i=1}^n a_i \sum_{k=p}^{np+p-1} p\lambda_{k,i} \\ &= -a_0 (-1)^{np} (n!)^p \\ &\quad + p \left(-a_0 \sum_{k=p}^{np+p-1} \mu_k - \sum_{i=1}^n \sum_{k=p}^{np+p-1} a_i p\lambda_{k,i} \right) \\ &= \boxed{-a_0 (-1)^{np} (n!)^p + mp}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $m = -a_0 \sum_{k=p}^{np+p-1} \mu_k - \sum_{i=1}^n \sum_{k=p}^{np+p-1} a_i p\lambda_{k,i} \in \mathbf{Z}$ car $(\mathbf{Z}, +, \times)$ est un anneau.

20. Si $p > n$ et $p > |a_0|$, alors p ne divise pas $a_0 (-1)^{np} (n!)^p$, donc p ne divise pas $mp - a_0 (-1)^{np} (n!)^p$. En particulier,

$$mp - a_0 (-1)^{np} (n!)^p \neq 0.$$

On a montré que pour $p > \max\{n, |a_0|\}$,

$$\sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx \in \mathbf{Z}^*.$$

21. Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $x \in [0, n]$, on a $|x - i| \leq n$. On en déduit que : pour tout $x \in [0, n]$

$$|P(x)| = \frac{1}{(p-1)!} \left| x^{p-1} \prod_{\ell=1}^n (x - \ell)^p \right| \leq \frac{1}{(p-1)!} n^{np+p-1}.$$

22. On remarque que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \in [0, i], \quad |e^{-x}| \leq 1,$$

ainsi on a

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx \right| \leq \sum_{i=0}^n |a_i e^i| \int_0^i |P(x)| dx.$$

Puis, en utilisant l'inégalité établie à la question 21, on a

$$\left| \sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx \right| \leq \sum_{i=0}^n |a_i e^i| \frac{in^{np+p-1}}{(p-1)!}.$$

23. Par croissance comparée,

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbf{P}}} \frac{in^{np+p-1}}{(p-1)!} = 0.$$

On notera que cette limite est licite car l'ensemble des nombres premiers n'est pas majoré.

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbf{P}}} \sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx = 0.$$

24. On note ℓ la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - \ell| \leq \frac{1}{4}$. Ainsi, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\forall n, p \geq N, \quad |a_n - a_p| \leq |a_n - \ell| + |a_p - \ell| \leq \frac{1}{2}.$$

Comme pour tout $m \in \mathbf{N}$, $a_m \in \mathbf{Z}$, on en déduit que

la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire à partir du rang N .

25. D'après la question 23, on a

$$\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ p \in \mathbf{P}}} \sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx = 0.$$

D'après la question 24,

$$\sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx \in \mathbf{Z}$$

stationne sur 0 car la suite $\left(\sum_{i=0}^n a_i e^i \int_0^i e^{-x} P(x) dx \right)_{p \in \mathbf{P}}$ converge vers 0 (question 23).

Cela contredit le résultat de la question 20.

On a montré que e est transcendant.

Quelques remarques pour aller plus loin

Le (difficile) résultat suivant permet de construire « facilement » des nombres transcendants :

Théorème. *Théorème de Gelfond-Schneider, version faible.*

Si α est un nombre algébrique strictement positif et différent de 1 et si β est un nombre algébrique irrationnel, alors α^β est un nombre transcendant.

Thème 12

Réseaux

Thèmes abordés : Polynôme, groupe, algèbre linéaire.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet montre dans un premier temps l'irrationalité de π . Ensuite, on y étudie les sous-groupes du groupe $(\mathbf{R}, +)$. Enfin, on généralise cette notion en abordant les réseaux comme sous-groupe de $(\mathbf{C}, +)$. Le lecteur curieux pourra généraliser ces notions à l'étude des sous-groupes discrets de $(\mathbf{R}^n, +)$.

Ce sujet nécessite uniquement des connaissances élémentaires sur les groupes, ainsi qu'en intégration. Seule la toute fin du problème, la question 31, requiert du vocabulaire d'algèbre linéaire.

Les parties de ce problème sont largement indépendantes.

12.1 Irrationalité de π

Le but de cette partie est d'établir la proposition suivante.

Proposition. π est un nombre irrationnel.

Pour $\alpha \in \mathbf{R}^*$ et $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$I_n(\alpha) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos(\alpha x) dx.$$

1. En faisant deux intégrations par parties, montrer que : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$,

$$\alpha^2 I_n(\alpha) = 2n(2n-1) I_{n-1}(\alpha) - 4n(n-1) I_{n-2}(\alpha).$$

2. Montrer que

$$\alpha I_0(\alpha) = 2 \sin(\alpha) \quad \text{et} \quad \alpha^3 I_1(\alpha) = 4 \sin(\alpha) - 4\alpha \cos(\alpha).$$

3. Montrer qu'il existe deux familles de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ avec pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P_n, Q_n \in \mathbf{Z}_n[X]$ telles que

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}^*, \quad \alpha^{2n+1} I_n(\alpha) = n! (P_n(\alpha) \sin(\alpha) + Q_n(\alpha) \cos(\alpha)). \quad (12.1)$$

On suppose $\pi \in \mathbf{Q}$: il existe $(p, q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ tel que $\pi = \frac{p}{q}$.

4. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (2q)^{2n+1} P_n \left(\frac{p}{2q} \right) \in \mathbf{Z}.$$

5. En déduire que

$$\frac{p^{2n+1}}{n!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx \in \mathbf{Z}.$$

6. Soit $J_n = \frac{p^{2n+1}}{n!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos \left(\frac{\pi}{2} x \right) dx$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 < J_n \leq \frac{2p^{2n+1}}{n!}.$$

7. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'entiers relatifs convergente. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire.

8. En déduire que $\pi \notin \mathbf{Q}$.

12.2 Étude de sous-groupes

Le but de cette partie est de caractériser les sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$. Plus précisément, nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition. *Sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$.*

Soit G un sous-groupe de \mathbf{R} pour la loi $+$. Alors, il y a trois possibilités, la réalisation de l'une excluant la réalisation de l'une des deux autres :

- $G = \{0\}$;
- il existe $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ tel que $G = \alpha\mathbf{Z} = \{n\alpha, n \in \mathbf{Z}\}$;
- G est dense dans \mathbf{R} : tout réel est limite d'une suite d'éléments de G .

12.2.1 Preuve

Soit G un sous-groupe de \mathbf{R} pour la loi $+$ que l'on suppose non nul.

9. Montrer que $G \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset$.

10. En déduire que $\inf(G \cap \mathbf{R}_+^*)$ existe. On pose $\alpha = \inf(G \cap \mathbf{R}_+^*)$.

11. Dans cette question, on suppose $\alpha > 0$.

(a) On commence par montrer que $\alpha \in G$. Pour cela, on suppose $\alpha \notin G$.

i. Montrer que

$$\exists g_1 \in G, \quad \alpha < g_1 < \frac{3\alpha}{2}.$$

ii. Montrer que

$$\exists g_2 \in G, \quad \alpha < g_2 < g_1.$$

iii. En déduire une contradiction.

- (b) Soit $g \in G \setminus \{0\}$. On suppose $g > 0$. En considérant n_0 le plus grand élément de $\{n \in \mathbf{Z}, n\alpha \leq g\}$ (dont on justifiera l'existence), montrer que $g = n_0\alpha$.
- (c) Montrer que $G = \alpha\mathbf{Z}$.
12. Dans cette question, on suppose $\alpha = 0$.
- (a) Soit $x \in \mathbf{R}_+^*$. Justifier qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que
- $$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \mathbf{R}_+^*.$$
- On fixe un tel ε .
- (b) Montrer qu'il existe $g \in G$ tel que $0 < g < \varepsilon$.
- (c) En considérant n_1 le plus grand élément de $\{n \in \mathbf{Z}, ng \leq x\}$ (dont on justifiera l'existence), montrer qu'il existe
- $$h \in G \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[.$$
- (d) En déduire l'existence d'une suite d'éléments de G qui converge vers x .
- (e) Montrer que G est dense dans \mathbf{R} .
13. Terminer la preuve de la proposition.

12.2.2 Un exemple de sous-groupe

14. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Montrer que l'ensemble

$$\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} = \{n + m\alpha, (n, m) \in \mathbf{Z}^2\}$$

est un sous-groupe de \mathbf{R} pour la loi $+$.

15. Dans cette question, on suppose que α est irrationnel.
- (a) Montrer que l'application $f : n \in \mathbf{N} \mapsto n\alpha - [n\alpha]$ est injective.
- (b) En déduire que $\inf((\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}) \cap \mathbf{R}_+^*) = 0$.
16. Dans cette question, on suppose que $\alpha \in \mathbf{Q}$: on écrit $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$ et on suppose $p \wedge q = 1$. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbf{R}$ (que l'on exprimera en fonction de p et/ou q) tel que

$$\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} = \beta\mathbf{Z}.$$

17. Montrer que

$$\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} \text{ est dense dans } \mathbf{R} \iff \alpha \notin \mathbf{Q}.$$

18. Soient α et β deux réels non nuls. En déduire que

$$\alpha\mathbf{Z} + \beta\mathbf{Z} \text{ est dense dans } \mathbf{R} \iff \frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbf{Q}.$$

19. En déduire que $\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ est dense dans \mathbf{R} .

12.2.3 Applications

20. Montrer que \mathbf{Q} est dense dans \mathbf{R} .
21. Montrer que, pour tout réel $y \in [-1, 1]$, il existe une suite d'éléments de $\{\cos(n), n \in \mathbf{N}\}$ qui converge vers y .
22. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application continue, 1 et π -périodique. Montrer que f est constante.

12.3 Réseaux

12.3.1 Généralités sur les réseaux

Définition. Réseau de \mathbf{C} .

Soit L un sous-groupe de \mathbf{C} pour la loi $+$. On dit que L est un réseau s'il existe $e \in \mathbf{C}$ tel que

$$L = e\mathbf{Z} = \{ne, n \in \mathbf{Z}\},$$

ou bien s'il existe une famille libre (e_1, e_2) d'éléments de \mathbf{C} , vu comme un \mathbf{R} -espace vectoriel de dimension 2, telle que

$$L = e_1\mathbf{Z} + e_2\mathbf{Z} = \{ne_1 + me_2, (n, m) \in \mathbf{Z}^2\}.$$

23. Montrer que $\mathbf{Z} + i\mathbf{Z} = \{a + ib, (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$ est un réseau de \mathbf{C} .
24. Soit L un réseau de base (e_1, e_2) . En utilisant l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{Z}^2 & \longrightarrow L \\ (a_1, a_2) & \longmapsto a_1e_1 + a_2e_2 \end{cases},$$

montrer que les groupes L et \mathbf{Z}^2 sont isomorphes.

Définitions. Partie fermée et partie discrète.

Soit $A \subset \mathbf{C}$ une partie non vide de \mathbf{C} .

- On dit que A est fermée si, et seulement si,

$$\forall (z_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad ((z_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge vers } z) \implies (z \in A).$$

- On dit que A est discrète si, et seulement si,

$$\forall (z_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad ((z_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge}) \implies ((z_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ stationne}).$$

25. Soit $A \subset \mathbf{C}$ une partie non vide. Montrer que A est fermée et discrète si, et seulement si, pour toute partie $\Omega \subset \mathbf{C}$ bornée, $A \cap \Omega$ est fini.
26. (a) Soit G un sous-groupe de \mathbf{C} pour la loi $+$. Montrer que si G est discret, alors il est fermé.
(b) La conclusion subsiste-t-elle pour une partie quelconque?
27. Soit G un sous-groupe de \mathbf{C} pour la loi $+$. Montrer que G est discret si, et seulement si, l'ensemble $\{|z|, z \in G \setminus \{0\}\}$ admet un minimum.

12.3.2 Un résultat important sur les réseaux

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Proposition. *Soit G est un sous-groupe de \mathbf{C} pour la loi $+$. Alors G est un réseau de \mathbf{C} si, et seulement si, G est une partie discrète.*

28. Montrer que si G est un réseau, alors G est une partie discrète.

Les questions suivantes ont pour but de prouver la réciproque. Soit G un sous-groupe discret de \mathbf{C} pour la loi $+$. On suppose $G \neq \{0\}$.

29. (a) Justifier qu'il existe $z_0 \in G$ non nul tel que

$$|z_0| = \min \{|z|, z \in G \setminus \{0\}\}.$$

(b) Montrer que $G \cap z_0\mathbf{R} = z_0\mathbf{Z}$.

30. Dans cette question, on suppose $G \subset z_0\mathbf{R}$. Montrer que $G = z_0\mathbf{Z}$.

31. On ne suppose plus $G \subset z_0\mathbf{R}$. Soit $z'_1 \in G \setminus z_0\mathbf{R}$. Soit p le projecteur sur $z'_1\mathbf{R}$ parallèlement à $z_0\mathbf{R}$.

(a) Montrer que $G' = p(G)$ est un sous-groupe de $z'_1\mathbf{R}$ pour la loi $+$.

(b) Dans cette question, on souhaite montrer que G' est un sous-groupe discret de $z'_1\mathbf{R}$.

i. Soit $y \in G'$ non nul. Montrer qu'il existe $x \in G$ avec $x = \lambda z_0 + y$ et $0 \leq \lambda < 1$ tel que $p(x) = y$.

ii. Soit $A \subset \mathbf{C}$ une partie non vide et bornée. Montrer que $G' \cap A$ est fini.

iii. Conclure.

(c) En déduire qu'il existe $z_1 \in z'_1\mathbf{R}$ tel que $p(G) = z_1\mathbf{Z}$.

(d) Montrer que la famille (z_0, z_1) est libre, puis que

$$G = z_0\mathbf{Z} + z_1\mathbf{Z}.$$

32. Terminer la preuve de la proposition.

Correction du Thème 12 : Réseaux

1. On pose $u : x \mapsto (1-x^2)^n$ et $v : x \mapsto \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$, la formule d'intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \alpha^2 I_n(\alpha) &= \alpha^2 \left(\left[\frac{(1-x^2) \sin(\alpha x)}{\alpha} \right]_{-1}^1 + \frac{2n}{\alpha} \int_{-1}^1 x (1-x^2)^{n-1} \sin(\alpha x) dx \right) \\ &= 2n\alpha \int_{-1}^1 x (1-x^2)^{n-1} \sin(\alpha x) dx. \end{aligned}$$

En posant les fonctions

$$u : x \mapsto x (1-x^2)^{n-1} \quad \text{et} \quad v : x \mapsto -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x);$$

de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$, une nouvelle intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \alpha^2 I_n(\alpha) &= 2n\alpha \left(\left[-\frac{x (1-x^2)^{n-1} \cos(\alpha x)}{\alpha} \right]_{-1}^1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{n-1} \cos(\alpha x) dx \right. \\ &\quad \left. - 2(n-1) \int_{-1}^1 x^2 (1-x^2)^{n-2} \cos(\alpha x) dx \right) \\ &= 2n I_{n-1}(\alpha) - 4n(n-1) \int_{-1}^1 x^2 (1-x^2)^{n-2} \cos(\alpha x) dx. \end{aligned}$$

En remarquant que pour tout $x \in [-1, 1]$, $x^2 = x^2 - 1 + 1$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha^2 I_n(\alpha) &= 2n I_{n-1}(\alpha) - 4n(n-1) \int_{-1}^1 (x^2 - 1 + 1) (1-x^2)^{n-2} dx \\ &= 2n I_{n-1}(\alpha) + 4n(n-1) I_{n-1}(\alpha) - 4n(n-1) I_{n-2}(\alpha) \\ &= 2n(2n-1) I_{n-1}(\alpha) - 4n(n-1) I_{n-2}(\alpha). \end{aligned}$$

On a montré que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2,

$$\boxed{\alpha^2 I_n(\alpha) = 2n(2n-1) I_{n-1}(\alpha) - 4n(n-1) I_{n-2}(\alpha).}$$

2. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^*$.

- On a

$$\alpha I_0(\alpha) = \alpha \int_{-1}^1 \cos(\alpha x) dx = \alpha \left[\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha} \right]_{-1}^1 = \boxed{2 \sin(\alpha)}.$$

- Pour calculer $\alpha^3 I_1(\alpha)$, on fait deux intégrations par parties. Soient les fonctions $u : x \mapsto 1 - x^2$ et $v : x \mapsto \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x)$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$, ainsi

$$\begin{aligned} \alpha^3 I_1(\alpha) &= \alpha^3 \left(\left[\frac{(1-x^2) \sin(\alpha x)}{\alpha} \right]_{-1}^1 + \frac{2}{\alpha} \int_{-1}^1 x \sin(\alpha x) dx \right) \\ &= 2\alpha^2 \int_{-1}^1 x \sin(\alpha x) dx. \end{aligned}$$

Soient les fonctions $u : x \mapsto x$ et $v : x \mapsto -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x)$. Les fonctions u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$ et

$$\begin{aligned} \alpha^3 I_1(\alpha) &= 2\alpha^2 \left(\left[-\frac{x \cos(\alpha x)}{\alpha} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{\alpha} \int_{-1}^1 \cos(\alpha x) dx \right) \\ &= -4\alpha \cos(\alpha) + 2\alpha \left[\frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) \right]_{-1}^1 \\ &= \boxed{4 \sin(\alpha) - 4\alpha \cos(\alpha)}. \end{aligned}$$

3. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « il existe $(P_n, Q_n) \in \mathbf{Z}_n[X]^2$ tel que pour tout $\alpha \in \mathbf{R}^*$,

$$\alpha^{2n+1} I_n(\alpha) = n! (P_n(\alpha) \sin(\alpha) + Q_n(\alpha) \cos(\alpha)) \text{ »}.$$

La proposition \mathcal{P}_0 est vraie : il suffit de poser $P_0 = 2$ et $Q_0 = 0$. Il est clair que P_0 et Q_0 appartiennent à $\mathbf{Z}_0[X]$.

La proposition \mathcal{P}_1 est vraie : il suffit de poser $P_1 = 4$ et $Q_1 = -4X$ avec P_1 et Q_1 deux éléments de $\mathbf{Z}_1[X]$.

On suppose les propositions \mathcal{P}_{n-1} et \mathcal{P}_{n-2} vraies pour un entier naturel $n \geq 2$. Montrons que \mathcal{P}_n est vraie.

D'après le résultat de la question 1, pour tout réel non nul α , on a :

$$\alpha^2 I_n(\alpha) = 2n(2n-1) I_{n-1}(\alpha) - 4n(n-1) I_{n-2}(\alpha)$$

d'où en multipliant par α^{2n-1} :

$$\alpha^{2n+1} I_n(\alpha) = 2n(2n-1) \alpha^{2n-1} I_{n-1}(\alpha) - 4n(n-1) \alpha^{2n-1} I_{n-2}(\alpha).$$

Les hypothèses de récurrence assurent que

$$\begin{aligned}\alpha^{2n-1} I_{n-1}(\alpha) &= \alpha^{2(n-1)+1} I_{n-1}(\alpha) \\ &= (n-1)! (P_{n-1}(\alpha) \sin(\alpha) + Q_{n-1}(\alpha) \cos(\alpha))\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\alpha^{2n-1} I_{n-2}(\alpha) &= \alpha^2 \alpha^{2(n-2)+1} I_{n-2}(\alpha) \\ &= \alpha^2 (n-2)! (P_{n-2}(\alpha) \sin(\alpha) + Q_{n-2}(\alpha) \cos(\alpha)).\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\alpha^{2n+1} I_n(\alpha) &= n! ((2(2n-1) P_{n-1}(\alpha) - 4\alpha^2 P_{n-2}(\alpha)) \sin(\alpha) \\ &\quad + (2(2n-1) Q_{n-1}(\alpha) - 4\alpha^2 Q_{n-2}(\alpha)) \cos(\alpha)).\end{aligned}$$

Soient

$$P_n = 2(2n-1)P_{n-1} - 4X^2P_{n-2} \quad \text{et} \quad Q_n = 2(2n-1)Q_{n-1} - 4X^2Q_{n-2}.$$

Comme $\deg(P_{n-1}) \leq n-1$ et $\deg(P_{n-2}) \leq n-2$, on a bien $\deg(P_n) \leq n$. Il en est de même pour Q_n .

On a montré l'existence de deux suites de polynômes vérifiant les conditions demandées.

4. Comme $P_n \in \mathbf{Z}_n[X]$, il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{Z}^{n+1}$ tel que $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Ainsi

$$(2q)^{n+1} P_n\left(\frac{p}{2q}\right) = (2q)^{n+1} \sum_{k=0}^n a_k \left(\frac{p}{2q}\right)^k = \sum_{k=0}^n a_k p^k (2q)^{n+1-k}.$$

Comme $(\mathbf{Z}, +, \times)$ est un anneau, il s'ensuit que $P_n\left(\frac{p}{2q}\right) \in \mathbf{Z}$.

5. On évalue la relation établie à la question 3 en $\frac{\pi}{2} = \frac{p}{2q}$ pour obtenir

$$\left(\frac{p}{2q}\right)^{2n+1} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = n! P_n\left(\frac{p}{2q}\right)$$

soit

$$\frac{p^{2n+1}}{n!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx = (2q)^{2n+1} P_n\left(\frac{p}{2q}\right).$$

D'après la question 4, $P_n\left(\frac{p}{2q}\right) \in \mathbf{Z}$, ainsi

$$\frac{p^{2n+1}}{n!} \int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \in \mathbf{Z}.$$

6. La fonction $x \mapsto (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ est continue et positive sur $[-1, 1]$.

Comme elle est non identiquement nulle sur $[-1, 1]$, on a

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx > 0,$$

ainsi $J_n > 0$.

Comme pour tout $x \in [-1, 1]$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \leq 1$ et $(1-x^2)^n \leq 1$, on obtient :

$$J_n \leq \frac{p^{2n+1}}{n!} \int_{-1}^1 dx = \frac{2p^{2n+1}}{n!}.$$

On a montré que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad 0 < J_n \leq \frac{2p^{2n+1}}{n!}.$$

7. On note ℓ la limite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Par définition, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - \ell| \leq \frac{1}{4}$. Ainsi, pour tout $n, p \geq N$, on a

$$|a_n - a_p| \leq |a_n - \ell| + |a_p - \ell| \leq \frac{1}{2}.$$

Comme a_n et a_p sont des entiers, ils sont égaux. La suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est constante à partir du rang N , donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ stationne.

8. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2p^{2n+1}}{n!} = 0$ (croissance comparée), par encadrement, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

D'après la question 7, la suite $(J_n)_{n \in \mathbf{N}}$ stationne. Comme elle converge vers 0, elle stationne à 0.

Cette dernière assertion est une contradiction avec le fait que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $J_n > 0$ (question 6). L'hypothèse « $\pi \in \mathbf{Q}$ » n'est donc pas possible, ainsi π est un nombre irrationnel.

9. Comme $G \neq \{0\}$, il existe $x \in G$ non nul.

Si $x \in \mathbf{R}_+^*$, alors $x \in G \cap \mathbf{R}_+^*$ et si $x \in \mathbf{R}_-^*$, alors $-x \in G \cap \mathbf{R}_+^*$.

On a montré que $G \cap \mathbf{R}_+^* \neq \emptyset$.

10. L'ensemble $G \cap \mathbf{R}_+^*$ est non vide, minoré par 0 : il admet une borne inférieure.

11. (a) i. D'après la propriété de la borne inférieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in G$ tel que $\alpha \leq g < \alpha + \varepsilon$.

En posant $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha$, il existe $g_1 \in G$ tel que $\alpha \leq g_1 < \frac{3}{2}\alpha$.

Comme $\alpha \notin G$, on ne peut pas avoir $\alpha = g_1$, ainsi

$$\alpha < g_1 < \frac{3}{2}\alpha.$$

ii. On utilise de nouveau la propriété fondamentale de la borne inférieure avec $\varepsilon = \alpha - g_1 > 0$. Il existe $g_2 \in G$ tel que $\alpha \leq g_2 < \alpha + \varepsilon = g_1$. Comme $\alpha \notin G$, on a $\alpha < g_2 < g_1$.

iii. Déjà $g_1 - g_2 \in G$, car g_1 et g_2 appartiennent à G .

Ensuite $g_1 - g_2 > 0$ car $g_2 < g_1$. de plus, les inégalités $g_1 < \frac{3}{2}\alpha$ et $\alpha < g_2$ donnent $g_1 - g_2 < \frac{1}{2}\alpha < \alpha$.

Or α est la borne inférieure de $G \cap \mathbf{R}_+^*$, donc l'encadrement

$0 < g_1 - g_2 < \alpha$ est impossible. L'hypothèse est fautive, ainsi $\alpha \in G$.

(b) L'ensemble $\{n \in \mathbf{Z}, ng \leq x\}$ est non vide (car 0 vérifie $0 \times g \leq x$) et majoré car la condition $ng \leq x$ est équivalente à $n \leq \frac{x}{g}$. Ainsi $\{n \in \mathbf{Z}, ng \leq x\}$ admet un plus grand élément n_0 .

Par définition, on a $n_0 g \leq x$ et $(n_0 + 1)g > x$.

Si $n_0 g < x$, alors $x - n_0 g \in G$ car x et $n_0 g$ appartiennent à G et $0 < x - n_0 g < g$. De plus, comme $(n_0 + 1)g > x$, on en déduit que $0 < x - n_0 g < g$.

Ce dernier encadrement n'est pas possible par définition de α . On a donc montré que $n_0 g = x$.

(c) On prouve les deux inclusions.

\subseteq L'inclusion $G \subset \alpha\mathbf{Z}$ vient d'être effectuée.

\supseteq L'inclusion $G \supset \alpha\mathbf{Z}$ est claire car $\alpha \in G$ et G est un groupe.

12. (a) Il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{x}{3}$.

(b) On utilise la caractérisation de la borne inférieure : il existe $g \in G \cap \mathbf{R}_+^*$ tel que $\alpha \leq g < \varepsilon$. Or, $\alpha = 0$ et $g > 0$ car $g \in G \cap \mathbf{R}_+^*$, donc $0 < g < \varepsilon$.

(c) L'ensemble $\{n \in \mathbf{Z}, ng \leq x\}$ est non vide car il contient 0 et il est majoré car la condition $ng \leq x$ est équivalente à la condition $n \leq \frac{x}{g}$. Ainsi $\{n \in \mathbf{Z}, ng \leq x\}$ admet un plus grand élément n_1 .

Soit $h = (n_1 + 1)g$. On remarque que $h \in G$ car c'est un multiple d'un élément de G .

Par définition de n_1 , on a $(n_1 + 1)g > x$. De plus, comme $n_1 g \leq x$ et $g < \varepsilon$, on en déduit que $h < x + \varepsilon$.

Ainsi $h \in G \cap]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

(d) On procède par récurrence.

Soit $x > 0$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \mathbf{R}_+^*$.

Soit $x_0 \in]x - \frac{\varepsilon}{2^0}, x + \frac{\varepsilon}{2^0}[$, l'existence est assurée par la question 12 (c).

Soit $n \in \mathbf{N}$. On suppose x_0, \dots, x_n construits tels que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$x_i \in \left] x - \frac{\varepsilon}{2^i}, x + \frac{\varepsilon}{2^i} \right[.$$

Comme $\left] x - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right[$, la question 12 (c) assure qu'il existe

$$x_{n+1} \in \left] x - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \right[.$$

La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est construite par récurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x - \frac{\varepsilon}{2^n} < x_n < x + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) = x$, par encadrement, on en déduit que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x}$.

- (e) Soit $x \in \mathbf{R}$. Montrons qu'il existe une suite d'éléments de G qui converge vers x . Plusieurs cas se présentent :
- si $x > 0$, c'est la question 12 (d) assure l'existence d'une telle suite ;
 - si $x = 0$, il suffit de prendre la suite constante égale à 0 ;
 - si $x < 0$, il suffit de prendre $(-x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ où $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de G qui converge vers $-x > 0$.

$\boxed{\text{On a montré que tout réel est limite d'une suite d'éléments de } G : G \text{ est dense dans } \mathbf{R}.}$

13. Trois cas se présentent :

- $G = \{0\}$;
- $G \neq \{0\}$ et $\alpha = \inf(G \cap \mathbf{R}_+) > 0$, alors on a montré à la question 11 (c) que $G = \alpha\mathbf{Z}$;
- $G \neq \{0\}$ et $\alpha = \inf(G \cap \mathbf{R}_+) = 0$, alors on a montré à la question 12 (e) que G est dense dans \mathbf{R} .

Il est clair que la réalisation de l'un des cas précédents exclut la réalisation de l'un des deux autres.

$\boxed{\text{La proposition est prouvée.}}$

14. Si $n = m = 0$, $n + m\alpha = 0$, donc $G \neq \emptyset$.

Soient g_1 et g_2 deux éléments de $\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$: il existe deux couples $(n_1, m_1) \in \mathbf{Z}^2$ et $(n_2, m_2) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $g_1 = n_1 + \alpha m_1$ et $g_2 = n_2 + \alpha m_2$.

On a $g_1 - g_2 = (n_1 - n_2) + \alpha(m_1 - m_2)$ avec $n_1 - n_2 \in \mathbf{Z}$ et $m_1 - m_2 \in \mathbf{Z}$.

$\boxed{\text{On a montré que } \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} \text{ est un sous-groupe de } \mathbf{R} \text{ pour la loi } +.}$

15. (a) Soit $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ tel que $f(n) = f(m)$.

On commence par remarquer que

$$f(n) = f(m) \iff (n - m)\alpha = [n\alpha] - [m\alpha].$$

Si $n \neq m$, on aurait $\alpha = \frac{[n\alpha] - [m\alpha]}{n - m} \in \mathbf{Q}$, ce qui est exclu car $\alpha \notin \mathbf{Q}$.

Ainsi $n = m$.

$\boxed{\text{On a montré que } f \text{ est injective.}}$

(b) Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$.

On commence par remarquer que par injectivité f s'annule uniquement pour $n = 0$ et on voit facilement que

$$]0, 1] = \bigcup_{k=0}^{N-1} \left] \frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right].$$

Comme $f(1), \dots, f(N+1) \in]0, 1]$, par le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe $k \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et deux éléments différents de $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$, i et j tels que $f(i)$ et $f(j)$ appartiennent à $\left] \frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right]$.

On peut supposer $f(i) < f(j)$ et soit $g = f(j) - f(i) \in G$ car $f(i)$ et $f(j)$ sont deux éléments de $\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$.

On a $g > 0$. De plus, $f(i)$ et $f(j)$ appartiennent à $\left] \frac{k}{N}, \frac{k+1}{N} \right]$, $g < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in G \cap \mathbf{R}_+^*$ tel que $0 < g < \varepsilon$. D'après la propriété de la borne inférieure, on a :

$$\boxed{\inf((\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}) \cap \mathbf{R}_+^*) = 0.}$$

16. Nous allons montrer que $\mathbf{Z} + \frac{p}{q}\mathbf{Z} = \frac{1}{q}\mathbf{Z}$.

\square L'inclusion $\mathbf{Z} + \frac{p}{q}\mathbf{Z} \subset \frac{1}{q}\mathbf{Z}$ est claire.

\square Soit $x \in \frac{1}{q}\mathbf{Z}$: il existe $a \in \mathbf{Z}$ tel que $x = \frac{a}{q}$.

Comme $p \wedge q = 1$, par le théorème de Bezout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $up + vq = 1$, puis $aup + avq = a$.

$$\text{Ainsi } \frac{a}{q} = \frac{aup + avq}{q} = av + \frac{p}{q}au \in \mathbf{Z} + \frac{p}{q}\mathbf{Z}.$$

$$\boxed{\text{On a montré que } \mathbf{Z} + \frac{p}{q}\mathbf{Z} = \frac{1}{q}\mathbf{Z}.}$$

17. On prouve les deux implications.

\Leftarrow Si $\alpha \notin \mathbf{Q}$, alors d'après la question 15 (b), on a

$$\inf((\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}) \cap \mathbf{R}_+^*) = 0,$$

donc d'après la question 13, $\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$ dense dans \mathbf{R} .

\Rightarrow Nous allons montrer la contraposée de cette implication. Si $\alpha \in \mathbf{Q}$, on écrit $\alpha = \frac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. Par la question 16, $\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} = \frac{1}{q}\mathbf{Z}$ et donc $\mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z}$ n'est pas dense dans \mathbf{R} .

$$\boxed{\text{On a montré que } \mathbf{Z} + \alpha\mathbf{Z} \text{ est dense dans } \mathbf{R} \text{ si, et seulement si, } \alpha \notin \mathbf{Q}.}$$

18. Comme $\alpha \neq 0$, on a $\alpha\mathbf{Z} + \beta\mathbf{Z} = \alpha \left(\mathbf{Z} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{Z} \right)$.

Il est clair que $\inf((\alpha\mathbf{Z} + \beta\mathbf{Z}) \cap \mathbf{R}_+^*) = \alpha \inf \left(\left(\mathbf{Z} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{Z} \right) \cap \mathbf{Z} \right)$ de sorte que

$$\inf((\alpha\mathbf{Z} + \beta\mathbf{Z}) \cap \mathbf{R}_+^*) = 0 \iff \inf \left(\left(\mathbf{Z} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{Z} \right) \cap \mathbf{Z} \right) = 0.$$

Ainsi $\alpha\mathbf{Z} + \beta\mathbf{Z}$ est dense dans \mathbf{R} si, et seulement si, $\mathbf{Z} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{Z}$ l'est, si et seulement si $\frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbf{Q}$ par la question 17.

On a montré que $\alpha\mathbf{Z} + \beta\mathbf{Z}$ est dense dans \mathbf{R} si, et seulement si, $\frac{\beta}{\alpha} \notin \mathbf{Q}$.

19. D'après la question 8, $\pi \notin \mathbf{Q}$, donc $2\pi \notin \mathbf{Q}$.

Par la question 17, $\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ est dense dans \mathbf{R} .

20. \mathbf{Q} est un sous-groupe de \mathbf{R} pour la loi $+$ et $\inf(\mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+^*) = 0$ car $\frac{1}{n} \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{R}_+^*$ pour tout entier $n \geq 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

D'après la question 13, \mathbf{Q} est dense dans \mathbf{R} .

21. Soit $y \in [-1, 1]$ et soit $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos(x) = y$ (autrement dit, on a $x = \arccos(y)$).

Comme $\pi \notin \mathbf{Q}$ (question 8), 2π est irrationnel, ainsi $\mathbf{Z} + 2\pi\mathbf{Z}$ est dense dans \mathbf{R} (question 19), il existe deux suites d'entiers relatifs $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + 2b_n\pi) = x.$$

Par continuité de la fonction \cos en x , on récupère

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(a_n + 2b_n\pi) = \cos(x) = y.$$

La fonction \cos est 2π -périodique, donc on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(a_n) = y.$$

Notons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\cos(a_n) \in \{\cos(n), n \in \mathbf{N}\}$ car la fonction \cos est paire.

On a montré que tout élément de $[-1, 1]$ est limite d'une suite d'éléments de $\{\cos(n), n \in \mathbf{N}\}$.

22. Comme f admet 1 et π pour périodes, on a

$$\forall (n, m) \in \mathbf{Z}^2, \quad f(n \times 1 + m \times \pi) = f(0),$$

soit

$$\forall x \in \mathbf{Z} + \pi\mathbf{Z}, \quad f(x) = f(0).$$

Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme $\pi \notin \mathbf{Q}$ (question 8), $\mathbf{Z} + \pi\mathbf{Z}$ est dense dans \mathbf{R} (question 17), donc il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{Z} + \pi\mathbf{Z}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

Par continuité de f en x , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$. Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(x_n) = f(0)$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(0)$.

Par unicité de la limite, on a $f(x) = f(0)$.

On a montré que f est constante.

23. La famille $(1, i)$ est une famille libre du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{C} et par définition, on a $\mathbf{Z} + i\mathbf{Z} = \{a + ib, (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$.

On a montré que $\mathbf{Z} + i\mathbf{Z}$ est un réseau de \mathbf{C} .

24. On va montrer que φ est un morphisme de groupes bijectif.

- Soient $((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \in \mathbf{Z}^2 \times \mathbf{Z}^2$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) &= \varphi(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ &= (a_1 + a_2)e_1 + (b_1 + b_2)e_2 \\ &= \varphi(a_1, a_2) + \varphi(b_1, b_2). \end{aligned}$$

On a montré que φ est un morphisme de groupes.

- φ est clairement surjectif.
- Pour montrer que φ est injectif, on va montrer que

$$\ker(\varphi) = \{(a, b) \in \mathbf{Z}^2, \varphi(a, b) = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

Soit $(a, b) \in \ker(\varphi)$. On a $\varphi(a, b) = ae_1 + be_2 = 0$.

Comme (e_1, e_2) est une famille libre du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{C} , on en déduit $a = b = 0$, puis $\ker(\varphi) \subset \{(0, 0)\}$.

L'inclusion réciproque étant claire, on a montré que : φ est injectif.

On a montré que φ est un isomorphisme de groupes, donc

les groupes L et \mathbf{Z}^2 sont isomorphes.

25. On prouve les deux implications.

\Leftarrow Soit $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers z . Montrons que $z \in A$ et que $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est stationnaire.

Comme $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, elle est bornée : il existe $\Omega \subset \mathbf{C}$ borné tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $z_n \in A \cap \Omega$.

Comme $A \cap \Omega$ est fini, on écrit $A \cap \Omega = \{a_1, \dots, a_r\}$ avec les a_i sont deux à deux distincts. Soit

$$\varepsilon = \inf_{\substack{(i,j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2 \\ i \neq j}} |a_i - a_j|.$$

On a $\varepsilon > 0$ car l'infimum est pris sur un ensemble fini et tous les éléments qui constituent l'ensemble $\{|a_i - a_j|, (i, j) \in \llbracket 1, r \rrbracket^2 \text{ avec } i \neq j\}$ sont strictement positifs.

Comme $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,
 $|z_n - z| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Ainsi, pour tout $n, p \geq N$, on a

$$|z_n - z_p| \leq |z_n - z| + |z_p - z| \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Ainsi, par définition de ε , la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire sur un certain $a_k \in A \cap \Omega$ à partir du rang N . Donc A est une partie discrète.

En particulier, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $a_k \in A$, donc A est fermée.

\Rightarrow Soit Ω un ensemble borné de \mathbb{C} .

Si $A \cap \Omega$ est vide, le résultat est clair.

On suppose maintenant que $A \cap \Omega \neq \emptyset$.

On suppose $A \cap \Omega$ infini : il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $A \cap \Omega$ deux à deux distincts de $A \cap \Omega$. Comme $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée (car Ω est borné), on peut en extraire une sous-suite $(z_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers z .

Comme A est fermée, $z \in A$.

Puis, comme A est une partie discrète, la suite $(z_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, ce qui contredit la définition de la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ainsi, pour tout ensemble $\Omega \subset \mathbb{C}$ borné, $A \cap \Omega$ est fini.

On a montré que A est fermée et discrète si, et seulement si, pour toute partie $\Omega \subset \mathbb{C}$ bornée, $A \cap \Omega$ est fini.

26. (a) Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G qui converge vers $z \in \mathbb{C}$. Montrons que $z \in A$.

La suite $(z_{n+1} - z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} - z_n \in G$, on en déduit que la suite $(z_{n+1} - z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stationne. Comme elle converge vers 0, elle ne peut stationner que sur 0. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$z_{n+1} - z_n = 0 \iff z_{n+1} = z_n.$$

En particulier, la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément de G .

On a montré que G est fermé.

- (b) Soit $A = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

A est discret et pourtant A n'est pas fermé car la suite $\left(\frac{1}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $0 \notin A$.

La conclusion ne reste pas valable lorsque G n'est pas un groupe.

27. On prouve les deux implications.

- \Rightarrow Comme G est discret, d'après la question 26 (a), G est fermé.
 Soit $z_0 \in G$, $z_0 \neq 0$. Comme G est discret et fermé, l'ensemble $\{z \in G, |z| \leq |z_0|\}$ n'est pas vide (car il contient z_0) et est borné.
 D'après la question 25, il contient un nombre fini d'éléments. En particulier, il admet un élément non nul dont le module est minimal. Ainsi $\{|z|, z \in G \setminus \{0\}\}$ admet un minimum.
- \Leftarrow Soit z_0 un élément de $G \setminus \{0\}$ dont le module est minimal. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite qui converge vers un élément z de G .
 La suite $(a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de G (car $(G, +)$ est un groupe) qui converge vers 0, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{|z_0|}{2}$. Comme $G \cap \left\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq \frac{|z_0|}{2}\right\} = \{0\}$ par définition de z_0 , la suite $(a_{n+1} - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stationne sur 0 et donc la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stationne.

On a montré que G est discret si, et seulement si, l'ensemble $\{|z|, z \in G \setminus \{0\}\}$ admet un minimum.

28. Il y a deux cas à traiter :

- Si $G = e\mathbb{Z}$ avec $e \in \mathbb{C}^*$. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G qui converge dans G . Comme $e \neq 0$, la suite $\left(\frac{z_n}{e}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente d'entiers relatifs.
 D'après la question 7, la suite $\left(\frac{z_n}{e}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire, donc la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.
- Si $G = e_1\mathbb{Z} + e_2\mathbb{Z}$ avec (e_1, e_2) une famille libre du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G qui converge vers un élément $xe_1 + ye_2 \in G$ avec $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
 Il existe deux suites d'entiers relatifs $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n e_1 + y_n e_2$.
 Comme la famille (e_1, e_2) est une famille du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbb{C} , les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers x et y .
 Toujours d'après la question 7, les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stationnent, donc $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

On a montré que si G est un réseau, alors G est une partie discrète.

29. (a) C'est une application immédiate de la question 27.

(b) Soit $G' = G \cap z_0\mathbf{R}$. On prouve les deux inclusions.

\supseteq Comme $(G', +)$ est un groupe et $z_0 \in G'$, l'inclusion $z_0\mathbb{Z} \subset G'$ est claire.

\subseteq Soit $z \in G'$: il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $z = \alpha z_0$. De toute évidence,

$$z - [\alpha]z_0 = (\alpha - [\alpha])z_0 \in G'.$$

Si $\alpha - [\alpha] \neq 0$, alors $z - [\alpha]z_0 \in G \setminus \{0\}$ et

$$|z - [\alpha]z_0| = |(\alpha - [\alpha])z_0| < |z_0|,$$

ce qui contredit la définition de z_0 .

On en déduit que $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor$, donc $\alpha \in \mathbf{Z}$ et $G' \subset z_0\mathbf{Z}$.

On a montré que $G \cap z_0\mathbf{R} = z_0\mathbf{Z}$.

30. Si $G \subset z_0\mathbf{R}$, alors $G = G \cap z_0\mathbf{R}$. Or, d'après la question 29 (b), $G \cap z_0\mathbf{R} = z_0\mathbf{Z}$.

On a montré que $G = z_0\mathbf{Z}$.

31. (a) Déjà $0 \in G'$, donc $G' \neq \emptyset$.

Soit $(y_1, y_2) \in G'^2$. Il existe $(x_1, x_2) \in G^2$ tel que

$$y_1 = p(x_1) \quad \text{et} \quad y_2 = p(x_2).$$

Par linéarité de p , on a $y_1 - y_2 = p(x_1) - p(x_2) = p(x_1 - x_2)$.

Comme $(G, +)$ est un groupe, $x_1 - x_2 \in G$ et $y_1 - y_2 \in G'$.

On a montré que $(G', +)$ est un sous-groupe de $(z_1\mathbf{R}, +)$.

(b) i. Déjà $y \in G' = p(G)$, donc il existe $x' \in G$ tel que $y = p(x')$.

Comme y n'est pas colinéaire à z_0 , la famille (z_0, y) est une famille libre du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{C} .

De plus, $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$, on en déduit que la famille (z_0, y) est une base de \mathbf{C} .

Ainsi, il existe $(\lambda', \mu) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x' = \lambda'z_0 + \mu y$.

Par définition de p , $p(x') = y$ et par linéarité de p ,

$$p(x') = \lambda'p(z_0) + \mu p(y) = \mu y.$$

Comme $y \neq 0$, on récupère $\mu = 1$.

Enfin, $\lfloor \lambda' \rfloor z_0 \in G$ car $z_0 \in G$ et $(G, +)$ est un groupe. Toujours pour la même raison,

$$x' - \lfloor \lambda' \rfloor z_0 = (\lambda' - \lfloor \lambda' \rfloor) z_0 + y \in G.$$

On pose $\lambda = \lambda' - \lfloor \lambda' \rfloor \in [0, 1[$ par définition de la partie entière et soit

$$\boxed{x = \lambda z_0 + y = (\lambda' - \lfloor \lambda' \rfloor) z_0 + y.}$$

Par linéarité de p , on a

$$\boxed{p(x) = (\lambda' - \lfloor \lambda' \rfloor) p(z_0) + p(y) = y.}$$

ii. Comme A est bornée, il existe $r > 0$ tel que

$$A \subset \{z \in \mathbf{C}, |z| \leq r\}.$$

Soit $y \in G' \cap A$. D'après la question 31 (b) i, il existe $x = \lambda z_0 + y \in G$ avec $\lambda \in [0, 1[$ tel que $y = p(x)$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$|x| \leq \lambda |z_0| + |y| \leq |z_0| + r.$$

Or, G est discret, donc d'après la question 26 (a), G est une partie fermée. Et, d'après la question 25, pour toute partie bornée $B \subset \mathbf{C}$, $G \cap B$ est fini.

En particulier, $G \cap \{z \in \mathbf{C}, |z| \leq |z_0| + r\}$ est fini.

On a montré que

$$G' \cap A \subset p(G \cap \{z \in \mathbf{C}, |z| \leq |z_0| + r\}),$$

en particulier, $G' \cap A$ est fini.

iii. En utilisant à nouveau la question 25, on en déduit que G' est discret.

(c) $(G', +)$ est un sous-groupe discret non nul inclus dans $z_1'\mathbf{R}$. Si l'on introduit $z_1 \in G'$ tel que $|z_1| = \min\{|z|, z \in G' \setminus \{0\}\}$, la question 30 assure que

$$G' = z_1\mathbf{Z}.$$

(d) Comme z_1 n'est pas colinéaire à z_0 , la famille (z_0, z_1) est une famille libre du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{C} .

De plus, $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}) = 2$, on en déduit que

$$\text{la famille } (z_0, z_1) \text{ est une base.}$$

\supseteq L'inclusion $z_0\mathbf{Z} + z_1\mathbf{Z} \subset G$ est claire car z_0 et z_1 appartiennent à G et $(G, +)$ est un groupe.

\subseteq Soit $z \in G$. $p(z) \in G' = z_1\mathbf{Z}$, donc il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $p(z) = nz_1$. Comme $p(z - nz_1) = 0$, d'après la question 29 (b), on en déduit que

$$z - nz_1 \in \ker(p) \cap G = z_0\mathbf{R} \cap G = z_0\mathbf{Z}.$$

Ainsi, il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que

$$z - nz_1 = mz_0 \iff z = nz_1 + mz_0.$$

On a montré que $z \in z_0\mathbf{Z} + z_1\mathbf{Z}$.

$$\text{On a montré que } G = z_0\mathbf{Z} + z_1\mathbf{Z}.$$

32. On prouve les deux implications.

\implies Ce sens est traité dans la question 28.

\impliedby Soit G est un sous-groupe discret de \mathbf{C} pour la loi $+$.

- Si $G = \{0\}$, alors $G = 0\mathbf{Z}$ et G est un réseau.
- Si $G \neq \{0\}$, les questions 30 et 31 montrent que G est soit de la forme $G = z_0\mathbf{Z}$ avec $z_0 \in \mathbf{C}^*$, soit de la forme $G = z_0\mathbf{Z} + z_1\mathbf{Z}$ avec (z_0, z_1) une famille libre du \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{C} . Dans les deux cas, G est un réseau.

La proposition est prouvée.

Thème 13

Formule du crible, applications

Thèmes abordés : Dénombrement.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet permet de répondre au problème posé par Édouard Lucas en 1891 : de combien de façons peut-on placer n couples maris/femmes autour d'une table, en alternant hommes et femmes et sans qu'aucune femme ne soit assise à côté de son mari.

Ce sujet nécessite les connaissances élémentaires en dénombrement.

La formule du crible établie à la partie 1 sert dans la partie 2.

13.1 Formule du crible

Proposition. *Formule du crible.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient A_1, \dots, A_n des ensembles finis. Alors,

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) \right).$$

Les notations dans la suite sont les mêmes que celles de la proposition. Soit

$$E = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Nous prouvons la formule du crible. Pour $A \subset E$, on introduit la fonction caractéristique χ_A de A définie sur \mathbf{R} par $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

1. Montrer que pour toute partie A de E , on a

$$\text{card}(A) = \sum_{x \in E} \chi_A(x).$$

2. Montrer que

$$1 - \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}).$$

3. Montrer que

$$\prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 1 + \sum_{k=1}^n \left((-1)^k \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \chi_{A_{i_1}} \cdots \chi_{A_{i_k}} \right).$$

4. En évaluant l'égalité établie à la question 3 en tout $x \in E$ et en sommant, terminer la preuve de la formule du crible.

13.2 Applications

13.2.1 Dénombrement des surjections

Nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition. *Nombre de surjections.*

Soit $(p, q) \in \mathbf{N}^2$. Soit E un ensemble fini de cardinal p et F un ensemble de cardinal q . Alors le nombre de surjections $S_{p,q}$ de E sur F est de :

$$S_{p,q} = \sum_{k=0}^q (-1)^{q-k} \binom{q}{k} k^p.$$

Nous prouvons la proposition. Pour $Z \subset F$, on pose

$$\mathcal{A}_Z = \left\{ f \in F^E, f(E) \subset F \setminus Z \right\}.$$

5. Montrer que

$$S_{p,q} = q^p - \text{card} \left(\bigcup_{y \in F} \mathcal{A}_{\{y\}} \right).$$

6. Montrer que

$$\text{card} \left(\bigcup_{y \in F} \mathcal{A}_{\{y\}} \right) = \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \sum_{\substack{Z \subset F \\ \text{card}(F) = k}} \text{card}(\mathcal{A}_Z).$$

7. En déduire que

$$\text{card} \left(\bigcup_{y \in F} \mathcal{A}_{\{y\}} \right) = \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \binom{q}{k} (q-k)^p.$$

8. Terminer la preuve de la proposition.

13.2.2 Un vieux problème de dénombrement

Proposition. *Problème des ménages.*

Soit n ($n \geq 3$) couples (épouse et mari). On souhaite les disposer autour d'une table ronde de $2n$ places en alternant épouse et mari de telle sorte qu'aucune épouse ne soit assise à côté de son mari.

Le nombre de placements possibles est de

$$2(n)! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)!.$$

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme. *Premier lemme de Kaplansky.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Le nombre de sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ne contenant pas d'entiers consécutifs est de $\binom{n+1-k}{k}$.

Nous prouvons le lemme. Nous notons $\alpha(n, k)$ le nombre de sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments ne contenant pas d'entiers consécutifs.

9. Montrer que

$$\forall n \geq 2, \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \quad \alpha(n, k) = \alpha(n-1, k) + \alpha(n-2, k-1).$$

10. En déduire que

$$\alpha(n, k) = \binom{n+1-k}{k}.$$

Lemme. *Second lemme de Kaplansky.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit les entiers $1, \dots, n$ placés en « cercle » (ainsi, 1 et n sont consécutifs). Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Le nombre de sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments ne contenant pas d'entiers consécutifs est de $\frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}$.

Nous prouvons le lemme. Nous notons $\beta(n, k)$ le nombre de sous-ensemble de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en cercle à k éléments ne contenant pas d'entiers consécutifs.

11. Montrer que

$$\forall n \geq 3, \forall k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket, \quad \beta(n, k) = \alpha(n-1, k) + \alpha(n-3, k-1).$$

12. Terminer la preuve du second lemme de Kaplansky.

Nous reprenons la preuve du problème des ménages.

On note $(E_1, M_1), \dots, (E_n, M_n)$ les n couples épouse-mari.

13. Justifier qu'il y a $2(n!)$ façons de placer les épouses.

On suppose que les épouses sont placées. On les numérote, par exemple dans le sens trigonométrique, à partir de l'une d'elle. On note P_1, \dots, P_n les n places libres à la droite de chaque épouse. Ainsi, il suffit de dénombrer le nombre de façons de placer les maris : on le note $\gamma(n)$.

14. En déduire que le nombre de placement du problème des ménages est de

$$2(n!) \gamma(n).$$

15. Montrer que $\gamma(n)$ est le nombre de permutations de \mathcal{S}_n qui ne satisfont à aucune des $2n$ conditions suivantes :

1. M_1 est assis en P_n ,
2. M_1 est assis en P_1 ,
3. M_2 est assis en P_1 ,
4. M_2 est assis en P_2 ,

⋮

$2n - 3$. M_{n-1} est assis en P_{n-2} ,

$2n - 2$. M_{n-1} est assis en P_{n-1} ,

$2n - 1$. M_n est assis en P_{n-1} ,

$2n$. M_n est assis en P_n .

Soit A_i l'ensemble des permutations qui satisfont la condition numéro $i \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$.

16. Montrer que

$$\gamma(n) = n! - \sum_{k=1}^{2n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq 2n} \text{card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) \right).$$

17. En déduire que

$$\gamma(n) = n! + \sum_{k=1}^n \left((-1)^k \frac{2n}{2n-k} \binom{2n-k}{k} (n-k)! \right).$$

18. Terminer la résolution du problème des ménages.

19. Écrire un programme `Python` qui permet de calculer le nombre de placements possibles pour n couples, n étant rentré par l'utilisateur.

Correction du Thème 13

1. On a

$$\begin{aligned} \sum_{x \in E} \chi_A(x) &= \sum_{x \in A} \chi_A(x) + \sum_{x \notin A} \chi_A(x) \\ &= \sum_{x \in A} 1 + \sum_{x \notin A} 0 \\ &= \text{card}(A). \end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\sum_{x \in E} \chi_A(x) = \text{card}(A).}$$

2. Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} 1 - \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i}(x) &= \chi_{\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}}(x) \\ &= \chi_{\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}}(x) \\ &= \prod_{i=1}^n \chi_{\overline{A_i}}(x) \\ &= \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}(x)). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a montré que } 1 - \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}).}$$

3. On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(E)$,

$$\prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 1 + \sum_{k=1}^n \left((-1)^k \prod_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} \chi_{A_{i_1}} \cdots \chi_{A_{i_k}} \right) \text{ »}.$$

\mathcal{P}_1 est clairement vraie.

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel non nul n , montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Soit $(A_1, \dots, A_n, A_{n+1}) \in \mathcal{P}(E)^{n+1}$. En utilisant l'hypothèse de récurrence,

on a

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^{n+1} (1 - \chi_{A_i}) &= (1 - \chi_{A_{n+1}}) \prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) \\
 &= (1 - \chi_{A_{n+1}}) \times \left(1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \chi_{A_{i_1}} \dots \chi_{A_{i_k}} \right) \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \left((-1)^{k+1} \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n+1} \chi_{A_{i_1}} \dots \chi_{A_{i_k}} \right).
 \end{aligned}$$

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel non nul n : pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(E)^n$

$$\boxed{\prod_{i=1}^n (1 - \chi_{A_i}) = 1 + \sum_{k=1}^n \left((-1)^k \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \chi_{A_{i_1}} \dots \chi_{A_{i_k}} \right).}$$

4. Les égalités établies aux questions 2 et 3 montrent que

$$\chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i}^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \chi_{A_{i_1}} \dots \chi_{A_{i_k}} \right).$$

On en déduit : pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{x \in E} \chi_{\bigcup_{i=1}^n A_i}^n(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{x \in E} \prod_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \chi_{A_{i_1}}(x) \dots \chi_{A_{i_k}}(x) \\
 &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \sum_{x \in E} \chi_{A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}}(x).
 \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question 1, on obtient finalement

$$\boxed{\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) \right).}$$

5. Soit $\mathcal{S}_{E,F}$ l'ensemble des surjections de E vers F . Montrons que

$$\mathcal{S}_{E,F} = F^E \setminus \bigcup_{y \in F} \mathcal{A}_{\{y\}}.$$

On prouve les deux inclusions.

⊆ Soit $f \in \mathcal{S}_{E,F}$. Comme $f(E) = F$, pour tout $y \in F$, $f \notin \mathcal{A}_{\{y\}}$, ainsi $f \in F^E \setminus \bigcup_{y \in F} \mathcal{A}_{\{y\}}$.

⊇ Soit $f \in F^E \setminus \bigcup_{y \in F} \mathcal{A}_{\{y\}}$. Si f n'est pas surjective, alors il existe $y_0 \in F$ tel que $y_0 \notin f(E)$, puis $f \in \mathcal{A}_{\{y_0\}}$.

On a montré que $\mathcal{S}_{E,F} = F^E \setminus \bigcup_{y \in E} \mathcal{A}_{\{y\}}$. Comme $\bigcup_{y \in E} \mathcal{A}_{\{y\}} \subset F^E$ et $S_{p,q} = \text{card}(\mathcal{S}_{E,F})$, on a

$$S_{p,q} = \text{card}(F^E) - \text{card}\left(\bigcup_{y \in F} \mathcal{A}_{\{y\}}\right) = q^p - \text{card}\left(\bigcup_{y \in F} \mathcal{A}_{\{y\}}\right).$$

6. Remarquons que la formule du crible s'énonce aussi de la façon suivante :

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset [1,n] \\ \text{card}(I)=k}} \text{card}\left(\bigcap_{j \in I} A_j\right) \right).$$

Comme $\text{card}(F) = q$, on en déduit que

$$\text{card}\left(\bigcup_{y \in F} \mathcal{A}_{\{y\}}\right) = \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \sum_{\substack{Z \subset F \\ \text{card}(Z)=k}} \text{card}(\mathcal{A}_Z).$$

7. Il suffit de calculer la somme $\sum_{\substack{Z \subset F \\ \text{card}(Z)=k}} \text{card}(\mathcal{A}_Z)$.

Soit $k \in [1, q]$ et soit $Z \subset F$ de cardinal k . Par définition

$$f \in \mathcal{A}_Z \iff f(E) \subset F \setminus Z \iff f \in (F \setminus Z)^E.$$

Or, $\text{card}((F \setminus Z)^E) = (q - k)^p$. De plus, en remarquant que la somme compte $\binom{q}{k}$ termes, on en déduit que

$$\sum_{\substack{Z \subset F \\ \text{card}(Z)=k}} \text{card}(\mathcal{A}_Z) = \binom{q}{k} (q - k)^p$$

puis en utilisant l'égalité établie à la question 6

$$\text{card}\left(\bigcup_{y \in F} \mathcal{A}_{\{y\}}\right) = \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \binom{q}{k} (q - k)^p.$$

8. D'après les questions 5 et 7, on a

$$S_{p,q} = q^p - \sum_{k=1}^q (-1)^{k-1} \binom{q}{k} (q-k)^p = \sum_{k=0}^q (-1)^k \binom{q}{k} (q-k)^p.$$

Le changement d'indice $j = q - k$ donne finalement

$$S_{p,q} = \sum_{k=0}^q (-1)^{q-k} \binom{q}{k} k^p.$$

9. Pour $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On introduit l'ensemble $\mathcal{A}_{n,k}$ des sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ contenant k éléments non consécutifs.

Soient $\mathcal{A}_{n,k}^{(1)}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{n,k}$ dont les sous-ensembles à k éléments contiennent n et $\mathcal{A}_{n,k}^{(2)}$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_{n,k}$ dont les sous-ensembles à k éléments ne contiennent pas n .

De toute évidence, $(\mathcal{A}_{n,k}^{(1)}, \mathcal{A}_{n,k}^{(2)})$ forme une partition de $\mathcal{A}_{n,k}$ de sorte que

$$\text{card}(\mathcal{A}_{n,k}) = \text{card}(\mathcal{A}_{n,k}^{(1)}) + \text{card}(\mathcal{A}_{n,k}^{(2)}).$$

Choisir un élément de $\mathcal{A}_{n,k}^{(1)}$ revient à choisir un ensemble contenant $k-1$ éléments non consécutifs de l'ensemble $\llbracket 1, n-2 \rrbracket$ (on ne peut pas choisir $n-1$ car $n-1$ et n sont consécutifs). Par définition, on a

$$\text{card}(\mathcal{A}_{n,k}^{(1)}) = \alpha(n-2, k-1).$$

Choisir un élément de $\mathcal{A}_{n,k}^{(2)}$ revient à choisir un ensemble contenant $k-1$ éléments non consécutifs de l'ensemble $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Par définition, on a

$$\text{card}(\mathcal{A}_{n,k}^{(2)}) = \alpha(n-1, k).$$

$$\boxed{\text{On a montré que } \alpha(n, k) = \alpha(n-1, k) + \alpha(n-2, k-1).}$$

10. On commence par remarquer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\alpha(n, 1) = n = \binom{n-1+1}{1}.$$

Pour prouver la formule générale, on procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n :

$$\ll \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \alpha(n, k) = \binom{n-k+1}{k} \gg.$$

Pour $n = 1$, on a $\alpha(1, 1) = 1$ et $\binom{1-1+1}{1} = 1$, ainsi \mathcal{P}_1 est vraie.

Pour $n = 2$, on a $\alpha(2, 1) = 2$ (deux placements possibles) et $\binom{2-1+1}{1} = 2$.

De plus, $\alpha(2, 2) = 0$ (car 1 et 2 sont consécutifs) et $\binom{2-2+1}{2} = 0$. \mathcal{P}_2 est vraie.

On suppose \mathcal{P}_{n-1} et \mathcal{P}_{n-2} vraie pour un entier naturel n supérieur ou égal à 3.

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en utilisant l'égalité établie à la question 9 et les hypothèses de récurrence, on a

$$\alpha(n, k) = \alpha(n-1, k) + \alpha(n-2, k-1) = \binom{n-k}{k} + \binom{n-k}{k-1}.$$

La formule du triangle de Pascal permet de conclure que

$$\alpha(n, k) = \binom{n+1-k}{k}.$$

La proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n non nul, soit

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \alpha(n, k) = \binom{n+1-k}{k}.$$

11. Pour $n \geq 2$ et $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On introduit l'ensemble $\mathcal{B}_{n,k}$ des sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en cercle contenant k éléments non consécutifs.

Soient $\mathcal{B}_{n,k}^{(1)}$ le sous-ensemble de $\mathcal{B}_{n,k}$ dont les sous-ensembles à k éléments contiennent n et $\mathcal{B}_{n,k}^{(2)}$ le sous-ensemble de $\mathcal{B}_{n,k}$ dont les sous-ensembles à k éléments de contiennent pas n .

De toute évidence, $(\mathcal{B}_{n,k}^{(1)}, \mathcal{B}_{n,k}^{(2)})$ forme une partition de $\mathcal{B}_{n,k}$ de sorte que

$$\text{card}(\mathcal{B}_{n,k}) = \text{card}(\mathcal{B}_{n,k}^{(1)}) + \text{card}(\mathcal{B}_{n,k}^{(2)}).$$

Choisir un élément de $\mathcal{B}_{n,k}^{(1)}$ revient à choisir un ensemble contenant $k-1$ éléments non consécutifs de l'ensemble $\llbracket 2, n-2 \rrbracket$ en cercle (on ne peut pas choisir 1 et $n-1$). Par définition, on a

$$\text{card}(\mathcal{B}_{n,k}^{(1)}) = \alpha(n-3, k-1).$$

Choisir un élément de $\mathcal{B}_{n,k}^{(2)}$ revient à choisir un ensemble contenant $k-1$ éléments non consécutifs de l'ensemble $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ en cercle. Par définition, on a $\text{card}(\mathcal{B}_{n,k}^{(2)}) = \alpha(n-1, k)$.

$$\text{On a montré que } \beta(n, k) = \alpha(n-1, k) + \alpha(n-3, k-1).$$

12. Il est facile de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\beta(n, 1) = n \quad \text{et} \quad \beta(2, 2) = 0.$$

Par les questions 10 et 11, on a pour tout $n \geq 3$ et pour tout $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \beta(n, k) &= \alpha(n-1, k) + \alpha(n-3, k-1) \\ &= \binom{n-k}{k} + \binom{n-k-1}{k-1} \\ &= \boxed{\frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}}. \end{aligned}$$

13. On remarque que si la première épouse est placée sur un numéro pair (respectivement impair), alors comme les épouses et les maris se succèdent, toutes les épouses sont placées sur un numéro pair (respectivement impair).

Il y a $n!$ façons de placer les n épouses sur les n numéros pairs (respectivement impairs).

Il s'ensuit que le nombre de façons de placer les n épouses est $n! + n! = 2(n!)$.

14. Il y a $2(n!)$ façons de placer les épouses.

Ceci étant fait, il y a $\gamma(n)$ façons de placer les maris.

Il y a donc $2\gamma(n)n!$ façons de placer les n couples.

15. On doit placer les maris de sorte qu'ils soient pas à côté de leurs épouses.

Cette condition est équivalente à : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, M_i ne peut être assis en place P_{i-1} ou en place P_{i+1} ($i-1$ et $i+1$ sont comptés modulo n). Autrement dit, les conditions $2i-1$ et $2i$ ne sont pas satisfaites.

Il s'ensuit que $\gamma(n)$ est le nombre de permutations de \mathcal{S}_n qui ne satisfont à aucune des $2n$ conditions.

16. On a

$$\gamma(n) = \text{card}(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n}}) = \text{card}(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{2n}}).$$

Or, $\text{card}(\mathcal{S}_n) = n!$ et en utilisant la formule du crible, on en déduit que

$$\begin{aligned} \gamma(n) &= n! - \text{card}(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{2n}) \\ &= \boxed{n! - \sum_{k=1}^{2n} \left((-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 2n} \text{card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) \right)}. \end{aligned}$$

17. On commence par remarquer que

$$\forall k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket, \quad \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 2n} \text{card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) = 0.$$

En effet, soit $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq 2n$. D'après le principe des tiroirs de Dirichlet, il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que la suite $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq 2n$

contienne $2j$ et $2j - 1$. Mais alors, l'intersection $\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}$ contient A_{2j-1} et A_{2j} . cela signifie que le mari numéro j est assis en P_{j-1} et P_j ($j - 1$ est compté modulo n), ce qui est impossible, donc $\text{card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) = 0$.

Ensuite, si (i_1, \dots, i_k) ($k \in \llbracket 1, n \rrbracket$) sont des indices non consécutifs sur le cercle, alors

$$\text{card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) = (n - k)!.$$

En effet, soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On a $\sigma \in \bigcap_{j=1}^k A_{i_j}$ si, et seulement si, σ est déterminé sur les entiers $\lfloor \frac{i_j + 1}{2} \rfloor$ pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$. Comme les i_j ($j \in \llbracket 1, k \rrbracket$) ne sont pas consécutifs sur le cercle, on ne définit pas deux fois la même image. Pour la même raison, les nombres $\sigma \left(\lfloor \frac{i_j + 1}{2} \rfloor \right)$ sont deux à deux distincts. Pour connaître entièrement σ , il reste à définir l'image des $n - k$ éléments. Comme σ est bijective, cela peut se faire de $(n - k)!$ façons.

Enfin, si $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est fixé, alors

$$\text{card} \left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right) = 0$$

l'ensemble $\{i_1, \dots, i_k\}$ contient au moins deux éléments consécutifs sur le cercle. On en déduit que la somme

$$\gamma(n) = n! - \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \sum_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq 2n \\ \text{non consécutifs}}} (n - k)! \right).$$

D'après le *Second lemme de Kaplansky* (question 12), il y a $\frac{2n}{2n - k} \binom{2n - k}{k}$ termes dans la somme. On a donc

$$\gamma(n) = n! + \sum_{k=1}^n \left((-1)^k \frac{2n}{2n - k} \binom{2n - k}{k} (n - k)! \right).$$

18. Pour conclure, il suffit d'utiliser les questions 14 et 17. On en déduit que le nombre de placements possibles est

$$2(n)! \sum_{k=0}^n \left((-1)^k \frac{2n}{2n - k} \binom{2n - k}{k} (n - k)! \right).$$

19. On commence par écrire un programme qui calcule la factorielle (ici, on a adopté une méthode récursive mais il y a d'autres possibilités). Par soucis de complétude, on a aussi écrit une fonction qui calcule les coefficients binomiaux. Et enfin, une fonction permettant de calculer le nombre de possibilités de placements.

```
1 def f(n):
2     if n==0:
3         return 1
4     else:
5         return n*f(n-1)
6
7 def cb(n,k):
8     if k>n:
9         return 0
10    elif k<0:
11        return 0
12    else:
13        return f(n)/(f(k)*f(n-k))
14
15 def solutionpbmenage(n):
16     s=0
17     for k in range(n+1):
18         s=s+((-1)**k)*(2*n*f(n-k))*cb(2*n-k,k)/(2*n-k)
19     return 2*f(n)*s
```

Thème 14

Théorème des deux carrés

Thèmes abordés : Structure algébrique, arithmétique.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet permet de caractériser les nombres premiers somme de deux carrés. Pour cela, on introduit les entiers de Gauss : les complexes de la forme $a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$. Le début du sujet consiste à étudier ces entiers de Gauss.

Ce sujet utilise les connaissances élémentaires sur les groupes et anneaux. La question 23 utilise le cours sur les polynômes.

La première partie établit des propriétés arithmétiques de $\mathbf{Z}[i]$ et la seconde partie utilise ces propriétés pour montrer le théorème des deux carrés.

14.1 Arithmétique de l'anneau des entiers de Gauss

Définition. *Entiers de Gauss.*

On définit l'ensemble des entiers de Gauss $\mathbf{Z}[i]$ par :

$$\mathbf{Z}[i] = \{a + ib, (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}.$$

1. Montrer que l'ensemble $(\mathbf{Z}[i], +, \times)$ est un anneau.

Définitions. *Divisibilité, norme d'un élément, élément inversible, élément irréductible, élément premier.*

Soit $(z, z') \in \mathbf{Z}[i]^2$.

- On dit que z *divise* z' s'il existe $w \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $z' = zw$.
- On définit la *norme* $N(z)$ de $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$ par : $N(z) = a^2 + b^2$.
- On dit que z est *inversible* dans $\mathbf{Z}[i]$ s'il existe $z' \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$.
On note $\mathbf{Z}[i]^*$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathbf{Z}[i]$.
- On dit que z est *irréductible* dans $\mathbf{Z}[i]$ si : $z \neq 0$, $z \notin \mathbf{Z}[i]^*$ et

$$\forall (u, v) \in \mathbf{Z}[i]^2, (z = uv) \implies (u \in \mathbf{Z}[i]^* \text{ ou } v \in \mathbf{Z}[i]^*).$$

- On dit que z est *premier* dans $\mathbf{Z}[i]$ si : $z \neq 0$, $z \notin \mathbf{Z}[i]^*$ et

$$\forall (a, b) \in \mathbf{Z}[i]^2, (z \text{ divise } ab) \implies (z \text{ divise } a \text{ ou } z \text{ divise } b).$$

2. Montrer que

$$\forall (z, z') \in \mathbf{Z}[i]^2, \quad N(zz') = N(z)N(z').$$

3. Montrer que $(\mathbf{Z}[i]^*, \times)$ est un groupe.

4. Montrer que

$$\mathbf{Z}[i]^* = \{1, -1, i, -i\}.$$

Indication : On pourra se servir de la norme N .

Nous allons maintenant montrer qu'il existe une division euclidienne sur $\mathbf{Z}[i]$.

Proposition. *Division euclidienne de $\mathbf{Z}[i]$.*

Soient $a \in \mathbf{Z}[i]$ et $b \in \mathbf{Z}[i]$ non nul.

Il existe un couple $(q, r) \in \mathbf{Z}[i]^2$ avec $N(r) < N(b)$ tel que $a = bq + r$.

Nous prouvons la proposition. Soient $a \in \mathbf{Z}[i]$ et $b \in \mathbf{Z}[i]$ non nul.

5. Justifier qu'il existe $(u, v) \in \mathbf{Q}^2$ tel que $\frac{a}{b} = u + iv$.

6. Justifier qu'il existe $(u_0, v_0) \in \mathbf{Z}^2$ tel que

$$|u_0 - u| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad |v_0 - v| \leq \frac{1}{2}.$$

7. Si l'on pose $r = a - b(u_0 + iv_0)$, montrer que l'on a $N(r) < N(b)$.

8. Effectuer la division euclidienne de $2 + 5i$ par $1 + i$.

Définition. *Idéal.*

Soit $I \subset \mathbf{Z}[i]$. On dit que I est un idéal de $\mathbf{Z}[i]$ si :

i) $(I, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}[i], +)$;

ii) pour tout $(z, z') \in \mathbf{Z}[i]^2$,

$$(z \in I) \implies (zz' \in I).$$

9. Soit $a \in \mathbf{Z}[i]$. Montrer que l'ensemble

$$a\mathbf{Z}[i] = \{az, z \in \mathbf{Z}[i]\}$$

est un idéal de $\mathbf{Z}[i]$.

Nous allons prouver la proposition suivante.

Proposition. *$\mathbf{Z}[i]$ est principal.*

Soit I un idéal de $\mathbf{Z}[i]$. Il existe $a \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $I = a\mathbf{Z}[i]$.

On dit que $\mathbf{Z}[i]$ est *principal*.

Nous prouvons la proposition.

10. Montrer la proposition lorsque $I = \{0\}$.

On suppose maintenant $I \neq \{0\}$.

11. Justifier l'existence d'un élément $a \in I$ tel que

$$N(a) = \inf \{N(z), z \in I \setminus \{0\}\}.$$

12. Montrer que $a\mathbf{Z}[i] \subset I$.
13. Prouver l'inclusion réciproque.
Indication : On pourra prendre $z \in I$ et faire sa division euclidienne par a .
14. Un tel élément a est-il unique ?
15. Soit $(a, b) \in \mathbf{Z}[i]^2$.
- (a) Montrer que l'ensemble

$$a\mathbf{Z}[i] + b\mathbf{Z}[i] = \{au + bv, (u, v) \in \mathbf{Z}[i]^2\}$$

est un idéal de $\mathbf{Z}[i]$.

- (b) En déduire qu'il existe $d \in \mathbf{Z}[i]$ tel que

$$a\mathbf{Z}[i] + b\mathbf{Z}[i] = d\mathbf{Z}[i]. \quad (14.1)$$

Un tel élément est appelé un **PGCD** de a et b .

16. Soient a et b deux éléments de $\mathbf{Z}[i]$. Soit d un PGCD de a et b . Montrer que l'ensemble des PGCD de a et b est $\{d, -d, id, -id\}$.

Nous allons terminer cette partie en prouvant la proposition suivante.

Proposition. Soit $z \in \mathbf{Z}[i]$.

z est premier dans $\mathbf{Z}[i]$ si, et seulement si, z est irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$.

Nous prouvons la proposition. Soit $z \in \mathbf{Z}[i]$.

17. Montrer que si z est premier, alors il est irréductible.
18. *Preuve du sens indirect.* Soit z un élément irréductible de $\mathbf{Z}[i]$. Soit $(a, b) \in \mathbf{Z}[i]^2$ tel que z divise ab et on suppose que z ne divise pas a .
- (a) Montrer qu'un PGCD de z et a est 1.
- (b) En déduire que z divise b .
- (c) Conclure.

14.2 Les entiers sommes de deux carrés

Définition. Les entiers sommes de deux carrés.

Soit $n \in \mathbf{N}$. On dit que n est somme de deux carrés s'il existe $(a, b) \in \mathbf{N}^2$ tel que $n = a^2 + b^2$.

On note \mathcal{S} l'ensemble des nombres sommes de deux carrés.

Le but de cette partie est de montrer le théorème des deux carrés.

Théorème. Théorème des deux carrés.

Soit p un nombre premier.

$$p \in \mathcal{S} \iff p = 2 \text{ ou } p \equiv 1 \pmod{4}.$$

Soit p un nombre premier.

19. Montrer que si $p \in \mathcal{S}$, alors $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Le reste de cette partie est consacrée à montrer la réciproque du théorème des deux carrés. Soit p un nombre premier $p > 3$ tel que $p \equiv 1 \pmod{4}$.

20. Montrer que $p \in \mathcal{S}$ si, et seulement si, p n'est pas irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$.

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme. *Racine carrée de -1 .*

Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod{4}$. Alors, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

Nous prouvons le lemme. Soient

$$\mathbf{K}^* = \{1, \dots, p-1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_2^* = \{a \in \mathbf{K}, \exists b \in \mathbf{K}^*, a \equiv b^2 \pmod{p}\}.$$

21. Soient $(x, y) \in \mathbf{K}_2^*$ tel que $x^2 \equiv y^2 \pmod{p}$. Montrer que

$$x \equiv y \pmod{p} \quad \text{ou} \quad x \equiv -y \pmod{p}.$$

22. En déduire que $\text{card}(\mathbf{K}_2^*) = \frac{p-1}{2}$.

23. Soit $P = X^{(p-1)/2} - 1$.

(a) Montrer que

$$\forall a \in \mathbf{K}_2^*, \quad P(a) \equiv 0 \pmod{p}.$$

(b) Montrer que

$$P = \prod_{a \in \mathbf{K}_2^*} (X - a).$$

24. Terminer la preuve du lemme.

Nous reprenons la preuve du théorème des deux carrés.

25. En utilisant le lemme *Racine carrée de -1* , montrer que p n'est pas premier et conclure.

Correction du Thème 14

1. Comme $\mathbf{Z}[i] \subset \mathbf{C}$, il suffit de montrer que $(\mathbf{Z}[i], +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbf{C}, +, \times)$.

Soit $(z, z') \in \mathbf{Z}[i]^2$: il existe $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbf{Z}^4$ tel que $z = a_1 + ib_1$ et $z' = a_2 + ib_2$.

On a $z - z' = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \in \mathbf{Z}[i]$ car $a_1 - a_2 \in \mathbf{Z}$ et $b_1 - b_2 \in \mathbf{Z}$.

On a montré que $(\mathbf{Z}[i], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{C}, +)$.

De plus, $1 = 1 + 0i \in \mathbf{Z}[i]$ et

$$zz' = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \in \mathbf{Z}[i].$$

On a montré que $(\mathbf{Z}[i], +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathbf{C}, +, \times)$, donc $(\mathbf{Z}[i], +, \times)$ est un anneau.

2. Soit $(z, z') \in \mathbf{Z}[i]^2$: il existe $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbf{Z}^4$ tel que $z = a_1 + ib_1$ et $z' = a_2 + ib_2$. On a

$$\begin{aligned} N(zz') &= N((a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1)) \\ &= \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2} \\ &= \sqrt{(a_1a_2)^2 + (b_1b_2)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} N(z)N(z') &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \times \sqrt{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \sqrt{(a_1a_2)^2 + (b_1b_2)^2 + (a_1b_2)^2 + (a_2b_1)^2}. \end{aligned}$$

On a montré que pour tout $(z, z') \in \mathbf{Z}[i]^2$,

$$N(zz') = N(z)N(z').$$

3. Comme $\mathbf{Z}[i]^* \subset \mathbf{C}^*$, il suffit de montrer que $(\mathbf{Z}[i]^*, \times)$ est un sous-groupe de (\mathbf{C}^*, \times) .

Il est clair que $1 \in \mathbf{Z}[i]^*$.

Soit $(z_1, z_2) \in (\mathbf{Z}[i]^*)^2$.

Comme z_1 (resp. z_2) est inversible, il existe $z'_1 \in \mathbf{Z}[i]$ (resp. $z'_2 \in \mathbf{Z}[i]$) tel que $z_1z'_1 = 1$ (resp. $z_2z'_2 = 1$).

Il est clair que $z_1z'_2 \in \mathbf{Z}[i]$ car $(\mathbf{Z}[i], +, \times)$ est un anneau.

De plus, $z_1z'_2 \times z_2z'_1 = 1$, donc $z_1z'_2$ est inversible dans $\mathbf{Z}[i]$.

On a montré que $(\mathbf{Z}[i]^*, \times)$ est un sous-groupe de (\mathbf{C}^*, \times) , c'est donc un groupe.

4. On prouve les deux inclusions.

\supseteq L'inclusion $\mathbf{Z}[i]^* \supset \{1, -1, i, -i\}$ est claire.

□ Soit $z \in \mathbf{Z}[i]^*$: il existe $z' \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $zz' = 1$.

D'après la question 2, on a $N(zz') = N(z)N(z') = 1$, soit

$$N(z)^2 N(z')^2 = 1.$$

On pose $z = a_1 + ib_1$ et $z' = a_2 + ib_2$ avec $(a_1, b_1, a_2, b_2) \in \mathbf{Z}^4$.

On a donc

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = 1.$$

Comme $a_1^2 + b_1^2 \in \mathbf{N}$ et $a_2^2 + b_2^2 \in \mathbf{N}$, on en déduit que

$$a_1^2 + b_1^2 = 1 \quad \text{et} \quad a_2^2 + b_2^2 = 1.$$

Puis comme a_1, a_2, b_1 et b_2 sont des entiers relatifs, on en déduit que $(a_1, b_1) \in \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$, soit $z \in \{1, -1, i, -i\}$.

On a montré que $\mathbf{Z}[i]^* = \{1, -1, i, -i\}$.

5. Comme a, b sont deux éléments de $\mathbf{Z}[i]$, il existe $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbf{Z}^4$ avec $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$ tel que $a = a_1 + ia_2$ et $b = b_1 + ib_2$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a_1 + ia_2}{b_1 + ib_2} \\ &= \frac{(a_1 + ia_2)(b_1 - ib_2)}{(b_1 + ib_2)(b_1 - ib_2)} \\ &= \frac{(a_1b_1 + a_2b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{b_1^2 + b_2^2}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{b_1^2 + b_2^2} \in \mathbf{Q}$ et $\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{b_1^2 + b_2^2} \in \mathbf{Q}$, on a montré que $u \in \mathbf{Q}$ et $v \in \mathbf{Q}$.

6. Si $u \in \left[[u], [u] + \frac{1}{2} \right]$, on pose $u_0 = [u]$ et si $u \in \left[[u] + \frac{1}{2}, [u] + 1 \right]$, on pose $u_0 = [u] + 1$.

Dans tous les cas, on a $|u - u_0| \leq \frac{1}{2}$.

On procède de même pour définir v_0 .

On a trouvé deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $|u - u_0| \leq \frac{1}{2}$ et $|v - v_0| \leq \frac{1}{2}$.

7. En utilisant $\frac{a}{b} = u + iv = (u - u_0) + i(v - v_0) + (u_0 + iv_0)$, on a

$$r = a - b(u_0 + iv_0) = (u - u_0) + i(v - v_0)b.$$

La question 2 donne

$$\begin{aligned} N(r) &= N((u - u_0) + i(v - v_0)b) \\ &= N((u - u_0) + i(v - v_0))N(b). \end{aligned}$$

D'après la question 6, on a

$$N((u - u_0) + i(v - v_0)) \leq \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} < 1.$$

On a montré que $N(r) < N(b)$.

8. On a

$$\frac{2 + 5i}{1 + i} = \frac{(2 + 5i)(1 - i)}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{7 + 3i}{2} = \frac{7}{2} + \frac{3}{2}i.$$

On pose $u_0 = 3$ et $v_0 = 1$. Si $r = 2 + 5i - (1 + i)(3 + i) = i$, d'après la question 7, on a $N(r) < N(1 + i)$.

Ainsi, on a $2 + 5i = (1 + i)(3 + i) + i$ avec $N(i) < N(1 + i)$.

9. $a\mathbf{Z}[i] \neq \emptyset$ car $0 \in a\mathbf{Z}[i]$.

Soit $(w, w') \in (a\mathbf{Z}[i])^2$: il existe $(z, z') \in \mathbf{Z}[i]^2$ tel que $w = az$ et $w' = az'$.

On a $w - w' = az - az' = a(z - z') \in a\mathbf{Z}[i]$.

On a montré que $(a\mathbf{Z}[i], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}[i], +)$.

De plus, si $w \in a\mathbf{Z}[i]$ et $w' \in \mathbf{Z}[i]$, il existe $z \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $w = az$, donc $ww' = azw' \in \mathbf{Z}[i]$ car $zw' \in \mathbf{Z}[i]$.

On a montré que $a\mathbf{Z}[i]$ est un idéal de $\mathbf{Z}[i]$.

10. Lorsque $I = \{0\}$, on a $I = 0\mathbf{Z}[i]$.

11. L'ensemble $\{N(z), z \in I \setminus \{0\}\}$ est non vide car $I \neq \{0\}$ et inclus dans \mathbf{N}^* .

Il admet donc un plus petit élément α et soit $a \in I \setminus \{0\}$ tel que $N(a) = \alpha$.

On a alors

$$N(a) = \inf \{N(z), z \in I \setminus \{0\}\}.$$

12. Comme $a \in I$ et comme I est un idéal, pour tout $z \in \mathbf{Z}[i]$, $az \in I$, donc

$$a\mathbf{Z}[i] \subset I.$$

13. Soit $z \in I$. Comme $a \neq 0$, en effectuant la division euclidienne de z par a , il existe $q \in \mathbf{Z}[i]$ et $r \in \mathbf{Z}[i]$ avec $N(r) < N(a)$ tels que $z = ab + r \iff r = z - ab$.

Comme $z \in I$ et $ab \in I$, on en déduit que $r \in I$.

Si $r \neq 0$, alors on a trouvé $r \in I \setminus \{0\}$ vérifiant $N(r) < N(a)$ et c'est une contradiction avec la définition de a .

Ainsi $r = 0$ et $z = ab$.

On a montré que $I \subset \mathbf{Z}[i]$.

14. Un tel élément n'est pas unique car, pour tout $a \in \mathbf{Z}[i]$, on a

$$a\mathbf{Z}[i] = (-a)\mathbf{Z}[i].$$

15. (a) Il est clair que $0 \in a\mathbf{Z}[i] + b\mathbf{Z}[i]$.

Soient z et z' deux éléments de $\mathbf{Z}[i] + b\mathbf{Z}[i]$: il existe $(z_1, z_2, z'_1, z'_2) \in \mathbf{Z}[i]^4$ tel que $z = az_1 + bz_2$ et $z' = az'_1 + bz'_2$.

On a $z - z' = a(z_1 - z'_1) + b(z_2 - z'_2) \in \mathbf{Z}[i] + b\mathbf{Z}[i]$ car $z_1 - z'_1 \in \mathbf{Z}[i]$ et $z_2 - z'_2 \in \mathbf{Z}[i]$.

On a montré que $(\mathbf{Z}[i] + b\mathbf{Z}[i], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Z}[i], +)$.

Soit $z \in a\mathbf{Z}[i] + b\mathbf{Z}[i]$: il existe $(z_1, z_2) \in \mathbf{Z}[i]^2$ tel que

$$z = az_1 + bz_2.$$

Pour tout $z' \in \mathbf{Z}[i]$, on a $zz' = az_1z' + bz_2z' \in \mathbf{Z}[i] + b\mathbf{Z}[i]$ car z_1z' et z_2z' sont des éléments de $\mathbf{Z}[i]$.

On a montré que $a\mathbf{Z}[i] + b\mathbf{Z}[i]$ est un idéal de $\mathbf{Z}[i]$.

- (b) Comme $a\mathbf{Z}[i] + b\mathbf{Z}[i]$ est un idéal de $\mathbf{Z}[i]$, d'après les questions 12 et 13, il existe $d \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $a\mathbf{Z}[i] + b\mathbf{Z}[i] = d\mathbf{Z}[i]$.

16. On prouve les deux inclusions.

\subset Si d est un PGCD de a et b , il est clair que $-d$, id et $-id$ sont des PGCD de a et b car

$$d\mathbf{Z}[i] = (-d)\mathbf{Z}[i] = (id)\mathbf{Z}[i] = (-id)\mathbf{Z}[i]$$

car -1 , i et $-i$ sont inversibles dans $\mathbf{Z}[i]$.

\supset Soient d et \tilde{d} deux PGCD de a et b . On a donc $d\mathbf{Z}[i] = \tilde{d}\mathbf{Z}[i]$.

Comme $d \in \tilde{d}\mathbf{Z}[i]$, il existe $u \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $d = \tilde{d}u$. De même, il existe $v \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $\tilde{d} = dv$, puis $d = uv\tilde{d}$, soit $uv = 1$.

On a montré que v est inversible dans $\mathbf{Z}[i]$. D'après la question 4, $v \in \{1, -1, i, -i\}$, donc $\tilde{d} \in \{d, -d, id, -id\}$.

On a montré que l'ensemble des PGCD de a et b est $\{d, -d, id, -id\}$.

17. Soit $z \in \mathbf{Z}[i]$ un élément premier.

Soit $(u, v) \in \mathbf{Z}[i]^2$ tel que $z = uv$.

Il s'ensuit que z divise uv . Comme z est premier z divise u ou v . On suppose que z divise u : il existe $\tilde{z} \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $u = z\tilde{z}$.

On en déduit que $z = \tilde{z}zv$, puis comme $z \neq 0$, $v\tilde{z} = 1$.

Ainsi, v est inversible dans $\mathbf{Z}[i]$.

On a montré qu'un élément premier de $\mathbf{Z}[i]$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$.

18. (a) Soit d un PGCD de a et z . Comme d divise z , il existe $\tilde{d} \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $d\tilde{d} = z$.

Comme z est irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$, d est inversible dans $\mathbf{Z}[i]$ ou \tilde{d} est inversible dans $\mathbf{Z}[i]$.

Si \tilde{d} est inversible dans $\mathbf{Z}[i]$, on en déduit que z est un PGCD de a et z , donc z divise a , ce qui est exclu par hypothèse.

On en déduit que d est inversible dans $\mathbf{Z}[i]$.

On a montré qu'un PGCD de a et z est 1.

- (b) D'après la question 18 (a) et par définition du PGCD, on en déduit que $a\mathbf{Z}[i] + z\mathbf{Z}[i] = \mathbf{Z}[i]$: il existe $(u, v) \in \mathbf{Z}[i]^2$ tel que $au + zv = 1$. On en déduit que $b = abu + zbv$.

Comme z divise ab , il existe $w \in \mathbf{Z}[i]$ tel que $ab = zw$, donc

$$b = zwu + zbv = z(wu + bv).$$

On a montré que z divise b .

- (c) On a montré qu'un élément irréductible de $\mathbf{Z}[i]$ est un élément premier de $\mathbf{Z}[i]$.

19. Comme $2 = 1^2 + 1^2$, on a $2 \in \mathcal{S}$.

On remarque que si $n \in \mathbf{N}$, alors $n^2 \equiv 0 \pmod{4}$ ou $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$.

Si $p \in \mathcal{S}$, on a donc $p \equiv 0, 1$ ou $2 \pmod{4}$. Comme p est premier, on ne peut pas avoir $p \equiv 0 \pmod{4}$ et $p \equiv 2 \pmod{4}$, ainsi on a $p \equiv 1 \pmod{4}$.

On a montré que si $p \in \mathcal{S}$, alors $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$.

20. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Si $p \in \mathcal{S}$, il existe $(n, m) \in \mathbf{N}^2$ tel que

$$p = n^2 + m^2 = (n + im)(n - im).$$

De plus, $N(p) = N(n + im)N(n - im) = p^2$.

Comme $N(n + im) = N(n - im)$, on en déduit que

$$N(n + im) = N(n - im) = p > 1.$$

Comme les éléments inversibles de $\mathbf{Z}[i]$ sont des éléments dont la norme vaut 1, on en déduit que $n + im$ et $n - im$ ne sont pas inversibles, donc p n'est pas irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$.

\Leftarrow Si p n'est pas irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$, il existe $(z, z') \in \mathbf{Z}[i]^2$ tous les deux non inversibles tel que $p = zz'$.

En utilisant la norme N et en réutilisant le fait que les inversibles de $\mathbf{Z}[i]$ sont de norme 1, on a $N(z) = N(z') = p$.

Si $z = n + im$ avec $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$, on a $p = n^2 + m^2$.

On a montré que $p \in \mathcal{S}$ si, et seulement si, p n'est pas irréductible dans $\mathbf{Z}[i]$.

21. On a $x^2 \equiv y^2 \pmod{p} \iff (x - y)(x + y) \equiv 0 \pmod{p}$.

Il s'ensuit que p divise $(x - y)(x + y)$. Comme p est premier, par le théorème de Gauss, p divise $x - y$ ou $x + y$.

On a montré que l'on a $x \equiv y \pmod{p}$ ou $x \equiv -y \pmod{p}$.

22. Soit l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{K}^* & \longrightarrow \mathbf{K}_2^* \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}.$$

Il est clair que

$$\mathbf{K}^* = \bigcup_{y \in \mathbf{K}_2^*} \varphi^{-1}(\{y\}),$$

de plus l'union est disjointe.

Soit $y \in \mathbf{K}_2^*$ et soit $x \in \mathbf{K}^*$ tel que $x^2 \equiv y \pmod{p}$. D'après la question 21, pour tout $z \in \mathbf{Z}$,

$$z^2 \equiv y \pmod{p} \iff z \equiv x \pmod{p} \text{ ou } z \equiv -x \pmod{p}.$$

Le seul élément dans \mathbf{K}^* convenant autre que x est $p - x$ et c'est le seul. Notons que $p - x \neq x$ car p est impair. Ainsi,

$$\forall y \in \mathbf{K}, \quad \text{card}(\varphi^{-1}(\{y\})) = 2.$$

On en déduit que

$$\text{card}(\mathbf{K}^*) = p - 1 = \text{card}\left(\bigcup_{y \in \mathbf{K}_2^*} \varphi^{-1}(\{y\})\right) = 2 \text{card}(\mathbf{K}_2^*),$$

soit

$$\boxed{\text{card}(\mathbf{K}_2^*) = \frac{p-1}{2}.}$$

23. (a) Soit $a \in \mathbf{K}_2^*$: il existe $b \in \mathbf{K}^*$ tel que $b^2 \equiv a \pmod{p}$. Ainsi,

$$\boxed{P(b) \equiv a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},}$$

en vertu du petit théorème de Fermat.

- (b) P est un polynôme de degré $\frac{p-1}{2}$. Or, tous les éléments de \mathbf{K}_2^* sont des racines de P (question 23 (a)).

Or $\text{card}(\mathbf{K}_2^*) = \frac{p-1}{2}$, ainsi P n'a pas d'autre racine. On peut donc écrire

$$\boxed{P = \prod_{a \in \mathbf{K}_2^*} (X - a).}$$

24. Pour tout $a \in \mathbf{K}_2^*$, on note $g(a)$ un élément de \mathbf{K}^* tel que

$$g(a)^2 \equiv a \pmod{p}.$$

On a

$$-1 = P(0) = \prod_{a \in \mathbf{K}_2^*} (-a) \equiv (-1)^{(p-1)/2} g(a)^2 \pmod{p}.$$

Comme $\frac{p-1}{2}$ est pair, on a $(-1)^{(p-1)/2} = 1$. Ainsi,

$$-1 \equiv \left(\prod_{a \in \mathbf{K}_2^*} g(a) \right)^2.$$

On a montré qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$.

25. Soit p un nombre premier égal à 2 ou vérifiant $p \equiv 1 \pmod{4}$.

- Si $p = 2$, alors $p = 1^2 + 1^2$, donc $p \in \mathcal{S}$.
- Si $p \equiv 1 \pmod{4}$.

D'après le lemme, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$, soit p divise dans \mathbf{Z} $n^2 + 1 = (n - i)(n + i)$, donc p divise $(n - i)(n + i)$ dans $\mathbf{Z}[i]$.

De plus, ni $n - i$, ni $n + i$ n'est inversible, ce qui est clair car la norme de chacun de ces entiers de Gauss vaut $n^2 + 1 > 1$ (car si $n = 0$, alors $0^2 \not\equiv -1 \pmod{p}$).

Et enfin, p ne divise ni $n - i$, ni $n + i$. Si, par exemple, p divise $n - i$, alors il existe $w = a + ib \in \mathbf{Z}[i]$ tel que

$$p(a + ib) = pa + ipb = n - i.$$

L'égalité $pb = -1$ étant impossible dans \mathbf{Z} car $p > 1$, on en déduit que p ne divise pas $n - i$.

On montre de même que p ne divise pas $n + i$.

Ainsi, p est premier dans $\mathbf{Z}[i]$. Par la question 18, on en déduit que p n'est pas irréductible sur $\mathbf{Z}[i]$.

Enfin, la question 20 assure que $p \in \mathcal{S}$.

On a montré que si p est un nombre premier de \mathbf{Z} , alors p est somme de deux carrés si, et seulement si, $p = 2$ ou $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Quelques remarques culturelles

L'étude des anneaux $\mathbf{Z}[i\sqrt{p}]$ (p nombre premier) et leurs propriétés arithmétiques (existence d'une division euclidienne, structure des idéaux, existence d'une décomposition en produits d'éléments irréductibles) a permis de faire des avancées dans la résolution du grand théorème de Fermat.

Malheureusement et contrairement à ceux que pensaient certains mathématiciens du XIX^e siècle, l'étude de ces anneaux n'a pas suffi pour prouver le grand théorème de Fermat (prouvé en 1995 par Andrew Wiles avec des techniques beaucoup plus sophistiquées).

Thème 15

Sur les racines des polynômes

Thèmes abordés : Nombres complexes, polynômes, matrices.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet commence par donner une méthode pour résoudre les équations polynomiales de degré 3. Le sujet continue en donnant plusieurs méthodes pour localiser les racines d'un polynôme (théorème de Gauss-Lucas et théorème de de Bruijn). Le sujet se termine avec un résultat de localisation du spectre (notion définie plus loin) d'une matrice.

Les parties de ce sujet sont largement indépendantes : seul le théorème de Gauss-Lucas établi à la partie 2 sert à la partie 3.

15.1 Résolution des équations du degré 3

Dans cette partie, on souhaite trouver une méthode permettant de résoudre dans \mathbf{C} l'équation $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$.

1. En faisant un changement de variable du type $z = x - d$ avec d à préciser, montrer que la résolution de l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

se ramène à la résolution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$ où $(p, q) \in \mathbf{R}^2$. On précisera les expressions de p et q en fonction de a , b et c .

2. Résoudre dans \mathbf{C} l'équation $z^3 + pz + q = 0$ lorsque $p = 0$.

On suppose maintenant $p \neq 0$. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. On pose $z_0 = u + v$ avec $(u, v) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}$.

3. Montrer que z_0 est solution de l'équation $z^3 + pz + q = 0$ dès que

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}.$$

4. Montrer que le système précédent est équivalent au système

$$\begin{cases} u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \\ v = -\frac{p}{3u} \end{cases}.$$

5. En déduire une méthode pour résoudre les équations de degré 3.

15.2 Quelques critères de localisation

15.2.1 Critère de Gauss-Lucas

Nous allons établir le théorème suivant.

Théorème. *Théorème de Gauss-Lucas.*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 2. Alors, les racines de P' s'écrivent comme un barycentre des racines de P .

Nous prouvons ce résultat. On écrit $P = a \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{n_i}$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines de P d'ordre de multiplicité respective n_1, \dots, n_r .

6. Que dire du théorème de Gauss-Lucas lorsque P n'a qu'une seule racine α ?

On suppose que P a au moins deux racines.

7. Montrer que l'on a

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{X - \alpha_i}.$$

8. Montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P'(z_0) = 0$ et $P(z_0) \neq 0$.

9. Montrer que l'on a

$$\left(\sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z_0 - \alpha_i|^2} \right) \overline{z_0} = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z_0 - \alpha_i|^2} \overline{\alpha_i}.$$

10. Terminer la preuve du théorème de Gauss-Lucas.

15.2.2 Majoration et minoration du module des racines

Nous allons établir la proposition suivante.

Proposition. *Majoration du module des racines.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ un polynôme unitaire de degré n , différent de X^n , dont on note z_1, \dots, z_n les racines complexes (éventuellement confondues). Alors,

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |z_k| < 1 + \max_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} |a_k|.$$

Nous prouvons la proposition. Pour cela, nous introduisons la fonction f définie par $f : x \mapsto 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{x^{n-k}}$.

11. Montrer que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1[$. En déduire que f s'annule en une unique valeur de l'intervalle $r \in]0, +\infty[$.

Soit z une racine de P dont le module est maximal. On note $s = |z|$.

12. (a) Montrer que l'on a

$$s^n \leq |a_{n-1}| s^{n-1} + \dots + |a_0|.$$

- (b) En déduire que $s \leq r$.
13. Terminer la preuve de la proposition.
14. Montrer que si $a_0 \neq 0$, alors

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |z_k| > \frac{|a_0|}{|a_0| + \max\{1, |a_{n-1}|, \dots, |a_1|\}}.$$

15.3 Un théorème de de Bruijn

Dans cette partie, nous allons établir le résultat suivant dû à de Bruijn.

Théorème. *Théorème de de Bruijn.*

Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$. On suppose que les racines de P et celles de P' ne sont pas réelles.

On note z_1, \dots, z_n les racines de P et $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ celles de P' . On a l'inégalité

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |\Im(\zeta_i)| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Im(z_i)|.$$

L'argument principal de la preuve est le lemme suivant :

Lemme. *Soit P une fonction polynomiale complexe de degré n dont on note z_1, \dots, z_n les racines (pas d'hypothèse sur les racines ici). On écrit*

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad P(z) = a \prod_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \Im(z_i) \geq 0}} (z - z_i) \prod_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \Im(z_i) < 0}} (z - z_i)$$

et on définit la fonction polynomiale P^* par

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad P^*(z) = a \prod_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \Im(z_i) \geq 0}} (z - z_i) \prod_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \Im(z_i) < 0}} (z - \bar{z}_i).$$

On a alors

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |P'(x)| \leq |P^{*\prime}(x)|.$$

Nous commençons par prouver le lemme.

15. Justifier qu'il existe quatre fonctions P, Q, R et S telles que : pour tout $x \in \mathbf{R}$

$$\sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \Im(z_i) \geq 0}} \frac{1}{x - z_i} = P(x) + iQ(x)$$

et

$$\sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \Im(z_i) < 0}} \frac{1}{x - z_i} = R(x) + iS(x).$$

16. Montrer que pour tout $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = (P(x) + R(x)) + i(Q(x) + S(x))$$

et

$$\frac{P^{*\prime}(x)}{P^*(x)} = (P(x) + R(x)) + i(Q(x) - S(x)).$$

17. (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad Q(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad S(x) \leq 0.$$

(b) En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |Q(x) + S(x)| \leq |Q(x) - S(x)|.$$

18. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \left| \frac{P'(x)}{P(x)} \right| \leq \left| \frac{P^{*\prime}(x)}{P^*(x)} \right|.$$

19. Terminer la preuve du lemme.

Nous pouvons maintenant prouver le théorème de de Bruijn. Les notations sont celles utilisées pour énoncer le théorème. On note z_1^*, \dots, z_n^* les racines de P^* et $\zeta_1^*, \dots, \zeta_{n-1}^*$ celles de $P^{*\prime}$.

20. (a) Après avoir justifié l'existence des intégrales, montrer que

$$\forall A \geq 0, \quad \int_{-A}^A \ln(|P'(x)|) dx \leq \int_{-A}^A \ln(|P^{*\prime}(x)|) dx.$$

(b) En déduire que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{-A}^A \ln(|x - \zeta_i|) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{-A}^A \ln(|x - \zeta_i^*|) dx.$$

21. Soit $a \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. Montrer que

$$\int_{-A}^A \ln(|x - a|) dx \underset{A \rightarrow +\infty}{=} 2(A \ln(A) - A) + \pi |\Im(a)| + O\left(\frac{1}{A}\right).$$

22. (a) Justifier que les racines de $P^{*\prime}$ ont une partie imaginaire strictement positive.

Indication : On pourra utiliser le théorème de Gauss-Lucas.

(b) Montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Im(z_i)| = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |\Im(\zeta_i^*)|.$$

23. Terminer la preuve du théorème de de Bruijn.

15.4 Localisation du spectre

Définition. *Matrice à diagonale (strictement) dominante.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On dit que A est à **diagonale dominante** (resp. **strictement dominante**) si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| \quad \left(\text{resp. } > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{i,j}| \right).$$

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant :

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ ($n \in \mathbf{N}^*$) une matrice à diagonale strictement dominante. Alors, A est inversible.*

Nous prouvons la proposition.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice à diagonale strictement dominante

et on suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A)$ non nul.

24. Montrer que pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$a_{j,j}x_j = - \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} a_{j,i}x_i.$$

25. En considérant un entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_k| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_j|$, conclure.

Définition. *Spectre d'une matrice.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On définit le **spectre** de la matrice A l'ensemble $\sigma(A)$ défini par :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbf{C}, \det(\lambda I_n - A) = 0\}.$$

26. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- Soit $\chi_A : x \mapsto \det(x I_n - A)$. Montrer que c'est une fonction polynomiale de degré n .
- En déduire que le spectre de A est un ensemble fini dont le cardinal est inférieur ou égal à n .

27. Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. Montrer que $\lambda \notin \sigma(A)$ dès que $\lambda I_n - A$ est à diagonale strictement dominante.

28. En déduire que

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{j=1}^n \left\{ z \in \mathbf{C}, |z - a_{j,j}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{i,j}| \right\}.$$

Correction du Thème 15

1. On a $z = x - d \iff x = z + d$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= (z + d)^3 + a(z + d)^2 + b(z + d) + c \\ &= z^3 + (3d + a)z^2 + (3d^2 + 2ad + b)z \\ &\quad + (d^3 + ad^2 + bd + c). \end{aligned}$$

Pour $d = -\frac{a}{3}$, on a

$$x^3 + ax^2 + bx + c = z^3 + pz + q$$

avec

$$p = 3d^2 + 2ad + b = -\frac{1}{3}a^2 + b$$

et

$$q = d^3 + ad^2 + bd + c = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c.$$

2. Lorsque $p = 0$, on est ramené à résoudre l'équation $z^3 = -q$.
On distingue deux cas :

- Si $q = 0$. L'équation

$$z^3 = -q$$

admet pour unique solution $z = 0$.

- Si $q \neq 0$. On écrit

$$-q = re^{i\theta}$$

avec $r > 0$ le module de $-q$ et $\theta \in \mathbf{R}$ un argument de $-q$.

Il est clair que $z_0 := r^{1/3}e^{i\theta/3}$ vérifie

$$z_0^3 = -q.$$

Il s'ensuit que l'ensemble des solutions de l'équation $z^3 = -q$ est :

$$\{z_0, j z_0, j^2 z_0\}$$

où $j = e^{2i\pi/3}$.

3. On a

$$\begin{aligned} z_0^3 + pz_0 + q &= (u + v)^3 + p(u + v) + q \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q \\ &= u^3 + v^3 + q + (3uv + p)(u + v). \end{aligned}$$

$$\text{On en déduit que } z_0^3 + pz_0 + q = 0 \text{ dès que } \begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}.$$

4. Comme $u \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} \begin{cases} u^3 + v^3 + q &= 0 \\ 3uv + p &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} u^3 + v^3 + q &= 0 \\ v &= -\frac{p}{3u} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u^3 + \left(-\frac{p}{3u}\right)^3 + q &= 0 \\ v &= -\frac{p}{3u} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q &= 0 \\ v &= -\frac{p}{3u} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} &= 0 \\ v &= -\frac{p}{3u} \end{cases} \end{aligned}$$

L'équivalence est montrée.

5. On pose $X = u^3$. On a

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \iff X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0.$$

L'équation $X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0$ est une équation du second degré à coefficients réels dont il est aisé de donner les solutions complexes z_1 et z_2 (avec éventuellement $z_1 = z_2$).

Pour trouver une valeur de u , il suffit de résoudre les équations $u^3 = z_1$ et $u^3 = z_2$, ce qui peut se faire en écrivant z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

Pour trouver v et donc z_0 , on utilise l'égalité $v = -\frac{p}{3u}$.

6. Si P n'admet qu'une seule racine α , alors il existe $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P = a(X - \alpha)^n$.

Ainsi, P' n'admet aussi qu'une seule racine : α . Il est alors clair que la racine de P' est barycentre de celle de P .

Dans ce cas, le théorème de Gauss-Lucas est démontré.

7. En dérivant $P = a \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{n_i}$, on a

$$P' = a \sum_{j=1}^r n_j (X - \alpha_j)^{n_j-1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r (X - \alpha_i)^{n_i}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \frac{P'}{P} &= \frac{a \sum_{j=1}^r n_j (X - \alpha_j)^{n_j-1} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r (X - \alpha_i)^{n_i}}{a \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i)^{n_i}} \\ &= \boxed{\sum_{j=1}^r \frac{n_j}{X - \alpha_j}}. \end{aligned}$$

8. Comme P admet au moins deux racines complexes, il existe deux complexes α et β distincts et il existe deux entiers naturels non nuls n et m tels que $P = (X - \alpha)^n (X - \beta)^m Q$ avec $Q \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ et $Q(\alpha) \neq 0$ et $Q(\beta) \neq 0$.

- Si Q n'est pas constant, alors d'après le théorème de Gauss-d'Alembert, Q admet au moins une racine complexe γ .
Comme $Q(\alpha) \neq 0$ et $Q(\beta) \neq 0$, on a $\gamma \neq \alpha$ et $\gamma \neq \beta$.
Dans ce cas, $P(\gamma) = 0$ et $\gamma \notin \{\alpha, \beta\}$.
- Si Q est constant, α et β sont racines d'ordre respectivement $n - 1$ et $m - 1$ pour P' .
Comme $\deg(P') = n + m - 1$, P' admet une racine autre que α et β .

On a montré qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $P'(z_0) = 0$ et $P(z_0) \neq 0$.

9. En évaluant en z_0 (possible car $P(z_0) \neq 0$) l'égalité obtenue à la question 7, on a :

$$\sum_{i=1}^r \frac{n_i}{z_0 - \alpha_i} = 0 \iff \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z_0 - \alpha_i|^2} (\overline{z_0 - \alpha_i}) = 0.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z_0 - \alpha_i|^2} \overline{z_0} = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z_0 - \alpha_i|^2} \overline{\alpha_i}}.$$

10. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant.

D'après la question 6, le théorème de Gauss-Lucas est prouvé alors P n'a qu'une seule racine.

On suppose que P a au moins deux racines. Soit z_0 une racine de P' .

Si z_0 est racine de P , alors il est clair que z_0 est barycentre des racines de P . On suppose donc que z_0 n'est pas racine de P (notons qu'une telle racine existe d'après la question 8).

En conjuguant la relation obtenue à la question 9, on obtient

$$\sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z_0 - \alpha_i|^2} \overline{z_0} = \sum_{i=1}^r \frac{n_i}{|z_0 - \alpha_i|^2} \overline{\alpha_i}.$$

D'où, en posant pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\beta_i = \frac{n_i}{|z_0 - \alpha_i|^2 \sum_{j=1}^r \frac{n_j}{|z_0 - \alpha_j|^2}}$, on a

$$z_0 = \sum_{i=1}^r \beta_i \alpha_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^r \beta_i = 1.$$

Comme pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\beta_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^r \beta_i = 1$, on en déduit que z_0 est barycentre des racines de P : le théorème de Gauss-Lucas est prouvé.

11. Comme P est différent de X^n , il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $|a_k| > 0$.
 f est strictement croissante sur \mathbf{R}_+^* comme la somme de fonctions croissantes dont l'une d'elle est strictement croissante sur \mathbf{R}_+^* ($x \in \mathbf{R}_+^* \mapsto -\frac{|a_k|}{x^{n-k}}$ l'est).
 De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

Par le théorème de la bijection, on en déduit que f est une bijection de $]0, +\infty[$ sur $f(]0, +\infty[) =]-\infty, 1[$.

On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

12. (a) Comme z est racine de P , on a

$$P(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k = 0 \iff z^n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Il s'ensuit que

$$s^n = |z^n| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |z|^k = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| s^k.$$

- (b) Comme $P \neq X^n$, on a $s > 0$. D'après la question 12 (a), on a

$$s^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| s^k \leq 0 \iff 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a_k|}{s^{n-k}} \leq 0 \iff f(s) \leq 0.$$

D'après la question 11, on en déduit que $s \leq r$.

13. Soit $M = \max_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} |a_k|$ et $A = 1 + M$. On a

$$\begin{aligned} A^n &= (A-1)(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + 1) + 1 \\ &> M(A^{n-1} + A^{n-2} + \dots + 1) \\ &> \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| A^k. \end{aligned}$$

On en déduit que $f(A) > 0$. Par la question 11, on a $A > r$, soit $A > r \geq s$.
On a montré que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |z_k| < 1 + \max_{k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket} |a_k|.$$

14. Soit

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{a_0} X^n P\left(\frac{1}{X}\right) \\ &= X^n + \frac{a_1}{a_0} X^{n-1} + \frac{a_2}{a_0} X^{n-2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_0} X + \frac{1}{a_0}. \end{aligned}$$

Comme $a_0 \neq 0$, 0 n'est pas racine de P ainsi, pour tout $z \in \mathbf{C}^*$,

$$Q(z) = 0 \iff P\left(\frac{1}{z}\right) = 0.$$

En remarquant que Q est unitaire et différent de X^n car son coefficient constant est non nul, et en utilisant la proposition précédente avec le polynôme Q , on en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \left| \frac{1}{z_k} \right| < 1 + \max \left\{ \left| \frac{1}{a_0} \right|, \left| \frac{a_{n-1}}{a_0} \right|, \dots, \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \right\}.$$

On en déduit que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |z_k| > \frac{1}{1 + \max \left\{ \left| \frac{1}{a_0} \right|, \left| \frac{a_{n-1}}{a_0} \right|, \dots, \left| \frac{a_1}{a_0} \right| \right\}},$$

d'où

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |z_k| > \frac{|a_0|}{|a_0| + \max \{1, |a_{n-1}|, \dots, |a_1|\}}.$$

15. Il suffit de considérer les parties réelles (respectivement imaginaires) des fonctions

$$x \mapsto \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \Im(z_i) \geq 0}} \frac{1}{x - z_i} \quad \text{et} \quad x \mapsto \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \Im(z_i) < 0}} \frac{1}{x - z_i}$$

définies sur \mathbf{R} .

16. Cette question se traite de la même manière que la question 7.

17. (a) Par définitions de P et Q , on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbf{R}, \quad P(x) + iQ(x) &= \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \Im(z_i) \geq 0}} \frac{1}{x - z_i} \\ &= \sum_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \Im(z_i) \geq 0}} \frac{x - \bar{z}_i}{|x - z_i|^2}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\Im(z_i) \geq 0$, on a $\Im(x - \bar{z}_i) \geq 0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad Q(x) \geq 0.}$$

Un même raisonnement montre que

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad S(x) \leq 0.}$$

(b) En utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$|Q(x) + S(x)| \leq |Q(x)| + |S(x)| = Q(x) - S(x).$$

D'après les signes des fonctions Q et S établis à la question 17 (a), on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad |Q(x) + S(x)| \leq |Q(x) - S(x)|.}$$

18. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, en utilisant le résultat des questions 16 et 17 (b), on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{P'(x)}{P(x)} \right| &= |P(x) + R(x) + i(Q(x) + S(x))| \\ &= \sqrt{(P(x) + R(x))^2 + (Q(x) + S(x))^2} \\ &\leq \sqrt{(P(x) + R(x))^2 + (Q(x) - S(x))^2} \\ &\leq |P(x) + R(x) + i(Q(x) - S(x))| \\ &\leq \left| \frac{P^{*'}(x)}{P^*(x)} \right| \end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad \left| \frac{P'(x)}{P(x)} \right| \leq \left| \frac{P^{*'}(x)}{P^*(x)} \right|.}$$

19. On commence par remarquer que pour tout $z \in \mathbf{C}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$|x - z| = |x - \bar{z}|.$$

Il s'ensuit que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |P(x)| = |P^*(x)|.$$

Grâce à l'inégalité établie à la question 18, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad |P'(x)| \leq |P^{*'}(x)|.}$$

20. (a) Comme l'on suppose que les racines de P' et $P^{*'}$ ne sont pas réels, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a $|P'(x)| > 0$ et $|P^{*'}(x)| > 0$.

Il s'ensuit que les fonctions

$$x \in \mathbf{R} \mapsto \ln(|P'(x)|) \quad \text{et} \quad x \in \mathbf{R} \mapsto \ln(|P^{*'}(x)|)$$

sont définies et continues sur \mathbf{R} .

En utilisant l'inégalité obtenue à la question 19, la croissance de la fonction \ln sur \mathbf{R}_+^* et la croissance de l'intégrale, on en déduit

$$\forall A \geq 0, \quad \int_{-A}^A \ln(|P'(x)|) dx \leq \int_{-A}^A \ln(|P^{**}(x)|) dx.$$

- (b) Comme $\zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}$ (resp. $\zeta_1^*, \dots, \zeta_{n-1}^*$) sont les racines de P' (resp. P^{**}) et par définition de P et P^* , on a

$$P' = an \prod_{i=1}^{n-1} (X - \zeta_i) \quad \text{et} \quad P^{**} = an \prod_{i=1}^{n-1} (X - \zeta_i^*).$$

Comme les racines de P' et P^{**} ne sont pas réelles, on en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\ln(|P(x)|) = \ln(n|a|) + \sum_{i=1}^{n-1} \ln(|x - \zeta_i|)$$

et

$$\ln(|P^{**}(x)|) = \ln(n|a|) + \sum_{i=1}^{n-1} \ln(|x - \zeta_i^*|).$$

En utilisant l'inégalité de la question 20 (a), on récupère

$$\sum_{i=1}^{n-1} \int_{-A}^A \ln(|x - \zeta_i|) dx \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{-A}^A \ln(|x - \zeta_i^*|) dx.$$

21. Soit $A > 0$. On pose $a = \alpha + i\beta$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\beta \in \mathbf{R}^*$. On a

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A \ln(|x - a|) dx &= \int_{-A}^A \ln\left(\sqrt{(x - \alpha)^2 + \beta^2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-A}^A \ln\left((x - \alpha)^2 + \beta^2\right) dx. \end{aligned}$$

Le changement de variable $u = x - \alpha$ donne

$$\int_{-A}^A \ln(|x - a|) dx = \frac{1}{2} \int_{-A-\alpha}^{A-\alpha} \ln(u^2 + \beta^2) du.$$

Une intégration par parties donne (les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto \ln(u^2 + \beta^2)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[-A - \alpha, A - \alpha]$) :

$$\int_{-A}^A \ln(|x - a|) dx = \frac{1}{2} [u \ln(u^2 + \beta^2)]_{-A-\alpha}^{A-\alpha} - \int_{-A-\alpha}^{A-\alpha} \frac{u^2}{u^2 + \beta^2} du.$$

Or, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [u \ln(u^2 + \beta^2)]_{-A-\alpha}^{A-\alpha} &= \frac{1}{2} \left((A - \alpha) \ln((A - \alpha)^2 + \beta^2) \right. \\ &\quad \left. + (A + \alpha) \ln((A + \alpha)^2 + \beta^2) \right). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} &(A - \alpha) \ln((A - \alpha)^2 + \beta^2) \\ &= (A - \alpha) \ln \left(A^2 \left(1 - \frac{2\alpha}{A} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{A^2} \right) \right) \\ &= 2A \ln(A) - 2\alpha \ln(A) + A \ln \left(1 - \frac{2\alpha}{A} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{A^2} \right) \\ &\quad - \alpha \ln \left(1 - \frac{2\alpha}{A} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{A^2} \right) \\ &\underset{A \rightarrow +\infty}{=} 2A \ln(A) - 2\alpha \ln(A) - 2\alpha + O\left(\frac{1}{A}\right). \end{aligned}$$

Un calcul analogue donne

$$(A + \alpha) \ln((A + \alpha)^2 + \beta^2) \underset{A \rightarrow +\infty}{=} 2A \ln(A) + 2\alpha \ln(A) + 2\alpha + O\left(\frac{1}{A}\right).$$

On en déduit que

$$\frac{1}{2} [u \ln(u^2 + \beta^2)]_{-A-\alpha}^{A-\alpha} \underset{A \rightarrow +\infty}{=} 2A \ln(A) + O\left(\frac{1}{A}\right). \quad (15.1)$$

De toute évidence,

$$\begin{aligned} - \int_{-A-\alpha}^{A-\alpha} \frac{u^2}{u^2 + \beta^2} du &= -2A + \beta^2 \int_{-A-\alpha}^{A-\alpha} \frac{1}{u^2 + \beta^2} du \\ &= -2A + |\beta| \left(\arctan\left(\frac{A - \alpha}{|\beta|}\right) + \arctan\left(\frac{A + \alpha}{|\beta|}\right) \right). \end{aligned}$$

Or, pour tout $x > 0$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, ainsi, pour tout $A > \alpha$, on a

$$- \int_{-A-\alpha}^{A-\alpha} \frac{u^2}{u^2 + \beta^2} du = -2A + |\beta| \left(\pi - \arctan\left(\frac{|\beta|}{A - \alpha}\right) - \arctan\left(\frac{|\beta|}{A + \alpha}\right) \right).$$

En utilisant le développement limité de arctan en 0, on obtient finalement

$$- \int_{-A-\alpha}^{A-\alpha} \frac{u^2}{u^2 + \beta^2} du \underset{A \rightarrow +\infty}{=} -2A + |\beta| \pi + O\left(\frac{1}{A}\right).$$

En sommant cette dernière ligne avec (15.1), on a montré que

$$\boxed{\int_{-A}^A \ln(|x-a|) dx \underset{A \rightarrow +\infty}{=} 2(A \ln(A) - A) + \pi |\Im(a)| + O\left(\frac{1}{A}\right).}$$

22. (a) Par définition, les racines de P^* ont une partie imaginaire positive. Comme on suppose les racines de P^* non réelles, on peut donc affirmer que les racines de P^* ont une partie imaginaire strictement positive. D'après le théorème de Gauss-Lucas, toute racine ζ_j^* (avec $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$) de $P^{*'} s'écrit comme le barycentre des racines de P^* : il existe $n-1$ réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ vérifiant$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad z_0 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i z_i^*$$

où les z_i^* sont les racines de P^* .

Ici, comme $\Im(z_i) > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on en déduit que $\Im(z_0) > 0$.

On a montré que toute racine de $P^{*'}$ a une partie imaginaire strictement positive.

- (b) Par définition de P^* , on a

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Im(z_i)| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Im(z_i^*)| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Im(z_i^*) \quad (15.2)$$

car les racines de P^* ont toutes une partie imaginaire positive.

Le résultat de la question 22 (a) permet d'affirmer aussi que

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |\Im(\zeta_i^*)| = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Im(\zeta_i^*). \quad (15.3)$$

Or, avec les relations coefficients/racines d'un polynôme, on a

$$P^* = a \prod_{i=1}^n (X - z_i^*) = aX^n - a(z_1^* + \dots + z_n^*)X^{n-1} + R$$

où R est un polynôme de degré au plus $n-2$. Ainsi

$$P^{*' = anX^{n-1} - a(n-1)(z_1^* + \dots + z_n^*)X^{n-2} + R'.$$

En procédant de la même manière avec $P^{*'}$, on a

$$\begin{aligned} P^{*'} &= an \prod_{i=1}^{n-1} (X - \zeta_i^*) \\ &= anX^{n-1} - an(\zeta_1^* + \dots + \zeta_{n-1}^*)X^{n-2} + Q' \end{aligned}$$

où Q est un polynôme de degré au plus $n-2$.

Par unicité des coefficients d'un polynôme, comme $a \neq 0$, on a

$$(n-1)(z_1^* + \dots + z_n^*) = n(\zeta_1^* + \dots + \zeta_{n-1}^*),$$

en particulier,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Im(z_i^*) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \Im(\zeta_i^*).$$

Les lignes (15.2) et (15.3) permettent de conclure que

$$\boxed{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Im(z_i)| = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |\Im(\zeta_i^*)|.$$

23. Le résultat de la question 21 utilisé avec l'inégalité de la question 20 (b) donne, lorsque A tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} &2(n-1)(A - \ln(A) - A) + \pi \sum_{i=1}^{n-1} |\Im(\zeta_i)| + O\left(\frac{1}{A}\right) \\ &\leq 2(n-1)(A - \ln(A) - A) + \pi \sum_{i=1}^{n-1} |\Im(\zeta_i^*)| + O\left(\frac{1}{A}\right), \end{aligned}$$

d'où en simplifiant par $2(n-1)(A - \ln(A) - A)$, en multipliant par $\frac{n-1}{\pi}$ et en faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |\Im(\zeta_i)| \leq \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |\Im(\zeta_i^*)|.$$

L'égalité établie à la question 22 (b) donne

$$\boxed{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} |\Im(\zeta_i)| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Im(z_i)|.$$

Le théorème de de Bruijn est prouvé.

24. Comme $X \in \ker(A)$, on a

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^n a_{j,i} x_i = 0 \iff \boxed{a_{j,j} x_j x_j = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n a_{j,i} x_i.$$

25. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|x_k| = \max_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket} |x_j|$. Comme $X \neq 0$, on a $|x_k| > 0$, ainsi

$$|a_{k,k}| = \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{k,i} \frac{x_i}{x_k} \right| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n |a_{k,i}|$$

par pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\left| \frac{x_i}{x_k} \right| \leq 1$ (par définition de x_k).

On obtient une contradiction car la matrice A est à diagonale strictement dominante.

Ainsi, $X = 0$, d'où $\ker(A) \subset \{0\}$ et $\ker(A) = \{0\}$.

On a montré qu'une matrice à diagonale strictement dominante est inversible.

26. (a) Comme $I_n = (\delta_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$, avec $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \chi_A(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (x\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}).$$

Il s'ensuit que χ_A est une fonction polynomiale de degré au plus n comme somme de fonctions polynomiales de degré au plus n .

De plus, si $\sigma = \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$, alors

$$\prod_{i=1}^n (x\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}) = \prod_{i=1}^n (x - a_{i,i})$$

et $x \mapsto \prod_{i=1}^n (x - a_{i,i})$ est une fonction polynomiale de degré n .

Si $\sigma \neq \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$, alors $x \mapsto \prod_{i=1}^n (x\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)})$ est une application polynomiale de degré au plus $n - 1$ car il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\delta_{j,\sigma(j)} = 0$.

Finalement, χ_A est une fonction polynomiale de degré n comme la somme d'une fonction polynomiale de degré de n avec la somme de fonctions polynomiales dont le degré est au plus $n - 1$.

On a montré que χ_A est une fonction polynomiale de degré n .

- (b) Soit $\lambda \in \mathbf{C}$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(A) &\iff \det(\lambda I_n - A) = 0 \\ &\iff \chi_A(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Or, χ_A est une fonction polynomiale de degré n , donc χ_A admet au plus n racines.

Il s'ensuit que $\sigma(A)$ est fini et de cardinal au plus n .

27. Si $\lambda I_n - A$ est à diagonale strictement dominante, d'après la question 25,

$$\lambda \mathbf{I}_n - A \text{ est inversible, donc } \lambda \notin \sigma(A).$$

28. Le résultat de la question 27 se réécrit de la façon suivante : pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$,

$$\lambda \mathbf{I}_n - A \text{ est à diagonale strictement dominante} \implies \lambda \notin \sigma(A).$$

La contraposée de cette implication est l'implication

$$\lambda \in \sigma(A) \implies \lambda \mathbf{I}_n - A \text{ n'est à diagonale strictement dominante.}$$

Or, l'ensemble des valeurs de $\lambda \in \mathbf{C}$ pour lesquelles $\lambda \mathbf{I}_n - A$ n'est pas à diagonale strictement dominante est l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles il existe

$j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $|z - a_{j,j}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{i,j}|$, soit

$$z \in \bigcup_{j=1}^n \left\{ z \in \mathbf{C}, |z - a_{j,j}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{i,j}| \right\}.$$

On a montré que

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{j=1}^n \left\{ z \in \mathbf{C}, |z - a_{j,j}| \leq \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{i,j}| \right\}.$$

Quelques remarques culturelles

La méthode présentée ici pour résoudre les équations polynomiales de degré 3 s'appelle la méthode de Tartaglia. Une méthode analogue existe (la méthode de Ferrari) pour résoudre les équations polynomiales de degré 4.

On sait depuis les travaux d'Abel et Galois (deux mathématiciens du XIX^e siècle, tous les deux morts trop jeunes) qu'il existe pas de méthode générale pour exprimer les solutions à l'aide de « racines » pour les équations polynomiales de degré supérieur ou égal à 5.

Thème 16

Sur les polynômes symétriques

Thèmes abordés : Structure algébrique, polynôme.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet traite des polynômes à plusieurs variables mais aucune construction n'est faite ici. Le but du problème est de montrer un résultat permettant de caractériser les polynômes symétriques.

La partie 1 introduit les polynômes à plusieurs indéterminées, on y établit les premières propriétés. La partie 2 établit le résultat principal.

16.1 Polynôme à plusieurs indéterminées

Définition. *Polynôme à plusieurs indéterminées.*

Soit \mathbf{A} un anneau. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. Soient X_1, \dots, X_n des indéterminées.

On définit l'ensemble des polynômes à n indéterminées sur \mathbf{A} par

$$\mathbf{A}[X_1, \dots, X_n] = \left\{ \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} a_{(i_1, \dots, i_n)} X^{i_1} \dots X^{i_n}, a_{(i_1, \dots, i_n)} \in \mathbf{A} \right\}$$

où dans la somme, il y a un nombre fini de termes non nuls, i.e. le nombre de $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n$ tel que $a_{i_1} \dots a_{i_n}$ est non nul, est fini.

On définit sur $\mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ la somme et la multiplication suivante :

- pour tout

$$P = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} p_{(i_1, \dots, i_n)} X^{i_1} \dots X^{i_n} \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$$

et

$$Q = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} q_{(i_1, \dots, i_n)} X^{i_1} \dots X^{i_n} \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n],$$

on définit $P + Q$ par

$$P + Q = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} \left(p_{(i_1, \dots, i_n)} + q_{(i_1, \dots, i_n)} \right) X^{i_1} \dots X^{i_n}.$$

- pour tout

$$P = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} p_{(i_1, \dots, i_n)} X^{i_1} \dots X^{i_n} \in A[X_1, \dots, X_n]$$

et

$$Q = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} q_{(i_1, \dots, i_n)} X^{i_1} \dots X^{i_n} \in A[X_1, \dots, X_n],$$

on définit $P \cdot Q$ par

$$P \cdot Q = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ j_r + k_r = i_r}}^n p_{j_1, \dots, j_n} q_{k_1, \dots, k_n} \right) X^{i_1} \dots X^{i_n}.$$

On admet que $(A[X_1, \dots, X_n], +, \cdot)$ est un anneau.

Définitions. Monôme, hauteur.

Soit A un anneau.

- On appelle monôme de $A[X_1, \dots, X_n]$ tout polynôme de la forme

$$aX_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$$

avec $a \neq 0$.

• Soient $m = aX_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ et $m' = bX_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$ deux monômes. On définit la relation binaire « hauteur » par :

- On dit que m est plus haut que m' si le premier élément non nul de la suite $(i_1 - j_1), \dots, (i_n - j_n)$ est positif. On notera $m' < m$ (attention à ne pas confondre avec la relation d'ordre des réels).
- Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $i_k = j_k$, on dit que les monômes m et m' ont la même hauteur.
- Si l'on a $m < m'$ ou $m = m'$, on note $m \leq m'$.
- Si $P \in A[X_1, \dots, X_n]$ non nul, le monôme dont la hauteur est la plus haute est appelé monôme directeur de P . On le note $M(P)$.

- (a) Montrer que la relation binaire « hauteur » dans l'ensemble des monômes est un pré-ordre (réflexive et transitive).
- (b) Pourquoi « hauteur » n'est-elle pas une relation d'ordre dans l'ensemble des monômes ?
- (c) Dans $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$, ranger les monômes $X_1^3 X_2 X_3^3$, $X_1^3 X_2^2 X_3^5$ et $X_1 X_2^3 X_3$.

Définition. Anneau intègre.

Soit A un anneau. On dit que A est intègre si

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad (xy = 0) \implies (x = 0 \quad \text{ou} \quad y = 0).$$

- Donner des exemples d'anneaux non intègres.
- (a) Montrer que si A est intègre, alors l'anneau $A[X]$ des polynômes à une indéterminée sur A est intègre.

- (b) Soit $n \geq 2$. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$, il existe $r \in \mathbf{N}$ et $Q_0, \dots, Q_r \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ tels que

$$P = Q_r X_n^r + Q_{r-1} X_n^{r-1} + \dots + Q_0.$$

- (c) Montrer que si \mathbf{A} est intègre, alors $\mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ l'est aussi.

Définition. *Polynôme symétrique.*

Soient \mathbf{A} un anneau et $P \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$. On dit que P est symétrique si

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_n, \quad P(X_1, \dots, X_n) = P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}),$$

où \mathcal{S}_n est l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même.

4. Montrer que les polynômes suivants sont symétriques :

(a) les polynômes de Newton $S_k = \sum_{i=1}^n X_i^k$;

(b) le discriminant de X_1, \dots, X_n : $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_i - X_j)^2$;

- (c) les polynômes symétriques élémentaires de X_1, \dots, X_n définis par

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \Sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq n} X_{i_1} X_{i_2} \dots X_{i_n}.$$

16.2 Théorème principal

16.2.1 Énoncé et preuve

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Théorème. *Soit \mathbf{A} un anneau intègre. Soit $P \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ symétrique. Il existe un polynôme φ à n indéterminées tels que*

$$P(X_1, \dots, X_n) = \varphi(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n). \quad (16.1)$$

5. Soit $P \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ symétrique. Montrer que

$$M(P) = aX_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \implies i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n.$$

6. Soit $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n$ et soit $k = \sum_{j=1}^n k_j$. Montrer que

$$M\left(\sum_1^{k_1} \sum_2^{k_2} \dots \sum_n^{k_n}\right) = X_1^k X_2^{k-k_1} X_3^{k-(k_1+k_2)} \dots X_n^{k-(k_1+\dots+k_{n-1})}.$$

7. Soit $P \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$. En procédant par récurrence sur la hauteur, montrer l'existence d'un polynôme φ vérifiant (16.1).

16.2.2 Application : la formule de Newton

Proposition. *Formule de Newton.*

Soit A un anneau. Dans $A[X_1, \dots, X_n]$, on a :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad k\Sigma_k = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} S_i \Sigma_{k-i}.$$

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On introduit une $(k+1)$ -ième indéterminée Z et on introduit

$$P = \prod_{i=1}^k (Z - X_i) \in A[X_1, \dots, X_k][Z],$$

i.e. c'est un polynôme à coefficients dans $A[X_1, \dots, X_k]$.

8. Justifier que

$$\forall j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad P(X_j) = 0.$$

9. Justifier que

$$P = Z^k - \Sigma_1 Z^{k-1} + \Sigma_2 Z^{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} \Sigma_{k-1} Z + (-1)^k \Sigma_k.$$

10. Terminer la preuve de la formule de Newton.

Correction du Thème 16

1. (a) • Soit $aX_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$. On a

$$aX_1^{k_1} \dots X_n^{k_n} \leq aX_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}.$$

La relation d'ordre « hauteur » est réflexive.

- Soient $aX_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$, $bX_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$ et $cX_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$ trois monômes tels que

$$X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \leq bX_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}$$

et

$$bX_1^{j_1} \dots X_n^{j_n} \leq cX_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}.$$

Par définition de la relation « hauteur », on a

$$\exists p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \ell \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket, i_\ell = j_\ell \text{ et } i_p < j_p$$

et

$$\exists q \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall \ell \in \llbracket 1, q-1 \rrbracket, j_\ell = k_\ell \text{ et } k_q < j_q.$$

En posant $r = \min\{p, q\}$, on a

$$\forall \ell \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket, i_\ell = k_\ell \text{ et } i_r < k_r.$$

On a montré que l'on a

$$X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n} \leq cX_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}.$$

On a montré que la relation \leq est une relation de pré-ordre sur l'ensemble des monômes.

- (b) La relation \leq n'est pas une relation d'ordre sur l'ensemble des monômes car elle n'est pas antisymétrique : on a $X_1 \leq 2X_1$ et $2X_1 \leq X_1$, mais on n'a pas $X_1 = 2X_1$.

- (c) On a

$$X_1^3 X_2 X_3^3 \leq X_1^3 X_2^2 X_3^5$$

car $3 = 3$ et $1 \leq 2$.

De même, on a

$$X_1 X_2^3 X_3 \leq X_1^3 X_2 X_3^3$$

car $1 \leq 3$.

On a montré que

$$X_1 X_2^3 X_3 \leq X_1^3 X_2 X_3^3 \leq X_1^3 X_2^2 X_3^5.$$

2. • On peut citer l'ensemble des fonctions définies sur $[0, 1]$ muni des lois $+$ et \times usuelles : soient les fonctions f et g définies sur $[0, 1]$ par : pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il est clair que l'on a $f \times g = 0$ et ni f , ni g n'est la fonction nulle.

- $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), +, \cdot)$ n'est pas intègre non plus. En effet, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas nulle.

- Le lecteur familier avec les anneaux $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ pourra montrer que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \times)$ n'est pas intègre si, et seulement si, n n'est pas premier.
3. (a) Soit $(P, Q) \in \mathbf{A}[X]$ non nuls. On peut écrire

$$P = \sum_{k=0}^n p_k X^k \quad \text{et} \quad Q = \sum_{k=0}^m q_k X^k$$

avec $p_n \neq 0$ et $q_m \neq 0$.

On a $\deg(PQ) \leq n + m$. De plus, comme \mathbf{A} est intègre, $p_n q_m \neq 0$ car $p_n \neq 0$ et $q_m \neq 0$.

Il s'ensuit que $\deg(PQ) = n + m \in \mathbf{N}$, en particulier, PQ est non nul.

On a montré que si \mathbf{A} est intègre, alors $\mathbf{A}[X]$ l'est aussi.

- (b) Soit $P = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{N}^n} p_{(i_1, \dots, i_n)} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$.

Si P ne contient pas de monôme contenant X_n , alors $P \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_{n-1}]$.

On suppose que P contient au moins un monôme contenant X_n . Soit r la plus grande puissance de X_n dans les monômes de P .

Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on note \mathcal{M}_i l'ensemble des monômes de P dont la puissance de X_n est i . On peut donc écrire

$$P = \sum_{j=0}^r \sum_{M \in \mathcal{M}_j} M = \sum_{i=0}^r Q_i X_n^i$$

avec pour tout $i \in \llbracket 0, r \rrbracket$, $Q_i \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_{n-1}]$.

On a montré que tout polynôme $P \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ s'écrit sous la forme $P = \sum_{i=0}^r Q_i X_n^i$ avec les $Q_i \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_{n-1}]$.

- (c) On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « $\mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ est intègre ».

Le cas $n = 1$ est fait à la question 3 (a).

Soit $(P, Q) \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ tous les deux non nuls. D'après la question 3 (b), on peut écrire

$$P = \sum_{i=0}^r p_i X_n^i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{i=0}^s q_i X_n^i,$$

où les p_i et les q_i sont des éléments de $\mathbf{A}[X_1, \dots, X_{n-1}]$ avec p_r et q_s non nuls.

Il s'ensuit que

$$PQ = p_r q_s X_n^{r+s} + \sum_{i=0}^{r+s-1} \tilde{p}_i X_n^i$$

avec pour tout $i \in \llbracket 1, r+s-1 \rrbracket$, $\tilde{p}_i \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_{n-1}]$.

Comme $p_r \neq 0$ et $q_s \neq 0$, par l'hypothèse de récurrence, on a $p_r q_s \neq 0$.

Il s'ensuit que $PQ \neq 0$, donc $\mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ est intègre.

Par le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ est intègre dès que \mathbf{A} l'est.

4. (a) Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$S_k(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = \sum_{i=1}^n X_{\sigma(i)}^k = \sum_{\sigma(\llbracket 1, n \rrbracket)} X_i^k = S_k.$$

On a montré que pour tout $k \in \mathbf{N}$, S_k est un polynôme symétrique.

- (b) Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on a

$$\begin{aligned} D(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (X_{\sigma(i)} - X_{\sigma(j)})^2 \\ &= \prod_{1 \leq \sigma^{-1}(i') < \sigma^{-1}(j') \leq n} (X_{i'} - X_{j'})^2 \\ &= D(X_1, \dots, X_n) \end{aligned}$$

car σ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On a montré que D est un polynôme symétrique.

- (c) Pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \Sigma_k(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} X_{\sigma(i_1)} \cdots X_{\sigma(i_k)} \\ &= \sum_{1 \leq \sigma^{-1}(i'_1) < \dots < \sigma^{-1}(i'_k) \leq n} X_{i'_1} \cdots X_{i'_k} \\ &= \Sigma_k(X_1, \dots, X_n). \end{aligned}$$

car σ est une bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On a montré que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, Σ_k est un polynôme symétrique.

5. On suppose qu'il existe un couple d'entiers (k, ℓ) avec, par exemple, $k < \ell$ tel que $i_k < i_\ell$.

Comme P est symétrique et il contient le monôme $aX_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$, il contient aussi le monôme

$$aX_1^{i_1} \cdots X_{k-1}^{i_{k-1}} X_k^{i_\ell} \cdots X_{\ell-1}^{i_{\ell-1}} X_\ell^{i_k} \cdots X_n^{i_n}.$$

Or, pour la relation « hauteur », on a

$$aX_1^{i_1} \dots X_{k-1}^{i_{k-1}} X_k^{i_k} \dots X_{\ell-1}^{i_{\ell-1}} X_\ell^{i_\ell} \dots X_n^{i_n} > aX_1^{i_1} \dots X_n^{i_n},$$

ce qui contredit le fait que $M(P) = aX_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$.

On a montré que $i_1 \geq \dots \geq i_n$.

6. On a

$$\begin{aligned} M(\Sigma_1^{k_1}) &= M((X_1 + \dots + X_n)^{k_1}) = X_1^{k_1}; \\ M(\Sigma_2^{k_2}) &= M((X_1 X_2 + \dots + X_{n-1} X_n)^{k_2}) = X_1^{k_2} X_2^{k_2}; \\ &\vdots \\ M(\Sigma_i^{k_i}) &= M\left(\left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_i \leq n} X_{j_1} \dots X_{j_i}\right)^{k_i}\right) = X_1^{k_i} \dots X_i^{k_i}; \\ &\vdots \\ M(\Sigma_n^{k_n}) &= M((X_1 \dots X_n)^{k_n}) = X_1^{k_n} \dots X_n^{k_n}. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question 3 (c), on obtient

$$M(\Sigma_1^{k_1} \dots \Sigma_n^{k_n}) = X_1^{k_1} X_2^{k_2 - k_1} X_3^{k_3 - (k_1 + k_2)} \dots X_n^{k_n - (k_1 + \dots + k_{n-1})}.$$

7. Soit $P \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme symétrique.

Si $P = 0$, il suffit de prendre $\varphi = 0$.

On suppose $P \neq 0$. On suppose le résultat vraie pour les polynômes dont le monôme directeur est moins haut que celui de P .

On note $aX_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$ où $A \in \mathbf{A}$, $a \neq 0$ le monôme directeur de P .

Par la question 5, on a $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$. Puis, le résultat de la question 6 assure

$$M(\Sigma_1^{k_1 - k_2} \Sigma_2^{k_2 - k_3} \dots \Sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \Sigma_n^{k_n}) = M(X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}).$$

On pose

$$Q = P - \Sigma_1^{k_1 - k_2} \Sigma_2^{k_2 - k_3} \dots \Sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \Sigma_n^{k_n}.$$

On a $M(Q) < M(P)$, par l'hypothèse de récurrence, il existe un polynôme ψ à n indéterminées tel que

$$Q = \psi(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} P &= \psi(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n) + \Sigma_1^{k_1 - k_2} \Sigma_2^{k_2 - k_3} \dots \Sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \Sigma_n^{k_n} \\ &= \varphi(\Sigma_1, \dots, \Sigma_n). \end{aligned}$$

Ceci termine la récurrence.

8. Pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on a

$$P(X_j) = \prod_{i=1}^k (X_j - X_i) = 0.$$

9. Ce sont les relations coefficients/racines établies en cours de MPSI.

10. En utilisant les résultats des questions 8 et 9, on a : pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$,

$$X_j^k - \Sigma_1 X_j^{k-1} + \Sigma_2 X_j^{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} \Sigma_{k-1} X_j + (-1)^k \Sigma_k = 0.$$

En sommant ces relations pour $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on récupère

$$\sum_{j=1}^k X_j^k - \Sigma_1 \sum_{j=1}^k X_j^{k-1} + \dots + (-1)^{k-1} \Sigma_{k-1} \sum_{j=1}^k X_j + (-1)^k k \Sigma_k = 0,$$

ce qui donne

$$S_k - \Sigma_1 S_{k-1} + \Sigma_2 S_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} \Sigma_{k-1} S_1 + (-1)^k k \Sigma_k = 0.$$

On obtient finalement

$$k \Sigma_k = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} S_i \Sigma_{k-i}.$$

Thème 17

Sur le rang des matrices

Thèmes abordés : Matrice, suite, structure algébrique.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet commence par redémontrer un résultat important du cours de MPSI sur le rang d'une matrice. On y étudie ensuite quelques propriétés de l'application rang.

Ce sujet requiert d'avoir une bonne connaissance du cours sur le rang d'une matrice. Les résultats et les notions de la partie 1 servent dans la partie 2.

17.1 Préliminaires

17.1.1 Un résultat important sur le rang

Définition. *Mineur d'ordre k .*

Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. Soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $k \leq \min\{n, m\}$.

On appelle *mineur d'ordre k* toute matrice B carrée d'ordre k extraite de la matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in [1,n] \\ j \in [1,m]}}$, c'est-à-dire, il existe $I \subset [1, n]$ et $J \subset [1, m]$ tous les deux de cardinal k tels que $B = (a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$.

Soit $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. Soit k un entier tel que $k \leq \min\{n, m\}$.

1. Montrer que s'il existe un mineur d'ordre k inversible, alors $\text{rg}(A) \geq k$.
2. En déduire que $\text{rg}(A) = k$ si, et seulement si, il existe un mineur d'ordre k inversible et si aucun mineur d'ordre $\ell \geq k + 1$ n'est inversible.

17.1.2 Notions de limite supérieure et inférieure

3. Pour toute suite réelle bornée $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on définit les suites $(m(a))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(M(a))_{n \in \mathbf{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad m(a)_n = \inf_{k \geq n} a_k \quad \text{et} \quad M(a)_n = \sup_{k \geq n} a_k.$$

- (a) Montrer que les suites $(m(a))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(M(a))_{n \in \mathbf{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante.

(b) En déduire les suites $(m(a))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(M(a))_{n \in \mathbf{N}}$ convergent.

Définitions. *Limite supérieure et inférieure.*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. On définit :

- la *limite supérieure* (noté $\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$) la limite de la suite $(M(a)_n)_{n \in \mathbf{N}}$;
- la *limite inférieure* (noté $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$) la limite de la suite $(m(a)_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

4. Calculer la limite supérieure et inférieure de la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$.
5. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge si, et seulement si, les limites supérieures et inférieures de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont les mêmes.
6. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite. Soit $\ell \in \mathbf{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{a_n, n \in \mathbf{N}\} \cap [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ est infini si, et seulement si, il existe une suite extraite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers ℓ .

Définition. *Valeur d'adhérence.*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle. Soit $\ell \in \mathbf{R}$. On dit que ℓ est une *valeur d'adhérence* de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ s'il existe une suite extraite de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers ℓ .

7. Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle bornée. Soit $\mathcal{A}(a)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
 - (a) Justifier que $m_a = \inf \mathcal{A}(a)$ et $M_a = \sup \mathcal{A}(a)$ existent.
 - (b) Montrer que m_a et M_a sont des éléments de \mathcal{A}_a .
 - (c) Montrer que

$$m_a = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad \text{et} \quad M_a = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n.$$

17.2 Des applications

8. Soit $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$.
 - (a) Soient \mathbf{K} et \mathbf{L} deux corps tels que \mathbf{L} soit un sur-corps et \mathbf{K} .
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.
On désigne par $\text{rg}_{\mathbf{K}}(A)$ (resp. $\text{rg}_{\mathbf{L}}(A)$) le rang de A dans \mathbf{K} (resp. \mathbf{L}).
Montrer que $\text{rg}_{\mathbf{K}}(A) = \text{rg}_{\mathbf{L}}(A)$.
 - (b) Cette question s'adresse aux lecteurs ayant abordé les corps finis.
Si p est un nombre premier, on note \mathbf{F}_p le corps fini à p éléments. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{Z})$.
 - i. Montrer que $\text{rg}_{\mathbf{F}_p}(A) \leq \text{rg}_{\mathbf{Q}}(A)$.
 - ii. Montrer qu'il existe un nombre premier q tel que

$$\text{rg}_{\mathbf{F}_q}(A) = \text{rg}_{\mathbf{Q}}(A).$$

Définitions. Convergence d'une suite de matrices, application séquentiellement semi-continue supérieurement (resp. inférieurement) sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, avec \mathbf{K} un sous-corps de \mathbf{C} .

Soit $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$. Soit \mathbf{K} un sous-corps de \mathbf{C} .

Soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}} = \left((a_{i,j}(k))_{\substack{i \in [1,n] \\ j \in [1,m]}} \right)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, soit

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i \in [1,n] \\ j \in [1,m]}}.$$

Soit enfin $\varphi : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{R}$ une application. On dit que :

- la suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers la matrice A , et on note $\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A$, si

$$\forall (i, j) \in [1, n] \times [1, m], \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{i,j}(k) = a_{i,j};$$

- φ est séquentiellement semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ si : pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$, pour toute suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ qui converge vers A ,

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \varphi(A_k) \geq \varphi(A) \quad \left(\text{resp.} \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \varphi(A_k) \leq \varphi(A) \right);$$

- φ est séquentiellement continue sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ si φ est séquentiellement semi-continue inférieurement et séquentiellement semi-continue supérieurement sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.

Soit \mathbf{K} un sous-corps de \mathbf{C} et soit $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$.

9. Montrer que \det (l'application déterminant) est séquentiellement continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

10. (a) Montrer que l'application $\text{rg} : \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K}) \rightarrow \mathbf{R}$ est séquentiellement semi-continue inférieurement sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ mais n'est pas séquentiellement continue sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.
- (b) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ de rang r . Soit $r' \in \mathbf{N}$ tel que $\min\{n, m\} \geq r' \geq r$. Montrer qu'il existe une suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ toutes de rang r' telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A.$$

- (c) En déduire que toute matrice carrée sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

Correction du Thème 17

1. Soit $B = (a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ un mineur d'ordre k inversible avec I et J deux sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ de cardinal k .

Soient $C_{j_1}(A), \dots, C_{j_k}(A)$ les colonnes de A dont sont issues celles du mineur.

Soit $(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_k}) \in \mathbf{K}^k$ tel que

$$\alpha_{j_1} C_{j_1}(A) + \dots + \alpha_{j_k} C_{j_k}(A) = 0.$$

En extrayant les lignes numérotées sur I , et en notant $C_{j_1}(B), \dots, C_{j_k}(B)$ les colonnes de B , on obtient

$$\alpha_{j_1} C_{j_1}(B) + \dots + \alpha_{j_k} C_{j_k}(B) = 0.$$

Comme B est inversible, la famille constituée de ses colonnes est libre, donc $\alpha_{j_1} = \dots = \alpha_{j_k} = 0$.

On en déduit que $\dim(\text{Vect}(C_1(A), \dots, C_n(A))) \geq k$, ainsi

$$\boxed{\text{rg}(A) \geq k.}$$

2. On montre les deux implications.

\Rightarrow Comme $\text{rg}(A) = k$, il existe k colonnes, disons $(C_{i_1}, \dots, C_{i_k})$ telles que

$$\text{Vect}(C_1(A), \dots, C_m(A)) = \text{Vect}(C_{i_1}(A), \dots, C_{i_k}(A)).$$

Comme la matrice $\tilde{A} := (C_{i_1}(A) | \dots | C_{i_k}(A))$ est de rang k , il existe k lignes $L_{i_1}(\tilde{A}), \dots, L_{i_k}(\tilde{A})$ de la matrice \tilde{A} telle que

$$\dim(\text{Vect}(L_{i_1}(\tilde{A}), \dots, L_{i_k}(\tilde{A}))) = k.$$

De toute évidence, la matrice $\begin{pmatrix} L_{i_1}(\tilde{A}) \\ \vdots \\ L_{i_k}(\tilde{A}) \end{pmatrix}$ est un mineur de A d'ordre k

car son rang vaut k .

De plus, tous les mineurs d'ordre supérieurs à $k+1$ ne sont pas inversibles car, sinon en utilisant la question 1, le rang de A serait au moins égal à $k+1$.

\Leftarrow D'après la question 1, on a $\text{rg}(A) \geq k$.

Si $\text{rg}(A) \geq k+1$, d'après la première implication prouvée ci-dessus, il existerait un mineur d'ordre $\ell \geq k+1$ inversible, ce qui n'est pas le cas.

$\boxed{\text{L'équivalence est prouvée.}}$

3. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme $\{k \in \mathbf{N}, k \geq n+1\} \subset \{k \in \mathbf{N}, k \geq n\}$, on a

$$\inf_{k \geq n+1} a_k \geq \inf_{k \geq n} a_k \quad \text{et} \quad \sup_{k \geq n+1} a_k \leq \sup_{k \geq n} a_k,$$

ainsi

$$m(a)_{n+1} \geq m(a)_n \quad \text{et} \quad M(a)_{n+1} \leq M(a)_n.$$

On a montré que la suite $(m(a)_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante et la suite $(M(a)_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

(b) Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée, il est clair que les suites $(m(a))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(M(a))_{n \in \mathbf{N}}$ le sont aussi.

Les suites $(m(a))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(M(a))_{n \in \mathbf{N}}$ sont respectivement croissante, majorée et décroissante, minorée : elles convergent.

4. On pose $u = ((-1)^n)_{n \in \mathbf{N}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$m(u)_n = \inf_{k \geq n} (-1)^k = -1 \quad \text{et} \quad M(u)_n = \sup_{k \geq n} (-1)^k = 1.$$

Il s'ensuit que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = -1 \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = 1.$$

5. On montre les deux implications.

\Rightarrow On note ℓ la limite de $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|a_n - \ell| \leq \varepsilon$, soit $\ell - \varepsilon \leq a_n \leq \ell + \varepsilon$.

Il s'ensuit que pour tout $n \geq N$,

$$\ell - \varepsilon \leq \inf_{k \geq n} a_k \leq \ell + \varepsilon \quad \text{et} \quad \ell - \varepsilon \leq \sup_{k \geq n} a_k \leq \ell + \varepsilon.$$

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|m(a)_n - \ell| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |M(a)_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Les suites $(m(a)_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(M(a)_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent vers la même limite.

\Leftarrow Soit ℓ la limite commune aux suites $(m(a)_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(M(a)_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

Par définition, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad m(a)_n \leq a_n \leq M(a)_n.$$

Par encadrement, on en déduit que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers ℓ .

L'équivalence est prouvée.

6. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Pour $\varepsilon = 1$, l'ensemble $\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \cap [\ell - 1, \ell + 1]$ contient une infinité d'éléments : soit $a_{\varphi(0)}$ l'un d'eux.

Soit $m \in \mathbb{N}$. On suppose $a_{\varphi(0)}, \dots, a_{\varphi(m)}$ construits tels que pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, $a_{\varphi(k)} \in \left[\ell - \frac{1}{k+1}, \ell + \frac{1}{k+1} \right]$ et

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(m).$$

Comme l'ensemble $\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \cap \left[\ell - \frac{1}{m+2}, \ell + \frac{1}{m+2} \right]$ contient une infinité d'éléments, en particulier, l'ensemble

$$\{a_n, n \geq \varphi(m) + 1\} \cap \left[\ell - \frac{1}{m+2}, \ell + \frac{1}{m+2} \right]$$

contient une infinité d'éléments. Soit $a_{\varphi(m+1)}$ l'un d'eux.

On a construit par récurrence la suite extraite $(a_{\varphi(m)})_{m \in \mathbb{N}}$.

Comme pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\ell - \frac{1}{m+1} \leq a_{\varphi(m)} \leq \ell + \frac{1}{m+1}$, par encadrement, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_{\varphi(m)} = \ell$.

\Leftarrow Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ , il existe $N \in \mathbb{N}$ telle que pour tout $n \geq N$, $a_{\varphi(n)} \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.

Il s'ensuit que l'ensemble $\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \cap [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ contient une infinité d'éléments.

L'équivalence est prouvée.

7. (a) La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet au moins une valeur d'adhérence, donc $\mathcal{A}(a)$ est non vide. Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, il est clair que $\mathcal{A}(a)$ est bornée, donc $\mathcal{A}(a)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.

On a montré que m_a et M_a existent.

- (b) Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant la propriété de la borne supérieure, il existe $y \in \mathcal{A}(a)$ tel que $M_a - \frac{\varepsilon}{2} \leq y \leq M_a$.

Comme $y \in \mathcal{A}(a)$, l'ensemble $\left[y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2} \right] \cap \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ est infini. De l'inclusion

$$\left[y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2} \right] \cap \{a_n, n \in \mathbb{N}\} \subset [M_a - \varepsilon, M_a + \varepsilon] \cap \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$$

on en déduit que l'ensemble $[M_a - \varepsilon, M_a + \varepsilon] \cap \{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ contient une infinité d'éléments, ainsi d'après la question 6, $M_a \in \mathcal{A}(a)$.

Un raisonnement analogue montre que $m_a \in \mathcal{A}(a)$.

On a montré que m_a et M_a sont des valeurs d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(c) On montre que $m_a = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$. L'égalité $M_a = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ se traite de manière analogue.

On va montrer que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$ est une valeur d'adhérence de la suite

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis que toute valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est supérieure ou égale à $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

- On pose $\ell = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

On va construire par récurrence $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \ell - \frac{1}{n+1} \leq a_{\varphi(n)} \leq \ell + \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} a_k = \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\ell - \frac{1}{2} \leq \inf_{k \geq n} a_k \leq \ell + \frac{1}{2}.$$

Soit $n \geq N$ fixé. Par la propriété de la borne inférieure, il existe $j \geq n$ tel que $\inf_{k \geq n} a_k \leq a_j \leq \inf_{k \geq n} a_k + \frac{1}{2}$. On en déduit que

$$\ell - 1 \leq a_j \leq \ell + 1.$$

On pose $\varphi(0) = j$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose construits $\varphi(0), \dots, \varphi(p)$ avec

$$\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(p).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} a_k = \ell$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$,

$$\ell - \frac{1}{2(p+2)} \leq \inf_{k \geq n} a_k \leq \ell + \frac{1}{2(p+2)}.$$

Soit $N = \max\{N', \varphi(p) + 1\}$. L'inégalité précédente reste en particulier vraie pour $n \geq N$.

Soit $n \geq N$ fixé. Par propriété de la borne inférieure, il existe $j \geq n$ tel que $\inf_{k \geq n} a_k \leq a_j \leq \inf_{k \geq n} a_k + \frac{1}{2(p+2)}$. On en déduit que

$$\ell - \frac{1}{p+2} \leq a_j \leq \ell + \frac{1}{p+2}.$$

On pose $\varphi(p+1) = j$.

φ est construite par récurrence. De la relation

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \ell - \frac{1}{n+1} \leq a_{\varphi(n)} \leq \ell + \frac{1}{n+1},$$

on en déduit que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$ est une valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

- Supposons qu'il existe une valeur d'adhérence ℓ de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\ell < \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Soit $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{\varphi(n)} = \ell$$

et soit $\varepsilon = \frac{1}{3} \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n - \ell \right)$ de sorte que $\ell + \varepsilon < \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$a_{\varphi(n)} \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon].$$

Or, $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ est strictement croissante, donc

$$\forall n \geq \varphi(N), \quad \inf_{k \geq n} a_k \leq \ell + \varepsilon.$$

Par passage à la limite, on en déduit que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \ell + \varepsilon,$$

ce qui est exclu par le choix de ε .

On en déduit que toute valeur d'adhérence de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est supérieure ou égale à $\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

On a montré que $m_a = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$. En procédant de même, on montre que $M_a = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

8. (a) Soit $k = \text{rg}_{\mathbf{K}}(A)$. D'après la question 2, il existe un mineur B d'ordre k inversible dans $\mathcal{G}l_k(\mathbf{K})$ et tous les mineurs d'ordre $\ell \geq k+1$ ne sont pas inversibles dans $\mathcal{M}_\ell(\mathbf{K})$.

Il s'ensuit que $\det(B) \neq 0$ et le déterminant de tous les mineurs d'ordre $\ell \geq k+1$ est nul.

Mais, le calcul d'un déterminant dans \mathbf{K} se fait de la même façon que dans \mathbf{L} grâce à la formule

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)},$$

ainsi une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans \mathbf{K} est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ si, et seulement si, elle est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{L})$.

Il s'ensuit que qu'il existe un mineur d'ordre k inversible dans $\mathcal{G}l_k(\mathbf{L})$ et tous les mineurs d'ordre $\ell \geq k+1$ ne sont pas inversibles dans $\mathcal{M}_\ell(\mathbf{L})$.

On a montré que $\boxed{\text{rg}_{\mathbf{K}}(A) = \text{rg}_{\mathbf{L}}(A)}$.

- (b) i. Comme $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{Z})$, le déterminant d'un mineur de A est un entier relatif car $(\mathbf{Z}, +, \times)$ est un anneau.

Soit $k = \text{rg}_{\mathbf{Q}}(A)$. D'après la question 2, il existe un mineur B d'ordre k inversible dans $\mathcal{M}_k(\mathbf{Q})$ et les mineurs d'ordre $\ell \geq k+1$ ne sont pas inversibles dans $\mathcal{M}_\ell(\mathbf{Q})$.

Ainsi, comme tous les déterminants des mineurs d'ordre $\ell \geq k+1$ sont nuls, il s'ensuit que leurs déterminants dans $\mathcal{M}_\ell(\mathbf{F}_p)$ sont aussi nuls.

D'après la question 2, on a $\text{rg}_{\mathbf{F}_p}(A) \leq k$.

Remarque. On ne peut pas conclure que $\text{rg}_{\mathbf{F}_p}(A) = k$ car B peut ne pas être inversible dans $\mathcal{M}_k(\mathbf{F}_p)$.

- ii. Soit $k = \text{rg}_{\mathbf{Q}}(A)$. Soit B un mineur d'ordre k inversible dans $\mathcal{M}_k(\mathbf{Q})$. Comme $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{Z})$, donc $\det(B) \in \mathbf{Z}^*$.

Comme q un nombre premier ne figurant pas dans la décomposition en produits de facteurs premiers de $\det(B)$.

Il est alors clair que $\det(B)$ est non nul dans \mathbf{F}_q .

Ainsi, d'après la question 2, $\text{rg}_{\mathbf{F}_q}(A) \geq k$.

En utilisant le résultat de la question 8 (b) i, on a montré que $\text{rg}_{\mathbf{F}_q}(A) = k$.

9. Soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui converge vers une matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$. Pour $k \in \mathbf{N}$ et $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $a_{i,j}(k)$ le coefficient de A_k en position (i, j) . On a

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad \det(A_k) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}(k).$$

Or, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, les suites $(a_{i,j}(k))_{k \in \mathbf{N}}$ convergent vers $a_{i,j}$, en faisant tendre k vers $+\infty$, on en déduit que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} \det(A_k) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)}(k) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

D'après la question 5, on en déduit que

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \det(A_k) = \det(A) \quad \text{et} \quad \limsup_{k \rightarrow +\infty} \det(A_k) = \det(A).$$

On a montré que \det est séquentiellement continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

10. (a) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ qui converge vers A . Soit $k = \text{rg}(A)$ et soit $B = (a_{i,j})_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$ un mineur de

A d'ordre k inversible avec I et J deux sous-ensembles de $\llbracket 1, n \rrbracket$ tous les deux de cardinal k .

On note B_k la suite la matrice $(a_{i,j}(k))_{\substack{i \in I \\ j \in J}}$.

- En utilisant la continuité séquentielle de \det établie à la question 9, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \det \left((a_{i,j}(k))_{\substack{i \in I \\ j \in J}} \right) = \det(B).$$

Comme $\det(B) \neq 0$, il s'ensuit qu'il existe $J \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $j \geq J$, $\det(B_j) \neq 0$.

Ainsi, d'après la question 1, pour tout $j \geq J$, $\text{rg}(A_j) \geq k$. Il s'ensuit

$$\forall j \geq J, \quad \inf_{i \geq j} \text{rg}(A_i) \geq k \implies \liminf_{j \rightarrow +\infty} \text{rg}(A_j) \geq k.$$

Ainsi,

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \text{rg}(A_j) \geq \text{rg}(A).$$

Cela prouve que rg est semi-continue inférieurement sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.

- Soit $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ la suite de matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ définies par blocs de la façon suivante : $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k+1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est clair que la suite $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers la matrice nulle.

De toute évidence, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\text{rg}(A_k) = 1$, donc

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \text{rg}(A_k) = 1.$$

Comme $\limsup_{k \rightarrow +\infty} \text{rg}(A_k) > 0$, on en déduit que rg n'est pas séquentiellement semi-continue supérieurement sur $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$.

- (b) Comme $\text{rg}(A) = r$, il existe $(P, Q) \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{K}) \times \mathcal{GL}_m(\mathbf{K})$ tel que

$$A = PJ_rQ \quad \text{avec} \quad J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit la suite de matrices $(A_k)_{k \in \mathbf{N}}$ définie par : pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$A_k = P \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k+1} I_{r'-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q.$$

Il est clair que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\text{rg}(A_k) = r'$.

De plus, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k+1} I_{r'-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On en déduit donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A.$$

On a montré que toute matrice de rang r est limite d'une suite de matrices de rang r' avec $r' \geq r$.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbf{K})$. On note $r = \text{rg}(A) \leq n$.

En appliquant le résultat de la question 10 (b) avec $r' = n \geq r$, on montre que A est limite d'une suite de matrices de rang n , soit d'une suite de matrices inversibles.

Thème 18

Réduction

Thèmes abordés : Polynôme, application linéaire.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet porte sur la notion de polynôme minimal d'une application linéaire et montre le lien qu'il y a entre certaines propriétés du polynôme minimal et la matrice de l'application linéaire dans une bonne base. Ce sujet permet d'anticiper le programme d'algèbre linéaire de classe de MP.

Une bonne connaissance de l'algèbre linéaire est requise pour ce sujet.

Les résultats des parties 1, 2 et 3 servent dans les parties 4 et 5.

18.1 Question préliminaire

Définition. *Idéal.*

Soit $I \subset K[X]$. On dit que I est un idéal de $K[X]$ si :

- i) $(I, +)$ est un sous-groupe de $K[X]$;
- ii) pour tout $P \in I$, pour tout $Q \in K[X]$, $PQ \in I$.

1. Soit I un idéal non nul de $K[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\pi \in I$ unitaire tel que

$$I = \{\pi P, P \in K[X]\} = \pi K[X].$$

18.2 Généralités

Définition. *Polynôme annulateur.*

Soit E un espace vectoriel, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in K[X]$. On dit que P est un polynôme annulateur de u si $P(u) = 0$.

On note $\mathcal{A}(u)$ l'ensemble des polynômes annulateurs de u .

Soient E un espace vectoriel, pas nécessairement de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

2. On suppose dans cette question que u admet un polynôme annulateur non nul.
 - (a) Montrer que $\mathcal{A}(u)$ est un idéal non nul de $K[X]$.

(b) En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire π_u tel que

$$\mathcal{A}(u) = \{\pi_u P, P \in \mathbf{K}[X]\}.$$

π_u s'appelle le **polynôme minimal** de u .

3. Montrer que si E est de dimension finie, alors u admet au moins un polynôme annulateur non nul.
4. Donner un exemple d'un espace vectoriel E de dimension infinie et d'un endomorphisme de E n'ayant pas de polynôme annulateur non nul.
5. Soit $r \in \mathbf{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_{r-1}) \in \mathbf{K}^r$. Soit $P = X^r + \sum_{k=0}^{r-1} a_k X^k$. On suppose que P est un polynôme annulateur de u et qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, u(x), \dots, u^{r-1}(x))$ soit libre. Soit $F = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{r-1}(x))$.
 - (a) Montrer que F est stable par u .
 - (b) Montrer que la matrice de $u|_F$ est dans une certaine base de F de la forme

$$C(a_0, \dots, a_{r-1}) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}.$$

18.3 Lemme de décomposition des noyaux

Lemme. *Lemme de décomposition des noyaux.*

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. Soient P_1 et P_2 deux polynômes premiers entre eux. Alors,

$$\ker((P_1 P_2)(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u)).$$

Nous prouvons le lemme.

6. Justifier qu'il existe $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $UP_1 + VP_2 = 1$.
7. Terminer la preuve.
8. Généraliser le *Lemme de décomposition des noyaux* à n polynômes deux à deux premiers entre eux ($n \geq 2$) P_1, \dots, P_n .

18.4 Diagonalisation

Dans cette partie, E est un espace vectoriel de dimension finie.

Définition. *Endomorphisme diagonalisable.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** sur E s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

9. Montrer que les projecteurs et les symétries sont des endomorphismes diagonalisables de E .
10. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ ayant un polynôme annulateur scindé à racines simples. Montrer que u est diagonalisable sur E .
11. Réciproquement, montrer que tout endomorphisme diagonalisable de E admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
12. En déduire qu'un endomorphisme est diagonalisable sur E si, et seulement si, π_u est scindé à racines simples.
13. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et soit F est sous-espace stable par u . Montrer que $u|_F$ est diagonalisable sur F .

18.5 Trigonalisation

Dans cette partie, E est un espace vectoriel de dimension finie.

Définitions. *Drapeau, drapeau total, drapeau total.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Un *drapeau* de E est une suite finie E_0, \dots, E_r de sous-espaces vectoriels de E strictement croissante pour l'inclusion avec $E_0 = \{0\}$ et $E_r = E$.
- On dit qu'un drapeau de E est *total* si $r = \dim(E)$ et si pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $\dim(E_i) = i$.
- On dit qu'un drapeau est *stable* par u si $u(E_i) \subset E_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Définition. *Endomorphisme trigonalisable.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est *trigonalisable* sur E s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

14. Montrer que u est trigonalisable sur E si, et seulement s'il existe un drapeau total stable par u .
15. Montrer que si u est trigonalisable sur E , alors π_u est scindé.
16. On suppose dans cette question que π_u est scindé : on écrit

$$\pi_u = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$$

avec les λ_k sont deux à deux distincts.

- (a) Montrer que $E = \bigoplus_{k=1}^r \ker((u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k})$.
- (b) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u - \lambda_k \text{id}_E$ laisse stable $\ker((u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k})$, puis que $u - \lambda_k \text{id}_E|_{\ker((u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k})}$ est nilpotent.
- (c) Soit v un endomorphisme nilpotent non nul d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que v est trigonalisable sur E .
Indication : On pourra raisonner par récurrence sur la dimension de l'espace.
- (d) En déduire que u est trigonalisable.

Correction du Thème 18

1. On prouve l'existence puis l'unicité.

- *Existence*

Soit I un idéal non nul de $\mathbf{K}[X]$.

Soit $\mathcal{S} = \{\deg(P), P \in I \setminus \{0\}\}$.

Comme $I \neq 0$, \mathcal{S} est non vide, inclus dans \mathbf{N} : il admet un plus petit élément : p .

Soit P un polynôme de I de degré p et soit π le polynôme unitaire obtenu en divisant par P par son coefficient de plus haut degré. Clairement, $\pi \in I$. Montrons que $I = \pi\mathbf{K}[X]$.

\supseteq Comme $\pi \in I$ et par définition d'un idéal, pour tout $P \in \mathbf{K}[X]$, $\pi P \in I$, donc $I \supset \pi\mathbf{K}[X]$.

\subseteq Soit $P \in I$.

La division euclidienne de P par π assure qu'il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ et $R \in \mathbf{K}[X]$ vérifiant $\deg(R) < \deg(\pi)$ tels que $P = \pi Q + R$.

La relation $R = P - \pi Q$ permet de justifier que $R \in I$.

Si $R \neq 0$, alors $\deg(R) < \deg(\pi)$, ce qui contredit la définition de π , ainsi $R = 0$.

- *Unicité*

Supposons qu'il existe deux polynômes unitaires π_1 et π_2 de I tels que

$$I = \pi_1\mathbf{K}[X] = \pi_2\mathbf{K}[X].$$

Comme $\pi_1 \in I = \pi_2\mathbf{K}[X]$, π_2 divise π_1 . Par symétrie, π_1 divise π_2 .

Comme π_1 et π_2 sont unitaires, on en déduit que $\pi_1 = \pi_2$.

On a montré qu'il existe un unique polynôme unitaire π tel que $I = \pi\mathbf{K}[X]$.

2. (a) Comme u admet un polynôme annulateur non nul, il est clair que $\mathcal{A}(u) \neq \{0\}$.

Soient $(P, Q) \in \mathcal{A}(u)^2$. On a

$$(P - Q)(u) = P(u) - Q(u) = 0.$$

Ainsi $P - Q \in \mathcal{A}(u)$, donc $(\mathcal{A}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{K}[X], +)$.

Soit $P \in \mathcal{A}(u)$ et $Q \in \mathbf{K}[X]$, on a

$$(PQ)(u) = Q(u) \circ P(u) = 0,$$

donc $PQ \in \mathcal{A}(u)$.

On a montré que $\mathcal{A}(u)$ est un idéal non nul de $\mathbf{K}[X]$.

(b) D'après la question 1, il existe un unique polynôme unitaire de degré minimal tel que $\mathcal{A}(u) = \pi_u\mathbf{K}[X]$.

3. Soit $n = \dim(E)$ et soit la famille $\mathcal{F} = (\text{id}_E, u, \dots, u^{n^2})$.

Comme $\dim(\mathcal{L}(E)) = n^2$ et $\text{card}(\mathcal{F}) = n^2 + 1$, la famille \mathcal{F} est liée. Ainsi, il existe $(a_0, a_1, \dots, a_{n^2}) \in \mathbf{R}^{n^2+1}$ non nul tel que $\sum_{i=0}^{n^2} a_i u^i = 0$.

Le polynôme $\sum_{i=0}^{n^2} a_i X^i$ est annulateur de u et non nul.

On a montré que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie admet un polynôme annulateur.

4. Soit $D : \begin{cases} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto P' \end{cases}$.

Il est clair que D est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

Notons que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $D^n : \begin{cases} \mathbf{R}[X] & \longrightarrow \mathbf{R}[X] \\ P & \longmapsto P^{(n)} \end{cases}$.

Supposons que D ait un polynôme annulateur non nul : il existe $P \in \mathbf{K}[X]$ non nul tel que $P(D) = 0$.

En particulier, si $\deg(P) = m$, il existe $(a_0, \dots, a_m) \in \mathbf{K}^{m+1}$ avec $a_m \neq 0$ tel que

$$a_0 \text{id}_{\mathbf{K}[X]} + \dots + a_m D^m \iff D^m = - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{a_m} D^k.$$

Or,

$$D^m(X^m) = m!$$

et

$$\deg \left(\left(- \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{a_m} D^k \right) (X^m) \right) \geq 1,$$

ce qui fournit une contradiction.

On a montré que D n'a pas de polynôme annulateur non nul.

5. (a) Pour montrer que F est stable par u , il suffit de montrer que l'image d'une famille génératrice de F est une famille de F .

Pour tout $i \in \llbracket 0, r-2 \rrbracket$,

$$u(u^i(x)) = u^{i+1}(x) \in F$$

car $i+1 \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$.

Et $u(u^{r-1}(x)) = u^r(x)$.

Comme $P = X^r + \sum_{k=0}^{r-1} a_k X^k$ est un polynôme annulateur de u , on en déduit que

$$u^r(x) = - \sum_{k=0}^{r-1} a_k u^k(x) \in F.$$

On a montré que F est stable par u .

- (b) Par définition la famille $(x, u(x), \dots, u^{r-1}(x))$ est une famille génératrice de F . Comme elle est supposée libre, c'est une base de F .

Pour tout $i \in \llbracket 0, r-2 \rrbracket$, $u(u^i(x)) = u^{i+1}(x)$ et

$$u(u^{r-1}(x)) = -\sum_{k=0}^{r-1} a_k u^k(x),$$

il s'ensuit que la matrice de u dans la base $(x, u(x), \dots, u^{r-1}(x))$ est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}.$$

6. P_1 et P_2 étant premiers entre eux, par le théorème de Bezout, il existe $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $UP_1 + VP_2 = 1$.
7. La relation établie à la question 6 donne

$$U(u) \circ P_1(u) + V(u) \circ P_2(u) = \text{id}_E.$$

- Soit $x \in \ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u))$.
D'après l'égalité établie ci-dessus, on a

$$x = U(u) \circ P_1(u)(x) + V(u) \circ P_2(u)(x).$$

Comme $P_1(u)(x) = P_2(u)(x) = 0$, on en déduit que $x = 0$.
Ainsi, $\ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u)) \subset \{0\}$, puis

$$\ker(P_1(u)) \cap \ker(P_2(u)) = \{0\}.$$

- On montre maintenant que

$$\ker((P_1 P_2)(u)) = \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u)).$$

\square Soit $x \in \ker((P_1 P_2)(u))$. On utilise encore

$$x = U(u) \circ P_1(u)(x) + V(u) \circ P_2(u)(x).$$

On a

$$\begin{aligned} P_2(u)(U(u) \circ P_1(u)(x)) &= (U(u) \circ (P_1 P_2)(u))(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

on en déduit que $U(u) \circ P_1(u)(x) \in \ker(P_2(u))$.

On montre de même que $U(u) \circ P_2(u)(x) \in \ker(P_1(u))$.

Ainsi $\ker((P_1 P_2)(u)) \subset \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u))$.

⊃ Soit $x \in \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u))$.

Il existe $(x_1, x_2) \in \ker(P_1(u)) \times \ker(P_2(u))$ tel que $x = x_1 + x_2$. On a

$$\begin{aligned} (P_1 P_2)(u)(x) &= (P_1 P_2)(u)(x_1) + (P_1 P_2)(u)(x_2) \\ &= P_2(u) \circ P_1(u)(x_1) + P_1(u) \circ P_2(u)(x_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $P_1(u)(x_1) = P_2(u)(x_2) = 0$. Cela prouve que

$$\ker((P_1 P_2)(u)) \supset \ker(P_1(u)) + \ker(P_2(u)).$$

On a montré que $\ker((P_1 P_2)(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u))$.

8. On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « pour tout P_1, \dots, P_n deux à deux premiers entre eux, on a

$$\ker((P_1 \cdots P_n)(u)) = \bigoplus_{i=1}^n \ker(P_i(u)) \text{ »}.$$

Le cas $n = 1$ est immédiat.

Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$.

Soit $(P_1, \dots, P_{n+1}) \in \mathbf{R}[X]^{n+1}$ ($n+1$) polynômes deux à deux premiers entre eux tels que $P_1 \cdots P_{n+1}$ est un polynôme annulateur de u . Comme les polynômes $P_1 \cdots P_n$ et P_{n+1} sont premiers entre eux, d'après la question 7, on a

$$\ker((P_1 \cdots P_n P_{n+1})(u)) = \ker((P_1 \cdots P_n)(u)) \oplus \ker(P_{n+1}(u)).$$

Les polynômes P_1, \dots, P_n sont premiers entre eux deux à deux, l'hypothèse de récurrence assure que

$$\ker((P_1 \cdots P_n)(u)) = \ker(P_1(u)) \oplus \cdots \oplus \ker(P_n(u)).$$

On en déduit finalement

$$\ker((P_1 \cdots P_n P_{n+1})(u)) = \bigoplus_{i=1}^{n+1} \ker(P_i(u)).$$

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

9. • *Les projecteurs*

Soit p un projecteur de E . On sait que

$$\ker(p) \oplus \ker(p - \text{id}_E) = E.$$

Ainsi, si \mathcal{B}_1 est une base de $\ker(p)$ et \mathcal{B}_2 est une base de $\ker(p - \text{id}_E)$, la concaténation de \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 fournit une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de p est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \text{I}_r \end{pmatrix},$$

où l'on note $r = \dim(\ker(p - \text{id}_E))$

On a montré que les projecteurs sont des endomorphismes diagonalisables de E .

• *Les symétries*

Soit s une symétrie de E . On sait que

$$\ker(s - \text{id}_E) \oplus \ker(s + \text{id}_E) = E.$$

Donc, si \mathcal{B}_1 est une base de $\ker(s - \text{id}_E)$ et \mathcal{B}_2 une base de $\ker(s + \text{id}_E)$, la concaténation de \mathcal{B}_1 et \mathcal{B}_2 fournit une base \mathcal{B} de E dans laquelle la matrice de p est

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r & 0 \\ 0 & -\mathbf{I}_s \end{pmatrix},$$

où l'on note $r = \dim(\ker(s - \text{id}_E))$.

On a montré que les symétries sont des endomorphismes diagonalisables de E .

10. Soit $P = \prod_{i=1}^r (X - \alpha_i) \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

Comme les α_i sont deux à deux distincts, les polynômes $X - \alpha_1, \dots, X - \alpha_n$ sont deux à deux premiers entre eux. D'après le *Lemme de décomposition des noyaux*, on a

$$\bigoplus_{i=1}^r \ker(u - \alpha_i \text{id}_E) = \ker(P(u)) = E.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, on pose \mathcal{B}_i une base de $\ker(u - \alpha_i \text{id}_E)$.

On note que, pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $u|_{\ker(u - \alpha_i \text{id}_E)} = \text{id}_{\ker(u - \alpha_i \text{id}_E)}$, ainsi la matrice de $u|_{\ker(u - \alpha_i \text{id}_E)}$ dans la base \mathcal{B}_i est diagonale.

Ainsi, la base \mathcal{B} formée de la concaténation des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ est une base de E .

Comme pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la matrice de $u|_{\ker(u - \alpha_i \text{id}_E)}$ dans la base \mathcal{B}_i est diagonale, il est résulte que la matrice de u dans la base \mathcal{B} est diagonale.

On a montré que tout endomorphisme ayant un polynôme annulateur scindé à racines simples est diagonalisable sur E .

11. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est base de E dans laquelle $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments de la diagonale et soient $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_r}$ les éléments deux à deux distincts de la diagonale. Soit enfin $P = \prod_{k=1}^r (X - \lambda_{i_k})$.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Il existe $\ell \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $u(e_j) = \lambda_{i_\ell} e_j$. Ainsi

$$P(u)(e_j) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq \ell}}^r (u - \lambda_{i_k} \text{id}_E) \circ (u - \lambda_{i_\ell} \text{id}_E)(e_j).$$

Or, $(u - \lambda_{i_\ell} \text{id}_E)(e_j) = 0$, ainsi $P(u)(e_j) = 0$.

Ainsi, $P(u)$ s'annule sur une base de E , ainsi $P(u) = 0$.

On a montré que tout endomorphisme diagonalisable de E admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

12. On montre les deux implications.

\Rightarrow D'après la question 11, u admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples.

Comme π_u divise P , on en déduit que π_u est aussi scindé à racines simples.

\Leftarrow Comme π_u est un polynôme annulateur de u , d'après la question 10, u est diagonalisable sur E .

L'équivalence est montrée.

13. Comme u est diagonalisable, d'après la question 11, u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples : P . Il est clair que P est un polynôme annulateur de $u|_F$.

D'après la question 10, on en déduit que $u|_F$ est diagonalisable sur F .

14. On montre les deux implications.

\Rightarrow Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on pose $E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. On pose aussi $E_0 = \{0\}$. Il est clair que l'on a

$$E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E.$$

Ainsi, la suite E_0, \dots, E_n est un drapeau de E .

De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\dim(E_k) = k$, donc la suite (E_0, \dots, E_n) est un drapeau total.

Enfin, comme la matrice de u dans la base (e_1, \dots, e_n) est triangulaire, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a $u(E_k) \subset E_k$.

On a montré que la suite (E_0, \dots, E_n) est un drapeau total stable par u .

\Leftarrow Soit (E_0, \dots, E_n) un drapeau total stable par u .

Soit $e_1 \in E_1$ non nul. Comme $\dim(E_1) = 1$, (e_1) est une base de E_1 .

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et supposons que l'on ait construit une suite e_1, \dots, e_{k-1} vérifiant

$$\forall j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, \quad e_j \in E_j \setminus E_{j-1}.$$

Comme $\dim(E_k) = k > \dim(E_{k-1})$, il existe $e_k \in E_k \setminus E_{k-1}$.

On note que la famille (e_1, \dots, e_n) est libre.

En effet, soit $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que

$$\sum_{i=1}^n c_i e_i = 0.$$

Supposons $(c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$. Soit ℓ le plus grand indice dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $c_\ell \neq 0$. On a alors

$$e_\ell = - \sum_{i=1}^{\ell-1} \frac{c_i}{c_\ell} e_i \in E_{\ell-1},$$

ce qui est exclu par construction.

La famille (e_1, \dots, e_n) est libre, c'est donc une base de E .

Enfin, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $e_k \in E_k$ et E_k est stable par u , ainsi $u(e_k) \in E_k$. Il s'ensuit que la matrice de u dans la base (e_1, \dots, e_n) est triangulaire.

L'équivalence est prouvée.

15. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E dans laquelle la matrice de u soit triangulaire supérieure :

$$\text{mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Soit aussi, $P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$.

On va montrer par récurrence que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et pour tout $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$,

$$\prod_{i=1}^k (u - \lambda_i \text{id}_E)(x) = 0.$$

Soit $x \in \text{Vect}(e_1)$: il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $x = \lambda e_1$.

On a

$$(u - \lambda_1 \text{id}_E)(x) = \lambda(u(e_1) - \lambda_1 e_1) = 0,$$

car $u(e_1) = \lambda_1 e_1$.

Ainsi, \mathcal{P}_1 est vraie.

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que \mathcal{P}_k soit vraie.

Soit $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$.

- Si $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$, alors d'après l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k+1} (u - \lambda_i \text{id}_E)(x) &= (u - \lambda_{k+1} \text{id}_E) \circ \prod_{i=1}^k (u - \lambda_i \text{id}_E)(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- Si $x \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, il existe $\lambda \in \mathbf{K}^*$ et $y \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ tel que $x = \lambda e_{k+1} + y$. Par linéarité, on a

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{k+1} (u - \lambda_i \text{id}_E)(x) &= \lambda \prod_{i=1}^{k+1} (u - \lambda_i \text{id}_E)(e_{k+1}) \\ &\quad + (u - \lambda_{k+1} \text{id}_E) \circ \prod_{i=1}^k (u - \lambda_i \text{id}_E)(x). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $\prod_{i=1}^k (u - \lambda_i \text{id}_E)(x) = 0$.

Aussi, d'après la matrice de u dans la base (e_1, \dots, e_n) , on a

$$u(e_{k+1}) = \lambda_{k+1}e_{k+1} + w$$

avec $w \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$, donc

$$(u - \lambda_{k+1} \text{id}_E)(e_{k+1}) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k).$$

Par l'hypothèse de récurrence, il s'ensuit que

$$\prod_{i=1}^{k+1} (u - \lambda_i \text{id}_E)(e_{k+1}) = 0,$$

soit

$$\prod_{i=1}^{k+1} (u - \lambda_i \text{id}_E)(x) = 0.$$

On a montré que \mathcal{P}_{k+1} est vraie. Par le principe de raisonnement par récurrence, en particulier, on a

$$\forall x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) = E, \quad P(u)(x) = 0.$$

On a montré que tout endomorphisme trigonalisable d'un espace vectoriel de dimension finie a un polynôme annulateur P scindé, en particulier, le polynôme minimal qui divise P est scindé.

16. (a) Il suffit d'appliquer le *Lemme de décomposition des noyaux* en remarquant que $\ker(\pi_u(u)) = E$.

(b) Soit $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

- Soit $x \in \ker((u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k})$.

On a

$$\begin{aligned} (u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k}((u - \lambda_k \text{id}_E)(x)) &= (u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k+1}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $x \in \ker((u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k})$.

On a montré que $\ker((u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k})$ est stable par $(u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k}$.

- Par définition, on a

$$\ker\left((u - \lambda_k \text{id}_E)_{\left|_{\ker((u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k})}\right.}^{\alpha_k}\right) = (u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k}.$$

Cela prouve que $(u - \lambda_k \text{id}_E)_{\left|_{\ker((u - \lambda_k \text{id}_E)^{\alpha_k})}\right.}^{\alpha_k}$ est nilpotent.

(c) On suit l'indication et on raisonne par récurrence sur la dimension. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose la proposition \mathcal{P}_n : « tout endomorphisme nilpotent non nul dans un espace vectoriel de dimension n est trigonalisable sur cet espace ».

\mathcal{P}_1 est de toute évidence vraie car tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est une homothétie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose \mathcal{P}_n vraie.

Soit v un endomorphisme nilpotent non nul d'un espace vectoriel V de dimension $n + 1$.

Comme v est nilpotent et non nul, on a $1 \leq \dim(\ker(v)) \leq n$, puis en utilisant le théorème du rang, on a

$$1 \leq \dim(\operatorname{im}(v)) \leq n.$$

Donc, il existe un hyperplan H tel que $\operatorname{im}(v) \subset H$, ainsi

$$\forall x \in E, \quad v(x) \in H,$$

en particulier,

$$\forall x \in H, \quad v(x) \in H.$$

Comme $\dim(H) = n$, par l'hypothèse de récurrence, il existe une base \mathcal{B}' de H telle que la matrice de $u|_H$ soit triangulaire.

Soit $e \in V \setminus H$. Il est clair que $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{e\}$ est une base de V dans laquelle la matrice de v est triangulaire supérieure.

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, tout endomorphisme nilpotent non nul d'un espace vectoriel de dimension finie est trigonalisable.

(d) D'après la question 16 (a), on a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^r \ker((u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{\alpha_k}).$$

Or, d'après la question 16 (b), pour tout $k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, la restriction de $(u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{\alpha_k}$ à $\ker((u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{\alpha_k})$ est un endomorphisme nilpotent de $\ker((u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{\alpha_k})$.

D'après la question 16 (c), il existe une base \mathcal{B}_k de $\ker((u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{\alpha_k})$ telle que la matrice de $(u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{\alpha_k}$ soit triangulaire supérieure.

Soit \mathcal{B} la base de E constituée de la concaténation des bases $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$.

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^r \ker((u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{\alpha_k})$, il s'ensuit que la matrice de u dans la base \mathcal{B} est triangulaire supérieure.

On a montré que tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie dont le polynôme minimal est scindé, est trigonalisable.

Quelques remarques culturelles

Ce problème ouvre la porte à la théorie de la réduction des endomorphismes. L'idée est simple : trouver des bases dans lesquelles la matrice d'un endomorphisme est la plus simple possible, par exemple diagonale ou triangulaire.

On donne un des résultats les plus aboutis en ce sens.

Théorème. *Théorème de Jordan.*

Soit E un espace vectoriel de dimension fini sur un corps \mathbf{K} et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que le polynôme minimal soit scindé. Alors, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est de la forme

$$\begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r(\lambda_r) \end{pmatrix}$$

où les matrices $J_i(\lambda_i)$ sont carrées et de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \end{pmatrix}.$$

Thème 19

Nombres complexes et groupe diédral

Thèmes abordés : Nombre complexe, groupe, application linéaire.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet étudie le groupe des isométries laissant stable un polygone régulier à n côtés.

Une bonne connaissance du cours sur les groupes est nécessaire pour aborder ce sujet.

Les résultats des parties 1 et 2 servent dans la partie 3.

19.1 Une étude préliminaire

1. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer que la relation binaire \mathcal{R} définie sur \mathbf{Z} par :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{Z}^2, \quad x \mathcal{R} y \iff x \equiv y \pmod{n}$$

est une relation d'équivalence sur \mathbf{Z} .

2. Soit $a \in \mathbf{Z}$. On note $\text{cl}(a)$ la classe de a modulo \mathcal{R} l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{Z}, a \equiv x \pmod{n}\}.$$

- (a) Montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbf{Z}^2, \quad a \equiv b \pmod{n} \iff \text{cl}(a) = \text{cl}(b).$$

- (b) Montrer que

$$\forall (a, b) \in \mathbf{Z}^2, \quad a \not\equiv b \pmod{n} \iff \text{cl}(a) \cap \text{cl}(b) = \emptyset.$$

3. Montrer que $\mathbf{Z} = \text{cl}(0) \cup \text{cl}(1) \cup \dots \cup \text{cl}(n-1)$.

Définitions. Ensemble quotient, addition, multiplication.

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On définit l'ensemble quotient $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par la relation d'équivalence $(\text{mod } n)$ définie ci-dessus par :

$$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} = \{\text{cl}(0), \text{cl}(1), \dots, \text{cl}(n-1)\}.$$

- On définit une addition $+$ sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par :

$$\forall (a, b) \in \mathbf{Z}^2, \quad \text{cl}(a) + \text{cl}(b) := \text{cl}(a + b).$$

- On définit une multiplication \times sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par :

$$\forall (a, b) \in \mathbf{Z}^2, \quad \text{cl}(a) \times \text{cl}(b) := \text{cl}(a \times b).$$

4. Montrer que l'addition est bien définie, i.e. que le résultat ne dépend pas du choix de représentant de la classe.
5. Montrer que la multiplication est bien définie, i.e. que le résultat ne dépend pas du choix de représentant de la classe.
6. Montrer que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ est un groupe abélien de cardinal n .

Définition. *Groupe cyclique.*

Soit (G, \cdot) un groupe.

On dit que G est *cyclique* si :

$$\exists a \in G, \forall x \in G, \exists n \in \mathbf{Z}, \quad a^n = x.$$

Un tel élément a est appelé un *élément primitif*.

7. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
 - (a) Montrer que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ est cyclique et donner un élément primitif.
 - (b) Caractériser les éléments primitifs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
8. Soit (H, \cdot) un groupe cyclique de cardinal $n \in \mathbf{N}^*$ dont on note e l'élément neutre. Soit h un élément primitif de H .
 - (a) Montrer que

$$h^n = e \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad h^k \neq e.$$
 - (b) Montrer que

$$\{m \in \mathbf{Z}, h^m = e\} = n\mathbf{Z}.$$
 - (c) Montrer que H est isomorphe à $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$.

19.2 Étude d'isométries

Définition. *Isométrie.*

Soit $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ une application. On dit que f est une *isométrie linéaire complexe* si :

- i) $\forall (z, z') \in \mathbf{C}^2, \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(xz + yz') = xf(z) + yf(z')$;
- ii) $\forall z \in \mathbf{C}, \quad |f(z)| = |z|$.

On note $\mathcal{O}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$ l'ensemble des isométries linéaires complexes.

Dans cette partie, on se propose de donner une expression explicite des isométries linéaires complexes. Soit $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$. On note $\alpha = f(1)$ et $\beta = f(i)$.

9. Montrer que f est continue et impaire.
10. (a) Montrer que

$$\forall (x, x') \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + x') = f(x) + f(x').$$

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad f(n) = \alpha n.$$

(c) Montrer que

$$\forall r \in \mathbf{Q}, \quad f(r) = \alpha r.$$

(d) En déduire que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \alpha x.$$

11. En s'inspirant de la question 10, montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(ix) = \beta x.$$

12. En déduire que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + iy) = \alpha x + \beta y.$$

13. (a) Vérifier qu'il existe $(\theta, \theta') \in \mathbf{R}^2$ tel que $\alpha = e^{i\theta}$ et $\beta = e^{i\theta'}$.

(b) Montrer que $\Re(\alpha\bar{\beta}) = 0$.

(c) En déduire qu'il existe $a \in \mathbf{C}$ de module 1 tel que

$$(\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) = az) \quad \text{ou} \quad (\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) = a\bar{z}).$$

19.3 Groupe diédral

Définition. *Groupe diédral.*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On note \mathbf{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

On appelle *groupe diédral d'ordre n* , et on le note \mathcal{D}_n , l'ensemble des isométries complexes qui laissent stable \mathbf{U}_n , i.e.

$$\mathcal{D}_n = \{f \in \mathcal{O}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C}), f(\mathbf{U}_n) \subset \mathbf{U}_n\}.$$

14. Soit $f \in \mathcal{D}_n$. Montrer que $f(\mathbf{U}_n) = \mathbf{U}_n$.

15. Montrer que (\mathcal{D}_n, \circ) est un groupe.

16. Soient les applications $s : z \mapsto \bar{z}$ et $r : z \mapsto e^{2i\pi/n} z$.

(a) Montrer que s et r appartiennent à \mathcal{D}_n .

(b) Montrer que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \forall z \in \mathbf{U}_n, \quad r^k(z) = \underbrace{r \circ \dots \circ r}_{k \text{ termes}}(z) = e^{2ik\pi/n} z.$$

(c) Montrer que r et s vérifient les relations suivantes :

$$s^2 = r^n = \text{id}_{\mathbf{U}_n} \quad \text{et} \quad s \circ r \circ s^{-1} = r^{-1}.$$

(d) Montrer que

$$\mathcal{D}_n = \left\{ r^k \circ s^\varepsilon, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varepsilon \in \{0, 1\} \right\}.$$

(e) En déduire le cardinal de \mathcal{D}_n .

(f) Si $n \geq 3$, existe-t-il un isomorphisme de groupe entre \mathcal{D}_n et $\mathbf{Z}/2n\mathbf{Z}$?

Définition. *Élément d'ordre fini.*

Soit (G, \cdot) un groupe dont on note e l'élément neutre. Soit $x \in G$.

On dit que x est d'ordre fini s'il existe $n \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^n = e$.

17. Soit (G, \cdot) un groupe. Soit $x \in G \setminus \{e\}$ un (éventuel) élément d'ordre fini.
- (a) Montrer qu'il existe $m \in \mathbf{N}^*$ tel que $x^m = e$ et pour tout $k \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$, $x^k \neq e$.
Cet entier s'appelle l'ordre de x .
- (b) Soit $x \in G \setminus \{e\}$ un (éventuel) élément d'ordre m .
- i. Montrer que le sous-groupe de G engendré par x est de cardinal m .
- ii. Montrer que le sous-groupe de G engendré par x est isomorphe à $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.
18. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un sous-groupe de \mathcal{D}_n isomorphe à $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et un autre sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Sur l'ensemble $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, on définit la loi de composition interne \cdot suivante : pour tout $((k, \varepsilon), (\ell, \varepsilon')) \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$,

$$(k, \varepsilon) \cdot (\ell, \varepsilon') = (k + (-1)^\varepsilon \ell, \varepsilon + \varepsilon').$$

19. Montrer que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \cdot)$ est un groupe.
20. Montrer que l'application

$$\psi : \begin{cases} (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \cdot) & \longrightarrow (\mathcal{D}_n, \circ) \\ (k, \varepsilon) & \longmapsto r^k s^\varepsilon \end{cases}$$

est un isomorphisme de groupes.

Remarque. La question 20 montre que (\mathcal{D}_n, \circ) est un produit semi-direct.

Correction du Thème 19

1. Il est facile de vérifier que la relation \equiv est symétrique, réflexive et transitive : c'est une relation d'équivalence sur \mathbf{Z} .

2. (a) On prouve les deux implications.

\Rightarrow Soit $y \in \text{cl}(a)$. On a $y \equiv a \pmod{n}$. Or $a \equiv b \pmod{n}$, puis en utilisant la transitivité, on a $y \equiv b \pmod{n}$.

Ainsi, $y \in \text{cl}(b)$ et $\text{cl}(a) \subset \text{cl}(b)$.

On montre de même que $\text{cl}(b) \subset \text{cl}(a)$, d'où $\text{cl}(a) = \text{cl}(b)$.

\Leftarrow De toute évidence, $a \in \text{cl}(a)$, donc $a \in \text{cl}(b)$.

Il s'ensuit que $a \equiv b \pmod{n}$.

L'équivalence est montrée.

(b) On prouve les deux implications.

\Rightarrow On suppose $\text{cl}(a) \cap \text{cl}(b) \neq \emptyset$.

Il existe $x \in \text{cl}(a) \cap \text{cl}(b)$, ainsi $x \equiv a \pmod{n}$ et $x \equiv b \pmod{n}$, par transitivité, on récupère $a \equiv b \pmod{n}$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse faite.

\Leftarrow On suppose $a \equiv b \pmod{n}$. On a alors $a \in \text{cl}(a)$ et $a \in \text{cl}(b)$, d'où $\text{cl}(a) \cap \text{cl}(b) \neq \emptyset$.

L'équivalence est montrée.

3. On prouve les deux inclusions.

\subset Soit $x \in \mathbf{Z}$.

Il existe $a \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $x \equiv a \pmod{n}$, donc

$$x \in \text{cl}(a) \subset \text{cl}(0) \cup \text{cl}(1) \cup \dots \cup \text{cl}(n-1).$$

\supset Cette inclusion est claire.

On a montré que $\mathbf{Z} = \text{cl}(0) \cup \text{cl}(1) \cup \dots \cup \text{cl}(n-1)$.

4. Soient $a' \in \text{cl}(a)$ et $b' \in \text{cl}(b)$: il existe deux entiers relatifs k et k' tels que

$$a' = a + kn \quad \text{et} \quad b' = b + k'n.$$

Par définition, on a $\text{cl}(a' + b') = \text{cl}(a + b + n(k + k'))$.

Or $a + b + n(k + k') \equiv a + b \pmod{n}$, donc d'après la question 2 (a), on a

$$\text{cl}(a + b + n(k + k')) = \text{cl}(a + b).$$

On a montré que pour tout $a' \in \text{cl}(a)$ et $b' \in \text{cl}(b)$, on a :

$$\text{cl}(a) + \text{cl}(b) = \text{cl}(a') + \text{cl}(b').$$

L'addition est bien définie sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

5. Soient $a' \in \text{cl}(a)$ et $b' \in \text{cl}(b)$: il existe deux entiers relatifs k et k' tels que

$$a' = a + kn \quad \text{et} \quad b' = b + k'n.$$

Par définition, on a $\text{cl}(a' \times b') = \text{cl}(ab + n(bk + ak' + kk'n))$.

Or $ab + n(bk + ak' + kk'n) \equiv ab \pmod{n}$, donc d'après la question 2 (a), on a $\text{cl}(ak' + bk + n(k + k' + kk'n)) = \text{cl}(ab)$.

On a montré que pour tout $a' \in \text{cl}(a)$ et $b' \in \text{cl}(b)$, on a :

$$\text{cl}(a) \times \text{cl}(b) = \text{cl}(a') \times \text{cl}(b').$$

La multiplication est bien définie sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

6. On vérifie les points de la définition.
- L'addition est une opération interne.
 - L'addition est associative.
 - $\text{cl}(0)$ est l'élément neutre pour l'addition.
 - Si $\text{cl}(a) \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, son inverse est $\text{cl}(-a)$.

Ainsi, $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ est un groupe.

7. (a) On montre que $\text{cl}(1)$ est un élément primitif.
Soit $\text{cl}(a) \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $a \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
- Si $a \neq 0$, par définition de l'addition dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, on a

$$\text{cl}(a) = \underbrace{\text{cl}(1) + \cdots + \text{cl}(1)}_{a \text{ fois}}.$$

- Si $a = n$, par définition de l'addition dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, on a

$$\text{cl}(0) = \text{cl}(n) = \underbrace{\text{cl}(1) + \cdots + \text{cl}(1)}_{n \text{ fois}}.$$

On a montré que $\text{cl}(1)$ est un élément primitif, donc $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$ est cyclique.

- (b) Soit $d \in \mathbf{Z}$. Nous allons montrer que $\text{cl}(d)$ est primitif si, et seulement si $n \wedge d = 1$.

On prouve les deux implications.

\Rightarrow Comme $\text{cl}(d)$ est primitif, il existe $\text{cl}(u) \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que

$$\text{cl}(d) \text{cl}(u) = \text{cl}(du) = \text{cl}(1).$$

Ainsi, $du \equiv 1 \pmod{n}$, donc il existe $v \in \mathbf{Z}$ tel que $du = 1 + nv$.
Ainsi, $d \wedge n = 1$.

⊞ Si $n \wedge d = 1$, par le théorème de Bezout, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $nu + dv = 1$.

Ainsi $\text{cl}(nu + dv) = \text{cl}(1)$.

En utilisant les définitions de la multiplication $+$ et \times (questions 4 et 5), on a

$$\text{cl}(1) = \text{cl}(n) \text{cl}(u) + \text{cl}(d) \text{cl}(v).$$

Puis, comme $\text{cl}(n) = \text{cl}(0)$, on obtient $\text{cl}(1) = \text{cl}(d) \text{cl}(v)$.

Soit $\text{cl}(a) \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ avec $a \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

On a montré que pour tout $d \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\text{cl}(d)$ est primitif dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si, et seulement si, $n \wedge d = 1$.

8. (a) Soit l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathbf{Z} & \longrightarrow H \\ m & \longmapsto h^m. \end{cases}$$

Comme \mathbf{Z} est infini et H est fini, ψ n'est pas injective, ainsi il existe deux éléments de \mathbf{Z} distincts m et ℓ avec, par exemple, $m < \ell$ tels que

$$\psi(m) = \psi(\ell) \iff h^m = h^\ell \iff h^{\ell-m} = e.$$

Ainsi, l'ensemble

$$\{m \in \mathbf{N}^*, h^m = e\}$$

n'est pas vide : il contient un plus petit élément n_0 .

Montrons que $n_0 = n$.

Déjà, $n \geq n_0$. En effet, les éléments de l'ensemble

$$\{e, h, \dots, h^{n_0-1}\}$$

sont deux à deux distincts : s'il existait $i \neq j$ deux éléments de $\llbracket 0, n_0-1 \rrbracket$ tels que $h^i = h^j$ avec, par exemple, $i < j$, alors, on aurait $h^{j-i} = e$ avec $1 \leq j-i \leq n_0-1$ et cela contredirait la définition de n_0 .

Pour montrer que $n_0 \geq n$, on remarque que les éléments de l'ensemble $\{e, h, \dots, h^{n-1}\}$ sont deux à deux distincts : s'il existait $i \neq j$ deux éléments $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que $h^i = h^j$ avec, par exemple, $i < j$, alors, on aurait $h^{j-i} = e$ avec $1 \leq j-i \leq n-1$.

On pose $\ell = j-i$ et soit $y \in H \setminus \{e, h, \dots, h^{\ell-1}\}$ (un tel élément existe car H est de cardinal $n > \ell$).

Comme h est primitif, il existe $m \in \mathbf{Z}$ tel que $h^m = y$.

La division euclidienne de m par ℓ assure qu'il existe $q \in \mathbf{Z}$ et $r \in \llbracket 0, \ell-1 \rrbracket$ tel que $m = \ell q + r$. On en déduit que

$$y = h^m = h^{\ell q + r} = (h^\ell)^q h^r = h^r.$$

On en déduit que $y \in \{e, h, \dots, h^{\ell-1}\}$, ce qui est exclu.

Ainsi, les éléments de $\{e, h, \dots, h^{n-1}\}$ sont deux à deux distincts et $n_0 \geq n$, d'où $n = n_0$.

Par définition de n_0 , on a $h^n = e$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $h^k \neq e$.

(b) On prouve les deux inclusions.

\supseteq Cette inclusion est claire car d'après la question 8 (a), on a $h^n = e$.

\subseteq Soit $m \in \mathbf{Z}$ tel que $h^m = e$. La division euclidienne de m par n assure qu'il existe $q \in \mathbf{Z}$ et $r \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $m = nq + r$. Ainsi,

$$e = h^m = h^{nq+r} = (h^n)^q h^r = h^r.$$

Comme $h^k \neq e$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on en déduit que $r = 0$ et $m \in n\mathbf{Z}$.

On a montré que $\{m \in \mathbf{Z}, h^m = e\} = n\mathbf{Z}$.

(c) Soit h un élément primitif de H et soit l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \longrightarrow H \\ \text{cl}(m) & \longmapsto h^m \end{cases}.$$

On commence par montrer que l'application φ est bien définie.

Soit $(m, \ell) \in \mathbf{Z}^2$ tel que $\text{cl}(m) = \text{cl}(\ell)$. Il existe $u \in \mathbf{Z}$ tel que $m = \ell + nu$. Ainsi,

$$\varphi(\text{cl}(m)) = h^m = h^{\ell+nu} = h^\ell (h^n)^u = h^\ell = \varphi(\text{cl}(\ell)).$$

Soit $(\text{cl}(m_1), \text{cl}(m_2)) \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^2$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(\text{cl}(m_1) + \text{cl}(m_2)) &= h^{m_1+m_2} \\ &= h^{m_1} h^{m_2} \\ &= \varphi(\text{cl}(m_1)) \varphi(\text{cl}(m_2)). \end{aligned}$$

φ est un morphisme de groupes.

Comme h est primitif, φ est clairement surjective. Comme H et $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont finis et ont tous les deux n éléments, on en déduit que φ est injective, puis bijective.

On a montré que H et $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sont isomorphes.

9. • *Continuité*

Soit $(z, z') \in \mathbf{C}^2$. Par linéarité, on a

$$|f(z) - f(z')| = |f(z - z')| = |z - z'|.$$

Il s'ensuit que f est 1-lipschitzienne, donc continue.

• *Imparité*

Soit $z \in \mathbf{C}$. On a

$$\begin{aligned} f(-z) &= f(0 \times 0 + (-1) \times z) \\ &= 0 \times f(0) + (-1) f(z) \\ &= -f(z). \end{aligned}$$

On a montré que f est impaire.

10. (a) Comme x et x' sont des réels, ce sont donc à fortiori des complexes, donc :

$$\begin{aligned} f(x+x') &= f(1 \times x + 1 \times x') \\ &= 1 \times f(x) + 1 \times f(x') \\ &= \boxed{f(x) + f(x')} . \end{aligned}$$

(b) On montre d'abord par récurrence que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f(n) = \alpha n.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition

$$\mathcal{P}_n : \ll f(n) = \alpha n \gg.$$

Comme f est impaire, on a $f(0) = 0$, donc \mathcal{P}_0 est vraie.

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un entier naturel n , montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie. D'après la question 10 (a) et en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a :

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = \alpha n + f(1) = \alpha(n+1).$$

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

En utilisant l'imparité de f , on a montré que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{Z}, \quad f(n) = \alpha n.}$$

(c) Une récurrence immédiate à l'aide de la question 10 (a) montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

Soit $q \in \mathbf{N}^*$ et soit $x \in \mathbf{R}$. En utilisant la précédente récurrence, on a

$$f(x) = f\left(q \frac{1}{q} x\right) = q f\left(\frac{1}{q} x\right).$$

On en déduit que

$$\forall q \in \mathbf{N}^*, \forall x \in \mathbf{R}, \quad f\left(\frac{1}{q} x\right) = \frac{1}{q} f(x). \quad (19.1)$$

Soit $r \in \mathbf{Q}$: il existe $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}^*$ tels que $r = \frac{p}{q}$. D'après la ligne (19.1), on a

$$f(r) = \frac{1}{q} f(px),$$

puis en utilisant la question 10 (b), on a

$$\boxed{f(r) = \frac{p}{q} f(1) = \alpha r.}$$

(d) Soit $x \in \mathbf{R}$. Par densité de \mathbf{Q} dans \mathbf{R} , il existe une suite $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de rationnels qui converge vers x .

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = f(x)$ par continuité de f sur \mathbf{R} .

De plus, d'après la question 10 (c), on a : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(r_n) = \alpha r_n$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha r_n = \alpha x$, par unicité de la limite, on a

$$\boxed{f(x) = \alpha x.}$$

11. En suivant les questions 10 (a), 10 (b), 10 (c) et 10 (d), on montre que

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(ix) = \beta x.}$$

12. Pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, on a :

$$\boxed{f(x + iy) = f(x \times 1 + y \times i) = xf(1) + yf(i) = \alpha x + \beta y.}$$

13. (a) Par définition, pour tout $z \in \mathbf{C}$, $|f(z)| = |z|$. Donc

$$|f(1)| = |f(i)| = 1.$$

$\boxed{\text{Il existe deux réels } \theta \text{ et } \theta' \text{ tels que } \alpha = e^{i\theta} \text{ et } \beta = e^{i\theta'}.}$

(b) D'après la question 12 et par définition de f , pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x^2 + y^2 = 1$, on a :

$$|f(x + iy)|^2 = |\alpha x + \beta y|^2 = x^2 + y^2 + 2xy\Re(\alpha\bar{\beta}) = 1.$$

En prenant $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, on a bien $x^2 + y^2 = 1$ de sorte que

$$\boxed{\Re(\alpha\bar{\beta}) = 0.}$$

(c) Comme $\Re(\alpha\bar{\beta}) = 0$ et $|\alpha\bar{\beta}| = 1$, il y a deux possibilités :

- Si $\alpha\bar{\beta} = i$, on a $\beta = -i\alpha$. Par la question 12, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + iy) = \alpha x - i\alpha y,$$

soit

$$\boxed{\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) = \alpha\bar{z}.}$$

- Si $\alpha\bar{\beta} = -i$, on a $\beta = i\alpha$. Par la question 12, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + iy) = \alpha x + i\alpha y,$$

soit

$$\boxed{\forall z \in \mathbf{C}, \quad f(z) = \alpha z.}$$

14. $f|_{\mathbf{U}_n}$ est bien définie car $f(\mathbf{U}_n) \subset \mathbf{U}_n$ et $f|_{\mathbf{U}_n}$ est une application de \mathbf{U}_n vers \mathbf{U}_n injective car f l'est.

Or, toute application injective d'un ensemble fini vers un ensemble fini de même cardinal est surjective, ainsi $\boxed{f(\mathbf{U}_n) = \mathbf{U}_n}$.

15. • \mathcal{D}_n n'est pas vide car $\text{id}_{\mathbf{U}_n} \in \mathcal{D}_n$.
 • Si $(f, g) \in \mathcal{D}_n^2$, alors $f \circ g$ est linéaire et est une isométrie car

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad |g(f(z))| = |f(z)| = |z|.$$

De plus, $f \circ g$ laisse stable \mathcal{D}_n car

$$(f \circ g)(\mathcal{D}_n) = f(g(\mathcal{D}_n)) = f(\mathcal{D}_n) = \mathcal{D}_n.$$

- Il est clair que \circ est associative car la loi \circ l'est sur $\mathcal{A}(\mathbf{C}, \mathbf{C})$ l'ensemble des applications de \mathbf{C} vers \mathbf{C} .
- D'après la caractérisation donnée de $\mathcal{O}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$ donnée à la question 13 (c), il est clair que si $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$, f est bijective et $f^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$. De plus, si $f \in \mathcal{D}_n$, alors

$$f^{-1}(\mathcal{D}_n) = f^{-1}(f(\mathcal{D}_n)) = \mathcal{D}_n.$$

Donc, $f^{-1} \in \mathcal{D}_n$.

$\boxed{\text{On a montré que } (\mathcal{D}_n, \circ) \text{ est un groupe.}}$

16. (a) Il est clair que r et s sont deux éléments de $\mathcal{O}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$ en vertu de la question 13 (c). De plus, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$s(e^{2ik\pi/n}) = e^{-2ik\pi/n} \in \mathbf{U}_n$$

et

$$r(e^{2ik\pi/n}) = e^{2i(k+1)\pi/n} \in \mathbf{U}_n.$$

$\boxed{\text{On a montré que } r \text{ et } s \text{ appartiennent à } \mathcal{D}_n.}$

- (b) On procède par récurrence : pour tout $k \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition \mathcal{P}_k : « pour tout $z \in \mathbf{U}_n$, $r^k(z) = e^{2ik\pi/n} z$ ».

La proposition \mathcal{P}_0 est clairement vraie.

On suppose \mathcal{P}_k vraie pour un entier naturel k , montrons que \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, pour tout $z \in \mathbf{U}_n$, on a :

$$\begin{aligned} r^{k+1}(z) &= r(r^k(z)) \\ &= r(e^{2ik\pi/n} z) \\ &= e^{2i\pi/n} \times e^{2ik\pi/n} z \\ &= e^{2i(k+1)\pi/n} z. \end{aligned}$$

La proposition \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, on a donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbf{N}, \forall z \in \mathbf{U}_n, \quad r^k(z) = e^{2ik\pi/n} z.}$$

(c) Pour tout $z \in \mathbf{U}_n$, on a :

$$s^2(z) = \bar{\bar{z}} = z \quad \text{et} \quad r^n(z) = e^{2in\pi/n} z = z.$$

Ainsi $s^2 = r^n = \text{id}_{\mathbf{U}_n}$. Comme $s^2 = \text{id}_{\mathbf{U}_n}$, on a $s^{-1} = s$, ainsi

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbf{U}_n, \quad (s \circ r \circ s^{-1})(z) &= (s \circ r)(\bar{z}) \\ &= s\left(e^{2i\pi/n} \bar{z}\right) \\ &= \overline{e^{2i\pi/n} z} \\ &= e^{-2i\pi/n} z. \end{aligned}$$

Comme $r^n = \text{id}_{\mathbf{U}_n}$, on a $r^{-1} = r^{n-1}$, ainsi

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbf{U}_n, \quad r^{-1}(z) &= e^{2i(n-1)\pi/n} z \\ &= e^{2in\pi/n} e^{-2i\pi/n} z \\ &= e^{-2i\pi/n} z. \end{aligned}$$

On a montré que $s \circ r \circ s^{-1} = r^{-1}$.

(d) On prouve les deux inclusions.

\supseteq L'inclusion

$$\mathcal{D}_n \supset \left\{ r^k \circ s^\varepsilon, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varepsilon \in \{0, 1\} \right\}$$

est claire.

\subseteq Soit $f \in \mathcal{D}_n$, comme $f \in \mathcal{O}_{\mathbf{R}}(\mathbf{C})$, d'après la question 13 (c), on a, ou bien :

- pour tout $z \in \mathbf{U}_n$, $f(z) = az$ avec $a \in \mathbf{U}$.
Comme $f(1) \in \mathbf{U}_n$, il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $f(1) = e^{2ik\pi/n}$.
On en déduit que $a = e^{2ik\pi/n}$ et donc $f = r^k$.
- pour tout $z \in \mathbf{U}_n$, $f(z) = a\bar{z}$ avec $a \in \mathbf{U}$.
Pour tout $z \in \mathbf{U}_n$, on a $(f \circ s)(z) = f(\bar{z}) = \bar{a}z$.
D'après ce qui précède, il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $f \circ s = r^k$.
Comme $s^{-1} = s$, on en déduit que $f = r^k \circ s$.

On a prouvé que $\mathcal{D}_n \subset \left\{ r^k \circ s^\varepsilon, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varepsilon \in \{0, 1\} \right\}$, donc

$$\mathcal{D}_n = \left\{ r^k \circ s^\varepsilon, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \varepsilon \in \{0, 1\} \right\}.$$

(e) L'égalité précédente permet de conclure que $\text{card}(\mathcal{D}_n) \leq 2n$. Pour montrer que $\text{card}(\mathcal{D}_n) = 2n$, il suffit de montrer que les éléments de l'ensemble $\left\{ r^k \circ s^\varepsilon, (k, \varepsilon) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \times \{0, 1\} \right\}$ sont deux à deux distincts.

Soient $((k_1, \varepsilon_1), (k_2, \varepsilon_2)) \in ([0, n-1] \times \{0, 1\})^2$ tels que

$$r^{k_1} \circ s^{\varepsilon_1} = r^{k_2} \circ s^{\varepsilon_2}.$$

Comme $s^{\varepsilon_1}(1) = s^{\varepsilon_2}(1)$, on en déduit que $r^{k_1}(1) = r^{k_2}(1)$, soit

$$e^{2ik_1/n} = e^{2ik_2/n} \iff e^{2i(k_1-k_2)/n} = 1 \iff n \mid (k_1 - k_2).$$

Comme $k_1 - k_2 \in [-(n-1), n-1]$, on en déduit que $k_1 - k_2 = 0$, soit $k_1 = k_2$.

En composant la relation $r^{k_1} \circ s^{\varepsilon_1} = r^{k_2} \circ s^{\varepsilon_2}$ à gauche par r^{-k_1} , on récupère $s^{\varepsilon_1} = s^{\varepsilon_2}$.

Comme $s \neq \text{id}_{\mathbf{U}_n}$, on a donc $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

On a montré que les éléments de l'ensemble

$$\left\{ r^k \circ s^\varepsilon, k \in [0, n-1], \varepsilon \in \{0, 1\} \right\}$$

sont deux à deux distincts, ainsi on a montré que

$$\boxed{\text{card}(\mathcal{D}_n) = 2n.}$$

- (f) Soit $n \geq 3$. Les groupes \mathcal{D}_n et $\mathbf{Z}/2n\mathbf{Z}$ ont le même cardinal mais il n'existe pas d'isomorphisme de groupes entre \mathcal{D}_n et \mathbf{U}_{2n} .

Pour montrer cela, il suffit de montrer que le groupe \mathcal{D}_n n'est pas abélien lorsque $n \geq 3$, alors que $\mathbf{Z}/2n\mathbf{Z}$ l'est.

On a

$$(r \circ s) \left(e^{2i\pi/n} \right) = r \left(e^{2i\pi/n} \right) = 1$$

et

$$(s \circ r) \left(e^{2i\pi/n} \right) = s \left(e^{4i\pi/n} \right) = e^{-4i\pi/n}.$$

Comme $n \geq 3$, on a $e^{-4i\pi/n} \neq 1$.

Ainsi $s \circ r \neq r \circ s$, donc le groupe \mathcal{D}_n n'est pas abélien.

$\boxed{\text{On a montré que les groupes } \mathcal{D}_n \text{ et } \mathbf{Z}/2n\mathbf{Z} \text{ ne sont pas isomorphes.}}$

17. (a) Soit $\mathcal{A} = \{k \in \mathbf{N}^*, x^k = e\}$.

Comme x est supposé d'ordre fini, \mathcal{A} est non vide.

$\mathcal{A} \subset \mathbf{N}^*$, non vide : il admet un plus petit élément que l'on note m .

Comme $m \in \mathcal{A}$ et par définition de m , on a :

$$\boxed{x^m = e \quad \text{et} \quad \forall k \in [1, m], \quad x^k \neq e.}$$

- (b) i. Par définition, le sous-groupe engendré par x , noté $\langle x \rangle$, est

$$\{x^n, n \in \mathbf{Z}\}.$$

On va d'abord montrer que $\langle x \rangle = \{e, x, \dots, x^{m-1}\}$.

Soit $k \in \mathbf{Z}$. On écrit la division euclidienne de k par m : il existe $q \in \mathbf{Z}$ et $r \in [0, m-1]$ tel que $k = mq + r$.

On a donc $x^k = x^{mq+r} = (x^m)^q x^r = x^r$ car $x^m = e$. On peut donc conclure $\langle x \rangle \subset \{e, x, \dots, x^{m-1}\}$.

L'inclusion réciproque étant claire, on a montré que

$$\langle x \rangle = \{e, x, \dots, x^{m-1}\}.$$

Pour conclure que $\text{card}(\langle x \rangle) = m$, il reste à montrer que les éléments de l'ensemble $\{e, x, \dots, x^{m-1}\}$ sont deux à deux distincts.

S'il existait k_1 et k_2 deux entiers distincts de $\llbracket 0, m-1 \rrbracket$ tels que

$$x^{k_1} = x^{k_2},$$

alors, en supposant $k_1 > k_2$, on aurait $x^{k_1-k_2} = e$ avec $k_1 - k_2 < m$. Ainsi, $k_1 - k_2$ serait un entier non nul tel que $x^{k_1-k_2} = e$ strictement plus petit que l'ordre de x , ce qui est exclu par définition de l'ordre de x .

On en déduit que les éléments de $\{e, x, \dots, x^{m-1}\}$ sont deux à deux distincts.

On a montré que $\text{card}(\langle x \rangle) = m$.

ii. $(\langle x \rangle, \cdot)$ est cyclique car x est primitif et $\text{card}(\langle x \rangle) = m$.

D'après la question 8 (c), on en déduit que $(\langle x \rangle, \cdot)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, +)$.

18. D'après la question 16 (c), on a $s^2 = r^n = \text{id}_{\mathbf{U}_n}$.

De plus, il est clair que $s \neq \text{id}_{\mathbf{U}_n}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $r^k \neq \text{id}_{\mathbf{U}_n}$.

Ainsi s et r sont respectivement d'ordre 2 et n dans \mathcal{D}_n .

D'après la question 17 (b) ii, les sous-groupes, $\langle s \rangle$ et $\langle r \rangle$ de \mathcal{D}_n sont respectivement isomorphes à $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

19. Il est clair que $(0, 0)$ est l'élément neutre de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ pour la loi \cdot .

Remarque. On a noté de la même façon l'élément neutre de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et celui de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ alors que ce ne sont pas les mêmes.

Nous garderons cette notation abusive pour faciliter la lecture.

Soit $((k, \varepsilon_1), (\ell, \varepsilon_2), (m, \varepsilon_3)) \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^3$. D'une part, on a

$$\begin{aligned} ((k, \varepsilon_1) \cdot (\ell, \varepsilon_2)) \cdot (m, \varepsilon_3) &= (k + (-1)^{\varepsilon_1} \ell, \varepsilon_1 + \varepsilon_2) \cdot (m, \varepsilon_3) \\ &= \left(k + (-1)^{\varepsilon_1} \ell + (-1)^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} m, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \right). \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} (k, \varepsilon_1) \cdot ((\ell, \varepsilon_2) \cdot (m, \varepsilon_3)) &= (k, \varepsilon_1) \cdot (\ell + (-1)^{\varepsilon_2} m, \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ &= \left(k + (-1)^{\varepsilon_1} \ell + (-1)^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} m, \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \right). \end{aligned}$$

On a montré que \cdot est associative.

Soit $(k, \varepsilon) \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

- Si $\varepsilon = 0$, alors

$$(k, \varepsilon) \cdot (n - k, \varepsilon) = \left(k + (-1)^0 (n - k), 0 + 0 \right) = (0, 0).$$

Ainsi, (k, ε) est inversible pour la loi \cdot .

- Si $\varepsilon = 1$, alors

$$(k, \varepsilon) \cdot (k, \varepsilon) = \left(k + (-1)^1 k, 1 + 1 \right) = (0, 0).$$

Ainsi, (k, ε) est inversible pour la loi \cdot .

Ainsi, tout élément de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ admet un inverse pour la loi \cdot .

On a montré que $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \cdot)$ est un groupe.

20. Soit $((k, \varepsilon), (\ell, \varepsilon')) \in (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^2$. D'une part,

$$\begin{aligned} \psi((k, \varepsilon) \cdot (\ell, \varepsilon')) &= \psi((k + (-1)^\varepsilon \ell, \varepsilon + \varepsilon')) \\ &= r^{k + (-1)^\varepsilon \ell} s^{\varepsilon + \varepsilon'} \\ &= \begin{cases} r^{k + \ell} s^{\varepsilon'} & \text{si } \varepsilon = 0 \\ r^{k - \ell} s^{\varepsilon' + 1} & \text{si } \varepsilon = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\psi(k, \varepsilon) \circ \psi(\ell, \varepsilon') = r^k \circ s^\varepsilon \circ r^\ell \circ s^{\varepsilon'}.$$

- Si $\varepsilon = 0$, alors $s^0 = \text{id}_{\mathcal{D}_n}$, donc

$$\psi(k, \varepsilon) \circ \psi(\ell, \varepsilon') = r^{k + \ell} \circ s^{\varepsilon'} = \psi((k, \varepsilon) \cdot (\ell, \varepsilon')).$$

- Si $\varepsilon = 1$, on a

$$\psi(k, \varepsilon) \circ \psi(\ell, \varepsilon') = r^k \circ s \circ r^\ell \circ s^{\varepsilon'}.$$

La relation $s \circ r \circ s^{-1} = r^{-1}$ est équivalente à $s \circ r = r^{-1} \circ s$, puis une récurrence immédiate montre que pour tout $m \in \mathbf{N}$, $s \circ r^m = r^{-m} \circ s$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \psi(k, \varepsilon) \circ \psi(\ell, \varepsilon') &= r^k \circ r^{-\ell} \circ s \circ s^{\varepsilon'} \\ &= r^{k - \ell} \circ s^{\varepsilon' + 1} \\ &= \psi((k, \varepsilon) \cdot (\ell, \varepsilon')). \end{aligned}$$

On a montré que ψ est un morphisme de groupes.

D'après la question 16 (d), ψ est surjectif.

Comme \mathcal{D}_n et $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sont finis et ont tous les deux $2n$ éléments, on en déduit que ψ est bijectif : c'est un isomorphisme entre les groupes (\mathcal{D}_n, \circ) et $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \cdot)$.

On a montré que les groupes (\mathcal{D}_n, \circ) et $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, \cdot)$ sont isomorphes.

Thème 20

Groupes et algèbre linéaire

Thèmes abordés : Groupe, application linéaire, matrice, groupe, déterminant.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet étudie de façon plus approfondie les groupes classiques : le groupe linéaire, le groupe spécial linéaire et le groupe orthogonal. Plus précisément, on y étudie des générateurs de ces groupes.

Une bonne connaissance de l'algèbre linéaire est requise pour ce sujet.

Les deux parties de ce sujet sont indépendantes.

Dans tout le problème, les espaces vectoriels sont des \mathbf{K} -espaces vectoriels avec \mathbf{K} un corps.

20.1 Générateurs du groupe linéaire

Dans cette partie, nous nous intéressons à deux familles d'applications linéaires : les dilatations et les transvections.

20.1.1 Les dilatations

Nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbf{N}^*$ et H un hyperplan de E . Soit $u \in \mathcal{G}\ell(E)$ tel que $u|_H = \text{id}_H$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- i) $\det(u) \neq 1$;
- ii) on a $\text{im}(u - \text{id}_E) \not\subset H$;
- iii) dans une base adaptée, la matrice de u est $\text{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$ avec $\lambda \neq 1$.

On prouve la proposition.

1. Montrer que i) implique ii).
2. Montrer que ii) implique iii).
3. Conclure la preuve de la proposition.

Définitions. *Dilatation, matrice de dilatation.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

- On dit que u est une **dilatation** s'il existe un hyperplan H de E tel que $u|_H = \text{id}_H$ et $\det(u) \neq 1$.
- On dit que U est une **matrice de dilatation** s'il existe une dilatation $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que U soit la matrice de u dans une base de E .

20.1.2 Les transvections

Nous commençons par prouver la proposition suivante.

Proposition. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et H un hyperplan de E . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u|_H = \text{id}_H$ et $u \neq \text{id}_E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\det(u) = 1$;
- on a $\text{im}(u - \text{id}_E) \subset H$;
- il existe $a \in H \setminus \{0\}$ et $f \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ tels que

$$\forall x \in E, \quad u(x) = x + f(x)a ;$$

- dans une base adaptée, la matrice de u est $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Nous prouvons la proposition.

- Montrer que i) implique ii).
- Montrer que ii) implique iii).
- Montrer que iii) implique iv).
- Montrer que iv) implique i).
- Montrer que toute matrice de la forme $\mathbf{I}_n + \lambda E_{i,j}$ avec $\lambda \in \mathbf{K}^*$ et $i \neq j$ est

semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définitions. *Transvection, matrice de transvection.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

- On dit que u est une **transvection** si $u \neq \text{id}_E$ et s'il existe un hyperplan H de E tel que $u|_H = \text{id}_H$ et $\det(u) = 1$.
- On dit que U est une **matrice de transvection** s'il existe une transvection $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que U soit la matrice de u dans une base de E .

20.1.3 Générateurs

Dans ce paragraphe, nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition. *Générateurs de $\mathcal{S}\ell(E)$ et $\mathcal{G}\ell(E)$.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

- $\mathcal{S}\ell(E)$ est engendré par les transvection : tout endomorphisme de E de déterminant 1 s'écrit comme la composée de transvections.
- $\mathcal{G}\ell(E)$ est engendré par les transvection : tout automorphisme de E s'écrit comme la composée de transvections et d'au plus d'une dilatation.

Avant de prouver la proposition, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme. *Permutation des lignes/colonnes d'une matrice.*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ($n \in \mathbf{N}^$) et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. Pour :*

- i) faire l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$) sur la matrice A , on multiplie la matrice A par $\mathbf{I}_n + \lambda E_{i,j}$ à gauche (resp. à droite) ;
- ii) faire l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \lambda C_i$) sur la matrice A , on multiplie la matrice A par $\mathbf{I}_n + (\lambda - 1) E_{i,i}$ à gauche (resp. à droite) ;
- iii) faire l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$) sur la matrice A , on multiplie la matrice A par $\mathbf{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}$ à gauche (resp. à droite).

9. Pour tout $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, montrer que $E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$ où

$$\delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k \end{cases} \quad (\text{symbole de Kronecker}).$$

10. Montrer i).

11. Montrer ii).

12. Montrer iii).

Nous commençons par prouver le premier point de la proposition. Nous allons montrer le résultat par récurrence.

13. Montrer le résultat lorsque $n = 1$.

14. Soit $n \geq 2$ un entier. On suppose que le résultat vrai en toute dimension inférieure ou égale à $n - 1$. Soit $u \in \mathcal{S}\ell(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension n . Soit $U = (u_{i,j})_{\substack{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket}}$ la matrice de u dans une base de E .

- (a) Montrer que la première ligne contient au moins un coefficient non nul.
- (b) Montrer que, en faisant des opérations sur les lignes, l'on peut se ramener à une matrice $\tilde{U} = (\tilde{u}_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ telle que $\tilde{u}_{1,1} = 1$ et pour tout $(i, j) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$, $\tilde{u}_{i,1} = \tilde{u}_{1,j} = 0$.
- (c) En déduire que toute matrice de déterminant 1 peut être ramenée à \mathbf{I}_n par une suite finie d'opérations sur les lignes et/ou les colonnes. Terminer la récurrence.

15. Montrer le second point de la proposition.

20.2 Générateurs du groupe orthogonal

20.2.1 Généralités

Soit E un espace vectoriel euclidien dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$.

16. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u . Montrer que F^\perp est stable par u .

20.2.2 Les réflexions

Nous allons tout d'abord établir la proposition suivante.

Proposition. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i) u est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan ;
- ii) il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

17. Montrer que les conditions i) et ii) sont équivalentes.

Définitions. Réflexion, matrice de réflexion.

Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et soit $U \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$.

- On dit que u est une réflexion si u est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.
- On dit que U est une matrice de réflexion s'il existe une réflexion $u \in \mathcal{O}(E)$ telle que U soit la matrice de u dans une base orthonormée de E .

Nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition. Générateurs de $\mathcal{O}(E)$.

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n . Tout élément de $\mathcal{O}(E)$ s'écrit comme la composée d'au plus n réflexions.

20.2.3 Générateurs

Nous prouvons la proposition.

18. On suppose dans cette question que $n = 2$.
- (a) Montrer que toute rotation s'écrit comme la composée de deux réflexions.
 - (b) Terminer l'initialisation.

On suppose le résultat vrai en dimension $n - 1$. Montrons que la proposition est vraie en dimension n . Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n et soit $u \in \mathcal{O}(E)$.

19. Que dire lorsque $u = \text{id}_E$?

On suppose maintenant $u \neq \text{id}_E$. Soit $x \in E$ tel que $u(x) \neq x$. Soit v la réflexion par rapport à $(u(x) - x)^\perp$.

20. Montrer que $(v \circ u)(x) = x$.

Indication : On pourra remarquer que $\langle u(x) - x, u(x) + x \rangle = 0$.

21. Terminer la preuve.

Correction du Thème 20

1. Soit $\lambda = \det(u)$.

H est un hyperplan de E , donc $\dim(H) = n - 1$.

Soit (e_1, \dots, e_{n-1}) une base de H . Soit $e_n \in E \setminus H$. La famille (e_1, \dots, e_n) est une base de E .

Ainsi, il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $u(e_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$.

Comme $u|_H = \text{id}_H$ et $\det(u) \neq 1$, on en déduit que $\alpha_n \neq 1$.

Ainsi, $(u - \text{id}_E)(e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i + (\alpha_n - 1)e_n \notin H$ car $\alpha_n - 1 \neq 0$.

On a montré que $\text{im}(u - \text{id}_E) \not\subset H$.

2. Soit (e_1, \dots, e_{n-1}) une base de H (H est un hyperplan de E) et soit

$$e_n \in \text{im}(u - \text{id}_E) \quad \text{et} \quad e_n \notin H.$$

Comme $(u - \text{id}_E)(e_n) \in \text{im}(u - \text{id}_E) = \text{Vect}(e_n)$ (car $u|_H = \text{id}_H$), il existe $\alpha \in \mathbf{K}$ tel que

$$(u - \text{id}_E)(e_n) = u(e_n) - e_n = \alpha e_n.$$

Comme $e_n \notin H$, $u(e_n) - e_n \neq 0$, ainsi $\alpha \neq 0$ et $1 + \alpha \neq 1$.

La matrice de u dans la base de E $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ est $\text{diag}(1, \dots, 1, 1 + \alpha)$ avec $1 + \alpha \neq 1$.

3. De toute évidence, si la matrice de u dans une base de E est $\text{diag}(1, \dots, 1, \lambda)$ avec $\lambda \neq 1$, alors $\det(u) \neq 1$.
4. Soit (e_1, \dots, e_{n-1}) une base de H et soit $e_n \notin H$ de sorte que $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ soit une base de E .

Il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $u(e_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$.

Comme la matrice dans la base (e_1, \dots, e_n) est triangulaire, en utilisant $\det(u) = 1$, on en déduit que $\alpha_n = 1$.

Il s'ensuit que pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $(u - \text{id}_E)(e_i) = 0 \in H$ et

$$(u - \text{id}_E)(e_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - 1)e_i \in H.$$

On a montré que $\text{im}(u - \text{id}_E) \subset H$.

5. Soit $a \in E \setminus H$ et soit (e_1, \dots, e_{n-1}) une base de H que l'on complète en une base de E : (e_1, \dots, e_n) .
- Pour définir une telle application f , il suffit de la définir sur la base (e_1, \dots, e_n) . Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $u(e_i) = e_i$, on pose $f(e_i) = 0$.
- De plus, $u(e_n) = e_n + 1 \times (u(e_n) - e_n)$, on pose $f(e_n) = 1$ et $a = u(e_n) - e_n$. Comme $e_n \notin H$, on a $u(e_n) - e_n \neq 0$ et comme $\text{im}(u - \text{id}_E) \subset H$, on a $e_n \in H$.

On a montré qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ et $a \in H \setminus \{0\}$ tels que pour tout $x \in E$, $u(x) = x + f(x)a$.

6. Comme $a \in H \setminus \{0\}$, on peut compléter la famille libre (a) en une base (e_1, \dots, e_{n-2}, a) de H , que l'on note (e_1, \dots, e_{n-1}) .
Comme f est une forme linéaire non nulle (car sinon $u = \text{id}_E$), il existe $e_n \in E$ tel que $f(e_n) = 1$.
Comme $H = \ker(f)$ et comme $f(e_n) = 1$, e_n n'est pas combinaison linéaire de (e_1, \dots, e_{n-1}) , ainsi la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ est une base de E .
Pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $u(e_i) = e_i$ et

$$u(e_n) = e_n + f(e_n)a = e_{n-1} + e_n.$$

On a montré que la matrice de u dans la base (e_n, \dots, e_1) est

$$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Comme la matrice $\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est triangulaire, on a $\det(u) = 1$.
8. Soit $u_{i,j}$ l'endomorphisme de \mathbf{K}^n canoniquement associé à la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$.
Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbf{K}^n .
Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}$, on a $u(e_k) = e_k$ et $u(e_j) = e_j + \lambda e_i \neq e_j$.
Si H est l'hyperplan $\text{Vect}\left(\left(e_k\right)_{\substack{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ k \neq j}}\right)$, on a $u|_H = \text{id}_H$ et $u \neq \text{id}_E$ car $u(e_j) \neq e_j$.
De plus, la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$ est triangulaire avec des 1 sur la diagonale car $i \neq j$, donc $\det(I_n + \lambda E_{i,j}) = \det(u) = 1$.
D'après la proposition précédente, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Soit $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$.
On pose $E_{i,j} = (\alpha_{s,t})_{(s,t) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et $E_{k,\ell} = (\beta_{s,t})_{(s,t) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$.
Pour tout $(u, v) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a

$$(E_{i,j}E_{k,\ell})_{u,v} = \sum_{r=1}^n \alpha_{u,r} \beta_{r,v}.$$

Deux cas se présentent :

- Si $j = k$.
Pour tout $u \neq i$, $(E_{i,j}E_{k,\ell})_{u,v} = 0$ car pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_{u,r} = 0$.
Si $u = i$ et pour tout $v \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{\ell\}$, $(E_{i,j}E_{k,\ell})_{u,v} = 0$ car pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\beta_{r,v} = 0$.

Enfin, si $u = i$ et $v = \ell$, alors $(E_{i,j}E_{k,\ell})_{u,v} = \alpha_{i,j}\beta_{j,\ell} = 1$.

On a montré que $E_{i,j}E_{k,\ell} = E_{i,\ell}$.

- Si $i \neq j$.

Comme ci-dessus, on montre que pour tout $(u, v) \in \llbracket i, n \rrbracket^2$,

$$(E_{i,j}E_{k,\ell})_{u,v} = 0.$$

De plus, on a $(E_{i,j}E_{k,\ell})_{i,\ell} = 0$ car $j \neq k$.

On a montré que $E_{i,j}E_{k,\ell} = 0$.

Dans tous les cas, on a montré que $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.

10. On traite séparément les deux opérations.

On note $(a_{s,t})_{(s,t) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ la matrice A . Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.

- *Opération sur les lignes*

D'après le résultat de la question 9, on a

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}_n + \lambda E_{i,j}) A &= A + \lambda E_{i,j} \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} E_{s,t} \\ &= A + \lambda \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} E_{i,j} E_{s,t} \\ &= A + \lambda \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} \delta_{j,s} E_{i,t}. \end{aligned}$$

Par définition de $\delta_{j,s}$ la double somme précédente se simplifie en

$$\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} \delta_{j,s} E_{i,t} = \sum_{t=1}^n a_{j,t} E_{i,t},$$

ainsi

$$(\mathbf{I}_n + \lambda E_{i,j}) A = A + \lambda \sum_{t=1}^n a_{j,t} E_{i,t}.$$

Or, toutes les lignes de la matrice $\sum_{t=1}^n a_{j,t} E_{i,t}$ sont nulles sauf la ligne i qui contient la ligne j de la matrice A . Il s'ensuit que toutes les lignes de la matrice $(\mathbf{I}_n + \lambda E_{i,j}) A$ sont les mêmes que celles de A , sauf la ligne i qui contient $L_i + \lambda L_j$.

La multiplication à gauche par $\mathbf{I}_n + \lambda E_{i,j}$ revient à faire l'opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

- *Opération sur les colonnes*

D'après le résultat de la question 9, on a

$$\begin{aligned} A(I_n + \lambda E_{i,j}) &= A + \lambda \left(\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} E_{s,t} \right) E_{i,j} \\ &= A + \lambda \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} E_{s,t} E_{i,j} \\ &= A + \lambda \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} \delta_{t,i} E_{s,j}. \end{aligned}$$

Par définition de $\delta_{t,i}$ la double somme précédente se simplifie en

$$\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} \delta_{t,i} E_{s,j} = \sum_{s=1}^n a_{s,i} E_{s,j},$$

ainsi

$$A(I_n + \lambda E_{i,j}) = A + \lambda \sum_{s=1}^n a_{s,i} E_{s,j}.$$

Or, toutes les colonnes de la matrice $\sum_{s=1}^n a_{s,i} E_{s,j}$ sont nulles sauf la colonne j qui contient la colonne i de la matrice A . Il s'ensuit que toutes les colonnes de la matrice $(I_n + \lambda E_{i,j}) A$ sont les mêmes que celles de A , sauf la colonne j qui contient $C_j + \lambda C_i$.

La multiplication à droite par $I_n + \lambda E_{i,j}$ revient à faire l'opération $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.

Le point i) de la proposition est prouvé.

11. On traite séparément les deux opérations.

On note $(a_{s,t})_{(s,t) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ la matrice A . Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$.

- *Opération sur les lignes*

D'après le résultat de la question 9, on a

$$\begin{aligned} (I_n + (\lambda - 1) E_{i,i}) A &= A + (\lambda - 1) E_{i,i} \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} E_{s,t} \\ &= A + (\lambda - 1) \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} E_{i,i} E_{s,t} \\ &= A + (\lambda - 1) \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} \delta_{i,s} E_{i,t}. \end{aligned}$$

Par définition de $\delta_{i,s}$ la double somme précédente se simplifie en

$$\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} \delta_{i,s} E_{i,t} = \sum_{t=1}^n a_{i,t} E_{i,t},$$

ainsi

$$(\mathbf{I}_n + (\lambda - 1) E_{i,i}) A = A + (\lambda - 1) \sum_{t=1}^n a_{i,t} E_{i,t}.$$

Or, toutes les lignes de la matrice $(\lambda - 1) \sum_{t=1}^n a_{i,t} E_{i,t}$ sont nulles sauf la ligne i qui contient $(\lambda - 1) L_i(A)$ où $L_i(A)$ est la ligne i de la matrice A . Ainsi, toutes les lignes de la matrice $(\mathbf{I}_n + (\lambda - 1) E_{i,i}) A$ sont les mêmes que celles de A , sauf la ligne i qui contient $L_i(A) + (\lambda - 1) L_i(A) = \lambda L_i(A)$.

La multiplication à gauche par $(\mathbf{I}_n + (\lambda - 1) E_{i,i})$ revient à faire l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

• *Opération sur les colonnes*

D'après le résultat de la question 9, on a

$$\begin{aligned} A(\mathbf{I}_n + (\lambda - 1) E_{i,i}) &= A + (\lambda - 1) \left(\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} E_{s,t} \right) E_{i,i} \\ &= A + (\lambda - 1) \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} E_{s,t} E_{i,i} \\ &= A + (\lambda - 1) \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} \delta_{t,i} E_{s,i}. \end{aligned}$$

Par définition de $\delta_{t,i}$ la double somme précédente se simplifie en

$$\sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} \delta_{t,i} E_{s,i} = \sum_{s=1}^n a_{s,i} E_{s,i},$$

ainsi

$$A(\mathbf{I}_n + (\lambda - 1) E_{i,i}) = A + (\lambda - 1) \sum_{s=1}^n a_{s,i} E_{s,i}.$$

Or, toutes les colonnes de la matrice $(\lambda - 1) \sum_{s=1}^n a_{s,i} E_{s,i}$ sont nulles sauf la colonne i qui contient $(\lambda - 1) C_i(A)$ où $C_i(A)$ est la colonne i de la matrice A . Il s'ensuit que toutes les colonnes de la matrice $A(\mathbf{I}_n + (\lambda - 1) E_{i,i})$ sont les mêmes que celles de A , sauf la colonne i qui contient

$$C_i(A) + (\lambda - 1) C_i(A) = \lambda C_i(A).$$

La multiplication à droite par $(\mathbf{I}_n + (\lambda - 1) E_{i,i})$ revient à faire l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$.

Le point ii) de la proposition est prouvé.

12. On traite séparément les deux opérations.

On note $(a_{s,t})_{(s,t) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ la matrice A . Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $i \neq j$.

• *Opérations sur les lignes*

D'après le résultat de la question 9, on a

$$\begin{aligned} & (\mathbf{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}) A \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} (E_{s,t} - E_{i,i} E_{s,t} - E_{j,j} E_{s,t} + E_{i,j} E_{s,t} + E_{j,i} E_{s,t}) \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} (E_{s,t} - \delta_{i,s} E_{i,t} - \delta_{j,s} E_{j,t} + \delta_{j,s} E_{i,t} + \delta_{i,s} E_{j,t}). \end{aligned}$$

On remarque si $s \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}$, alors, pour tout $t \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$a_{s,t} (E_{s,t} - \delta_{i,s} E_{i,t} - \delta_{j,s} E_{j,t} + \delta_{j,s} E_{i,t} + \delta_{i,s} E_{j,t}) = a_{s,t} E_{s,t}.$$

Si $s = i$, alors

$$a_{i,t} (E_{i,t} - \delta_{i,i} E_{i,t} - \delta_{j,i} E_{j,t} + \delta_{j,i} E_{i,t} + \delta_{i,i} E_{j,t}) = a_{i,t} E_{j,t}$$

et si $s = j$, alors

$$a_{j,t} (E_{j,t} - \delta_{i,j} E_{i,t} - \delta_{j,j} E_{j,t} + \delta_{j,j} E_{i,t} + \delta_{i,j} E_{j,t}) = a_{j,t} E_{i,t}.$$

Les lignes i et j de la matrice $(\mathbf{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}) A$ sont respectivement les matrices j et i de la matrice A .

La multiplication à gauche par la matrice $(\mathbf{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})$ revient à faire l'opération $L_i \longleftrightarrow L_j$.

• *Opérations sur les colonnes*

D'après le résultat de la question 9, on a

$$\begin{aligned} & A (\mathbf{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}) \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} (E_{s,t} - E_{s,t} E_{i,i} - E_{s,t} E_{j,j} + E_{s,t} E_{i,j} + E_{s,t} E_{j,i}) \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{s,t} (E_{s,t} - \delta_{t,i} E_{s,i} - \delta_{t,j} E_{s,t} + \delta_{t,i} E_{s,j} + \delta_{t,j} E_{s,i}). \end{aligned}$$

On remarque si $t \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, j\}$, alors, pour tout $s \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$a_{s,t} (E_{s,t} - \delta_{t,i} E_{s,i} - \delta_{t,j} E_{s,t} + \delta_{t,i} E_{s,j} + \delta_{t,j} E_{s,i}) = a_{s,t} E_{s,t}.$$

Si $t = i$, alors

$$a_{s,i} (E_{s,i} - \delta_{t,i} E_{s,i} - \delta_{t,j} E_{s,t} + \delta_{t,i} E_{s,j} + \delta_{t,j} E_{s,i}) = a_{s,i} E_{s,j}$$

et si $t = j$, alors

$$a_{s,t} (E_{s,t} - \delta_{t,i} E_{s,i} - \delta_{t,j} E_{s,t} + \delta_{t,i} E_{s,j} + \delta_{t,j} E_{s,i}) = a_{s,j} E_{s,j}.$$

On note que les colonnes de la matrice $A(I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})$ sont les mêmes que celles de la matrice A sauf pour les colonnes i et j .

Les colonnes i et j de la matrice $(I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})A$ sont respectivement les matrices j et i de la matrice A .

La multiplication à droite par la matrice $(I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})$ revient à faire l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$.

13. Tout endomorphisme de \mathbf{K} dont le déterminant vaut 1 a une matrice de la forme (1) et ce, dans n'importe quelle base de \mathbf{K} .

Il s'ensuit que la matrice (1) s'écrit comme le produit vide de transvection.

Le premier point de la proposition est vraie en dimension 1.

14. (a) Si la première ligne ne contient pas d'élément non nul, la matrice U ne serait pas inversible.

La première ligne de U contient donc au moins un coefficient non nul.

- (b) On commence par montrer que en faisant des opérations sur les lignes, on peut obtenir un coefficient égal à 1 en position $(1, 1)$. On distingue deux cas :

- S'il existe $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$ tel que $u_{i,1} \neq 0$, alors l'opération

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{u_{i,1} - 1}{u_{i,1}} L_i$$

permet d'avoir un 1 en position $(1, 1)$.

- Si pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $u_{i,1} = 0$, la première colonne contenant au moins un élément non nul (question 14 (a)), on a $u_{1,1} \neq 0$.

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ permet de se ramener au cas précédent.

On note U' la matrice obtenue.

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$, les opérations

$$L_i \leftarrow L_i - u'_{1,i} L_1 \quad \text{et} \quad C_j \leftarrow C_j - u'_{j,1} C_1$$

permettent d'obtenir une matrice \tilde{U} dont le coefficient en position $(1, 1)$ est égal à 1 et pour tout $(i, j) \in \llbracket 2, n \rrbracket^2$, $\tilde{u}_{i,1} = \tilde{u}_{1,j} = 0$.

On a montré que l'on peut se ramener, avec des opérations sur les lignes et/ou colonnes à une matrice ayant une première ligne et une première colonne nulle sauf le coefficient en position $(1, 1)$ valant 1.

- (c) D'après la question 14 (b), il existe des matrices de transvections T_1, \dots, T_r et T'_1, \dots, T'_s telles que

$$U = T_1 \cdots T_r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} T'_1 \cdots T'_s$$

où U' est une matrice de taille $(n-1) \times (n-1)$ de déterminant 1 car U est de déterminant 1.

Comme $U' \in \mathcal{S}\ell_{n-1}(\mathbf{K})$, en utilisant l'hypothèse de récurrence, il existe des matrices de transvections de taille $(n-1) \times (n-1)$, disons T_1'', \dots, T_ℓ'' telles que $U' = T_1'' \cdots T_\ell''$.

Il s'ensuit que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1'' \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_\ell'' \end{pmatrix}.$$

On notera que pour tout $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_i'' \end{pmatrix}$ est une matrice de transvection de taille $n \times n$. On peut donc écrire

$$U = T_1 \cdots T_r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_1'' \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & T_\ell'' \end{pmatrix} T_1' \cdots T_s'.$$

On a montré que toute matrice de taille $n \times n$ de déterminant 1 s'écrit comme le produit de matrices de transvections.

Par le principe de raisonnement par récurrence, toute matrice carrée de déterminant 1 est le produit de matrices de transvections.

15. Soit $u \in \mathcal{G}\ell(E)$ et soit $\lambda = \det(u)$.

- Si $\lambda = 1$, alors $u \in \mathcal{S}\ell(E)$, alors d'après la question 14 (c), u s'écrit comme la composée de transvections.
- Si $u \in \mathcal{G}\ell(E) \setminus \mathcal{S}\ell(E)$. Soit d une dilatation de déterminant λ^{-1} . Il s'ensuit que $\det(u \circ d) = \det(u) \det(d) = 1$, ainsi $u \circ d \in \mathcal{S}\ell(E)$. D'après la question 14 (c), il existe des transvections de E , disons t_1, \dots, t_r , telles que $u \circ d = t_1 \circ \cdots \circ t_r$. On récupère donc

$$u = t_1 \circ \cdots \circ t_r \circ d^{-1}.$$

On note que d^{-1} est encore une dilatation.

On a montré que tout élément de $\mathcal{G}\ell(E)$ s'écrit comme la composée de transvections et d'au plus une dilatation.

16. Comme $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}\ell(E)$, u est bijective.

Comme F est stable par u , $u|_F$ est un endomorphisme de F injectif car u l'est. De plus, F est de dimension finie, il s'ensuit que $u|_F$ est un automorphisme de F .

Soit $x \in F^\perp$ et soit $y \in F$. D'après ce qui précède, il existe $z \in F$ (unique) tel que $y = u(z)$. Comme u conserve le produit scalaire (car $u \in \mathcal{O}(E)$), on a donc

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(z) \rangle = \langle x, z \rangle = 0$$

car $x \in F^\perp$ et $z \in F$.

On a montré que F^\perp est stable par u .

17. On montre les deux implications.

i) \implies ii) Soit $H = \ker(s - \text{id}_E)$ et soit e_n un vecteur unitaire (de norme 1) orthogonal à H .

On a donc $s|_H = \text{id}|_H$ et $f(e_n) = -e_n$.

Si (e_1, \dots, e_{n-1}) est une base orthonormée de H , alors la famille (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est

$$\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ii) \implies i) Soit $(e_1, \dots, e_{n-1}, e_n)$ une base orthonormée dont la matrice dans cette base est $\begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Il est clair que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $s^2(e_i) = e_i$. Il s'ensuit que s est une symétrie.

De plus, en remarquant que $\ker(s - \text{id}_E) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $\ker(s + \text{id}_E) = \text{Vect}(e_n)$ et en utilisant le fait que la famille (e_1, \dots, e_n) est orthonormée, on a $\ker(s - \text{id}_E) \perp \ker(s + \text{id}_E)$.

L'équivalence est prouvée.

18. (a) On adopte une vision matricielle.

On rappelle que toute matrice orthogonale en dimension 2 est de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

avec $\theta \in \mathbf{R}$.

Les premières matrices, de déterminant 1, sont des matrices de rotation d'angle θ , alors que les secondes de déterminant -1 sont des réflexions, i.e. des symétries par rapport à un hyperplan, i.e. une droite.

Soit $\theta \in \mathbf{R}$.

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Les matrices $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ étant de déterminant -1 , ce sont des matrices de réflexion.

On a montré que toute rotation s'écrit comme la composée de deux réflexions.

(b) Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ où E est un espace euclidien de dimension 2.

Si u est une rotation, alors d'après la question 18 (a), u est la composée de deux réflexions.

Si u est une réflexion, u décrit comme la composée d'une réflexion.

On a montré que tout élément de $\mathcal{O}(E)$ où E est un espace euclidien de dimension 2 est la composée d'au plus 2 réflexions.

19. Si $u = \text{id}_E$, alors u est le produit de zéro réflexion.

La proposition est vraie dans ce cas.

20. Comme u conserve le produit scalaire, on a

$$\begin{aligned} \langle u(x) - x, u(x) + x \rangle &= \langle u(x), u(x) \rangle - \langle x, x \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle x, x \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par définition de v , on a alors

$$\begin{cases} v(u(x) - x) &= -(u(x) - x) \\ v(u(x) + x) &= u(x) + x \end{cases}.$$

En sommant ces deux lignes, on obtient $v(u(x)) = x$.

21. Soit $u = \text{id}_E$, c'est terminé.

Sinon, il existe $x \in E$ tel que $u(x) \neq x$. D'après la question 20, $v(x) = x$. Comme $x \neq 0$ (car $u(x) \neq x$), on pose $e_1 = \frac{x}{\|x\|}$. On pose $F = \text{Vect}(e_1)$ de sorte que l'on ait $E = F \oplus F^\perp$.

D'après la question 16, F^\perp est stable par $v \circ u$. Or, $\dim(F^\perp) = n - 1$ et $v \circ u|_{F^\perp} \in \mathcal{O}(F^\perp)$ car $v \circ u|_{F^\perp}$ conserve les distances. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe m ($m \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$) réflexions r'_1, \dots, r'_m de F^\perp telles que

$$v \circ u|_{F^\perp} = r'_1 \circ \dots \circ r'_m.$$

Pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on prolonge les r'_i à E tout entier en posant $r'_i(e_1) = e_1$. On pose r_i les applications ainsi prolongées. Il est clair que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $r_i \in \mathcal{O}(E)$ et

$$(v \circ u)(e_1) = (r_1 \circ \dots \circ r_m)(e_1) = e_1.$$

Il s'ensuit que

$$v \circ u = r_1 \circ \dots \circ r_m \iff u = v^{-1} \circ r_1 \circ \dots \circ r_m.$$

Comme v^{-1} est une réflexion de E , on a montré que u est la composée d'au plus n réflexions de E .

Par le principe de raisonnement par récurrence, toute isométrie dans un espace vectoriel euclidien de dimension n s'écrit comme la composée d'au plus n réflexions.

Quelques remarques culturelles

La recherche de générateurs de groupes « les plus simples » possibles est une question naturelle lorsque l'on étudie un groupe.

Qu'entend-t-on par « simple » ? On préfère travailler avec des générateurs ayant le plus de points fixes possibles. Le lecteur remarquera que les transvections sont les applications (non triviales) ayant le plus grand nombre de points fixes.

Le lecteur ayant traité le groupe symétrique \mathcal{S}_n pourra montrer que les transpositions (applications de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ ayant $n - 2$ points fixes) engendrent \mathcal{S}_n .

Thème 21

Algèbre linéaire avec les rationnels

Thèmes abordés : Structure algébrique, application linéaire, continuité.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet commence par montrer que $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2019} \notin \mathbf{Q}$. Ensuite, on s'intéresse à l'équation fonctionnelle de Cauchy.

Une bonne connaissance de la structure de corps est indispensable pour traiter ce sujet.

Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes.

21.1 Questions préliminaires

1. Montrer que \mathbf{R} est un \mathbf{Q} -espace vectoriel.
2. \mathbf{R} est-il un \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension finie ?

21.2 Étude d'une somme de racines carrées

3. Soit \mathbf{K} un sous-corps de \mathbf{R} . Montrer que $\mathbf{Q} \subset \mathbf{K}$.
4. (a) Soit $(\mathbf{K}_i)_{i \in I}$ une famille de sous-corps de \mathbf{R} . Montrer que $\bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i$ est un sous-corps de \mathbf{R} contenant \mathbf{Q} .
(b) Soit $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbf{N}^*$. Justifier l'existence d'un plus petit (au sens de l'inclusion) sous-corps de \mathbf{R} contenant $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$ que l'on note

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}).$$

5. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit (p_1, \dots, p_n) un n -uplet d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, deux à deux premiers entre eux et sans facteur carré.
(a) Montrer que

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) = \left\{ \alpha + \beta \sqrt{p_n}, (\alpha, \beta) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})^2 \right\}.$$

(b) Montrer que

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) = \text{Vect}_{\mathbf{Q}} \left(\sqrt{\prod_{k=1}^n p_k^{\varepsilon_k}}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \right).$$

Indication : On pourra raisonner par récurrence sur n .

On va montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout n -uplet $(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbf{N}^*)^n$ de nombres deux à deux premiers entre eux et sans facteur carré, la famille

$$\left(\sqrt{\prod_{k=1}^n p_k^{\varepsilon_k}} \right)_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n}$$

est \mathbf{Q} -libre.

6. Traiter le cas où $n = 1$.

7. On traite l'hérédité. Soit $(p_1, \dots, p_n, p_{n+1}) \in (\mathbf{N}^*)^{n+1}$ un $(n+1)$ -uplet constitué d'entiers deux à deux premiers entre eux et sans facteur carré.

Soit $(q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}})_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}}$ une famille de rationnels telle que

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}} \sqrt{\prod_{k=1}^{n+1} p_k^{\varepsilon_k}} = 0.$$

(a) Montrer que

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}} \sqrt{\prod_{k=1}^{n+1} p_k^{\varepsilon_k}} = a + b\sqrt{p_{n+1}}$$

avec

$$a = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 0} \sqrt{\prod_{k=1}^n p_k^{\varepsilon_k}}$$

et

$$b = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1} \sqrt{\prod_{k=1}^n p_k^{\varepsilon_k}}.$$

On justifiera aussi le fait que $(a, b) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})^2$.

Dans la suite de la question 7, on suppose que $b \neq 0$.

(b) En déduire qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})^2$ tel que

$$\sqrt{p_{n+1}} = \alpha + \beta\sqrt{p_n}.$$

(c) Montrer que α et β vérifient $\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 p_n & = p_{n+1} \\ \alpha \times \beta & = 0 \end{cases}$.

- (d) Montrer que si $\alpha = 0$, alors on obtient une contradiction.
 (e) Obtenir également une contradiction lorsque $\beta = 0$.
 (f) Terminer la récurrence.
8. Montrer que

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{2019} \notin \mathbf{Q}.$$

21.3 L'équation fonctionnelle de Cauchy

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$. On dit que f vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy si :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y). \quad (21.1)$$

9. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

10. Montrer que si f vérifie (21.1), alors

$$\forall r \in \mathbf{Q}, \forall x \in \mathbf{R} \quad f(rx) = rf(x).$$

11. On suppose dans cette question que f est continue en un point $x_0 \in \mathbf{R}$.

- (a) Montrer que f est continue sur \mathbf{R} .
 (b) En déduire que f est une homothétie.

On admet que tout espace vectoriel admet des bases : ainsi le \mathbf{Q} espace vectoriel \mathbf{R} admet une base $(e_i)_{i \in I}$. On renvoie le lecteur au Thème 3 : « Discussion autour de deux axiomes » pour la preuve de cette affirmation.

12. Montrer que f est entièrement déterminée par la connaissance des $f(e_i)$ pour $i \in I$.

On suppose que f n'est pas une homothétie. On note

$$\Gamma = \{(x, f(x)), x \in \mathbf{R}\}$$

le graphe de f .

13. Montrer qu'il existe deux réels $x \neq y$ tels que les vecteurs X et Y de coordonnées respectives $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ ne soient pas colinéaires.

Définition. Ensemble dense de \mathbf{R}^2 .

Soit A une partie de \mathbf{R}^2 . On dit que A est dense dans \mathbf{R}^2 si : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, il existe $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y.$$

14. Montrer que Γ est dense dans \mathbf{R}^2 .

On ne suppose plus que f n'est pas une homothétie.

15. Montrer que si f est bornée sur un intervalle non vide et non réduit à un point, alors f est une homothétie.
 16. Retrouver le résultat de la question 11 (b).

Correction du Thème 21

1. Ce sont de simples vérifications laissées au lecteur.

2. La réponse est non et nous donnons deux preuves.

• *Preuve 1.*

Si \mathbf{R} est un \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension finie, disons $n \in \mathbf{N}$, alors il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre \mathbf{R} et \mathbf{Q}^n .

Or, \mathbf{Q}^n est un ensemble dénombrable et \mathbf{R} est non dénombrable (voir le Thème 2 : « Découverte des infinis »), donc il ne peut y exister de bijection entre ces deux ensembles.

Ainsi, \mathbf{R} n'est pas un \mathbf{Q} -espace vectoriel de dimension finie.

• *Preuve 2.*

Dans cette preuve, nous exhibons une famille libre infinie dans le \mathbf{Q} -espace vectoriel \mathbf{R} .

Soit la famille $(\ln(p))_{p \in \mathbf{P}}$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{Q}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n r_i \ln(p_i) = 0$.

Comme les r_i sont des rationnels, quitte à multiplier par le PPCM de leurs dénominateurs, on peut supposer $(r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{Z}^n$.

En composant par la fonction exponentielle, on en déduit que

$$p_1^{r_1} \times \dots \times p_n^{r_n} = 1.$$

En utilisant l'unicité de la décomposition en produits de facteurs premiers, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $r_i = 0$.

La famille $(\ln(p))_{p \in \mathbf{P}}$ est libre.

Comme elle admet une infinité d'éléments,

le \mathbf{Q} -espace vectoriel \mathbf{R} n'est pas de dimension finie.

3. Un sous-corps de \mathbf{R} est un groupe pour la loi $+$, donc $0 \in \mathbf{K}$ et \mathbf{K}^* est un groupe pour la loi \cdot , donc $1 \in \mathbf{K}$.

Comme \mathbf{K} est stable par la loi $+$, on montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{K}$, ainsi $\mathbf{N} \subset \mathbf{K}$.

Puis, comme $(\mathbf{K}, +)$ est un groupe, $\mathbf{Z} \subset \mathbf{K}$.

Comme (\mathbf{K}^*, \cdot) est un groupe, \mathbf{K} contient tous les rationnels de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbf{Z}^*$.

Puis en utilisant la stabilité de \mathbf{K} par la loi \cdot , on en déduit que \mathbf{K} contient tous les nombres de la forme $\frac{n}{m}$ avec $n \in \mathbf{Z}$ et $m \in \mathbf{Z}^*$.

On a montré que $\mathbf{Q} \subset \mathbf{K}$.

4. (a) • Comme la multiplication est distributive sur l'addition dans \mathbf{K}_i pour tout $i \in I$, il s'ensuit que la multiplication est distributive sur l'addition dans $\bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i$.

- Comme pour tout $i \in I$, $(\mathbf{K}_i, +)$ est un groupe, on en déduit que $\left(\bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i, +\right)$ est un groupe comme une intersection de sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$.
- Comme pour tout $i \in I$, (\mathbf{K}_i^*, \times) est un groupe, on en déduit que $\left(\bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i^*, \times\right)$ est un groupe comme une intersection de sous-groupes de (\mathbf{R}^*, \times) .

On a montré que $\left(\bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i, +, \times\right)$ est un sous-corps de $(\mathbf{R}, +, \times)$. Par la question 3, on a $\mathbf{Q} \subset \bigcap_{i \in I} \mathbf{K}_i$.

- (b) Soit \mathcal{K} l'ensemble des sous-corps de \mathbf{R} contenant $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$. On note que $\mathcal{K} \neq \emptyset$ car $\mathbf{R} \in \mathcal{K}$.

D'après la question 4 (a), $\boxed{\bigcap_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \mathbf{K}}$ est un sous-corps de \mathbf{R} .

De plus, il est clair que c'est le plus petit pour l'inclusion : si \mathbf{L} est un sous-corps de \mathbf{R} contenant $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$, alors $\mathbf{L} \in \mathcal{K}$ et $\bigcap_{\mathbf{K} \in \mathcal{K}} \mathbf{K} \subset \mathbf{L}$.

5. (a) On note $\mathbf{K} = \left\{ \alpha + \beta\sqrt{p_n}, (\alpha, \beta) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})^2 \right\}$.

On va d'abord montrer que \mathbf{K} est un corps.

De toute évidence, la multiplication est distributive sur l'addition dans \mathbf{K} .

Comme $(\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}}), +)$ est un groupe, $(\mathbf{K}, +)$ est un groupe.

Pour montrer que (\mathbf{K}^*, \cdot) est un groupe, il suffit de montrer que \mathbf{K}^* est stable pour la loi \times et stable par passage à l'inverse.

- Soient $\alpha_1 + \beta_1\sqrt{p_n}$ et $\alpha_2 + \beta_2\sqrt{p_n}$ deux éléments de \mathbf{K} avec $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})^4$. On a

$$(\alpha_1 + \beta_1\sqrt{p_n})(\alpha_2 + \beta_2\sqrt{p_n}) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 p_n + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2)\sqrt{p_n}.$$

Comme $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$ est un corps, en particulier,

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 p_n \quad \text{et} \quad \alpha_1\beta_2 + \beta_1\alpha_2$$

sont deux éléments de $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$.

Ainsi, \mathbf{K} est stable par multiplication.

- Soit $\alpha + \beta\sqrt{p_n} \in \mathbf{K}^*$ avec α et β deux éléments de $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$. On remarque que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{p_n}} &= \frac{\alpha - \beta\sqrt{p_n}}{\alpha^2 + \beta^2 p_n} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 p_n} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2 p_n} \sqrt{p_n}. \end{aligned}$$

Comme $(\alpha, \beta, p_n) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})^3$, on en déduit que

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2 p_n} \quad \text{et} \quad \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2 p_n}$$

sont deux éléments de $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$.

Donc, \mathbf{K}^* est stable par passage à l'inverse, ainsi \mathbf{K} est un corps.

Soit \mathbf{L} est un sous-corps de \mathbf{R} contenant $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$. En particulier, \mathbf{L} contient $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$.

Comme \mathbf{L} est un anneau, il contient tous les nombres de la forme $\alpha + \beta\sqrt{p_n}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})^2$, ainsi \mathbf{L} contient \mathbf{K} .

On a montré que \mathbf{K} est le plus petit sous-corps de \mathbf{R} (au sens de l'inclusion) contenant $\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}$. Par définition de $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$, on en déduit que

$$\mathbf{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}).$$

- (b) On suit l'indication et on procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « pour tout n -uplet (p_1, \dots, p_n) d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, deux à deux premiers entre eux et sans facteur carré,

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) = \text{Vect}_{\mathbf{Q}} \left(\sqrt{\prod_{k=1}^n p_k^{\varepsilon_k}}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \right) \text{ »}.$$

Pour $n = 1$, soit p un entier supérieur ou égal à 2 sans facteur carré.

Le même raisonnement que celui de la question 5 (a) montre que

$\text{Vect}_{\mathbf{Q}}(1, \sqrt{p})$ est un corps contenant \sqrt{p} .

Soit \mathbf{L} un sous-corps de \mathbf{R} contenant \sqrt{p} . Il est clair que $\text{Vect}_{\mathbf{Q}}(1, \sqrt{p}) \subset \mathbf{L}$.

Par définition de $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$, on en déduit que

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p}) = \text{Vect}_{\mathbf{Q}}(1, \sqrt{p}).$$

On a montré que \mathcal{P}_1 est vraie.

Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un entier naturel non nul n .

Soit $(p_1, \dots, p_n, p_{n+1})$ un $(n+1)$ -uplet d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, deux à deux premiers entre eux et sans facteur carré.

D'après la question 5 (a), on a

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n+1}}) = \left\{ \alpha + \beta\sqrt{p_{n+1}}, (\alpha, \beta) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})^2 \right\}. \quad (21.2)$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n}) = \text{Vect}_{\mathbf{Q}} \left(\sqrt{\prod_{k=1}^n p_k^{\varepsilon_k}}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n \right).$$

Il s'ensuit que

$$\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n+1}}) = \text{Vect}_{\mathbf{Q}} \left(\sqrt{\prod_{k=1}^{n+1} p_k^{\varepsilon_k}}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1} \right).$$

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

6. La famille $(\sqrt{p_1})$ est \mathbf{Q} -libre car contient un seul élément non nul.

7. (a) Soient

$$\mathcal{A}_0 = \left\{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}, \varepsilon_{n+1} = 0 \right\}$$

et

$$\mathcal{A}_1 = \left\{ (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}, \varepsilon_{n+1} = 1 \right\}.$$

Il est clair que $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1)$ est une partition de $\{0, 1\}^{n+1}$, ainsi

$$\begin{aligned} & \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}} \sqrt{\prod_{k=1}^{n+1} p_k^{\varepsilon_k}} \\ &= \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \mathcal{A}_0} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}} \sqrt{\prod_{k=1}^{n+1} p_k^{\varepsilon_k}} \\ & \quad + \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \mathcal{A}_1} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}} \sqrt{\prod_{k=1}^{n+1} p_k^{\varepsilon_k}} \\ &= a + b\sqrt{p_{n+1}}, \end{aligned}$$

avec

$$a = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 0} \sqrt{\prod_{k=1}^n p_k^{\varepsilon_k}}$$

et

$$b = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1} \sqrt{\prod_{k=1}^n p_k^{\varepsilon_k}}.$$

D'après la question 5 (b), on a $(a, b) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$.

On a bien montré qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})^2$ tel que

$$a + b\sqrt{p_{n+1}} = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}} \sqrt{\prod_{k=1}^{n+1} p_k^{\varepsilon_k}}.$$

(b) Comme $b \neq 0$, on peut écrire $\sqrt{p_{n+1}} = -\frac{a}{b}$.

Comme a et b appartiennent à $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$ qui est un corps, on en déduit que $-\frac{a}{b} \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$.

D'après la question 5 (a), il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})^2$ tel que $-\frac{a}{b} = \alpha + \beta\sqrt{p_n}$.

On a montré qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})^2$ tel que

$$\boxed{\sqrt{p_{n+1}} = \alpha + \beta\sqrt{p_n}.}$$

(c) En élevant au carré la relation obtenue à la question 7 (b), on obtient

$$p_{n+1} = \alpha^2 + \beta^2 p_n + 2\alpha\beta\sqrt{p_n} \iff (\alpha^2 + \beta^2 p_n - p_{n+1}) + 2\alpha\beta\sqrt{p_n} = 0.$$

Si $\alpha\beta \neq 0$, on aurait

$$\sqrt{p_n} = -\frac{\alpha^2 + \beta^2 p_n - p_{n+1}}{2\alpha\beta} \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$$

car $\mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$ est un corps. D'après la question 5 (b), on en déduit que

$$\sqrt{p_n} \in \text{Vect}_{\mathbf{Q}} \left(\sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} p_k^{\varepsilon_k}}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{0, 1\}^{n-1} \right).$$

Cela contredit l'hypothèse de récurrence qui assure que la famille

$$\left(\sqrt{\prod_{k=1}^n p_k^{\varepsilon_k}} \right)_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n} \text{ est libre.}$$

$$\boxed{\text{On en déduit que } \alpha\beta = 0, \text{ puis } \alpha^2 + \beta^2 p_n = p_{n+1}.}$$

(d) On pose $x = \beta p_n$ et $p = p_n p_{n+1}$. On a alors

$$x^2 = \beta^2 p_n^2 = p_n p_{n+1} = p,$$

Or, $\sqrt{p} = \pm x \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$, d'après la question 5 (b), on a

$$\sqrt{p} \in \text{Vect}_{\mathbf{Q}} \left(\sqrt{\prod_{i=1}^{n-1} p_i^{\varepsilon_i}}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{0, 1\}^{n-1} \right). \quad (21.3)$$

Or, p est sans facteur carré car p_n et p_{n+1} sont sans facteur carré et premiers entre eux.

Les nombres p_1, \dots, p_{n-1}, p sont sans facteur carré et deux à deux premiers, donc l'hypothèse de récurrence assure que la famille

$$\left(\sqrt{\prod_{k=1}^{n-1} p_k^{\varepsilon_k} \times p^{\varepsilon_n}} \right)_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n}$$

est \mathbf{Q} -libre, ce qui est exclu d'après (21.3).

On obtient une contradiction, ainsi $\alpha \neq 0$.

- (e) On pose $x = \alpha$ et $p = p_{n+1}$ de sorte que l'on ait $x^2 = p_{n+1}$. On en déduit que $\sqrt{p_{n+1}} = \pm x \in \mathbf{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_{n-1}})$. D'après la question 5 (b),

$$\sqrt{p_{n+1}} \in \text{Vect}_{\mathbf{Q}} \left(\sqrt{\prod_{i=1}^{n-1} p_i^{\varepsilon_i}}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}) \in \{0, 1\}^{n-1} \right),$$

ce qui est à nouveau exclu en utilisant l'hypothèse de récurrence à $p_1, \dots, p_{n-1}, p_{n+1}$.

On obtient une contradiction, ainsi $\beta \neq 0$.

- (f) L'hypothèse $b \neq 0$ mène à une contradiction (les questions 7 (d) et 7 (e)). On en déduit que $b = 0$.

La relation $a + b\sqrt{p_{n+1}} = 0$ donne $a = 0$.

En reprenant les expressions de a et b obtenues à la question 7 (b), i.e.

$$a = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 0} \sqrt{\prod_{i=1}^n p_i^{\varepsilon_i}}$$

et

$$b = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1} \sqrt{\prod_{i=1}^n p_i^{\varepsilon_i}},$$

on a

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 0} \sqrt{\prod_{i=1}^n p_i^{\varepsilon_i}} = 0$$

et

$$\sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0, 1\}^n} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, 1} \sqrt{\prod_{i=1}^n p_i^{\varepsilon_i}} = 0.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence pour a et b , on en déduit que

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}, \quad q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}} = 0.$$

On a montré que la famille

$$\left(\sqrt{\prod_{i=1}^{n+1} p_i^{\varepsilon_i}}, (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1} \right)$$

est \mathbf{Q} -libre, ainsi \mathcal{P}_{n+1} est libre.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$.

8. Supposons que $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2019} \in \mathbf{Q}$: on pose

$$r = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2019}.$$

Soient p_1, \dots, p_n les nombres premiers utilisés dans la décomposition en produits de facteurs premiers des entiers $2, \dots, 2019$ (il y en a un nombre fini car il y a un nombre fini d'entiers entre 2 et 2019).

Ainsi,

$$0 = -r + \sqrt{1} + \dots + \sqrt{2019} = \sum_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n} q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} \sqrt{\prod_{k=1}^n p_k^{\varepsilon_k}}$$

où les $q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n}$ sont des nombres rationnels.

Comme la famille $\left(\sqrt{\prod_{k=1}^n p_k^{\varepsilon_k}} \right)_{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n}$ est libre (question 7 car les nombres p_1, \dots, p_n sont deux à deux premiers entre eux et sans facteur carré), on en déduit que :

$$\forall (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n, \quad q_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} = 0.$$

Or, par définition de $-r + \sqrt{1} + \dots + \sqrt{2019}$, le coefficient devant $\sqrt{2}$ est strictement positif.

On obtient ainsi une contradiction.

On a montré que $\sqrt{1} + \dots + \sqrt{2019} \notin \mathbf{Q}$.

9. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n :

$$\ll \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \quad f\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \gg.$$

\mathcal{P}_1 est de toute évidence vraie.

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel n non nul, montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Soit $(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Comme f vérifie l'équation fonctionnelle de Cauchy, on a

$$f(x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}) = f(x_1) + f(x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}).$$

Puis, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on en déduit que

$$f(x_2 + \dots + x_{n+1}) = f(x_2) + \dots + f(x_{n+1}),$$

d'où

$$f(x_1 + \dots + x_n + x_{n+1}) = f(x_1) + \dots + f(x_n) + f(x_{n+1}).$$

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

10. On procède par étapes.

- Il est facile de montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(nx) = nf(x)$.
- Comme $f(0+0) = f(0) + f(0)$, on en déduit que $f(0) = 0$. De plus,

$$\forall y \in \mathbf{R}, \quad f(y + (-y)) = f(y) + f(-y) = 0.$$

Comme \mathbf{R} est centré en 0, on en déduit que f est impaire.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{Z}$, $f(nx) = nf(x)$.

- Soient $n \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}^*$ et $x \in \mathbf{R}$.

D'une part, d'après la question 9, on a

$$f(nx) = nf(x).$$

D'autre part, en remarquant que

$$f(nx) = f\left(p \times \frac{n}{p}x\right) = f\left(\underbrace{\frac{n}{p}x + \dots + \frac{n}{p}x}_{p \text{ termes}}\right).$$

D'après l'égalité établie à la question 9, on en déduit que

$$f(nx) = pf\left(\frac{n}{p}x\right).$$

On en déduit que

$$f\left(\frac{n}{p}x\right) = \frac{n}{p}f(x).$$

En utilisant l'imparité de f , on a montré que

$$\boxed{\forall r \in \mathbf{Q}, \forall x \in \mathbf{R}, \quad f(rx) = rf(x).}$$

11. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. On a

$$\forall h \in \mathbf{R}, \quad f(x+h) = f(x-x_0) + f(x_0+h).$$

Comme f est continue en x_0 , on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. Ainsi

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x-x_0) + f(x_0) = f(x).$$

On a montré que f est continue en x : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbf{R}.}$

(b) Soit $x \in \mathbf{R}$. Par densité de \mathbf{Q} dans \mathbf{R} , il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = x$.

Par continuité de f en x , on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(r_n) = f(x)$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(1)r_n = f(1)x$.

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f(r_n) = f(1)r_n$, par unicité de la limite, on en déduit que $f(x) = f(1)x$.

$\boxed{\text{On a montré que } f \text{ est une homothétie.}}$

12. On suppose connu les $f(e_i)$ pour tout $i \in I$.
Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme $(e_i)_{i \in I}$ est une base de \mathbf{R} vu comme un \mathbf{Q} -espace vectoriel, il existe $J \subset I$ fini et $(\lambda_j)_{j \in J} \in \mathbf{Q}^J$ tels que $x = \sum_{j \in J} \lambda_j e_j$.

Par les questions 9 et 10, on a $f(x) = \sum_{j \in J} \lambda_j f(e_j)$.

Comme on connaît f sur la famille $(e_i)_{i \in I}$, $f(x)$ est connu.

On a montré que f est entièrement déterminée par la connaissance des $f(e_i)$ pour $i \in I$.

13. On remarque que si f vérifie l'équation de Cauchy, f est une homothétie si, et seulement si, pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}^*)^2$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$.

\Leftarrow Comme la quantité $\frac{f(x)}{x}$ ne dépend pas de $x \in \mathbf{R}^*$, on pose $a = \frac{f(1)}{1}$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $f(x) = ax$.

Comme $f(0) = 0$ (voir la correction de la question 10), on en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = ax$, ainsi f est une homothétie.

\Rightarrow Si f est une homothétie, il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = ax.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, $\frac{f(x)}{x} = a$.

Il s'ensuit que pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}^*)^2$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y}$.

Comme f n'est pas une homothétie, par ce qui précède, il existe deux réels nécessairement différents tels que $\frac{f(x)}{x} \neq \frac{f(y)}{y}$, autrement dit, $f(x)y - f(y)x \neq 0$.

Les vecteurs X et Y de coordonnées respectives $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ ne sont pas colinéaires.

14. Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$.

D'une part, les vecteurs X et Y ne sont pas colinéaires, il s'ensuit que la famille (X, Y) est libre. Comme $\dim_{\mathbf{R}}(\mathbf{R}^2) = 2$, la famille (X, Y) est une base de \mathbf{R}^2 . Ainsi, il existe deux réels α et β tels que

$$(x_0, y_0) = \alpha X + \beta Y.$$

D'autre part, d'après la question 10, on remarque pour tout $(r, t) \in \mathbf{Q}^2$,

$$(rx + ty, f(rx + ty)) = (rx + ty, rf(x) + tf(y)) = rX + tY \in \Gamma.$$

Comme \mathbf{Q} est dense dans \mathbf{R} , il existe deux suites de rationnels $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui convergent respectivement vers α et β de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (r_n x + t_n y) = x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (r_n f(x) + t_n f(y)) = y_0.$$

On a montré que Γ est dense dans \mathbf{R}^2 .

15. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application vérifiant (21.1). Les questions 13 et 14 montrent que si f n'est pas une homothétie, alors Γ le graphe de f est dense dans \mathbf{R}^2 .

Par contraposée, si Γ n'est pas dense dans \mathbf{R}^2 , alors f est une homothétie.

Ainsi, dans cette question, il suffit de vérifier que le graphe de f n'est pas dense dans \mathbf{R}^2 . Soit I un intervalle non vide et non réduit à un point sur lequel f est bornée. Il existe deux réels a et b avec $a < b$ tels que $[a, b]$.

Soit M un majorant de $|f|$ sur I :

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq M.$$

Supposons que Γ soit dense dans \mathbf{R}^2 , en particulier, il existe une suite de Γ , disons $((x_n, f(x_n)))_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers $\left(\frac{a+b}{2}, M+1\right)$, soit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = M+1.$$

Comme $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $\frac{a+b}{2}$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $x_n \in [a, b]$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, $|f(x_n)| \leq M$.

La suite $(f(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ ne peut converger vers $M+1$.

Il s'ensuit que Γ n'est pas dense dans \mathbf{R}^2 , donc f est une homothétie.

16. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une application vérifiant (21.1) et continue en un point $x_0 \in \mathbf{R}$. Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad (|x - x_0| \leq \alpha) \implies (|f(x) - f(x_0)| \leq 1).$$

On a montré f est bornée sur l'intervalle non vide et non réduit à un point $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

D'après la question 15, f est une homothétie : on retrouve le résultat de la question 11 (b).

Thème 22

Résultant de deux polynômes

Thèmes abordés : Application linéaire, matrice, déterminant, polynôme, structure algébrique.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet étudie la notion de résultant de deux polynômes. On commence par définir le résultant comme le déterminant de la matrice d'une application linéaire. Une seconde partie permet de montrer qu'étant donné un corps \mathbf{K} et un polynôme P à coefficients dans \mathbf{K} , il existe un sur-corps \mathbf{L} de \mathbf{K} tel que P soit scindé dans \mathbf{L} . À partir de cela, dans une dernière partie, on y donne une expression explicite du résultant de deux polynômes.

Une bonne connaissance du programme d'algèbre linéaire est requise.

Les parties sont largement indépendantes : certains résultats de la partie 2 pourront être admis dans la partie 3.

22.1 Définition du résultant

Soient A et B deux polynômes de $\mathbf{K}[X]$ de degrés respectifs n et m avec $(n, m) \in (\mathbf{N}^*)^2$.

On définit l'application $f_{A,B}$ par :

$$f_{A,B} : \begin{cases} \mathbf{K}_{m-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow \mathbf{K}_{n+m-1}[X] \\ (U, V) & \longmapsto AU + BV \end{cases}.$$

1. Montrer que $f_{A,B} \in \mathcal{L}(\mathbf{K}_{m-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X], \mathbf{K}_{n+m-1}[X])$.
2. Montrer que les polynômes A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, $f_{A,B}$ est un isomorphisme.
3. Montrer que les polynômes $A = \sum_{i=0}^n a_i X^i$ et $B = \sum_{i=0}^m b_i X^i$ sont premiers entre

eux si, et seulement si, le déterminant de la matrice

$$S(A, B) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_1 & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ a_n & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & b_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m & \vdots & \cdots & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & b_m & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & a_1 & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

est non nul.

Définition. Résultant.

Soient A et B deux polynômes non constants. On définit le **résultant** $\text{Res}(A, B)$ de A et B comme le déterminant de $f_{A,B}$.

Lorsque A et B sont constants non nuls, on pose $\text{Res}(A, B) = 1$ et lorsque $A = 0$ ou $B = 0$, on pose $\text{Res}(A, B) = 0$.

4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 2. Montrer que P a une racine d'ordre au moins deux si, et seulement si, $\text{Res}(P, P') = 0$.
5. Écrire un programme Python qui prend argument deux listes p et q et qui calcule le résultant des polynômes P et Q dont les coefficients sont ceux des listes p et q respectivement. Par exemple, si $p = [1, 2, 3]$ et $q = [4, 5]$, alors le programme renverra $\text{Res}(1 + 2X + 3X^2, 4 + 5X)$.

22.2 Creuser pour trouver des racines !

Définition. Polynôme irréductible.

Soit \mathbf{A} un anneau. Soit $P \in \mathbf{A}[X]$. On dit que P est **irréductible** dans $\mathbf{A}[X]$ si : P n'est pas constant et si pour tout $(U, V) \in \mathbf{A}[X]^2$,

$$(P = UV) \implies (U \in \mathbf{A}_0[X] \quad \text{ou} \quad V \in \mathbf{A}_0[X]).$$

6. Rappeler la forme des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, ainsi que ceux de $\mathbb{R}[X]$.
7. (a) Montrer que les polynômes de degré 1 sont irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.
(b) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ dont le degré est 2 ou 3. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si, et seulement si, P n'a pas de racine dans \mathbb{K} .
(c) Cette propriété se généralise-t-elle aux polynômes dont le degré est supérieur à 3?
8. (a) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible. Soit $(P_1, P_2) \in \mathbb{K}[X]^2$. On suppose P_1 et P_2 non nuls et P divise $P_1 P_2$. Montrer que P divise P_1 ou P divise P_2 .

- (b) Généraliser le résultat de la question précédente à r polynômes ($r \in \mathbf{N}$, $r \geq 2$).

9. (a) Montrer que tout polynôme P non constant s'écrit

$$P = cQ_1^{\alpha_1} \cdots Q_s^{\alpha_s}$$

où $c \in K$, les polynômes Q_1, \dots, Q_s sont irréductibles sur $\mathbf{K}[X]$ et unitaires et $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in (\mathbf{N}^*)^s$.

- (b) Montrer que cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ non nul. On introduit sur $\mathbf{K}[X]$ la relation binaire \mathcal{R}_P par :

$$\forall (A, B) \in \mathbf{K}[X]^2, \quad A\mathcal{R}_PB \iff P|A - B.$$

10. Montrer que \mathcal{R}_P est une relation d'équivalence sur $\mathbf{K}[X]$.

Pour $A \in \mathbf{K}[X]$, on définit la classe de A par la relation \mathcal{R}_P , et on la note $\text{cl}(A)$, par :

$$\text{cl}(A) = \{B \in \mathbf{K}[X], A\mathcal{R}_PB\}.$$

11. Soient $(A_1, A_2) \in \mathbf{K}[X]^2$.

- (a) Montrer que l'on a

$$\text{cl}(A_1) = \text{cl}(A_2) \iff A_1\mathcal{R}_PA_2.$$

- (b) Montrer que l'on a

$$\text{cl}(A_1) \cap \text{cl}(A_2) = \emptyset \iff A_1\not\mathcal{R}_PA_2.$$

On note $\mathbf{K}[X]/(P) = \{\text{cl}(A), A \in \mathbf{K}[X]\}$ (on lit $\mathbf{K}[X]$ quotienté par la relation \mathcal{R}_P).

Définitions. *Opérations sur $\mathbf{K}[X]/(P)$.*

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ non constant. Soit $(A, B) \in \mathbf{K}[X]^2$, on définit :

- $\text{cl}(A) + \text{cl}(B) := \text{cl}(A + B)$;
- $\text{cl}(A) \times \text{cl}(B) := \text{cl}(AB)$.

12. Montrer que les opérations $+$ et \times définies sur $\mathbf{K}[X]/(P)$ sont bien définies, i.e. indépendantes du choix de l'élément de la classe.
13. Montrer que $(\mathbf{K}[X]/(P), +, \times)$ est un anneau commutatif d'élément neutre pour l'addition $\text{cl}(0)$ et d'élément neutre $\text{cl}(1)$ pour la multiplication.
14. (a) Soit $(\mathbf{K}, +, \times)$ un corps. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{K}^2, \quad (xy = 0) \implies (x = 0 \text{ ou } y = 0).$$

On dit qu'un corps est **intègre**.

- (b) Montrer que $(\mathbf{K}[X]/(P), +, \times)$ est un corps si, et seulement si, P est irréductible sur $\mathbf{K}[X]$.

Indication : On pourra utiliser le théorème de Bezout et la question 14 (a).

Soit l'application π définie par

$$\pi : \begin{cases} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow \mathbf{K}[X]/(P) \\ A & \longmapsto \text{cl}(A) \end{cases}.$$

15. Montrer que π est un morphisme d'anneaux.
16. Calculer $\pi(P)$.
17. (a) Soient \mathbf{K} et \mathbf{L} deux corps et soit $\varphi : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{L}$ un morphisme de corps. Montrer que φ est nul ou φ est injective.
Indication : On pourra raisonner sur $\ker(\varphi)$.
 (b) On suppose dans cette question P irréductible sur $\mathbf{K}[X]$. Montrer que $\mathbf{K}[X]/(P)$ est un sur-corps de \mathbf{K} .
18. Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ irréductible.
 (a) Donner un élément α de $\mathbf{K}[X]/(P)$ tel que $P(\alpha) = 0$.
 (b) En déduire qu'il existe un sur-corps \mathbf{L} de \mathbf{K} dans lequel P admet une racine.
19. Soit $A \in \mathbf{K}[X]$ non constant. Montrer qu'il existe un sur-corps \mathbf{L} de \mathbf{K} tel que A soit scindé dans \mathbf{L} .

Définitions. *Corps de rupture, corps de décomposition.*

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ non constant.

- Un sur-corps \mathbf{L} dans lequel P admet au moins une racine s'appelle un *corps de rupture*.
- Un sur-corps \mathbf{L} dans lequel P est scindé s'appelle un *corps de décomposition*.

22.3 Expression explicite du résultant

20. Soit $(P, Q) \in (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$. Montrer que

$$\text{Res}(\lambda P, \mu Q) = \lambda^{\deg(Q)} \mu^{\deg(P)} \text{Res}(P, Q).$$

21. Soit $\alpha \in \mathbf{K}$ et soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Montrer que

$$\text{Res}(P, X - \alpha) = P(\alpha).$$

22. Soit $(P, Q) \in (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{K}$. On souhaite montrer que

$$\text{Res}(P, (X - \lambda)Q) = P(\lambda) \text{Res}(P, Q).$$

On pose $n = \deg(P)$ et $m = \deg(Q)$ et on écrit

$$P = \sum_{i=0}^n p_i X^i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{j=0}^m q_j X^j.$$

- (a) Montrer qu'il existe $p'_0, \dots, p'_n, q'_0, \dots, q'_m$ tels que

$$P = \sum_{i=0}^n p'_i (X - \lambda)^i \quad \text{et} \quad Q = \sum_{j=0}^m q'_j (X - \lambda)^j.$$

Exprimer aussi $(X - \lambda)Q$ en fonction q'_0, \dots, q'_m .

(b) Montrer que les familles \mathcal{C} et \mathcal{C}' suivantes

$$\left((1, 0), \dots, ((X - \lambda)^m, 0), (0, 1), \dots, (0, (X - \lambda)^{n-1}) \right)$$

et

$$\left(1, X - \lambda, \dots, (X - \lambda)^{n+m} \right)$$

sont des bases de respectivement $\mathbf{K}_m[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X]$ et $\mathbf{K}_{n+m}[X]$.

(c) Donner la matrice $S'(P, (X - \lambda)Q)$ de l'application linéaire $f_{P, (X - \lambda)Q}$ dans les bases \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

(d) Montrer que

$$\det(S'(P, (X - \lambda)Q)) = \det(S(P, (X - \lambda)Q)).$$

Indication : On pourra remarquer que les matrices $S(P, (X - \lambda)Q)$ et $S'(P, (X - \lambda)Q)$ sont équivalentes et s'intéresser aux déterminants des matrices de passage.

(e) Conclure.

23. Soit $(P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2$. On suppose P et Q non constants. On note p le degré de P et q celui de Q .

Montrer que

$$\text{Res}(P, Q) = a_p^q b_q^p \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^q (\beta_j - \alpha_i),$$

où $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ sont les racines de respectivement P et Q dans un certain sur-corps de \mathbf{K} et a_p et b_q sont les coefficients dominants de respectivement P et Q .

Indication : On pourra raisonner par récurrence sur le degré de Q .

Correction du Thème 22

1. Comme $\deg(A) = n$ et $\deg(B) = m$, pour tout $(U, V) \in \mathbf{K}_{m-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X]$, on a $\deg(AU + BV) \leq n + m - 1$.

De plus, pour tout $((U_1, V_1), (U_2, V_2)) \in (\mathbf{K}_{m-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X])^2$ et pour tout $\lambda \in \mathbf{K}$, on a

$$\begin{aligned} f_{A,B}((U_1, V_1) + \lambda(U_2, V_2)) &= f(U_1 + \lambda U_2, V_1 + \lambda V_2) \\ &= A(U_1 + \lambda U_2) + B(V_1 + \lambda V_2) \\ &= AU_1 + BV_1 + \lambda(AU_2 + BV_2) \\ &= f_{A,B}(U_1, V_1) + \lambda f_{A,B}(U_2, V_2). \end{aligned}$$

On a $f_{A,B} \in \mathcal{L}(\mathbf{K}_{m-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X], \mathbf{K}_{n+m-1}[X])$.

2. On montre les deux implications.

\Rightarrow Soit $(U, V) \in \mathbf{K}_{m-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{m-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X] \in \ker(f_{A,B}) &\iff AU + BV = 0 \\ &\iff AU = -BV. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que A divise BV . Comme A et B sont premiers entre eux, par le théorème de Gauss, A divise V .

Or $\deg(A) = n$ et $\deg(V) \leq n - 1$, on en déduit que $V = 0$.

Un même raisonnement montre que $U = 0$.

Ainsi, $\ker(f_{A,B}) \subset \{(0, 0)\}$, puis $\ker(f_{A,B}) = \{(0, 0)\}$.

Comme

$$\dim(\mathbf{K}_{m-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X]) = \dim(\mathbf{K}_{n+m-1}[X]) = n + m,$$

on en déduit que $f_{A,B}$ est un isomorphisme.

\Leftarrow Si $f_{A,B}$ est un isomorphisme, le polynôme constant égal à 1 admet un antécédent (U, V) par $f_{A,B}$: on a $AU + BV = 1$.

D'après la théorème de Bezout, on peut conclure que A et B sont premiers entre eux.

L'équivalence est montrée.

3. Soient

$$\mathcal{B} = ((1, 0), (X, 0), \dots, (X^{m-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, X^{n-1}))$$

et

$$\mathcal{B}' = (1, X, \dots, X^{n+m-1})$$

deux bases de respectivement $\mathbf{K}_{m-1}[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X]$ et $\mathbf{K}_{n+m-1}[X]$.

Il est facile de voir que la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & \cdots & 0 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a_1 & \cdots & \vdots & \vdots & b_1 & \cdots & 0 \\ a_n & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & b_0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m & \vdots & \cdots & b_1 \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 & b_m & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & a_1 & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & 0 & 0 & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

est la matrice de $f_{A,B}$ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

D'après la question 2, il en résulte que A et B sont premiers entre eux si, et seulement si, le déterminant de la matrice $S(A, B)$ est non nul.

4. On montre les deux implications.

\Rightarrow Si P a une racine α d'ordre au moins 2, α est racine de P' . Le polynôme $X - \alpha$ divise P et P' : les polynômes P et P' ne sont pas premiers entre eux.

D'après la question 3, on a $\text{Res}(P, P') = 0$.

\Leftarrow Comme $\text{Res}(P, P') = 0$, d'après la question 2, les polynômes P et P' ne sont pas premiers entre eux : il existe un polynôme D non constant qui divise P et P' .

Comme D n'est pas constant, d'après le théorème de Gauss-d'Alembert, D admet au moins une racine complexe z .

Il s'ensuit que $X - z$ divise D , donc $X - z$ divise P et P' .

z est racine de P et de P' , donc z est racine d'ordre au moins 2 pour P .

L'équivalence est montrée.

5. On peut écrire :

```

1 from scipy import *
2 from numpy.linalg import *
3 def resultant(P,Q):
4     p=len(P)
5     q=len(Q)
6     R=zeros((p+q-2,p+q-2))
7     if p==1:
8         if P[0]==0:
9             return 0
10        else:
11            return 1
12    elif q==1:
```

```

13     if Q[0]==0:
14         return 0
15     else:
16         return 1
17     else:
18         for k in range(p+q-2):
19             if k<=q-2:
20                 for i in range(p):
21                     R[k+i,k]=P[i]
22             else:
23                 for i in range(q):
24                     R[k-i,k]=Q[i]
25         return det(R)

```

6. • Les polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

- Les polynômes irréductibles de $\mathbf{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1, ainsi que les polynômes de degré 2 dont le discriminant Δ est strictement négatif.

7. (a) Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ de degré 1.

Il est clair que $P \notin \mathbf{K}_0[X]$. Soit $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $P = UV$. Il est clair que U et V ne sont pas nuls.

On a $\deg(P) = \deg(U) + \deg(V) = 1$. Comme $\deg(U)$ et $\deg(V)$ sont des éléments de $\{0, 1\}$, ainsi $\deg(U) = 0$ ou $\deg(V) = 0$.

On a montré que $U \in \mathbf{K}_0[X]$ ou $V \in \mathbf{K}_0[X]$, ainsi

P est irréductible sur $\mathbf{K}[X]$.

- (b) On montre les deux implications.

\Rightarrow Supposons que P ait au moins une racine α dans \mathbf{K} : il existe $Q \in \mathbf{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.

Comme P est de degré 2 ou 3, on en déduit que Q est de degré 1 ou 2, en particulier, $X - \alpha$ et Q ne sont pas des polynômes constants.

Ainsi, P n'est pas irréductible et cela contredit l'hypothèse faite.

\Leftarrow Supposons que P ne soit pas irréductible.

Il existe $(U, V) \in (\mathbf{K}[X] \setminus \mathbf{K}_0[X])^2$ tel que $P = UV$.

- Si P est de degré 2, alors U et V sont de degré 1 et donc admettent au moins une racine dans \mathbf{K} . Ainsi, P admet au moins une racine dans \mathbf{K} .
- Si P est de degré 3, alors, par exemple, U est de degré 1 et V est de degré 2. U admet au moins une racine dans \mathbf{K} , donc P aussi.

L'équivalence est montrée.

- (c) Cette propriété ne se généralise pas aux polynômes de degré au moins 4. Par exemple, $P = X^4 + 1 \in \mathbf{R}[X]$ n'admet pas de racine réelle et $P = (X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$ n'est pas irréductible sur $\mathbf{R}[X]$.

8. (a) Quitte à diviser par le coefficient dominant de P , on peut supposer P unitaire.

Soit D le PGCD de P et P_1 . Comme D divise P irréductible, on a $D = 1$ ou $D = P$.

- Si $D = P$, alors P divise P_1 .
- Si $D = 1$, alors les polynômes P et P_1 sont premiers entre eux : par le théorème de Bezout, il existe $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $PU + P_1V = 1$. Ainsi, $P_2 = PUP_2 + P_1P_2V$. On en déduit que P divise P_2 car P divise PUP_2 et P divise P_1P_2V .

On a montré que si P irréductible divise un produit de polynômes non nuls, alors P divise l'un d'eux.

- (b) On procède par récurrence et pour tout $r \geq 2$, on introduit la proposition \mathcal{P}_r : « si P irréductible divise $\prod_{i=1}^r P_i$, avec pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $P_i \neq 0$, alors P divise l'un des P_i ».

\mathcal{P}_2 est vraie : c'est la question 8 (a).

Supposons \mathcal{P}_r vraie pour un certain entier $r \geq 2$.

Soit $(P_1, \dots, P_{r+1}) \in (\mathbf{K}[X] \setminus \{0\})^{r+1}$ et $P \in \mathbf{K}[X]$ irréductible tel que P divise $\prod_{i=1}^{r+1} P_i$.

Si P divise P_1 , c'est terminé.

Sinon, d'après la question 8 (a), P divise $\prod_{i=2}^{r+1} P_i$. D'après l'hypothèse de récurrence, P divise l'un des P_i avec $i \in \llbracket 2, r+1 \rrbracket$.

Ainsi, \mathcal{P}_{r+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_r est vraie pour tout entier $r \geq 2$.

9. (a) On procède par récurrence sur le degré. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « tout polynôme à coefficients dans \mathbf{K} de degré n est le produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{K}[X]$ ».

D'après la question 7 (a), \mathcal{P}_1 est vraie.

On suppose $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ vraies pour un certain entier naturel n , montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme de degré $n+1$.

- Si P est irréductible sur $\mathbf{K}[X]$, on écrit $P = c\tilde{P}$ où \tilde{P} est unitaire et $c \in \mathbf{K}$. Comme P est irréductible sur $\mathbf{K}[X]$, \tilde{P} l'est aussi.
- Si P n'est pas irréductible, alors il existe $(U, V) \in (\mathbf{K}[X] \setminus \mathbf{K}_0[K])^2$ tel que $P = UV$.

Comme $1 \leq \deg(U) \leq n$ et $1 \leq \deg(V) \leq n$, on applique les hypothèses de récurrence aux polynômes U et V : on peut écrire $U = cQ_1^{\alpha_1} \dots Q_s^{\alpha_s}$ (resp. $V = c'R_1^{\beta_1} \dots R_r^{\beta_r}$) où $c \in \mathbf{K}$ (resp. $c' \in \mathbf{K}$),

les polynômes Q_i et R_j sont irréductibles sur $\mathbf{K}[X]$ et unitaires et $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in (\mathbf{N}^*)^s$ (resp. $(\beta_1, \dots, \beta_r) \in (\mathbf{N}^*)^r$).

On a donc

$$P = cc' Q_1^{\alpha_1} \dots Q_s^{\alpha_s} R_1^{\beta_1} \dots R_r^{\beta_r}.$$

P s'écrit comme le produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{K}[X]$.

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie, ainsi par le principe de raisonnement par récurrence, tout polynôme non constant s'écrit comme le produit de polynômes irréductibles sur $\mathbf{K}[X]$.

- (b) On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « tout polynôme de degré n s'écrit comme un produit unique de polynômes irréductibles unitaires à l'ordre près ».

Soit P un polynôme de degré 1. On peut écrire $P = c(X - \alpha)$ avec $X - \alpha$ irréductible sur $\mathbf{K}[X]$ (question 7 (a)). Il est clair que cette décomposition est unique.

Ainsi, \mathcal{P}_1 est vraie.

On suppose $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$ vraies pour un certain entier naturel n , montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Soit P un polynôme de degré $n + 1$ ayant deux décompositions :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^r P_k^{\alpha_k} = \mu \prod_{k=1}^s Q_k^{\beta_k}$$

où les polynômes $P_1, \dots, P_r, Q_1, \dots, Q_s$ sont unitaires et irréductibles sur $\mathbf{K}[X]$.

Montrons que $\lambda = \mu$, $r = s$, qu'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_r$ telle que pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $Q_i = P_{\sigma(i)}$ et $\beta_i = \alpha_{\sigma(i)}$.

L'identification des coefficients dominants donne $\lambda = \mu$.

Q_1 divise $\prod_{k=1}^r P_k^{\alpha_k}$, comme Q_1 est irréductible, d'après la question 8 (b),

Q_1 divise l'un des P_j . On a donc $Q_1 = P_j$ car ces deux polynômes sont irréductibles.

On suppose, par exemple, $\alpha_1 \leq \beta_1$. On a alors

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r P_k^{\alpha_k} = Q_1^{\beta_1 - \alpha_1} \prod_{k=2}^s Q_k^{\beta_k}.$$

On a alors $\beta_1 = \alpha_1$ car sinon en appliquant de nouveau le résultat de la question 8 (b), Q_1 serait égal à l'un des P_i avec $i \neq j$, ce qui est exclu.

On pose $j = \sigma(1)$.

On obtient alors

$$\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^r P_k^{\alpha_k} = \prod_{k=2}^s Q_k^{\beta_k}.$$

L'hypothèse de récurrence s'applique alors.

On a montré que tout polynôme non constant de $\mathbf{K}[X]$ s'écrit comme un produit unique à l'ordre près de polynômes irréductibles.

10. On prouve que \mathcal{R}_P est réflexive, symétrique et transitive.

- *Réflexivité*

Soit $Q \in \mathbf{K}[X]$. Il est clair que $Q\mathcal{R}_PQ$ car P divise $Q - Q = 0$.

- *Symétrie*

Soient $(Q_1, Q_2) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $Q_1\mathcal{R}_PQ_2$. Ainsi, P divise $Q_1 - Q_2$, donc P divise $Q_2 - Q_1$, puis $Q_2\mathcal{R}_PQ_1$.

- *Transitivité*

Soit $(Q_1, Q_2, Q_3) \in \mathbf{K}[X]^3$ tel que $Q_1\mathcal{R}_PQ_2$ et $Q_2\mathcal{R}_PQ_3$. Ainsi, P divise $Q_1 - Q_2$ et P divise $Q_2 - Q_3$, ainsi P divise $Q_1 - Q_2 + Q_2 - Q_3 = Q_1 - Q_3$, donc $Q_1\mathcal{R}_PQ_3$.

On a montré que \mathcal{R}_P est une relation d'équivalence sur $\mathbf{K}[X]$.

11. (a) On remarque que, pour tout $A \in \mathbf{K}[X]$, $A \in \text{cl}(A)$ car $A\mathcal{R}_PA$. On prouve les deux implications.

\Rightarrow On a $A_1 \in \text{cl}(A_1) = \text{cl}(A_2)$, donc $A_1\mathcal{R}_PA_2$.

\Leftarrow Soit $P \in \text{cl}(A_1)$. On a $P\mathcal{R}_PA_1$ et par hypothèse, $A_1\mathcal{R}_PA_2$, donc par transitivité de \mathcal{R}_P , $P\mathcal{R}_PA_2$, soit $P \in \text{cl}(A_2)$. On a montré que $\text{cl}(A_1) \subset \text{cl}(A_2)$.

Par symétrie, on a $\text{cl}(A_2) \subset \text{cl}(A_1)$, soit $\text{cl}(A_1) = \text{cl}(A_2)$.

L'équivalence est prouvée.

(b) On prouve les deux implications.

\Rightarrow Comme $A_1 \in \text{cl}(A_1)$ et $\text{cl}(A_1) \cap \text{cl}(A_2) = \emptyset$,
 $A_1 \notin \text{cl}(A_2)$, donc $A_1\not\mathcal{R}_PA_2$.

\Leftarrow On suppose $\text{cl}(A_1) \cap \text{cl}(A_2) \neq \emptyset$, soit $Q \in \text{cl}(A_1) \cap \text{cl}(A_2)$.
On a $A_1\mathcal{R}_PQ$ et $Q\mathcal{R}_PA_2$, d'où par transitivité de \mathcal{R}_P , $A_1\mathcal{R}_PA_2$, ce qui contredit l'hypothèse.

L'équivalence est prouvée.

12. • *Loi +*

Soit $(A, B) \in \mathbf{K}[X]^2$, soit $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \text{cl}(A) \times \text{cl}(B)$.

Montrons que

$$\text{cl}(\tilde{A}) + \text{cl}(\tilde{B}) = \text{cl}(A) + \text{cl}(B),$$

autrement dit,

$$\text{cl}(A + B) = \text{cl}(\tilde{A} + \tilde{B}).$$

Soit $Q \in \text{cl}(A + B)$. On a

$$Q - (\tilde{A} + \tilde{B}) = Q - (A + B) + (A - \tilde{A}) + (B - \tilde{B}).$$

Or, P divise $Q - (A + B)$ car $Q \in \text{cl}(A + B)$, P divise $A - \tilde{A}$ (resp. $B - \tilde{B}$) car $\tilde{A} \in \text{cl}(A)$ (resp. $\tilde{B} \in \text{cl}(B)$), ainsi P divise $Q - (\tilde{A} + \tilde{B})$. Cela montre que $Q \in \text{cl}(\tilde{A} + \tilde{B})$.

On a montré que $\text{cl}(A + B) \subset \text{cl}(\tilde{A} + \tilde{B})$.

Un même raisonnement montre que $\text{cl}(\tilde{A} + \tilde{B}) \subset \text{cl}(A + B)$. On a donc

$$\text{cl}(A + B) = \text{cl}(\tilde{A} + \tilde{B}).$$

L'addition $+$ est bien définie sur $\mathbf{K}[X]/(P)$.

• *Loi \times*

Soit $(A, B) \in \mathbf{K}[X]^2$, soit $(\tilde{A}, \tilde{B}) \in \text{cl}(A) \times \text{cl}(B)$.

Montrons que

$$\text{cl}(\tilde{A}) \times \text{cl}(\tilde{B}) = \text{cl}(A) \times \text{cl}(B) \iff \text{cl}(AB) = \text{cl}(\tilde{A}\tilde{B}).$$

Soit $Q \in \text{cl}(AB)$. On a

$$Q - \tilde{A}\tilde{B} = (Q - AB) + (A - \tilde{A})B + (B - \tilde{B})\tilde{A}.$$

Or, P divise $Q - AB$ car $Q \in \text{cl}(AB)$, P divise $(A - \tilde{A})B$ (resp. $(B - \tilde{B})\tilde{A}$) car $\tilde{A} \in \text{cl}(A)$ (resp. $\tilde{B} \in \text{cl}(B)$), ainsi P divise $Q - \tilde{A}\tilde{B}$, donc $Q \in \text{cl}(\tilde{A}\tilde{B})$.

On a montré que $\text{cl}(AB) \subset \text{cl}(\tilde{A}\tilde{B})$.

Un même raisonnement montre que $\text{cl}(\tilde{A}\tilde{B}) \subset \text{cl}(AB)$. On a donc

$$\text{cl}(AB) = \text{cl}(\tilde{A}\tilde{B}).$$

La multiplication \times est bien définie sur $\mathbf{K}[X]/(P)$.

13. Ce sont des vérifications laissées au lecteur. Notons simplement que toutes ces vérifications découlent du fait que $(\mathbf{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif et grâce aux résultats établis à la question 12.

14. (a) Soit $(x, y) \in \mathbf{K}^2$ tel que $xy = 0$.

On suppose $x \neq 0$. Comme x est inversible dans \mathbf{K} , on a $x^{-1}xy = 0$, donc $y = 0$.

On a montré que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{K}^2, \quad (xy = 0) \implies (x = 0 \text{ ou } y = 0).$$

- (b) On prouve les deux implications. On note que $\text{cl}(P) = \text{cl}(0)$ car, pour tout $Q \in \mathbf{K}[X]$,

$$Q \in \text{cl}(P) \iff P|Q - P \iff P|Q \iff Q \in \text{cl}(0).$$

\implies Supposons que P ne soit pas irréductible sur $\mathbf{K}[X]$: il existe deux polynômes non constants P_1 et P_2 tels que $P_1 P_2 = P$.

On a donc $\text{cl}(P_1 P_2) = \text{cl}(P_1) \text{cl}(P_2) = \text{cl}(P) = \text{cl}(0)$.

Or, $\text{cl}(P_1) \neq \text{cl}(0)$ car P ne divise pas P_1 car $\deg(P_1) < \deg(P)$. De même, $\text{cl}(P_2) \neq \text{cl}(0)$.

On a trouvé deux éléments non nuls de $\mathbf{K}[X]/(P)$ dont le produit est nul, cela contredit le résultat de la question 14 (a).

On en déduit que P est irréductible sur $\mathbf{K}[X]$.

\impliedby Soit $\text{cl}(Q) \in \mathbf{K}[X]/(P)$ non nul. On remarque que Q n'est pas un multiple de P car sinon, on aurait P divise Q puis $\text{cl}(Q) = \text{cl}(0)$.

Comme P est irréductible sur $\mathbf{K}[X]$, on en déduit que P et Q sont premiers entre eux.

Par le théorème de Bezout, il existe $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$ tel que $PU + QV = 1$. Ainsi,

$$\text{cl}(PU + QV) = \text{cl}(P) \text{cl}(U) + \text{cl}(Q) \text{cl}(V) = \text{cl}(1).$$

Comme $\text{cl}(P) = \text{cl}(0)$, on en déduit que

$$\text{cl}(Q) \text{cl}(V) = \text{cl}(1).$$

On a montré que tout élément non nul de $\mathbf{K}[X]/(P)$ est inversible, ainsi $(\mathbf{K}[X]/(P), +, \times)$ est un corps.

L'équivalence est prouvée.

15. Soit $(A, B) \in \mathbf{K}[X]^2$.

- D'après la question 12, on a :

$$\pi(A + B) = \text{cl}(A + B) = \text{cl}(A) + \text{cl}(B) = \pi(A) + \pi(B).$$

- D'après la question 12, on a :

$$\pi(AB) = \text{cl}(AB) = \text{cl}(A) \times \text{cl}(B) = \pi(A) \times \pi(B).$$

- On a

$$\pi(1) = \text{cl}(1) = 1.$$

On a montré que π est un morphisme d'anneaux.

16. On a $\pi(P) = \text{cl}(P) = \text{cl}(0) = 0$.

17. (a) On commence par montrer que $\ker(\varphi) = \{0\}$ ou \mathbf{K} .

Si $\ker(\varphi) = \{0\}$, c'est terminé. Sinon $\ker(\varphi)$ contient au moins un élément non nul x_0 .

En utilisant le fait que φ est un morphisme de corps et comme $\varphi(x_0) = 0$, pour tout $x \in K$, on a

$$\varphi(x) = \varphi(xx_0^{-1}x_0) = \varphi(xx_0^{-1})\varphi(x_0) = 0.$$

Ainsi, $K \subset \ker(\varphi)$, donc $\ker(\varphi) = \mathbf{K}$.

On peut conclure :

- Si $\ker(\varphi) = \{0\}$, alors φ est injective.

En effet, soit $(x, y) \in \mathbf{K}^2$. On a

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \varphi(y) &\iff \varphi(x - y) = 0 \\ &\iff x - y \in \ker(\varphi) = \{0\} \\ &\iff x = y. \end{aligned}$$

- Si $\ker(\varphi) = \mathbf{K}$, alors φ est nulle.

On a montré qu'un morphisme de corps est nul ou injectif.

- (b) Soit l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbf{K} & \rightarrow \mathbf{K}[X] \\ x & \mapsto x \end{cases}$.

De toute évidence, φ est un morphisme d'anneaux.

L'application $\psi = \pi \circ \varphi : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}[X]/(P)$ est donc un morphisme de corps.

Comme $\psi(1) = \text{cl}(1) \neq 0$, on en déduit que ψ n'est pas le morphisme nul.

Par la question 17 (a), ψ est injectif, donc $\mathbf{K}[X]/(P)$ est un sur-corps de \mathbf{K} .

18. (a) D'une part, $\pi(P) = 0$.

D'autre part, d'après la question 17 (b), pour tout $x \in \mathbf{K}$, on peut confondre x et $\text{cl}(x)$. Comme π est un morphisme d'anneaux, on a

$$\pi(P) = P(\pi(X)).$$

Ainsi, si l'on pose $\alpha = \pi(X)$, on a $P(\alpha) = 0$.

- (b) Le sur-corps $L = \mathbf{K}[X]/(P)$ convient d'après la question 18 (a).

19. On procède par récurrence sur le degré de A et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « pour tout corps \mathbf{K} , pour tout polynôme de degré n à coefficients dans \mathbf{K} , il existe un sur-corps L de \mathbf{K} dans lequel A est scindé ».

\mathcal{P}_1 est vraie car pour tout corps \mathbf{K} , pour tout polynôme A de degré 1 à coefficients dans \mathbf{K} , A est scindé.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et supposons \mathcal{P}_n vraie.

Soit A un polynôme de degré $n + 1$ à coefficients dans \mathbf{K} . D'après la question 9 (a), il existe des polynômes irréductibles Q_1, \dots, Q_s et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ tels que $A = Q_1^{\alpha_1} \dots Q_s^{\alpha_s}$.

D'après la question 18 (b), il existe un sur-corps \mathbf{L}_1 de \mathbf{K} dans lequel Q_1 admette une racine, disons α . Il s'ensuit que l'on a $A(\alpha) = 0$.

Comme $X - \alpha$ divise A dans $\mathbf{L}_1[X]$, il existe $B \in \mathbf{L}_1[X]$ tel que $A = (X - \alpha)B$. Comme $\deg(B) = n$ (car $\deg(A) = n + 1$), d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un sur-corps \mathbf{L} de \mathbf{L}_1 dans lequel B est scindé.

Il s'ensuit que A est scindé dans le sur-corps \mathbf{L} de \mathbf{K} , donc \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

On a montré que tout polynôme non constant à coefficients dans \mathbf{K} est scindé dans un sur-corps de \mathbf{K} .

20. Ce résultat découle du fait que le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes.

21. On écrit $P = \sum_{k=0}^p b_k X^k$ avec $b_p \neq 0$ (en particulier, $\deg(P) = p$). On calcule le déterminant suivant de taille $p + 1$

$$\text{Res}(P, X - \alpha) = \begin{vmatrix} b_0 & -\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & 1 & -\alpha & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ b_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & -\alpha \\ b_p & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 + \alpha L_2 + \alpha^2 L_3 + \cdots + \alpha^p L_{p+1}$ donne

$$\text{Res}(P, X - \alpha) = \begin{vmatrix} P(\alpha) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & 1 & -\alpha & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ b_{p-1} & 0 & \cdots & 1 & -\alpha \\ b_p & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant par rapport à la première ligne et en remarquant que

$$\begin{vmatrix} 1 & -\alpha & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

on en déduit que $\text{Res}(P, X - \alpha) = P(\alpha)$.

22. (a) Il suffit d'appliquer la formule de Taylor pour les polynômes aux polynômes P et Q . On a aussi

$$(X - \lambda)Q = \sum_{j=1}^{m+1} q'_j (X - \lambda)^{j+1}.$$

(b) Il est clair que les familles \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont libres.

Ce sont des bases car ce sont des familles de cardinal $n + m + 1$ dans des espaces vectoriels de dimension $n + m + 1$.

(c) Pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a

$$f_{P, (X-\lambda)Q} \left((X-\lambda)^k, 0 \right) = (X-\lambda)^k P = \sum_{i=0}^n p'_i (X-\lambda)^{i+k}$$

et pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} f_{P, (X-\lambda)Q} \left(0, (X-\lambda)^k \right) &= (X-\lambda)^k Q \\ &= \sum_{j=0}^m p'_j (X-\lambda)^{j+k+1}. \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$S'(P, (X-\lambda)Q) = \begin{pmatrix} p'_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p'_1 & p'_0 & \cdots & 0 & q'_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & p'_1 & \cdots & \vdots & \vdots & q'_0 & \cdots & 0 \\ p'_n & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & p'_n & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & q'_m & \vdots & \cdots & q'_0 \\ 0 & 0 & \cdots & p'_0 & 0 & q'_m & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & p'_1 & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p'_n & 0 & 0 & \cdots & q'_m \end{pmatrix}.$$

(d) Par définition, $S(P, (X-\lambda)Q)$ est la matrice de $f_{P, (X-\lambda)Q}$ dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} suivantes :

$$\left((1, 0), (X, 0), \dots, (X^m, 0), (0, 1), (X, 0), \dots, (0, X^{n-1}) \right)$$

et

$$(1, X, \dots, X^{n+m})$$

de respectivement $\mathbf{K}_m[X] \times \mathbf{K}_{n-1}[X]$ et $\mathbf{K}_{n+m}[X]$.

Ainsi, $S(P, (X-\lambda)Q)$ et $S'(P, (X-\lambda)Q)$ sont deux matrices d'une application linéaire mais dans des couples de bases différentes : les matrices sont équivalentes. On peut donc écrire

$$S(P, (X-\lambda)Q) = US'(P, (X-\lambda)Q)V, \quad (22.1)$$

où U est la matrice de passage de la base \mathcal{B} à \mathcal{C} et V est la matrice de passage de la base \mathcal{C}' à \mathcal{B}' .

Or, par définition des bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' et des bases \mathcal{C} et \mathcal{C}' , les matrices U et V sont triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale : on en déduit que $\det(U) = \det(V) = 1$.

Finalement, en utilisant (22.1), on a montré que

$$\boxed{\det(S(P, (X - \lambda)Q)) = \det(S'(P, (X - \lambda)Q))}.$$

- (e) En développant le déterminant de la matrice $S'(P, (X - \lambda)Q)$ par rapport à la première ligne, on a

$$\det(S'(P, (X - \lambda)Q)) = p'_0 \begin{vmatrix} p'_0 & 0 & \cdots & 0 & q'_0 & 0 & \cdots & 0 \\ p'_1 & p'_0 & \cdots & 0 & q'_1 & q'_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & p'_1 & \cdots & \vdots & \vdots & q'_1 & \cdots & 0 \\ p'_n & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & p'_n & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & q'_m & \vdots & \cdots & q'_0 \\ 0 & 0 & \cdots & p'_0 & 0 & q'_m & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & p'_1 & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p'_n & 0 & 0 & \cdots & q'_m \end{vmatrix}.$$

Le même argument que celui utilisé à la question 21 (d) montre que

$$\operatorname{Res}(P, Q) = \det(f_{P,Q}) = \begin{vmatrix} p'_0 & 0 & \cdots & 0 & q'_0 & 0 & \cdots & 0 \\ p'_1 & p'_0 & \cdots & 0 & q'_1 & q'_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & p'_1 & \cdots & \vdots & \vdots & q'_1 & \cdots & 0 \\ p'_n & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & p'_n & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & q'_m & \vdots & \cdots & q'_0 \\ 0 & 0 & \cdots & p'_0 & 0 & q'_m & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & p'_1 & \vdots & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p'_n & 0 & 0 & \cdots & q'_m \end{vmatrix}.$$

On a donc montré que $\operatorname{Res}(P, (X - \lambda)Q) = p'_0 \operatorname{Res}(P, Q)$.

Comme $p'_0 = P(\lambda)$, on en déduit finalement que

$$\boxed{\operatorname{Res}(P, (X - \lambda)Q) = P(\lambda) \operatorname{Res}(P, Q)}.$$

23. On suit l'indication et on procède par récurrence sur le degré de Q .

Soit Q un polynôme de degré 1 : on pose $Q = b_1 (X - \beta_1)$.

Soit $P \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme non constant de $\mathbf{K}[X]$ dont on note $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines dans un sur-corps \mathbf{L} de \mathbf{K} (la question 19 en assure l'existence). On

a donc $P = a_p \prod_{i=1}^p (X - \alpha_i)$ avec $a_p \in \mathbf{K}$. D'après les questions 20 et 21, on a

$$\begin{aligned} \text{Res}(P, Q) &= b_1^{\deg(P)} \text{Res}(P, X - \beta_1) \\ &= b_1^p P(\beta_1) \\ &= b_1^p a_p \prod_{i=1}^p (\beta_1 - \alpha_i). \end{aligned}$$

La propriété est vraie pour les polynômes de degré 1.

Soit $q \in \mathbf{N}^*$ et on suppose le résultat de la question vrai pour tous les polynômes de degré q . Soit Q un polynôme de degré $q+1$ à coefficients dans \mathbf{K} et $P \in \mathbf{K}[X]$ non constant de degré p .

D'après la question 19, il existe un sur-corps \mathbf{L} de \mathbf{K} dans lequel le polynôme PQ est scindé. En particulier, dans \mathbf{L} , les polynômes P et Q sont scindés. On note $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines de P et $\beta_1, \dots, \beta_{q+1}$ celles de Q . On note a_p le coefficient

dominant de P et b_{q+1} celui de Q . Enfin, on pose $R = b_{q+1} \prod_{j=2}^{q+1} (X - \beta_j)$, de

sorte que $Q = (X - \beta_1) R$.

En utilisant la question 22, on a

$$\text{Res}(P, Q) = \text{Res}(P, (X - \beta_1) R) = P(\beta_1) \text{Res}(P, R).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\text{Res}(P, R) = a_p^q b_{q+1}^p \prod_{i=1}^p \prod_{j=2}^q (\beta_j - \alpha_i).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \text{Res}(P, Q) &= a_p \prod_{i=1}^p (\beta_1 - \alpha_i) a_p^q b_{q+1}^p \prod_{i=1}^p \prod_{j=2}^q (\beta_j - \alpha_i) \\ &= a_p^{q+1} b_{q+1}^p \prod_{i=1}^p \prod_{j=1}^{q+1} (\beta_j - \alpha_i). \end{aligned}$$

On a montré que la proposition est vraie pour tous les polynômes de degré $q+1$, ce qui termine la récurrence.

Thème 23

Approximation numérique

Thèmes abordés : Polynôme, algèbre linéaire, produit scalaire, intégration.

Difficulté : ■■■□□

Ce court sujet expose diverses méthodes pour calculer des intégrales. On y expose deux méthodes simples : la méthode des rectangles et la méthode du point du milieu. La méthode de quadrature de Gauss est aussi démontrée.

Les parties de ce problème sont largement indépendantes.

23.1 Divers méthodes pour calculer des intégrales

23.1.1 Méthode des rectangles (à gauche)

Soit $(a, b)^2$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

1. Rappeler la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right).$$

2. Montrer que, si l'on suppose f de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, alors, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \|f'\|_{\infty}^{[a,b]} \frac{(b-a)^2}{2n},$$

où

$$\|f'\|_{\infty}^{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

3. Écrire un programme Python qui calcule une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment en utilisant la méthode des rectangles à gauche.

23.1.2 Méthode du point du milieu

Soit $(a, b)^2$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose $m_k = \frac{a_k + a_{k+1}}{2}$.

4. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) = \int_a^b f(t) dt.$$

Indication : On pourra utiliser l'uniforme continuité de f sur $[a, b]$ et la question 1.

5. On suppose dans cette question que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$.

(a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x) - f(m_k) - (x - m_k) f'(m_k)) dx. \end{aligned}$$

(b) Montrer que : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}]$,

$$|f(x) - f(m_k) - (x - m_k) f'(m_k)| \leq \|f''\|_{\infty}^{[a,b]} \frac{(b-a)^2}{8n^2}.$$

(c) En déduire que : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \|f''\|_{\infty}^{[a,b]} \frac{(b-a)^3}{8n^2},$$

$$\text{où } \|f''\|_{\infty}^{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$

6. Écrire un programme Python qui calcule une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment en utilisant la méthode du point du milieu.

23.2 Une première méthode de quadrature

23.2.1 Les polynômes d'interpolation de Lagrange

Soit $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ ($n+1$) réels deux à deux distincts.

7. Rappeler l'expression des polynômes d'interpolation de Lagrange en les points x_0, \dots, x_n . On les note L_0, \dots, L_n .

23.2.2 Une méthode simple de quadrature

Nous allons prouver la proposition suivante :

Proposition. *Méthode de quadrature, version faible.*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit $n \in \mathbf{N}^*$.

Soient $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ($n+1$) éléments deux à deux distincts de $[a, b]$.

Alors, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad \int_a^b P(t) dt = \sum_{i=0}^n \alpha_i P(x_i).$$

Nous prouvons la proposition.

Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on introduit l'application φ_i par

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ P & \longmapsto P(x_i) \end{cases}.$$

8. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\varphi_i \in \mathcal{L}(\mathbf{R}_n[X], \mathbf{R})$.

9. Terminer la preuve de la proposition.

10. Préciser les réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$.

23.3 Méthode de quadrature de Gauss

On va voir dans cette partie que l'on peut améliorer le résultat précédent :

Proposition. *Méthode de quadrature, version forte.*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit $\omega : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continue avec ω s'annulant en au plus un nombre dénombrable de points.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soient $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ ($n+1$) points deux à deux distincts de $[a, b]$. Alors, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in \mathbf{R}_{2n+1}[X], \quad \int_a^b P(t) \omega(t) dt = \sum_{i=0}^n \alpha_i P(x_i). \quad (23.1)$$

23.3.1 Questions préliminaires

11. Justifier que l'application

$$\begin{cases} \mathbf{R}[X] \times \mathbf{R}[X] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ (P, Q) & \longmapsto \langle P, Q \rangle = \int_a^b P(t) Q(t) \omega(t) dt \end{cases}$$

est un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

12. En déduire qu'il existe une base orthonormée (P_0, \dots, P_{n+1}) de $\mathbf{R}_{n+1}[X]$ telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $\deg(P_k) = k$.

23.3.2 Preuve de la proposition

On prouve la proposition par analyse/synthèse. On suppose (23.1).

13. Montrer l'unicité de $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. On précisera en particulier l'expression des α_i pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
14. Montrer que les racines de P_{n+1} sont x_0, \dots, x_n .

On ne suppose plus (23.1).

15. Terminer la preuve de la proposition.
16. Montrer qu'il existe un polynôme de degré $2n + 2$ ne vérifiant pas (23.1).

23.3.3 Estimation de l'erreur

Le but de cette partie est d'établir la proposition suivante :

Proposition. *Estimation de l'erreur.*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit $\omega : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction s'annulant en au plus un nombre dénombrable de points.

Soit $q : t \mapsto \prod_{i=0}^n (t - x_i)$. Alors pour toute fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$, on a

$$\left| \int_a^b f(t) \omega(t) dt - \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{[a,b]} \int_a^b |q(t)| \omega(t) dt,$$

où $\|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{[a,b]} = \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$ et les $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont les réels dont les expressions sont données par la question 13.

On prouve la proposition. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^{n+1} .

17. Soit $x \in [a, b] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction

$$g : t \in [a, b] \mapsto f(t) - \sum_{i=0}^n L_i(t) f(x_i) - \frac{A}{(n+1)!} q(t),$$

où A est choisi de sorte que $g(x) = 0$, montrer qu'il existe $\zeta \in]a, b[$ tel que

$$f(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} q(x) f^{(n+1)}(\zeta). \quad (23.2)$$

18. Vérifier que (23.2) reste vraie si $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$.
19. Terminer la preuve de la proposition.

Correction du Thème 23

1. D'après le cours, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt.$$

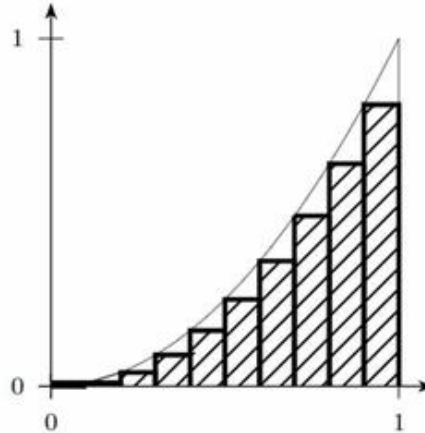


FIGURE 23.1 – La méthode des rectangles (à gauche) pour la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

2. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $a_k = a + k \frac{b-a}{n}$. On commence par écrire

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt$$

et, en remarquant que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$, on a

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt.$$

On obtient donc : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k) dt \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt. \end{aligned}$$

L'inégalité des accroissements finis donne : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \\ & \leq \|f'\|_{\infty}^{[a,b]} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |t - a_k| dt \\ & \leq \|f'\|_{\infty}^{[a,b]} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{(t - a_k)^2}{2} \right]_{a_k}^{a_{k+1}} \\ & \leq \|f'\|_{\infty}^{[a,b]} \frac{(b-a)^2}{2n}. \end{aligned}$$

On a montré que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \|f'\|_{\infty}^{[a,b]} \frac{(b-a)^2}{2n}.$$

3. On peut écrire :

```

1 def rectanglegauche(f,a,b,N):
2     int=0
3     for k in range(N):
4         int=int+f(a+k*(b-a)/float(N))
5     return (b-a)*int/float(N)

```

4. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur le segment $[a, b]$, d'après le théorème de Heine, f y est uniformément continue : il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (|x - y| \leq \alpha) \implies \left(|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \right).$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{N} \leq \alpha$. On note que pour tout $n \geq N$, $\frac{b-a}{n} \leq \alpha$. On a

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \right| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(m_k) - f(a_k)|.$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$|m_k - a_k| \leq |a_{k+1} - a_k| = \frac{b-a}{n} \leq \alpha,$$

on en déduit que

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \right| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} \leq \varepsilon.$$

On a montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \right) = 0.$$

Or, d'après la question 1, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \int_a^b f(t) dt.$$

On en déduit que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) = \int_a^b f(t) dt.}$$

La méthode du point du milieu peut s'illustrer de la façon suivante. On remarque que le dessin est semblable à celui de la méthode des rectangles.

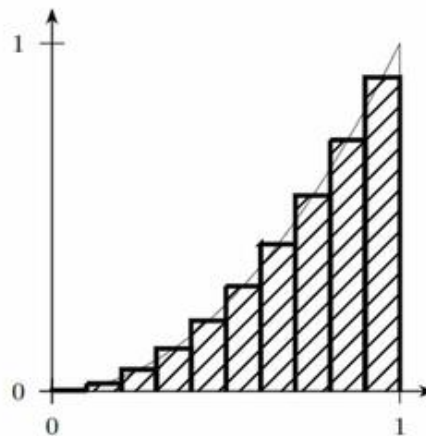


FIGURE 23.2 – La méthode du point du milieu pour la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

5. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(m_k)) dt.$$

On note que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - m_k) dt = 0.$$

On en déduit donc que : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(m_k)) dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(m_k) - (t - m_k) f'(m_k)) dt. \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité souhaitée.

- (b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. f étant supposée de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$, d'après la formule de Taylor avec reste intégral, on peut écrire : pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}]$,

$$f(x) = f(m_k) + f'(m_k)(x - m_k) + \int_{m_k}^x f''(t)(x - t) dt,$$

ainsi, pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}]$,

$$|f(x) - f(m_k) - f'(m_k)(x - m_k)| \leq \|f''\|_{\infty}^{[a, b]} \left| \int_{m_k}^x |x - t| dt \right|.$$

En distinguant les cas $x \geq m_k$ et $x < m_k$, on montre facilement que

$$\left| \int_{m_k}^x |x - t| dt \right| = \frac{(m_k - x)^2}{2} \leq \frac{(m_k - a_k)^2}{2} = \frac{(b - a)^2}{8n^2}.$$

On en déduit que : pour tout $x \in [a_k, a_{k+1}]$,

$$\boxed{|f(x) - f(m_k) - f'(m_k)(x - m_k)| \leq \|f''\|_{\infty}^{[a, b]} \frac{(b - a)^2}{8n^2}.}$$

- (c) En utilisant le résultat de la question 5 (a) et l'inégalité triangulaire : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x) - f(m_k) - (x - m_k) f'(m_k)) dx \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |(f(x) - f(m_k) - (x - m_k) f'(m_k))| dx \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question 5 (b), on a : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |(f(x) - f(m_k) - (x - m_k) f'(m_k))| dx \\ & \leq \|f''\|_{\infty}^{[a,b]} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{8n^2} \\ & \leq \|f''\|_{\infty}^{[a,b]} \frac{(b-a)^3}{8n^2}. \end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \left| \int_a^b f(t) dt - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(m_k) \right| \leq \|f''\|_{\infty}^{[a,b]} \frac{(b-a)^3}{8n^2}.$$

6. On peut écrire :

```

1 def methodemilieu(f,a,b,N):
2     int=0
3     for k in range(N):
4         int=int+(f(a+k*(b-a)/float(N))+f(a+(k+1)*(b-a)/float(N)))/2
5     return (b-a)*int/float(N)

```

7. Les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points x_0, \dots, x_n sont les polynômes L_0, \dots, L_n définis par :

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad L_j = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{X - x_i}{x_j - x_i}.$$

8. Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Soient $(P, Q) \in \mathbf{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_i(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(x_i) \\ &= P(x_i) + \lambda Q(x_i) \\ &= \varphi_i(P) + \lambda \varphi_i(Q). \end{aligned}$$

On a montré que pour tout $\llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi_i \in \mathcal{L}(\mathbf{R}_n[X], \mathbf{R})$.

9. Montrons que la famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbf{R}_n[X], \mathbf{R})$. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$a_0\varphi_0 + \dots + a_n\varphi_n = 0.$$

Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En évaluant la relation précédente en L_j , on en déduit que $a_j = 0$. La famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est donc une famille libre de $\mathcal{L}(\mathbf{R}_n[X], \mathbf{R})$.

Or, $\dim(\mathcal{L}(\mathbf{R}_n[X], \mathbf{R})) = n + 1$, on en déduit que la famille $(\varphi_0, \dots, \varphi_n)$ est une base $\mathcal{L}(\mathbf{R}_n[X], \mathbf{R})$.

Il est clair que l'application

$$\psi : \begin{cases} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow \mathbf{R} \\ P & \longmapsto \int_a^b P(t) dt \end{cases}$$

appartient à $\mathcal{L}(\mathbf{R}_n[X], \mathbf{R})$.

On en déduit qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$\psi = \alpha_0 \varphi_0 + \dots + \alpha_n \varphi_n,$$

soit

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad \int_a^b P(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(x_k).$$

10. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. En évaluant la relation de la question 9 en $P = L_j$, on obtient

$$\int_a^b L_j(t) dt = \sum_{k=0}^n L_j(x_k) = a_j.$$

11. • *Symétrie*

Il est clair que pour tout $(P, Q) \in \mathbf{R}[X]^2$, on a $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$, l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

• *Linéarité par rapport à la première variable*

Soit $(P_1, P_2, Q) \in \mathbf{R}[X]^3$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} \langle P_1 + \lambda P_2, Q \rangle &= \int_a^b (P_1(t) + \lambda P_2(t)) Q(t) dt \\ &= \int_a^b P_1(t) Q(t) dt + \lambda \int_a^b P_2(t) Q(t) dt \\ &= \langle P_1, Q \rangle + \lambda \langle P_2, Q \rangle. \end{aligned}$$

On a montré que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable. Par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la seconde variable.

• *Définie positive*

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. On a

$$\langle P, P \rangle = \int_a^b P^2(t) \omega(t) dt \geq 0.$$

De plus, si $P \in \mathbf{R}[X]$ est tel que $\langle P, P \rangle = 0$, alors comme la fonction $t \mapsto P^2(t)\omega(t)$ est positive et continue sur $[a, b]$, on a

$$\forall t \in [a, b], \quad P^2(t)\omega(t) = 0.$$

Or, ω s'annule sur un nombre au plus dénombrable \mathcal{D} de points sur $[a, b]$, on a

$$\forall t \in [a, b] \setminus \mathcal{D}, \quad P(t) = 0.$$

Or, $[a, b] \setminus \mathcal{D}$ est dense dans $[a, b]$ et P est continue sur $[a, b]$: la fonction $t \mapsto P(t)$ est nulle sur $[a, b]$. Ainsi, P admet une infinité de racines, donc $P = 0$.

On a montré que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}[X]$.

12. Il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la famille libre $(1, X, \dots, X^n, X^{n+1})$.

Le procédé d'orthonormalisation assure en particulier que : pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$,

$$\mathbf{R}_k[X] = \text{Vect}(1, X, \dots, X^k) = \text{Vect}(P_0, P_1, \dots, P_k).$$

En particulier, P_0 est de degré 1 et pour tout $j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$,

$$P_j \in \mathbf{R}_j[X] \quad \text{et} \quad P_j \notin \mathbf{R}_{j-1}[X],$$

donc $\deg(P_j) = j$.

La famille (P_0, \dots, P_{n+1}) est une famille orthonormée de $\mathbf{R}_{n+1}[X]$ telle que pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $\deg(P_k) = k$.

13. Soit $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Pour $P = P_j$, on obtient

$$\int_a^b P_j(t)\omega(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_j(x_k) = \alpha_j.$$

En particulier, $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont uniques.

14. On suppose qu'il existe $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que x_j ne soit pas racine de P_{n+1} .

Or, P_{n+1} est orthogonal à tous les polynômes P_0, \dots, P_n . Comme $\mathbf{R}_n[X] = \text{Vect}(P_0, \dots, P_n)$, on en déduit que P_{n+1} est orthogonal à tous les polynômes $P \in \mathbf{R}_n[X]$:

$$\int_a^b P(t)P_{n+1}(t)\omega(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P_{n+1}(x_k)P(x_k) = 0, \quad (23.3)$$

car $\deg(PP_{n+1}) \leq 2n+1$. En prenant dans (23.3) $P = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n (X - x_i)$ (de degré n), on obtient

$$0 = P_{n+1}(x_j)P(x_j),$$

ce qui est exclu car $P_{n+1}(x_j)$ et $P(x_j)$ ne sont pas nuls.

On a montré que les nombres x_0, \dots, x_n sont des racines de P_{n+1} . Or, $\deg(P_{n+1}) = n+1$, donc les racines de P_{n+1} sont les x_0, \dots, x_n .

15. Lors de l'analyse (questions 13 et 14), on a montré que si la ligne (23.1) est vérifiée, alors x_0, \dots, x_n sont les racines de P_{n+1} et

$$\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \alpha_j = \int_a^b P_j(t) \omega(t) dt.$$

Réciproquement, supposons ces deux conditions satisfaites. Le même raisonnement que celui de la question 9 montre que

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X], \quad \int_a^b P(t) \omega(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(x_k)$$

avec (question 13)

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \alpha_k = \int_a^b P_k(t) \omega(t) dt.$$

Soit $P \in \mathbf{R}_{2n+1}[X]$. En effectuant la division euclidienne de P par P_{n+1} , il existe $(Q, R) \in \mathbf{R}_n[X]^2$ tel que

$$P = P_{n+1}Q + R.$$

On en déduit que

$$\int_a^b P(t) \omega(t) dt = \int_a^b P_{n+1}(t) Q(t) \omega(t) dt + \int_a^b R(t) \omega(t) dt.$$

Or,

$$\int_a^b P_{n+1}(t) Q(t) \omega(t) dt = \langle P_{n+1}, Q \rangle = 0$$

car $Q \in \mathbf{R}_n[X]$ et

$$\int_a^b R(t) \omega(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k R(x_k) = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(x_k),$$

car x_0, \dots, x_n sont racines de P_{n+1} . On en déduit que

$$\forall P \in \mathbf{R}_{2n+1}[X], \quad \int_a^b P(t) \omega(t) dt = \sum_{k=0}^n \alpha_k P(x_k).$$

16. Soit $P = \prod_{i=0}^n (X - x_i)^2$. Il est clair que $\deg(P) = 2n + 2$ et

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k P(x_k) = 0.$$

Or,

$$\int_a^b \omega(t) P(t) dt > 0$$

car $t \mapsto P(t)\omega(t)$ est continue sur $[a, b]$, à valeurs positives et non nulle.

17. Déjà, il est clair que la fonction g est de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$.

Montrons par récurrence, que pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n+2-k$ valeurs sur $[a, b]$.

\mathcal{P}_0 est vraie, car par hypothèse, g s'annule en x_0, \dots, x_n, x (ces $n+2$ réels sont deux à deux distincts).

Supposons \mathcal{P}_k vraie pour un entier $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On note $y_1 < \dots < y_{n+2-k}$ des valeurs d'annulation de g deux à deux distinctes.

Pour $i \in \llbracket 1, n+2-(k+1) \rrbracket$, le théorème de Rolle appliqué à $g^{(k)}$ entre y_i et y_{i+1} assure qu'il existe $z_i \in]y_i, y_{i+1}[$ tel que

$$g^{(k+1)}(z_i) = 0$$

Ainsi, \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, \mathcal{P}_k est vraie pour tout $k \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, en particulier, il existe $\zeta \in]a, b[$ tel que

$$g^{(n+1)}(\zeta) = 0.$$

Or,

$$\forall x \in [a, b], \quad g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - A,$$

car pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $L_i^{(n+1)} = 0$ (ce sont des polynômes de degré n) et $q^{(n+1)} = (n+1)!$ (c'est un polynôme unitaire de degré $n+1$). Ainsi,

$$g^{(n+1)}(\zeta) = 0 \iff A = f^{(n+1)}(\zeta).$$

Finalement, on a bien montré que

$$\exists \zeta \in]a, b[, \quad f(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} q(x) f^{(n+1)}(\zeta).$$

18. Soit $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$: il existe $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $x = x_j$. On a

$$q(x_j) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n L_k(x_j) f(x_k) = f(x_j).$$

Ainsi, on a

$$\forall \zeta \in]a, b[, \quad f(x) = \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) + \frac{1}{(n+1)!} q(x) f^{(n+1)}(\zeta).$$

En particulier, la relation (23.2) reste vraie pour $x \in \{x_0, \dots, x_n\}$.

19. f étant supposée de classe \mathcal{C}^{n+1} sur $[a, b]$, $f^{(n+1)}$ y est bornée, donc $\|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{[a,b]}$ existe. D'après les questions 17 et 18, on a : pour tout $x \in [a, b]$,

$$\left| f(x) \omega(x) - \sum_{i=0}^n L_i(x) f(x_i) \right| \leq \frac{\omega(x) |q(x)| \|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{[a,b]}}{(n+1)!}.$$

En intégrant la précédente inégalité, en utilisant l'inégalité triangulaire et en utilisant les expressions de $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ obtenues à la question 13, on en déduit donc

$$\left| \int_a^b f(t) \omega(t) dt - \sum_{i=0}^n \alpha_i f(x_i) \right| \leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}^{[a,b]}}{(n+1)!} \int_a^b |q(t)| \omega(t) dt.$$

Quelques remarques culturelles

Il existe d'autres méthodes pour calculer une valeur approchée d'une intégrale. Citons, par exemple, la méthode de Monte-Carlo :

Proposition. *Méthode de Monte-Carlo.*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées suivant toutes une loi uniforme sur $[0, 1]$ (i.e. ce sont des nombres choisis au hasard entre 0 et 1 de manière indépendante). Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_k) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Cette méthode est moins efficace car on peut montrer que la convergence se fait à la vitesse de $\frac{1}{\sqrt{n}}$, à comparer à $\frac{1}{n}$ avec la méthode des rectangles et à $\frac{1}{n^2}$ pour la méthode du point du milieu pour les fonctions de classe \mathcal{C}^1 (questions 2 et 5 (c)).

Cependant, cette méthode se généralise facilement à des fonctions définies dans \mathbf{R}^p ($p \in \mathbf{N}^*$) ou à des fonctions moins régulières que les fonctions continues (les fonctions mesurables).

On terminera ce paragraphe avec le résultat suivant que le lecteur motivé pourra prouver :

Théorème. *Critère d'équirépartition de Weyl.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^}$ une suite d'éléments de $[0, 1]$. On a équivalence entre :*

i) *pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ continue, on a*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(u_k) = \int_0^1 f(t) dt ;$$

ii) *la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est équirépartie, i.e. pour tout $(a, b) \in [0, 1]^2$ avec $a \leq b$,*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \text{card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k \in [a, b]\} = b - a.$$

Thème 24

Convexité du déterminant

Thèmes abordés : Déterminant, produit scalaire, continuité, développement limité.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet étudie quelques propriétés de convexité du déterminant. Les résultats des parties 1 et 2 sont utilisés dans les parties 3 et 4.

On pourra utiliser librement les résultats et définition suivants :

Théorème. Théorème spectral.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ (matrice orthogonale) et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ matrice diagonale telles que

$$A = P^{-1}DP = {}^tPDP.$$

Théorème. Théorème de réduction simultanée.

Pour tout $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ (voir ci-dessous pour les notations), il existe $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ et $D \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ diagonale telle que

$$A = {}^tPP \quad \text{et} \quad B = {}^tPDP.$$

Définition. Fonction convexe.

Soit I un intervalle non trivial de \mathbf{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I . On dit que f est convexe sur I si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.

Remarque. La définition de fonction convexe proposée ci-dessus n'est pas la « vraie » définition d'une fonction convexe. Notons que pour les fonctions deux fois dérivable, la définition proposée ci-dessus et la « vraie » définition coïncident.

On renvoie le lecteur intéressé au Thème 26 : « Une introduction aux fonctions convexes ».

Proposition. Le graphe d'une fonction convexe est au-dessus de ses tangentes.

Soit I un intervalle non trivial de \mathbf{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I et convexe. Alors,

$$\forall a \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a).$$

24.1 Structure euclidienne

Soit l'application $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2 \mapsto \text{tr}(A^t B) := \langle A, B \rangle$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Donner une expression explicite de $\langle A, A \rangle$ à l'aide des coefficients de A .
2. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée au produit scalaire défini à la question 2.

3. Montrer que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2, \quad \|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|.$$

Définitions. *Convergence d'une suite de matrices, convergence d'une série de matrices.*

- Soit $(A_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que la suite $(A_m)_{m \in \mathbf{N}}$ converge vers A si, et seulement si :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \|A_m - A\| = 0.$$

- Soit $(A_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une suite de matrices. On dit que la série $\sum_{m \geq 0} A_m$ converge si, et seulement si, la suite $\left(\sum_{k=0}^m A_k \right)_{m \in \mathbf{N}}$ converge.

On admet que si la série $\sum_{m \geq 0} \|A_m\|$ converge, alors la série $\sum_{m \geq 0} A_m$ converge.

24.2 Matrices symétriques positives, définies positives

Définitions. *Matrice symétrique positive, définie positive.*

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que A est *symétrique positive* si A est symétrique et si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), \quad \langle AX, X \rangle \geq 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que A est *symétrique définie positive* si A est symétrique et si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}, \quad \langle AX, X \rangle > 0.$$

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

4. Les ensembles $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ sont-ils des espaces vectoriels?
5. Montrer que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{G}\ell_n(\mathbf{R})$. En est-il de même de $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$?

24.3 Calculs préliminaires

24.3.1 Dérivée du déterminant

Soit $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbf{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Soit l'application $f_A : t \in \mathbf{R} \mapsto \det(A + tM)$.

6. Montrer que

$$\det(\mathbf{I}_n + tM) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + \operatorname{tr}(M)t + o(t).$$

7. En déduire que

$$f_A(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \det(A) + \operatorname{tr}({}^t \operatorname{com}(A)M)t + o(t).$$

8. En déduire que f_A est dérivable en 0 et calculer $f'_A(0)$.

9. (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $A + tM \in \mathcal{G}l_n(\mathbf{R})$.

(b) En se ramenant à la question 8, en déduire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f_A est dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad f'_A(t) = \operatorname{tr}({}^t \operatorname{com}(A + tM)M).$$

24.3.2 Dérivée de l'inverse

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice non nulle.

10. Soit $N \in \mathbf{N}$. Développer $(\mathbf{I}_n + tM) \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k M^k$.

11. Montrer que qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\mathbf{I}_n + tM$ est inversible et

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad (\mathbf{I}_n + tM)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k M^k.$$

12. En déduire que

$$(\mathbf{I}_n + tM)^{-1} \underset{t \rightarrow 0}{=} \mathbf{I}_n - tM + o(t).$$

13. À l'aide du résultat de la question 12, montrer que

$$\forall A \in \mathcal{G}l_n(\mathbf{R}), \quad (A + tM)^{-1} \underset{t \rightarrow 0}{=} A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + o(t).$$

24.4 Convexité du déterminant

Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ telles que $A \neq M$.

14. En utilisant le théorème de réduction simultanée admis en en-tête, montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad A + tM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}).$$

Soit $\kappa \in \left] -\frac{1}{n}, +\infty \right[\setminus \{0\}$. On définit sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ l'application φ par :

$$\forall t \in] -\varepsilon, \varepsilon[, \quad \varphi_\kappa(t) = \frac{1}{\kappa} \det^{-\kappa}(A + tM).$$

15. (a) Montrer que si $N \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, alors $\det(N) > 0$.
 (b) Justifier alors que la fonction φ_κ est bien définie sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$ quel que soit la valeur de κ et montrer qu'elle est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\varepsilon, \varepsilon[$.
16. Montrer que

$$\forall t \in] -\varepsilon, \varepsilon[, \quad \varphi'_\kappa(t) = -\operatorname{tr}\left((A + tM)^{-1}M\right) \det^{-\kappa}(A + tM).$$

17. En utilisant les résultats des questions 9 et 13 et en faisant un développement limité de $\varphi'(t)$ en 0 à l'ordre 1, montrer que

$$\varphi''_\kappa(0) = \det^{-\kappa}(A) \left(\kappa \operatorname{tr}^2(A^{-1}M) + \operatorname{tr}\left((A^{-1}M)^2\right) \right).$$

Indication : On admet qu'il existe n réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$ tels que

$$A^{-1}M = P \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}.$$

18. En déduire que

$$\varphi''_\kappa(0) = \det^{-\kappa}(A) \left(\kappa \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \right).$$

19. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $\varphi''(0) > 0$.
 20. En déduire que qu'il existe $\alpha > 0$ tel que φ_κ soit convexe sur $] -\alpha, \alpha[$.
 21. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que : pour tout $t \in] -\alpha, \alpha[$,

$$\frac{1}{\kappa} \det^{-\kappa}(A + tM) \geq \frac{1}{\kappa} \det^{-\kappa}(A) - \operatorname{tr}(A^{-1}M) \det^{-\kappa}(A) t.$$

Correction du Thème 24

1. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note b_k le coefficient en position (k, k) de la matrice $A^t A$. On a

$$b_k = \sum_{i=1}^n A_{k,i} ({}^t A)_{i,k} = \sum_{i=1}^n A_{k,i}^2.$$

Il s'ensuit que

$$\langle A, A \rangle = \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_{k,i}^2.$$

2. On va montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, linéaire par rapport à chacune de ses variables et définie positive.

- *Symétrie*

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$. On a

$$\begin{aligned} \langle A, B \rangle &= \operatorname{tr}(A^t B) \\ &= \operatorname{tr}({}^t(A^t B)) \\ &= \operatorname{tr}(B^t A) \\ &= \langle B, A \rangle. \end{aligned}$$

- *Linéarité par rapport à la première variable*

Il est clair que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable : cela résulte de la linéarité de la transposition et de la linéarité de tr .

Comme $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique, elle est linéaire par rapport à la deuxième variable.

- *Définie positive*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Comme $\langle A, A \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_{k,i}^2 \geq 0$, on en déduit que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\langle A, A \rangle \geq 0$. De plus,

$$\begin{aligned} \langle A, A \rangle = 0 &\iff \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n A_{k,i}^2 = 0 \\ &\iff \forall (k, i) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, A_{k,i} = 0 \\ &\iff A = 0. \end{aligned}$$

On a montré que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

3. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$. On a

$$\|AB\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{i,k} B_{k,j} \right)^2.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on récupère

$$\begin{aligned} \|AB\|^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\left(\sum_{k=1}^n A_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n B_{k,j}^2 \right) \right) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{i,k}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n B_{k,j}^2 \right) \\ &\leq \|A\|^2 \|B\|^2. \end{aligned}$$

On a montré que pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})^2$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

4. $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ ne sont pas des espaces vectoriels car

$$\mathbf{I}_n \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \cap \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$$

et pourtant

$$-\mathbf{I}_n \notin \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad -\mathbf{I}_n \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}).$$

5. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

Comme pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}$, $\langle AX, X \rangle > 0$, il s'ensuit que $\ker(A) \subset \{0\}$ et donc $\ker(A) = \{0\}$, donc A est inversible.

On a montré que $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$.

Comme $0 \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$, on a $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \not\subset \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$.

6. On note que si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ avec $\sigma \neq \text{id}_{[1,n]}$, alors σ a au plus $n-2$ fixes. En effet, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$ a $n-1$ points fixes dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, disons $\{x_1, \dots, x_{n-1}\}$. Comme σ est bijective, on a $\sigma(x_n) = x_n$, donc cela contredit le fait que σ ait $n-1$ points fixes.

Il s'ensuit que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{\text{id}_{[1,n]}\}$, σ a au plus $n-2$ points fixes.

Pour $t \in \mathbf{R}$, on pose $N_t = \mathbf{I}_n + tM$. On a

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad (N_t)_{i,j} = \begin{cases} tM_{i,j} & \text{si } i \neq j \\ 1 + tM_{i,i} & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Comme $\varepsilon(\text{id}_{[1,n]}) = 1$, on a

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{I}_n + tM) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (N_t)_{i,\sigma(i)} \\ &= \prod_{i=1}^n (1 + tM_{i,i}) + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n \setminus \{\text{id}_{[1,n]}\}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (N_t)_{i,\sigma(i)}. \end{aligned}$$

Or pour tout $\sigma \in S_n \setminus \{\text{id}_{[1,n]}\}$, σ a au plus $n - 2$ points fixes, au moins coefficients de la matrice N_t « apportent un t », donc par définition des coefficients de la matrice N_t , on a

$$\prod_{i=1}^n (N_t)_{i,\sigma(i)} \underset{t \rightarrow 0}{=} o(t).$$

Comme $\prod_{i=1}^n (1 + tM_{i,i}) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t \sum_{i=1}^n M_{i,i} + o(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + \text{tr}(M) + o(t)$, on en déduit

$$\boxed{\det(\mathbf{I}_n + tM) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + \text{tr}(M)t + o(t).}$$

7. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, d'après la question 6, on a

$$\begin{aligned} f_A(t) &= \det(A + tM) \\ &= \det(A) \det(\mathbf{I}_n + tA^{-1}M) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \det(A) (1 + \text{tr}(A^{-1}M)t + o(t)) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \det(A) + \text{tr}(\det(A)A^{-1}M) + o(t) \end{aligned}$$

Or, comme A est inversible, ainsi, on a :

$$A \left(\frac{1}{\det(A)} {}^t \text{com}(A) \right) = \mathbf{I}_n.$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{f_A(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} \det(A) + \text{tr}({}^t \text{com}(A)M)t + o(t).}$$

8. La relation obtenue à la question 7 affirme que f_A admet un développement limité en 0 à l'ordre 1, donc

$$\boxed{f_A \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'_A(0) = \text{tr}({}^t \text{com}(A)M).}$$

9. (a) La fonction $\varphi : t \mapsto \det(A + tM)$ est continue sur \mathbf{R} car c'est une fonction polynomiale (pour s'en convaincre, il suffit de développer le déterminant). Comme $\varphi(0) = \det(A) \neq 0$, par continuité de φ en 0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varphi(t) \neq 0$.

On a montré qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout :

$$\boxed{\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad A + tM \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R}).}$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$ défini par la question 9 (a). Soit $t_1 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. $A + t_1M$ étant inversible, pour tout $h \in \mathbf{R}$ tel que $t_1 + h \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, d'après la question 7, on a

$$\begin{aligned} f_A(t_1 + h) &= \det(A + t_1M + hM) \\ &\underset{h \rightarrow 0}{=} \det(A + t_1M) + \text{tr}({}^t \text{com}(A + t_1M)M)h + o(h). \end{aligned}$$

Comme $t \mapsto f_A(t)$ admet un développement limité à l'ordre 1 pour tout $t_1 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on en déduit que f_A est dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad f'_A(t) = \text{tr}({}^t \text{com}(A + tM)M).$$

10. Un calcul et un télescopage donnent

$$(\mathbf{I}_n + tM) \sum_{k=0}^N (-1)^k t^k M^k = \mathbf{I}_n + (-1)^N t^{N+1} M^{N+1}.$$

11. Soit $\varepsilon = \frac{1}{\|M\|}$. Une récurrence avec l'inégalité établie à la question 3 montre que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$\|(-1)^k t^k M^k\| \leq (t\|M\|)^k.$$

Comme $0 \leq t\|M\| < 1$, la série $\sum_{k \geq 0} (t\|M\|)^k$ converge, donc la série

$$\sum_{k \geq 0} \|(-1)^k t^k M^k\| \text{ converge.}$$

Par la proposition admise, la série $\sum_{k \geq 0} (-1)^k t^k M^k$ converge.

De plus, comme $\|tM\| < 1$, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (-1)^N t^{N+1} M^{N+1} = 0.$$

Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'égalité de la question 10, on en déduit

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad (\mathbf{I}_n + tM) \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k M^k = \mathbf{I}_n.$$

On a montré que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, la matrice $\mathbf{I}_n + tM$ est inversible et

$$(\mathbf{I}_n + tM)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k M^k.$$

12. D'après l'égalité établie à la question 11, on a

$$\begin{aligned} \forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad (\mathbf{I}_n + tM)^{-1} &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k M^k \\ &= \mathbf{I}_n - tM + t^2 \sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k t^{k-2} M^k. \end{aligned}$$

Comme $t^2 \underset{t \rightarrow 0}{=} o(t)$ et comme la série $\sum_{k=2}^{+\infty} (-1)^k t^{k-2} M^k$ converge sur un voisinage de 0, on conclut

$$\boxed{(I_n + tM)^{-1} \underset{t \rightarrow 0}{=} I_n - tM + o(t).}$$

13. Soit $A \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbf{R})$. D'après la question 9 (a), il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $A + tM$ est inversible.

De plus, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$,

$$(A + tM)^{-1} = (A(A + tA^{-1}M))^{-1} = (I_n + tA^{-1}M)^{-1} A^{-1}.$$

Or, d'après la question 12, on a

$$(I_n + tA^{-1}M)^{-1} \underset{t \rightarrow 0}{=} I_n - A^{-1}Mt + o(t).$$

Comme

$$(I_n - A^{-1}Mt + o(t)) A^{-1} \underset{t \rightarrow 0}{=} A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + o(t),$$

il s'ensuit que

$$\boxed{(A + tM)^{-1} \underset{t \rightarrow 0}{=} A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + o(t).}$$

14. D'après le théorème de réduction simultanée énoncé en en-tête, il existe $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbf{R})$ et une matrice D diagonale telles que $A = {}^tPP$ et $M = {}^tPDP$. Ainsi, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} \langle (A + tM)X, X \rangle &= {}^tX(A + tM)X \\ &= {}^t(PX)(I_n + tD)(PX) \\ &= \langle (I_n + tD)(PX), PX \rangle. \end{aligned}$$

Comme P est inversible et $X \neq 0$, $PX \neq 0$.

On note $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ et soit

$$\lambda = \max\{|d_i|, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} > 0$$

car $D \neq 0$ et $M \neq 0$.

Soit $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$. Pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|td_i| < 1$ de sorte $1 + td_i > 0$.

On note y_1, \dots, y_n les coefficients de la matrice colonne PX . Ainsi,

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \langle (I_n + tD)(PX), PX \rangle = \sum_{i=1}^n (1 + td_i) y_i^2 > 0$$

car il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $y_j \neq 0$ et $1 + td_j > 0$.

$\boxed{\text{On a montré que } A + tM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \text{ pour tout } t \in]-\varepsilon, \varepsilon[.}$

15. (a) D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ et une matrice $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ diagonale telles que $N = {}^t P D P$, soit

$$D = P N {}^t P = P N P^{-1}.$$

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où le 1 est en position i .

On a $\langle D e_i, e_i \rangle = d_i$.

De plus,

$$\begin{aligned} \langle P N {}^t P e_i, e_i \rangle &= {}^t e_i P N {}^t e_i = {}^t ({}^t P e_i) N ({}^t P e_i) \\ &= \langle N ({}^t P e_i), ({}^t P e_i) \rangle \\ &> 0 \end{aligned}$$

car $N \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ et ${}^t P e_i \neq 0$ car P est inversible et $e_i \neq 0$.

Il s'ensuit que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $d_i > 0$, donc comme D est diagonale, $\det(D) > 0$.

Or, $\det(N) = \det(D) > 0$, il s'ensuit que $\boxed{\det(N) > 0}$.

- (b) La fonction $t \mapsto \det(A + tM)$ est une fonction polynomiale, donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

Or, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\det(A + tM) > 0$, donc pour tout

$\kappa \in \left[-\frac{1}{n}, +\infty\right] \setminus \{0\}$, $\det^{-\kappa}(A + tM)$ existe (il faut bien voir que lorsque

$\kappa > 0$, $\det^{-\kappa}(A + tM) = \frac{1}{\det^\kappa(A + tM)}$, donc « il y a un dénominateur »).

Donc, φ_κ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ comme la composée de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur cet intervalle.

16. On remarque que pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $\varphi_\kappa(t) = \frac{1}{\kappa} f_A^{-\kappa}(t)$. Il s'ensuit que

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \varphi'_\kappa(t) = -f'_A(t) \det^{-\kappa-1}(A + tM).$$

En utilisant le calcul de $f'_A(t)$ fait à la question 9 (b), on a : pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$,

$$\begin{aligned} \varphi'_\kappa(t) &= -\text{tr}({}^t \text{com}(A + tM) A) \det^{-\kappa-1}(A + tM) \\ &= -\text{tr}\left(\frac{1}{\det(A + tM)} {}^t \text{com}(A + tM) A\right) \det^{-\kappa}(A + tM). \end{aligned}$$

En utilisant la relation : pour tout $N \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbf{R})$,

$$N^{-1} = \frac{1}{\det(N)} {}^t \text{com}(N),$$

on obtient finalement que

$$\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \quad \varphi'_\kappa(t) = -\operatorname{tr} \left((A + tM)^{-1} M \right) \det^{-\kappa} (A + tM).$$

17. On calcule le développement limité de $\varphi_\kappa(t)$ en 0 à l'ordre 1. D'après la question 16, pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, on a

$$\begin{aligned} \det^{-\kappa} (A + tM) &= \kappa \varphi_\kappa(t) \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \kappa (\varphi_\kappa(0) + \varphi'_\kappa(0)t + o(t)) \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \kappa \left(\frac{1}{\kappa} \det^{-\kappa} (A) - \operatorname{tr} (A^{-1}M) \det^{-\kappa} (A) t \right. \\ &\quad \left. + o(t) \right) \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \det^{-\kappa} (A) - \kappa \operatorname{tr} (A^{-1}M) \det^{-\kappa} (A) t + o(t). \end{aligned}$$

D'après la question 12, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left((A + tM)^{-1} M \right) &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \operatorname{tr} \left((A^{-1} - A^{-1}MA^{-1}t + o(t)) M \right) \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \operatorname{tr} (A^{-1}M) - \operatorname{tr} (A^{-1}MA^{-1}M) t + o(t) \\ &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} \operatorname{tr} (A^{-1}M) - \operatorname{tr} \left((A^{-1}M)^2 \right) t + o(t). \end{aligned}$$

En utilisant ces deux égalités dans l'expression de $\varphi'_\kappa(t)$ obtenue à la question 16, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi'_\kappa(t) &\stackrel{t \rightarrow 0}{=} - \left(\operatorname{tr} (A^{-1}M) - \operatorname{tr} \left((A^{-1}M)^2 \right) t + o(t) \right) \\ &\quad \times \left(\det^{-\kappa} (A) - \kappa \operatorname{tr} (A^{-1}M) \det^{-\kappa} (A) t + o(t) \right) \\ &= -\operatorname{tr} (A^{-1}M) \det^{-\kappa} (A) \\ &\quad + \left(\kappa \operatorname{tr}^2 (A^{-1}M) \det^{-\kappa} (A) + \operatorname{tr} \left((A^{-1}M)^2 \right) \det^{-\kappa} (A) \right) t \\ &\quad + o(t) \\ &= \varphi'_\kappa(0) + \det^{-\kappa} (A) \left(\kappa \operatorname{tr}^2 (A^{-1}M) + \operatorname{tr} \left((A^{-1}M)^2 \right) \right) t \\ &\quad + o(t). \end{aligned}$$

On a montré que

$$\varphi''_\kappa(0) = \det^{-\kappa} (A) \left(\kappa \operatorname{tr}^2 (A^{-1}M) + \operatorname{tr} \left((A^{-1}M)^2 \right) \right).$$

18. D'après le résultat admis en indication, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} (A^{-1}M) &= \operatorname{tr} (P \operatorname{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n) P^{-1}) \\ &= \operatorname{tr} (\operatorname{diag} (\lambda_1, \dots, \lambda_n)) \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k, \end{aligned}$$

il s'ensuit que $\text{tr}^2(A^{-1}M) = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k\right)^2$. De même,

$$\text{tr}\left((A^{-1}M)^2\right) = \text{tr}\left(\text{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

En utilisant ces deux égalités dans la relation établie à la question 17, on en déduit

$$\varphi_\kappa''(0) = \det^{-\kappa}(A) \left(\kappa \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \right).$$

19. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \times 1 \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n 1 \times \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 = n \sum_{k=1}^n \lambda_k^2.$$

On en déduit que $-\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \geq 0$. Comme $\kappa > -\frac{1}{n}$, on a

$$\kappa \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 > -\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right)^2 + \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \geq 0.$$

Comme $\det^{-\kappa}(A) > 0$ (question 15 (a)), on obtient finalement

$$\varphi_\kappa''(0) > 0.$$

20. Comme $\varphi_\kappa''(0) > 0$ et comme φ_κ est continue en 0, on en déduit qu'il existe $\alpha \in]0, \varepsilon]$ tel que pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$, $\varphi_\kappa''(t) > 0$.

On en déduit que φ_κ est convexe sur $]-\alpha, \alpha[$.

21. D'après la question 20, il existe $\alpha > 0$ tel φ_κ soit convexe sur $]-\alpha, \alpha[$. En utilisant les résultats admis en en-tête, pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$, on a

$$\varphi_\kappa(t) \geq \varphi_\kappa(0) + \varphi_\kappa'(0)t$$

soit : pour tout $t \in]-\alpha, \alpha[$

$$\frac{1}{\kappa} \det^{-\kappa}(A + tM) \geq \frac{1}{\kappa} \det^{-\kappa}(A) - \text{tr}(A^{-1}M) \det^{-\kappa}(A)t.$$

Quelques remarques culturelles

La convexité du déterminant établi dans ce sujet est seulement une version faible. Pour établir une version forte, il faut les bases de calcul différentiel.

La convexité du déterminant a pour conséquence l'inégalité suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}), \quad \det^{-1/n}(A + B) \geq \det^{-1/n}(A) + \det^{-1/n}(B).$$

Cette inégalité est la clé pour montrer l'inégalité de Brunn-Minkowski par transport optimal.

Thème 25

Théorème d'approximation de Weierstrass

Thèmes abordés : Continuité, probabilité, intégration.

Difficulté : ■■■■■■

Ce sujet donne plusieurs preuves du théorème de Weierstrass qui affirme que toute fonction continue sur un segment peut être approchée aussi près que l'on veut par une fonction polynomiale.

Une bonne connaissance du programme d'analyse (continuité, dérivabilité) est requise, ainsi que d'intégration pour la dernière partie.

Les résultats des parties 1 et 2 servent dans la suite du sujet. La partie 3 propose deux preuves du théorème de Weierstrass et la partie 4 donne des applications de ce théorème.

25.1 Convergence uniforme

Définition. *Norme infini, Convergence uniforme.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} .

- Pour toute fonction f bornée sur I , on définit la **norme infini** de f , notée $\|f\|_{\infty}^I$, par

$$\|f\|_{\infty}^I = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

- Soient $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{C}^0(I)$ et $f \in \mathcal{C}^0(I)$. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ **converge uniformément** vers la fonction f sur I si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty}^I = 0.$$

1. Exemples.

- (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $f_n : x \mapsto \frac{x}{n}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout segment, mais ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur \mathbf{R} .

- (b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit $f_n : x \mapsto \frac{1}{1+nx}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur tout intervalle du type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ mais ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur \mathbf{R}_+ .
2. Soient I un intervalle et $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur I . Montrer que

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

25.2 Un résultat topologique

Définitions. *Ouvert de \mathbf{R} , ouvert de $[a, b]$.*

- Soit $O \subset \mathbf{R}$. On dit que O est un ouvert de \mathbf{R} si

$$\forall x \in O, \exists r > 0, \quad]x - r, x + r[\subset O.$$

- Soient a et b tels que $a < b$. Soit $U \subset [a, b]$. On dit que U est un ouvert de $[a, b]$ s'il existe un ouvert O de \mathbf{R} tel que $U = O \cap [a, b]$.

Théorème. *Compacité selon Borel-Lebesgue.*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On suppose qu'il existe une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ de $[a, b]$ telle que $[a, b] = \bigcup_{i \in I} U_i$. Alors il existe $J \subset I$ fini tel que $[a, b] = \bigcup_{i \in J} U_i$.

Nous prouvons ce résultat. On se donne une famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ de $[a, b]$ telle que $[a, b] = \bigcup_{i \in I} U_i$.

3. On commence par montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $i \in I$ tel que $]x - \alpha, x + \alpha[\cap [a, b] \subset U_i$. On suppose le contraire.
- (a) Montrer que : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que pour tout $i \in I$,

$$\left] x_n - \frac{1}{n}, x_n + \frac{1}{n} \right[\cap [a, b] \not\subset U_i.$$

- (b) Justifier qu'il existe $\varphi : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers un réel $x \in [a, b]$.

- (c) En considérant $i \in I$ tel que $x \in U_i$, trouver une contradiction et conclure.

Soit $\alpha > 0$ une valeur donnée par la question 3.

4. Justifier qu'il existe un nombre fini d'éléments de $[a, b]$, disons x_1, \dots, x_n , tels que

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n (]x_i - \alpha, x_i + \alpha[\cap [a, b]).$$

5. Montrer que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists j_i \in I, \quad]x_i - \alpha, x_i + \alpha[\cap [a, b] \subset U_{j_i}.$$

6. En déduire que

$$\bigcup_{i=1}^n U_{j_i} = [a, b].$$

25.3 Théorème de Weierstrass

Le but de cette partie est de donner plusieurs preuves du théorème de Weierstrass et d'en donner des applications.

Théorème. *Théorème de Weierstrass.*

Soient $a < b$ deux réels. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.

Alors, il existe une suite de fonctions polynomiale $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

25.3.1 Une première preuve : avec les polynômes de Bernstein

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on définit la variable aléatoire $X_{n,x}$. On suppose que $X_{n,x}$ suit une loi binomiale de paramètres n et x . Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit $Y_{n,x} = f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)$.

7. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $x \in [0, 1]$, montrer que

$$\mathbf{E}(Y_{n,x}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

On définit ainsi sur $[0, 1]$ la fonction $B_n(f)$ par

$$\forall x \in [0, 1], \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

8. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad (|x - y| < \alpha) \implies (|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}).$$

On fixe $\varepsilon > 0$ et une valeur de $\alpha > 0$ donnée par la question 8. Soit $x \in [0, 1]$, on définit les ensembles suivants :

$$J_{1,x} = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

et

$$J_{2,x} = \left\{ k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}.$$

9. Justifier l'existence de $\|f\|_{\infty}^{[0,1]}$.

10. Montrer que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_{\infty}^{[0,1]} \sum_{k \in J_{2,x}} \mathbf{P}(X_{n,x} = k).$$

11. Montrer que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_{\infty}^{[0,1]} \mathbf{P}\left(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

12. En déduire que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_{\infty}^{[0,1]} \mathbf{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n\alpha).$$

13. Conclure enfin que

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_{\infty}^{[0,1]}}{2n\alpha^2}.$$

14. Terminer la preuve du théorème de Weierstrass sur l'intervalle $[0, 1]$.

15. Montrer le théorème de Weierstrass dans le cas d'un segment quelconque.

25.3.2 Une seconde preuve : en utilisant le lemme de Korovkin

Lemme. *Lemme de Korovkin.*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soient $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'endomorphismes de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$. Soient les fonctions e_0, e_1 et e_2 définies sur $[a, b]$ par $e_0 : 1 \mapsto 1$, $e_1 : x \mapsto x$ et $e_2 : x \mapsto x^2$.

On suppose que si $f \geq 0$ (f ne prend que des valeurs positives), alors pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n(f) \geq 0$.

On suppose que (hypothèse (\mathcal{H}))

$$\exists K > 0, \forall n \in \mathbf{N}, \forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}), \quad \|u_n(f)\|_{\infty}^{[a,b]} \leq K \|f\|_{\infty}^{[a,b]}.$$

On suppose que pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$, la suite de fonctions $(u_n(e_i))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers e_i sur $[a, b]$.

Alors, pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, la suite de fonctions $(u_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Preuve du lemme de Korovkin. Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ et $\varepsilon > 0$.

16. Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \quad (|x - y| < \alpha) \implies (|f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

17. Justifier que

$$\exists M > 0, \forall x \in [a, b], \quad |f(x)| \leq M.$$

On fixe $x \in [a, b]$.

18. En déduire que : pour tout $y \in [a, b]$

$$f(x) - \varepsilon - \frac{2M(y-x)^2}{\alpha^2} \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon + \frac{2M(y-x)^2}{\alpha^2}.$$

Indication : On pourra discuter selon que $|x - y| < \alpha$ ou $|x - y| \geq \alpha$.

On définit sur $[a, b]$ les fonctions

$$g_x : y \mapsto f(x) - \varepsilon - \frac{2M(y-x)^2}{\alpha^2} \quad \text{et} \quad h_x : y \mapsto f(x) + \varepsilon + \frac{2M(y-x)^2}{\alpha^2}.$$

19. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n(g_x) \leq u_n(f) \leq u_n(h_x).$$

20. (a) Montrer que les suites $(u_n(g_x))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(u_n(h_x))_{n \in \mathbf{N}}$ convergent uniformément sur $[a, b]$ vers les fonctions g_x et h_x .

(b) En déduire qu'il existe $N_x \in \mathbf{N}$ (dépendant de x) tel que pour tout $n \geq N_x$, pour tout $y \in [a, b]$

$$|u_n(g_x)(y) - g_x(y)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n(h_x)(y) - h_x(y)| \leq \varepsilon.$$

21. (a) Montrer qu'il existe $r_x > 0$ (dépendant de x) tel que pour tout $x' \in]x - r_x, x + r_x[\cap [a, b]$ et pour tout $y \in [a, b]$

$$|g_x(y) - g_{x'}(y)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |h_x(y) - h_{x'}(y)| \leq \varepsilon.$$

(b) En déduire que pour tout $n \geq N_x$, pour tout $x' \in]x - r_x, x + r_x[\cap [a, b]$ et pour tout $y \in [a, b]$,

$$|u_n(g_{x'})(y) - g_{x'}(y)| \leq (K + 2)\varepsilon$$

et

$$|u_n(h_{x'})(y) - h_{x'}(y)| \leq (K + 2)\varepsilon.$$

22. Montrer que $\bigcup_{x \in [a, b]} (]x - r_x, x + r_x[\cap [a, b]) = [a, b]$. En déduire qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ tels que

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n (]x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}[\cap [a, b]).$$

23. Montrer qu'il existe $N' \in \mathbf{N}$ tel que $n \geq N'$, pour tout $x \in [a, b]$ et pour tout $y \in [a, b]$,

$$|u_n(g_x)(y) - g_x(y)| \leq (K + 2)\varepsilon$$

et

$$|u_n(h_x)(y) - h_x(y)| \leq (K + 2)\varepsilon.$$

24. En déduire que pour tout $n \geq N'$, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|u_n(g_x)(x) - (f(x) - \varepsilon)| \leq (K + 2)\varepsilon$$

et

$$|u_n(h_x)(x) - (f(x) + \varepsilon)| \leq (K + 2)\varepsilon.$$

25. Montrer que la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Nous pouvons prouver le théorème de Weierstrass. On commence par se placer sur le segment $[0, 1]$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit $B_n(f)$ par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

26. (a) Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$, alors $B_n(f)$ est une fonction polynomiale.
 (b) Montrer que B_n est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ vérifiant l'hypothèse (\mathcal{H})

$$\forall f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), \quad \|B_n(f)\|_{\infty}^{[0,1]} \leq \|f\|_{\infty}^{[0,1]}.$$

27. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ est positive, alors $B_n(f)$ l'est aussi.
 28. Montrer que les suites $(B_n(e_0))_{n \in \mathbf{N}}$, $(B_n(e_1))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(B_n(e_2))_{n \in \mathbf{N}}$ convergent uniformément sur $[0, 1]$ vers respectivement e_0 , e_1 et e_2 .
 29. Terminer la preuve du théorème de Weierstrass sur le segment $[0, 1]$.
 30. Terminer la preuve du théorème de Weierstrass sur le segment $[a, b]$ ($a < b$).

25.4 Compléments

25.4.1 Un exemple et un contre-exemple

Les questions de cette partie sont indépendantes.

31. Soient $a < b$ deux réels. Montrer que toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales à coefficients rationnels.
 32. Montrer que la fonction \exp n'est pas limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur \mathbf{R}_+ .

25.4.2 Problème des moments

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \int_0^1 f(x) x^n dx = 0.$$

33. Montrer que pour toute fonction polynomiale P ,

$$\int_0^1 f(x) P(x) dx = 0.$$

34. Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant le théorème de Weierstrass, montrer qu'il existe une fonction polynomiale P telle

$$\left| \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 f(x) P(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

35. En déduire que f est la fonction nulle.
 36. Cette question s'adresse aux lecteurs ayant des rudiments sur les intégrales généralisées.

- (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer

$$\int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x)} dx.$$

Indication : On pourra commencer par faire le changement de variable $u = \ln(x)$.

- (b) En déduire que le résultat de la question 35 tombe en défaut si l'on ne se place pas sur un segment.

Correction du Thème 25

1. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0$, on en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge simplement sur \mathbf{R} vers la fonction nulle.

De plus, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $f_n(n) = \frac{n}{n} = 1$, on en déduit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ne peut converger uniformément vers la fonction nulle sur \mathbf{R} .

On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément sur \mathbf{R} vers la fonction nulle.

- (b) Soit $a > 0$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbf{N}$ la fonction f_n est décroissante sur \mathbf{R}_+ .

Il s'ensuit que pour tout $x \geq a$,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(a) = \frac{1}{1+na}.$$

Cette inégalité implique que la fonction f_n est bornée sur $[a, +\infty[$ et

$$\sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| \leq \frac{1}{1+na}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+na} = 0$, par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, +\infty[} |f_n(x)| = 0.$$

On a montré que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers la fonction nulle.

Toujours en utilisant la décroissance de la fonction f_n sur \mathbf{R}_+ , on a

$$\sup_{x \in \mathbf{R}_+} |f_n(x)| = f_n(0) = 1.$$

Il s'ensuit que l'on a pas $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbf{R}_+} |f_n(x)| = 0$, ainsi la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas uniformément sur \mathbf{R}_+ vers la fonction nulle.

2. Soit $x_0 \in I$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$0 \leq |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$, par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

3. (a) Par hypothèse, on suppose que

$$\forall \alpha > 0, \exists x \in [a, b], \forall i \in I,]x - \alpha, x + \alpha[\cap [a, b] \not\subset U_i.$$

En particulier, en prenant $\alpha = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), on obtient le résultat.

- (b) La suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite qui converge : il existe $\varphi : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge.

La suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers un élément de $[a, b]$ car $[a, b]$ est fermé.

- (c) Comme $x \in [a, b] = \bigcup_{i \in I} U_i$, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$.

Puis, U_{i_0} étant ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que $]x - \alpha, x + \alpha[\cap [a, b] \subset U_{i_0}$.

Or, la suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}^*}$ convergeant vers x et pour n assez grand, on a

$$\frac{1}{\varphi(n)} < \alpha, \text{ ainsi}$$

$$\left] x - \frac{1}{\varphi(n)}, x + \frac{1}{\varphi(n)} \right[\cap [a, b] \subset]x - \alpha, x + \alpha[\cap [a, b] \subset U_{i_0}.$$

Ceci est une contradiction avec le résultat de la question 3 (a).

On a montré qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, il existe $i \in I$ tel que $]x - \alpha, x + \alpha[\cap [a, b] \subset U_i$.

4. Soit $N \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{N} \leq \alpha$. On pose, pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $x_k = a + k \frac{b-a}{N}$.
Il est clair que

$$\bigcup_{k=0}^N \left(\left] x_k - \frac{b-a}{N}, x_k + \frac{b-a}{N} \right[\cap [a, b] \right) = [a, b].$$

Comme $\frac{b-a}{N} \leq \alpha$, on a

$$\bigcup_{k=0}^N \left] x_k - \frac{b-a}{N}, x_k + \frac{b-a}{N} \right[\subset \bigcup_{k=0}^N]x_k - \alpha, x_k + \alpha[.$$

De tout évidence, on a $x_k \in [a, b]$ pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$ et

$$\bigcup_{k=0}^N (]x_k - \alpha, x_k + \alpha[\cap [a, b]) = [a, b].$$

5. C'est une application immédiate du résultat établi à la question 3 (c).

6. D'après les questions 4 et 5 et comme $\bigcup_{i \in I} U_i = [a, b]$, on a

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n (]x_i - \alpha, x_i + \alpha[\cap [a, b]) \subset \bigcup_{i=1}^n U_{j_i} \subset \bigcup_{i \in I} U_i = [a, b].$$

On en déduit

$$\boxed{\bigcup_{i=1}^n U_{j_i} = [a, b].}$$

7. On a $X_{n,x}(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$, donc on a

$$Y_{n,x}(\Omega) = \left\{ f(0), f\left(\frac{1}{n}\right), \dots, f\left(\frac{n-1}{n}\right), f(1) \right\}.$$

Par le théorème de transfert, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y_{n,x}) &= \mathbf{E}\left(f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \mathbf{P}(X_{n,x} = k) \\ &= \boxed{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}}. \end{aligned}$$

8. Comme f est continue sur le segment $[0, 1]$, en vertu du théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Ainsi, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\boxed{\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad (|x - y| \leq \alpha) \implies (|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}).}$$

9. f est continue sur le segment $[0, 1]$, par le théorème des bornes atteintes de Weierstrass, f est bornée, donc $\|f\|_{\infty}^{[0,1]}$ existe.

10. On a

$$\begin{aligned} &|B_n(f)(x) - f(x)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|. \end{aligned}$$

Comme $J_{1,x}$ et $J_{2,x}$ forment une partition de $\llbracket 0, n \rrbracket$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k \in J_{1,x}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\quad + \sum_{k \in J_{2,x}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|. \end{aligned}$$

Par définition de $J_{1,x}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k \in J_{1,x}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in J_{1,x}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

De plus, par utilisation de l'inégalité triangulaire et par définition de $\|f\|_{\infty}^{[0,1]}$, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{k \in J_{2,x}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \\ &\leq 2 \|f\|_{\infty}^{[0,1]} \sum_{k \in J_{2,x}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq 2 \|f\|_{\infty}^{[0,1]} \sum_{k \in J_{2,x}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq 2 \|f\|_{\infty}^{[0,1]} \sum_{k \in J_{2,x}} \mathbf{P}(X_{n,x} = k). \end{aligned}$$

On a montré que

$$\boxed{|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \|f\|_{\infty}^{[0,1]} \sum_{k \in J_{2,x}} \mathbf{P}(X_{n,x} = k).}$$

11. On a

$$\begin{aligned} X_{n,x} \in J_{2,x} &\iff \left| f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right) - f(x) \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \\ &\iff |Y_{n,x} - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}(X_{n,x} \in J_{2,x}) = \sum_{k \in J_{2,x}} \mathbf{P}(X_{n,x} = k) = \mathbf{P}\left(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

En utilisant l'inégalité de la question 10, il en résulte que

$$\boxed{|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_{\infty}^{[0,1]} \mathbf{P}\left(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

12. D'après la définition de α (question 8), pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$,

$$\left(|f(x) - f(y)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \implies (|x - y| \geq \alpha).$$

Comme

$$\left(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = \left(\left|f\left(\frac{X_{n,x}}{n}\right) - f(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

on récupère

$$\left(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \left(\left|\frac{X_{n,x}}{n} - x\right| \geq \alpha\right).$$

En utilisant le fait que

$$\left(\left|\frac{X_{n,x}}{n} - x\right| \geq \alpha\right) = (|X_{n,x} - nx| \geq n\alpha),$$

on a montré que

$$\left(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset (|X_{n,x} - nx| \geq n\alpha).$$

On en déduit

$$\mathbf{P}\left(|Y_{n,x} - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \mathbf{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n\alpha),$$

puis en utilisant l'inégalité établie à la question 11

$$\boxed{|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_{\infty}^{[0,1]} \mathbf{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n\alpha)}.$$

13. On utilise l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev avec la variable aléatoire $X_{n,x}$ qui admet une variance valant $nx(1-x)$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(|X_{n,x} - nx| \geq n\alpha) &= \mathbf{P}(|X_{n,x} - \mathbf{E}(X_{n,x})| \geq n\alpha) \\ &\leq \frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2} \\ &\leq \frac{x(1-x)}{n\alpha^2}. \end{aligned}$$

Une simple étude de fonction montre que pour tout $x \in [0, 1]$, $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

On en déduit, en utilisant l'inégalité établie à la question 12, que

$$\boxed{|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\|f\|_{\infty}^{[0,1]}}{2n\alpha^2}}.$$

14. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|f\|_{\infty}^{[0,1]}}{2n\alpha^2} = 0$, il existe un entier naturel N tel que pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq \frac{\|f\|_{\infty}^{[0,1]}}{2n\alpha^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que pour tout $n \geq N$,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Cette majoration étant indépendante de x , on en déduit que

$$\forall n \geq N, \quad \sup_{x \in [0,1]} |B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On a montré que la suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

15. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

La fonction $\tilde{f} : t \mapsto f((1-t)a + tb)$ est définie et continue sur $[0, 1]$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite de fonctions polynomiales $(\tilde{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(\tilde{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers \tilde{f} sur $[0, 1]$.

Il s'ensuit que la suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$P_n(t) = \tilde{P}_n((1-t)a + tb)$$

converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Le théorème de Weierstrass est prouvé dans le cas d'un segment quelconque.

16. Voir la correction de la question 8 de ce problème.

17. Voir la correction de la question 9 de ce problème.

18. On suit l'indication.

- Si $|x - y| < \alpha$, alors d'après la question 16, on a

$$(|f(x) - f(y)| < \varepsilon) \iff (f(x) - \varepsilon < f(y) < f(x) + \varepsilon).$$

En particulier, on a

$$f(x) - \varepsilon - \frac{2M(y-x)^2}{\alpha^2} \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon + \frac{2M(y-x)^2}{\alpha^2}.$$

- Si $|x - y| \geq \alpha$, on a $\frac{(y-x)^2}{\alpha^2} \geq 1$, d'où

$$|f(y) - f(x)| \leq 2M \leq \varepsilon + 2M \frac{(y-x)^2}{\alpha^2}.$$

On en déduit donc

$$f(x) - \varepsilon - \frac{2M(y-x)^2}{\alpha^2} \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon + \frac{2M(y-x)^2}{\alpha^2}.$$

On a montré que pour tout $y \in [a, b]$,

$$f(x) - \varepsilon - \frac{2M(y-x)^2}{\alpha^2} \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon + \frac{2M(y-x)^2}{\alpha^2}.$$

19. Soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})^2$ tel que $f \geq g$.
Comme $f - g \geq 0$, par hypothèse sur u_n , on a $u_n(f - g) \geq 0$, donc

$$u_n(f) \geq u_n(g).$$

En utilisant cette propriété dans l'inégalité établie à la question 18, on a

$$u_n(g_x) \leq u_n(f) \leq u_n(h_x).$$

20. (a) Il est clair que les fonctions g_x et h_x sont des fonctions polynomiales de degré au plus 2. Ainsi, elles peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire des fonctions e_0, e_1 et e_2 : il existe $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbf{R}^3$ et $(b_0, b_1, b_2) \in \mathbf{R}^3$ tels que

$$g_x = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 \quad \text{et} \quad h_x = b_0e_0 + b_1e_1 + b_2e_2.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, en utilisant la linéarité de u_n , on a

$$u_n(g_x) = a_0u_n(e_0) + a_1u_n(e_1) + a_2u_n(e_2)$$

et

$$u_n(h_x) = b_0u_n(e_0) + b_1u_n(e_1) + b_2u_n(e_2).$$

Il s'ensuit que : pour tout $y \in [a, b]$,

$$|u_n(g_x)(y) - g_x(y)| \leq \sum_{i=0}^2 |a_i| |g_x(y) - u_n(e_i)(y)|,$$

puis

$$\sup_{y \in [a, b]} |u_n(g_x)(y) - g_x(y)| \leq \sum_{i=0}^2 |a_i| \sup_{y \in [a, b]} |g_x(y) - u_n(e_i)(y)|.$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, $(u_n(e_i))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers e_i sur $[a, b]$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^2 |a_i| \sup_{y \in [a, b]} |g_x(y) - u_n(e_i)(y)| = 0.$$

Le théorème d'encadrement donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in [a, b]} |u_n(g_x)(y) - g_x(y)| = 0.$$

Ainsi, la suite $(u_n(g_x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers g_x sur $[a, b]$.

Un raisonnement analogue montre que la suite $(u_n(h_x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers h_x sur $[a, b]$.

Les suites $(u_n(g_x))_{n \in \mathbf{N}}$ et $(u_n(h_x))_{n \in \mathbf{N}}$ convergent uniformément vers respectivement g_x et h_x sur $[a, b]$.

(b) Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{y \in [a, b]} |u_n(g_x)(y) - g_x(y)| = 0$, il existe $N_{1,x} \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_{1,x}, \forall y \in [a, b], \quad |u_n(g_x)(y) - g_x(y)| \leq \varepsilon.$$

De même, il existe $N_{2,x} \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_{2,x}, \forall y \in [a, b], \quad |u_n(h_x)(y) - h_x(y)| \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que pour tout $n \geq N_x := \max\{N_{1,x}, N_{2,x}\}$, pour tout $y \in [a, b]$,

$$\boxed{|u_n(g_x)(y) - g_x(y)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n(h_x)(y) - h_x(y)| \leq \varepsilon.}$$

21. (a) Pour tout $y \in [a, b]$ et pour tout $x' \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |g_x(y) - g_{x'}(y)| &= \left| f(x) - f(x') - \frac{2M}{\alpha^2} \left((y-x)^2 - (y-x')^2 \right) \right| \\ &\leq |f(x) - f(x')| + \frac{2M}{\alpha^2} |2y - (x+x')| |x-x'| \\ &\leq |f(x) - f(x')| + \frac{2M}{\alpha^2} (2 \max\{|a|, |b|\} \\ &\quad + |x+x'|) |x-x'| \end{aligned}$$

Par continuité de f et de $x \mapsto |x|$ sur leur ensemble de définition respectif, on a

$$\lim_{x' \rightarrow x} \left(|f(x) - f(x')| + \frac{2M|x-x'|}{\alpha^2} A |x-x'| \right) = 0,$$

où l'on a posé

$$A = 2 \max\{|a|, |b|\} + |x+x'|.$$

De plus,

$$|f(x) - f(x')| + \frac{2M}{\alpha^2} (2 \max\{|a|, |b|\} + |x+x'|) |x-x'|$$

est indépendant de y , ainsi il existe $r_{x,g} > 0$ tel que pour tout $x' \in]x - r_{x,g}, x + r_{x,g}[\cap [a, b]$ et pour tout $y \in [a, b]$,

$$|g_x(y) - g_{x'}(y)| \leq \varepsilon.$$

Un raisonnement analogue montre qu'il existe $r_{x,h}$ tel que pour tout $x' \in]x - r_{x,h}, x + r_{x,h}[\cap [a, b]$ et pour tout $y \in [a, b]$

$$|h_x(y) - h_{x'}(y)| \leq \varepsilon.$$

En posant $r_x = \min\{r_{x,g}, r_{x,h}\}$, on a montré que : pour tout $x' \in]x - r_x, x + r_x[\cap [a, b]$ et pour tout $y \in [a, b]$

$$\boxed{|g_x(y) - g_{x'}(y)| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |h_x(y) - h_{x'}(y)| \leq \varepsilon.}$$

- (b) Pour tout $n \geq N_x$, pour tout $x' \in]x - r_x, x + r_x[\cap [a, b]$ et pour tout $y \in [a, b]$, on a :

$$\begin{aligned} & |u_n(g_{x'})(y) - g_{x'}(y)| \\ &= |u_n(g_{x'})(y) - u_n(g_x)(y) + u_n(g_x)(y) - g_x(y) + g_x(y) - g_{x'}(y)| \\ &\leq |u_n(g_{x'})(y) - u_n(g_x)(y)| + |u_n(g_x)(y) - g_x(y)| \\ &\quad + |g_x(y) - g_{x'}(y)|. \end{aligned}$$

D'après la question 20 (b), on a $|u_n(g_x)(y) - g_x(y)| \leq \varepsilon$, puis, la question 21 (a) assure que $|g_x(y) - g_{x'}(y)| \leq \varepsilon$.

L'hypothèse (\mathcal{H}) faite sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permet de remarquer que

$$\begin{aligned} |u_n(g_{x'})(y) - u_n(g_x)(y)| &= |u_n(g_{x'} - g_x)(y)| \\ &\leq K |g_{x'}(y) - g_x(y)| \\ &\leq K\varepsilon. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\boxed{|u_n(g_{x'})(y) - g_{x'}(y)| \leq \varepsilon + \varepsilon + K\varepsilon = (K + 2)\varepsilon.}$$

Un raisonnement analogue permet de conclure aussi que

$$\boxed{|u_n(h_{x'})(y) - h_{x'}(y)| \leq \varepsilon + \varepsilon + K\varepsilon = (K + 2)\varepsilon.}$$

22. Pour tout $x \in [a, b]$, on a $\{x\} \subset]x - r_x, x + r_x[\cap [a, b] \subset [a, b]$, ainsi

$$\boxed{\bigcup_{x \in [a, b]} (]x - r_x, x + r_x[\cap [a, b]) = [a, b].}$$

D'après le théorème *Compacité selon Borel-Lebesgue* prouvé à la question 6, on en déduit qu'il existe $J \subset [a, b]$ fini tel que

$$\bigcup_{x \in J} (]x - r_x, x + r_x[\cap [a, b]) = [a, b].$$

Ainsi, si $J = \{x_1, \dots, x_n\}$, on a

$$\boxed{\bigcup_{i=1}^n (]x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}[\cap [a, b]) = [a, b].}$$

23. Soit $N' = \max\{N_{x_1}, \dots, N_{x_n}\}$.

Pour tout $n \geq N'$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout

$$x \in \bigcup_{i=1}^n (]x_i - r_{x_i}, x_i + r_{x_i}[\cap [a, b]) = [a, b],$$

pour tout $y \in [a, b]$,

$$\boxed{|u_n(g_{x'})(y) - g_{x'}(y)| \leq (K + 2)\varepsilon}$$

et

$$\boxed{|u_n(h_{x'})(y) - h_{x'}(y)| \leq (K + 2)\varepsilon.}$$

24. Soit $x \in [a, b]$. En prenant $y = x$ dans les inégalités établies à la question 23 et en remarquant que $g_x(x) = f(x) - \varepsilon$ et $h_x(x) = f(x) + \varepsilon$, on a

$$|u_n(g_x)(x) - (f(x) - \varepsilon)| \leq (K + 2)\varepsilon$$

et

$$|u_n(h_x)(x) - (f(x) + \varepsilon)| \leq (K + 2)\varepsilon.$$

25. L'inégalité de la question 19 donne

$$\forall x \in [a, b], \quad u_n(g_x)(x) \leq u_n(f)(x) \leq u_n(h_x)(x).$$

Cette inégalité utilisée avec celle de la question 24 donne

$$\forall x \in [a, b], \quad -(K + 3)\varepsilon \leq u_n(f)(x) - f(x) \leq (K + 3)\varepsilon$$

soit

$$\sup_{x \in [a, b]} |u_n(f)(x) - f(x)| \leq (K + 3)\varepsilon.$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b]} |u_n(f)(x) - f(x)| = 0.$$

On a montré que la suite $(u_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

26. (a) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$.

$B_n(f)$ est une fonction polynomiale sur $[0, 1]$ comme sommes de fonctions polynomiales sur $[0, 1]$.

- (b) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$.

Comme $B_n(f)$ est une fonction polynomiale sur $[0, 1]$,

$$B_n(f) \text{ est continue sur } [0, 1].$$

La linéarité de B_n résulte de la linéarité de la somme.

Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \quad |B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \|f\|_{\infty}^{[0,1]} \sum_{k=0}^n x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \|f\|_{\infty}^{[0,1]}. \end{aligned}$$

On a montré que $\|B_n(f)\|_{\infty}^{[0,1]} \leq \|f\|_{\infty}^{[0,1]}$.

27. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ une fonction positive. On a

$$\forall x \in [0, 1], \quad B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \geq 0.$$

La fonction $B_n(f)$ est positive sur $[0, 1]$.

On a montré que B_n est positif.

28. • Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$B_n(e_0)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1.$$

Ainsi $B_n(e_0) = e_0$ et il est clair que $(B_n(e_0))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers e_0 sur $[0, 1]$.

• Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} B_n(e_1)(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Il est classique que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1},$$

donc pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} B_n(e_1)(x) &= \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k+1} (1-x)^{n-1-k} \\ &= x. \end{aligned}$$

Ainsi, $B_n(e_1) = e_1$ et il est clair que $(B_n(e_1))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers e_1 sur $[0, 1]$.

- Pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
 B_n(e_2)(x) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} x.
 \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que pour tout $k \in [2, n]$,

$$k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2},$$

donc pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
 B_n(e_2)(x) &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n} x \\
 &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} x^{k+2} (1-x)^{n-2-k} + \frac{1}{n} x \\
 &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x.
 \end{aligned}$$

Ainsi $B_n(e_1) = e_2 + \frac{1}{n}(e_1 - e_2)$.

Comme les fonctions e_1 et e_2 sont bornées sur $[0, 1]$, la suite

$$\left(\frac{1}{n}(e_1 - e_2) \right)_{n \in \mathbf{N}^*}$$

converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0, 1]$, ainsi

$$\boxed{(B_n(e_2))_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge uniformément vers } e_2 \text{ sur } [0, 1].}$$

29. La suite $(B_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie toutes les hypothèses du *Lemme de Korovkin* (voir les questions 26, 27 et 28).

Cela prouve que pour toute fonction f continue sur $[0, 1]$, $(B_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

30. Voir la correction de la question 15 de ce problème.

31. Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$. Soit $\varepsilon > 0$.

D'après le *Théorème de Weierstrass*, il existe une fonction polynomiale P définie sur $[a, b]$ telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - P(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si d est le degré de P , il existe $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbf{R}^{d+1}$ tel que pour tout $x \in [a, b]$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^d a_k x^k.$$

\mathbf{Q} étant dense dans \mathbf{R} , on peut trouver une famille de rationnels $(\tilde{a}_i)_{i \in \llbracket 0, d \rrbracket}$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 0, d \rrbracket, \quad |a_i - \tilde{a}_i| \leq \frac{\varepsilon}{2 \sum_{k=0}^d \max\{|a|, |b|\}^k}.$$

On pose \tilde{P} la fonction polynomiale définie sur $[a, b]$ par

$$\tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^d \tilde{a}_k x^k.$$

Pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - \tilde{P}(x)| &\leq |f(x) - P(x)| + |P(x) - \tilde{P}(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^d |a_k - \tilde{a}_k| |x|^k \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^d |a_k - \tilde{a}_k| \max\{|a|, |b|\}^k \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2 \sum_{k=0}^d \max\{|a|, |b|\}^k} \sum_{k=0}^d \max\{|a|, |b|\}^k \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, il existe une fonction polynomiale Q_n définie sur $[a, b]$ à coefficients dans \mathbf{Q} telle que

$$|f(x) - Q_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

La suite $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers f .

On a montré que toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales à coefficients rationnels.

32. On remarque que pour toute fonction polynomiale P , la fonction $x \mapsto e^x - P(x)$ n'est pas bornée sur \mathbf{R}_+ car

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - P(x)) = +\infty \quad (\text{croissance comparée}).$$

Il ne peut exister de suite de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers \exp sur \mathbf{R}_+ .

Remarque. On peut montrer qu'une fonction continue sur \mathbf{R}_+ (ou \mathbf{R}) est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales si, et seulement si, f est une fonction polynomiale.

33. Soit P une fonction polynomiale : il existe $n \in \mathbf{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

On a donc

$$\int_0^1 f(x) P(x) dx = \sum_{k=0}^n a_k \int_0^1 f(x) x^k dx = 0.$$

34. Par le *Théorème de Weierstrass*, il existe une fonction polynomiale P sur $[0, 1]$ telle que

$$\|f - P\|_{\infty}^{[0,1]} \leq \frac{\varepsilon}{\|f\|_{\infty}^{[0,1]} + 1}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 f(x) P(x) dx \right| &= \left| \int_0^1 f(x) (f(x) - P(x)) dx \right| \\ &\leq \|f\|_{\infty}^{[0,1]} \|f - P\|_{\infty}^{[0,1]}. \end{aligned}$$

On a montré que

$$\left| \int_0^1 f^2(x) dx - \int_0^1 f(x) P(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

35. D'après la question 33 $\int_0^1 f(x) P(x) dx = 0$, ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\left| \int_0^1 f^2(x) dx \right| \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que $\int_0^1 f^2(x) dx = 0$. Comme f^2 est positive et continue sur $[0, 1]$, on

en déduit que pour tout $x \in [0, 1], f(x) = 0$.

36. (a) Soit f la fonction définie par

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x)} \\ &= x^n \sin(2\pi \ln(x)) e^{-\ln^2(x)}. \end{aligned}$$

La fonction sin étant bornée, la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\ln^2(x)} = 0$ permet de montrer que f est prolongeable par continuité en 0.

De plus, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} x^2 f(x) &= \sin(2\pi \ln(x)) e^{(n+2)\ln(x) - \ln^2(x)} \\ &= \sin(2\pi \ln(x)) e^{(n+2)\ln(x)(1 - \ln(x))}. \end{aligned}$$

Comme la fonction sin est bornée, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = 0 \iff f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, on en déduit que l'intégrale

$\int_1^{+\infty} f(x) dx$ converge, puis par somme, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge.

Soient $0 < \varepsilon < A$ deux réels strictement positifs. Le changement de variable $u = \ln(x)$ dans l'intégrale $\int_{\varepsilon}^A f(x) dx$ donne

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^A f(x) dx &= \int_{\ln(\varepsilon)}^{\ln(A)} e^{(n+1)u} \sin(2\pi u) e^{-u^2} du \\ &= e^{((n+1)/2)^2} \int_{\ln(\varepsilon)}^{\ln(A)} e^{-(u-(n+1)/2)^2} \sin(2\pi u) du. \end{aligned}$$

Le changement de variable $v = u - (n+1)/2$ donne

$$\int_{\varepsilon}^A f(x) dx = e^{((n+1)/2)^2} \int_{\ln(\varepsilon) - (n+1)/2}^{\ln(A) - (n+1)/2} e^{-v^2} \sin(2\pi v + (n+1)v) dv.$$

En faisant tendre ε vers 0 et A vers $+\infty$, on a

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = e^{((n+1)/2)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2} \sin(2\pi v + (n+1)v) dv.$$

La fonction $v \mapsto e^{-v^2} \sin(2\pi v + (n+1)v)$ étant impaire, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^n \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x)} dx = 0.$$

(b) D'après la question 36 (a) la fonction

$$f : x \mapsto \sin(2\pi \ln(x)) x^{-\ln(x)}$$

vérifie

$$\forall n \in \mathbf{N}, \int_0^{+\infty} x^n f(x) dx = 0$$

et la fonction f n'est pas nulle sur \mathbf{R}_+ .

Le résultat de la question 35 tombe en défaut si l'on ne se place pas sur un segment.

Quelques remarques culturelles

Le théorème de Weierstrass admet plusieurs généralisations. On peut citer :

Théorème. Théorème de Stone-Weierstrass

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit $E \subset \mathcal{C}^0([a, b])$ une partie telle :

- i) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([a, b])$;
- ii) E est stable par produit ;
- iii) E sépare les points : pour tout $(x, y) \in [a, b]^2$ avec $x \neq y$, il existe $f \in E$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

Alors, tout élément de $\mathcal{C}^0([a, b])$ est limite d'une suite d'éléments de E pour $\|\cdot\|_{\infty}^{[a, b]}$.

On peut aussi citer le résultat suivant :

Théorème. Théorème de Müntz.

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs et strictement croissante. On pose aussi $\lambda_0 = 0$. Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$.

L'ensemble $\text{Vect}(x \mapsto x^{\lambda_n}, n \in \mathbf{N})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b])$ (i.e. tout élément de $\mathcal{C}^0([a, b])$ est limite d'une suite d'éléments de $\text{Vect}(x \mapsto x^{\lambda_n}, n \in \mathbf{N})$ pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}^{[a, b]}$) si, et seulement si, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.

Le lecteur intéressé pourra montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales sur un intervalle $[a, b]$ vérifie les hypothèses des deux précédents théorèmes.

Thème 26

Une introduction aux fonctions convexes

Thèmes abordés : Continuité, dérivabilité.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet introduit les fonctions convexes qui seront étudiées en classe de MP. Le but ici est de donner plusieurs caractérisations des fonctions convexes.

Ce sujet nécessite une bonne connaissance du cours sur la continuité et la dérivabilité.

Les parties sont largement indépendantes mais certains résultats pourront, au besoin, être admis.

26.1 Définitions et premières notions

Définitions. *Fonction convexe, fonction concave.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est *convexe* (resp. *concave*) sur I si :

$$\forall (x, y) \in I^2, \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$
$$\text{(resp. } f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y)\text{)}.$$

1. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe.

Montrer l'égalité suivante dite de Jensen : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbf{R}^+)^n$ et pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in I^n$,

$$\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right) \implies \left(f \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \right).$$

Indication : On pourra procéder par récurrence. On écrira astucieusement $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k$ pour se ramener à deux points et utiliser la définition d'une fonction convexe.

2. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad f \left(\frac{x+y}{2} \right) \leq \frac{1}{2} (f(x) + f(y)).$$

(a) Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques :

$$\left\{ \frac{k}{2^n}, n \in \mathbf{N}, k \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket \right\}$$

est dense dans $[0, 1]$.

(b) En déduire que f est convexe sur I .

26.2 Régularité des fonctions convexes

Définition. *Intérieur d'un intervalle.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} . On définit l'intérieur de I : \hat{I} comme l'intervalle I privé de ses éventuelles bornes. Ainsi, \hat{I} est toujours un intervalle ouvert.

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. Soit $a \in I$ et soit la fonction φ_a définie sur $I \setminus \{a\}$ par $\varphi_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

3. Montrer que la fonction φ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

4. En déduire que f admet des dérivées à gauche et à droite en tout point de \hat{I} .

On note f'_g (resp. f'_d) la fonction dérivée à gauche (resp. à droite) de f .

5. (a) Montrer que f est continue sur \hat{I} .

(b) Donner un exemple d'une fonction convexe non continue sur un intervalle I .

6. Montrer que f'_g et f'_d sont croissantes sur \hat{I} et montrer que

$$\forall (a, b) \in \hat{I}^2, (a < b) \implies (f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq f'_g(b)).$$

7. Montrer l'existence d'une suite de segments $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que

$$\hat{I} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n.$$

Soit $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de segments vérifiant la condition de la question 7.

8. Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $m \in \mathbf{N}^*$.

(a) Montrer que l'ensemble

$$D_m := \left\{ x \in I_n, f'_d(a^+) \geq f'_d(a^-) + \frac{1}{m} \right\}$$

est fini pour tout $m \in \mathbf{N}^*$.

(b) En déduire que f'_d est continue sur \hat{I} sauf en un nombre en plus dénombrable de points.

9. Énoncer un résultat analogue pour f'_g .

10. Montrer que f est dérivable sur \hat{I} sauf en un nombre au plus dénombrable de points.

26.3 Des caractérisations des fonctions convexes

11. Soit I un intervalle non trivial (i.e. non vide et non réduit à un point) de \mathbf{R} et $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur I .
 - (a) On suppose f dérivable sur $\overset{\circ}{I}$ dans cette question. Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur $\overset{\circ}{I}$.
 - (b) On suppose dans cette question f est deux fois dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Montrer que f est convexe sur I si, et seulement si, f'' est positive sur $\overset{\circ}{I}$.
12. *Une application.*
 - (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est concave sur \mathbf{R}_+^* .
 - (b) Montrer l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n, \quad \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

26.4 Représentation intégrale

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Proposition. *Représentation intégrale d'une fonction convexe.*

Soit I un intervalle ouvert de \mathbf{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. On suppose f'_d continue à droite. Alors, on a :

$$\forall a \in I, \forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'_d(t) dt.$$

Nous commençons par prouver le lemme suivant.

Lemme. *Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbf{R} . Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur I , dérivable à droite sur I et admettant une dérivée à droite nulle. On suppose qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) = 0$.*

Alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = 0$.

Nous prouvons le lemme et les notations du lemme sont conservées. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$. Soit

$$X_\varepsilon = \left\{ x \in]a, b], \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq \varepsilon \right\}.$$

13. Montrer que $X_\varepsilon \neq \emptyset$. En déduire que X_ε admet une borne supérieure que l'on note γ .
 14. Montrer que $\gamma \in X_\varepsilon$.
- On suppose $\gamma \neq b$.
15. (a) Montrer qu'il existe $c \in]\gamma, b[$ tel que

$$|f(c) - f(\gamma)| \leq \varepsilon |c - \gamma|.$$

(b) En déduire que

$$|f(c) - f(a)| \leq \varepsilon |c - a|.$$

(c) En déduire que $X_\varepsilon = [a, b]$.

16. Terminer la preuve du lemme.

Nous revenons à la preuve de la proposition.

17. Calculer la dérivée à droite de la fonction g définie sur I par

$$g(x) = f(x) - f(a) - \int_a^x f'_d(t) dt.$$

18. Terminer la preuve de la proposition.

Correction du Thème 26

1. Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la proposition \mathcal{P}_n :

$$\begin{aligned} & \ll \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbf{R}_+)^n, \\ & \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \right) \implies \left(f \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \right) \gg. \end{aligned}$$

\mathcal{P}_1 est manifestement vraie.

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un entier naturel non nul n , montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbf{R}_+)^{n+1}$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k = 1$.

Si l'un des λ_i est nul, alors \mathcal{P}_{n+1} est vraie grâce à l'hypothèse de récurrence.

On suppose maintenant $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

En remarquant que $\sum_{j=1}^n \lambda_j + \lambda_{n+1} = 1$, en utilisant la convexité de f (on re-

marque que $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} x_k \in I$ car $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} = 1$), on a :

$$\begin{aligned} f \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \right) &= f \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \times \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} x_k + \lambda_{n+1} x_{n+1} \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \lambda_j f \left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} x_k \right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}). \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} = 1$, l'hypothèse de récurrence assure que

$$f \left(\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{\sum_{j=1}^n \lambda_j} x_k \right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)}{\sum_{j=1}^n \lambda_j},$$

ainsi

$$f \left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k x_k \right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k f(x_k).$$

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$.

2. (a) Soit $x \in [0, 1]$ et soit $\varepsilon > 0$.

- Si $x = 0$. Quitte à réduire ε , on peut supposer $[0, \varepsilon] \subset [0, 1]$. Comme la suite de nombres dyadiques $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$0 \leq \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon.$$

- Si $x = 1$. Quitte à réduire ε , on peut supposer $[1 - \varepsilon, 1] \subset [0, 1]$. Comme la suite de nombres dyadiques $\left(\frac{2^n - 1}{2^n}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 1, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$1 - \varepsilon \leq \frac{2^n - 1}{2^n} \leq 1.$$

- Si $x \in]0, 1[$. Quitte à réduire ε , on peut supposer que $[x - \varepsilon, x + \varepsilon] \subset [0, 1]$.

Soit $n \in \mathbf{N}$ tel que $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$ et soit

$$A = \left\{ k \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket, \frac{k}{2^n} \leq x - \varepsilon \right\}.$$

A est non vide car $0 \in A$ et A est majoré par 2^n : il admet un plus grand élément k_0 .

Par définition de k_0 , on a $\frac{k_0}{2^n} \leq x - \varepsilon$ et $\frac{k_0 + 1}{2^n} > x - \varepsilon$.

Comme $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon$, on a

$$\frac{k_0 + 1}{2^n} = \frac{k_0}{2^n} + \frac{1}{2^n} \leq x - \varepsilon + \varepsilon < x + \varepsilon,$$

ainsi

$$\frac{k_0 + 1}{2^n} \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[.$$

On a montré que pour tout $x \in [0, 1]$ et pour tout $\varepsilon > 0$, l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ contient au moins un nombre dyadique :

l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $[0, 1]$.

(b) On procède en plusieurs étapes.

- On commence par montrer par récurrence que la proposition \mathcal{P}_n :

$$\ll \forall n \in \mathbf{N}, \forall (x_1, \dots, x_{2^n}) \in I^{2^n}, f\left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} x_k\right) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f(x_k) \gg$$

est vraie pour tout entier naturel n .

\mathcal{P}_0 est trivialement vraie.

Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un entier naturel n , montrons que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Soit $(x_1, \dots, x_{2^{n+1}}) \in I^{2^{n+1}}$. Par convexité de f , on a :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} x_k \right) &= f \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} x_k \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}} x_k \right) \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(f \left(\sum_{k=1}^{2^n} x_k \right) + f \left(\sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}} x_k \right) \right). \end{aligned}$$

En utilisant deux fois l'hypothèse de récurrence, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} f \left(\frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} x_k \right) &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f(x_k) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}} f(x_k) \right) \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^{n+1}} f(x_k). \end{aligned}$$

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout entier naturel n .

- Montrons que maintenant que pour tout nombre dyadique $t \in [0, 1]$ et pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Soit $t \in [0, 1]$ un nombre dyadique : il existe $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \llbracket 0, 2^n \rrbracket$ tel que $t = \frac{j}{2^n}$. On remarque que

$$(1-t)x + ty = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} x_k$$

avec $x_k = x$ pour $k \in \llbracket 1, 2^n - j \rrbracket$ et $x_k = y$ si $k \in \llbracket 2^n - j + 1, 2^n \rrbracket$. Ainsi, en utilisant le résultat établi ci-dessus, on a :

$$f((1-t)x + ty) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} f(x_k) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

- Soit $t \in [0, 1]$ et soit $(x, y) \in I^2$. Comme l'ensemble des nombres dyadique est dense (question 2 (a)) dans $[0, 1]$, il existe une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres dyadiques qui converge vers t .

D'après ce qui précède,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad f((1-t_n)x + t_n y) \leq (1-t_n)f(x) + t_n f(y).$$

Par continuité de f , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f((1-t_n)x + t_n y) = f((1-t)x + ty)$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ((1-t_n)f(x) + t_n f(y)) = (1-t)f(x) + tf(y).$$

Par conservation des inégalités par passage à la limite, on a finalement

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

On a montré que f est convexe sur I .

3. Soit $(x, y) \in (I \setminus \{a\})^2$. On suppose $x \neq y$. On distingue trois cas :

- Si $x < y < a$, alors on pose $\lambda = \frac{a-y}{a-x} \in]0, 1[$ et $1-\lambda = \frac{y-x}{a-x}$. On a :

$$\begin{aligned} f(y) &= f(a+y-a) \\ &= f(a+\lambda(x-a)) \\ &= f((1-\lambda)a + \lambda x) \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(x) \end{aligned}$$

d'où

$$f(y) - f(a) \leq \lambda(f(x) - f(a)).$$

Soit, en remplaçant λ par $\frac{a-y}{a-x}$:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y-a}$$

et donc

$$\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y).$$

- Le cas où $a < x < y$ se traite de manière analogue.
- On suppose $x < a < y$. Alors, d'après le point précédent, on peut écrire :

$$\frac{f(a) - f(x)}{a-x} \leq \frac{f(y) - f(x)}{y-x}$$

soit

$$\begin{aligned} (y-x)(f(a) - f(x)) &\leq (a-x)(f(y) - f(x)) \\ &\leq (a-x)(f(y) - f(a)) \\ &\quad + (a-x)(f(a) - f(x)). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} (y-a)(f(a) - f(x)) &= ((y-x) - (a-x))(f(a) - f(x)) \\ &\leq (a-x)(f(y) - f(a)). \end{aligned}$$

On obtient

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

soit

$$\varphi_a(x) \leq \varphi_a(y).$$

On a montré que φ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

4. Soit $a \in \hat{I}$. Comme φ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$, φ_a admet des limites finies à gauche et à droite de a .

Or

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \varphi_a(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \varphi_a(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a).$$

On a montré que f admet des dérivées à gauche et à droite en point de \hat{I} .

5. (a) Soit $a \in \hat{I}$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \subset \hat{I}$.

Comme φ_a est croissante sur $I \setminus \{a\}$, elle est bornée sur $[a - \varepsilon, a + \varepsilon] \setminus \{a\}$: il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon] \setminus \{a\}$,

$$|\varphi_a(x)| \leq M \iff |f(x) - f(a)| \leq M|x - a|.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} |x - a| = 0$, par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

cela prouve que f est continue en a .

On a montré que f est continue sur \hat{I} .

- (b) La fonction f définie sur $I = [0, 1]$ par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ est convexe I et n'est pas continue en 1.

6. • *Inégalité de gauche*

Soit $a \in \hat{I}$. Par croissance de φ_a sur $I \setminus \{a\}$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \varphi_a(x) \leq \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi_a(x)$$

soit

$$f'_g(a) \leq f'_d(a).$$

- *Inégalité de droite*

Soit $(a, b) \in \hat{I}^2$ avec $a < b$ et soit $x \in]a, b[$. Par croissance de φ_x sur $]a, b[$, on a $\varphi_x(a) \leq \varphi_x(b)$ soit

$$\frac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} \iff \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}.$$

Lorsque l'on fait tendre x vers a^+ dans l'inégalité précédente et en utilisant la continuité de f en $a \in \overset{\circ}{I}$ (question 5 (a)), on a :

$$f'_d(a) \leq \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (26.1)$$

En faisant tendre x vers b^- (toujours en utilisant la continuité de f en b), on obtient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'_g(b). \quad (26.2)$$

En combinant les lignes (26.1) et (26.2), on obtient :

$$f'_d(a) \leq f'_g(b).$$

On a montré que pour tout $(a, b) \in \overset{\circ}{I}^2$ tels que $a < b$, on a

$$\boxed{f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq f'_g(b) \leq f'_d(b)},$$

en particulier,

$$\boxed{\text{les fonctions } f'_g \text{ et } f'_d \text{ sont croissantes sur } \overset{\circ}{I}.$$

7. Comme I est un intervalle, on peut écrire $\overset{\circ}{I} =]\alpha, \beta[$ avec $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathbf{R}}^2$ où $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux suites telles que :

- i) $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement décroissante et $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est strictement croissante;
- ii) pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\alpha < \alpha_n < \beta_n < \beta$;
- iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \alpha$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = \beta$.

Par exemple, si :

- α et β sont deux réels, on pourra prendre $\alpha_n = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{2(n+1)}$ et $\beta_n = \beta - \frac{\beta - \alpha}{2(n+1)}$;
- $\alpha = -\infty$ et $\beta \in \mathbf{R}$, on pourra prendre $\alpha_n = -n + \beta - 1$ et $\beta_n = \beta - \frac{1}{n+1}$.

On a alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [\alpha_n, \beta_n] = \overset{\circ}{I}$.

L'inclusion $\bigcup_{n=0}^{+\infty} [\alpha_n, \beta_n] \subset \overset{\circ}{I}$ est claire car les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont strictement monotones.

Soit $x \in \overset{\circ}{I}$. Comme $\alpha < x < \beta$ et comme les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergent respectivement vers α et β , il existe un entier naturel $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\alpha_n < x$ et $\beta_n > x$. En particulier, $x \in [\alpha_N, \beta_N]$.

$\boxed{\text{On a montré que } \overset{\circ}{I} \text{ est réunion dénombrable de segments.}}$

8. (a) Supposons l'ensemble D_m infini : D_m contient donc une suite d'éléments $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux à deux distincts.

On note comme ci-dessus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = [\alpha_n, \beta_n].$$

Comme f est croissante I_n , on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(\beta_n) - f(\alpha_n) \geq \sum_{i=0}^N (f'_d(x_i^+) - f'_d(x_i^-)) \geq \frac{N+1}{m}.$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N+1}{m} = +\infty$, on obtient une contradiction.

On a montré que D_m est fini pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

- (b) Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f'_d .

Soit $x \in \hat{I}$. D'après la question 6, f'_d est croissante sur I , ainsi f'_d est discontinue en x si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tels que $f'_d(x^+) \geq f'_d(x^-) + \varepsilon$.

Ainsi si $m \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\frac{1}{m} \leq \varepsilon$, alors $x \in D_m$, puis $x \in \bigcup_{m=1}^{+\infty} D_m$ et

$$D \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} D_m.$$

Réciproquement, il est clair que $\bigcup_{m=1}^{+\infty} D_m \subset D$.

On a montré que $D = \bigcup_{m=1}^{+\infty} D_m$.

Ainsi, D est une réunion dénombrable d'ensembles finis :

D est au plus dénombrable.

9. On montre de même que f'_g est continue sur \hat{I} sauf en un nombre au plus dénombrable de points.

10. Soit D_g l'ensemble des points où f'_g est continue. D_g est égal à \hat{I} privé éventuellement d'un ensemble au plus dénombrable.

Soit $a \in D_g$. D'après la question 6, pour tout $x > a$, on a :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq f'_g(x).$$

Comme $a \in D_g$, on a $\lim_{x \rightarrow a^+} f'_g(x) = f'_g(a)$, puis par encadrement

$f'_d(a) = f'_g(a)$, donc f est dérivable en a .

On a montré que f est dérivable sur \hat{I} sauf sur un ensemble au plus dénombrable de points de \hat{I} .

11. (a) On prouve les deux implications.

\Rightarrow D'après les questions 4 et 6, f est dérivable à gauche et à droite et tout point de \hat{I} et les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes sur \hat{I} .

Or, f est dérivable sur \hat{I} , donc les fonctions f'_g et f'_d sont égales, ainsi f' est croissante sur \hat{I} .

\Leftarrow Soient $(x, y) \in I^2$ avec $x < y$.

Soit la fonction g définie sur $[0, 1]$ par

$$g(t) = (1-t)f(x) + tf(y) - f((1-t)x + ty).$$

g est continue sur $[0, 1]$ car f est continue sur I , g est dérivable sur $]0, 1[$ (attention, x et y peuvent être les éventuelles extrémités de I) et pour tout $t \in]0, 1[$,

$$g'(t) = f(y) - f(x) + (x-y)f'((1-t)x + ty).$$

On a $g(0) = g(1) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $\lambda_0 \in]0, 1[$ tel que $g'(\lambda_0) = 0$.

Comme $t \mapsto (1-t)x + ty$ est croissante sur $[0, 1]$ et comme f' est croissante sur \hat{I} et $x - y \leq 0$, la fonction g' est décroissante sur $]0, 1[$. Il s'ensuit que g' est positive sur $]0, \lambda_0]$ et négative sur $[\lambda_0, 1[$.

Par continuité, la fonction g est croissante sur $[0, \lambda_0]$ et décroissante sur $[\lambda_0, 1]$. Comme $g(0) = g(1) = 0$, il s'ensuit que g est positive sur $[0, 1]$, ainsi

$$\forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

et ce pour tout $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. Par symétrie entre x et y , on a prouvé que f est convexe sur I .

On a montré que f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur \hat{I} .

(b) Comme f est continue sur I et dérivable sur \hat{I} , d'après la question 11 (a), f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur \hat{I} .

Or f est deux fois dérivable sur \hat{I} . Comme \hat{I} est un intervalle, f est croissante sur \hat{I} , si et seulement si, f'' est positive sur \hat{I} .

On a montré que f est convexe sur I si, et seulement si, $f'' \geq 0$ sur \hat{I} .

12. (a) $t \mapsto -\ln(t)$ est deux fois dérivable sur \mathbf{R}_+^* et sa dérivée seconde est la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$. Or la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive sur \mathbf{R}_+^* , donc d'après la question 11 (b),

la fonction $-\ln$ est convexe sur \mathbf{R}_+^* .

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$.

Si l'un des $x_i = 0$, alors l'inégalité est claire car $\prod_{i=1}^n x_i = 0$.

On suppose donc que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i > 0$.

En utilisant la convexité de la fonction $-\ln$ sur \mathbf{R}_+^* et l'inégalité de Jensen établie à la question 1, on a :

$$-\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \leq -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i),$$

soit

$$\ln \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \geq \ln \left(\prod_{i=1}^n x_i \right).$$

En composant par la fonction \exp croissante sur \mathbf{R} , on récupère

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i.$$

On a montré que $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$,

$$\left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

13. Comme $f'_d(a) = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $[a, a + \alpha] \subset [a, b]$ (possible car $a < b$) et tel que pour tout $x \in]a, a + \alpha[$,

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \leq \varepsilon,$$

soit $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon|x - a|$. On remarque que cette inégalité reste valable pour $x = a$.

On a montré que $[x, x + \alpha[\subset X_\varepsilon$, ainsi X_ε n'est pas vide.

X_ε n'est pas vide et majoré par b , X_ε admet une borne supérieure.

14. Par la propriété de la borne supérieure, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de X_ε qui converge vers γ . Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad |f(x_n) - f(a)| \leq \varepsilon|x_n - a|.$$

Par passage à la limite en utilisant la continuité de f , on obtient

$$|f(\gamma) - f(a)| \leq \varepsilon|\gamma - a|,$$

soit comme $a < \gamma$,

$$\left| \frac{f(\gamma) - f(a)}{\gamma - a} \right| \leq \varepsilon.$$

On a montré que $\gamma \in X_\varepsilon$.

15. (a) Comme $f'_d(\gamma) = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $[\gamma, \gamma + \alpha]$ (possible car $\gamma < b$) tel que pour tout $x \in]\gamma, \gamma + \alpha[$, $\left| \frac{f(x) - f(\gamma)}{x - \gamma} \right| \leq \varepsilon$, soit

$$|f(x) - f(\gamma)| \leq \varepsilon |x - \gamma|.$$

On remarque que cette inégalité reste valable pour $x = \gamma$.

Ainsi, $c = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ convient.

- (b) Par inégalité triangulaire, on a :

$$\begin{aligned} |f(c) - f(a)| &= |f(c) - f(\gamma)| + |f(\gamma) - f(a)| \\ &\leq \varepsilon |c - \gamma| + \varepsilon |\gamma - a| \\ &\leq \varepsilon (c - a). \end{aligned}$$

Comme $|c - a| = c - a$, on a bien $|f(c) - f(a)| \leq \varepsilon |c - a|$.

- (c) On a trouvé $c \in X_\varepsilon$ avec $c > \gamma$. Cela contredit la construction de γ .

On en déduit que $\gamma = b$ et $X_\varepsilon = [a, b]$.

16. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$.

La question 15 (c) montre que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon |x - a|.$$

En particulier, on a

$$|f(b) - f(a)| \leq \varepsilon |b - a|. \quad (26.3)$$

L'inégalité (26.3) étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $f(a) = f(b)$ pour tout $x \in [a, b]$.

Ceci étant vrai pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$, on en déduit que f est constante sur I .

Enfin, comme $f(x_0) = 0$, on en déduit que f est nulle sur I .

17. Il est clair que la dérivée à droite de la fonction $x \mapsto f(x) - f(a)$ est la fonction $x \mapsto f'_d(x)$.

Il nous reste à montrer que la dérivée à droite de la fonction $F : x \mapsto \int_a^x f'_d(t) dt$ est la fonction $x \mapsto f'_d(x)$.

Soit $z_0 \in I$. Pour tout $h > 0$, on a

$$\frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} f'_d(t) dt$$

d'où, pour tout $h > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f'_d(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} (f'_d(t) - f'_d(z_0)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} |f'_d(t) - f'_d(z_0)| dt. \end{aligned}$$

Par continuité à droite de f'_d en z_0 , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [z_0, z_0 + \alpha]$, $|f'_d(t) - f'_d(z_0)| \leq \varepsilon$.

Ainsi, si $h \leq \alpha$, on a

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f'_d(z_0) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{z_0}^{z_0+h} \varepsilon dt = \varepsilon.$$

On a montré que pour tout $z_0 \in I$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z_0+h) - F(z_0)}{h} = f'_d(z_0).$$

On a montré que g est dérivable à droite sur I et pour tout $x \in I$, $g'_d(x) = 0$.

18. On vient de montrer que la dérivée à droite de la fonction g est nulle sur l'intervalle I .

D'après le lemme établi à la question 16, g est constante sur I . Or, $g(a) = 0$, ainsi, on a montré que

$$\forall a \in I, \forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'_d(t) dt.$$

Quelques remarques culturelles

Le lecteur motivé pourra montrer la proposition suivante :

Proposition. *Monotonie des fonctions convexes.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} non trivial et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. Alors :

- ou bien f est monotone sur I ;
- ou bien f est croissante, puis décroissante sur I .

Le lecteur (toujours motivé) pourra ensuite montrer la proposition suivante :

Proposition. *Minimum des fonctions convexes.*

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe telle que

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Alors, f admet un minimum global m . De plus, $f^{-1}(\{m\})$ est un intervalle de \mathbf{R} .

L'intérêt de cette précédente proposition est dans l'existence d'un minimum.

Cette proposition se généralise à des fonctions convexes définies sur des ensembles plus généraux mais l'esprit de la proposition reste le même.

Thème 27

Inégalité isopérimétrique

Thèmes abordés : Continuité, dérivabilité.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet introduit la notion de longueur d'une courbe. Le but est d'établir une inégalité isopérimétrique.

Ce sujet nécessite une bonne connaissance du cours sur la continuité et la dérivabilité.

Les deux parties de ce sujet sont indépendantes.

27.1 Une formule générale

Définition. *Longueur d'un arc du graphe d'une fonction.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. On note $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in I\} \subset \mathbf{R}^2$. Soient $(A, B) \in \Gamma^2$ dont on note les abscisses a et b . On définit la longueur $L(a, b, f)$ de l'arc \widehat{AB} par :

$$L(a, b, f) = \sup_{a=t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b} \sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2}.$$

1. Justifier géométriquement cette relation.
2. Calculer la longueur de l'arc de la fonction $x \mapsto x$ entre les points de coordonnées $A(0, 0)$ et $B(1, 1)$.
3. Soient f une fonction définie sur un intervalle I .
Soit $(a, b, c) \in I^3$ tel que $a \leq b \leq c$. Montrer que

$$L(a, c, f) = L(a, b, f) + L(b, c, f)$$

avec, pour convention, $x + \infty = \infty$ pour tout réel x .

Nous allons montrer la proposition suivante qui permet de calculer plus facilement la longueur d'un arc.

Proposition. *Longueur d'un arc d'une fonction régulière.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur I . On note Γ le graphe de f . La longueur de l'arc \widehat{AB} entre deux points A et B de Γ d'abscisses respectives a et b avec $a \leq b$ existe et vaut

$$L(a, b, f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt.$$

Nous prouvons la proposition. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $a = t_0 < \dots < t_n < b = t_{n+1}$ une subdivision de l'intervalle $[a, b]$. Soit γ la fonction définie sur $[a, b]$ par

$$\gamma(t) = (t, f(t)).$$

4. Vérifier que

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur \mathbf{R}^2 définie par : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5. (a) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt.$$

Indication : Pour établir l'inégalité, on pourra étudier la fonction

$$x \in [t_i, t_{i+1}] \mapsto \int_{t_i}^x \|\gamma'(t)\| dt - \left\| \int_{t_i}^x \gamma'(t) dt \right\|.$$

(b) En déduire que

$$\sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

(c) Montrer que

$$L(a, b, f) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

6. Dans cette question, on suppose que pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$,

$$t_i = a + i \frac{b-a}{n+1}.$$

(a) Montrer que pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, il existe $\zeta_{n,i} \in]t_{n,i}, t_{n,i+1}[$ tel que

$$f(t_{n,i+1}) - f(t_i) = \frac{1}{n+1} f'(\zeta_{n,i}).$$

(b) Montrer que

$$\sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{n,i+1} - t_{n,i}) + (f(t_{n,i+1}) - f(t_{n,i}))^2} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \sqrt{1 + f'^2(\zeta_{n,i})}.$$

(c) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{n,i+1} - t_{n,i}) + (f(t_{n,i+1}) - f(t_{n,i}))^2} = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt.$$

7. Montrer que

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq L(a, b, f).$$

8. Terminer la preuve de la proposition.

27.1.1 Une fonction continue dont la longueur n'est pas finie

Contrairement à ce que l'on pourrait intuitivement penser, la continuité de f n'assure pas le fait que la longueur d'un arc soit finie. Pour cela, on introduit la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \begin{cases} x \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

9. Vérifier que f est continue sur \mathbf{R} .

Nous allons maintenant montrer que la longueur du graphe Γ de f entre les points d'abscisse 0 et $\frac{1}{\pi}$ n'est pas finie.

10. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad L\left(\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{\pi}, f\right) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i\pi}.$$

11. Conclure.

27.2 Une inégalité isopérimétrique

Dans cette partie, nous nous intéressons à établir une version faible de l'inégalité isopérimétrique.

Définition. *Domaine du plan, fonction associée à un domaine du plan.*

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$.

- D est un domaine du plan s'il existe deux réels a et b tels que $a \leq b$ et une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$ et telle que

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, a \leq x \leq b \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

- La fonction f introduite au point précédent sera appelée la *fonction associée au domaine D* .

Soit D un domaine du plan et f la fonction associée au domaine D .

12. Montrer que l'aire $\mathcal{A}(D)$ de D et le périmètre $\mathcal{P}(D)$ de D vérifient

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(t) dt \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(D) = \int_a^b \left(1 + \sqrt{1 + f'^2(t)}\right) dt.$$

13. Montrer que

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_a^b (1 + |f'(t)|) dt.$$

14. Montrer que

$$\int_a^b |f'(t)| dt \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Indication : On pourra vérifier que pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(x) = \int_a^x f'(t) dt.$$

15. En déduire l'inégalité isopérimétrique suivante

$$\mathcal{P}(D) \geq (b-a) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2(b-a)} \mathcal{A}(D).$$

Correction du Thème 27

1. Un dessin permet de comprendre!

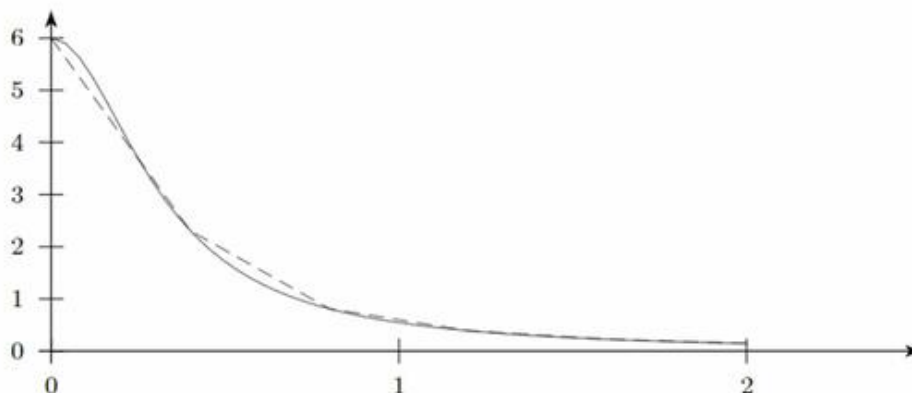


FIGURE 27.1 – Approximation de la longueur d'une courbe.

La somme des longueurs des segments en pointillé est une approximation d'autant meilleure que l'on augmente le nombre de points de la subdivision de l'intervalle.

2. On pose $f : t \mapsto t$.

Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t_{n+1} = 1$ une subdivision de $[0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} &= \sum_{i=0}^n \sqrt{2(t_{i+1} - t_i)^2} \\ &= \sqrt{2} \sum_{i=0}^n (t_{i+1} - t_i) \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $L(0, 1, x \mapsto x) = \sqrt{2}$.

Le théorème de Pythagore confirme le résultat!

3. On procède en deux temps et on montre que

$$L(a, c, f) \geq L(a, b, f) + L(b, c, f)$$

puis que

$$L(a, c, f) \leq L(a, b, f) + L(b, c, f).$$

- *Inégalité* $L(a, c, f) \geq L(a, b, f) + L(b, c, f)$

Soit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$ une subdivision de $[a, b]$ et soit $b = t_{n+1} < t_{n+2} < \dots < t_{n+m} < t_{n+m+1} = c$ une subdivision de $[b, c]$.

De toute évidence,

$$a = t_0 < \cdots < t_{n+1} < t_{n+2} < \cdots < t_{n+m+1} = c$$

est une subdivision de $[a, c]$ et par définition de $L(a, c, f)$

$$\begin{aligned} L(a, c, f) &\geq \sum_{i=0}^{n+m} \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} \\ &\geq \sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} \\ &\quad + \sum_{i=n+1}^{n+m} \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2}. \end{aligned}$$

La précédente inégalité étant vraie pour toute subdivision de $[a, b]$ et de $[b, c]$, on en déduit que

$$L(a, c, f) \geq L(a, b, f) + L(b, c, f).$$

- *Inégalité* $L(a, c, f) \leq L(a, b, f) + L(b, c, f)$

Soit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < t_{n+1} = c$ une subdivision de $[a, c]$.

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ tel que $b \in [t_k, t_{k+1}[$.

- ★ Si $b = t_k$, alors $a = t_0 < \cdots < b = t_k$ et $b = t_k < \cdots < t_{n+1} = c$ sont des subdivisions respectivement de $[a, b]$ et $[b, c]$ de sorte que

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} \\ &\quad + \sum_{i=k}^n \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} \\ &\leq L(a, b, f) + L(b, c, f). \end{aligned}$$

- ★ Si $b \neq t_k$, alors

$$\sigma : a = t_0 < \cdots < t_k < b < t_{k+1} < \cdots < t_{n+1} = c$$

est une subdivision de $[a, c]$ que l'on note

$$a = \tilde{t}_0 < \cdots < \tilde{t}_{k+1} = b < \cdots < \tilde{t}_{n+2} = c.$$

De plus, comme l'application $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ est une norme sur \mathbf{R}^2 , donc elle vérifie l'inégalité triangulaire, ainsi

$$\begin{aligned} &\sqrt{(t_{k+1} - t_k)^2 + (f(t_{k+1}) - f(t_k))^2} \\ &\leq \sqrt{(t_{k+1} - b)^2 + (f(t_{k+1}) - f(b))^2} \\ &\quad + \sqrt{(b - t_k)^2 + (f(b) - f(t_k))^2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} \\ & \leq \sum_{i=0}^{n+1} \sqrt{(\tilde{t}_{i+1} - \tilde{t}_i)^2 + (f(\tilde{t}_{i+1}) - f(\tilde{t}_i))^2}. \end{aligned}$$

Comme

$$a = \tilde{t}_0 < \dots < \tilde{t}_k < \tilde{t}_{k+1} = b \quad \text{et} \quad b = \tilde{t}_{k+1} < \dots < \tilde{t}_k < \tilde{t}_{n+2} = c$$

sont des subdivisions respectives de $[a, b]$ et $[b, c]$, par définitions de $L(a, b, f)$ et $L(b, c, f)$, on a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} \\ & \leq \sum_{i=0}^{n+1} \sqrt{(\tilde{t}_{i+1} - \tilde{t}_i)^2 + (f(\tilde{t}_{i+1}) - f(\tilde{t}_i))^2} \\ & \leq \sum_{i=0}^k \sqrt{(\tilde{t}_{i+1} - \tilde{t}_i)^2 + (f(\tilde{t}_{i+1}) - f(\tilde{t}_i))^2} \\ & \quad + \sum_{i=k+1}^{n+1} \sqrt{(\tilde{t}_{i+1} - \tilde{t}_i)^2 + (f(\tilde{t}_{i+1}) - f(\tilde{t}_i))^2} \\ & \leq L(a, b, f) + L(b, c, f). \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a montré que pour toute subdivision

$$a = t_0 < \dots < t_n = c$$

de $[a, c]$, on a

$$\sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} \leq L(a, b, f) + L(b, c, f).$$

En prenant le suprémum sur l'ensemble des subdivisions de $[a, c]$, il s'ensuit que

$$L(a, c, f) \leq L(a, b, f) + L(b, c, f).$$

On a montré que

$$\boxed{L(a, c, f) = L(a, b, f) + L(b, c, f).}$$

4. γ est dérivable sur $[a, b]$ et

$$\forall t \in [a, b], \quad \gamma(t) = (1, f'(t)).$$

Il s'ensuit que

$$\forall t \in [a, b], \quad \|\gamma'(t)\| = \sqrt{1 + f'^2(t)}.$$

On a bien montré que

$$\boxed{\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.}$$

5. (a) • *Égalité* $\sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\|$

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On a :

$$\begin{aligned} \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| &= \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| \\ &= \|(t_{i+1} - t_i, f(t_{i+1}) - f(t_i))\| \\ &= \boxed{\sqrt{(t_{i+1} - t_i)^2 + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2}}. \end{aligned}$$

• *Inégalité* $\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt$

Soit $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Soit φ définie sur $[t_i, t_{i+1}]$ par

$$\varphi(x) = \int_{t_i}^x \|\gamma'(t)\| dt - \left\| \int_{t_i}^x \gamma'(t) dt \right\|.$$

En procédant comme au premier point de cette question, on a : pour tout $x \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$\varphi(x) = \int_{t_i}^x \|\gamma'(t)\| dt - \left((x - t_i)^2 + (f(x) - f(t_i))^2 \right)^{1/2}.$$

φ est dérivable sur $[t_i, t_{i+1}]$ et pour tout $x \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \|\gamma'(x)\| - \frac{x - t_i + f'(x)(f(x) - f(t_i))}{\sqrt{(x - t_i)^2 + (f(x) - f(t_i))^2}} \\ &= \sqrt{1 + f'^2(x)} - \frac{x - t_i + f'(x)(f(x) - f(t_i))}{\sqrt{(x - t_i)^2 + (f(x) - f(t_i))^2}}. \end{aligned}$$

On en déduit que pour tout $x \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) \geq 0 &\iff \sqrt{1+f'^2(x)} \times \sqrt{(x-t_i)^2 + (f(x)-f(t_i))^2} \\ &\geq x-t_i + f'(x)(f(x)-f(t_i)). \end{aligned}$$

Soit $x \in [t_i, t_{i+1}]$.

- ★ Si $x-t_i + f'(x)(f(x)-f(t_i)) \leq 0$, alors on a clairement $\varphi'(x) \geq 0$.
- ★ Si $x-t_i + f'(x)(f(x)-f(t_i)) \geq 0$, alors, par croissance de la fonction $x \mapsto x^2$ sur \mathbf{R}_+ , on a

$$\begin{aligned} \varphi'(x) \geq 0 &\iff (1+f'^2(x)) \left((x-t_i)^2 + (f(x)-f(t_i))^2 \right) \\ &\geq (x-t_i + f'(x)(f(x)-f(t_i)))^2 \\ &\iff f'^2(x)(x-t_i)^2 + (f(x)-f(t_i))^2 \\ &\geq 2(x-t_i)f'(x)(f(x)-f(t_i)) \\ &\iff (f'(x)(x-t_i) - (f(x)-f(t_i)))^2 \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie, on en déduit que $\varphi'(x) \geq 0$.
Ainsi,

$$\forall x \in [t_i, t_{i+1}], \quad \varphi'(x) \geq 0.$$

On en déduit que φ est croissante sur $[t_i, t_{i+1}]$. Comme $\varphi(t_i) = 0$, on a $\varphi(t_{i+1}) \geq 0$, soit

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \gamma'(t) dt \right\| \leq \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\gamma'(t)\| dt.$$

- (b) En sommant entre 0 et n l'inégalité obtenue à la question 5 (a) et en utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{i+1}-t_i)^2 + (f(t_{i+1})-f(t_i))^2} \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

- (c) L'inégalité obtenue à la question 5 (b) est vraie pour toute subdivision de $[a, b]$, en prenant le suprémum sur l'ensemble des subdivisions, on en déduit

$$L(a, b, f) \leq \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

6. (a) Soit $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$. La fonction f est continue sur $[t_i, t_{i+1}]$, dérivable sur $]t_i, t_{i+1}[$, par le théorème des accroissements finis, il existe $\zeta_{n,i} \in]t_i, t_{i+1}[$ tel que

$$f(t_{i+1}) - f(t_i) = \frac{1}{n+1} f'(\zeta_{n,i}).$$

- (b) En utilisant la question 6 (a) et le fait que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$t_{i+1} - t_i = \frac{1}{n+1},$$

on a

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{i+1} - t_i) + (f(t_{i+1}) - f(t_i))^2} \\ &= \sum_{i=0}^n \sqrt{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 f'^2(\zeta_{n,i})} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \sqrt{1 + f'^2(\zeta_{n,i})}. \end{aligned}$$

- (c) Pour alléger les notations, on pose $g : t \mapsto \sqrt{1 + f'^2(t)}$. On va montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n g(\zeta_{n,i}) = \int_0^1 g(t) dt.$$

Comme g est continue sur $[0, 1]$, le résultat sur les sommes de Riemann assure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n g(t_{n,i}) = \int_0^1 g(t) dt.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n g(t_{n,i}) - \int_0^1 g(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part, g est continue sur $[0, 1]$, donc le théorème de Heine assure que g est uniformément continue sur $[0, 1]$: il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, \quad (|x - y| \leq \alpha) \implies (|g(x) - g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n+1} \leq \alpha$ (il suffit que $n \geq \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor - 1$), pour tout $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$,

$$|\zeta_{n,i} - t_{n,i}| \leq |t_{n,i+1} - t_{n,i}| = \frac{1}{n+1} \leq \alpha,$$

ainsi

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n g(t_{n,i}) - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n g(\zeta_{n,i}) \right| &\leq \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n |g(t_{n,i}) - g(\zeta_{n,i})| \\ &\leq \frac{1}{n+1} \times \frac{\varepsilon}{2} \times (n+1) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq \max \left\{ N, \lfloor \frac{1}{\alpha} \rfloor - 1 \right\}$, par l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 g(t) dt - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n g(t_{n,i}) \right| \\ &\leq \left| \int_0^1 g(t) dt - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n g(\zeta_{n,i}) \right| \\ &\quad + \left| \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n g(t_{n,i}) - \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n g(\zeta_{n,i}) \right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En remplaçant g par son expression, cela prouve le résultat souhaité.

7. Par définition de $L(a, b, f)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\sum_{i=0}^n \sqrt{(t_{n,i+1} - t_{n,i}) + (f(t_{n,i+1}) - f(t_{n,i}))^2} \leq L(a, b, f).$$

En utilisant la question 6, on récupère

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt \leq L(a, b, f).$$

8. D'après les inégalités obtenues aux questions 5 (c) et 7, on a

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = L(a, b, f).$$

Enfin, en utilisant l'égalité de la question 4, on obtient finalement

$$L(a, b, f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt.$$

9. f est clairement continue sur \mathbf{R}^* . De plus, tout $x \in \mathbf{R}^*$, on a

$$\left| x \cos \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq |x|.$$

Par encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$.

On a montré que f est continue sur \mathbf{R} .

10. En appliquant le résultat de la question 3, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad L \left(\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{\pi}, f \right) = \sum_{i=1}^{n-1} L \left(\frac{1}{(i+1)\pi}, \frac{1}{i\pi}, f \right).$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$, en prenant la subdivision

$\frac{1}{(i+1)\pi} < \frac{1}{i\pi}$ de l'intervalle $\left[\frac{1}{(i+1)\pi}, \frac{1}{i\pi} \right]$, on a

$$\begin{aligned} & L \left(\frac{1}{(i+1)\pi}, \frac{1}{i\pi}, f \right) \\ & \geq \sqrt{\left(\frac{1}{(i+1)\pi} - \frac{1}{i\pi} \right)^2 + \left(f \left(\frac{1}{(i+1)\pi} \right) - f \left(\frac{1}{i\pi} \right) \right)^2} \\ & \geq \left| f \left(\frac{1}{(i+1)\pi} \right) - f \left(\frac{1}{i\pi} \right) \right|. \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \left| f \left(\frac{1}{(i+1)\pi} \right) - f \left(\frac{1}{i\pi} \right) \right| &= \left| \frac{1}{(i+1)\pi} \cos((i+1)\pi) - \frac{1}{i\pi} \cos(i\pi) \right| \\ &= \left| \frac{1}{(i+1)\pi} (-1)^{i+1} - \frac{1}{i\pi} (-1)^i \right| \\ &= \frac{1}{(i+1)\pi} + \frac{1}{i\pi} \\ &\geq \frac{1}{i\pi}. \end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad L \left(\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{\pi}, f \right) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i\pi}.$$

11. Soit $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$. On suppose $L(0, 1, f)$ fini. Comme

$$[0, 1] = \left[0, \frac{1}{n\pi} \right] \cup \left[\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{\pi} \right] \cup \left[\frac{1}{\pi}, 1 \right],$$

d'après la question 3, on a

$$\begin{aligned} L(0, 1, f) &= L\left(0, \frac{1}{n\pi}, f\right) + L\left(\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{\pi}, f\right) + L\left(\frac{1}{\pi}, 1, f\right) \\ &\geq L\left(\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{\pi}, f\right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité établie à la question 10, on a

$$L\left(\frac{1}{n\pi}, \frac{1}{\pi}, f\right) \geq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i\pi}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i\pi} = +\infty$, on obtient une contradiction.

On a montré que la longueur du graphe de f entre les points d'abscisse 0 et d'abscisse 1 n'est pas finie.

12. Par interprétation géométrique de l'intégrale, on a

$$\mathcal{A}(D) = \int_a^b f(t) dt.$$

De plus, d'après la Proposition *Longueur d'un arc d'une fonction régulière* (question 8), la longueur du graphe de f entre les points d'abscisse a et b est $\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt$. Il faut ajouter la longueur de l'axe des abscisses entre les points de coordonnées $(a, 0)$ et $(b, 0)$, soit $b - a$. Finalement, on a

$$\mathcal{P}(D) = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt + (b - a) = \int_a^b \left(1 + \sqrt{1 + f'^2(t)}\right) dt.$$

13. Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Par croissance de la fonction carrée sur \mathbf{R}_+ , on a :

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2} (|x| + |y|) &\iff x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2} (x^2 + 2|x||y| + y^2) \\ &\iff x^2 - 2|x||y| + y^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité étant vraie car c'est une identité remarquable.

En utilisant cette inégalité et la croissance de l'intégrale, on a

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(t)} dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_a^b (1 + |f'(t)|) dt.$$

14. Comme $f(a) = 0$ et f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, on a : pour tout $x \in [a, b]$,

$$f(x) = \int_a^x f'(t) dt.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_a^b |f'(x)| dx &= \int_a^b \left| \int_a^x f'(t) dt \right| dx \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^x |f'(t)| dt \right) dx \\ &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |f'(t)| dt \right) dx. \end{aligned}$$

Or, $\int_a^b \left(\int_a^b |f'(t)| dt \right) dx = (b-a) \int_a^b |f'(t)| dt$, ainsi on a montré que

$$\boxed{\int_a^b |f'(t)| dt \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.}$$

15. En utilisant la définition de $\mathcal{P}(D)$ et la question 13, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(D) &= \int_a^b \left(1 + \sqrt{1 + f'^2(t)} \right) dt \\ &\geq (b-a) + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_a^b (1 + |f'(t)|) dt \\ &\geq (b-a) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_a^b |f'(t)| dt. \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question 14, on a

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \int_a^b |f'(t)| dt \geq \frac{\sqrt{2}}{2(b-a)} \int_a^b f(t) dt = \frac{\sqrt{2}}{2(b-a)} \mathcal{A}(D).$$

Il s'ensuit que

$$\boxed{\mathcal{P}(D) \geq (b-a) \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2(b-a)} \mathcal{A}(D).}$$

Quelques remarques culturelles

L'inégalité isopérimétrique proposée est un cas (très) particulier de l'inégalité isopérimétrique suivante :

Théorème. *Inégalité isopérimétrique.*

Pour toute « figure » géométrique de \mathbf{R}^2 d'aire \mathcal{A} et de périmètre \mathcal{P} , on a

$$\mathcal{P}^2 \geq 4\pi\mathcal{A}$$

avec égalité si, et seulement si, la figure est un disque.

Autrement dit, à périmètre fixé, le cercle est la figure géométrique qui maximise l'aire.

La légende veut que, lorsque la reine Didon (du IX^e au VIII^e siècle avant J.-C.) arriva sur les cotes de l'actuelle Tunisie pour fonder la ville qui deviendra Carthage, puis Tunis, le seigneur local lui proposa autant de terre qu'une peau de bœuf peut en contenir. La reine Didon coupa la peau du bœuf et recouvra la terre en formant un cercle.

L'inégalité isopérimétrique admet de multiples généralisations mais celles-ci nécessitent une bonne compréhension de la notion d'aire et de périmètre.

Thème 28

Décomposition en mille-feuille

Thèmes abordés : Série, calcul intégral.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet commence par définir la mesure de Lebesgue pour les ouverts de \mathbf{R} . L'étude des ouverts et de la mesure de Lebesgue sert à établir une relation pour l'intégrale d'une fonction positive dite décomposition en mille-feuille.

La partie 1 sert dans la partie 2. Les résultats des parties 1, 2 et 3 sont utilisés dans la partie 4.

28.1 Un résultat préliminaire sur les séries

Le but de cette partie est d'établir le résultat suivant :

Proposition. *Permutation des termes d'une série à termes positifs.*

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série (convergente ou divergente) à termes positifs.

Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{N})$ (ensemble des bijections de \mathbf{N} sur \mathbf{N}), les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} a_{\varphi(n)}$ sont de même nature.

Nous prouvons la proposition.

1. Montrer que si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{N})$, la série

$\sum_{n \geq 0} a_{\varphi(n)}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

2. Montrer que si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge, alors pour tout $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{N})$, la série

$\sum_{n \geq 0} a_{\varphi(n)}$ diverge.

28.2 Mesure de Lebesgue d'un ouvert

Définition. *Ouvert de \mathbf{R} .*

Soit $O \subset \mathbf{R}$ non vide. On dit que O est un ouvert de \mathbf{R} si :

$$\forall x \in O, \exists r > 0,]x - r, x + r[\subset O.$$

3. Soient $a < b$ deux réels. Montrer que l'intervalle $]a, b[$ est un ouvert de \mathbf{R} .
4. Montrer qu'une réunion quelconque d'ouverts de \mathbf{R} est un ouvert de \mathbf{R} .
5. (a) Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de \mathbf{R} est un ouvert de \mathbf{R} .
(b) Une intersection quelconque d'ouverts de \mathbf{R} est-elle nécessairement un ouvert de \mathbf{R} ?
6. *Caractérisation des ouverts de \mathbf{R} .*
(a) Soit O un ouvert non vide de \mathbf{R} . On définit la relation binaire \mathcal{R}_O sur O par :

$$\forall (x, y) \in O^2, x \mathcal{R}_O y \iff \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \subset O.$$

Montrer que \mathcal{R}_O est une relation d'équivalence sur O .

Pour $x \in O$, on définit sa classe $\text{cl}(x)$ modulo \mathcal{R}_O par :

$$\text{cl}(x) = \{y \in O, x \mathcal{R}_O y\}.$$

- (b) Montrer que pour tout $x \in O$, $\text{cl}(x)$ est un intervalle ouvert.
- (c) Montrer que

$$\forall (x, y) \in O^2, \text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset \quad \text{ou} \quad \text{cl}(x) = \text{cl}(y).$$

- (d) En déduire que l'on peut écrire

$$O = \bigcup_{i \in I} O_i$$

où les O_i sont des intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints.

- (e) En montrant que pour tout $i \in I$, $\mathbf{Q} \cap O_i \neq \emptyset$, montrer que I est au plus dénombrable i.e. montrer que I est en bijection avec \mathbf{N} ou avec un ensemble fini.

Indication : On rappelle que \mathbf{Q} est dénombrable.

Définition. *Mesure de Lebesgue d'un ouvert.*

Soit O un ouvert de \mathbf{R} . D'après la question 6, on peut écrire $O = \bigcup_{n \in \mathcal{N}}]a_n, b_n[$

où l'union est disjointe et les suites $(a_n)_{n \in \mathcal{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathcal{N}}$ sont telles que pour tout $n \in \mathcal{N}$, $a_n < b_n$ et \mathcal{N} est un ensemble au plus dénombrable.

On définit la mesure de Lebesgue de O par :

$$\lambda(O) = \sum_{n \in \mathcal{N}} (b_n - a_n) \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

7. Justifier que la définition de la mesure d'un ouvert est valide, i.e. montrer que pour toute bijection $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$,

$$\sum_{n \in \mathcal{N}}]a_n, b_n[= \sum_{n \in \mathcal{N}}]a_{\psi(n)}, b_{\psi(n)}[.$$

8. Soient O et O' deux ouverts tels que $O \subset O'$.
Montrer que $\lambda(O) \leq \lambda(O')$ (les deux membres de l'inégalité peuvent être infinis).
9. Soit $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts deux à deux disjoints. Montrer que

$$\lambda\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} O_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(O_n) \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Plus généralement, on admet le résultat suivant.

Proposition. *Sous-additivité de λ .*

Soit $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts.

Alors,

$$\lambda\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} O_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(O_n) \in \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

10. *Un ouvert particulier.*

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération de \mathbf{Q} (ce qui est possible car \mathbf{Q} est dénombrable). Soit

$$O = \bigcup_{n=0}^{+\infty}]a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[.$$

- (a) Montrer que O est un ouvert dense de \mathbf{R} .
 (b) Donner une majoration de $\lambda(O)$.
 (c) Qu'a-t-on exhibé?

28.3 Une propriété topologique des fonctions continues

Dans cette partie $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction.

11. Montrer que si f est continue sur \mathbf{R} , alors pour tout ouvert O de \mathbf{R} , $f^{-1}(O)$ est un ouvert de \mathbf{R} .
12. Montrer que si l'image réciproque de tout ouvert de \mathbf{R} est un ouvert de \mathbf{R} , alors f est continue sur \mathbf{R} .

Définition. *Fonction à support compact*

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est à support compact si :

$$\exists A \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}, (|x| \geq A) \implies (f(x) = 0).$$

28.4 Représentation en mille-feuille

Le but de cette partie est de montrer la proposition suivante.

Proposition. *Décomposition en mille-feuille*

Soit $p \geq 1$ un réel. Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ une fonction continue à support compact.

Alors,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = p \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > t\}) t^{p-1} dt,$$

où pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, $\{f > t\}$ est l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}, f(x) > t\}$.

13. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f^p(x) = \int_0^{f^p(x)} 1 dt = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{y \in \mathbf{R}, f^p(y) > t\}}(x) dt.$$

14. Après en avoir justifié l'existence, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{y \in \mathbf{R}, f^p(y) > t\}}(x) dx \right) dt.$$

Indication : On admet que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{y \in \mathbf{R}, f^p(y) > t\}}(x) dt \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{y \in \mathbf{R}, f^p(y) > t\}}(x) dx \right) dt.$$

C'est la conséquence d'un résultat plus général : le **théorème de Fubini** qui, sous certaines hypothèses, permet de « permuter » les intégrales.

15. Après avoir remarqué que pour tout ouvert O de \mathbf{R} ,

$$\lambda(O) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_O(x) dx,$$

montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f^p > t\}) dt.$$

16. En faisant un changement de variable, terminer la preuve de la proposition.

Correction du Thème 28

1. Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{N})$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^N a_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Comme la série $\sum_{n \geq 0} a_{\varphi(n)}$ est une série à termes positifs, il s'ensuit que la série $\sum_{n \geq 0} a_{\varphi(n)}$ converge.

De plus, les inégalités suivantes, valables pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^N a_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^N a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi(n)}$$

permettent d'affirmer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi(n)} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi(n)},$$

soit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

2. Soit $A \in \mathbb{R}_+$. Comme la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge et $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n = +\infty$. Ainsi, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N_0) \implies \left(\sum_{k=0}^n a_k \geq A \right).$$

Pour tout $i \in \llbracket 0, N \rrbracket$, on note k_i l'antécédent de i par φ (il existe et il est unique par bijectivité de φ). Soit $K = \max \{k_0, \dots, k_N\}$.

Par positivité de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $n \geq K$, on a

$$\sum_{k=0}^n a_{\varphi(k)} \geq \sum_{k=0}^N a_k \geq A.$$

On a montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_{\varphi(k)} = +\infty,$$

ainsi la série $\sum_{n \geq 0} a_{\varphi(n)}$ diverge.

3. Soit $x \in]a, b[$ et soit $r = \min \{x - a, b - x\} > 0$.

Par définition, on a $]x - r, x + r[\subset]a, b[$.

On a montré que tout intervalle du type $]a, b[$ avec $a < b$ est un ouvert de \mathbf{R} .

4. Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de \mathbf{R} . Soit $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$.

Soit $j \in I$. Comme O_j est un ouvert de \mathbf{R} , il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset O_j$. Ainsi

$$]x - r, x + r[\subset O_j \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

On a montré que $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert de \mathbf{R} .

5. (a) Soit $(O_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille finie d'ouverts.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, O_i est un ouvert de \mathbf{R} , il existe $r_i > 0$ tel que $]x - r_i, x + r_i[\subset O_i$.

Si $r = \min \{r_1, \dots, r_n\}$, on a $]x - r, x + r[\subset O_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc

$$]x - r, x + r[\subset \bigcap_{i=1}^n O_i.$$

On a montré que $\bigcap_{i=1}^n O_i$ est un ouvert de \mathbf{R} .

- (b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $O_n = \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$.

D'après la question 3, O_n est un ouvert de \mathbf{R} pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

De plus, $\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n = \{0\}$. Or $\{0\}$ n'est pas un ouvert de \mathbf{R} .

Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert de \mathbf{R} .

6. (a) Montrons que \mathcal{R}_O est réflexive, symétrique et transitive.

- *Réflexivité*

Pour tout $x \in O$, on a $x\mathcal{R}_O x$ car

$$\{(1-t)x + tx, t \in [0, 1]\} = \{x\} \subset O.$$

\mathcal{R}_O est réflexive.

- *Symétrie*

Si $(x, y) \in O^2$ est tel que $x\mathcal{R}_O y$, on a aussi $y\mathcal{R}_O x$ car

$$\{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} = \{(1-t)y + tx, t \in [0, 1]\} \subset O.$$

\mathcal{R}_O est symétrique.

- *Transitivité*

Soit $(x, y, z) \in O^3$ tel que $x\mathcal{R}_O y$ et $y\mathcal{R}_O z$. On a

$$\{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \subset O$$

et

$$\{(1-t)y + tz, t \in [0, 1]\} \subset O.$$

Soit $w \in \{(1-t)x + tz, t \in [0, 1]\}$, on a

$$w \in \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \cup \{(1-t)y + tz, t \in [0, 1]\} \subset O.$$

Ainsi, on a $w \in O$. On a montré que

$$\{(1-t)x + tz, t \in [0, 1]\} \subset O,$$

soit $x\mathcal{R}_O z$: \mathcal{R}_O est transitive.

On a montré que \mathcal{R}_O est une relation d'équivalence sur O .

(b) • Soit $(y, z) \in \text{cl}(x)^2$. Comme $x\mathcal{R}_O y$ et $x\mathcal{R}_O z$, on a

$$\{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \subset O \quad \text{et} \quad \{(1-t)x + tz, t \in [0, 1]\} \subset O.$$

Or,

$$\begin{aligned} & \{(1-t)y + tz, t \in [0, 1]\} \\ & \subset \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \cup \{(1-t)x + tz, t \in [0, 1]\} \\ & \subset \text{cl}(x). \end{aligned}$$

On en déduit que $\text{cl}(x)$ est un intervalle.

- Soit $y \in \text{cl}(x)$. Comme O est un ouvert de \mathbf{R} , il existe $r > 0$ tel que $]y-r, y+r[\subset O$.

Par définition de \mathcal{R}_O , pour tout $z \in]y-r, y+r[$, on a $y\mathcal{R}_O z$.

Puis, comme $x\mathcal{R}_O z$, par transitivité de \mathcal{R}_O , on a $x\mathcal{R}_O z$, ainsi $z \in \text{cl}(x)$, d'où $]y-r, y+r[\subset \text{cl}(x)$.

On a montré que $\text{cl}(x)$ est un intervalle ouvert.

(c) Soit $(x, y) \in O^2$. On suppose $\text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) \neq \emptyset$, montrons que

$$\text{cl}(x) = \text{cl}(y).$$

Soit $z \in \text{cl}(x) \cap \text{cl}(y)$ et soit $s \in \text{cl}(x)$.

Comme s et z sont deux éléments de $\text{cl}(x)$, on a $s\mathcal{R}_O z$. Comme $z\mathcal{R}_O y$, par transitivité de \mathcal{R}_O , on a $s\mathcal{R}_O y$ et $s \in \text{cl}(y)$. Ainsi, $\text{cl}(x) \subset \text{cl}(y)$.

Par symétrie des rôles de x et y , on a donc $\text{cl}(x) = \text{cl}(y)$.

On a montré que

$$\forall (x, y) \in O^2, \quad \text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset \quad \text{ou} \quad \text{cl}(x) = \text{cl}(y).$$

(d) Soit $\tilde{O} = \{\text{cl}(x), x \in O\}$. On a $O = \bigcup_{y \in \tilde{O}} y$. Comme $x \in \text{cl}(x)$ pour tout

$x \in O$, \tilde{O} est constitué d'intervalles non vides.

Par la question 6 (b), tout élément y de \tilde{O} est un ouvert. Par la question 6 (c) et comme \tilde{O} contient des éléments deux à deux distincts (car c'est un ensemble), l'union est disjointe.

On a montré que O est une union disjointe d'intervalles ouverts non vides deux à deux disjoints.

(e) Comme \mathbf{Q} est dense dans \mathbf{R} , pour tout $i \in I$, il existe $x_i \in O_i \cap \mathbf{Q}$.

Comme l'union est disjointe, l'application $\varphi : \begin{cases} I & \rightarrow \mathbf{Q} \\ i & \mapsto x_i \end{cases}$ est injective.

Comme \mathbf{Q} est dénombrable et φ injective, il s'ensuit que

I est fini ou dénombrable.

7. Soit O un ouvert non vide de \mathbf{R} . D'après les questions 6 (d) et 6 (e), on peut écrire $O = \bigcup_{n \in \mathcal{N}}]a_n, b_n[$ où les intervalles $]a_n, b_n[$ sont tous non vides et deux à deux disjoints et \mathcal{N} est au plus dénombrable.

Soit $\psi : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ une bijection. Il est clair que l'on a

$$O = \bigcup_{n \in \mathcal{N}}]a_n, b_n[= \bigcup_{n \in \mathcal{N}}]a_{\psi(n)}, b_{\psi(n)}[,$$

i.e. O ne dépend de l'ordre dans lequel l'union est faite. Mais, a-t-on

$$\sum_{n \in \mathcal{N}} (b_{\psi(n)} - a_{\psi(n)}) = \sum_{n \in \mathcal{N}} (b_n - a_n) ?$$

Si \mathcal{N} est fini, c'est trivial, même si l'un des intervalles $]a_k, b_k[$ ($k \in \mathcal{N}$) n'est pas de mesure finie.

Si \mathcal{N} est infini, alors \mathcal{N} est en bijection avec \mathbf{N} et, on peut utiliser les résultats des questions 1 et 2 qui assurent que les séries $\sum_{n \in \mathcal{N}} (b_{\psi(n)} - a_{\psi(n)})$ et

$\sum_{n \in \mathcal{N}} (b_n - a_n)$ sont de même nature et de somme égale en cas de convergence.

La définition proposée est valide.

8. On écrit $O = \bigcup_{n \in \mathcal{N}}]a_n, b_n[$ et $O' = \bigcup_{n \in \mathcal{N}'}]a'_n, b'_n[$ où les deux unions sont disjointes avec pour tout $n \in \mathbf{N}$, $a_n < b_n$ et $a'_n < b'_n$ et $\mathcal{N}, \mathcal{N}'$ sont deux ensembles au plus dénombrables.

On commence par montrer que pour tout $n \in \mathcal{N}$, il existe $n' \in \mathcal{N}'$ unique tel que $]a_n, b_n[\subset]a'_{n'}, b'_{n'}[$.

• *Unicité*

Soit $n \in \mathcal{N}$ et soit $(n', n'') \in (\mathcal{N}')^2$ tel que

$$]a_n, b_n[\subset]a'_{n'}, b'_{n'}[\quad \text{et} \quad]a_n, b_n[\subset]a'_{n''}, b'_{n''}[.$$

Ainsi, $]a'_{n'}, b'_{n'}[\cap]a'_{n''}, b'_{n''}[\neq \emptyset$.

Par la question 6 (c), on en déduit $]a'_{n'}, b'_{n'}[=]a'_{n''}, b'_{n''}[$, puis $n' = n''$ car les intervalles $]a'_n, b'_n[$ pour $n \in \mathcal{N}'$ sont deux à deux disjoints.

- *Existence*

Soit $x \in O$.

Il existe $n \in \mathcal{N}$ tel que $x \in]a_n, b_n[$ de sorte que $]a_n, b_n[= \text{cl}_O(x)$.

Comme $O \subset O'$, on a $\text{cl}_O(x) \subset \text{cl}_{O'}(x)$.

Or, d'après la question 6 (b), $\text{cl}_{O'}(x)$ est un intervalle ouvert inclus dans O' : il existe $n' \in \mathcal{N}'$ tel que $\text{cl}_{O'}(x) =]a'_{n'}, b'_{n'}[$.

On a montré que $]a_n, b_n[\subset]a'_{n'}, b'_{n'}[$.

Soit l'application $\varphi : \begin{cases} \mathcal{N} & \longrightarrow \mathcal{N}' \\ n & \longmapsto n' \end{cases}$ qui est bien définie d'après ce qui précède.

On écrit donc

$$O' = \bigcup_{n \in \mathcal{N}'}]a'_n, b'_n[= \bigcup_{n \in \varphi(\mathcal{N})}]a'_n, b'_n[\cup \bigcup_{n \in \mathcal{N}' \setminus \varphi(\mathcal{N})}]a'_n, b'_n[.$$

De part la question 7, on en déduit que

$$\lambda(O') = \sum_{n \in \varphi(\mathcal{N})} (b'_n - a'_n) + \sum_{n \in \mathcal{N}' \setminus \varphi(\mathcal{N})} (b'_n - a'_n).$$

Or,

$$\forall n \in \mathcal{N}, \quad b_n - a_n \leq b_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)},$$

d'où

$$\sum_{n \in \varphi(\mathcal{N})} (b'_n - a'_n) \geq \sum_{n \in \mathcal{N}} (b_n - a_n) = \lambda(O).$$

Comme $\sum_{n \in \mathcal{N}' \setminus \varphi(\mathcal{N})} (b'_n - a'_n) \geq 0$, on obtient

$$\boxed{\lambda(O') \geq \lambda(O).}$$

9. D'après la question 6 (e), on peut écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad O_n = \bigcup_{k \in \mathcal{N}_n}]a_k^{(n)}, b_k^{(n)}[,$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$, \mathcal{N}_n est un ensemble au plus dénombrable.

Les ouverts $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant deux à deux disjoints, les intervalles $]a_k^{(n)}, b_k^{(n)}[$ le sont aussi.

On peut donc écrire

$$O = \bigcup_{n=0}^{+\infty} O_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k \in \mathcal{N}_n}]a_k^{(n)}, b_k^{(n)}[.$$

On notera que l'union est en fait une réunion dénombrable car \mathbf{N} est dénombrable et les ensembles \mathcal{N}_k sont au plus dénombrables pour tout $k \in \mathbf{N}$. On obtient donc

$$\lambda(O) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k \in \mathcal{N}_k}]a_k^{(n)}, b_k^{(n)}[.$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\sum_{k \in \mathcal{N}_k}]a_k^{(n)}, b_k^{(n)}[= \lambda(O_n).$$

Il s'ensuit que

$$\lambda(O) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(O_n).$$

10. (a) Pour $n \in \mathbf{N}$, $]a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$ est un intervalle ouvert (question 3), ainsi

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty}]a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$$

est un ouvert comme une réunion d'ouverts (question 4).

Comme \mathbf{Q} est dense dans \mathbf{R} et $\mathbf{Q} \subset O$, on en déduit que O est dense dans \mathbf{R} .

On a montré que O est un ouvert dense de \mathbf{R} .

- (b) D'après la proposition admise, on a

$$\lambda(O) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda\left(]a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[\right).$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \lambda\left(]a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[\right) &= a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} - \left(a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$, on a montré que **$\lambda(O) \leq \varepsilon$.**

- (c) **O est un ouvert dense dont la mesure est inférieure à $\varepsilon > 0$ fixé.**

11. Soit O un ouvert de \mathbf{R} . On peut écrire $O = \bigcup_{n \in \mathcal{N}}]a_n, b_n[$ avec \mathcal{N} au plus dénombrable.

Comme $f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathcal{N}}]a_n, b_n[\right) = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} f^{-1}(]a_n, b_n[)$, ainsi il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathcal{N}$, $f^{-1}(]a_n, b_n[)$ est un ouvert de \mathbf{R} pour tout $n \in \mathcal{N}$ et d'utiliser la question 4.

Soit $n \in \mathcal{N}$ et soit $x \in f^{-1}(]a_n, b_n[)$. On a donc $f(x) \in]a_n, b_n[$. Par continuité de f en x , il existe $r > 0$ tel que pour tout $y \in \mathbf{R}$,

$$(y \in]x - r, x + r[) \implies (f(y) \in]a_n, b_n[).$$

Ainsi, $]x - r, x + r[\subset f^{-1}(]a_n, b_n[)$, donc $f^{-1}(]a_n, b_n[)$ est un ouvert de \mathbf{R} .

On conclut que, si f est continue sur \mathbf{R} , alors pour tout ouvert O de \mathbf{R} , $f^{-1}(O)$ est un ouvert de \mathbf{R} .

12. Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 3, l'intervalle $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ est un intervalle ouvert de \mathbf{R} .

Par hypothèse sur f , $f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[)$ est un ouvert de \mathbf{R} contenant x . Donc, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$]x - \alpha, x + \alpha[\subset f^{-1}(]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[).$$

En particulier, pour tout $y \in]x - \alpha, x + \alpha[$,

$$f(y) \in]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[.$$

On a montré que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall y \in \mathbf{R}, (|y - x| < \alpha) \implies (|f(y) - f(x)| < \varepsilon).$$

On a montré que f est continue en tout $x \in \mathbf{R}$, donc f est continue sur \mathbf{R} .

13. Soit $x \in \mathbf{R}$. L'égalité $f^p(x) = \int_0^{f^p(x)} 1 \, dt$ est claire.

De plus, par définition,

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \mathbf{1}_{\{y \in \mathbf{R}, f^p(y) > t\}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } f^p(x) > t \\ 0 & \text{si } f^p(x) \leq t \end{cases}.$$

Il s'ensuit que

$$f^p(x) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{y \in \mathbf{R}, f^p(y) > t\}}(x) \, dt.$$

On a montré que

$$\forall x \in \mathbf{R}, f^p(x) = \int_0^{f^p(x)} 1 \, dt = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{y \in \mathbf{R}, f^p(y) > t\}}(x) \, dt.$$

14. Comme f est continue à support compact, f^p l'est aussi. Si $A \geq 0$ est tel que pour tout $|x| \geq A$, $f(x) = 0$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x) \, dx = \int_{-A}^A f^p(x) \, dx.$$

Comme la fonction f est continue sur \mathbf{R} , l'intégrale $\int_{-A}^A f(x) dx$ existe bien. De plus, en utilisant la question 13 et l'indication, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{\{y \in \mathbf{R}, f^p(y) > t\}}(x) dt \right) dx \\ &= \boxed{\int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{y \in \mathbf{R}, f^p(y) > t\}}(x) dx \right) dt.} \end{aligned}$$

15. Par définition de la fonction $\mathbf{1}_O$, on a $\lambda(O) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_O(x) dx$.

f^p est continue sur \mathbf{R} car f l'est, ainsi

$$\{y \in \mathbf{R}, f^p(y) > t\} = (f^p)^{-1} (]t, +\infty[)$$

est un ouvert de \mathbf{R} comme image réciproque d'un ouvert de \mathbf{R} par une fonction continue (question 11).

Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{\{y \in \mathbf{R}, f^p(y) > t\}}(x) dx = \lambda(\{f^p > t\})$$

et finalement en utilisant l'égalité établie à la question 14, on a

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x) dx = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f^p > t\}) dt.}$$

16. On pose $t = u^p$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} \lambda(\{f^p > t\}) dt$. On a donc

$$\int_0^{+\infty} \lambda(\{f^p > t\}) dt = \int_0^{+\infty} \lambda(\{f^p > u^p\}) pu^{p-1} du.$$

Or, f est à valeurs positives, donc pour tout $u \in \mathbf{R}_+$, $\{f^p > u^p\} = \{f > u\}$. En utilisant l'égalité établie à la question 15, on a

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x) dx = p \int_0^{+\infty} \lambda(\{f > u\}) u^{p-1} du.}$$

Thème 29

Sur les suites convexes

Thèmes abordés : Suite, série.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet étudie quelques critères classiques sur la convergence des séries.
Une bonne connaissance du cours sur les suites et les séries est requise.
Les parties sont largement indépendantes.

29.1 Suite de Cauchy

Définitions. *Suite de Cauchy, valeur d'adhérence.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes et soit $\ell \in \mathbb{C}$.

- On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (n, p \geq N \implies |u_n - u_p| \leq \varepsilon).$$

- On dit que ℓ est une **valeur d'adhérence** pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

1. Montrer qu'une suite complexe convergente est de Cauchy.
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe de Cauchy.
 - (a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. En déduire qu'elle admet au moins une valeur d'adhérence.
 - (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes.
Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \left(N \leq n \leq p \implies \left| \sum_{k=n}^p a_k \right| \leq \varepsilon \right).$$

4. Donner un exemple d'une suite de rationnels de Cauchy qui ne converge pas dans \mathbb{Q} .

29.2 Transformation d'Abel et théorème d'Abel

Définition. *Opérateur Δ .*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

On définit la suite $(\Delta a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$.

Le but de cette partie est d'établir le théorème suivant :

Théorème. *Théorème d'Abel.*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes et soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$A_n = \sum_{k=0}^n a_k$. On suppose que $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels décroissante de limite nulle.

Alors, la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ est convergente.

On prouve le théorème. Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes qui vérifient les hypothèses du *Théorème d'Abel*.

5. Montrer que pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n > m \geq 1$,

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_k \Delta b_k + b_n A_n - A_{m-1} b_m.$$

6. Terminer la preuve du théorème d'Abel.

7. En déduire les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^a}$ converge.

29.3 Un raffinement du théorème d'Abel

Définition. *Suite à variation bornée.*

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes.

On dit que la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à *variation bornée* si la série $\sum_{n \geq 0} |\Delta b_n|$ converge.

8. Montrer la généralisation suivante du *Théorème d'Abel* : soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes telle que $\left(A_n = \sum_{k=0}^n a_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à variation bornée de limite nulle, alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

9. Vérifier qu'une suite réelle décroissante de limite nulle est à variation bornée. En déduire que le précédent résultat est une généralisation du *Théorème d'Abel*.

29.4 Suites convexes

Définition. *Suite convexe.* Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle.

On dit que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convexe* si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^2 a_n \geq 0.$$

10. Cette question s'adresse aux lecteurs ayant des rudiments sur les fonctions convexes (voir le Thème 26 : « Une introduction aux fonctions convexes »).
- Soit $\varphi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe.
- Montrer que la suite $(\varphi(n))_{n \in \mathbf{N}}$ est convexe.
 - En déduire des exemples de suites convexes.
11. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite convexe.
- Montrer que si $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est majorée, alors $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.
 - En déduire que si $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0, alors $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.
12. On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est convexe et bornée.
- Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (n+1) \Delta^2 a_n$ converge.
 - Montrer que la suite $(n \Delta a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.

29.5 Un théorème de Cauchy

Le but de cette partie est de montrer le théorème suivant :

Théorème. Théorème de Cauchy.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle décroissante de limite nulle.

Alors, les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

13. Justifier que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad 2^{k-1} u_{2^k} \leq \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} u_n \leq 2^{k-1} u_{2^{k-1}}.$$

14. Terminer la preuve du théorème de Cauchy.

29.6 Une propriété qui caractérise « presque » les séries géométriques

Définition. Progression géométrique.

Soit $a \in]0, 1[$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

On dit que $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite à progression géométrique de rapport a si :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} \leq a u_n.$$

15. Soit $a \in]0, 1[$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite à progression géométrique de rapport a .
- Montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
 - Pour tout $n \in \mathbf{N}$, justifier l'existence de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.
 - Montrer que

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n).$$

16. Montrer que série à termes positifs convergente $\sum_{n \geq 0} u_n$ qui vérifie

$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$ n'est pas nécessairement une suite à progression géométrique.

17. Le but de cette question est de montrer si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et vérifiant $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$, alors,

pour tout $a \in]0, 1[$, on peut partitionner la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ en un nombre fini de sous-suites à progression géométrique de rapport a .

Soit $a \in]0, 1[$.

- (a) Justifier qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad R_n \leq cu_n.$$

- (b) Soit $\ell = \lfloor \frac{c}{a} \rfloor$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (\ell + 1)u_{n+\ell} \leq cu_n.$$

- (c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+\ell} \leq au_n.$$

- (d) Terminer la preuve du résultat.

Correction du Thème 29

1. Soit ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout $n, p \geq N$, on a :

$$|u_n - u_p| \leq |u_n - \ell| + |u_p - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. (a) Par définition, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n, p \geq N$, $|u_n - u_p| \leq 1$. En particulier, pour tout $n \geq N$, on a

$$|u_n| \leq |u_N| + |u_n - u_N| \leq |u_N| + 1.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}.$$

On a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence.

- (b) Soit ℓ une valeur d'adhérence et ψ une extractrice : on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\psi(n)} = \ell.$$

Comme ψ est strictement croissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\psi(n) \geq n.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, p \geq N$, $|u_n - u_p| \leq \varepsilon$. En particulier, pour tout $n, p \geq N$,

$$|u_{\psi(n)} - u_p| \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $|u_p - \ell| \leq \varepsilon$.

On a montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ .

3. Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles.

Par définition, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si, et seulement si, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Or, d'après les questions 1 et 2 (b), la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, elle est une suite de Cauchy, soit

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, (N \leq n \leq p) \implies \left(\left| \sum_{k=n}^p a_k \right| \leq \varepsilon \right).$$

L'équivalence est montrée.

4. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \frac{\lfloor 10^n \sqrt{2} \rfloor}{10^n}$.

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$.

De plus, par définition de la partie entière, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{10^n \sqrt{2} - 1}{10^n} < u_n \leq \frac{10^n \sqrt{2}}{10^n}.$$

Par encadrement, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Par la question 1, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est de Cauchy mais ne converge pas dans \mathbb{Q} .

5. On remarque que pour tout $k \geq 1$, $a_k = A_k - A_{k-1}$, ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k b_k &= \sum_{k=m}^n (A_k - A_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m}^n A_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=m}^n A_k b_k - \sum_{k=m-1}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= -A_{m-1} b_m + A_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) \\ &= \boxed{-A_{m-1} b_m + A_n b_n + \sum_{k=m}^{n-1} A_k \Delta b_k.} \end{aligned}$$

6. Soit M un majorant de la suite $(|A_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n > m \geq 1$, on a :

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq M (|b_n| + |b_m|) + M \sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}|.$$

Or, la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, donc par télescopage, on a

$$\sum_{k=m}^{n-1} |b_k - b_{k+1}| = b_m - b_n.$$

Ainsi, pour tout $n > m \geq 1$, on a

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| \leq M (|b_m| + |b_n| + b_m - b_n) \leq M (|b_m| + |b_n| + b_m).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$,

$$|b_p| \leq \frac{\varepsilon}{3(M+1)},$$

donc si $n > m \geq N$, on a

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^n a_k b_k \right| &\leq 3M \times \frac{\varepsilon}{3(M+1)} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. D'après la question 2 (b), la suite $\left(\sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = e^{in}$ et $A_n = \sum_{k=0}^n e^{ik}$. Un simple calcul donne

$$\sum_{k=0}^n e^{ik} = \sum_{k=0}^n (e^i)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i}.$$

De plus, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |A_n| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)}}{1 - e^i} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^i|}.$$

La suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

On va montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^a}$ converge si, et seulement si, $a > 0$.

- Si $a \leq 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{e^{in}}{n^a} \right| \geq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^a}$ diverge grossièrement.
- Si $a > 0$. On a déjà montré que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. De plus, il est clair que la suite $\left(\frac{1}{n^a} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle, décroissante et de limite nulle.

Par le *Théorème d'Abel*, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^a}$ converge.

On a montré que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^a}$ converge si, et seulement si, $a > 0$.

8. On reprend l'égalité établie à la question 5 : pour tout $n, m \in \mathbf{N}$ tels que $n \geq m > 1$,

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_k \Delta b_k + b_n A_n - A_{m-1} b_m.$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbf{R}_+^*$ un majorant de la suite $(|A_n|)_{n \in \mathbf{N}}$.

Comme la série $\sum_{k \geq 0} |\Delta b_k|$ converge, d'après la question 3, il existe $N_1 \in \mathbf{N}^*$ tel

$$\text{que pour tout } p, q \geq N_1 \text{ avec } p \geq q, \left| \sum_{k=q}^p |\Delta b_k| \right| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Ainsi, si $n \geq m \geq N_1$, on a

$$\left| \sum_{k=m}^{n-1} A_k \Delta b_k \right| \leq M \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta b_k| \leq M \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, la suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0, donc il existe $N_2 \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_2, |b_n| \leq \frac{\varepsilon}{4M}.$$

En posant $N = \max\{N_1, N_2\}$, on en déduit que : pour tout $n \geq N$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^{n-1} A_k \Delta b_k + b_n A_n - A_{m-1} b_m \right| &\leq \left| \sum_{k=m}^{n-1} A_k \Delta b_k \right| + |b_n| M + |b_m| M \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

D'après la question 3, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

9. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite décroissante et de limite nulle.

Soit $N \in \mathbf{N}$. En utilisant la décroissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et un télescopage, on a :

$$\sum_{n=0}^N |\Delta u_n| = \sum_{n=0}^N (u_n - u_{n+1}) = u_0 - u_{N+1}.$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} (u_0 - u_{N+1}) = u_0$, on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} |\Delta u_n|$ converge.

On a montré que les hypothèses de la question 8 entraînent celles du *Théorème d'Abel* : le résultat établi à la question 8 est une généralisation du *Théorème d'Abel*.

10. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme φ est convexe sur \mathbf{R}_+ , par définition, on a :

$$\varphi(n+1) = \varphi\left(\frac{1}{2}(n) + \frac{1}{2}(n+2)\right) \leq \frac{1}{2}\varphi(n) + \frac{1}{2}\varphi(n+2),$$

soit

$$2\varphi(n+1) \leq \varphi(n) + \varphi(n+2).$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} \Delta^2 u_n &= \Delta u_n - \Delta u_{n+1} \\ &= (u_n - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_{n+2}) \\ &= u_n + u_{n+2} - 2u_{n+1} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

d'après le calcul précédent.

On a montré que si φ est convexe sur \mathbf{R}_+ , alors la suite $(\varphi(n))_{n \in \mathbf{N}}$ est convexe.

- (b) Il est clair que les fonctions \exp et $-\ln$ sont convexes sur leurs ensembles de définition (car leurs dérivées secondes sont positives), ainsi

les suites $(e^n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(-\ln(n))_{n \in \mathbf{N}^*}$ sont convexes.

11. (a) Pour montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante, il suffit de montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\Delta a_n \geq 0$.

Supposons qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\Delta a_k < 0$.

Par convexité, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1} \geq 0$, ainsi pour tout $n \geq k$.

En particulier, pour tout $n \geq k$, $\Delta a_{n+1} \leq \Delta a_n < 0$ et $|\Delta a_{n+1}| \geq |\Delta a_n|$.

Pour tout $n > m \geq k$, on a :

$$\begin{aligned} a_n - a_m &= (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_{m+1} - a_m) \\ &= - \sum_{k=m}^{n-1} \Delta a_k \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} |\Delta a_k|. \end{aligned}$$

Or, d'après ci-dessus, comme $n > m \geq k$, on a

$$\sum_{k=m}^{n-1} |\Delta a_k| \geq (n-m) |\Delta a_m|.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-m) |\Delta a_m| = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a_m) = +\infty.$$

Cela contredit le fait que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ soit majorée.

On a montré que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\Delta a_n \geq 0$, soit $a_n \geq a_{n+1}$:

la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante.

- (b) Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, elle est majorée.

En utilisant la question 11 (a), la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

12. (a) D'après la question 11 (a), la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est minorée, elle converge : soit ℓ sa limite. Par télescopage, on a

$$a_0 - \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta a_k.$$

Ainsi, la série $\sum_{k \geq 0} \Delta a_k$ converge : soit $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \Delta a_k \leq M.$$

En utilisant le résultat de la question 5 avec $m = 0$, on obtient : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M \geq \sum_{k=0}^n \Delta a_k = \sum_{k=0}^n (k+1) \Delta^2 a_k + (n+1) \Delta a_n. \quad (29.1)$$

Or, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convexe, donc pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Delta^2 a_k \geq 0$. De plus, comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1) \Delta a_n \geq 0$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M \geq \sum_{k=0}^n (k+1) \Delta^2 a_k \geq 0.$$

Le critère de comparaison des séries à termes positifs assure que la série $\sum_{n \geq 0} (n+1) \Delta^2 a_n$ converge.

- (b) En reprenant la ligne (29.1) de la correction de la question 12 (a), on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$M \geq \sum_{k=0}^n \Delta a_k = \sum_{k=0}^n (k+1) \Delta^2 a_k + (n+1) \Delta a_n,$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1) \Delta a_n = a_0 - a_{n+1} - \sum_{k=0}^n (k+1) \Delta^2 a_k.$$

Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (remarque faite lors de la correction de la question 12 (a)) et la série $\sum_{n \geq 0} (n+1) \Delta^2 a_n$ converge, on en déduit que

la suite $(n \Delta a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge : on note ℓ sa limite.

Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a $\Delta a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\ell \geq 0$.

Supposons $\ell > 0$. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $(n+1)\Delta a_n \geq \frac{\ell}{2}$, soit $a_n - a_{n+1} \geq \frac{\ell}{2(n+1)}$.

Une récurrence immédiate montre alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \implies \left(a_N - a_n \geq \frac{\ell}{2} \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k} \right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=N}^{n-1} \frac{1}{k} = +\infty$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty,$$

ce qui est exclu car la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est supposée bornée. Ainsi $\ell = 0$.

On a montré que la suite $(n\Delta a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

13. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La somme $\sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} u_n$ comporte 2^{k-1} termes. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, pour tout $n \in \llbracket 2^{k-1} + 1, 2^k \rrbracket$, on a $u_{2^k} \leq u_n \leq u_{2^{k-1}}$. En sommant, on obtient

$$2^{k-1}u_{2^k} \leq \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} u_n \leq 2^{k-1}u_{2^{k-1}}.$$

14. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En sommant l'inégalité obtenue à la question 13 entre 1 et N et en utilisant la relation de Chasles, on a :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N 2^k u_{2^k} \leq \sum_{k=2}^{2^N} u_k \leq \sum_{k=1}^N 2^{k-1} u_{2^{k-1}}.$$

- Si la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge, alors par comparaison, en utilisant le membre de gauche de l'inégalité établie ci-dessus, la série $\sum_{k \geq 1} 2^k u_{2^k}$ converge.
- Si la série $\sum_{k \geq 0} 2^k u_{2^k}$ converge, alors en utilisant le membre de droite de l'inégalité établie ci-dessus, la série $\sum_{k \geq 0} u_k$ converge.

On a montré que les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

15. (a) Une récurrence immédiate montre que : pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \geq p$, $0 \leq u_n \leq a^{n-p} u_p$.
Comme la série $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge (série géométrique), on en déduit que

la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

(b) D'après la question 15 (a), la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, donc R_n existe pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(c) En utilisant à nouveau la majoration de u_n obtenue à la question 15 (a), pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$0 \leq \frac{R_n}{u_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{u_k}{u_n} \leq u_0 \sum_{k=n+1}^{+\infty} a^{k-n} = u_0 \sum_{k=1}^{+\infty} a^k = \frac{au_0}{1-a}.$$

Il s'ensuit que $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$.

16. Soit $a \in]0, 1[$ et soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{2n} = u_{2n+1} = a^n.$$

Il est clair que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge car la série $\sum_{n \geq 0} a^n$ converge.

De plus, comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{2n} = u_{2n+1}$, il n'existe pas de réel $\tilde{a} \in]0, 1[$ tel que $u_{2n+1} \leq \tilde{a}u_{2n}$.

17. (a) Comme $R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(u_n)$, par définition, il existe une suite bornée $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle que : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $R_n = a_n u_n$.
Si c est un majorant de la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$,

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, \text{ on a } R_n \leq cu_n.$$

(b) En utilisant la décroissance de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et la question 17 (a), pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$(\ell + 1) u_{n+\ell} \leq \sum_{k=n}^{n+\ell} u_k \leq \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = R_n \leq cu_n.$$

(c) En utilisant l'inégalité obtenue à la question 17 (b), on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+\ell} \leq \frac{c}{\ell + 1} u_n.$$

Par définition de ℓ , on a $\ell \leq \frac{c}{a} < \ell + 1$, d'où $\frac{c}{\ell + 1} < a$.

On a montré que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+\ell} \leq au_n$.

(d) Soient les suites $u^0, \dots, u^{\ell-1}$ définies par :

$$\forall i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket, \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_n^i = u_{i+n\ell}.$$

Par construction, les suites u^i pour $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ forment bien une partition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$. De plus, en utilisant l'inégalité établie à la question 17 (c), on a

$$\forall i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket, \forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1}^i = u_{i+n\ell+1} \leq au_{i+n\ell} = au_n^i.$$

Les suites (u^i) pour $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ répondent à la question.

Thème 30

Théorème de convergence dominée

Thèmes abordés : Continuité, calcul intégral, série.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet démontre le théorème de convergence dominée de Lebesgue dans un cas particulier. Ce théorème, un des plus importants d'Analyse, sera abordé en classe de MP.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. Les résultats de ces parties servent à établir le théorème d'Egoroff (partie 3). La partie 3 sert pour établir le théorème de convergence dominée (partie 4). La partie 5 est une application du théorème de convergence dominée établi à la partie 4.

30.1 Convergence simple, convergence uniforme

Définitions. *Convergence simple, convergence uniforme.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} . Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur I et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$.

- On dit que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur I si :

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

- On dit que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur I si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

1. Montrer que si une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur un intervalle I , alors $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement vers f sur I .
2. Montrer que la réciproque est fautive.
Indication : On pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies sur $[0, 1]$ par : $f_n(x) = x^n$.
3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies et continue, qui converge uniformément vers une fonction f sur un intervalle I .

(a) Montrer que : pour tout $(x, y) \in I^2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f(y) - f_n(y)|.$$

(b) En déduire que f est continue sur I .

4. Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur $[a, b]$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a, b]$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx = 0.$$

30.2 Introduction à la mesure de Lebesgue

Définition. Tribu.

Soit X un ensemble et \mathcal{X} un ensemble de parties de X . On dit que \mathcal{X} est une tribu sur X si :

i) $\emptyset \in \mathcal{X}$;

ii) si $A \in \mathcal{X}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{X}$;

iii) si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{X} , alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{X}$.

Soit X un ensemble et \mathcal{X} une tribu sur X .

5. Montrer que $\{\emptyset, X\}$ et $\mathcal{P}(X)$ sont des tribus sur X .

6. Montrer que si $(A_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une suite finie d'éléments de \mathcal{X} , alors

$$\bigcup_{n=0}^N A_n \in \mathcal{X}.$$

7. (a) Montrer que $X \in \mathcal{X}$.

(b) Soit $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de X . Montrer que

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{X}.$$

8. (a) Soit $(\mathcal{X}_i)_{i \in I}$ une famille de tribus sur X . Montrer que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{X}_i$ est une tribu sur X .

(b) Soit A un ensemble de parties de X . En déduire l'existence d'une plus petite tribu, notée $\sigma(A)$, (au sens de l'inclusion) contenant tous les éléments de A .

Définition. Mesure.

Soit (X, \mathcal{X}) un ensemble X muni d'une tribu \mathcal{X} .

Soit $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$. On dit que μ est une mesure sur X si :

- i) $\mu(\emptyset) = 0$;
 ii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux disjoints de \mathcal{X}

$$\mu \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n),$$

l'égalité ayant lieu dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Un ensemble X muni d'une tribu \mathcal{X} et d'une mesure μ s'appelle un *espace mesuré* et on le note (X, \mathcal{X}, μ) .

Lorsque $\mu(X)$ est fini, on dit que μ est *finie* et lorsque $\mu(X) = 1$, on dit que μ est une *mesure de probabilité*.

Soit (X, \mathcal{X}, μ) un espace mesuré.

9. Soit $(A_k)_{k \in [0, n]}$ une suite finie d'éléments deux à deux disjoints de \mathcal{X} . Montrer que

$$\mu \left(\bigcup_{k=0}^n A_k \right) = \sum_{k=0}^n \mu(A_k).$$

10. Montrer qu'une mesure est croissante : pour tout $A, B \in \mathcal{X}$

$$(A \subset B) \implies (\mu(A) \leq \mu(B)).$$

11. (a) Soient A et B deux éléments de \mathcal{X} . Montrer que

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Indication : On notera que A et B ne sont pas supposés disjoints.

- (b) Soit $(A_k)_{k \in [1, n]}$ une suite finie d'éléments de \mathcal{X} . Montrer que

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

12. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{X} croissante pour l'inclusion.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la suite $(\widetilde{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\widetilde{A}_0 = A_0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \widetilde{A}_n = A_n \setminus A_{n-1}.$$

- (a) Montrer que la suite $(\widetilde{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{X} deux à deux disjoints.

- (b) Montrer aussi que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{k=0}^n A_k = \bigcup_{k=0}^n \widetilde{A}_k.$$

(c) En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

13. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{X} . Montrer que

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n),$$

l'inégalité ayant lieu dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

14. On suppose dans cette question que μ est finie. Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{X}$,

$$\mu(\overline{A}) = \mu(X) - \mu(A).$$

Définitions. *Ouvert de \mathbf{R} , ouvert d'un intervalle.*

- Soit $O \subset \mathbf{R}$. On dit que O est un *ouvert de \mathbf{R}* si pour tout $x \in O$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset O$.
- Soit I un intervalle de \mathbf{R} . Soit $O \subset I$. On dit que O est un *ouvert de I* s'il existe un ouvert \tilde{O} tel que $O = I \cap \tilde{O}$.

Soit O un ouvert non vide de \mathbf{R} . On définit sur O la relation binaire suivante :

$$\text{pour tout } (x, y) \in O^2, x \mathcal{R} y \iff \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \subset O.$$

15. Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur O .

Pour tout $x \in O$, on note $\text{cl}(x) = \{y \in O, x \mathcal{R} y\}$.

16. Montrer que pour tout $x \in O$, $\text{cl}(x)$ est un intervalle ouvert de \mathbf{R} .

17. Soit $(x, y) \in O^2$. Montrer que l'on a :

$$\text{cl}(x) = \text{cl}(y) \quad \text{ou} \quad \text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset.$$

Soit $I = \{\text{cl}(x_i), i \in I\}$ où la famille $(x_i)_{i \in I}$ est de telle sorte que les ensembles $\text{cl}(x_i)$ soient deux à deux distincts et $\bigcup_{i \in I} \text{cl}(x_i) = O$.

18. Montrer que l'on peut écrire $O = \bigcup_{i \in J} \text{cl}(x_i)$ où $J \subset I$ et l'union est disjointe.

19. En utilisant la densité de \mathbf{Q} dans \mathbf{R} , montrer que l'union précédente est une réunion disjointe au plus dénombrable d'intervalles ouverts.

Indication : On pourra introduire une application de I vers \mathbf{Q} injective et utiliser le fait que \mathbf{Q} est dénombrable.

Définitions. *Tribu borélienne, mesure de Lebesgue sur un segment.*

- Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note $\mathcal{B}([a, b])$ la plus petite tribu contenant tous les intervalles ouverts inclus dans $[a, b]$ (elle existe d'après la question 8 (b)).

On l'appelle *tribu borélienne sur $[a, b]$* .

- Sur $\mathcal{B}([a, b])$, on admet qu'il existe une unique mesure λ vérifiant les points suivants :

- ★ λ est invariante par translation : tout $A \in \mathcal{B}([a, b])$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $x + B = \{x + b, b \in B\} \subset [a, b]$

$$\lambda(B) = \lambda(x + B),$$

- ★ pour tout segment $[c, d] \subset [a, b]$, on a $\lambda([c, d]) = d - c$.

30.3 Théorème d'Egoroff

Remarque. Si $a < b$ sont deux réels et $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ est continue par morceaux, la notation $\int_a^b f(t) dt$ a un sens pour vous. On admet que la notation $\int_B f(t) dt$ garde un sens lorsque B est un élément de la tribu borélienne sur $[a, b]$. On admet que la relation de Chasles reste vraie : pour tout $(A, B) \in \mathcal{B}([a, b])^2$ tel que $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = [a, b]$,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_A f(t) dt + \int_B f(t) dt.$$

Théorème. *Théorème d'Egoroff.*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de fonctions continues définies sur $[a, b]$ telles que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$.

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \subset [a, b]$ mesurable vérifiant $\lambda([a, b] \setminus A) \leq \varepsilon$ tel que $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers f sur A .

Nous prouvons le théorème d'Egoroff. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de fonctions définies et continues sur un segment $[a, b]$ qui converge simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$.

Pour $(k, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on définit

$$E_{k,n} = \bigcap_{i \geq n} \left\{ x \in [a, b], |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

20. (a) Montrer que pour tout $(k, i) \in (\mathbf{N}^*)^2$,

$$\overline{\left\{ x \in [a, b], |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}}$$

est un ouvert de $[a, b]$.

- (b) En déduire que

$$\forall (k, n) \in (\mathbf{N}^*)^2, \quad E_{k,n} \in \mathcal{B}([a, b]).$$

21. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la suite $(E_{k,n})_{n \in \mathbf{N}^*}$ est croissante pour l'inclusion. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(E_{k,n}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{k,n}\right).$$

22. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$

$$[a, b] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{k,n}.$$

Indication : Pour l'inclusion difficile, si $x \in [a, b]$, on pourra écrire la définition de la convergence de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ avec $\varepsilon = \frac{1}{k}$ ($k \in \mathbf{N}^*$).

23. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, il existe $n_k \in \mathbf{N}^*$ tel que

$$\lambda(E_{k,n_k}) \geq \lambda([a, b]) - \frac{\varepsilon}{2k}.$$

(b) Soit $A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} ([a, b] \setminus E_{k,n_k})$. Montrer que $\lambda(A) \leq \varepsilon$.

24. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[a, b] \setminus A$.

30.4 Théorème de convergence dominée

Le but de cette partie est d'établir le théorème suivant, fondamental en Analyse.

Théorème. *Théorème de convergence dominée de Lebesgue.*

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues qui converge simplement vers une fonction f continue, i.e.

$$\forall x \in [a, b], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

On suppose qu'il existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$ continue telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [a, b], \quad |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

Nous prouvons le théorème. Soit $\varepsilon > 0$.

25. Justifier l'existence de

$$M = \sup_{x \in [a, b]} (|f(x)| + |g(x)|).$$

26. Montrer qu'il existe $A \subset [a, b]$ vérifiant $\lambda([a, b] \setminus A) \leq \frac{\varepsilon}{2M+1}$, tel que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A .

On note $B = [a, b] \setminus A$.

27. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\int_B |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

28. Terminer la preuve du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Indication : On admettra que le résultat de la question 4 reste vrai pour des éléments de la tribu borélienne de $[a, b]$.

30.5 Application : calcul de l'intégrale de Gauss

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{1+t^2} dt.$$

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

29. Montrer que g est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .
 30. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer que g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(t^2+1)x^2} dt.$$

31. En faisant un changement de variable dans g' , montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x).$$

32. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

33. En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Correction du Thème 30

1. Soit $x_0 \in I$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|.$$

Par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$, par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = f(x_0).$$

On a montré que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I .

2. On suit l'indication et on considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = x^n$. Clairement, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge pour tout $x \in [0, 1]$. On note f la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

De plus, on a

$$\forall x \in [0, 1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} x^n & \text{si } x \in [0, 1[\\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}.$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1.$$

La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in I^2$. De toute évidence, on a

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)|.$$

L'inégalité triangulaire permet de conclure.

- (b) Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout

$$n \geq N, \quad \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On fixe un entier naturel $n \geq N$.

Comme f_n est continue en y , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in]y - \alpha, y + \alpha[\cap I, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

En utilisant l'égalité établie à la question 3 (a), on a montré que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ et pour tout $x \in I$,

$$(x \in]y - \alpha, y + \alpha[\cap I) \implies (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

On a montré que f est continue en tout $x \in I$.

Ainsi, f est continue sur I .

4. Déjà, grâce à la question 3 (b), on note que la fonction f est continue sur $[a, b]$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f_n(t) dt \right| &= \left| \int_a^b (f(t) - f_n(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)| dt \\ &\leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - f_n(t)|. \end{aligned}$$

Comme la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f(t) - f_n(t)| = 0.$$

Par encadrement, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

5. • Il est clair que $\emptyset \in \{\emptyset, X\}$ et est stable par passage au complémentaire.
De plus, si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\{\emptyset, X\}$, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \emptyset$
si pour tout $n \in \mathbf{N}$, $A_n = \emptyset$ et $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = X$ s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $A_n = X$.

On a montré que $\{\emptyset, X\}$ est une tribu sur X .

- Il est clair que $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$ et est stable par passage au complémentaire.
De plus, si $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{P}(X)$, il est clair que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{P}(X)$.

On a montré que $\mathcal{P}(X)$ est une tribu sur X .

6. Soit la suite $(\widetilde{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \widetilde{A}_n = \begin{cases} A_n & \text{si } n \in \llbracket 0, N \rrbracket \\ \emptyset & \text{si } n \geq N + 1 \end{cases}.$$

Par construction, $\bigcup_{n=0}^N A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \widetilde{A}_n$. Comme les \widetilde{A}_n sont des éléments de la tribu,

on a $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \widetilde{A}_n \in \mathcal{X}$, on en déduit que $\boxed{\bigcup_{n=0}^N A_n \in \mathcal{X}}$.

7. (a) Comme $\emptyset \in \mathcal{X}$, par passage au complémentaire, on a

$$\boxed{\overline{\emptyset} = X \in \mathcal{X}}.$$

(b) Par passage au complémentaire, la suite $(\overline{A_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{X} , ainsi $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n} \in \mathcal{X}$.

Par passage au complémentaire et par utilisation d'une loi de de Morgan, on a

$$\boxed{\overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} \overline{A_n}} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{X}}.$$

8. (a) Comme pour tout $i \in I$, $\Omega \in \mathcal{X}_i$, donc $\Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{X}_i$.

Soit $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{X}_i$. Comme pour tout $i \in I$, \mathcal{X}_i est une tribu, pour tout $i \in I$,

$\overline{A} \in \mathcal{X}_i$, puis $A \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{X}_i$.

Un même argument montre que si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de

$\bigcap_{i \in I} \mathcal{X}_i$, alors $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{X}_i$.

$\boxed{\text{On a montré que } \bigcap_{i \in I} \mathcal{X}_i \text{ est une tribu.}}$

(b) Soit \mathcal{X}_A l'ensemble des tribus qui contiennent A .

$\boxed{\text{Soit } \sigma(A) = \bigcap_{\mathcal{X} \in \mathcal{X}_A} \mathcal{X}}$.

D'après la question 8 (a), $\sigma(A)$ est une tribu car c'est une intersection de tribus.

Il est clair que $\sigma(A)$ est la plus petite tribu au sens de l'inclusion contenant A : si \mathcal{Y} est une tribu contenant A , alors $\mathcal{Y} \in \mathcal{X}_A$, puis $\sigma(A) \subset \mathcal{Y}$.

9. Soit la suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $B_i = A_i$ et pour tout $i \geq n + 1$, $B_i = \emptyset$.

Il est clair que la suite $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints et que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$.

On a donc

$$\mu \left(\bigcup_{k=0}^n A_k \right) = \mu \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k \right) = \sum_{k=0}^n \mu(B_k) = \sum_{k=0}^n \mu(A_k).$$

10. Comme les éléments A et $B \setminus A$ sont disjoints, d'après la question 9, on a :

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Comme $\mu(B \setminus A) \geq 0$, on en déduit que $\mu(A) \leq \mu(B)$.

11. (a) On écrit $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, l'union étant disjointe. Par la question 9, on a

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Comme $B \setminus A \subset B$, par la question 10, on a $\mu(B \setminus A) \leq \mu(B)$.

On a montré que $\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

(b) On procède par récurrence.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n :

$$\ll \forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{X}^n, \quad \mu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k) \gg.$$

La proposition \mathcal{P}_1 est clairement vraie. On suppose la proposition \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $(A_1, \dots, A_{n+1}) \in \mathcal{X}^{n+1}$.

D'après la question 11 (a), on a

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \right) = \mu \left(A_1 \cup \bigcup_{k=2}^{n+1} A_k \right) \leq \mu(A_1) + \mu \left(\bigcup_{k=2}^{n+1} A_k \right).$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à A_2, \dots, A_{n+1} donne

$$\mu \left(\bigcup_{k=2}^{n+1} A_k \right) \leq \sum_{k=2}^{n+1} \mu(A_k),$$

ainsi

$$\mu \left(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k \right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \mu(A_k).$$

On a montré que la proposition \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{X}^n, \quad \mu \left(\bigcup_{k=1}^n A_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

12. (a) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ avec $i \neq j$, par exemple $i < j$.
On suppose que $\widetilde{A}_i \cap \widetilde{A}_j \neq \emptyset$. Soit $x \in \widetilde{A}_i \cap \widetilde{A}_j$. On a alors,

$$x \in A_j \quad \text{et} \quad x \notin A_{j-1} \quad \text{et} \quad x \in A_i.$$

Comme $j - 1 \geq i$, par croissance de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $x \in A_i$, donc $x \in A_{j-1}$, ce qui est exclu.

On a montré que la suite $(\widetilde{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée d'ensembles deux à deux disjoints.

- (b) On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n :

$$\ll \bigcup_{k=0}^n A_k = \bigcup_{k=0}^n \widetilde{A}_k \gg.$$

Comme $A_0 = \widetilde{A}_0$, la proposition \mathcal{P}_0 est vraie.

Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel n . En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} \bigcup_{k=0}^{n+1} \widetilde{A}_k &= \bigcup_{k=0}^n \widetilde{A}_k \cup \widetilde{A}_{n+1} \\ &= \bigcup_{k=0}^n A_k \cup (A_{n+1} \setminus A_n) \\ &= \bigcup_{k=0}^{n+1} A_k. \end{aligned}$$

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \bigcup_{k=0}^n A_k = \bigcup_{k=0}^n \widetilde{A}_k.$$

- (c) À l'aide du résultat de la question 12 (b), il est facile de montrer que

$$\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \widetilde{A}_k.$$

Les ensembles $(\widetilde{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant deux à deux disjoints, par définition d'une mesure, on en déduit que

$$\mu \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k \right) = \mu \left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \widetilde{A}_k \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(\widetilde{A}_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mu(\widetilde{A}_k).$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcup_{k=0}^n \widetilde{A}_k \right) &= \sum_{k=1}^n (\mu(A_k) - \mu(A_{k-1})) + \mu(A_0) \\ &= \mu(A_n). \end{aligned}$$

On obtient

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \mu \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right).}$$

13. Soit la suite $(\widetilde{A}_n)_{n \in \mathbf{N}}$, définie par $\widetilde{A}_n = \bigcup_{k=0}^n A_k$. Il est clair que la suite $(\widetilde{A}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \widetilde{A}_n = \bigcup_{k=0}^n \widetilde{A}_k = \bigcup_{k=0}^n A_k.$$

La question 11 (b) donne

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mu(\widetilde{A}_n) = \mu \left(\bigcup_{k=0}^n A_k \right) \leq \sum_{k=0}^n \mu(A_k).$$

Comme la suite $(\widetilde{A}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite croissante, d'après la question 12 (c), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\widetilde{A}_n) = \mu \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \widetilde{A}_n \right) = \mu \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right).$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \mu(A_k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_k)$, on en déduit que

$$\boxed{\mu \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n).}$$

14. Soit $A \in \mathcal{X}$. On a $X = A \cup \overline{A}$, l'union étant disjointe. Par la question 9, on a $\mu(A) + \mu(\overline{A}) = \mu(X)$.

Comme $A \subset X$, d'après la question 10, on a $\mu(A) \leq \mu(X)$, en particulier, $\mu(A) \in \mathbf{R}_+$.

$$\boxed{\text{Il s'ensuit que } \mu(\overline{A}) = \mu(X) - \mu(A).}$$

15. On va montrer que \mathcal{R} est symétrique, réflexive et transitive.

- *Symétrie*

Soient x, y deux éléments de O tels que $x\mathcal{R}y$.

On a $\{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \subset O$. Or,

$$\{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} = \{(1-t)y + tx, t \in [0, 1]\},$$

on a donc aussi $y\mathcal{R}x$.

- *Réflexivité*

Soit $x \in O$, il est clair que $x\mathcal{R}x$ car

$$\{(1-t)x + tx, t \in [0, 1]\} \subset O.$$

- *Transitivité*

Soient x, y et z trois éléments de O tels que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.

On a

$$\{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \subset O$$

et

$$\{(1-t)y + tz, t \in [0, 1]\} \subset O.$$

Comme un élément de l'ensemble

$$\{(1-t)x + tz, t \in [0, 1]\}$$

est soit dans

$$\{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \text{ ou } \{(1-t)y + tz, t \in [0, 1]\},$$

on en déduit que

$$\{(1-t)x + tz, t \in [0, 1]\} \subset O.$$

On a montré que \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur O .

16. Soit $x \in O$.

- Soit $y \in \text{cl}(x)$.

Soit z appartenant au segment d'extrémités x et y .

Comme

$$\{(1-t)x + tz, t \in [0, 1]\} \subset \{(1-t)x + ty, t \in [0, 1]\} \subset O,$$

on en déduit que $z \in \text{cl}(x)$, donc $\text{cl}(x)$ est un intervalle.

- Soit $y \in \text{cl}(x)$. Comme $y \in O$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subset O.$$

Soit $u \in]y - \varepsilon, y + \varepsilon[$. Par définition de \mathcal{R} , on a

$$u\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x.$$

Par transitivité, on a $u\mathcal{R}x$, donc $u \in \text{cl}(x)$ et $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subset \text{cl}(x)$.

On a montré que, pour tout $x \in O$, $\text{cl}(x)$ est un intervalle ouvert.

17. Soit $(x, y) \in O^2$. Deux possibilités :

- Si $\text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) = \emptyset$, c'est terminé.
- On suppose $\text{cl}(x) \cap \text{cl}(y) \neq \emptyset$. Soit $z \in \text{cl}(x) \cap \text{cl}(y)$.
Soit $u \in \text{cl}(x)$. On a $u \mathcal{R} x$, $x \mathcal{R} z$ et $z \mathcal{R} y$. Par transitivité, on a $u \mathcal{R} y$, donc $u \in \text{cl}(y)$.
On a montré que $\text{cl}(x) \subset \text{cl}(y)$.
Un raisonnement analogue montre $\text{cl}(y) \subset \text{cl}(x)$, ce qui prouve que

$$\text{cl}(y) = \text{cl}(x).$$

Pour tout $(x, y) \in O^2$, on a $\text{cl}(y) = \text{cl}(x)$ ou $\text{cl}(y) \cap \text{cl}(x) = \emptyset$.

18. Soit $\mathcal{O} = \{\text{cl}(x), x \in O\}$. Pour tout $y \in \mathcal{O}$, soit $z_y \in y$ et soit $J = \{z_y, y \in \mathcal{O}\}$. Il est clair que $\bigcup_{x \in J} \text{cl}(x) \subset O$.

Soit $x \in O$. On a $x \in \text{cl}(x)$. Or, $\text{cl}(x) \in \mathcal{O}$, donc d'après la question 17, on a $x \in \text{cl}(z_x)$, ainsi

$$O = \bigcup_{x \in J} \text{cl}(x).$$

Supposons l'union non disjointe : il existe x_1 et x_2 deux éléments de J tels que $\text{cl}(x_1) \cap \text{cl}(x_2) \neq \emptyset$. D'après la question 17, on a $\text{cl}(x_1) = \text{cl}(x_2)$, ce qui est exclu par construction de J .

On a montré que l'on a $O = \bigcup_{x \in J} \text{cl}(x)$, l'union étant disjointe.

19. Comme pour tout $i \in I$, $\text{cl}(x_i)$ est non vide, par densité de \mathbf{Q} par \mathbf{R} , il existe un rationnel $q_i \in \text{cl}(x_i)$.

Comme les ensembles $\text{cl}(x_i)$ sont deux à deux disjoints, on en déduit que l'application $i \in I \mapsto q_i$ est injective.

Comme \mathbf{Q} est dénombrable, on en déduit que

I est fini ou dénombrable.

20. (a) Soit $(k, i) \in (\mathbf{N}^*)^2$. Soit

$$x_0 \in \overline{\left\{ x \in [a, b], |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}}.$$

Ainsi, on a

$$|f_i(x_0) - f(x_0)| > \frac{1}{k}.$$

Comme la fonction $|f_i - f|$ est continue sur $[a, b]$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap [a, b]$, $|f_i(x) - f(x)| > \frac{1}{k}$.

Comme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap [a, b]$ est un ouvert de $[a, b]$, on en déduit que $\left\{ x \in [a, b], |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}$ est un ouvert de $[a, b]$.

- (b) Comme pour tout $(k, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$, $\overline{E_{k,n}}$ est un ouvert de $[a, b]$, par définition de $\mathcal{B}([a, b])$, on en déduit que :

$$\forall (k, n) \in (\mathbf{N}^*)^2, \quad \overline{E_{k,n}} \in \mathcal{B}([a, b]),$$

d'où par définition d'une tribu,

$$E_{k,n} \in \mathcal{B}([a, b]).$$

Une tribu étant stable par intersection dénombrable (question 7 (b)), on en déduit que : pour tout $(k, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$,

$$E_{k,n} = \bigcap_{i \geq n} \left\{ x \in [a, b], |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\} \in \mathcal{B}([a, b]).$$

21. Soit $(k, n) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et soit $x_0 \in E_{k,n}$.

Pour tout $i \in \mathbf{N}$, $i \geq n$, on a

$$x_0 \in \left\{ x \in [a, b], |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

En particulier, pour tout $i \geq n + 1$,

$$x_0 \in \left\{ x \in [a, b], |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Ainsi $x_0 \in E_{k,n+1}$.

On a montré que la suite $(E_{k,n})_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

En utilisant la question 12 (c), on en déduit que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(E_{k,n}) = \lambda\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{k,n}\right).$$

22. On prouve les deux inclusions.

\supseteq Soit $k \in \mathbf{N}^*$. L'inclusion $[a, b] \supset \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{k,n}$ est claire.

\subseteq Soit $x \in [a, b]$. Soit $k \in \mathbf{N}^*$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$, on a

$$\exists N_k \in \mathbf{N}^*, \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad (n \geq N_k) \implies \left(|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right).$$

Ainsi $x \in E_{k,N_k}$, donc $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{k,n}$.

On a montré que $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{+\infty} E_{k,n}$.

23. (a) En utilisant les résultats établis aux questions 21 et 22, on en déduit que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda(E_{k,n}) = \lambda([a, b]).$$

Ainsi, il existe $n_k \in \mathbf{N}^*$ tel que $\lambda(E_{k,n_k}) \geq \lambda([a, b]) - \frac{\varepsilon}{2^k}$.

(b) D'après la question 23 (a), on a

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \lambda([a, b] \setminus E_{k,n_k}) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

En utilisant le résultat de la question 13, on a

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \lambda\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} ([a, b] \setminus E_{k,n_k})\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \lambda([a, b] \setminus E_{k,n_k}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k}. \end{aligned}$$

Comme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ (série géométrique), on en déduit que

$$\lambda(A) \leq \varepsilon.$$

24. Soit $x_0 \in [a, b] \setminus A$. Par une loi de de Morgan, on a

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} E_{k,n_k}.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$

$$x_0 \in \bigcap_{i \geq n_k} \left\{ x \in [a, b], |f_i(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \forall i \geq n_k, \quad |f_i(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{1}{k}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $\frac{1}{k} \leq \varepsilon$. Ainsi, on a

$$\forall i \geq n_k, \quad |f_i(x_0) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

Comme n_k est indépendant de x_0 , on en déduit que

$$\forall i \geq n_k, \quad \sup_{x \in [a, b] \setminus A} |f_i(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

soit

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [a, b] \setminus A} |f_i(x) - f(x)| = 0.$$

On a prouvé que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[a, b] \setminus A$.

25. La fonction $x \mapsto |f(x)| + |g(x)|$ est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des bornes atteintes de Weierstrass, elle est bornée, donc

$$\sup_{x \in [a, b]} (|f(x)| + |g(x)|) \text{ existe.}$$

26. Cette question est une conséquence du théorème d'Egoroff prouvé à la question 24.

27. Pour tout $x \in B$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x)| + |f(x)|.$$

Or, par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [a, b]$, $|f_n(x)| \leq g(x)$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], \quad |f_n(x) - f(x)| \leq |g(x)| + |f(x)|.$$

Ainsi, en utilisant le fait que $\lambda(B) \leq \frac{\varepsilon}{2M+1}$, on en déduit

$$\int_B |f_n(x) - f(x)| dx \leq \int_B (|g(x)| + |f(x)|) dx \leq \varepsilon \times \frac{M}{2M+1} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

28. Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A (A est donc une partie de la tribu borélienne), d'après l'indication.,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A |f_n(x) - f(x)| dx = 0,$$

ainsi il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\int_A |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (30.1)$$

Comme

$$A \cup B = [a, b] \quad \text{et} \quad A \cap B = \emptyset,$$

l'inégalité (30.1) utilisée avec l'inégalité établie à la question 27 donne

$$\begin{aligned} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx &= \int_A |f_n(x) - f(x)| dx + \int_B |f_n(x) - f(x)| dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx = 0$.

Le théorème de convergence dominée est prouvé.

29. Soit $x \in \mathbf{R}_+$.

La fonction $t \mapsto \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0, 1]$, donc $g(x)$ est bien définie.

30. Soit $x_0 \in \mathbf{R}_+$. Soit $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels tous non nuls qui converge vers 0 telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_0 + h_n \geq 0$.

Comme $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0, quitte à considérer la suite $(h_n)_{n \geq n_0}$ à partir d'un certain rang n_0 , on peut supposer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $h_n \leq 1$, de sorte que $x + h_n \leq x_0 + 1$. On a

$$\frac{g(x_0 + h_n) - g(x_0)}{h_n} = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)(x_0+h_n)^2} - e^{-(1+t^2)x_0^2}}{(1+t^2)h_n} dt.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction f_n sur $[0, 1]$ par

$$f_n(t) = \frac{e^{-(1+t^2)(x_0+h_n)^2} - e^{-(1+t^2)x_0^2}}{(1+t^2)h_n}.$$

En remarquant un taux d'accroissement, on a

$$\forall t \in [0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = -2x e^{-(1+t^2)x_0^2}. \quad (30.2)$$

De plus, si $t \in [0, 1]$ est fixé, en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \mapsto e^{-(1+t^2)x^2}$ entre x_0 et $x_0 + h_n$, il existe $c_{t,x_0,n}$ compris entre x_0 et $x_0 + h_n$ tel que

$$e^{-(1+t^2)(x_0+h_n)^2} - e^{-(1+t^2)x_0^2} = -2c_{t,x_0,n} (1+t^2) e^{-(1+t^2)c_{t,x_0,n}^2} h_n.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [0, 1], \quad |f_n(t)| = \left| -2c_{t,x_0,n} e^{-(1+t^2)c_{t,x_0,n}^2} \right|.$$

Or, $c_{t,x_0,n}$ est entre x_0 et $x_0 + h_n$, donc $c_{t,x_0,n} \leq x_0 + 1$, ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall t \in [0, 1], |f_n(t)| \leq 2(x_0 + 1). \quad (30.3)$$

Comme $t \mapsto 2(x_0 + 1)$ est continue sur $[0, 1]$, les lignes (30.2) et (30.3) et le théorème de convergence dominée donnent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = -2x_0 \int_0^1 e^{-(1+t^2)x_0^2} dt.$$

Ce résultat étant vrai pour toute suite $(h_n)_{n \in \mathbf{N}}$ convergeant vers 0 (au moins définie à partir d'un certain rang), on en déduit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = -2x_0 \int_0^1 e^{-(1+t^2)x_0^2} dt.$$

On a montré que g est dérivable sur \mathbf{R}_+ et

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt.}$$

31. D'après la question 30, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad g'(x) = -2x \int_0^1 e^{-(1+t^2)x^2} dt = -2x e^{-x^2} \int_0^1 e^{-t^2 x^2} dt.$$

Le changement de variable $u = tx$ dans l'intégrale montre que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = -2f'(x) f(x).$$

En intégrant cette inégalité, on récupère

$$g(x) - g(0) = -f^2(x).$$

Or,

$$g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad g(x) = \frac{\pi}{4} - f^2(x).}$$

32. Pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, on a

$$0 \leq g(x) = e^{-x^2} \int_0^1 \frac{e^{-t^2 x^2}}{1+t^2} dt \leq e^{-x^2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$, par encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.}$$

33. Les questions 31 et 32 permettent de conclure que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f^2(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Comme, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$$

Quelques remarques culturelles

Le théorème de convergence dominée ici est une version faible. Voici l'énoncé que vous verrez en classe de MP :

Théorème. *Théorème de convergence dominée.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies continues par morceaux I .

On suppose qu'il existe une fonction $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction définie et continue par morceaux sur I telle que

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

On suppose qu'il existe une fonction $g : I \rightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux sur I et intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in I, \quad |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I |f_n(x) - f(x)| dx = 0.$$

Le théorème permet de prouver les deux résultats suivants, tous les deux au programme de la classe de MP :

Théorème. *Continuité des intégrales à paramètres.*

Soient I et J deux intervalles de \mathbf{R} et $f : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$ tels que :

i) pour tout $x \in J$, $t \in I \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux sur I ;

- ii) pour tout $t \in I$, $x \in J \mapsto f(t, x)$ est continue sur J ;
 iii) il existe une fonction $g : I \rightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux et intégrable telle que

$$\forall x \in J, \forall t \in I, \quad |f(t, x)| \leq |g(t)|.$$

Alors, la fonction

$$x \in J \mapsto \int_I f(t, x) dt$$

est continue sur J .

Théorème. Dérivabilité des intégrales à paramètres.

Soient I et J deux intervalles de \mathbf{R} et $f : I \times J \rightarrow \mathbf{R}$ tels que :

- i) pour tout $x \in J$, $t \in I \mapsto f(t, x)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;
 ii) pour tout $t \in I$, $x \in J \mapsto f(t, x)$ dérivable (i.e. pour tout $t \in I$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ existe) ;
 iii) pour tout $t \in I$, $x \in J \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue sur J ;
 iv) pour tout $x \in J$, $t \in I \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ est continue par morceaux sur I ;
 v) il existe une fonction $g : I \rightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux et intégrable telle que

$$\forall x \in J, \forall t \in I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \leq |g(t)|.$$

Alors, la fonction

$$x \in J \mapsto \int_I f(t, x) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur J et sa dérivée est la fonction

$$x \in J \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) dt.$$

Thème 31

Topologie et espaces complets

Thèmes abordés : Suite, continuité, calcul intégral.

Difficulté : ■■■■■■

Ce sujet introduit la notion d'espace métrique complet. Cette notion est approfondie avec l'étude de la notion de complétude. L'utilité de cette notion est illustrée par des exemples.

La partie 1 présente les espaces métriques, la partie 2 introduit la notion de complétude et la partie 3 utilise les notions introduites dans les deux parties précédentes et donnent des applications.

31.1 Espaces métriques

Définition. *Espace métrique.*

Soit E un ensemble. Soit $d : E \times E \rightarrow \mathbf{R}_+$. On dit que d est une *distance* sur E si :

i) pour tout $(x, y) \in E^2$, $d(x, y) = d(y, x)$ (*symétrie*);

ii) pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$d(x, y) = 0 \iff x = y \quad (\text{définie positive});$$

iii) pour tout $(x, y, z) \in E^3$,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

Un ensemble muni d'une distance d s'appelle un *espace métrique*.

1. *Exemples de distances.*

(a) Montrer que l'application $d_{\mathbf{R}} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie par : pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$d_{\mathbf{R}}(x, y) = |x - y|.$$

Montrer que $d_{\mathbf{R}}$ est une distance sur \mathbf{R} .

(b) Soit E un ensemble. Soit $d : E \times E \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie par

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq y \\ 1 & \text{si } x = y \end{cases}.$$

Montrer que d est une distance sur E . On l'appelle la **distance discrète** sur E .

(c) Soient $a < b$ deux réels.

Soit $d_\infty : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}) \times \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}_+$ définie par : pour tout $(f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})^2$,

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

est une distance sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.

Définitions. *Boule ouverte, ouvert.*

Soit (E, d) un espace métrique.

- Soit $a \in E$ et $r \geq 0$. On appelle **boule ouverte** de centre de a et de rayon r et on note $B(a, r)$ l'ensemble $\{x \in E, d(x, a) < r\}$.
- Soit $O \subset E$ non vide. On dit que O est un **ouvert** de E si :

$$\forall a \in O, \exists r > 0, B(a, r) \subset O.$$

2. Soit (E, d) un espace métrique.

- (a) Montrer qu'une boule ouverte non vide est un ouvert de E .
- (b) Montrer qu'une réunion d'ouverts non vides est un ouvert.
- (c)
 - i. Montrer que qu'une intersection finie d'ouverts non vides est un ouvert.
 - ii. Montrer qu'une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert.

3. Soit E un ensemble non vide muni de la distance discrète.

Caractériser les ouverts de E .

4. Soient $a < b$ deux réels.

Montrer que l'intervalle $]a, b[$ est un ouvert de $(\mathbf{R}, d_{\mathbf{R}})$.

Définitions. *Convergence d'une suite, valeur d'adhérence, partie dense.*

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $x \in E$ et soit $(x_n) \in E^{\mathbf{N}}$.

- On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ **converge vers** x si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0.$$

On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

- On dit que x est une **valeur d'adhérence** pour la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ s'il existe une application $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers x .

- On dit que A est une partie *dense* de E si

$$\forall x \in E, \exists (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

5. *Exemples d'ensembles denses.*

- Donner des exemples d'ensembles denses non triviaux de $(\mathbf{R}, d_{\mathbf{R}})$.
- Soit E un ensemble muni de la distance discrète.
 - Montrer qu'une suite de E converge si, et seulement si, elle stationne.
 - Caractériser les ensembles denses de E .

6. Soit (E, d) un espace métrique. Soit $A \subset E$.

Montrer que A est dense dans E si, et seulement si, pour tout $a \in E$, pour tout $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A \neq \emptyset$.

31.2 Notion de complétude

Définitions. *Suite de Cauchy, espace complet.*

Soit (E, d) un espace métrique.

- Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une *suite de Cauchy* si : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\exists N \in \mathbf{N}, \forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, \quad (n, p \geq N) \implies (d(x_n, x_p) \leq \varepsilon).$$

- On dit que (E, d) est *complet* si toute suite de Cauchy de E converge dans E .

7. Montrer qu'une suite convergente d'un espace métrique (E, d) est de Cauchy.

8. Donner un exemple d'un espace métrique non complet.

9. *Exemples d'espaces métriques complets.*

- Soit E un ensemble muni de la distance discrète.
Montrer que E est complet.
- On se propose de montrer que $(\mathbf{R}, d_{\mathbf{R}})$ est complet. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathbf{R}, d_{\mathbf{R}})$.
 - Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée. En déduire que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence.
 - Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.
- Soient $a < b$ deux réels. On se propose de montrer que $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}), d_{\infty})$ est complet. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}), d_{\infty})$.
 - Montrer que si la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers une fonction f pour la distance d_{∞} , alors f est continue sur $[a, b]$.
 - Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers une fonction continue f pour la distance d_{∞} .

31.3 Applications de la complétude

31.3.1 Théorème de point fixe

Le but de cette partie est d'établir le résultat suivant.

Théorème. *Théorème de point fixe de Picard.*

Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $f : E \rightarrow E$ telle que

$$\exists k \in]0, 1[, \forall (x, y) \in E^2, \quad d(f(x), f(y)) \leq k d(x, y).$$

Une telle fonction s'appelle une fonction strictement contractante.

Alors, il existe $x_0 \in E$ unique tel que $f(x_0) = x_0$.

10. Toutes les hypothèses du théorème de Picard sont indispensables.

- (a) Donner un exemple d'une fonction f définie sur $(\mathbf{R}, d_{\mathbf{R}})$ n'ayant pas de point fixe et telle pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$(x \neq y) \implies (|f(x) - f(y)| < |x - y|).$$

- (b) Donner un exemple d'une fonction strictement contractante et n'ayant pas de point fixe.

11. Preuve du théorème de point fixe de Picard.

- (a) Soit $a \in E$. Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par : $x_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy.

- (b) Conclure quant à l'existence d'un point fixe.

- (c) Montrer l'unicité d'un tel point fixe.

12. Applications.

- (a) *Méthode de Newton.* Soient $a < b$ deux réels.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbf{R})$ telle que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ et pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$. Soit enfin $F : x \mapsto x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Le but est de trouver une suite d'éléments de $[a, b]$ qui converge vers c .

- i. Montrer que f s'annule en une unique valeur c de $]a, b[$.
- ii. Vérifier que F a un unique point fixe sur $[a, b]$.
- iii. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$F([c - \alpha, c + \alpha]) \subset [c - \alpha, c + \alpha]$$

et tel que $F|_{[c - \alpha, c + \alpha]}$ soit strictement contractante.

- iv. En déduire une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers c .

- v. Écrire un programme Python qui prend en argument un réel strictement positif eps et qui calcule une valeur approchée de $\sqrt{2}$ avec une précision de eps .

- (b) Le but de cet exemple de montrer qu'il existe une unique fonction $y : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable telle que

$$\forall t \in [0, 1], \quad y'(t) = \frac{1}{2} \sin(y(t)) + t \quad \text{et} \quad y(0) = 1. \quad (31.1)$$

- i. Montrer qu'une fonction $y : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ dérivable vérifie (31.1) si, et seulement si,

$$\forall t \in [0, 1], \quad y(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \sin(y(u)) + u \right) du + 1.$$

- ii. Soit F l'application définie sur $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ à valeurs dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ définie par : pour tout $y \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$,

$$\forall t \in [0, 1], \quad F(y)(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \sin(y(u)) + u \right) du + 1.$$

Montrer que F est strictement contractante.

Indication : On pourra vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

- iii. Conclure.

- iv. Écrire un script en Python permettant de tracer la courbe représentative de la fonction $t \mapsto y(t)$ sur $[0, 1]$.

Indication : On pourra utiliser la commande `odeint`.

31.3.2 Théorème de prolongement

Définitions. *Continuité, uniforme continuité.*

Soient (E, d) et (F, δ) deux espace métriques. Soit $T : E \rightarrow F$ une application.

- On dit que T est *continue* sur E si : pour tout $a \in E$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tels que

$$\forall x \in E, \quad (d(x, a) \leq \alpha) \implies (\delta(T(x), T(a)) \leq \varepsilon).$$

- On dit que T est *uniformément continue* sur E si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tels que

$$\forall a \in E, \forall x \in E, \quad (d(x, a) \leq \alpha) \implies (\delta(T(x), T(a)) \leq \varepsilon).$$

13. Montrer qu'une application uniformément continue est continue.

On se propose d'établir le résultat suivant.

Théorème. *Prolongement des applications uniformément continues.*

Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. On suppose (F, δ) complet. Soit $A \subset E$ une partie dense de E . Soit $f : A \rightarrow F$ une application uniformément continue.

Alors, il existe une unique application $g : E \rightarrow F$ continue telle que $f = g|_A$.

14. *Preuve du théorème de prolongement.*

- (a) Montrer l'existence d'un tel prolongement.
- (b) Montrer l'unicité d'un tel prolongement.

15. *Applications.*

- (a) Soit $f : \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{R}$ une application uniformément continue. Montrer que f se prolonge à \mathbf{R} de manière unique.

(b) *Construction de l'intégrale de Riemann sur un segment.*

Soient $a < b$ deux réels. Soit $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbf{R} , continue à gauche en tout point de $[a, b[$ et continue en b .

- i. Montrer que $(\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R}), d_\infty)$ est dense dans $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}), d_\infty)$.
- ii. Soit l'application

$$I : \begin{cases} (\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R}), d_\infty) & \rightarrow (\mathbf{R}, d_{\mathbf{R}}) \\ f & \mapsto \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) f_i \end{cases}$$

où $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b$ est une subdivision adaptée à f et f_i la valeur constante de f sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$.

Montrer que I est uniformément continue sur $(\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R}), d_\infty)$.

Indication : Pour $(f, g) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})^2$, on pourra majorer $d_{\mathbf{R}}(I(f), I(g))$.

- iii. En déduire une construction de l'intégrale de Riemann.

Correction du Thème 31

1. (a) Les points i) et ii) sont clairs. iii) découle immédiatement de l'inégalité triangulaire pour les réels.

Ainsi, $(\mathbf{R}, d_{\mathbf{R}})$ est un espace métrique.

- (b) Les points i) et ii) sont clairs. Soit $(x, y, z) \in E^3$.
Si $x = z$, alors $d(x, z) = 0$ et l'inégalité

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

est claire.

Si $x \neq z$, alors $d(x, z) = 1$ et on $x \neq y$ ou $y \neq z$ de sorte que

$$d(x, y) + d(y, z) \geq 1.$$

Ainsi, (E, d) est un espace métrique.

- (c) On remarque que si $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, alors $f - g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, donc la fonction $f - g$ est bornée sur $[a, b]$, donc

$$\sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

est bien défini.

Les points i) et ii) sont clairs. Soit $(f, g, h) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})^3$. En utilisant l'inégalité triangulaire et par définition de d_{∞} , on a : pour tout $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\ &\leq d_{\infty}(f, g) + d_{\infty}(g, h). \end{aligned}$$

En prenant le suprémum de l'inégalité précédente, on obtient

$$d_{\infty}(f, h) \leq d_{\infty}(f, g) + d_{\infty}(g, h).$$

On a montré que $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}), d_{\infty})$ est un espace métrique.

2. (a) Soit $x \in E$ et $r > 0$, montrons que la boule ouverte de centre x et de rayon r est ouverte.

Soit $y \in B(x, r)$. Soit $s = d(x, y) < r$ et soit $\varepsilon \in]0, r - s[$, montrons que $B(y, \varepsilon) \subset B(x, r)$.

Soit $z \in B(y, \varepsilon)$. En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < \varepsilon + r < r - s + s = r.$$

Ainsi, $z \in B(x, r)$.

On a montré que toute boule ouverte non vide est un ouvert.

(b) Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts tous non vides de E . Soit $x \in \bigcup_{i \in I} O_i$.

Soit $j \in I$, comme O_j est non vide, il existe $r > 0$ tel que

$$B(x, r) \subset O_j \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

On a montré que $\bigcup_{i \in I} O_i$ est un ouvert : une union d'ouverts non vides est un ouvert.

(c) i. Soit $(O_i)_{i \in [1, n]}$ une famille d'ouverts tous non vides.

Soit $x \in \bigcap_{i=1}^n O_i$. Pour tout $j \in [1, n]$, x appartient à l'ouvert O_j , il

existe $r_j > 0$ tel que $B(x, r_j) \subset O_j$.

Si l'on pose $r = \min \{r_1, \dots, r_n\} > 0$, on a

$$B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n O_i.$$

On a montré qu'une intersection d'ouverts tous non vides est un ouvert.

ii. On se place dans $(\mathbf{R}, d_{\mathbf{R}})$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$O_n = \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[.$$

On a $\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n = \{0\}$.

Clairement $\{0\}$ n'est pas un ouvert car il n'existe pas de $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset \{0\}$ ($] -r, r[\not\subset \{0\}$ pour $r > 0$).

Une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement un ouvert.

3. On va montrer que toute partie non vide de E est ouverte.

Soit $F \subset E$ une partie non vide. Soit $x \in F$, par définition

$$B\left(x, \frac{1}{2}\right) = \{x\} \subset F.$$

On a montré que toute partie non vide de E est ouverte.

4. Soit $x \in \mathbf{R}$ et $\varepsilon > 0$. On remarque que dans l'espace métrique $(\mathbf{R}, d_{\mathbf{R}})$ la boule ouverte de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ est l'intervalle $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

Soit $x \in]a, b[$ et soit $\varepsilon = \min \{x - a, b - x\}$. Il est clair que

$$B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset]a, b[.$$

On a montré que l'intervalle $]a, b[$ est un ouvert de $(\mathbf{R}, d_{\mathbf{R}})$.

5. (a) On peut citer \mathbf{Q} ou plus exotique, l'ensemble des nombres dyadiques (i.e. de la forme $\frac{k}{2^n}$, $(k, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$).

(b) i. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Par définition, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(u_n, \ell) = 0$, donc il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(u_n, \ell) \leq \frac{1}{2}$.

Par définition de d , on en déduit que pour tout $n \geq N$, $u_n = \ell$, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ stationne à ℓ .

\Leftarrow Cette implication est claire.

L'équivalence est prouvée.

ii. Soit F un ensemble dense de E . Soit $x \in E$. Par définition, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de F telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

D'après la question 5 (b) i, la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ stationne à x , donc $x \in F$. On a montré que $E \subset F$, puis $E = F$.

Réciproquement, il est clair que E est dense dans E .

On a montré que le seul ensemble dense de E est E .

6. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Soit $a \in E$ et soit $r > 0$. Comme A est dense dans E , il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

Il existe donc $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $d(a_n, a) < r$.

Il s'ensuit que $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.

\Leftarrow Soit $a \in E$. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $a_n \in A$ tel que $d(a_n, a) < \frac{1}{n+1}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, il s'ensuit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

L'équivalence est prouvée.

7. Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers $\ell \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$(n \geq N) \implies \left(d(u_n, \ell) \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a : pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$,

$$(n, p \geq N) \implies (d(u_n, u_p) \leq d(u_n, \ell) + d(\ell, u_p) \leq \varepsilon).$$

On a montré qu'une suite convergente est une suite de Cauchy.

8. On note $(\mathbf{Q}, d_{\mathbf{R}|\mathbf{Q}})$ l'espace métrique \mathbf{Q} muni de la restriction de $d_{\mathbf{R}}$ à \mathbf{Q} .

Soit $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de rationnels positifs qui converge vers $\sqrt{2}$.

D'après la question 7, la suite $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, mais $(r_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas dans \mathbf{Q} .

En effet, si elle convergerait dans \mathbf{Q} vers une limite ℓ , alors par unicité de la limite, on aurait $\ell = \sqrt{2} \in \mathbf{Q}$.

On a montré que $(\mathbf{Q}, d_{\mathbf{R}|\mathbf{Q}})$ n'est pas complet.

9. (a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de E . Par définition,

$$\exists N \in \mathbf{N}, \forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, (n, p \geq N) \implies \left(d(u_n, u_p) \leq \frac{1}{2} \right).$$

Par définition de d , il s'ensuit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ stationne, donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

On a montré que toute suite de Cauchy converge, (E, d) est complet.

- (b) i. Comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$,

$$(n, p \geq N) \implies (|x_n - x_p| \leq 1).$$

D'où, en utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$,

$$|x_n| \leq |x_N| + |x_n - x_N| = |x_N| + 1.$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, |x_n| \leq \max \{ |x_N| + 1, |x_0|, \dots, |x_{N-1}| \}.$$

On a montré que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ admet au moins une valeur d'adhérence.

- ii. Soit ℓ une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, il existe $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = \ell.$$

Comme φ est strictement croissante, on remarque que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $(n, p) \in \mathbf{N}^2$,

$$(n, p \geq N) \implies (|x_n - x_p| \leq \varepsilon).$$

En particulier, pour tout $n, p \geq N$, on a $|x_n - x_{\varphi(p)}| \leq \varepsilon$.

En faisant tendre p vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, (n \geq N) \implies (|x_n - \ell| \leq \varepsilon).$$

On a montré que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

- (c) i. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers f pour la distance d_∞ , il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n \geq N) \implies \left(d_\infty(f, f_n) \leq \frac{\varepsilon}{3} \right),$$

soit

$$\forall n \geq N, \forall x \in [a, b], \quad |f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $x_0 \in [a, b]$ et soit $n \geq N$ fixé. Comme f_n et f sont continues en x_0 , il existe $\alpha_1 > 0$ tel que pour tout $x \in [x_0 - \alpha_1, x_0 + \alpha_1] \cap [a, b]$,

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

et, il existe $\alpha_2 > 0$ tel que, pour tout $x \in [x_0 - \alpha_2, x_0 + \alpha_2] \cap [a, b]$,

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On pose $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$.

Il s'ensuit que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| \\ &\quad + |f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que f est continue en tout $x_0 \in [a, b]$: f est continue sur $[a, b]$.

- ii. Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy pour la distance d_∞ , il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, \quad (n \geq p \geq N) \implies (d_\infty(f_n, f_p) \leq \varepsilon),$$

soit si $n \geq p \geq N$, on a

$$\forall x \in [a, b], \quad |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que pour tout $x \in [a, b]$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy pour la distance $d_{\mathbf{R}}$.

D'après la question 9 (b) ii, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers une limite que l'on note $f(x)$.

Comme pour tout $n \geq p \geq N$, on a

$$\forall x \in [a, b], \quad |f_n(x) - f_p(x)| \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\forall p \geq N, \forall x \in [a, b], \quad |f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On a montré que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers f pour la distance d_∞ , d'après la question 9 (c) i, la fonction f est continue sur $[a, b]$.

Ainsi, la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.

On a montré que $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R}), d_\infty)$ est complet.

10. (a) Soit la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

De toute évidence f n'a pas de point fixe sur \mathbf{R} .

De plus, f est dérivable sur \mathbf{R} et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Comme pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\sqrt{x^2 + 1} > |x|$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $|f'(x)| < 1$.

Par le théorème des accroissements finis, on en déduit que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad (x \neq y) \implies (|f(x) - f(y)| < |x - y|).$$

- (b) Soit la fonction f définie sur $]0, 1[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x$.

Il est clair que pour tout $(x, y) \in]0, 1[^2$,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|,$$

donc f est strictement contractante.

Il est clair que f n'a pas de point fixe.

Remarque. Cela provient du fait que $]0, 1[$ n'est pas complet pour la restriction de $d_{\mathbf{R}}$.

Par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n+2}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy pour la distance $d_{\mathbf{R}}$, mais ne converge pas dans $]0, 1[$.

11. (a) Soit $\varepsilon > 0$ et soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $k^N \leq \varepsilon \times \frac{1-k}{d(u_1, u_0)}$ (possible par la suite $(k^n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0).

Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad d(u_n, u_{n+1}) \leq k^n d(u_0, u_1).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $n \geq p$,

$$\begin{aligned} d(u_n, u_p) &\leq d(u_n, u_{n-1}) + \cdots + d(u_{p+1}, u_p) \\ &\leq k^{n-1} d(u_1, u_0) + \cdots + k^p d(u_1, u_0) \\ &\leq d(u_1, u_0) (k^{n-1} + \cdots + k^p). \end{aligned}$$

Or, $k^{n-1} + \dots + k^p = k^p \frac{1 - k^{n-p}}{1 - k} \leq \frac{k^p}{1 - k}$. Ainsi, pour tout $n \geq p \geq N$, on a

$$d(u_n, u_p) \leq k^N \frac{d(u_1, u_0)}{1 - k} \leq \varepsilon.$$

On a montré que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

- (b) La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E complet, donc elle converge vers $\ell \in E$.

L'inégalité suivante valable pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(f(x_n), f(\ell)) \leq k d(x_n, \ell)$$

assure que la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ et par unicité de la limite d'une suite, on en déduit que $\ell = f(\ell)$.

On a montré que f a un point fixe.

- (c) Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux points fixes de f . On suppose $\ell_1 \neq \ell_2$.

On aurait alors

$$0 < d(f(\ell_1), f(\ell_2)) = d(\ell_1, \ell_2) \leq k d(\ell_1, \ell_2).$$

Cette dernière inégalité étant impossible car $d(\ell_1, \ell_2) > 0$, on en déduit que $\ell_1 = \ell_2$.

On a montré que f a un unique point fixe.

12. (a) i. Comme pour tout $x \in [a, b]$, $f'(x) > 0$, d'après le théorème de la bijection, f est une bijection de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

Comme $0 \in]f(a), f(b)[$, on en déduit que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur $]a, b[$.

- ii. Pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned} F(x) = x &\iff x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x \\ &\iff f(x) = 0 \\ &\iff x = c, \end{aligned}$$

car d'après la question 12 (a) i, f s'annule en une unique valeur $[a, b]$ qui est c .

On a $F(c) = c - \frac{f(c)}{f'(c)} = c$.

- iii. Les théorèmes généraux assurent que F est dérivable sur $[a, b]$ et

$$\begin{aligned} \forall x \in [a, b], \quad F'(x) &= 1 - \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{f'^2(x)}. \end{aligned}$$

Comme f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$, on en déduit que F est continue sur $[a, b]$.

De plus, comme $F'(c) = 0$, par continuité de F' , il existe $\alpha > 0$ tel que $[c - \alpha, c + \alpha] \subset [a, b]$ et pour tout $x \in [c - \alpha, c + \alpha]$, $|F'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall (x, y) \in [c - \alpha, c + \alpha]^2, \quad |F(x) - F(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|,$$

en particulier, pour tout $x \in [c - \alpha, c + \alpha]$,

$$|F(x) - F(c)| = |F(x) - c| \leq \frac{1}{2} |x - c| \leq \frac{1}{2} \alpha.$$

Il s'ensuit que pour tout $x \in [c - \alpha, c + \alpha]$,

$$F(x) \in \left[c - \frac{1}{2} \alpha, c + \frac{1}{2} \alpha \right] \subset [c - \alpha, c + \alpha].$$

On a montré que F est strictement contractante sur $[c - \alpha, c + \alpha]$.

- iv. L'intervalle $[c - \alpha, c + \alpha]$ muni de la restriction de $d_{\mathbf{R}}$ est complet car toute suite de Cauchy de $[c - \alpha, c + \alpha]$ converge dans \mathbf{R} car \mathbf{R} est complet (question 9 (b)). De plus, comme l'intervalle $[c - \alpha, c + \alpha]$ est fermé, la limite appartient à $[c - \alpha, c + \alpha]$.

D'après la preuve du théorème du point fixe de Picard, la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par $x_0 \in [c - \alpha, c + \alpha]$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = F(x_n)$ converge vers l'unique point fixe de F sur $[c - \alpha, c + \alpha]$ qui est c .

- v. Soit la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $f(x) = x^2 - 2$.

De toute évidence, f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[1, 2]$, $f(1) < 0$, $f(2) > 0$ et pour tout $x \in [1, 2]$, $f'(x) > 0$.

Soit la fonction F définie sur $[1, 2]$ par

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}.$$

Il est clair que F est dérivable sur $[1, 2]$ et

$$\forall x \in [1, 2], \quad F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}.$$

F' est croissante sur $[1, 2]$, ainsi

$$\forall x \in [1, 2], \quad -\frac{1}{2} = F'(1) \leq F'(x) \leq F'(2) = \frac{1}{4}.$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall (x, y) \in [1, 2]^2, \quad |F(x) - F(y)| \leq \frac{1}{2} |x - y|.$$

Ainsi, F est strictement contractante sur l'intervalle $[1, 2]$.
D'après la question 12 (a) iv, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = F(u_n) \quad \text{et} \quad u_0 = 1$$

converge vers $\sqrt{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left| F(u_n) - F(\sqrt{2}) \right| = \left| u_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| u_n - \sqrt{2} \right|.$$

Une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| u_n - \sqrt{2} \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n \left| u_0 - \sqrt{2} \right| \leq \left(\frac{1}{2} \right)^n. \quad (31.2)$$

On en déduit u_n est une approximation de $\sqrt{2}$ avec une précision de $\varepsilon > 0$ dès que $\left(\frac{1}{2} \right)^n \leq \varepsilon$. On peut écrire le programme suivant :

```

1 def newton(eps):
2     u=1
3     n=0
4     while (((1/2)**n)>eps):
5         n=n+1
6         u=u/2+1/u
7     return u

```

Remarque. En fait, dans cet exemple, la méthode de Newton est plus performante que le laisse penser la ligne (31.2). On peut montrer que si u_0 est assez proche de $\sqrt{2}$, alors il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| u_n - \sqrt{2} \right| \leq k^{2^n} \left| u_0 - \sqrt{2} \right|.$$

Pour établir cela, il suffit d'écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 à la fonction F .

(b) i. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Il est clair que y' est continue sur $[0, 1]$, ainsi : pour tout $t \in [0, 1]$,

$$y(t) - y(0) = \int_0^t y'(u) du,$$

soit

$$y(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \sin(y(u)) + u \right) du + 1.$$

\Leftarrow L'égalité $y(t) = \int_0^t \left(\frac{1}{2} \sin(y(u)) + u \right) du + 1$ valable pour tout

$t \in [0, 1]$ se dérive en $y'(t) = \frac{1}{2} \sin(y(t)) + t$.

De plus, il est clair que $y(0) = 1$.

L'équivalence est prouvée.

ii. L'inégalité

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y| \quad (31.3)$$

provient directement de l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction \sin .

Soit $(y_1, y_2) \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})^2$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} & |F(y_1)(t) - F(y_2)(t)| \\ &= \left| \int_0^t \left(\frac{1}{2} \sin(y_1(u)) + u - \left(\frac{1}{2} \sin(y_2(u)) - u \right) \right) du \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^t |\sin(y_1(u)) - \sin(y_2(u))| du. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité (31.3), on récupère : pour tout $t \in [0, 1]$

$$|F(y_1)(t) - F(y_2)(t)| \leq \frac{1}{2} \int_0^t |y_1(u) - y_2(u)| du.$$

Par définition de d_∞ , on a

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, 1], \quad |F(y_1)(t) - F(y_2)(t)| &\leq \frac{t}{2} d_\infty(y_1, y_2) \\ &\leq \frac{1}{2} d_\infty(y_1, y_2). \end{aligned}$$

En prenant le suprémum de l'inégalité précédente pour $t \in [0, 1]$, on obtient

$$d_\infty(F(y_1), F(y_2)) \leq \frac{1}{2} d_\infty(y_1, y_2).$$

On a montré que l'application F est strictement contractante.

iii. D'après la question 9 (c), $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), d_\infty)$ est complet.

Par la question 12 (b) ii, F est strictement contractante.

En appliquant le théorème de point fixe de Picard, F admet un unique point fixe sur $(\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), d_\infty)$: il existe une unique fonction $y \in (\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R}), d_\infty)$ telle que $F(y) = y$.

D'après la question 12 (b) i, y vérifie

$$\forall t \in [0, 1], \quad y'(t) = \frac{1}{2} \sin(y(t)) + t \quad \text{et} \quad y(0) = 1.$$

On a montré que l'équation différentielle : pour tout $t \in [0, 1]$, $y'(t) = \frac{1}{2} \sin(y(t)) + t$ et $y(0) = 1$ admet une unique solution dans l'ensemble des fonctions dérivables sur $[0, 1]$.

iv. On commence par définir la fonction $F(t, y) = \frac{1}{2} \sin(y) + t$.

```
1 from math import *
2 def F(t,x):
3     return 0.5*sin(float(x))+t
```

Ensuite, on peut écrire :

```
1 from scipy import *
2 from scipy.integrate import odeint
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 temps=linspace(0,1,1000)
5 Y=odeint(F,1,temps)
6 plt.plot(temps,Y)
7 plt.show()
```

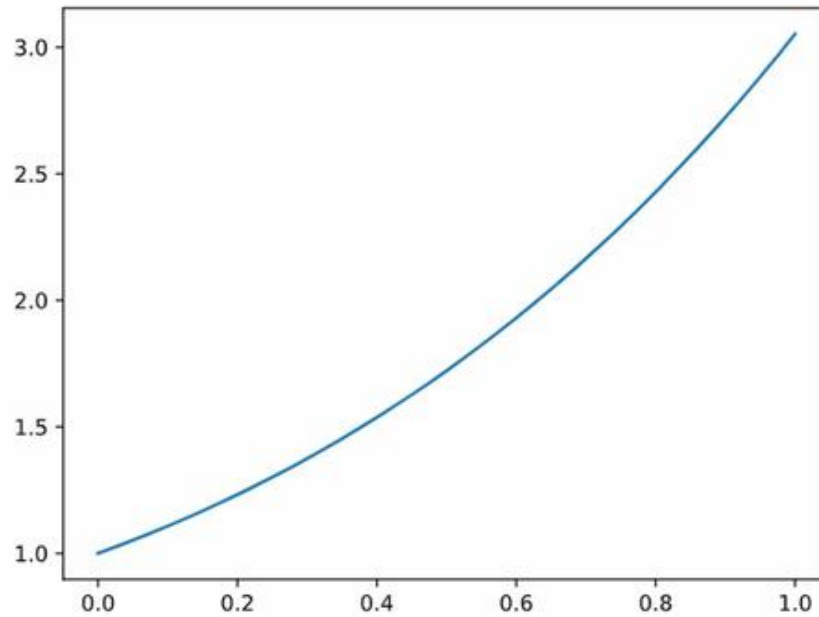


FIGURE 31.1 – Graphe de la solution de l'équation différentielle $y'(t) = \frac{1}{2} \sin(y(t)) + t$ et $y(0) = 1$ sur $[0, 1]$.

13. On garde les notations de la définition ci-dessus. Soit

$$T : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$$

une application uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme T est uniformément continue sur E , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall a \in E, \forall x \in E, \quad (d(x, y) \leq \alpha) \implies (\delta(T(x), T(y)) \leq \varepsilon).$$

En particulier, si $a \in E$ est fixé, on a : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\exists \alpha > 0, \forall x \in E, \quad (d(x, a) \leq \alpha) \implies (\delta(T(x), T(a)) \leq \varepsilon).$$

On a montré que toute application uniformément continue est continue.

14. On garde dans cette question les notations utilisées dans l'énoncé du théorème.

(a) Si $A = E$, il n'y a rien à faire.

On suppose dans la suite de cette question que $A \neq E$. Il y a plusieurs étapes.

- Soit $a \in E \setminus A$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue sur A , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$(x, y) \in A^2, \quad (d(x, y) \leq \alpha) \implies (\delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon). \quad (31.4)$$

Comme A est dense dans E , il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$.

Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n \geq N) \implies \left(d(a_n, a) \leq \frac{\alpha}{2} \right).$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on en déduit que : pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$

$$(n, p \geq N) \implies (d(a_n, a_p) \leq d(a_n, a) + d(a, a_p) \leq \alpha).$$

En utilisant cette ligne dans (31.4), on en déduit que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n, p \geq N) \implies (\delta(f(a_n), f(a_p)) \leq \varepsilon).$$

On a montré que la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (F, δ) complet.

Il s'ensuit que la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge : on note $\ell_{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ sa limite (dépendant a priori de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

- Montrons que la limite $\ell_{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}}$ de la suite $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne dépend pas de la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ choisie qui converge vers a .

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites qui convergent vers a .

Comme ci-dessus, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \implies (d(a_n, \tilde{a}_n) \leq \alpha).$$

En utilisant la ligne (31.4), on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta(f(a_n), f(\tilde{a}_n)) \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que

$$\delta\left(\ell_{(a_n)_{n \in \mathbb{N}}}, \ell_{(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbb{N}}}\right) \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que

$$\ell_{(a_n)_{n \in \mathbf{N}}} = \ell_{(\tilde{a}_n)_{n \in \mathbf{N}}}.$$

On note ℓ_a cette limite commune.

On définit g de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathbf{E}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ \ell_a & \text{si } x = a \end{cases}.$$

- Montrons que la fonction g ainsi définie est continue.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f : A \rightarrow F$ est uniformément continue sur A , il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, a) \in A^2, \quad (d(x, a) \leq \alpha) \implies (\delta(f(x), f(a)) \leq \varepsilon).$$

Soit $(x, a) \in E^2$ tel que $d(x, a) \leq \frac{\alpha}{2}$.

Comme A est dense dans E , il existe deux suites d'éléments de A , $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} d(a_n, a) = 0.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad d(x_n, a_n) - d(x, a) \leq d(x_n, x) + d(a_n, a).$$

Par symétrie, on en déduit

$$|d(x_n, a_n) - d(x, a)| \leq d(x_n, x) + d(a_n, a).$$

En particulier, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, a_n) = d(x, a).$$

Ainsi, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n \geq N) \implies (d(a_n, x_n) \leq \alpha).$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (n \geq N) \implies (\delta(f(a_n), f(x_n)) \leq \varepsilon).$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(f(a_n), g(a)) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(f(x_n), g(x)) = 0,$$

le même raisonnement que ci-dessus montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(f(a_n), f(x_n)) = \delta(g(a), g(x)).$$

En particulier,

$$\delta(g(x), g(a)) \leq \varepsilon.$$

On a montré que : pour tout $(x, a) \in E^2$,

$$d(x, a) \leq \frac{\alpha}{2} \implies \delta(g(x), g(a)) \leq \varepsilon.$$

On a montré que g est uniformément continue sur E , donc continue sur E .

(b) L'unicité découle de la question 14 (a).

15. (a) C'est une simple application du théorème de prolongement des applications uniformément continues car $(\mathbf{R}, d_{\mathbf{R}})$ est complet (question 9 (b)) et \mathbf{Q} est dense dans \mathbf{R} .

(b) i. Il est dans le cours de MPSI que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$ telle que

$$d_{\infty}(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $g_n \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$ telle que

$$d_{\infty}(f, g_n) \leq \frac{1}{n+1}.$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_{\infty}(f, g_n) = 0.$$

On a montré que $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.

ii. Soient $(f, g) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})^2$.

Soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée aux fonctions f et g . On a

$$\begin{aligned} d_{\mathbf{R}}(I(f), I(g)) &= |I(f) - I(g)| \\ &= \left| \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) (f_i - g_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^n (x_{i+1} - x_i) d_{\infty}(f, g) \\ &\leq (b-a) d_{\infty}(f, g). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$. On en déduit si $d_{\infty}(f, g) \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$, alors

$$d_{\mathbf{R}}(I(f), I(g)) \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en posant $\alpha = \frac{\varepsilon}{b-a}$, alors on a montré que : pour tout $(f, g) \in \mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$,

$$(d_{\infty}(f, g) \leq \alpha) \implies (d_{\mathbf{R}}(I(f), I(g)) \leq \varepsilon).$$

On a montré que I est uniformément continue sur $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$.

iii. D'après la question 9 (c), $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ est complet.

D'après la question 15 (b) i $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ et I est uniformément continue sur $\mathcal{E}([a, b], \mathbf{R})$.

D'après le théorème de prolongement des applications uniformément continues, I se prolonge de manière unique à $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$.

Cela permet de définir l'intégrale de Riemann d'une fonction continue sur $[a, b]$.

Les espaces métriques complets ont d'autres propriétés intéressantes. Citons en une :

Théorème. Théorème de Baire.

Soit (E, d) un espace métrique complet. Soit $(O_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'ouverts denses (i.e. pour tout $n \in \mathbf{N}$, O_n est un ouvert dense, c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap O_n \neq \emptyset$).

Alors, $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} O_n$ est une partie dense de E .

Le théorème de Baire a de très nombreuses conséquences. Citons en quelques-unes que le lecteur pourra montrer :

1. \mathbf{R} n'est pas dénombrable;
2. si $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction continue telle que pour tout $x > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(nx) = 0,$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$$

3. si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} telle que pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $f^{(n)}(x) = 0$, alors f est une fonction polynomiale sur \mathbf{R} .

Thème 32

Autour de Fourier

Thèmes abordés : Continuité, dérivabilité, calcul intégral, série.

Difficulté : ■■■□□

Le sujet commence par établir le lemme de Riemann-Lebesgue. On donne ensuite des versions quantitatives du lemme de Riemann-Lebesgue pour quelques classes de fonctions.

On donne ensuite des exemples de convergence arbitrairement rapide, ainsi que de convergence arbitrairement lente.

Les deux parties de ce problème sont largement indépendantes.

32.1 Lemme de Riemann-Lebesgue

Définition. *Coefficient de Fourier.*

Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbf{R})$ (l'ensemble des fonctions continues sur \mathbf{R} et 2π -périodique). On définit les **coefficients de Fourier** de f , notés $c_n(f)$, par :

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Nous allons prouver le résultat suivant :

Lemme. *Lemme de Riemann-Lebesgue.*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Alors,

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0. \quad (32.1)$$

1. Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue lorsque f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$.
2. On suppose f seulement continue dans cette question. Soit $\varepsilon > 0$.
 - (a) Montrer qu'il existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction en escalier telle que

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - g(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

- (b) Terminer la preuve du lemme de Riemann-Lebesgue.
 (c) Quelle est la limite de la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbf{Z}}$ lorsque n tend vers $\pm\infty$?
 3. La ligne (32.1) est-elle encore valable si l'on suppose f continue par morceaux ?

32.2 Estimation de la vitesse de convergence

32.2.1 Un résultat utile pour la suite

Proposition. *Permutation série-intégrale.*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de complexes telle que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge absolument.

Soit la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{inx}$. Alors, f est 2π -périodique, continue sur \mathbf{R} et

$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad c_m(f) = a_m.$$

Nous prouvons la proposition. Soit $\varepsilon > 0$.

4. Justifier qu'il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
 5. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \forall h \in \mathbf{R}, \quad |f(x+h) - f(x)| \leq \left| \sum_{n=0}^N a_n (e^{inh} - 1) \right| + \frac{2\varepsilon}{3}.$$

6. En déduire que f est continue sur \mathbf{R} .
 7. Montrer que f est 2π -périodique.
 8. Soient $m \in \mathbf{Z}$ et $N \in \mathbf{N}$ tels que $N \geq m$.

(a) On suppose $m \in \mathbf{N}$. En calculant l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n e^{i(n-m)x} dx,$$

montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n e^{i(n-m)x} dx = 2\pi a_m.$$

(b) Montrer que l'on a aussi

$$\forall m \in \mathbf{Z}, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n e^{i(n-m)x} dx = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

- (c) En déduire $c_m(f)$ pour $m \in \mathbf{N}$.
 (d) Calculer $c_m(f)$ pour $m \in \mathbf{Z}$, $m \leq -1$.

32.2.2 Pour les fonctions régulières

Définition. *Fonction à support compact.*

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est à support compact s'il existe $A \geq 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad (|x| \geq A) \implies (f(x) = 0).$$

9. Montrer que si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbf{R}) \cap \mathcal{C}^k$ à support compact, alors

$$c_n(f) \underset{|n| \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

32.2.3 Pour les fonctions hölderiennes

Définition. *Fonction hölderienne.*

Soient I un intervalle de \mathbf{R} , $\alpha \in]0, 1[$ et $f : I \rightarrow \mathbf{C}$. On dit que f est α -hölderienne si :

$$\exists C \geq 0, \forall (x, y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

On note $\mathcal{C}^\alpha(I)$ l'ensemble des fonction hölderiennes sur I à valeurs dans \mathbf{C} .

Soit $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbf{R})$.

10. Montrer que

$$\forall a \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{Z}, \quad \int_0^{2\pi} f(t+a) e^{-int} dt = \frac{2\pi}{e^{-ina}} c_n(f).$$

11. Montrer que

$$c_n(f) \underset{|n| \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right).$$

32.2.4 Une convergence arbitrairement rapide ...

12. Soit $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels non nuls de limite nulle. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbf{R})$ telle que

$$\int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n).$$

13. Donner un exemple d'une telle fonction lorsque $b_n = e^{-n}$.

32.2.5 et une convergence arbitrairement lente.

Nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition. *Une décroissance lente.*

Soit $(b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels positifs qui diverge vers $+\infty$. Il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbf{R})$ telle que la suite $\left(b_n \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \right)_{n \in \mathbf{N}}$ ne converge pas vers 0.

14. Montrer qu'il existe $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad b_{\varphi(n)} \geq n^2.$$

Soit la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\varphi(n)x}}{n^2}.$$

15. Montrer que f est continue sur \mathbf{R} et 2π -périodique.

16. Montrer que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\varphi(k)x} dx = \frac{2\pi}{k^2}.$$

17. En déduire que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad b_{\varphi(k)} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\varphi(k)x} dx \geq 2\pi.$$

Correction du Thème 32

1. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, une intégration par parties donne (les fonctions $t \mapsto e^{int}$ et $t \mapsto f(t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$) : pour tout $n \in \mathbf{Z}^*$

$$\int_a^b f(t) e^{-int} dt = \left[-\frac{e^{-int}}{in} f(t) \right]_a^b + \frac{1}{in} \int_a^b f'(t) e^{-int} dt.$$

$\left| \frac{f'}{f} \right|$ étant continue sur le segment $[a, b]$, elle est bornée : soit M un majorant de $\left| \frac{f'}{f} \right|$ sur $[a, b]$. Pour tout $n \in \mathbf{Z}^*$, on a :

$$\left| \int_a^b f(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{1}{|n|} (|f(b)| + |f(a)|) + \frac{M(b-a)}{|n|}.$$

Comme $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|n|} (|f(b)| + |f(a)|) + \frac{M(b-a)}{|n|} \right) = 0$, on en déduit

$$\boxed{\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) e^{-int} dt = 0.}$$

2. (a) C'est un résultat du cours de MPSI.
 (b) Soit $\sigma : a = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = b$ une subdivision adaptée à g . Pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on note c_i la constante telle que

$$\forall t \in]t_i, t_{i+1}[, \quad g(t) = c_i.$$

Pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on pose \tilde{g}_i la fonction définie sur $[t_i, t_{i+1}]$ constante égale à c_i de sorte que \tilde{g}_i soit de classe \mathcal{C}^1 sur $[t_i, t_{i+1}]$ et

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall i \in \llbracket 0, m \rrbracket, \quad \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{g}_i(t) e^{-int} dt = \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) e^{-int} dt.$$

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_a^b g(t) e^{-int} dt = \sum_{i=0}^m \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(t) e^{-int} dt = \sum_{i=0}^m \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{g}_i(t) e^{-int} dt$$

et \tilde{g}_i est de classe \mathcal{C}^1 sur $[t_i, t_{i+1}]$ pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, d'après la question 1, on a

$$\forall i \in \llbracket 0, m \rrbracket, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tilde{g}_i(t) e^{-int} dt = 0.$$

On en déduit que $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \int_a^b g(t) e^{-int} dt = 0$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$ vérifiant $|n| \geq N$,

$$\left| \int_a^b g(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) e^{-int} dt \right| &= \left| \int_a^b (f(t) - g(t) + g(t)) e^{-int} dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - g(t)| dt + \left| \int_a^b g(t) e^{-int} dt \right|. \end{aligned}$$

Comme pour tout $t \in [a, b]$,

$$|f(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

on a

$$\int_a^b |f(t) - g(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que pour tout $|n| \geq N$,

$$\left| \int_a^b f(t) e^{-int} dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

On a montré que

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = 0.$$

(c) Par application du *Lemme de Riemann-Lebesgue*, on a

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} c_n(f) = 0.$$

3. La résultat subsiste lorsque f est seulement supposée continue par morceaux.

Soit $\sigma : 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m < t_{m+1} = 2\pi$ une subdivision adaptée à f .

Par la question 2 (b), pour tout $i \in \llbracket 0, m \rrbracket$, on a

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t) e^{-int} dt = 0,$$

d'où

$$\lim_{|n| \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = 0.$$

4. Comme la série $\sum_{n \geq 0} |a_n|$ converge, on a $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=m+1}^{+\infty} |a_n| = 0$.

$$\text{Ainsi, il existe } N \in \mathbf{N} \text{ tel que } \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

5. Soit $x \in \mathbf{R}$ et soit $h \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{inx} (e^{inh} - 1) \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^N a_n (e^{inh} - 1) \right| + \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| |e^{inh} - 1|. \end{aligned}$$

Or, pour tout $h \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $|e^{inh} - 1| \leq 2$ (inégalité triangulaire), ainsi

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq \left| \sum_{n=0}^N a_n (e^{inh} - 1) \right| + 2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^N a_n (e^{inh} - 1) \right| + \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

6. Soit $x \in \mathbf{R}$. Comme $h \mapsto \left| \sum_{n=0}^N a_n (e^{inh} - 1) \right|$ est continue en 0 et de valeur nulle pour $h = 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall h \in \mathbf{R}, \quad (|h| \leq \alpha) \implies \left(\left| \sum_{n=0}^N a_n (e^{inh} - 1) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Ainsi, pour $|h| \leq \alpha$ et en utilisant l'inégalité établie à la question 5, on a

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

On a montré que f est continue en tout $x \in \mathbf{R}$, ainsi f est continue sur \mathbf{R} .

7. Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a :

$$\sum_{n=0}^N a_n e^{in(x+2\pi)} = \sum_{n=0}^N a_n e^{inx} e^{2in\pi} = \sum_{n=0}^N a_n e^{inx}.$$

Comme

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n e^{in(x+2\pi)} = f(x+2\pi)$$

(car la série $\sum_{n \geq 0} a_n e^{in(x+2\pi)}$ converge et sa somme vaut $f(x+2\pi)$) et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n e^{inx} = f(x).$$

Par unicité de la limite, on en déduit que

$$f(x) = f(x+2\pi).$$

On a montré que f est 2π -périodique.

8. (a) On remarque que

$$\forall k \in \mathbf{Z}, \int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases}.$$

On a donc :

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n e^{i(n-m)x} dx = \sum_{n=0}^N a_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x} dx = 2\pi a_m.$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n e^{i(n-m)x} dx = 2\pi a_m.$$

(b) Soit $m \in \mathbf{Z}$. Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n e^{i(n-m)x} dx - \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx \right| \\ & \leq \left| \int_0^{2\pi} \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n e^{i(n-m)x} dx \right| \\ & \leq 2\pi \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n|. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} 2\pi \sum_{n=N+1}^{+\infty} |a_n| = 0$, on en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n e^{i(n-m)x} dx = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

(c) En utilisant les relations obtenues aux questions 8 (a) et 8 (b), on obtient

$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad c_m(f) = a_m.$$

(d) Lorsque $m \in \mathbf{Z}$ avec $m \leq -1$, pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n e^{i(n-m)x} dx = 0$$

car pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $n - m \neq 0$. Ainsi,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n e^{i(n-m)x} dx = 0.$$

Or, d'après la question 8 (a), on a

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbf{Z}, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n e^{i(n-m)x} dx &= \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx \\ &= 2\pi c_m(f). \end{aligned}$$

On a montré que

$$\forall m \in \mathbf{Z}, \quad m \leq -1, \quad c_m(f) = 0.$$

9. Comme f est de classe \mathcal{C}^k sur $[0, 2\pi]$ et 2π -périodique, k intégrations par parties donnent (les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto e^{int}$ sont de classe \mathcal{C}^k sur $[0, 2\pi]$ et les dérivées de f le sont aussi) :

$$\forall n \in \mathbf{Z}^*, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = \frac{(-1)^k}{2\pi (in)^k} \int_0^{2\pi} f^{(k)}(t) e^{-int} dt.$$

Comme $f^{(k)}$ est continue sur $[0, 2\pi]$, d'après la question 2 (b), on a :

$$\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t) e^{-int} dt \underset{|n| \rightarrow +\infty}{=} o(1).$$

Ainsi

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \underset{|n| \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^k}\right).$$

10. Le changement de variable affine $u = t + a$ donne

$$\int_0^{2\pi} f(t+a) e^{-int} dt = \int_a^{a+2\pi} f(u) e^{-in(u-a)} du.$$

Par périodicité, on en déduit

$$\forall n \in \mathbf{Z}, \forall a \in \mathbf{R}, \int_0^{2\pi} f(t+a) e^{-int} dt = \frac{2\pi}{e^{-ina}} c_n(f).$$

11. Soit $n \in \mathbf{Z}^*$. En prenant $a = \frac{\pi}{n}$ dans l'égalité établie à la question 10, on a :

$$\forall n \in \mathbf{Z}^*, c_n(f) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(t + \frac{\pi}{n}\right) e^{-int} dt.$$

Par définition de $c_n(f)$, on en déduit

$$\forall n \in \mathbf{Z}^*, 2c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right) e^{-int} dt.$$

On récupère donc

$$\forall n \in \mathbf{Z}^*, |c_n(f)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left|f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right| dt.$$

Par hypothèse sur f , pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}^*$, on a

$$\left|f(t) - f\left(t + \frac{\pi}{n}\right)\right| \leq \frac{C}{|n|^\alpha}.$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbf{Z}^*, |c_n(f)| \leq \frac{C}{2|n|^\alpha}.$$

$$\text{On a montré que } c_n(f) \underset{|n| \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{|n|^\alpha}\right).$$

12. Soit la fonction f définie sur \mathbf{R} par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{n^2} e^{inx}$.

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{b_n}{n^2}$ converge car $\frac{b_n}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'après les questions 6 et 7, f est continue sur \mathbf{R} et 2π -périodique.

D'après la question 8 (c), pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$c_n(f) = \frac{b_n}{n^2} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n).$$

On a exhibé une fonction continue f sur \mathbf{R} et 2π -périodique telle que $c_n(f) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(b_n)$.

13. Soit la fonction f définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2n} e^{inx} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-2+ix})^n = \frac{1}{1 - e^{-2+ix}}.$$

D'après la question 8 (c), on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad c_n(f) = e^{-2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-n}).$$

La fonction f ainsi définie convient.

14. On définit la fonction φ par récurrence. On pose $\varphi(0) = 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$, il existe un entier naturel non nul tel que $b_n \geq 1^2$. On note $\varphi(1)$ un de ces entiers.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ construits.

Comme $\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m = +\infty$, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier $k \geq N$, $b_k \geq (n+1)^2$.

On pose $\varphi(n+1) = \max\{N, \varphi(n) + 1\}$. Il est clair que

$$\varphi(n+1) > \varphi(n) \quad \text{et} \quad b_{\varphi(n+1)} \geq (n+1)^2.$$

On a construit une fonction $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $b_{\varphi(n)} \geq n^2$.

15. Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \notin \varphi(\mathbf{N}^*) \\ \frac{1}{\varphi^{-1}(n)^2} & \text{si } n \in \varphi(\mathbf{N}^*) \end{cases},$$

où $\varphi^{-1}(n)$ désigne l'unique antécédent de n par φ (car $n \in \varphi(\mathbf{N}^*)$).

Il est clair que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge absolument. On en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge absolument, ainsi pour tout $x \in \mathbf{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} a_n e^{inx}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{inx} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{e^{i\varphi(m)x}}{\varphi^{-1}(\varphi(m))^2} = f(x).$$

Grâce à la proposition *Permutation série-intégrale* (questions 6 et 7), on en déduit que

$$f \text{ est continue sur } \mathbf{R} \text{ et } 2\pi\text{-périodique.}$$

16. On introduit la même suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ que pour la correction de la question 15. Grâce la proposition *Permutation série-intégrale*, on déduit que

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\varphi(k)x} dx = \frac{2\pi}{k^2}.$$

17. D'après la question 16, on a

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad b_{\varphi(k)} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\varphi(k)x} dx = b_{\varphi(k)} \frac{2\pi}{k^2}.$$

La question 14 donne

$$\forall k \in \mathbf{N}^*, \quad b_{\varphi(k)} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-i\varphi(k)x} dx \geq 2\pi.$$

Thème 33

Introduction à la théorie des distributions

Thèmes abordés : Continuité, dérivabilité, calcul intégral, application linéaire, série.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet permet d'introduire la notion de distribution qui généralise la notion de fonction. On y introduit la notion de dérivée d'une distribution qui généralise la dérivation déjà connue. Le but de ce problème est de montrer le théorème de du Bois-Reymond sur les séries trigonométriques.

Une bonne connaissance du programme d'analyse est requise pour ce problème.

Les résultats des trois premières parties servent dans la dernière partie.

On admet et on pourra utiliser le résultat suivant qui sera vu en classe de MP et démontré au Thème 30 « Théorème de convergence dominée et applications ».

Théorème. *Théorème de convergence dominée.*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux définies sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe une fonction continue par morceaux $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

et qu'il existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}_+$ continue par morceaux telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \forall x \in [a, b], \quad |f_n(x)| \leq g(x).$$

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

33.1 Fonction à support compact

Définitions. *Support d'une fonction, fonction à support compact.*

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

- On appelle *support* de la fonction f l'ensemble

$$\{x \in \mathbf{R}, f(x) \neq 0\}.$$

- On dit que f est à *support compact* si le support de f est borné.

Soit la fonction ρ définie sur \mathbf{R} par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \rho(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

- (a) Justifier que ρ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* .
- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n définie sur \mathbf{R}_+^* telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \rho^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}.$$

- (c) En déduire que ρ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .
2. Construire à partir de la fonction ρ une fonction ψ non nulle de classe \mathcal{C}^∞ dont le support est inclus dans $]0, 1[$.
3. Plus précisément, montrer que si I est un intervalle ouvert de \mathbf{R} non vide, il existe une fonction à support compact dont le support est inclus dans I .

Si I est un intervalle ouvert, on note $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ à support compact inclus dans I .

Définition. *Norme infini d'une fonction.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} et soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction bornée. On définit sa *norme infini* $\|f\|_\infty^I$ par :

$$\|f\|_\infty^I = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

4. Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, les quantités $\|f^{(k)}\|_\infty^{\mathbf{R}}$ existent.

33.2 Introduction aux distributions

33.2.1 Distribution

Définition. *Distribution.*

Soit $T \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{R}))$. On dit que T est une *distribution* sur \mathbf{R} si : pour tout $[a, b] \subset \mathbf{R}$, il existe $K \geq 0$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tels que

$$\forall f \in \mathcal{D}(]a, b[), \quad |T(f)| \leq K \sup_{i \in [0, p]} \|f^{(i)}\|_\infty^{]a, b[}.$$

On utilisera la notation $\langle T, f \rangle$ plutôt que $T(f)$.

On note $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ l'ensemble des distributions sur \mathbf{R} .

5. *Exemples.*(a) Montrer que l'application δ_0 définie sur $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ par :

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad \langle \delta_0, f \rangle = f(0)$$

est une distribution appelée **mesure de Dirac**.(b) Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.i. Montrer que l'application T_f définie sur $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ par

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad \langle T_f, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx$$

est une distribution sur \mathbf{R} .ii. Soient f et g deux fonctions continues sur \mathbf{R} telles que $T_f = T_g$.
Montrer que $f = g$.

Remarque. Les questions 5 (b) i et 5 (b) ii affirment que toute fonction continue par morceaux sur \mathbf{R} est naturellement une distribution. Dans toute la suite, nous n'utiliserons plus la notation T_f mais simplement la notation f .

6. Soient T_1 et T_2 deux distributions sur \mathbf{R} . Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Montrer que l'application $T_1 + \lambda T_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'(\mathbf{R}))$ est une distribution.

33.2.2 Dérivée d'une distribution

7. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ et soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que l'application U définie sur $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ par

$$\langle U, \varphi \rangle := \langle T, \varphi^{(n)} \rangle$$

est bien une distribution sur \mathbf{R} .**Définition.** *Dérivée d'une distribution.*Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. On définit la *dérivée n -ième* de T , notée $T^{(n)}$, sur $\mathcal{D}(\mathbf{R})$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad \langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle.$$

D'après la question 7, $T^{(n)}$ est bien une distribution sur \mathbf{R} .8. Soit la fonction de Heaviside H définie sur \mathbf{R} par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

(a) Pourquoi H est-elle une distribution sur \mathbf{R} ?(b) H est-elle dérivable sur \mathbf{R} ?(c) Calculer la dérivée de H au sens des distributions.9. Soit $j \in \mathbf{N}$. Montrer que l'application $D^j : \begin{cases} \mathcal{D}'(\mathbf{R}) & \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbf{R}) \\ T & \mapsto T^{(j)} \end{cases}$ est linéaire.10. Soit $k \in \mathbf{N}^* \cup \{\infty\}$ et soit $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ($j \in \mathbf{N}^*$ si $k = \infty$). Montrer que si f est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbf{R} , la dérivée j -ième de la distribution f est la distribution $f^{(j)}$ ($f^{(j)}$ est la dérivée j -ième de f au sens classique).

33.2.3 Convergence d'une suite de distributions

Définition. *Convergence d'une suite de distributions.*

Soit $(T_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})^{\mathbf{N}}$ et soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

On dit que la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers φ au sens des distributions si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

11. Montrer que la suite de distributions $(T_n : x \mapsto \sin(nx))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers la distribution nulle.
12. Soit $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de distributions qui converge au sens des distributions vers une distribution T . Montrer que pour tout $j \in \mathbf{N}$ la suite de distributions $(T_n^{(j)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge au sens des distributions vers la distribution $T^{(j)}$.

33.2.4 Une équation différentielle

Proposition. *Résolution de l'équation différentielle $g' = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, version faible.*

Soit g une fonction continue telle que $g' = 0$ (dérivée au sens des distributions). Alors, g est une fonction constante.

Nous prouvons la proposition.

13. Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad \langle g, \varphi' \rangle = 0.$$

14. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\int \phi = 0$. Montrer que $\langle g, \phi \rangle = 0$.

Indication : On pourra vérifier que $x \mapsto \int_{-\infty}^x \phi(t) dt \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

15. Justifier l'existence de $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\int \theta = 1$.

16. Montrer que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad \langle g, \varphi \rangle = \langle g, \theta \rangle \left(\int \varphi \right).$$

Indication : On pourra remarquer que $\varphi = (\int \varphi) \theta + (\varphi - (\int \varphi) \theta)$ et remarquer que la fonction $\varphi - (\int \varphi) \theta$ est d'intégrale nulle.

17. En déduire que g est une fonction constante.
18. Soient f et g deux fonctions continues sur \mathbf{R} telles que $f' = g$ (au sens des distributions). Montrer que $f' = g$ au sens classique.

Indication : On pourra introduire une fonction G telle que $G' = g$ au sens classique et utiliser la question 17.

33.3 Rite d'initiation aux séries de fonctions

Définitions. *Série de fonctions, convergence simple, convergence normale.*

Soit I un intervalle de \mathbf{R} . Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur I . Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que :

- la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur I vers f si pour tout $x \in I$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge et si

$$\forall x \in I, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x).$$

- la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur I si la série $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ converge.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions définie sur un intervalle I .

19. Montrer que si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur I , alors $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement vers une fonction f définie sur I .

20. On suppose dans cette question que toutes les fonctions f_n sont continues sur I et que la série de fonctions converge normalement sur I .

Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction vers laquelle la série de fonctions converge simplement sur I .

- (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $x \in I$ et pour tout $h \in \mathbf{R}$ tel que $x + h \in I$, on a :

$$|f(x+h) - f(x)| \leq 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{x \in I} |f_k(x)| + \sum_{k=0}^n |f_k(x+h) - f_k(x)|.$$

- (b) En déduire que f est continue sur I .

21. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ deux suites telles que les séries $\sum_{n \geq 1} a_n$ et $\sum_{n \geq 1} b_n$ convergent absolument.

- (a) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur \mathbf{R} .

- (b) En déduire que la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

est continue sur \mathbf{R} et 2π -périodique.

22. Soient $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ deux suites réelles telles que les séries $\sum_{n \geq 1} a_n$ et

$\sum_{n \geq 1} b_n$ convergent absolument.

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Soit enfin, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la fonction f_n définie sur \mathbf{R} par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

- (a) Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$ et soit φ une fonction continue sur $[a, b]$.
Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 1} \left(\int_a^b (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \varphi(x) dx \right)$$

converge et montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \varphi(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx.$$

- (b) Montrer que la suite de distribution $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers f au sens des distributions.
(c) En déduire que pour tout $j \in \mathbf{N}$, au sens des distributions, on a

$$f^{(j)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^{(j)}.$$

33.4 Théorème de du Bois-Reymond

Nous allons établir le résultat suivant.

Théorème. *Théorème de du Bois-Reymond.*

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue, 2π -périodique telle qu'il existe deux suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ telles que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Alors

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Soit f vérifiant les hypothèses du théorème.

23. Le but de cette question est de montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ convergent vers 0.

- (a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0. \quad (33.1)$$

- (b) En évaluant la relation (33.1) pour une « bonne » valeur de x , montrer que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers 0. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la suite $(b_n \sin(nx))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.
- (c) Montrer que si la suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ne converge pas vers 0, alors il existe $\varepsilon > 0$ et $\psi : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|b_{\psi(n)}| \geq \varepsilon$. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}$, la suite $(\sin(\psi(n)x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers 0.
- (d) En considérant la limite de la suite $\left(\int_0^{2\pi} \sin^2(\psi(n)x) dx \right)_{n \in \mathbf{N}^*}$,

conclure.

Indication : On pourra utiliser le théorème de convergence dominée.

On considère la fonction F définie par

$$F(x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right).$$

24. Montrer que la fonction F est bien définie sur \mathbf{R} , continue et 2π -périodique.
25. Montrer que $F'' = f$ au sens des distributions. En déduire que $F'' = f$ au sens classique.

Indication : On pourra utiliser la question 18.

26. Montrer que : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos(nx) dx = -\frac{a_n}{n^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin(nx) dx = -\frac{b_n}{n^2}.$$

27. En faisant deux intégrations par parties, terminer la preuve du théorème de du Bois-Reymond.

Correction du Thème 33

1. (a) La fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* et la fonction \exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

Ainsi, ρ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* comme la composée de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ .

- (b) On procède par récurrence et pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « il existe une fonction polynomiale P_n définie sur \mathbf{R}_+^* telle que pour tout $x > 0$, $\rho^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$ ».

\mathcal{P}_0 est de toute évidence vraie, il suffit de prendre $P_0(x) = 1$ pour tout $x > 0$.

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel n .

$\rho^{(n)}$ sur \mathbf{R}_+^* comme produit de fonctions dérivables sur \mathbf{R}_+^* et, pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} \rho^{(n+1)}(x) &= -\frac{1}{x^2} P_n' \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2} + P_n \left(\frac{1}{x} \right) \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} \\ &= \left(-\frac{1}{x^2} P_n' \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{2}{x^3} P_n \left(\frac{1}{x} \right) \right) e^{-1/x^2} \\ &= P_{n+1} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2} \end{aligned}$$

où l'on définit la fonction polynomiale P_{n+1} sur \mathbf{R}_+^* par

$$P_{n+1}(x) = -x^2 P_n'(x) + 2x^3 P_n(x).$$

On note que P_{n+1} est bien une fonction polynomiale sur \mathbf{R}_+^* car P_n en est une (hypothèse de récurrence).

Ainsi, \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe une fonction polynomiale P_n telle que pour tout $x \in \mathbf{R}_+^*$, $\rho^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2}$.

- (c) La question 1 (a) montre que ρ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_+^* . Il est clair que ρ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}_-^* , donc ρ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R}^* . Il est resté à montrer que ρ est de classe \mathcal{C}^∞ en 0.

Pour cela, on raisonne par récurrence. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « ρ est n fois dérivable sur \mathbf{R} et $\rho^{(n)}(0) = 0$ ».

Comme $\rho(x) = 0$ si $x < 0$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\rho(x)}{x} = 0$.

De plus, pour tout $x > 0$, $\frac{\rho(x)}{x} = u e^{-u^2}$ où l'on a posé $u = \frac{1}{x}$. Par croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} e^{-1/x^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u e^{-u^2} = 0.$$

Ainsi ρ est dérivable en 0 et $\rho'(0) = 0$ et donc \mathcal{P}_1 est vraie.

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel n non nul.

Il est clair que ρ est $(n+1)$ fois dérivable sur \mathbf{R}^* .

On sait déjà que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\rho^{(n)}(x) - \rho^{(n)}(0)}{x-0} = 0$ car $\rho^{(n)}(x) = 0$ pour $x < 0$.

De plus, en utilisant l'hypothèse de récurrence, pour tout $x > 0$,

$$\frac{\rho^{(n)}(x) - \rho^{(n)}(0)}{x-0} = \frac{1}{x} P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2}.$$

Si d est le degré de P_n et α son coefficient dominant, on en déduit,

$$\frac{1}{x} P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2} \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \alpha \frac{e^{-1/x^2}}{x^{d+1}}.$$

En utilisant les croissances comparées, on récupère

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\rho^{(n)}(x) - \rho^{(n)}(0)}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \alpha u^{(d+1)/2} e^{-u} = 0$$

où l'on a posé $u = \frac{1}{x^2}$.

$\rho^{(n)}$ est dérivable à droite en 0 de dérivée à droite égale à 0.

On a établi que $\rho^{(n)}$ est dérivable en 0 et que $\rho^{(n+1)}(0) = 0$. La propriété \mathcal{P}_{n+1} est vérifiée.

Par récurrence, ρ admet des dérivées de tous ordres sur \mathbf{R} , donc ρ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} et toutes les dérivées de ρ en 0 sont nulles.

2. Soit la fonction ψ définie sur \mathbf{R} par $\psi(x) = \rho(x) \rho(1-x)$.

Il est clair que ψ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} comme le produit de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

De plus, comme $\rho(x) \neq 0 \iff x > 0$, on en déduit que

$$\psi(x) \neq 0 \iff x > 0 \text{ et } 1-x > 0 \iff x \in]0, 1[.$$

On a montré l'existence d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} et à support compact inclus (égal pour être précis) dans $]0, 1[$.

3. Soit I un intervalle ouvert non vide \mathbf{R} . Soit $x_0 \in I$ et soit $r > 0$ tel que $]x_0 - r, x_0 + r[\subset I$. Soit la fonction φ définie sur \mathbf{R} par

$$\varphi(t) = \psi((1-t)(x-r) + t(x+r)).$$

Il est clair que φ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} comme la composée de fonctions de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

De plus, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$t \in]0, 1[\iff (1-t)(x-r) + t(x+r) \in]x-r, x+r[.$$

Comme ψ est à support compact inclus (égal pour être précis) dans $]0, 1[$, on en déduit que φ est à support compact inclus (égal pour être précis) dans $]x-r, x+r[\subset I$.

4. Soit $A \geq 0$ tel que pour tout $|x| \geq A$, $f(x) = 0$. Soit $k \in \mathbf{N}$.

La fonction $f^{(k)}$ est nulle sur $\mathbf{R} \setminus [-A, A]$ et continue sur le segment $[-A, A]$, elle y est donc bornée sur $[-A, A]$, donc sur \mathbf{R} .

On a montré que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\|f^{(k)}\|_{\infty}^{\mathbf{R}}$ existe.

5. (a) Il est clair que δ_0 est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbf{R})$.

De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$, on a $|\langle \delta, \varphi \rangle| \leq \|\varphi\|_{\infty}^{\mathbf{R}}$. En particulier, pour tout segment $]a, b[$, il existe $K (= 1) \in \mathbf{R}_+$ et il existe $p (= 0) \in \mathbf{N}$ tels que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$,

$$|\langle \delta, \varphi \rangle| \leq K \sup_{i \in [0, p]} \|\varphi^{(i)}\|_{\infty}^{]a, b[}.$$

On a montré que δ_0 est une distribution sur \mathbf{R} .

(b) i. Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert non vide de \mathbf{R} . Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$, on a

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi \rangle| &= \left| \int f(x) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \int |f(x) \varphi(x)| dx \\ &\leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right) \|\varphi\|_{\infty}^{]a, b[}. \end{aligned}$$

On a montré que T_f est une distribution sur \mathbf{R} .

ii. Comme $T_f - T_g = T_{f-g}$, il suffit de montrer que si f est continue telle

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad \int f(x) \varphi(x) dx = 0, \quad (33.2)$$

alors $f = 0$.

Supposons f non nulle : il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Quitte à considérer $-f$ (qui vérifie aussi (33.2)), on peut supposer $f(x_0) > 0$.

Comme f est continue en x_0 , il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $f(x) > 0$.

La question 3 donne un exemple d'une fonction ψ dans $\mathcal{D}(\mathbf{R})$, à support inclus dans $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et strictement positive sur son support.

Il s'ensuit que $\int f(x) \psi(x) dx > 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi, si $(f, g) \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R})^2$ est tel que $T_f = T_g$, alors $f = g$.

6. Soit $]a, b[\subset \mathbf{R}$. T_1 et T_2 étant des distributions sur \mathbf{R} , il existe deux entiers naturels p_1 et p_2 et il existe deux réels positifs K_1 et K_2 tels que : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$,

$$|\langle T_1, \varphi \rangle| \leq K_1 \sup_{i \in [0, p_1]} \|\varphi^{(i)}\|_{\infty}^{]a, b[} \quad \text{et} \quad |\langle T_2, \varphi \rangle| \leq K_2 \sup_{i \in [0, p_2]} \|\varphi^{(i)}\|_{\infty}^{]a, b[}.$$

En posant $K = K_1 + |\lambda| K_2$ et $p = \max\{p_1, p_2\}$, on a : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]a, b[)$,

$$\begin{aligned} |\langle T_1 + \lambda T_2, \varphi \rangle| &\leq K_1 \sup_{i \in [0, p_1]} \|\varphi^{(i)}\|_{\infty}^{]a, b[} + |\lambda| K_2 \sup_{i \in [0, p_2]} \|\varphi^{(i)}\|_{\infty}^{]a, b[} \\ &\leq K \sup_{i \in [0, p]} \|\varphi^{(i)}\|_{\infty}^{]a, b[}. \end{aligned}$$

On a montré que $T_1 + \lambda T_2$ est une distribution sur \mathbf{R} .

7. • Il est clair que U est linéaire sur $\mathcal{D}(\mathbf{R})$.
 • Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Comme T est une distribution sur \mathbf{R} , il existe $K \geq 0$, il existe $p \in \mathbf{N}$ tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[), \quad |\langle T, \varphi \rangle| \leq K \sup_{i \in [0, p]} \|\varphi^{(i)}\|_{\infty}^{]a, b[}.$$

En remarquant que si φ appartient à $\mathcal{D}(]a, b[)$, alors $\varphi^{(n)}$ y appartient aussi, on en déduit que

$$\begin{aligned} \forall \varphi \in \mathcal{D}(]a, b[), \quad |\langle U, \varphi \rangle| &= |\langle T, \varphi^{(n)} \rangle| \\ &\leq K \sup_{i \in [0, p]} \|\varphi^{(n+i)}\|_{\infty}^{]a, b[} \\ &\leq K \sup_{i \in [0, n+p]} \|\varphi^{(i)}\|_{\infty}^{]a, b[}. \end{aligned}$$

On a montré que U est une distribution sur \mathbf{R} .

8. (a) H est une fonction continue par morceaux, donc d'après la question 5 (b) i, H peut être vue comme une distribution sur \mathbf{R} .
 (b) Il est clair que H n'est pas dérivable sur \mathbf{R} car H n'est pas continue en 0.
 (c) Pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, on a

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbf{R}} H(x) \varphi'(x) dx = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx.$$

On remarquera que les intégrales précédentes sont toutes des intégrales sur un segment car φ est à support compact (donc φ' l'est aussi).

Or, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $|x| \geq A$, $\varphi(x) = 0$. En particulier, pour tout $x \geq A$, on a $\varphi'(x) = 0$. On en déduit

$$\langle H', \varphi \rangle = - \int_0^A \varphi'(x) dx = - [\varphi(x)]_0^A = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

On a montré que $H' = \delta_0$.

9. D'après la question 7, pour tout $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, on a

$$D^j(T) = T^{(j)} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}).$$

Soit $(T_1, T_2) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a : pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$,

$$\begin{aligned} \langle D^j(T_1 + \lambda T_2), \varphi \rangle &= \langle (T_1 + \lambda T_2)^{(j)}, \varphi \rangle \\ &= (-1)^j \langle T_1 + \lambda T_2, \varphi^{(j)} \rangle \\ &= (-1)^j \langle T_1, \varphi^{(j)} \rangle + (-1)^j \lambda \langle T_2, \varphi^{(j)} \rangle \\ &= \langle T_1^{(j)}, \varphi \rangle + \lambda \langle T_2^{(j)}, \varphi \rangle \\ &= D^j(T_1) + \lambda D^j(T_2). \end{aligned}$$

Ainsi, $D^j(T_1 + \lambda T_2) = D^j(T_1) + \lambda D^j(T_2)$.

On a montré que $D^j \in \mathcal{L}(\mathcal{D}'(\mathbf{R}))$.

10. On note $f^{(j),d}$ la dérivée j -ième au sens des distributions de la distribution f . Par définition, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, on a

$$\langle f^{(j),d}, \varphi \rangle = (-1)^j \langle f, \varphi^{(j)} \rangle = (-1)^j \int f(x) \varphi^{(j)}(x) dx.$$

Soit $A \geq 0$ tel que le support de φ soit inclus dans $]-A, A[$. Pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\varphi^{(m)}(A) = \varphi^{(m)}(-A) = 0$ et donne f est de classe \mathcal{C}^k sur \mathbf{R} , j intégrations par parties donnent (rappelons que $j \leq k$)

$$\begin{aligned} (-1)^j \int f(x) \varphi^{(j)}(x) dx &= \int f^{(j)}(x) \varphi(x) dx \\ &= \langle f^{(j)}, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

les crochets étant nuls car les dérivées de φ s'annulent aussi en A et $-A$. On en déduit que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad \langle f^{(j),d}, \varphi \rangle = \langle f^{(j)}, \varphi \rangle.$$

On a montré que la dérivée j -ième de la distribution f est la distribution $f^{(j)}$.

11. On remarque que la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de fonctions continues, donc d'après la question 5 (b) i, $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de distributions.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Soit $A \geq 0$ tel que le support de φ soit inclus dans $] -A, A[$. Comme $\varphi(A) = \varphi(-A) = 0$, une intégration par parties donne

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{-A}^A \sin(nx) \varphi(x) dx = -\frac{1}{n} \int_{-A}^A \cos(nx) \varphi'(x) dx.$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad |\langle T_n, \varphi \rangle| \leq \frac{2A}{n} \|\varphi'\|_{\infty}^{\mathbf{R}}.$$

Par encadrement, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = 0$.

On a montré que la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge au sens des distributions vers la distribution nulle.

12. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Soit $j \in \mathbf{N}$.

Par définition de la dérivation des distributions, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\langle T_n^{(j)}, \varphi \rangle = (-1)^j \langle T_n, \varphi^{(j)} \rangle.$$

Comme la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers T au sens des distributions, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^j \langle T_n, \varphi^{(j)} \rangle = \langle T, \varphi^{(j)} \rangle.$$

Or, $\langle T, \varphi^{(j)} \rangle = (-1)^j \langle T^{(j)}, \varphi \rangle$, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n^{(j)}, \varphi \rangle = \langle T^{(j)}, \varphi \rangle.$$

On a montré que la suite $(T_n^{(j)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $T^{(j)}$ au sens des distributions.

13. En utilisant le fait que $g' = 0$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, on a

$$0 = \langle g', \varphi \rangle = -\langle g, \varphi' \rangle.$$

On a montré que pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, $\langle g, \varphi' \rangle = 0$.

14. Soit $A \geq 0$ tel que le support de ϕ soit inclus dans $] -A, A[$.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a donc $\int_{-\infty}^x \phi(t) dt = \int_{-A}^x \phi(t) dt$, de sorte que pour tout

$x \leq -A$, $\int_{-A}^x \phi(t) dt = 0$ car pour tout $t \leq -A$, $\phi(t) = 0$ et pour tout $x \geq A$,

$$\int_{-A}^x \phi(t) dt = 0 \text{ car } \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt = \int_{-A}^A \phi(t) dt = 0.$$

De plus, il est clair que $x \mapsto \int_{-A}^x \phi(t) dt$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} comme une primitive d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} .

On a montré que $x \mapsto \int_{-A}^x \phi(t) dt \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

Comme $g' = 0$, on a

$$0 = \left\langle g', x \mapsto \int_{-A}^x \phi(t) dt \right\rangle.$$

Puis, comme $\left(x \mapsto \int_{-A}^x \phi(t) dt\right)' = \phi$, on en déduit que $\langle g, \phi \rangle = 0$.

Ainsi, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\int \phi = 0$, on a $\langle g, \phi \rangle = 0$.

15. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, positive et non nulle (voir la question 2) de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt \neq 0. \text{ Soit } \theta = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi} \varphi.$$

De toute évidence, $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta = 1$.

16. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$.

L'égalité

$$\varphi = \left(\int \varphi\right) \theta + \left(\varphi - \left(\int \varphi\right) \theta\right)$$

est claire. Comme $\int \theta = 1$, on en déduit que

$$\int \left(\varphi - \left(\int \varphi\right) \theta\right) = \int \varphi - \left(\int \theta\right) \left(\int \varphi\right) = 0$$

car $\int \theta = 1$. D'après la question 14, $\langle g, \varphi - (\int \varphi) \theta \rangle = 0$.

Par linéarité, on obtient finalement que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad \langle g, \varphi \rangle = \langle g, \theta \rangle \int \varphi.$$

17. Soit la fonction h constante et égale à $\langle g, \theta \rangle$. La question 16 montre que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}), \quad \langle g, \varphi \rangle = \langle h, \varphi \rangle.$$

De plus, g et h étant continues sur \mathbf{R} , la question 5 (b) ii permet de conclure que $g = h$.

On a montré que g est une fonction constante.

18. Soit G une primitive sur \mathbf{R} de g au sens classique, i.e. $G' = g$ au sens classique. Comme G est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbf{R} , d'après la question 10, on a $G' = g$ au sens des distributions.

On en déduit que (les dérivées sont au sens des distributions)

$$f' = g \iff f' = G' \iff (f - G)' = 0.$$

D'après la question 17, la distribution $f - G$ est une fonction constante : il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que $f = G + c$.

Comme G est dérivable sur \mathbf{R} au sens classique, on en déduit que f l'est aussi et $f' = G' = g$.

On a montré que $f' = g$ au sens classique.

19. Soit $x_0 \in I$. Par définition, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|f_n(x_0)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x)|$.

Comme la série $\sum_{n \geq 0} \sup_{x \in I} |f_n(x)|$ converge (car convergence normale), par comparaison la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x_0)$ converge absolument, donc converge.

On a montré que la convergence normale sur I implique la convergence simple sur I .

20. (a) Soient $n \in \mathbf{N}$, $x \in I$ et $h \in \mathbf{R}$ tel que $x + h \in I$. On a

$$\begin{aligned} & |f(x+h) - f(x)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} (f_k(x+h) - f_k(x)) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n (f_k(x+h) - f_k(x)) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (f_k(x+h) - f_k(x)) \right|. \end{aligned}$$

On remarque que $|f_k(x+h) - f_k(x)| \leq 2 \sup_{x \in I} |f_k(x)|$. Par hypothèse de convergence normale, la série $\sum_{k \geq n+1} \sup_{x \in I} |f_k(x)|$ converge.

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a l'inégalité souhaitée.

- (b) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la série $\sum_{k \geq 0} \sup_{x \in I} |f_k(x)|$ converge, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \sup_{x \in I} |f_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit $n \geq N$ fixé. Les fonctions f_k étant continues sur I , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n |f_k(x+h) - f_k(x)| = 0,$$

ainsi il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $h \in]-\alpha, \alpha[$ tel que $x + h \in I$,

$$\sum_{k=0}^n |f_k(x+h) - f_k(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il s'ensuit que pour tout $h \in]-\alpha, \alpha[$ tel que $x + h \in I$,

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &\leq 2 \times \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que f est continue en tout $x \in I$, ainsi f est continue sur I .

21. (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|,$$

ainsi

$$\sup_{x \in \mathbf{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Comme la série $\sum_{n \geq 1} (|a_n| + |b_n|)$ converge, par comparaison, la série

$$\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in \mathbf{R}} |a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)|$$

converge.

On a montré que la série $\sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge normalement sur \mathbf{R} .

(b) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction $x \mapsto a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$ est continue sur \mathbf{R} , donc, d'après les questions 20 (b) et 21 (a), la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

est continue sur \mathbf{R} .

De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^N (a_n \cos(n(x+2\pi)) + b_n \sin(n(x+2\pi))) \\ &= \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx + 2n\pi) + b_n \sin(nx + 2n\pi)) \\ &= \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$ et par unicité de la limite, on en déduit

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n(x+2\pi)) + b_n \sin(n(x+2\pi))) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \end{aligned}$$

On a montré que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ est 2π -périodique et continue sur \mathbf{R} .

22. (a) Pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=1}^N \int_a^b (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \varphi(x) dx - \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \sum_{n=N+1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \varphi(x) dx \right| \\ &\leq \|\varphi\|_{\infty}^{[a,b]} \int_a^b \sum_{n=N+1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) dx \\ &\leq \|\varphi\|_{\infty}^{[a,b]} (b-a) \sum_{n=N+1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|). \end{aligned}$$

Or, la série $\sum_{n \geq 1} (|a_n| + |b_n|)$ converge et on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} (|a_n| + |b_n|) = 0.$$

Par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \int_a^b (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \varphi(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx.$$

On a montré que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\int_a^b (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \varphi(x) dx \right)$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_a^b (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \varphi(x) dx \right) = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx.$$

- (b) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. En particulier, φ est continue à support compact, disons $[a, b]$, d'après la question 22 (a), on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f_n, \varphi \rangle = \int f(x) \varphi(x) dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

On a montré que la suite de distributions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers f au sens des distributions.

- (c) Soit $j \in \mathbf{N}$. Il suffit d'appliquer le résultat de la question 12 à la suite de distributions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, qui converge vers f au sens des distributions (question 22 (b)) pour obtenir

$$f^{(j)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))^{(j)}.$$

23. (a) Comme la série $\sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ converge pour tout réel x , on en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = 0.$$

- (b) Pour $x = 0$, on a : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = a_n.$$

Grâce au résultat de la question 23 (a), on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Comme la fonction \cos est bornée sur \mathbf{R} , on en déduit : pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \cos(nx) = 0$, ainsi

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \sin(nx) = 0.$$

- (c) Comme l'on suppose que $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ ne converge pas vers 0, il existe $\varepsilon > 0$, pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, il existe $n \geq N$ et $|b_n| \geq \varepsilon$.

On va construire la fonction ψ par récurrence.

Pour $N = 1$, il existe $n \geq N$ tel que $|b_n| \geq \varepsilon$. On pose $\psi(1)$ cet entier.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose $\psi(1), \dots, \psi(n)$ tels que

$$\psi(1) < \dots < \psi(n)$$

et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|b_{\psi(i)}| \geq \varepsilon$.

D'après ce qui précède, il existe $m \geq \psi(n) + 1$ tel que $|b_m| \geq \varepsilon$. On pose $\psi(n+1)$ un tel entier.

On a construit par récurrence la fonction $\psi : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ strictement croissante et telle que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|b_{\psi(n)}| \geq \varepsilon$.

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|b_{\psi(n)}| \geq \varepsilon$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, la suite $(b_{\psi(n)} \sin(\psi(n)x))_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers 0 car c'est une suite extraite d'une suite qui converge vers 0, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(\psi(n)x) = 0.$$

(d) Comme pour tout $x \in [0, 2\pi]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin^2(\psi(n)x) = 0$ et

$$\forall x \in [0, 2\pi], \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad |\sin^2(\psi(n)x)| \leq 1 (= g(x)),$$

par le *Théorème de convergence dominée* dont l'énoncé figure en en-tête, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} \sin^2(\psi(n)x) dx = 0.$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\psi(n)x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2\psi(n)x)}{2} dx = \frac{1}{2}.$$

On obtient donc une contradiction.

On a montré que la suite $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge vers 0.

24. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\left| \frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right| \leq \frac{|a_n| + |b_n|}{n^2}.$$

Or, d'après la question 23, les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ convergent vers 0, donc elles sont bornées.

Soit $M \in \mathbf{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $|a_n| \leq M$ et $|b_n| \leq M$.

Comme la série $\sum_{n \geq 1} \frac{2M}{n^2}$ converge (c'est une série de Riemann avec $2 > 1$), en utilisant la question 21 (b), on en déduit que la fonction F est définie sur \mathbf{R} , continue sur \mathbf{R} et 2π -périodique.

25. D'après la question 22 (c), on a

$$F'' = - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx) \right)''.$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x \mapsto \frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx)$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbf{R} , ainsi, d'après la question 10, la dérivée seconde de

$$x \mapsto \frac{a_n}{n^2} \cos(nx) + \frac{b_n}{n^2} \sin(nx)$$

au sens des distributions est la distribution

$$x \mapsto -(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

ainsi

$$F'' = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = f(x).$$

De plus, comme $(F')' = f$ au sens des distributions, la question 18 appliquée deux fois montre que l'on a $F'' = f$ au sens classique.

26. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$F_N(x) = - \sum_{k=1}^N \left(\frac{a_k}{k^2} \cos(kx) + \frac{b_k}{k^2} \sin(kx) \right).$$

D'une part, pour tout $N \geq n$, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_N(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(- \sum_{k=1}^N \left(\frac{a_k}{k^2} \cos(kx) + \frac{b_k}{k^2} \sin(kx) \right) \right) \cos(nx) dx \\ &= - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_k}{k^2} \cos(kx) + \frac{b_k}{k^2} \sin(kx) \right) \cos(nx) dx. \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos((k+n)x) + \cos((k-n)x)) dx \\ &= \pi \delta_{k,n} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(kx) \cos(nx) dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin((k+n)x) + \sin((k-n)x)) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout $N \geq n$, on a

$$\forall N \geq n, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F_N(x) \, dx = -\frac{a_n}{n^2}. \quad (33.3)$$

D'autre part, pour tout $N \geq n$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (F(x) - F_N(x)) \cos(nx) \, dx \right| \\ &= \left| - \int_0^{2\pi} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \left(\frac{a_k}{k^2} \cos(kx) + \frac{b_k}{k^2} \sin(kx) \right) dx \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k^2} \\ &\leq 2\pi \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k^2}. \end{aligned}$$

D'après la question 23, les suites $(a_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ convergent vers 0, donc sont bornées : soit M une borne commune. Il s'ensuit que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{|a_k| + |b_k|}{k^2} = 0$$

et

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (F(x) - F_N(x)) \cos(nx) \, dx = 0. \quad (33.4)$$

En utilisant (33.3) et (33.4), on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos(nx) \, dx = -\frac{a_n}{n^2}.}$$

Un calcul analogue montre que

$$\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin(nx) \, dx = -\frac{b_n}{n^2}.}$$

27. Comme F est de classe \mathcal{C}^2 , avec $F'' = f$, sur \mathbf{R} (question 25), en faisant deux intégrations par parties les égalités obtenues à la question 26, on en déduit : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

Quelques remarques culturelles

La théorie des distributions est principalement l'œuvre de Laurent Schwartz, ce qui a lui valu la médaille Fields en 1950.

Les distributions peuvent être vues comme une généralisation des fonctions. Elles permettent de donner un cadre plus souple pour résoudre certaines équations aux dérivées partielles. L'idée principale est de résoudre l'équation aux dérivées partielles dans un espace de distributions et de montrer que les solutions sont (ou pas) des solutions au sens classique.

Thème 34

Sur le « mélange » des décimales d'un réel

Thèmes abordés : Continuité, dérivabilité, calcul intégral, développement décimal, série.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet a pour but de d'étudier la régularité des fonctions qui « permutent » les décimales d'un réel. On y établit certaines propriétés de cette classe de fonctions.

Une connaissance solide sur la notion de limite et de continuité est requise.

Les résultats de la partie 1 servent dans la partie 2. La partie 3 est indépendante des deux précédentes.

On pourra utiliser les résultats et définition suivants. Pour la preuve de la proposition *C est complet*, on renvoie le lecteur au Thème 29 : « Sur les suites convexes ».

Définition. *Suite de Cauchy.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de complexes. On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de *Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, (n \geq p \geq N) \implies (|u_n - u_p| \leq \varepsilon).$$

On admet la proposition suivante.

Proposition. *C est complet.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de complexes de Cauchy. Alors, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans *C*.

On notera que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de réels, alors $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans *R*.

34.1 Fonction réglée

34.1.1 Généralités sur les fonctions réglées

Définitions. *Norme infini, convergence uniforme.*

Soit *X* une partie de *R*.

- Soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction bornée. On définit la *norme infini* $\|f\|_{\infty}^X$ de *f* par :

$$\|f\|_{\infty}^X = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

- Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies et bornées sur X et soit $f : X \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur X si :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty}^X = 0.$$

Soit X une partie de \mathbf{R} non vide. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions bornée qui converge uniformément vers une fonction f sur X .

1. Montrer que la fonction f est bornée sur X .
2. Montrer que

$$\forall x \in X, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

On suppose que X est un intervalle privé d'un nombre au plus dénombrable de points (éventuellement vide). On suppose que les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont continues sur X .

3. Montrer X est dense dans I , i.e. tout élément de I est limite d'une suite d'éléments de X .

Indication : On pourra utiliser le fait que tout intervalle de longueur strictement positive est non dénombrable.

4. Montrer que : pour tout $(x, y) \in X^2$ et pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)|.$$

5. En déduire que f est continue sur X .

Définition. *Fonction réglée.*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ deux réels tels que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On dit que f est réglée s'il existe une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définies sur $[a, b]$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{\infty}^{[a, b]} = 0$.

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

6. Montrer que f est réglée sur $[a, b]$ si, et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction en escalier sur $[a, b]$ telle que $\|f - g\|_{\infty}^{[a, b]} \leq \varepsilon$.
7. On suppose que f est continue sur $[a, b]$. Montrer que f est réglée sur $[a, b]$.
8. Montrer que f est réglée sur $[a, b]$ si, et seulement si, f admet une limite à gauche en tout point de $]a, b]$ et à droite en tout point de $[a, b[$.

Indication : Pour le sens indirect, on pourra utiliser le théorème *Compacité selon Borel-Lebesgue* du Thème 25 : « Théorème d'approximation de Weierstrass ».

9. En déduire que si f est monotone sur $[a, b]$, alors f est réglée sur $[a, b]$.

10. Montrer que la fonction $x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ n'est pas réglée sur $[0, 1]$.

34.1.2 Intégrale d'une fonction réglée

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit f une fonction réglée sur $[a, b]$ et soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$.

11. Rappeler comment est défini l'intégrale d'une fonction en escalier sur $[a, b]$.

12. Montrer que la suite $\left(\int_a^b f_n(t) dt \right)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy. En déduire que cette suite converge.

Définition. *Intégrale d'une fonction réglée.*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction réglée et soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. On définit $\int_a^b f(t) dt$ par

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt.$$

13. Montrer que la précédente définition est licite, i.e. la quantité $\int_a^b f(t) dt$ ne dépend pas de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge uniformément vers f .

On admet que les propriétés usuelles du calcul intégrale restent valables :

- si f et g sont réglées sur $[a, b]$ et si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda f + g$ est réglée sur I et

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

- si f est réglée sur $[a, b]$, alors $|f|$ est réglée sur $[a, b]$ et

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

34.1.3 Un résultat d'intégration

Proposition. *Interversion limite-intégrale.*

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions réglées qui converge uniformément sur I vers une fonction réglée f . Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Nous prouvons la proposition.

14. Montrer que f est réglée sur $[a, b]$.

15. Montrer la proposition précédente.

34.2 Calcul d'une intégrale

On admet (pour la preuve, on renvoie au Thème 2 : « Découverte des infinis ») la proposition suivante.

Proposition. *Développement décimal illimité propre.*

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, il existe une unique suite $(a_n(x))_{n \in \mathbf{N}} \in \llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbf{N}^*}$ avec $a_0 = \lfloor x \rfloor$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \frac{a_k(x)}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^n \frac{a_k(x)}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

En particulier,

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k(x)}{10^k}.$$

Définition. *Fonction f_σ .*

Soit $\sigma : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ une application. On définit sur $[0, 1]$ la fonction f_σ par : pour tout $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n(x)}{10^n} \in [0, 1]$ (développement décimal illimité propre de x),

$$f_\sigma(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n}.$$

Remarque. On notera que a_0 n'intervient pas dans la définition de f_σ .

Soit $\sigma : \mathbf{N}^* \rightarrow \mathbf{N}^*$ une application.

16. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $n \in \mathbf{Z}$,

$$\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$a_n(x) = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor.$$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R} \mapsto a_n(x)$ est périodique (on précisera la période) et préciser ses valeurs.

(d) Montrer que tout $n \in \mathbf{N}$, a_n est réglée sur $[0, 1]$.

17. Montrer que f_σ est réglée sur $[0, 1]$.

18. Calculer $\int_0^1 a_i(x) dx$ pour tout $i \in \mathbf{N}^*$.

19. En déduire la valeur de $\int_0^1 f_{\sigma(x)} dx$.

34.3 Une caractérisation de la continuité

Nous allons montrer la proposition suivante.

Proposition. *Condition nécessaire et suffisante de continuité de f_σ .*

Soit $\sigma : \mathbf{N}^ \rightarrow \mathbf{N}^*$ injective. La fonction f_σ est continue sur $[0, 1[$ si, et seulement si, $\sigma = \text{id}_{\mathbf{N}^*}$.*

On suppose que f_σ est continue sur $[0, 1[$ et nous allons montrer que $\sigma = \text{id}_{\mathbf{N}^*}$. Nous procédons par récurrence.

20. Montrer que l'hypothèse « $\sigma(1) > \sigma(2)$ » mène à une contradiction. Conclure.

Indication : On pourra s'intéresser à la limite de f_σ à gauche et à droite de $10^{-\sigma(2)}$.

21. Soit $i \in \mathbf{N}^*$. On suppose $\sigma(1) < \dots < \sigma(i)$.

Montrer que $\sigma(i) < \sigma(i+1)$.

Indication : On pourra supposer $\sigma(i+1) < \sigma(i)$ et s'intéresser aux limites de f_σ à gauche et à droite de $10^{-\sigma(i+1)}$.

22. Conclure.

Nous allons maintenant montrer que

$$\forall i \in \mathbf{N}^*, \quad \sigma(i) = \sigma(1) + i - 1.$$

23. Soit $i \in \mathbf{N}^*$. Montrer que $\sigma(i+1) = \sigma(i) + 1$.

Indication : On pourra supposer $\sigma(i+1) > \sigma(i) + 1$ et considérer les limites de f_σ à gauche et à droite de $10^{-\sigma(i)} + 10 \times 10^{-\sigma(i+1)}$.

24. Montrer que $\sigma(1) = 1$.

25. Terminer la preuve de la proposition.

Correction du Thème 34

1. Soit M un majorant de la suite $(\|f_n\|_\infty^X)_{n \in \mathbb{N}}$.

Par définition, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\|f - f_n\|_\infty^X \leq 1.$$

Donc, on a :

$$\forall x \in I, \quad |f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| \leq 1 + M.$$

On a montré que f est bornée sur X .

2. Soit $x \in X$. Par définition de la norme infini, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty^X.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_\infty^X = 0$, par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x).$$

3. Supposons que X n'est pas dense dans I : il existe $x \in X$ et $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I \subset X$.

Comme $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\cap I$ est un intervalle de longueur strictement positive, inclus dans X , X n'est donc pas dénombrable, ce qui contredit le fait que X est supposé au plus dénombrable.

On a montré que X est dense dans I .

4. Soit $(x, y) \in X^2$ et soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)|.$$

L'inégalité triangulaire donne l'inégalité souhaitée.

5. Soit $(x, y) \in X^2$. Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_\infty^X = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\|f - f_n\|_\infty^X \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Soit $n \geq N$ fixé. On a donc :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |f_n(y) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Comme f_n est continue en x , il existe $\alpha > 0$ tel que : pour tout

$$y \in]x - \alpha, x + \alpha[\cap X, \quad |f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a montré que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tels que

$$\forall y \in X, \quad (y \in]x - \alpha, x + \alpha[\cap X) \implies (|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon).$$

On a montré que f est continue sur X .

6. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est réglée sur $[a, b]$, il existe une suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{\infty}^{[a, b]} = 0$.

En particulier, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - f_n\|_{\infty}^{[a, b]} \leq \varepsilon$.

\Leftarrow Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe g_n tel que $\|f - g_n\|_{\infty}^{[a, b]} \leq \frac{1}{n+1}$.

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - g_n\|_{\infty}^{[a, b]} = 0$, donc f est réglée sur $[a, b]$.

L'équivalence est montrée.

7. Il est dans le cours de MPSI que pour toute fonction continue sur $[a, b]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction en escalier g_n sur $[a, b]$ telle que

$$\|f - g_n\|_{\infty}^{[a, b]} \leq \frac{1}{n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit que la suite de fonctions en escalier $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

On a montré que toute fonction continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

8. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Soit $x_0 \in [a, b[$.

Si f est continue en x_0 , alors f admet une limite à gauche et à droite de x_0 (qui sont égales).

On suppose f discontinue en x_0 . Soit $\varepsilon > 0$ et soit φ une fonction en escalier telle que :

$$\forall x \in [a, b], \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe $\alpha > 0$ tel que $x_0 + \alpha \in [a, b]$ et tel que φ soit constante sur $]x_0, x_0 + \alpha[$. Ainsi, pour tout $(x, y) \in]x_0, x_0 + \alpha[$, on a

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - \varphi(x)| + |\varphi(y) - \varphi(x)| + |f(y) - \varphi(y)| \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = x_0.$$

Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \implies (u_n \in]x_0, x_0 + \alpha[).$$

On en déduit que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n, p \geq N) \implies (|f(u_n) - f(u_p)| \leq \varepsilon).$$

La suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc d'après la proposition C est complet, on en déduit que la suite converge. On note ℓ_u sa limite (elle dépend de la suite u , a priori).

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > x_0, v_n > x_0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = x_0.$$

Il existe un entier N tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \implies (u_n, v_n \in]x_0, x_0 + \alpha]).$$

Il s'ensuit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n \geq N) \implies (|f(u_n) - f(v_n)| \leq \varepsilon).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on récupère $|\ell_u - \ell_v| \leq \varepsilon$. Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\ell_u = \ell_v$. On note ℓ cette limite commune.

On a montré que pour toute suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui tend vers x_0 par valeurs supérieures, la suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ . Par caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \ell.$$

On montre de même que f admet une limite à gauche en tout point de $]a, b]$.

\Leftarrow Soit $\varepsilon > 0$. Comme f admet une limite à gauche et à droite en tout point $x \in [a, b]$, il existe un voisinage ouvert de x dans $[a, b]$: $V_x =]a_x, b_x[\cap [a, b]$ tel que :

$$\forall (y, z) \in (]a_x, x[\cap [a, b])^2, \quad |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon$$

et

$$\forall (y, z) \in (]x, b_x[\cap [a, b])^2, \quad |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon.$$

Comme

$$[a, b] = \bigcup_{x \in [a, b]} V_x,$$

le critère de compacité Borel-Lebesgue appliqué au segment $[a, b]$ assure qu'il existe un nombre fini d'éléments de $[a, b]$, disons x_1, \dots, x_n tel que

$$[a, b] = \bigcup_{i=1}^n V(x_i).$$

Soit $(c_j)_{j \in \llbracket 0, m \rrbracket}$ la subdivision de $[a, b]$ composée de a, b , des x_i des a_{x_i} et des b_{x_i} pour $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Soit $j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $c_j \in V_{x_k}$. On distingue trois cas :

- si $c_j \in]a_{x_k}, x_k[$, comme x_k est un élément de la subdivision, on a $c_{j+1} < x_k$ et $]c_j, c_{j+1}[\subset]a_{x_k}, x_k[$;
- si $c_j = x_k$, alors $c_{j+1} < b_{x_k}$ car b_{x_k} est un élément de la subdivision considérée et on a $]c_j, c_{j+1}[\subset]x_k, b_{x_k}[$;

- enfin, si $c_j \in]x_k, b_k[$, on a encore $c_{j+1} < b_{x_k}$ car b_{x_k} est un élément de la subdivision et on a $]c_j, c_{j+1}[\subset]x_k, b_{x_k}[$.

Remarquons que dans chacun des cas, nous avons :

$$\forall (x, y) \in]c_j, c_{j+1}[^2, \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit g la fonction définie sur $[a, b]$ par : pour tout $x \in [a, b]$,

$$g(x) = \begin{cases} f(c_j) & \text{si } x = c_j \text{ avec } j \in \llbracket 0, m \rrbracket \\ f\left(\frac{c_j + c_{j+1}}{2}\right) & \text{si } x \in]c_j, c_{j+1}[\text{ avec } j \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket \end{cases}.$$

Il est clair que g est en escalier sur $[a, b]$ et

$$\forall x \in [a, b], \quad |g(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

9. D'après le théorème de la limite monotone, f admet une limite à gauche en tout point de $]a, b]$ et une limite à droite en tout point de $[a, b[$.

En utilisant la question 8, on en déduit que f est réglée sur $[a, b]$.

10. Soient les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = \frac{1}{(n+1)\pi} \quad \text{et} \quad x'_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x_n) = 0 \quad \text{et} \quad f(x'_n) = 1.$$

Comme les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0, f ne peut avoir de limite en 0^+ .

D'après la question 8, f n'est pas réglée sur $[0, 1]$.

11. Soit g une fonction en escalier définie sur $[a, b]$: il existe une subdivision $\sigma : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$ de $[a, b]$ et deux suites de réels $(c_i)_{i \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ et $(\zeta_i)_{i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket}$ telles que

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = \begin{cases} c_i & \text{si } x \in]t_i, t_{i+1}[\text{ avec } i \in \llbracket 0, n \rrbracket \\ f(t_i) = \zeta_i & \text{pour tout } i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket \end{cases}.$$

L'intégrale de g est définie par $\int_a^b g(t) dt = \sum_{i=0}^n c_i (t_{i+1} - t_i)$.

12. Soit $\varepsilon > 0$. On remarque déjà que, comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{\infty}^{[a, b]} = 0,$$

il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$,

$$\|f - f_n\|_{\infty}^{[a, b]} \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Ainsi, pour tout $n, p \geq N$, on a :

$$\begin{aligned} \|f_n - f_p\|_{\infty}^{[a,b]} &\leq \|f - f_n\|_{\infty}^{[a,b]} + \|f - f_p\|_{\infty}^{[a,b]} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{b-a}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n, p \geq N$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f_p(t) dt \right| &\leq \int_a^b |f_n(t) - f_p(t)| dt \\ &\leq (b-a) \|f_n - f_p\|_{\infty}^{[a,b]} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

On a montré que la suite $\left(\int_a^b f_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

13. Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de fonctions en escalier qui convergent uniformément vers f , montrons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (f_n(t) - g_n(t)) dt = 0.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_{\infty}^{[a,b]}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (f_n(t) - g_n(t)) dt \right| &\leq \int_a^b |f_n(t) - g_n(t)| dt \\ &\leq \|f_n - g_n\|_{\infty}^{[a,b]} \\ &\leq \|f_n - f\|_{\infty}^{[a,b]} + \|g_n - f\|_{\infty}^{[a,b]}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - g_n\|_{\infty}^{[a,b]} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|g_n - g_n\|_{\infty}^{[a,b]} = 0$, par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b (f_n(t) - g_n(t)) dt = 0.$$

La quantité $\int_a^b f(t) dt$ est indépendante de la suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f .

14. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty}^{[a,b]} = 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\|f - f_N\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme f_N est réglée sur $[a, b]$, d'après la question 6, il existe une fonction g en escalier sur $[a, b]$ telle que $\|f_N - g\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par l'inégalité triangulaire, on a :

$$\|f - g\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \|f_N - f\|_{\infty}^{[a,b]} + \|f_N - g\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

D'après la question 6, f est réglée sur $[a, b]$.

15. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| &\leq \int_a^b |f(t) - f_n(t)| dt \\ &\leq (b-a) \|f_n - f\|_{\infty}^{[a,b]}. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{\infty}^{[a,b]} = 0$, par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

16. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{Z}$.

Par définition de la partie entière, on a

$$[x + n] \leq x + n < [x + n] + 1.$$

On a aussi $[x] \leq x < [x] + 1$, puis

$$[x] + n \leq x + n < [x] + n + 1.$$

Comme $[x + n]$ et $[x] + n$ sont des entiers, on a

$$\boxed{[x + n] = [x] + n.}$$

(b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. En utilisant la proposition *Développement décimal illimité propre*, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k(x)}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^n \frac{a_k(x)}{10^k} + \frac{1}{10^n}.$$

En multipliant par 10^n , on obtient :

$$a_n(x) \leq 10^n x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) 10^{n-k} < a_n(x) + 1$$

soit $a_n(x) = [10^n x - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) 10^{n-k}]$.

Comme $-\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) 10^{n-k} \in \mathbf{Z}$, d'après la question 16 (a), on a :

$$a_n(x) = [10^n x] - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) 10^{n-k}.$$

Toujours en utilisant la définition du développement décimal illimité propre de x , on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{10^k} \leq x < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{10^k} + \frac{1}{10^{n-1}}$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) 10^{n-1-k} = [10^{n-1} x]$$

et

$$10[10^{n-1} x] = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) 10^{n-k}.$$

On a montré que pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\boxed{a_n(x) = [10^n x] - 10[10^{n-1} x].}$$

- (c) • On va montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, a_n est 10^{-n+1} -périodique. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$a_n(x + 10^{-n+1}) = [10^n x + 10] - 10[10^{n-1} x + 1].$$

D'après la question 16 (a), on a

$$a_n(x + 10^{-n+1}) = a_n(x).$$

$$\boxed{a_n \text{ est } 10^{-n+1}\text{-périodique.}}$$

- Soit $n \in \mathbf{N}$. Comme a_n est 10^{-n+1} -périodique, il suffit de donner les valeurs prises par a_n sur un intervalle de longueur 10^{-n+1} . Par la question 16 (b), on a

$$\boxed{\forall k \in [0, 9], \forall x \in \left[\frac{k}{10^n}, \frac{k+1}{10^n} \right[, a_n(x) = k.}$$

- (d) Soit $n \in \mathbf{N}$. a_n est continue par morceaux, donc a_n admet une limite à gauche et à droite en tout point de $[0, 1]$, donc $\boxed{a_n \text{ est réglée sur } [0, 1].}$

17. Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie sur $[0, 1]$ par

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{a_{\sigma(k)}(x)}{10^k}.$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, f_n est en escalier donc est réglée sur $[0, 1]$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$\begin{aligned} |f_{\sigma}(x) - f_n(x)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(k)}(x)}{10^k} \right| \\ &\leq 9 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} \\ &\leq \frac{9}{10^{n+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &\leq \frac{1}{10^n}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

D'après la question 14, f_{σ} est réglée sur $[0, 1]$.

18. Soit $n \in \mathbf{N}^*$, comme a_n est 10^{-n+1} -périodique, on a :

$$\int_0^1 a_n(x) dx = 10^{n-1} \int_0^{10^{-n+1}} a_n(x) dx.$$

Or,

$$\int_0^{10^{-n+1}} a_n(x) dx = 10^{-n} \times (1 + 2 + \dots + 9) = 45 \times 10^{-n}.$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^1 a_n(x) dx = \frac{9}{2}.$$

19. On reprend la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ introduite ci-dessus. Pour tout $n \in$

\mathbb{N}^* , on a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x) dx &= \int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{a_{\sigma(k)}(x)}{10^k} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} \int_0^1 a_{\sigma(k)}(x) dx \\ &= \frac{9}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right). \end{aligned}$$

Il est clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times \left(1 - \left(\frac{1}{10} \right)^n \right) = \frac{1}{2}$. Comme la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f_σ sur $[0, 1]$, d'après la proposition *In-terversion limite-intégrale* établie à la question 15, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dx = \int_0^1 f_{\sigma(x)} dx.$$

On a montré que $\int_0^1 f_\sigma(x) dx = \frac{1}{2}$.

20. On suppose $\sigma(1) \geq \sigma(2)$.

Par injectivité, on a $\sigma(1) > \sigma(2)$ et $10^{-\sigma(1)} < 10^{-\sigma(2)}$.

Comme pour tout $x \in]10^{-\sigma(2)}, 10^{-\sigma(2)} + 10^{-\sigma(1)}[$, $a_{\sigma(1)}(x) = 0$ (par $10^{-\sigma(1)+1}$ -périodicité de a_1 , $a_{\sigma(2)}(x) = 1$ et pour tout $n \geq 3$, $a_{\sigma(n)}(x) \leq 9$, il s'ensuit que

$$\lim_{x \rightarrow (10^{-\sigma(2)})^+} f_\sigma(x) \leq 0,0199 \dots = 0,02.$$

De même, comme pour tout $x \in]10^{-\sigma(2)} - 10^{-\sigma(1)}, 10^{-\sigma(2)}[$ et pour tout $n \geq 2$,

$$a_{\sigma(1)}(x) = 9 \quad \text{et} \quad a_{\sigma(n)}(x) \geq 0,$$

on en déduit :

$$\lim_{x \rightarrow (10^{-\sigma(2)})^-} f_\sigma(x) \geq 0,900 \dots = 0,9.$$

Ainsi f_σ ne peut être continue en $10^{-\sigma(2)}$ et cela donne une contradiction.

Ceci prouve que $\sigma(1) < \sigma(2)$.

21. Soit $i \in \mathbb{N}^*$. On suppose $\sigma(1) < \dots < \sigma(i)$.

Montrons que $\sigma(i+1) > \sigma(i)$. Comme ci-dessus, on suppose $\sigma(i+1) \leq \sigma(i)$, soit par injectivité, $\sigma(i+1) < \sigma(i)$.

Soit k le plus grand entier compris entre 1 et i tel que $\sigma(i+1) < \sigma(k)$ de sorte que

$$10^{-\sigma(i)} < 10^{-\sigma(i-1)} < \dots < 10^{-\sigma(k)} < 10^{-\sigma(i+1)}.$$

Le raisonnement est similaire à celui utilisé ci-dessus : nous allons nous intéresser à la limite de f_σ en $10^{-\sigma(i+1)}$.

On rappelle que pour tout $x \in [0, 1[$,

$$f_\sigma(x) = 0, a_{\sigma(1)}(x) a_{\sigma(2)}(x) \dots a_{\sigma(i)}(x) a_{\sigma(i+1)}(x) \dots$$

Pour tout $x \in]10^{-\sigma(i+1)}, 10^{-\sigma(i+1)} + 10^{-\sigma(i)}[$, pour tout $j \in \llbracket 1, i \rrbracket$ et pour tout $n \geq i+2$, on a

$$a_{\sigma(j)}(x) = 0, \quad a_{\sigma(i+1)}(x) = 1 \quad \text{et} \quad a_{\sigma(n)} \leq 9.$$

On récupère :

$$\lim_{x \rightarrow (10^{-\sigma(i+1)})^+} \leq 0, \underbrace{0 \dots 0}_{i \text{ zéros}} 19 \dots = 0, \underbrace{0 \dots 0}_{i \text{ zéros}} 2.$$

Similairement,

$$\lim_{x \rightarrow (10^{-\sigma(i+1)})^-} \geq 0, \underbrace{0 \dots 0}_{k-1 \text{ zéros}} 9$$

car pour tout $x \in]10^{-\sigma(i+1)} - 10^{-\sigma(i)}, 10^{-\sigma(i+1)}[$, pour tout $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ et pour tout $n \geq k+1$,

$$a_{\sigma(j)}(x) = 0, \quad a_{\sigma(k)}(x) = 9 \quad \text{et} \quad a_{\sigma(n)}(x) \leq 0.$$

Comme $k \leq i$, on a $k-1 \leq i$, puis

$$0, \underbrace{0 \dots 0}_{i \text{ zéros}} 2 < 0, \underbrace{0 \dots 0}_{k-1 \text{ zéros}} 9.$$

Les limites de f_σ à gauche et à droite ne sont pas égales, cela contredit la continuité de f_σ sur $[0, 1[$.

On en déduit que $\sigma(i+1) > \sigma(i)$.

22. On a montré que σ est strictement croissante.

23. On suppose qu'il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma(i+1) \neq \sigma(i) + 1$.

Comme σ est injective, par la question 22, σ est strictement croissante de σ , ainsi $\sigma(i+1) > \sigma(i) + 1$.

Nous allons étudier la limite de f_σ à gauche et à droite en

$$10^{-\sigma(i)} + 10 \times 10^{-\sigma(i+1)}.$$

Pour alléger les notations, on pose

$$y_i = 10^{-\sigma(i)} + 10 \times 10^{-\sigma(i+1)}.$$

Comme $\sigma(i+1) > \sigma(i) + 1$, on a $-\sigma(i+1) + 1 < -\sigma(i)$, puis $10 \times 10^{-\sigma(i+1)} < 10^{-\sigma(i)}$. On en déduit :

$$10^{-\sigma(i)} < y_i < 2 \times 10^{-\sigma(i)}. \quad (34.1)$$

En remarquant que l'inégalité $\sigma(i+1) > \sigma(i) + 1$ est équivalente à $\sigma(i+1) \geq \sigma(i) + 2$, on en déduit $10^2 \times 10^{-\sigma(i+1)} \leq 10^{-\sigma(i)}$. Comme $y_i + 10^{-\sigma(i+1)} = 10^{-\sigma(i)} + 11 \times 10^{-\sigma(i)}$, on a

$$y_i + 10^{-\sigma(i+1)} < 10^{-\sigma(i)} + 100 \times 10^{-\sigma(i+1)} \leq 2 \times 10^{-\sigma(i)}. \quad (34.2)$$

De plus, il est clair que

$$10^{-\sigma(i)} \leq y_i - 10^{-\sigma(i+1)}. \quad (34.3)$$

En utilisant (34.1), (34.2), (34.3) et le fait que $a_{\sigma(i+1)}$ est $10^{-\sigma(i+1)+1}$ -périodique et que pour tout $x \in]y_i, y_i + 10^{-\sigma(i+1)}[$, pour tout $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$ et pour tout $n \geq i+2$: on a

$$a_{\sigma(j)}(x) = 0, \quad a_{\sigma(i)} = 1, \quad a_{\sigma(i+1)} = 1 \quad \text{et} \quad a_{\sigma(n)}(x) \leq 9.$$

On en déduit

$$\lim_{x \rightarrow (y_i)^+} f_\sigma(x) \leq 0, \quad \underbrace{0 \dots 0}_{i-1 \text{ zéros}} 1199 \dots = 0, \quad \underbrace{0 \dots 0}_{i-1 \text{ zéros}} 12.$$

En utilisant à nouveau (34.1), (34.2), (34.3) et le fait que $a_{\sigma(i+1)}$ est $10^{-\sigma(i+1)}$ -périodique, pour tout $x \in]y_i - 10^{-\sigma(i+1)}, y_i[$ et pour tout $j \in \llbracket 1, i-1 \rrbracket$, $a_{\sigma(j)}(x) = 0$, $a_{\sigma(i)} = 1$, $a_{\sigma(i+1)} = 9$ et pour tout $n \geq i+2$, $a_{\sigma(n)}(x) \geq 0$, on en déduit

$$\lim_{x \rightarrow (y_i)^-} f_\sigma(x) \geq 0, \quad \underbrace{0 \dots 0}_{i-1 \text{ zéros}} 19.$$

Comme les limites à gauche et à droite sont différentes, on en déduit que l'hypothèse faite n'est pas vraie, ainsi $\sigma(i+1) = \sigma(i) + 1$.

24. Si $\sigma(1) > 1$, alors

$$\forall x \in [0, 1[, \quad f_\sigma(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(n)}(x)}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{\sigma(1)+n-1}(x)}{10^n}.$$

Un changement d'indice donne

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1[, \quad f_\sigma(x) &= 10^{\sigma(1)-1} \left(\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{a_m(x)}{10^m} - \sum_{m=1}^{\sigma(1)-1} \frac{a_m(x)}{10^m} \right) \\ &= 10^{\sigma(1)-1} \left(x - \sum_{m=1}^{\sigma(1)-1} \frac{a_m(x)}{10^m} \right). \end{aligned}$$

Comme la fonction $x \mapsto \sum_{m=1}^{\sigma(1)-1} \frac{a_m(x)}{10^m}$ n'est pas continue sur $[0, 1[$, on en déduit que la fonction f_σ n'est pas continue ce qui contredit notre hypothèse de départ.

On en déduit que $\sigma(1) = 1$.

25. Les questions 20, 21, 22, 23 et 24 assurent que si f_σ est continue sur $[0, 1[$, alors $\sigma = \text{id}_{\mathbb{N}^*}$.

La réciproque est claire : si $\sigma = \text{id}_{\mathbb{N}^*}$, alors $f_\sigma = \text{id}_{[0,1[}$, donc est continue sur $[0, 1[$.

On a bien montré que f_σ est continue sur $[0, 1[$ si, et seulement si $\sigma = \text{id}_{\mathbb{N}^*}$.

Thème 35

Inégalités de Wirtinger

Thèmes abordés : Calcul intégral, produit scalaire, projection orthogonale, série.

Difficulté : ■■■■□

Le but de ce problème est d'établir l'inégalité de Wirtinger avec une constante optimale grâce à une méthode utilisant la projection orthogonale.

Les deux parties du sujet sont largement indépendantes.

On admet et on pourra utiliser librement le résultat suivant :

Théorème. *Théorème de Weierstrass trigonométrique.*

Pour toute fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ continue, impaire et 2-périodique telle que $f(1) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbf{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tels que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \sin(k\pi x) \right| \leq \varepsilon.$$

35.1 Inégalité de Wirtinger

Le but de cette partie est de montrer l'inégalité de Wirtinger.

Proposition. *Inégalité de Wirtinger L^1 .*

Pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur telle que $f(0) = f(1) = 0$, on a :

$$\int_0^1 |f'(t)| dt \geq \int_0^1 |f(t)| dt. \quad (35.1)$$

Nous prouvons la proposition.

1. Justifier que l'on peut écrire

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \int_0^x f'(t) dt.$$

2. Terminer la preuve de l'inégalité de Wirtinger L^1 .

Nous allons montrer la corollaire suivant.

Corollaire. *Inégalité de Wirtinger L^2 .*

Pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$, on a :

$$\sqrt{\int_0^1 f'^2(t) dt} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}. \quad (35.2)$$

Nous prouvons le corollaire.

3. Montrer que l'on a :

$$\int_0^1 2|f(t)f'(t)| dt \geq \int_0^1 f^2(t) dt.$$

4. En déduire

$$2 \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt \int_0^1 f'^2(t) dt} \geq \int_0^1 f^2(t) dt.$$

5. Terminer la preuve de l'inégalité de Wirtinger L^2 .

L'inégalité (35.2) n'est pas optimale : la constante $\frac{1}{2}$ peut être améliorée.

35.2 Inégalité de Wirtinger optimale

Le but de cette partie est de montrer la proposition suivante :

Proposition. *Inégalité optimale de Wirtinger L^2 .*

Pour tout fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et telle que $f(0) = f(1) = 0$, on a :

$$\sqrt{\int_0^1 f'^2(t) dt} \geq \pi \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}.$$

35.2.1 Questions préliminaires

Soit $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}) \text{ impaire, 2-périodique et } f(1) = 0\}$.

6. Vérifier que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{E}^2, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

est un produit scalaire sur \mathcal{E} . On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée.

Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on note f_k la fonction définie sur \mathbf{R} par

$$f_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x).$$

7. Montrer que la famille $(f_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ est une famille orthonormée de \mathcal{E} pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

35.2.2 Une brève introduction aux séries de Fourier

Définition. *Coefficients de Fourier.*

- Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$F_n = \text{Vect}(f_1, \dots, f_n).$$

- Pour tout $f \in \mathcal{E}$, on note $p_n(f)$ la projection orthogonale de f sur F_n (parallèlement à F_n^\perp). Ainsi, on a :

$$p_n(f) = \sum_{k=1}^n b_k(f) f_k.$$

La suite $(b_n(f))_{n \in \mathbf{N}^*}$ s'appelle les *coefficients de Fourier* de f .

8. Montrer que : pour tout $f \in \mathcal{E}$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 f(t) \sin(n\pi t) dt = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t) dt.$$

9. Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{E}, \forall n \in \mathbf{N}^*, \forall g \in F_n, \quad \|f - p_n(f)\|_2 \leq \|f - g\|_2.$$

10. En déduire que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - p_n(f)\|_2 = 0.$$

11. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n(f)^2$ converge.

12. Soit $f \in \mathcal{E}$. Montrer que l'égalité suivante dite de Parseval

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^2(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)^2.$$

13. (a) Montrer que

$$\forall (f, g) \in \mathcal{E}^2, \quad \langle f, g \rangle = \frac{1}{2} (\|f + g\|_2^2 - \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2).$$

- (b) En déduire que si $(f, g) \in \mathcal{E}^2$, alors la série $\sum_{n \geq 1} b_n(f) b_n(g)$ converge et

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) b_n(g).$$

35.2.3 Retour sur l'inégalité de Wirtinger L^2

Soient

$$\mathcal{E}^1 = \left\{ f \in \mathcal{E}, f|_{[-1,1]} \in \mathcal{C}^1([-1,1]) \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}' = \left\{ f \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}^2(\mathbf{R}), f'' \in \mathcal{E} \right\}.$$

14. Pour $f \in \mathcal{E}'$ et $n \in \mathbf{N}^*$, exprimer $b_n(f'')$ en fonction de $b_n(f)$.

15. Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{E}', \quad \int_{-1}^1 f'^2(t) dt \geq \pi^2 \int_{-1}^1 f^2(t) dt.$$

16. Traiter le cas d'égalité.

On admet que l'inégalité de la question 15 reste valable pour $f \in \mathcal{E}^1$, ainsi

$$\forall f \in \mathcal{E}^1, \quad \int_{-1}^1 f'^2(t) dt \geq \pi^2 \int_{-1}^1 f^2(t) dt.$$

17. (a) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$. Soit \tilde{f} la fonction impaire, 2-périodique telle que pour tout $x \in [0, 1]$, $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Montrer que \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$.

(b) Terminer la preuve de la proposition *Inégalité optimale de Wirtinger L^2* .

18. Montrer que pour toute fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ de classe \mathcal{C}^1 vérifiant $f(0) = f(1) = 0$, on a :

$$\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 |f(t)|^2 dt.$$

Correction du Thème 35

1. Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[0, 1]$ et comme $f(0) = 0$, on a bien

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) = \int_0^x f'(t) dt.$$

2. En utilisant l'égalité établie à la question 1, on a

$$\forall x \in [0, 1], \quad |f(x)| = \left| \int_0^x f'(t) dt \right| \leq \int_0^x |f'(t)| dt \leq \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(t)| dt \right) dx = \int_0^1 |f'(t)| dt.$$

3. Soit $g = f^2$. De toute évidence, g est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ et $g(0) = g(1) = 0$. D'après l'inégalité de Wirtinger établie à la question 2, on a :

$$\int_0^1 |g'(t)| dt \geq \int_0^1 |g(t)| dt.$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$, $g'(t) = 2f(t)f'(t)$. On a montré que

$$\int_0^1 2|f(t)f'(t)| dt \geq \int_0^1 f^2(t) dt.$$

4. On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales, on a

$$\int_0^1 |f(t)||f'(t)| dt \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt} \sqrt{\int_0^1 f'^2(t) dt}.$$

En utilisant cette inégalité avec celle établie à la question 3, on obtient

$$2 \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt} \sqrt{\int_0^1 f'^2(t) dt} \geq \int_0^1 f^2(t) dt.$$

5. • Si $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$, alors il est clair que

$$\sqrt{\int_0^1 f'^2(t) dt} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}.$$

Dans ce cas, l'inégalité de Wirtinger est évidente.

- On suppose maintenant $\int_0^1 f^2(t) dt \neq 0$.

En divisant par $2\sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt} > 0$ l'inégalité obtenue à la question 4, on obtient

$$\sqrt{\int_0^1 f'^2(t) dt} \geq \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^1 f^2(t) dt}.$$

Remarque. L'hypothèse $f(1) = 0$ n'a pas servi dans la correction des questions 1, 2, 3, 4 et 5. On comprendra plus loin son utilité.

6. On vérifie les points qui constituent la définition d'un produit scalaire.

- *Symétrie*

Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^2$. On a :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 g(t) f(t) dt = \langle g, f \rangle.$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.

- *Linéarité par rapport à la première variable*

Soit $(f_1, f_2, g) \in \mathcal{E}^3$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle f_1 + \lambda f_2, g \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (f_1(t) + \lambda f_2(t)) g(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_1(t) g(t) dt + \lambda \times \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_2(t) g(t) dt \\ &= \langle f_1, g \rangle + \lambda \langle f_2, g \rangle. \end{aligned}$$

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable. Par symétrie, elle est linéaire par rapport à la seconde variable.

- *Définie positive*

Soit $f \in \mathcal{E}$ telle que $\langle f, f \rangle = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^2(t) dt = 0$.

Comme f est continue sur $[-1, 1]$, on récupère que pour tout $t \in [-1, 1]$, $f(t) = 0$.

Par 2-périodicité, il s'ensuit que f est la fonction nulle.

On a montré que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur \mathcal{E} .

7. Il est clair que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f_k \in \mathcal{E}$.

- Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i \neq j$. On a :

$$\begin{aligned} \langle f_i, f_j \rangle &= \int_{-1}^1 \sin(i\pi x) \sin(j\pi x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\cos((i-j)\pi x) - \cos((i+j)\pi x)) dx. \end{aligned}$$

Les fonctions $x \mapsto \cos((i-j)\pi x)$ et $x \mapsto \cos((i+j)\pi x)$ sont 2-périodiques et ont chacune une primitive 2-périodique (car $i \neq j$), ainsi

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 (\cos((i-j)\pi x) - \cos((i+j)\pi x)) dx = 0.$$

On a montré que la famille $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthogonale.

- De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\langle f_k, f_k \rangle = \int_{-1}^1 \sin^2(k\pi x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1 - \cos(2k\pi x)) dx = 1$$

car $\int_{-1}^1 \cos(2k\pi x) dx = 0$. La famille $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est constituée de vecteurs dont la norme vaut 1.

On a montré que la famille $(f_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée de \mathcal{E} .

8. Soit $f \in \mathcal{E}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme (f_1, \dots, f_n) est une base orthonormée de F_n , on a

$$p_n(f) = \sum_{k=1}^n \langle f, f_k \rangle f_k = \sum_{k=1}^n b_k(f) f_k.$$

Comme la famille (f_1, \dots, f_n) est libre car c'est une famille constituée de vecteurs non nuls et deux à deux orthogonaux, on en déduit que

$$b_n(f) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) \sqrt{2} \sin(nt) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 f(t) \sin(n\pi t) dt.$$

En utilisant la parité de la fonction $t \mapsto f(t) \sin(nt)$, on a aussi

$$b_n(f) = \sqrt{2} \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t) dt.$$

9. C'est du cours de MPSI : la projection orthogonal d'un élément sur un espace vectoriel minimise la distance de d'un élément à cet espace vectoriel. Ainsi, si l'on se donne $n \in \mathbf{N}^*$ et $f \in \mathcal{E}$, comme $p_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur F_n , on a

$$\forall g \in F_n, \quad \|f - p_n(f)\|_2 \leq \|f - g\|_2.$$

10. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a $F_n \subset F_{n+1}$, donc

$$\|f - p_{n+1}(f)\|_2 \leq \|f - p_n(f)\|_2.$$

La suite $(\|f - p_n(f)\|_2)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le *Théorème de Weierstrass trigonométrique* énoncé en tête, il existe $n_0 \in \mathbf{N}^*$ et $(a_0, \dots, a_{n_0}) \in \mathbf{R}^{n_0+1}$ tels que :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n_0} a_k \sin(k\pi x) \right| \leq \varepsilon.$$

On pose $P(x) = \sum_{k=0}^{n_0} a_k \sin(k\pi x)$. On a donc

$$\begin{aligned} \|f - P\|_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\int_{-1}^1 (f(t) - P(t))^2 dt} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\int_{-1}^1 \varepsilon^2 dt} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En utilisant la décroissance de la suite $(\|f - p_n(f)\|_2)_{n \in \mathbf{N}^*}$, on en déduit

$$\forall n \geq n_0, \quad \|f - p_n(f)\|_2 \leq \varepsilon.$$

On a montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - p_n(f)\|_2 = 0.$$

11. Comme la famille $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une famille orthonormée (question 7), ainsi pour $N \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\|p_N(f)\|_2 = \left\| \sum_{n=1}^N b_n(f) f_n \right\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^N b_n(f)^2}.$$

De plus, comme $\|\cdot\|_2$ est une norme, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\forall N \in \mathbf{N}^*, \quad \|p_N(f)\|_2 \leq \|p_N(f) - f\|_2 + \|f\|_2.$$

Comme la suite $(\|p_N(f) - f\|_2)_{N \in \mathbf{N}^*}$ converge (question 10), elle est donc majorée.

Il s'ensuit que la suite $\left(\sum_{n=1}^N b_n(f)^2\right)_{N \in \mathbf{N}^*}$ est majorée : comme la série $\sum_{n \geq 1} b_n(f)^2$ est une série à termes positifs : elle converge.

12. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\|f - p_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|p_n(f)\|_2^2 - 2\langle f, p_n(f) \rangle. \quad (35.3)$$

De plus, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} |\langle f, p_n(f) \rangle - \langle f, f \rangle| &= |\langle f - p_n(f), p_n(f) \rangle| \\ &\leq \|f - p_n(f)\|_2 \|f\|_2. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - p_n(f)\|_2 = 0$ (question 10), on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle f, p_n(f) \rangle = \langle f, f \rangle.$$

Enfin, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\|p_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=1}^n b_k(f)^2$, puis comme la série $\sum_{k \geq 1} b_k(f)^2$ converge (question 11), on récupère

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|p_n(f)\|_2^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)^2.$$

Finalement en passant à la limite dans la ligne (35.3), on a

$$\|f\|_2^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)^2 - 2\langle f, f \rangle = 0,$$

soit

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^2(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)^2.$$

13. (a) Soient $(f, g) \in \mathcal{E}$. On développe $\|f + g\|_2^2$. On a :

$$\|f + g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 + 2 \langle f, g \rangle.$$

On a donc

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} (\|f + g\|_2^2 - \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2).$$

- (b) Soit $(f, g) \in \mathcal{E}^2$. D'après la question 13 (a), on a

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2} (\|f + g\|_2^2 - \|f\|_2^2 - \|g\|_2^2).$$

La linéarité de l'intégrale donne : pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$b_n(f + g) = b_n(f) + b_n(g).$$

Ainsi, en utilisant la question 12, en développant le carré et en utilisant la linéarité, on a :

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n(f) + b_n(g))^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)^2 - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(g)^2 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) b_n(g). \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) b_n(g).$$

14. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On prend une expression de $b_n(f)$ obtenue à la question 8.

Les fonctions f et $t \mapsto -\frac{1}{n\pi} \cos(n\pi t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[0, 1]$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(t) \sin(n\pi t) dt &= \left[f(t) \frac{\cos(n\pi t)}{n\pi} \right]_0^1 + \frac{1}{n\pi} \int_0^1 f'(t) \cos(n\pi t) dt \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^1 f'(t) \cos(n\pi t) dt, \end{aligned}$$

car $f(0) = 0$ (f est impaire) et $f(1) = 0$.

Les fonctions f' et $t \mapsto \frac{1}{n\pi} \sin(n\pi t)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur le segment $[0, 1]$, une seconde intégration par parties donne

$$\int_0^1 f(t) \sin(nt) dt = -\frac{1}{n^2\pi^2} \int_0^1 f''(t) \sin(nt) dt.$$

On a montré que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad b_n(f) = -\frac{1}{n^2\pi^2} b_n(f'').$$

15. La fonction f' est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$, une intégration par parties (f est de classe \mathcal{C}^2 sur le segment $[-1, 1]$) montre que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f'^2(t) dt &= -[f''(t)f'(t)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 f(t)f''(t) dt \\ &= -\int_{-1}^1 f(t)f''(t) dt. \end{aligned}$$

Or, d'après les question 13 (b) et 14, on a

$$-\int_{-1}^1 f(t)f''(t) dt = -2 \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)b_n(f'') = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n(f)^2.$$

Mais, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $n^2 b_n(f)^2 \geq b_n(f)^2$, ainsi

$$\int_{-1}^1 f'^2(t) dt \geq \pi^2 2 \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)^2.$$

Puis en utilisant à nouveau le résultat de la question 12, on a

$$\int_{-1}^1 f'^2(t) dt \geq \pi^2 \int_{-1}^1 f^2(t) dt.$$

16. Soit $f \in \mathcal{E}'$ qui réalise l'égalité dans l'inégalité établie à la question 15 (on note que la fonction nulle vérifie l'égalité, donc l'ensemble des fonctions de \mathcal{E}' réalisant l'égalité n'est pas vide). Les calculs de la question 15 montrent que

$$\int_{-1}^1 f'^2(t) dt = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n(f)^2$$

et

$$\int_{-1}^1 f^2(t) dt = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)^2.$$

On en déduit

$$2\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 b_n(f)^2 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f)^2 \iff \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - 1) b_n(f)^2 = 0.$$

On récupère que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2, \quad b_n(f) = 0.$$

Soit $g = f - b_1(f) f_1 \in \mathcal{E}'$. On commence par calculer $b_n(g)$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ en utilisant une expression obtenue à la question 8.

- Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} b_1(g) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 g(t) \sin(\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (f(t) - b_1(f) f_1(t)) f_1(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) f_1(t) dt - \frac{1}{2} b_1(f) \int_{-1}^1 f_1(t)^2 dt. \end{aligned}$$

Or, la famille $(f_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une famille orthonormée de \mathcal{E} , donc

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f_1(t)^2 dt = 1. \text{ De plus,}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 f(t) \sin(\pi t) dt = b_1(f).$$

On en déduit $b_1(g) = 0$.

- Soit $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 2$. On a

$$\begin{aligned} b_n(g) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 g(t) \sin(n\pi t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (f(t) - b_1(f) f_1(t)) f_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) f_n(t) dt - \frac{1}{2} b_1(f) \int_{-1}^1 f_1(t) f_n(t) dt. \end{aligned}$$

Comme $b_n(f) = 0$, on en déduit que $\int_{-1}^1 f(t) f_n(t) dt = 0$. De plus, f_1 et f_n sont orthogonaux dans \mathcal{E} pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on en déduit $\int_{-1}^1 f_1(t) f_n(t) dt = 0$.

Or, $g \in \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}$, donc, d'après la question 12, on a

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 g^2(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(g)^2 = 0.$$

Comme g est continue sur $[-1, 1]$, on en déduit que g est nulle sur $[-1, 1]$.

Il s'ensuit que $f - b_1(f) f_1$ est nulle sur $[-1, 1]$. Comme la fonction $f - b_1(f) f_1$ est 2-périodique, on en déduit que $f - b_1(f) f_1$ est nulle.

On a montré que si f réalise l'égalité dans l'inégalité de la question 15, alors $f \in \text{Vect}(f_1)$.

La réciproque est facile à vérifier : si $f \in \text{Vect}(f_1)$, alors f réalise l'égalité dans l'inégalité de la question 15.

On a montré que les seules fonctions qui réalisent l'égalité dans l'inégalité de la question 15 sont les multiples de la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$.

17. (a) On commence par donner une expression de \tilde{f} sur $[-1, 1]$. Comme \tilde{f} est impaire, on a

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ -f(-x) & \text{si } x \in [-1, 0[\end{cases}.$$

Il est clair que \tilde{f} ainsi définie est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$ car f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$.

Comme

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} f(0) + f'(0)x + o(x),$$

on a

$$\tilde{f}(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{=} f(0) + f'(0)x + o(x).$$

De même,

$$\begin{aligned} -f(-x) &\underset{x \rightarrow 0^-}{=} -(f(0) + f'(0)(-x) + o(x)) \\ &= f'(0)x + o(x), \end{aligned}$$

on a

$$\tilde{f}(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{=} f'(0)x + o(x).$$

On a montré que \tilde{f} est dérivable en 0 et $\tilde{f}'(0) = f'(0)$. Enfin, comme pour tout $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$,

$$\tilde{f}'(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{si } x \in]0, 1] \\ f'(-x) & \text{si } x \in [-1, 0[\end{cases},$$

il est clair que \tilde{f}' est continue en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{f}'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{f}'(x) = \tilde{f}'(0).$$

On a montré que \tilde{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur $[-1, 1]$.

(b) D'après la question 17 (a), $\tilde{f} \in \mathcal{E}^1$, ainsi

$$\int_{-1}^1 \tilde{f}'^2(t) dt \geq \pi^2 \int_{-1}^1 \tilde{f}^2(t) dt.$$

Comme \tilde{f}^2 et \tilde{f}'^2 sont paires (car \tilde{f} est impaire et donc, \tilde{f}' est paire), on en déduit

$$\int_0^1 \tilde{f}'^2(t) dt \geq \pi^2 \int_0^1 \tilde{f}^2(t) dt.$$

Or, d'après la question 17 (a), on a :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \tilde{f}(t) = f(t) \quad \text{et} \quad \tilde{f}'(t) = f'(t),$$

on en déduit donc (en utilisant la croissance de $x \in \mathbf{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$)

$$\sqrt{\int_{-1}^1 f^2(t) dt} \geq \pi \sqrt{\int_{-1}^1 f'^2(t) dt}.$$

18. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$.
Les fonctions $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle $[0, 1]$ et à valeurs réelles et vérifient

$$\Re(f)(0) = \Re(f)(1) = \Im(f)(0) = \Im(f)(1) = 0.$$

D'après l'inégalité Wirtinger, on a

$$\int_0^1 \Re(f)'^2(t) dt \geq \pi^2 \int_0^1 \Re(f)^2(t) dt \tag{35.4}$$

et

$$\int_0^1 \Im(f)'^2(t) dt \geq \pi^2 \int_0^1 \Im(f)^2(t) dt. \tag{35.5}$$

Or, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|f(t)|^2 = \Re(f)^2(t) + \Im(f)^2(t) \quad \text{et} \quad |f'(t)|^2 = \Re(f)'^2(t) + \Im(f)'^2(t),$$

en additionnant ces deux lignes, on en déduit

$$\int_0^1 |f'(t)|^2 dt \geq \pi^2 \int_0^1 |f(t)|^2 dt.$$

Quelques remarques culturelles

Le sujet établit l'inégalité de Wirtinger en utilisant des séries de Fourier. En reprenant les notations du problème, $p_n(f)$ est la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier $\sum_{n \geq 1} b_n(f) f_n$.

La question 10 établit que si f est continue, impaire, 2-périodique telle que $f(0) = f(1) = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|p_n(f) - f\|_2 = 0$. On dit que la série de Fourier converge vers f en **norme 2**.

Les prochaines questions semblent naturelles :

1. A-t-on

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-1, 1]} |p_n(f)(x) - f(x)| = 0 ? \quad (35.6)$$

2. Sinon, pour quelles valeurs de x , a-t-on

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n(x) = f(x) ? \quad (35.7)$$

Une condition suffisante pour avoir (35.6) est de supposer f de classe \mathcal{C}^1 .

On peut montrer qu'il existe (en fait, ces fonctions sont « majoritaires ») des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en au moins un point.

Cependant, pour rester sur une note positive, Carleson a montré en 1966 que la série de Fourier d'une fonction continue converge vers la fonction « presque-partout ».

Thème 36

Réduction des matrices symétriques réelles

Thèmes abordés : Produit scalaire, suite, continuité.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet démontre de manière analytique le théorème spectral qui sera vu en classe de MP.

La première partie introduit la notion de valeur propre et vecteur propre. La seconde partie définit les endomorphismes symétriques. Les parties 3 et 4 servent à montrer le théorème spectral.

36.1 Généralités d'algèbre linéaire

Définitions. *Valeur propre, vecteur propre.*

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$.

- On dit que λ est une *valeur propre* de u si

$$\exists x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0, \quad u(x) = \lambda x.$$

- Un tel vecteur x s'appelle un *vecteur propre* de u associé à la valeur propre λ .
- L'ensemble des valeurs propres de u est appelé le *spectre* de u et est noté $\sigma(u)$.
- Si $\lambda \in \sigma(u)$, l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}^n, u(x) = \lambda x\}$ est appelé *sous-espace propre* de u pour la valeur propre λ et est noté $E_\lambda(u)$.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ dont on suppose le spectre non vide.

1. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$.

- (a) Montrer que $\lambda \in \sigma(u)$ si, et seulement si, $\det(\lambda \text{id}_{\mathbf{R}^n} - u) = 0$.
- (b) Montrer que $\chi_u : \lambda \mapsto \det(\lambda \text{id}_{\mathbf{R}^n} - u)$ est une fonction polynomiale de degré n .
- (c) Montrer que $\sigma(u)$ est fini et que $\text{card}(\sigma(u)) \leq n$.

2. Soit $\lambda \in \sigma(u)$.

- (a) Montrer que $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \text{id}_{\mathbf{R}^n})$. En déduire que $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n .

- (b) Montrer que $E_\lambda(u)$ est stable par u .
3. On suppose $\text{card}(\sigma(u)) \geq 2$. Soient λ et μ deux valeurs propres différentes de u .
Montrer que $E_\lambda(u) + E_\mu(u) = E_\lambda(u) \oplus E_\mu(u)$.

36.2 Endomorphismes symétriques

Dans toute la suite du problème, si $n \in \mathbf{N}^*$, on munit \mathbf{R}^n de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

\mathbf{R}^n muni de ce produit scalaire est donc un espace euclidien.

On note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

4. Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ non vide.
- (a) Montrer que A^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n et que

$$A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp.$$

- (b) Lorsque A est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n , montrer que

$$A \oplus A^\perp = \mathbf{R}^n.$$

- (c) Montrer que

$$\left(A^\perp\right)^\perp = \text{Vect}(A).$$

Définition. *Endomorphisme symétrique.*

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. On dit que u est un endomorphisme *symétrique* si :

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle. \quad (36.1)$$

On note $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de \mathbf{R}^n .

5. Montrer que $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$.
6. Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ et soit F un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n stable par u .
- (a) Montrer que $u|_F \in \mathcal{S}(F)$.
- (b) Montrer que F^\perp est stable par u .
7. On suppose $\text{card}(\sigma(u)) \geq 2$. Soient λ et μ deux valeurs propres de u .
Montrer que $E_\lambda(u) + E_\mu(u) = E_\lambda(u) \oplus^\perp E_\mu(u)$.

36.3 Compacité de la sphère

Définitions. Sphère \mathbf{S}^{n-1} , boule unité \mathcal{B}_n , convergence des suites dans \mathbf{R}^n .

- La sphère unité de \mathbf{R}^n est l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}^n, \|x\| = 1\}$ et est noté \mathbf{S}^{n-1} .
- La boule unité de \mathbf{R}^n est l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}^n, \|x\| \leq 1\}$ et est noté \mathcal{B}_n .
- Soit $(x_m)_{m \in \mathbf{N}} = (x_1(m), \dots, x_n(m))_{m \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de \mathbf{R}^n . On dit que $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ **converge** vers $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ si, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la suite réelle $(x_i(m))_{m \in \mathbf{N}}$ converge vers x_i .

Le but de cette partie est de montrer la proposition suivante.

Proposition. \mathbf{S}^{n-1} est compact.

La sphère \mathbf{S}^{n-1} est compact, i.e. de toute suite de \mathbf{S}^{n-1} , on peut en extraire une sous-suite qui converge dans \mathbf{S}^{n-1} .

8. Montrer que \mathcal{B}_1 est compact.
9. On suppose \mathcal{B}_n compact. Soit $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{B}_{n+1} . Pour tout $m \in \mathbf{N}$, on note

$$x_m = (x_1(m), \dots, x_n(m), x_{n+1}(m)).$$

- (a) Justifier que la suite $(x_1(m), \dots, x_n(m))_{m \in \mathbf{N}}$ est une suite d'éléments \mathcal{B}_n .
 - (b) Montrer que \mathcal{B}_{n+1} est compact. En déduire que \mathcal{B}_n est compact pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
10. Montrer que \mathbf{S}^{n-1} est compact pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

36.4 Théorème spectral

Soit $u \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Soit l'application φ définie sur \mathbf{S}^{n-1} par :

$$\forall x \in \mathbf{S}^{n-1}, \quad \varphi(x) = \langle u(x), x \rangle.$$

On admet que φ est (séquentiellement) continue sur \mathbf{S}^{n-1} , i.e. pour tout $x \in \mathbf{S}^{n-1}$ et pour tout $(x_m)_{m \in \mathbf{N}} \in (\mathbf{S}^{n-1})^{\mathbf{N}}$,

$$((x_m)_{m \in \mathbf{N}} \text{ converge vers } x) \implies ((\varphi(x_m))_{m \in \mathbf{N}} \text{ converge vers } \varphi(x)).$$

11. (a) Montrer que φ est bornée sur \mathbf{S}^{n-1} .
Indication : On pourra s'inspirer de la preuve du théorème de Weierstrass qui dit que, toute fonction à valeurs dans \mathbf{R} continue sur un segment est bornée.
 - (b) Montrer que φ atteint des bornes.
 Soit $x_0 \in \mathbf{S}^{n-1}$ tel que $\varphi(x_0) = \sup_{x \in \mathbf{S}^{n-1}} \varphi(x)$.
12. Soit $x_1 \in \mathbf{S}^{n-1}$ orthogonal à x_0 et soit γ l'application définie sur $]-\pi, \pi[$ par $\gamma(t) = \cos(t)x_0 + \sin(t)x_1$ et soit F définie sur $]-\pi, \pi[$ par $F(t) = \varphi(\gamma(t))$.
 - (a) Montrer que pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, $\gamma(t) \in \mathbf{S}^{n-1}$.

- (b) Montrer que F est dérivable en 0 et exprimer $F'(0)$ en fonction de x_0 et x_1 .
 - (c) Montrer que l'on a aussi $F'(0) = 0$.
 - (d) En déduire qu'il existe un réel λ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$.
13. En utilisant les questions 6 et 7 et un raisonnement par récurrence, montrer qu'il existe r réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que

$$\mathbf{R}^n = E_{\lambda_1}(u) \oplus^\perp E_{\lambda_2}(u) \oplus^\perp \dots \oplus^\perp E_{\lambda_r}(u).$$

Correction du Thème 36

1. (a) On a

$$\begin{aligned}\lambda \in \sigma(u) &\iff \exists x \in \mathbf{R}^n \ x \neq 0, \ u(x) = \lambda x \\ &\iff \ker(\lambda \operatorname{id}_{\mathbf{R}^n} - u) \neq \{0\} \\ &\iff \det(\lambda \operatorname{id}_{\mathbf{R}^n} - u) = 0.\end{aligned}$$

On a montré que $\lambda \in \sigma(u)$ si, et seulement si, $\det(\lambda \operatorname{id}_{\mathbf{R}^n} - u) = 0$.

(b) Soit $U = (u_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ la matrice de u dans une base \mathcal{B} de \mathbf{R}^n . On a donc

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \chi_u(\lambda) = \det(\lambda I_n - U).$$

Comme $I_n = (\delta_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$, avec $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Ainsi,

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad \chi_u(\lambda) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\lambda \delta_{i, \sigma(i)} - u_{i, \sigma(i)}).$$

Il s'ensuit que χ_u est une fonction polynomiale de degré au plus n comme somme de fonctions polynomiales de degré au plus n .

- Si $\sigma = \operatorname{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$, alors

$$\prod_{i=1}^n (\lambda \delta_{i, \sigma(i)} - u_{i, \sigma(i)}) = \prod_{i=1}^n (\lambda - u_{i,i})$$

et

$$\lambda \mapsto \prod_{i=1}^n (\lambda - u_{i,i})$$

est une fonction polynomiale de degré n .

- Si $\sigma \neq \operatorname{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$, alors

$$\lambda \mapsto \prod_{i=1}^n (\lambda \delta_{i, \sigma(i)} - u_{i, \sigma(i)})$$

est une application polynomiale de degré au plus $n - 1$ car il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\delta_{j, \sigma(j)} = 0$.

Finalement, χ_u est une fonction polynomiale de degré n comme somme d'une fonction polynomiale de degré de n et la somme de fonctions polynomiales dont le degré est au plus $n - 1$.

On a montré que χ_u est une fonction polynomiale de degré n .

(c) Comme χ_u est une fonction polynomiale de degré $n \geq 1$, χ_u a au plus n racines réelles comptées.

On a montré que $\sigma(u)$ est fini et son cardinal n'excède pas n .

Remarque. Le lecteur attentif remarquera que la notion de spectre d'un endomorphisme dépend de manière cruciale du corps de base de l'espace vectoriel. Si l'on s'autorisait des valeurs propres complexes, le résultat de la question 1 (b) ne serait pas le même.

2. (a) Soit $x \in \mathbf{R}^n$.

$$\begin{aligned} x \in E_\lambda(u) &\iff u(x) = \lambda x \\ &\iff (u - \lambda \text{id}_{\mathbf{R}^n})(x) = 0 \\ &\iff x \in \ker(u - \lambda \text{id}_{\mathbf{R}^n}). \end{aligned}$$

Comme $\ker(u - \lambda \text{id}_{\mathbf{R}^n})$ est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n , il s'ensuit que $E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n .

- (b) Soit $x \in E_\lambda(u)$, on a $u(x) = \lambda x$. En composant cette égalité par u , on a

$$u(u(x)) = u(\lambda x) = \lambda u(x).$$

Il s'ensuit que $u(x) \in E_\lambda(u)$, donc $E_\lambda(u)$ est stable par u .

3. Il suffit de montrer que $E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0\}$.

Soit $x \in E_\lambda(u) \cap E_\mu(u)$, on a donc

$$u(x) = \lambda x = \mu x,$$

d'où

$$(\lambda - \mu)x = 0.$$

Comme $\lambda - \mu \neq 0$, on en déduit que $x = 0$. Ainsi

$$E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0\}.$$

On a montré que $E_\lambda(u) + E_\mu(u) = E_\lambda(u) \oplus E_\mu(u)$.

4. (a) • Clairement $0 \in A^\perp$. Soit $(x, y) \in (A^\perp)^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Pour tout $z \in A$, on a

$$\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle.$$

Or, $x, y \in A^\perp$, donc pour tout $z \in A$, $\langle x, z \rangle = \langle y, z \rangle = 0$, ainsi, pour tout $z \in A$, $\langle x + \lambda y, z \rangle = 0$ et $x + \lambda y \in A^\perp$.

On a montré que A^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^n .

- On prouve les deux inclusions.

\square Soit $x \in A^\perp$. Soit $y \in \text{Vect}(A)$: il existe $n \in \mathbf{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que

$$y = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k.$$

On a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle x, a_k \rangle = 0.$$

Ainsi, $x \in \text{Vect}(A)^\perp$ et $A^\perp \subset \text{Vect}(A)^\perp$.

\square Soit $x \in \text{Vect}(A)^\perp$. Ainsi, pour tout $y \in \text{Vect}(A)$, $\langle x, y \rangle = 0$. Comme $A \subset \text{Vect}(A)$, on en déduit que pour tout $y \in A$, $\langle x, y \rangle = 0$, donc $\text{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$.

On a montré que

$$\boxed{\text{Vect}(A)^\perp = A^\perp.}$$

- (b) • Si $A = \{0\}$, alors on a $A^\perp = \mathbf{R}^n$, donc $\boxed{A \oplus A^\perp = \mathbf{R}^n.}$
- On suppose $A \neq \{0\}$. Soit $x \in A \cap A^\perp$. Pour tout $y \in A$, on a $\langle x, y \rangle = 0$, en particulier pour $y = x$, on a $\langle x, x \rangle = 0$, donc $x = 0$. Soit (e_1, \dots, e_r) une base orthonormée de A (une telle base existe, il suffit d'appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à une base de A) et soit l'application p_A définie sur \mathbf{R}^n par

$$p_A(x) = \sum_{i=1}^r \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Il est clair que $\text{im}(p_A) \subset A$. De plus, pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $p_A(e_j) = e_j$, ainsi $A \subset \text{im}(p_A)$, donc $\text{im}(p_A) = A$.

On a aussi

$$\begin{aligned} x \in \ker(p_A) &\iff \forall i \in \llbracket 1, r \rrbracket, \langle x, e_i \rangle = 0 \\ &\iff \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0 \\ &\iff x \in A^\perp. \end{aligned}$$

Ainsi, $\ker(p_A) = A^\perp$. Par le théorème du rang, on a

$$\dim(A^\perp) + \dim(A) = n.$$

$\boxed{\text{On a montré que } A \oplus A^\perp = \mathbf{R}^n.}$

- (c) Soit $x \in \text{Vect}(A)$. Il existe $m \in \mathbf{N}^*$, $(a_1, \dots, a_m) \in A^m$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^m$ tels que $x = \sum_{k=1}^m \lambda_k a_k$. Pour tout $y \in A^\perp$, on a

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^m \lambda_k \langle a_k, y \rangle = 0,$$

ainsi, $x \in (A^\perp)^\perp$ et $\text{Vect}(A) \subset (A^\perp)^\perp$.

La question 4 (b) assure que $\text{Vect}(A) \oplus \text{Vect}(A)^\perp = \mathbf{R}^n$ et en utilisant la question 4 (a), on a

$$\text{Vect}(A) \oplus A^\perp = \mathbf{R}^n.$$

On en déduit

$$\dim(A^\perp) + \dim(\text{Vect}(A)) = \dim(E). \quad (36.2)$$

La question 4 (b) donne aussi

$$A^\perp \oplus (A^\perp)^\perp = \mathbf{R}^n$$

et

$$\dim(A^\perp) + \dim\left((A^\perp)^\perp\right) = \dim(E). \quad (36.3)$$

De (36.2) et (36.3), on en déduit que

$$\dim(\text{Vect}(A)) = \dim\left((A^\perp)^\perp\right).$$

On a montré que $\text{Vect}(A) \subset (A^\perp)^\perp$ et

$$\dim(\text{Vect}(A)) = \dim\left((A^\perp)^\perp\right),$$

ainsi

$$\boxed{\text{Vect}(A) = (A^\perp)^\perp.}$$

5. L'endomorphisme nul est clairement symétrique.

Soit $(u, v) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2$. On a

$$\langle (u + \lambda v)(x), y \rangle = \langle u(x) + \lambda v(x), y \rangle = \langle u(x), y \rangle + \lambda \langle v(x), y \rangle.$$

Comme u et v sont des endomorphisme symétriques, on a

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle \quad \text{et} \quad \langle v(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle.$$

On en déduit

$$\langle (u + \lambda v)(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle + \lambda \langle x, v(y) \rangle = \langle x, (u + \lambda v)(y) \rangle.$$

L'endomorphisme $u + \lambda v$ est donc symétrique.

$\boxed{\text{On a montré que } \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(\mathbf{R}^n).}$

6. (a) Comme F est stable par u , $u|_F \in \mathcal{L}(F)$.

Comme u est symétrique, on a

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

En particulier,

$$\forall (x, y) \in F^2, \quad \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

$\boxed{\text{On a montré que } u|_F \in \mathcal{S}(F).}$

(b) Soit $x \in F^\perp$. Comme u est symétrique, pour tout $y \in F$, on a

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

Or, F est stable par u , donc pour tout $y \in F$, $u(y) \in F$ et $\langle x, u(y) \rangle = 0$.

Ainsi, pour tout $y \in F$, $\langle u(x), y \rangle = 0$, ainsi $u(x) \in F^\perp$.

On a montré que F^\perp est stable par u .

7. D'après la question 3, on a $E_\lambda(u) + E_\mu(u) = E_\lambda(u) \oplus E_\mu(u)$.

Soit $(x, y) \in E_\lambda(u) \times E_\mu(u)$.

D'une part, on a $\langle u(x), y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ et d'autre part, en utilisant la symétrie de u , on a

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

On en déduit

$$\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle \iff (\lambda - \mu) \langle x, y \rangle = 0.$$

Comme $\lambda - \mu \neq 0$, on en déduit que $\lambda \langle x, y \rangle = 0$. Ainsi, $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

On a montré que $E_\lambda(u) + E_\mu(u) = E_\lambda(u) \oplus^\perp E_\mu(u)$.

8. On a $\mathcal{B}_1 = [-1, 1]$. Soit $(x_1(m))_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathcal{B}_1 .

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, de toute suite de \mathcal{B}_1 , on peut extraire une sous-suite qui converge. Soit φ une extractrice et ℓ la limite de la suite $(x_1(m))_{m \in \mathbb{N}}$.

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $-1 \leq x_1(m) \leq 1$, en faisant tendre m vers $+\infty$, on en déduit que $-1 \leq \ell \leq 1$.

On peut extraire de $(x_1(m))_{m \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers un élément de \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_1 est compact.

9. (a) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n+1} x_i(m)^2 \geq \sum_{i=1}^n x_i(m)^2.$$

On a montré que la suite $(x_1(m), \dots, x_n(m))_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{B}_n .

(b) D'après la question 9 (a), la suite $(x_1(m), \dots, x_n(m))_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{B}_n . Par hypothèse de récurrence, \mathcal{B}_n étant compact, on peut extraire de la suite

$$((x_1(m), \dots, x_n(m)))_{m \in \mathbb{N}}$$

une sous-suite qui converge vers un élément de \mathcal{B}_n . Soit φ une extractrice. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n+1} x_i(\varphi(m))^2 \geq x_{n+1}(\varphi(m))^2 \geq 0,$$

ainsi la suite $(x_{n+1}(\varphi(m)))_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{B}_1 qui est compact d'après la question 8 : on peut extraire de $(x_{n+1}(\varphi(m)))_{m \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers un élément de \mathcal{B}_1 . Soit ψ une extractrice : la suite $(x_{n+1}((\varphi \circ \psi)(m)))_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $x_{n+1} \in \mathcal{B}_1$.

Comme la suite $((x_1(\varphi(m)), \dots, x_n(\varphi(m))))_{m \in \mathbb{N}}$ converge, il s'ensuit que la suite $((x_1((\varphi \circ \psi)(m)), \dots, x_n((\varphi \circ \psi)(m))))_{m \in \mathbb{N}}$ converge encore vers (x_1, \dots, x_n) .

Donc, la suite

$$((x_1((\varphi \circ \psi)(m)), \dots, x_{n+1}((\varphi \circ \psi)(m))))_{m \in \mathbb{N}}$$

converge vers

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}).$$

De plus,

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad 1 \geq \sum_{i=1}^{n+1} x_i((\varphi \circ \psi)(m))^2,$$

d'où, en faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient

$$1 \geq \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2,$$

ainsi $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{B}_{n+1}$.

On a montré que \mathcal{B}_{n+1} est compact.

On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{B}_n est compact.

10. Soit $((x_1(m), \dots, x_n(m)))_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de \mathbf{S}^{n-1} .

À fortiori, la suite $((x_1(m), \dots, x_n(m)))_{m \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de \mathcal{B}_n . D'après la question 9 (b), on peut en extraire une sous-suite qui converge : soit φ une extractrice et (x_1, \dots, x_n) la limite de la suite

$$((x_1(\varphi(m)), \dots, x_n(\varphi(m))))_{m \in \mathbb{N}}.$$

Or, tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^n x_i(\varphi(m))^2 = 1$, en faisant tendre m vers $+\infty$, on en déduit

que $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$.

On a montré que l'on peut extraire de la suite $(x_1(m), \dots, x_n(m))_{m \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge vers un élément de \mathbf{S}^{n-1} : cela prouve que

\mathbf{S}^{n-1} est compact.

11. (a) Supposons φ non majorée sur \mathbf{S}^{n-1} : il existe une suite $(x_m)_{m \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathbf{S}^{n-1} telle que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \varphi(x_m) = +\infty.$$

Or, d'après la question 10, \mathbf{S}^{n-1} est compact, donc on peut extraire de la suite $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une sous-suite qui converge vers un élément de \mathbf{S}^{n-1} : soit ψ une extractrice et x_a la limite de la suite $(x_{\psi(m)})_{m \in \mathbf{N}}$.

Par continuité de φ en x_a , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_{\psi(m)}) = \varphi(x_a).$$

Cela contredit le fait que la suite $(\varphi(x_{\psi(m)}))_{m \in \mathbf{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Un raisonnement analogue montre que φ est minorée sur \mathbf{S}^{n-1} .

On a montré que φ est bornée sur \mathbf{S}^{n-1} .

(b) D'après la question 11 (a), φ est bornée sur \mathbf{S}^{n-1} : soit

$$a = \inf_{x \in \mathbf{S}^{n-1}} \varphi(x) \quad \text{et} \quad A = \sup_{x \in \mathbf{S}^{n-1}} \varphi(x).$$

Il existe une suite $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ d'éléments de \mathbf{S}^{n-1} telle que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \varphi(x_m) = a.$$

Or, d'après la question 10, \mathbf{S}^{n-1} est compact, donc on peut extraire de la suite $(x_m)_{m \in \mathbf{N}}$ une sous-suite qui converge vers un élément de \mathbf{S}^{n-1} : soit ψ une extractrice et x_a la limite de la suite $(x_{\psi(m)})_{m \in \mathbf{N}}$.

Par continuité de φ en y , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_{\psi(m)}) = \varphi(x_a) = a.$$

On en déduit qu'il existe $x_a \in \mathbf{S}^{n-1}$ tel que $\varphi(x_a) = a$.

On montre de même qu'il existe $x_A \in \mathbf{S}^{n-1}$ tel que $\varphi(x_A) = A$.

On a montré que φ atteint ses bornes sur \mathbf{S}^{n-1} .

12. (a) Comme x_0 et x_1 sont orthogonaux et unitaires (de norme 1), par le théorème de Pythagore, on a

$$\begin{aligned} \forall t \in]-\pi, \pi[, \quad \|\gamma(t)\|^2 &= \|\cos(t)x_0 + \sin(t)x_1\|^2 \\ &= \cos^2(t)\|x_0\|^2 + \sin^2(t)\|x_1\|^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

On a montré que pour tout $t \in]-\pi, \pi[, \gamma(t) \in \mathbf{S}^{n-1}$.

- (b) Pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, en utilisant la linéarité de u , la bilinéarité du produit scalaire et $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$, on a :

$$\begin{aligned} F(t) &= \langle u(\cos(t)u_0 + \sin(t)x_1), \cos(t)x_0 + \sin(t)x_1 \rangle \\ &= \langle \cos(t)u(u_0) + \sin(t)u(x_1), \cos(t)x_0 + \sin(t)x_1 \rangle \\ &= \cos^2(t)\langle x_0, u(x_0) \rangle + \cos(t)\sin(t)(\langle u(x_1), x_0 \rangle \\ &\quad + \langle x_1, u(x_0) \rangle) + \sin^2(t)\langle u(x_1), x_1 \rangle \\ &= \cos^2(t)F(0) + 2\cos(t)\sin(t)\langle x_1, u(x_0) \rangle \\ &\quad + \sin^2(t)\langle u(x_1), x_1 \rangle. \end{aligned}$$

Or,

$$\cos^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + o(t),$$

$$\begin{aligned} 2\cos(t)\sin(t) &\underset{t \rightarrow 0}{=} 2(1 + o(t))(t + o(t)) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} 2t + o(t) \end{aligned}$$

et

$$\sin^2(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o(t).$$

Il s'ensuit que

$$F(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} F(0) + 2\langle x_1, u(x_0) \rangle t + o(t).$$

F admet un développement limité à l'ordre 1 en 0, donc F est dérivable en 0 et $F'(0) = 2\langle x_1, u(x_0) \rangle$.

- (c) Par définition de x_0 , pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, on a $F(t) \leq F(0)$. Ainsi, F admet un maximum en 0 et est définie sur un intervalle ouvert autour de 0, il s'ensuit que $F'(0) = 0$.
- (d) Les résultats établis aux questions 12 (b) et 12 (c) montrent que

$$\forall x_1 \in \{x_0\}^\perp, \quad \langle u(x_0), x_1 \rangle = 0.$$

D'après la question 4 (c), il s'ensuit que

$$u(x_0) \in \left(\{x_0\}^\perp\right)^\perp = \text{Vect}(x_0),$$

on en déduit que $u(x_0)$ sont colinéaires.

On a montré qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$.

13. Le résultat est clair en dimension 1.

Soit $n \geq 2$. On suppose que pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^k)$ symétrique, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que

$$\mathbf{R}^k = E_{\lambda_1}(u) \oplus^\perp E_{\lambda_2}(u) \oplus^\perp \dots \oplus^\perp E_{\lambda_r}(u).$$

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$. D'après la question 12 (d), il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $E_\lambda(u) \neq \{0\}$.

D'après la question 2 (b), $E_\lambda(u)$ est stable par u et

$$\mathbf{R}^n = E_\lambda(u) \oplus E_\lambda(u)^\perp.$$

Par la question 6 (b), $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u et $u|_{E_\lambda(u)^\perp}$ est un endomorphisme symétrique de $E_\lambda(u)^\perp$.

Comme $\dim(E_\lambda(u)^\perp) < n$ et comme il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $E_\lambda(u)^\perp$ et un certain \mathbf{R}^k avec $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ (car $\dim(E_\lambda(u)) \geq 1$), par hypothèse de récurrence il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ tels que

$$E_\lambda(u)^\perp = \widetilde{E}_{\lambda_1}(u) \oplus^\perp \dots \oplus^\perp \widetilde{E}_{\lambda_\ell}(u)$$

où pour tout $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$,

$$\widetilde{E}_{\lambda_i}(u) = \ker(u|_{E_\lambda(u)^\perp} - \lambda_i \text{id}_{E_\lambda(u)^\perp}).$$

Or, pour tout $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$,

$$\ker(u|_{E_\lambda(u)^\perp} - \lambda_i \text{id}_{E_\lambda(u)^\perp}) = \ker(u - \lambda_i \text{id}_{\mathbf{R}^n}) = E_{\lambda_i}(u).$$

On a montré que

$$\mathbf{R}^n = E_\lambda(u) \oplus^\perp E_\lambda(u)^\perp = E_\lambda(u) \oplus^\perp E_{\lambda_1}(u) \oplus^\perp \dots \oplus^\perp E_{\lambda_\ell}(u).$$

Le résultat est vrai dans \mathbf{R}^n .

Par le principe de raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n , pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$, il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ tels que

$$\mathbf{R}^n = E_{\lambda_1}(u) \oplus^\perp E_{\lambda_2}(u) \oplus^\perp \dots \oplus^\perp E_{\lambda_r}(u).$$

Thème 37

Sur les quaternions

Thèmes abordés : Matrice orthogonale, structure algébrique, application linéaire.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet introduit les quaternions comme un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On y étudie les propriétés principales et on montre que la conjugaison peut être vue comme une rotation de \mathbb{R}^3 .

Une bonne connaissance du cours sur les matrices orthogonales est nécessaire pour aborder la première partie.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes. Les résultats de la partie 3 servent dans la partie 4.

37.1 Description du groupe orthogonal en dimension 2

Dans cette partie, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^2 .

Définition. *Groupe orthogonal en dimension 2.*

On note

$$\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \left\{ u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2), \forall (x, y) \in (\mathbb{R}^2)^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \right\}.$$

Soit (e_1, e_2) la base orthonormée usuelle de \mathbb{R}^2 . Soit $u \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $(u(e_1), u(e_2))$ est une base orthonormée de \mathbb{R}^2 .
2. En déduire que l'angle $(u(e_1), u(e_2))$ est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π .
3. En discutant suivant que l'angle $(u(e_1), u(e_2))$ est congru à $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ modulo 2π , montrer que la matrice de u est dans la base (e_1, e_2)

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$.

37.2 Description du groupe orthogonal en dimension 3

Dans cette partie, on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique de \mathbf{R}^3 .

37.2.1 Définitions

Définition. *Groupe orthogonal en dimension 3.*

On note

$$\mathcal{O}_3(\mathbf{R}) = \left\{ u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3), \forall (x, y) \in (\mathbf{R}^3)^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \right\}.$$

4. Montrer que $\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}\ell(\mathbf{R}^3)$.

Définition. *Groupe spécial orthogonal.*

On définit $\mathcal{SO}_3(\mathbf{R})$ par $\{u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R}), \det(u) = 1\}$.

5. Montrer que $\mathcal{SO}_3(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$.

37.2.2 Propriétés

6. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$. Montrer que $u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, $\|u(x)\| = \|x\|$.

7. Montrer que si $u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$, il existe $\lambda \in \{-1, 1\}$ et $x \in \mathbf{R}^3$ avec $x \neq 0$ tels que $u(x) = \lambda x$.

Indication : On pourra considérer l'application $f : x \mapsto \det(x \operatorname{id}_{\mathbf{R}^3} - u)$ et montrer que f est une application polynomiale de degré 3.

8. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^3 stable par $u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$, alors F^\perp est stable par u .

37.2.3 Matrice d'une isométrie dans une « bonne » base

Proposition. *Description de $\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$.*

Soit $u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$. Il existe une base orthonormée de \mathbf{R}^3 telle que la matrice de u soit

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Nous prouvons la proposition. Soit $u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$.

9. Prouver la proposition lorsque $u \in \mathcal{SO}_3(\mathbf{R})$.

Indication : On pourra utiliser les questions 1, 2, 3, 7 et 8.

10. Prouver la proposition lorsque $u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{SO}_3(\mathbf{R})$.

Indication : On pourra se ramener à la question 9.

37.3 Construction du corps des quaternions

37.3.1 Construction et structure de corps

Définition. *Quaternions.*

Soient les matrices

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ -\mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

On définit l'ensemble des quaternions \mathbf{H} par

$$\mathbf{H} = \{a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, (a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbf{C}).$$

11. Montrer que $\mathbf{1i} = \mathbf{i1} = \mathbf{i}$, $\mathbf{1j} = \mathbf{j1} = \mathbf{j}$ et $\mathbf{1k} = \mathbf{k1} = \mathbf{k}$.
12. Montrer que $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -\mathbf{1}$.
13. Montrer que $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{kj} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$ et $\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$.
14. Montrer que pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$, on a :

$$(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1}.$$

15. Montrer que \mathbf{H} est un corps non commutatif.
16. Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbf{C} & \longrightarrow \mathbf{H} \\ z & \longmapsto \Re(z)\mathbf{1} + \Im(z)\mathbf{i} \end{cases}$ est un morphisme de corps injectif.

Ainsi, \mathbf{C} est un sous-corps du corps des quaternions \mathbf{H} . Les quaternions $\mathbf{1}$, \mathbf{i} , \mathbf{j} et \mathbf{k} seront notés dans toute la suite $\mathbf{1}$, \mathbf{i} , \mathbf{j} et \mathbf{k} .

Les quaternions $\mathbf{1}$ et \mathbf{i} seront confondus avec les nombres complexes $\mathbf{1}$ et \mathbf{i} .

La construction matricielle du corps des quaternions sera occultée, seules les règles de calcul établies aux questions 11, 12, 13 et 14 seront gardées.

37.3.2 Opérations sur les quaternions

Définitions. *Conjugué, norme, quaternion imaginaire pur.*

Soit $u = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} \in \mathbf{H}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$.

On définit :

- le *conjugué* de u noté \bar{u} par $\bar{u} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$;
- la *norme* de u notée $|u|$ par $|u| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$. On note \mathbf{U} l'ensemble des quaternions de norme 1;
- on dit que u est un *imaginaire pur* si $a = 0$. On note \mathbf{H}^{pur} l'ensemble des quaternions imaginaires purs.

17. (a) Soient $(u, v) \in \mathbf{H}^2$. Montrer que $|uv| = |u||v|$. On admet aussi que l'on a $\left| \frac{u}{v} \right| = \frac{|u|}{|v|}$ si $v \neq 0$.
- (b) Soit $u \in \mathbf{H}$. Montrer que $\bar{\bar{u}} = u$: la conjugaison est une opération involutive.
- (c) Soit $(u, v) \in \mathbf{H}^2$. Montrer que $\overline{uv} = \bar{v}\bar{u}$.

(d) Soit $u \in \mathbf{H}$. Montrer que $u\bar{u} = \bar{u}u = |u|^2$.

18. Montrer que si $u \in \mathbf{U}$, alors pour tout $x \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$, $ux\bar{u} \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$.

Pour $u \in \mathbf{U}$, on définit l'application Ψ_u par $\Psi_u : \begin{cases} \mathbf{H} & \longrightarrow \mathbf{H} \\ x & \longmapsto ux\bar{u} \end{cases}$.

19. Montrer que pour tout $u \in \mathbf{U}$, Ψ_u est \mathbf{R} -linéaire.

20. Soit $u \in \mathbf{U}$. Montrer que :

(a) Ψ_u laisse stable \mathbf{R} .

(b) Ψ_u laisse stable \mathbf{H}^{pur} .

On note ψ_u la restriction de Ψ_u à \mathbf{H}^{pur} .

37.4 Retour sur les rotations de l'espace

37.4.1 À tout quaternion de norme égale à un, on associe une rotation...

Soit $u = a + bi + cj + dk \in \mathbf{U}$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$.

21. Donner la matrice A_u de ψ_u dans la base (i, j, k) .

22. Vérifier que A_u est une matrice orthogonale.

23. Dans cette question, on se propose de montrer que le déterminant de A_u est toujours égal à 1. Soit $u \in \mathbf{U}$, $u \neq -1$. Soit γ définie sur $[0, 1]$ par

$$\forall t \in [0, 1], \quad \gamma(t) = \frac{tu + (1-t)}{|tu + (1-t)|}.$$

(a) Montrer que γ est bien définie et que pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) \in \mathbf{U}$. Vérifier aussi que $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(1) = u$.

(b) Soit φ définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = \det(A_{\gamma(t)})$. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, $\varphi(t) \in \{-1, 1\}$.

(c) Montrer que φ est continue sur $[0, 1]$ et déduire $\det(A_u)$.

(d) Conclure.

On assimile ainsi ψ_u à une rotation de l'espace.

37.4.2 ... et à toute rotation de l'espace est associée un quaternion de norme égale à un.

Soient $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ de norme égale à 1 et $\theta \in [0, 2\pi[$. Soient

$$u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)i + b \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)j + c \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)k$$

et

$$u' = ai + bj + ck$$

de sorte que $u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u'$.

24. Vérifier que $|u| = 1$.

25. Montrer que $\Psi_u(u') = u'$.
26. Soit (a', b', c') un vecteur de \mathbf{R}^3 unitaire et orthogonal à (a, b, c) . Soit $v = a'i + b'j + c'k$.

(a) Montrer que l'on a

$$\Psi_u(v) = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)v + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(u'v - vu') - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)u'vu'.$$

(b) Vérifier que $-u'vu' = -v$, puis que $vu' = -u'v$.

(c) En déduire que

$$\Psi_u(v) = \cos(\theta)v + \sin(\theta)u'v.$$

(d) Calculer le produit vectoriel $(a, b, c) \wedge (a', b', c')$ et comparer ses coordonnées avec celles du produit $u'v$.

(e) Que vaut $\Psi_u(u'v)$? On ne demande pas de preuve.

27. Conclure quant à ψ_u .

Correction du Thème 37

1. On a $\langle u(e_1), u(e_2) \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 0$.

De plus, $\|u(e_1)\|^2 = \langle u(e_1), u(e_1) \rangle = \langle e_1, e_1 \rangle = \|e_1\|^2 = 1$. On montre de même que $\|u(e_2)\| = 1$.

On a montré que $(u(e_1), u(e_2))$ est une base orthonormée.

2. Comme $(u(e_1), u(e_2))$ est une base orthonormée de \mathbf{R}^2 , les vecteurs $u(e_1)$ et $u(e_2)$ sont orthogonaux.

Ainsi, l'angle $(u(e_1), u(e_2))$ est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π .

3. Comme $\|u(e_1)\| = 1$, on peut écrire $u(e_1) = ae_1 + be_2$ avec a et b qui vérifient $a^2 + b^2 = 1$: il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.

On distingue deux cas :

- Si l'angle $(u(e_1), u(e_2))$ est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π .

Comme $(u(e_1), u(e_2))$ est congru à $\frac{\pi}{2}$ modulo π , on peut écrire

$$\begin{aligned} u(e_2) &= \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) e_1 + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) e_2 \\ &= -\sin(\theta) e_1 + \cos(\theta) e_2. \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de u dans la base (e_1, e_2) est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- Si l'angle $(u(e_1), u(e_2))$ est congru à $-\frac{\pi}{2}$ modulo π .

Comme $(u(e_1), u(e_2))$ est congru à $-\frac{\pi}{2}$ modulo π , on peut écrire

$$\begin{aligned} u(e_2) &= \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) e_1 + \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) e_2 \\ &= \sin(\theta) e_1 - \cos(\theta) e_2. \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice de u dans la base (e_1, e_2) est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

4. Soit $u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$. On a

$$\forall x \in \mathbf{R}^3, \quad \|u(x)\| = \|x\|.$$

Donc, $\ker(u) = \{0\}$ et $u \in \mathcal{G}\ell(\mathbf{R}^3)$, soit $\mathcal{O}_3(\mathbf{R}) \subset \mathcal{G}\ell(\mathbf{R}^3)$.

Soit $(u, v) \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})^2$ et soit $(x, y) \in (\mathbf{R}^3)^2$.

On a

$$\langle (u \circ v^{-1})(x), (u \circ v^{-1})(y) \rangle = \langle v^{-1}(x), v^{-1}(y) \rangle$$

car $u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$.

Comme $v \in \mathcal{G}l(\mathbf{R}^3)$, il existe $(x', y') \in (\mathbf{R}^3)^2$ tel que

$$x = v(x') \quad \text{et} \quad y = v(y').$$

On a donc

$$\langle v^{-1}(x), v^{-1}(y) \rangle = \langle x', y' \rangle.$$

Puis, en utilisant le fait que $v \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$, on a

$$\langle x', y' \rangle = \langle v(x'), v(y') \rangle = \langle x, y \rangle.$$

On a montré que

$$\langle (u \circ v^{-1})(x), (u \circ v^{-1})(y) \rangle = \langle x, y \rangle,$$

donc $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$.

On a montré que $\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}l(\mathbf{R}^3)$.

5. Il est clair que si $(u, v) \in \mathcal{S}\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$, alors $u \circ v^{-1} \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$ car $\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$ est un groupe.

De plus, $\det(u \circ v^{-1}) = 1$, donc $u \circ v^{-1} \in \mathcal{S}\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$.

On a montré que $\mathcal{S}\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$.

6. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Cette implication est claire.

\Leftarrow Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}^3)^2$. Par hypothèse sur u , on a

$$\|u(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2.$$

Or,

$$\begin{aligned} \|u(x+y)\|^2 &= \|u(x)\|^2 + 2\langle u(x), u(y) \rangle + \|u(y)\|^2 \\ &= \|x\|^2 + 2\langle u(x), u(y) \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

et

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2,$$

il s'ensuit que $\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$.

L'équivalence est montrée.

7. Soit $f : x \mapsto \det(x \text{id}_{\mathbf{R}^3} - u) = \det(x \text{I}_3 - A)$ où A est la matrice de u dans une base de \mathbf{R}^3 .

En développant le déterminant, il est facile de remarquer que f est une fonction polynomiale de degré 3.

Les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ sont infinies et opposées, par le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule en au moins une valeur : λ .

Comme $\lambda \text{id}_{\mathbf{R}^3} - u$ est de déterminant nul, cette application n'est pas injective : il existe $x \in \mathbf{R}^3$ non nul tel que

$$(\lambda \text{id}_{\mathbf{R}^3} - u)(x) = 0 \iff u(x) = \lambda x.$$

Or, $u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$, on a donc $\|u(x)\| = \|x\| = |\lambda| \|x\|$. En utilisant le fait que $x \neq 0$, on obtient $|\lambda| = 1$.

On a montré qu'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ avec $|\lambda| = 1$ tel que $u(x) = \lambda x$.

8. Comme F est stable par u , on remarque que $u|_F$ est injectif, donc bijectif car F est de dimension finie.

Soit $x \in F^\perp$, montrons que pour tout $y \in F$, $\langle u(x), y \rangle = 0$.

Soit $y \in F$, par bijectivité de $u|_F$, il existe $z \in F$ tel que $y = u(z)$. On a donc

$$\langle u(x), y \rangle = \langle u(x), u(z) \rangle = \langle x, z \rangle = 0$$

car $x \in F^\perp$ et $z \in F$.

On a montré que si F est stable par u , alors F^\perp est stable par u .

9. On commence par raffiner le résultat obtenu à la question 7 en montrant que $\lambda = 1$.

On reprend donc l'application f définie sur \mathbf{R} par

$$f(x) = \det(x \text{id}_{\mathbf{R}^3} - u).$$

En considérant la matrice A de u dans une base et en développant le déterminant, on remarque que f est une fonction polynomiale de degré 3 et unitaire. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Comme $f(0) = \det(-u) = -1$, on en déduit grâce au théorème des valeurs intermédiaires que f s'annule sur \mathbf{R}_+ . Comme $|\lambda| = 1$, on en déduit que $\lambda = 1$. Ainsi, en reproduisant l'argument de la question 7, il existe x non nul que l'on peut supposer de norme 1 tel que $u(x) = x$.

Soit $F = \text{Vect}(x)$. Comme F est stable par u , F^\perp est stable par u .

Comme F^\perp est un espace euclidien de dimension 2, on peut l'assimiler à \mathbf{R}^2 muni de son produit scalaire canonique, ainsi d'après la question 3, il existe une base orthonormée (e_2, e_3) telle que la matrice de $u|_{F^\perp}$ est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$. Ainsi la matrice de u dans la base orthonormée (x, e_2, e_3) est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Comme $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} = -1$, on en déduit finalement que la matrice de u est de la forme

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}$$

dans une base orthonormée adaptée.

10. Si $u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{SO}_3(\mathbf{R})$, alors $-u \in \mathcal{SO}_3(\mathbf{R})$ car

$$\det(-u) = (-1)^3 \det(u) = 1$$

et pour tout $x \in \mathbf{R}^3$, $\|-u(x)\| = \|x\|$.

Ainsi, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la matrice de $-u$ dans une base orthonormée

$$\text{soit } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Il s'ensuit que la matrice de u dans cette même base orthonormée est

$$\begin{aligned} -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta + \pi) & -\sin(\theta + \pi) \\ 0 & \sin(\theta + \pi) & \cos(\theta + \pi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\tilde{\theta}) & -\sin(\tilde{\theta}) \\ 0 & \sin(\tilde{\theta}) & \cos(\tilde{\theta}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où $\tilde{\theta}$ est l'unique représentant de $\theta + \pi$ dans l'intervalle $[0, 2\pi[$.

On a montré que si $u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R}) \setminus \mathcal{SO}_3(\mathbf{R})$, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la matrice de u dans une base orthonormée de \mathbf{R}^3 , soit

$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}.$$

11. Ce sont de simples vérifications laissées au lecteur.
12. Ce sont de simples vérifications laissées au lecteur.
13. Ce sont de simples vérifications laissées au lecteur.
14. Ce sont de simples vérifications laissées au lecteur.
15. Il est clair que $(\mathbf{H}, +, \times)$ est un sous-anneau de $(\mathcal{M}_2(\mathbf{R}), +, \times)$ car la matrice nulle et la matrice identité appartiennent à \mathbf{H} , et si $(h, h') \in \mathbf{H}^2$, alors $h - h' \in \mathbf{H}$ (stabilité par somme et par passage à l'inverse pour la loi $+$) et $hh' \in \mathbf{H}$ (stabilité par produit)
Soit $h \in \mathbf{H}$ non nul : il existe quatre réels a, b, c et d non tous nuls tels que $h = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

D'après la question 14, on a

$$(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)\mathbf{1}.$$

Comme $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, on a

$$(a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}) \left(\frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} (a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}) \right) = \mathbf{1}.$$

Ainsi h est inversible et

$$h^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} (a\mathbf{1} - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}).$$

Comme $\mathbf{ij} \neq \mathbf{ji}$, la multiplication de \mathbf{H} n'est pas commutative.

On a montré que $(\mathbf{H}, +, \times)$ est un corps non commutatif.

16. Il est clair que pour tout $(z, z') \in \mathbf{C}^2$, on a

$$f(z + z') = f(z) + f(z'), \quad f(zz') = f(z)f(z')$$

et

$$f(\mathbf{1}) = \mathbf{1}.$$

Ainsi f est un morphisme de corps.

Soit $z \in \ker(f)$: on a $\Re(z)\mathbf{1} + \Im(z)\mathbf{i} = 0$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$).

Or, il est clair que la famille constituée des matrices $(\mathbf{1}, \mathbf{i})$ est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbf{C})$, ainsi $\Re(z) = \Im(z) = 0$ et $z = 0$.

On a montré que $\ker(f) \subset \{0\}$, l'inclusion réciproque étant claire, on a montré que $\ker(f) = \{0\}$.

On a montré que f est un morphisme de corps injectif.

17. (a) On pose $u = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ et $v = a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}$ avec $((a, b, c, d), (a', b', c', d')) \in (\mathbf{R}^4)^2$. Un calcul un peu fastidieux donne

$$\begin{aligned} uv &= (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')\mathbf{i} \\ &\quad + (ac' + ca' - bd' + db')\mathbf{j} + (da' + ad' + bc' - cb')\mathbf{k}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |uv|^2 &= (aa' - bb' - cc' - dd')^2 + (ab' + ba' + cd' - dc')^2 \\ &\quad + (ac' + ca' - bd' + db')^2 + (da' + ad' + bc' - cb')^2. \end{aligned}$$

Soit, en développant et en remarquant que les doubles produits s'annulent :

$$\begin{aligned} |uv|^2 &= a^2(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) + b^2(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) \\ &\quad + c^2(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) + d^2(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) \\ &= |u|^2 |v|^2 \end{aligned}$$

Par positivité de la norme, on en déduit $|uv| = |u||v|$.

On a montré que pour tout $(u, v) \in \mathbf{H}^2$, $|uv| = |u||v|$.

(b) Si l'on pose $u = a + bi + cj + dk$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$, il est clair que

$$\boxed{\bar{u} = \overline{a - bi - cj - dk} = a + bi + cj + dk = u.}$$

(c) On pose $u = a + bi + cj + dk$ et $v = a' + b'i + c'j + d'k$ avec $((a, b, c, d), (a', b', c', d')) \in (\mathbf{R}^4)^2$ et on reprend le calcul fait à la question 17 (a). On a

$$uv = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i \\ + (ac' + ca' - bd' + db')j + (da' + ad' + bc' - cb')k,$$

d'où

$$\bar{v}\bar{u} = (aa' - bb' - cc' - dd') - (ab' + ba' + cd' - dc')i \\ - (ac' + ca' - bd' + db')j - (da' + ad' + bc' - cb')k.$$

De plus, en développant, on a

$$\bar{v}\bar{u} = (a' - b'i - c'j - d'k)(a - bi - cj - dk) \\ = (aa' - bb' - cc' - dd') - (ab' + ba' + cd' - dc')i \\ - (ac' + ca' - bd' + db')j - (da' + ad' + bc' - cb')k.$$

$$\boxed{\text{On a montré que pour tout } (u, v) \in \mathbf{H}^2, \bar{v}\bar{u} = \bar{v}\bar{u}.}$$

(d) On pose $u = a + bi + cj + dk$ ($a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$. Un simple développement donne

$$u\bar{u} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\ = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ = |u|^2.$$

Un calcul analogue donne $\bar{u}u = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |u|^2$.

$$\boxed{\text{On a montré que pour tout } u \in \mathbf{H}, u\bar{u} = \bar{u}u = |u|^2.}$$

18. Soit $p = a + bi + cj + dk$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$. On remarque que

$$u \in \mathbf{H}^{\text{pur}} \iff u + \bar{u} = 0.$$

Soit $x \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$. D'après la question 17 (c), on a

$$ux\bar{u} + \overline{ux\bar{u}} = ux\bar{u} + \bar{u}\bar{x}u.$$

Comme $\bar{u} = u$ (question 17 (b)), on a

$$ux\bar{u} + \overline{ux\bar{u}} = ux\bar{u} + u\bar{x}u = u(x + \bar{x})\bar{u}.$$

Or, $x \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$, d'après la remarque faite ci-dessus, $x + \bar{x} = 0$, on en déduit donc $ux\bar{u} + \overline{ux\bar{u}} = 0$. Toujours d'après la remarque faite ci-dessus, on en déduit que

$$\boxed{\forall u \in \mathbf{U}, \forall x \in \mathbf{H}^{\text{pur}}, ux\bar{u} \in \mathbf{H}^{\text{pur}}.}$$

19. Soit $u \in \mathbf{U}$. Soient $(p_1, p_2) \in \mathbf{H}^2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a :

$$\Psi_u(p_1 + \lambda p_2) = u(p_1 + \lambda p_2)\bar{u} = up_1\bar{u} + u\lambda p_2\bar{u}.$$

Comme $\lambda \in \mathbf{R}$, il est facile de voir que λ et u commutent (attention, cela est faux si $\lambda \in \mathbf{H} \dots$), ainsi

$$\Psi_u(p_1 + \lambda p_2) = up_1\bar{u} + \lambda up_2\bar{u} = \Psi_u(p_1) + \lambda \Psi_u(p_2).$$

On a montré que, pour tout $u \in \mathbf{U}$, Ψ_u est \mathbf{R} -linéaire.

20. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$. On a déjà remarqué à la question 19 que u et x commutent. En utilisant le résultat de la question 17 (d), on a

$$\Psi_u(x) = ux\bar{u} = xu\bar{u} = x|u|^2 \in \mathbf{R}.$$

On a montré que Ψ_u laisse stable \mathbf{R} .

(b) D'après la question 18, si $x \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$, alors

$$\Psi_u(x) = ux\bar{u} \in \mathbf{H}^{\text{pur}}.$$

On a montré que Ψ_u laisse stable \mathbf{H}^{pur} .

21. On a

$$\begin{aligned} \psi_u(i) &= (a + bi + cj + dk)i(a - bi - cj - dk) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + 2(ad + bc)j + 2(bd - ac)k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_u(j) &= (a + bi + cj + dk)j(a - bi - cj - dk) \\ &= 2(bc - ad)i + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)j + 2(ab + dc)k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi_u(k) &= (a + bi + cj + dk)k(a - bi - cj - dk) \\ &= 2(ac + bd)i + 2(dc - ab)j + (a^2 - b^2 - c^2 + d^2)k. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} A_u &= \text{mat}_{(i,j,k)}(\psi_u) \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2(bc - ad) & 2(ac + bd) \\ 2(ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2(dc - ab) \\ 2(bd - ac) & 2(ab + dc) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

22. Pour vérifier que $A_u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$, il suffit de vérifier que ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ muni de son produit scalaire canonique.

- On montre que les colonnes sont de norme 1. On montre pour la première colonne est de norme 1, les autres colonnes se traitent de manière analogue. On rappelle que l'on a

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \iff a^2 + b^2 = 1 - (c^2 + d^2)$$

car $u \in \mathbf{U}$. On a

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + 4(ad + bc)^2 + 4(bd - ac)^2 \\ = & (1 - 2(c^2 + d^2))^2 + 4(a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + a^2c^2) \\ = & (1 - 2(c^2 + d^2))^2 + 4(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\ = & (1 - 2(c^2 + d^2))^2 + 4(1 - (c^2 + d^2))(c^2 + d^2) \\ = & 1 - 4(c^2 + d^2) + 4(c^2 + d^2)^2 + 4(c^2 + d^2) \\ & - 4(c^2 + d^2)^2 \\ = & \boxed{1}. \end{aligned}$$

- On montre que les colonnes forment une famille orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$. On montre que le produit scalaire de deux colonnes distinctes vaut 0. On calcule uniquement le produit scalaire de la première et de la deuxième colonnes, le produit scalaire des autres colonnes se calcule de manière analogue. **Sans** utiliser la relation $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, on a

$$\begin{aligned} & 2(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)(bc - ad) \\ & + 2(ad + bc)(a^2 - b^2 + c^2 - d^2) + 4(bd - ac)(ab + dc) \\ = & 2(a^2bc - a^3d + b^3c - ab^2d - bc^3 + ac^2d - bcd^2 + ad^3) \\ & + 2(a^3d - ab^2d + ac^2d - ad^3 + ab^2c - b^3c \\ & + bc^3 - bc^2d) + 4(ab^2d + bcd^2 - a^2bc - ac^2d) \\ = & \boxed{0}. \end{aligned}$$

On a montré que pour tout $u \in \mathbf{U}$, $A_u \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$.

23. (a) On remarque que si $t = 0$ ou $t = 1$, alors $tu + (1 - t)$ est non nul. Pour tout $t \in]0, 1[$, on a

$$\begin{aligned} |tu + (1 - t)| = 0 & \iff tu + (1 - t) = 0 \\ & \iff u = \frac{t-1}{t} \\ & \implies u \in \mathbf{R}_-. \end{aligned}$$

Or, il est facile de voir que $\mathbf{R}_- \cap \mathbf{U} = \{-1\}$. On en déduit que pour tout $t \in [0, 1]$, $|tu + (1 - t)| \neq 0$, ainsi γ est définie sur $[0, 1]$.

Pour tout $t \in [0, 1]$, d'après la question 17 (a), on a

$$|\gamma(t)| = \left| \frac{tu + (1-t)}{|tu + (1-t)|} \right| = \frac{1}{\|tu + (1-t)\|} |tu + (1-t)| = 1,$$

car $\|tu + (1-t)\| = |tu + (1-t)|$, pour tout $t \in [0, 1]$.

On a montré que γ est bien définie et pour tout $t \in [0, 1]$, $\gamma(t) \in \mathbf{U}$.

(b) D'après la question 22, pour tout $t \in [0, 1]$, $A_{\gamma(t)} \in \mathcal{O}_3(\mathbf{R})$ (car $\gamma(t) \in \mathbf{U}$).

Or, le déterminant d'une matrice orthogonale vaut ± 1 , ainsi pour tout $t \in [0, 1]$, $\det(A_{\gamma(t)}) \in \{-1, 1\}$.

(c) On pose $u = a + bi + cj + dk$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbf{R}^4$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \frac{tu + (1-t)}{|tu + (1-t)|} \\ &= \frac{ta + (1-t) + tbi + tcj + tdk}{|ta + (1-t) + tbi + tcj + tdk|} \\ &= \frac{ta + (1-t) + tbi + tcj + tdk}{\sqrt{(ta + 1-t)^2 + t^2b^2 + t^2c^2 + t^2d^2}} \\ &= a(t) + b(t)i + c(t)j + d(t)k \end{aligned}$$

où les fonctions a, b, c et d sont définies sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbf{R} par :

$$a(t) = \frac{ta + 1 - t}{\sqrt{(ta + 1 - t)^2 + t^2b^2 + t^2c^2 + t^2d^2}},$$

$$b(t) = \frac{tb}{\sqrt{(ta + 1 - t)^2 + t^2b^2 + t^2c^2 + t^2d^2}},$$

$$c(t) = \frac{tc}{\sqrt{(ta + 1 - t)^2 + t^2b^2 + t^2c^2 + t^2d^2}}$$

et

$$d(t) = \frac{td}{\sqrt{(ta + 1 - t)^2 + t^2b^2 + t^2c^2 + t^2d^2}}.$$

Les fonctions a, b, c et d sont de toute évidence continues sur $[0, 1]$. Il s'ensuit que les coefficients de $A_{\gamma(\cdot)} = (a_{i,j}(\cdot))_{(i,j) \in \llbracket 1,3 \rrbracket}^2$ sont continues et ce, d'après le calcul de la matrice A_u fait à la question 21. On en déduit que

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi(t) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_3} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^3 a_{i,\sigma(i)}(t).$$

En particulier, φ est continue sur $[0, 1]$ comme la somme de produits de fonctions continues sur $[0, 1]$.

Comme φ est à valeurs dans $\{-1, 1\}$, le théorème des valeurs intermédiaires assure que φ est constante sur $[0, 1]$. Or,

$$\varphi(0) = \det(I_3) = 1$$

car $\Psi_1 = \text{id}_{\mathbf{H}}$.

Finalement, φ est constante égale à 1, en particulier,

$$\boxed{\varphi(1) = \det(A_u) = 1.}$$

(d) On remarque que $\Psi_{-1} = \text{id}_{\mathbf{H}}$, ainsi $\det(A_{-1}) = 1$. On a montré que

$$\boxed{\forall u \in \mathbf{U}, \quad \det(A_u) = 1.}$$

24. On a

$$\begin{aligned} |u| &= \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + a^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + b^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + c^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + (a^2 + b^2 + c^2) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Or, (a, b, c) est de norme égale à 1, donc $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, ainsi

$$\boxed{|u| = \sqrt{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 1.}$$

25. Par définitions de u et u' , on a $u = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'$, puis comme

$u' \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$, il vient que $\bar{u} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'$. Ainsi

$$\begin{aligned} \Psi_u(u') &= uu'\bar{u} \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) u' \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) u'. \end{aligned}$$

Or, d'après la question 17 (d),

$$\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u'\right) = |u|.$$

La question 24 assurant que $|u| = 1$, on en déduit que

$$\boxed{\Psi_u(u') = u'.$$

26. (a) On a

$$\Psi_u(v) = \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u' \right) v \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u' \right).$$

En développant ce produit, on a l'égalité souhaitée.

(b) On prouve séparément les deux égalités.

• On a

$$\begin{aligned} u'vu' &= (ai + bj + ck)(a'i + b'j + c'k)(ai + bj + ck) \\ &= (-aa' + ab'k - ac'j - a'b'k - bb' + bc'i + ca'j \\ &\quad - cb'i - cc')(ai + bj + ck) \\ &= (ab'k - ac'j - a'b'k + bc'i + ca'j - cb'i) \\ &\quad \times (ai + bj + ck), \end{aligned}$$

car $aa' + bb' + cc' = 0$ car les vecteurs (a, b, c) et (a', b', c') sont orthogonaux. En développant à nouveau, on obtient

$$\begin{aligned} u'vu' &= a^2b'j - abb'i - abc' + a^2c'k + abc' - acc'i - aa'bj \\ &\quad + a'b^2i + a'bc - abc' + b^2c'k - bcc'j - aa'ck - a'bc \\ &\quad + a'c^2i + ab'c - bb'ck + b'c^2j \\ &= (-abb' - acc' + a'b^2 + a'c^2)i \\ &\quad + (a^2b' - aa'b - bcc' + b'c^2)j \\ &\quad + (a^2c' + b^2c' - aa'c - bbc)k. \end{aligned}$$

Or, $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, donc

$$\begin{aligned} -abb' - acc' + a'b^2 + a'c^2 &= -abb' - acc' + a'(1 - a^2) \\ &= a' - a(aa' + bb' + cc') \\ &= a' \end{aligned}$$

car $aa' + bb' + cc' = 0$.

On montre de même que

$$a^2b' - aa'b - bcc' + b'c^2 = b' \quad \text{et} \quad a^2c' + b^2c' - aa'c - bbc = c',$$

ainsi

$$\boxed{-u'vu' = -v.}$$

• La deuxième relation ne demande pas de calculs. On rappelle que $u' \in \mathbf{U} \cap \mathbf{H}^{\text{pur}}$, donc $u'\bar{u}' = 1$ ($u' \in \mathbf{U}$) et $\bar{u}' = -u'$ ($u' \in \mathbf{H}^{\text{pur}}$). On a :

$$\boxed{vu' = u'\bar{u}'vu' = u'(-u'vu) = u'(-v) = -u'v.}$$

- (c) En remplaçant les relations obtenues à la question 26 (b) dans l'expression de $\Psi_u(v)$ de la question 26 (a), on a

$$\begin{aligned}\Psi_u(v) &= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)v + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)(u'v - vu') - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)u'vu' \\ &= \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)v + 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)u'v \\ &= \boxed{\cos(\theta)v + \sin(\theta)u'v.}\end{aligned}$$

- (d) Le produit vectoriel $(a, b, c) \wedge (a', b', c')$ est le vecteur

$$\boxed{(bc' - b'c, -ac' + a'c, ab' - a'b).}$$

Un simple calcul donne

$$\begin{aligned}u'v &= (ai + bj + ck)(a'i + b'j + c'k) \\ &= \boxed{(bc' - b'c)i + (-ac' + a'c)j + (ab' - a'b)k.}\end{aligned}$$

- (e) Comme ψ_u est une rotation, on a

$$\boxed{\Psi_u(u'v) = -\sin(\theta)v + \cos(\theta)u'v.}$$

27. On pose $w = (a, b, c) \wedge (a', b', c')$.

D'après les questions 26 (d) et 26 (e), ψ_u est la rotation d'axe dirigé par le vecteur (a, b, c) et d'angle θ .

Quelques remarques culturelles

Les quaternions servent principalement pour modéliser les rotations de l'espace. Citons aussi le résultat suivant que le lecteur intéressé pourra prouver :

Théorème. *Théorème de Frobenius.*

Soit \mathbf{K} un sur-corps de \mathbf{R} . On suppose que le \mathbf{R} -espace vectoriel \mathbf{K} est de dimension finie.

Alors, $\mathbf{K} = \mathbf{R}, \mathbf{C}$ ou \mathbf{H} .

Thème 38

Autour de la convexité

Thèmes abordés : Suite, produit scalaire, norme associée à un produit scalaire.

Difficulté : ■■■■■■

Ce sujet introduit à la notion d'ensembles convexes et aux « grands » résultats les concernant : le théorème de projection sur un convexe fermé, le théorème de Hahn-Banach et le théorème de Minkowski.

Tous ces résultats se généralisent à des espaces vectoriels normés mais les preuves sont considérablement plus difficiles car ici, la structure euclidienne de \mathbf{R}^2 est très utilisée dans les preuves.

Les résultats de la partie 1 sont utiles dans toute la suite. La partie 2 établit l'existence et l'unicité de la projection sur un convexe fermé. Ce résultat est utilisé dans la partie 3. La partie 4 est largement indépendante des parties précédentes.

38.1 Questions liminaires

38.1.1 Sur les convexes

Définition. *Ensemble convexe.*

Soit $C \subset \mathbf{R}^2$. On dit que C est convexe si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in [0, 1], \quad (1 - t)x + ty \in C.$$

1. Soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de convexes de \mathbf{R}^2 . Montrer que $\bigcap_{i \in I} C_i$ est un convexe de \mathbf{R}^2 .
2. Soit $A \subset \mathbf{R}^2$ une partie non vide. Montrer l'existence d'une plus petite partie convexe (au sens de l'inclusion) contenant A .
On appelle **enveloppe convexe** de A , et est notée $\text{conv}(A)$, le plus petit convexe contenant A .
3. Une union de convexes est-elle, en général, convexe ?

Définition. *Produit scalaire sur \mathbf{R}^2 .*

On définit l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$ par :

$$\forall ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2, \quad \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2.$$

4. Montrer que l'application

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \langle (x_1, y_2), (x_2, y_2) \rangle$$

définit bien un produit scalaire sur \mathbf{R}^2 .

Dans la suite, nous noterons $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

38.1.2 Sur les suites

Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de \mathbf{R}^2 . Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

5. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$;
- ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(x_n, y_n) - (x, y)\| = 0$.

Définitions. *Convergence d'une suite de \mathbf{R}^2 , suite de Cauchy.*

Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de \mathbf{R}^2 et soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

- On dit que la suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans \mathbf{R}^2 vers (x, y) si l'une des deux conditions équivalentes précédentes est satisfaite. On note alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$

- On dit que la suite $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, \quad (n \geq p \geq N) \implies (\|(x_n, y_n) - (x_p, y_p)\| \leq \varepsilon).$$

On admet le résultat suivant (le lecteur intéressé pourra le démontrer dans le Thème 29 : « Sur les suites convexes ») :

Proposition. \mathbf{R}^2 est complet.

Soit $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de Cauchy de \mathbf{R}^2 .

Alors, $((x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ converge dans \mathbf{R}^2 .

Remarque. Le lecteur intéressé pourra prouver cette proposition en s'aidant des outils développés dans le Thème 31 : « Topologie et espaces complets ».

38.2 Projection sur un convexe fermé

38.2.1 Projeté sur un convexe fermé

Définition. *Partie fermée.*

Soit A une partie de \mathbf{R}^2 . On dit que A est fermée si :

$$\forall (z_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \forall z \in \mathbf{R}^2, \quad ((z_n)_{n \in \mathbf{N}} \text{ converge vers } z) \implies (z \in A).$$

On souhaite montrer le résultat suivant :

Proposition. *Projection sur un convexe fermé.*

Soit $C \subset \mathbf{R}^2$ un ensemble convexe fermé. Pour tout $z \in \mathbf{R}^2 \setminus C$, il existe $z' \in C$ unique tel que

$$\|z' - z\|^2 = \inf_{w \in C} \|w - z\|^2.$$

Cet unique élément est appelé le *projeté* de z sur C .

Nous prouvons l'existence du projeté. Soit $z \notin C$ et $d = \inf_{w \in C} \|z - w\|$.

6. Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \exists w_n \in C, \quad \|w_n - z\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

7. Montrer l'égalité suivante dite du parallélogramme

$$\forall (z, z') \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2, \quad \|z - z'\|^2 + \|z + z'\|^2 = 2(\|z\|^2 + \|z'\|^2).$$

8. En déduire que

$$\forall (n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2, \quad \|w_n - w_p\|^2 \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{p}.$$

9. En déduire que la suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est de Cauchy. Conclure.

Nous prouvons maintenant l'unicité. On suppose qu'il existe z_1 et z_2 tels que

$$\|z - z_1\| = \|z - z_2\| = d.$$

10. À l'aide de l'égalité du parallélogramme, montrer que

$$\left\| \frac{z_1 + z_2}{2} - z \right\|^2 \leq d^2 - \frac{1}{4} \|z_1 - z_2\|^2.$$

11. En déduire que $z_1 = z_2$.

Dans la suite, nous noterons $p_C(z)$ le projeté de z sur le convexe C .

38.2.2 Une équivalence

Nous allons prouver la proposition suivante.

Proposition. *Caractérisation du projeté.*

Soit C un ensemble convexe de \mathbf{R}^2 . Soient $z \in \mathbf{R}^2 \setminus C$ et $z^* \in C$. On a

$$z^* = p_C(z) \iff (\forall y \in C, \quad \langle z^* - z, z^* - y \rangle \leq 0). \quad (38.1)$$

Nous prouvons la proposition. Soit $z \in \mathbf{R}^2 \setminus C$.

12. *Sens direct.* Soit $p_C(z)$ le projeté de z sur C .

(a) Montrer que : pour tout $y \in C$ et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\|z - (ty + (1-t)p_C(z))\|^2 \geq \|z - p_C(z)\|^2.$$

(b) En déduire que

$$\forall y \in C, \quad \langle p_C(z) - z, p_C(z) - y \rangle \leq 0.$$

13. *Sens indirect.* Soit z^* vérifiant l'inégalité de droite de la ligne (38.1).

(a) Montrer que : pour tout $y \in C$,

$$\|y - z\|^2 = \|y - z^*\|^2 + \|z^* - z\|^2 + 2 \langle z^* - z, z^* - y \rangle.$$

(b) En déduire que $z^* = p_C(z)$.

14. Soit $z' \in \mathbf{R}^2 \setminus C$ tel qu'il existe $t \in \mathbf{R}_+$ tel que

$$z' = t(z - p_C(z)) + p_C(z).$$

Montrer que $p_C(z') = p_C(z)$.

15. Montrer que l'application p_C est 1-lipschitzienne sur $\mathbf{R}^2 \setminus C$, i.e. montrer que p_C vérifie

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}^2 \setminus C)^2, \quad \|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|.$$

38.3 Théorème de séparation des convexes

Définitions. *Ensemble borné, fonction bornée.*

Soit $A \subset \mathbf{R}^2$ une partie non vide de \mathbf{R}^2 et soit $f : A \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction.

- On dit que A est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $z \in A$, $\|z\| \leq M$.
- On dit que f est bornée sur A s'il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $z \in A$, $|f(z)| \leq M$.

16. Montrer que pour toute droite \mathcal{D} de \mathbf{R}^2 , il existe une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ et $c \in \mathbf{R}$ tels que

$$\mathcal{D} = \{w \in \mathbf{R}^2, f(w) = c\}.$$

17. En déduire qu'une droite du plan sépare le plan en deux parties.

Théorème. *Théorème de Hahn-Banach.*

Soient A et B deux ensembles convexes disjoints non vides de \mathbf{R}^2 . On suppose que A et B sont fermés et B est borné.

Alors, il existe une forme linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ et $c \in \mathbf{R}$ tels que

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad f(a) < c < f(b).$$

18. Prouver le théorème de Hahn-Banach lorsque B est réduit à un point.

Indication : On pourra créer la forme linéaire f grâce à la proposition *Caractérisation du projeté*.

19. On revient au cas général. On introduit l'ensemble $A - B$ par

$$A - B = \{a - b, a \in A, b \in B\}.$$

- (a) Montrer que $A - B$ est convexe et que $0 \notin A - B$.
- (b) i. Montrer que de toute suite d'éléments de B , on peut extraire une sous-suite qui converge vers un élément de B .
ii. En déduire que $A - B$ est fermé.
- (c) En utilisant la question 18, terminer la preuve du théorème de Hahn-Banach.

38.4 Points extrémaux d'un convexe

38.4.1 Point extrémal

Définition. *Point extrémal.*

Soit C un ensemble convexe de \mathbf{R}^2 . Soit $z \in C$. On dit que z est un *point extrémal* si :

$$\forall (x, y) \in C^2, \forall t \in]0, 1[, \quad (z = (1-t)x + ty) \implies (z = x \text{ ou } z = y).$$

On note $\mathcal{E}(C)$ l'ensemble (éventuellement vide) des points extrémaux de C .

Remarque. On remarque que si z est un point extrémal d'un convexe C , si l'on écrit $z = (1-t)x + ty$ avec $t \in]0, 1[$, la définition assure que $z = x$ ou $z = y$; on en déduit alors (comme $t \in]0, 1[$) que $x = y = z$.

20. Soient $z, z' \in \mathbf{R}^2$. Déterminer les points extrémaux du segment $[z, z']$.
21. Déterminer les points extrémaux de $[0, 1] \times [0, 1]$.
22. Déterminer les points extrémaux de

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

On se propose de montrer la proposition suivante :

Proposition. *Les points extrémaux existent !*

Soit C un ensemble convexe non vide, fermé, borné de \mathbf{R}^2 . Alors, $\mathcal{E}(C) \neq \emptyset$.

Nous prouvons la proposition.

23. Justifier l'existence de $x_0 = \sup \{x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, (x, y) \in C\}$.

Soit $S = \{(x_0, y), y \in \mathbf{R}\}$.

24. Montrer que $S \cap C$ est non vide et convexe.
25. Montrer que qu'il existe deux réels $a \leq b$ tels que

$$S \cap C = \{(x_0, y), y \in [a, b]\}.$$

26. Montrer que $S \cap C$ contient au moins un point extrémal de C .

38.4.2 Théorème de Minkowski

Avant d'énoncer le théorème de Minkowski, on aura besoin de la définition suivante.

Définition. *Adhérence d'une partie.*

Soit $A \subset \mathbf{R}^2$. On définit l'adhérence de \bar{A} par :

$$\bar{A} = \left\{ z \in \mathbf{R}^2, \exists (z_n)_{n \in \mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z \right\}.$$

27. Soit A une partie de \mathbf{R}^2 . Montrer que A est fermée si, et seulement si, $A = \bar{A}$.
28. Vérifier que si A et B sont deux parties de \mathbf{R}^2 telles que $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Le but de cette partie est de montrer le résultat fondamental suivant.

Théorème. *Théorème de Minkowski.*

Soit C un ensemble convexe non vide, fermé, borné de \mathbf{R}^2 . Alors, C est l'adhérence de l'enveloppe convexe de ses points extrémaux :

$$\overline{\text{conv}(\mathcal{E}(C))} = C.$$

Nous prouvons le théorème.

29. Montrer que $\overline{\text{conv}(\mathcal{E}(C))} \subset C$.

Nous prouvons maintenant que $C \subset \overline{\text{conv}(\mathcal{E}(C))}$. Pour cela, on suppose qu'il existe $z \in C$ et $z \notin \overline{\text{conv}(\mathcal{E}(C))}$. On notera, en particulier, que $z \notin \mathcal{E}(C)$.

30. (a) Soit A un ensemble convexe de \mathbf{R}^2 . Montrer que \overline{A} est convexe.

(b) En déduire que $\overline{\text{conv}(\mathcal{E}(C))}$ est un convexe fermé.

31. Montrer qu'il existe une forme linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ et $c \in \mathbf{R}$ tels que

$$\overline{\text{conv}(\mathcal{E}(C))} \subset \{w \in \mathbf{R}^2, f(w) < c\} \quad \text{et} \quad f(z) > c.$$

32. (a) Montrer que f est bornée sur C .

Indication : On pourra montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $f(x, y) = ax + by$.

(b) Montrer qu'il existe $z_0 = (x_0, y_0) \in C$ tel que

$$f(z_0) = \sup_{w \in C} f(w).$$

Indication : On pourra utiliser la question 19 (b) i.

33. Montrer que l'ensemble $\mathcal{A} = \{w \in C, f(w) = f(z_0)\}$ contient au moins un point extrémal de C et conclure.

Remarque. En fait, on peut montrer que si C est un convexe fermé, borné, alors

$$\text{conv}(\mathcal{E}(C)) = C.$$

Correction du Thème 38

1. Soit $(x, y) \in \left(\bigcap_{i \in I} C_i \right)^2$.

Comme pour tout $i \in I$, C_i est convexe, pour tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty \in C_i$.
Ainsi, pour tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)x + ty \in \bigcap_{i \in I} C_i$.

On a montré que $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

2. Soit \mathcal{K}_A l'ensemble des parties convexes de \mathbf{R}^2 contenant A .
Comme $\mathbf{R}^2 \in \mathcal{K}_A$, $\mathcal{K}_A \neq \emptyset$.
D'après la question 1, $\bigcap_{K \in \mathcal{K}_A} K$ est convexe.

Soit C une partie convexe telle que $A \subset C$. Comme $C \in \mathcal{K}_A$, on a $\bigcap_{K \in \mathcal{K}_A} K \subset C$.

On a montré que $\bigcap_{K \in \mathcal{K}_A} K$ est la plus petite partie convexe pour l'inclusion contenant A .

3. La réponse est non. Soient

$$D = \{(x, 0), x \in \mathbf{R}\} \quad \text{et} \quad \tilde{D} = \{(0, y), y \in \mathbf{R}\}.$$

Il est facile de voir que les ensembles D et \tilde{D} sont convexes.

Or, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1, 0) + \frac{1}{2}(0, 1) \notin D \cup \tilde{D}$ et $(1, 0) \in D$ et $(0, 1) \in \tilde{D}$.

On a montré qu'une union de convexes n'est pas nécessairement un convexe.

4. On va montrer que l'application

$$((x_1, y_2), (x_2, y_2)) \longmapsto \langle (x_1, y_2), (x_2, y_2) \rangle$$

est symétrique, linéaire par rapport à chacune de ses variables et définie positive.

- *Symétrie*

Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) deux éléments de \mathbf{R}^2 . On a

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = x_1x_2 + y_1y_2 = \langle (x_2, y_2), (x_1, y_1) \rangle.$$

- *Linéarité par rapport à la première variable*

Soient $((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) \in (\mathbf{R}^2)^3$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned} & \langle (x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle \\ &= \langle (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2), (x_3, y_3) \rangle \\ &= (x_1 + \lambda x_2)x_3 + (y_1 + \lambda y_2)y_3 \\ &= x_1x_3 + y_1y_3 + \lambda(x_2x_3 + y_2y_3) \\ &= \langle (x_1, y_1), (x_3, y_3) \rangle + \lambda \langle (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle. \end{aligned}$$

On a montré que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable. Par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la seconde variable.

- *Définie positive*

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. On a

$$\langle (x, y), (x, y) \rangle = x^2 + y^2 \geq 0.$$

De plus, $\langle (x, y), (x, y) \rangle = 0$ si, et seulement si, $x = y = 0$. On a montré que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie positive.

On a montré que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur \mathbf{R}^2 .

5. On prouve les deux implications.

i) \implies ii) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - x)^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (y_n - y)^2 = 0$, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(x_n, y_n) - (x, y)\| = 0.$$

ii) \implies i) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\|(x_n, y_n) - (x, y)\| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} \geq |x_n - x|.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(x_n, y_n) - (x, y)\| = 0$, par encadrement, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x.$$

Un même argument montre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = y$.

On a montré que les assertions i) et ii) sont équivalentes.

6. On utilise la caractérisation de la borne inférieure : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $w \in C$ tel que $d^2 \leq \|z - w\|^2 \leq d^2 + \varepsilon$.

En particulier, en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$). On a montré qu'il existe $w_n \in C$ tel que

$$d^2 \leq \|w_n - z\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}.$$

7. Soit $(z, z') \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2$. En développant le carré des normes, on a

$$\begin{aligned} \|z - z'\|^2 + \|z + z'\|^2 &= \|z\|^2 + 2\langle z, z' \rangle + \|z'\|^2 + \|z\|^2 - 2\langle z, z' \rangle + \|z'\|^2 \\ &= 2\left(\|z\|^2 + \|z'\|^2\right). \end{aligned}$$

8. Soit $(n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2$.

On utilise l'égalité du parallélogramme établie à la question 7 avec $z \leftarrow w_n - z$ et $z' \leftarrow w_p - z$ pour obtenir

$$\|w_n - w_p\|^2 = 2\|w_n - z\|^2 + 2\|w_p - z\|^2 - \|w_n + w_p - 2z\|^2.$$

Par la question 6, on a

$$2\|w_n - z\|^2 \leq 2d^2 + \frac{2}{n} \quad \text{et} \quad 2\|w_p - z\|^2 \leq 2d^2 + \frac{2}{p}.$$

De plus, $\|w_n + w_p - 2z\|^2 = 4\left\|\frac{w_n + w_p}{2} - z\right\|^2 \geq 4d^2$ par définition de d et car C est convexe $\left(\frac{w_n + w_p}{2} \in C\right)$.

On en déduit

$$\begin{aligned} \|w_n - w_p\|^2 &= 2\|w_n - z\|^2 + 2\|w_p - z\|^2 - \|w_n + w_p - 2z\|^2 \\ &\leq 2d^2 + \frac{2}{n} + 2d^2 + \frac{2}{p} - 4d^2 \\ &\leq \boxed{\frac{2}{n} + \frac{2}{p}} \end{aligned}$$

9. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 8, pour tout $n \geq p$, on a

$$\|w_n - w_p\| \leq \sqrt{\frac{4}{p}}.$$

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4}{p}} = 0$, il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que pour tout $p \geq N$, $\sqrt{\frac{4}{p}} \leq \varepsilon$.

On en déduit donc que

$$\forall (n, p) \in (\mathbf{N}^*)^2, \exists N \in \mathbf{N}^*, \quad (n \geq p \geq N) \implies (\|w_n - w_p\| \leq \varepsilon).$$

On a montré que la suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est une suite de Cauchy.

Comme la suite $(w_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est de Cauchy, d'après la proposition admise, elle converge. On note w sa limite.

Comme C est fermé, on a $w \in C$ et en passant à la limite dans l'inégalité obtenue à la question 6, on a

$$\|z - w\|^2 = d^2 \iff \|z - w\| = d.$$

On a montré l'existence d'un projeté de z sur C .

10. En utilisant l'égalité du parallélogramme établie à la question 7 avec

$z \leftarrow \frac{z_1 - z}{2}$ et $z' \leftarrow \frac{z_2 - z}{2}$, on a

$$\left\|\frac{z_1 + z_2}{2} - z\right\|^2 = 2\left\|\frac{z_1 - z}{2}\right\|^2 + 2\left\|\frac{z_2 - z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{z_1 - z_2}{2}\right\|^2.$$

Or,

$$2 \left\| \frac{z_1 - z}{2} \right\|^2 + 2 \left\| \frac{z_2 - z}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|z_1 - z\|^2 + \|z_2 - z\|^2) = d^2$$

et

$$\left\| \frac{z_1 - z_2}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4} \|z_1 - z_2\|^2,$$

ainsi, on obtient

$$\left\| \frac{z_1 + z_2}{2} - z \right\|^2 \leq d^2 - \frac{1}{4} \|z_1 - z_2\|^2.$$

11. On suppose $z_1 \neq z_2$, alors $-\frac{1}{4} \|z_1 - z_2\|^2 < 0$, donc

$$\left\| \frac{z_1 + z_2}{2} - z \right\|^2 < d^2.$$

Comme C est convexe et z_1 et z_2 sont des éléments de C , $\frac{z_1 + z_2}{2} \in C$.

Ceci est une contradiction avec la définition de d .

Ainsi, on a $z_1 = z_2$.

12. (a) Soient $y \in C$ et $t \in [0, 1]$.

Comme $p_C(z) \in C$ et par convexité de C , on a

$$ty + (1-t)p_C(z) \in C.$$

Par définition de $p_C(z)$, on a

$$\|z - (ty + (1-t)p_C(z))\|^2 \geq \|z - p_C(z)\|^2.$$

- (b) Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \|z - (ty + (1-t)p_C(z))\|^2 &= \|z - p_C(z) + t(p_C(z) - y)\|^2 \\ &= \|z - p_C(z)\|^2 + t^2 \|p_C(z) - y\|^2 \\ &\quad + 2t \langle z - p_C(z), p_C(z) - y \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité établie à la question 12 (a) est équivalente à : pour tout $t \in [0, 1]$,

$$2t \langle z - p_C(z), p_C(z) - y \rangle + t^2 \|p_C(z) - y\|^2 \geq 0.$$

En supposant $t > 0$, en divisant par t et en faisant tendre t vers 0^+ , on obtient

$$\langle p_C(z) - z, p_C(z) - y \rangle \leq 0.$$

13. (a) Soit $y \in C$. On remarque que

$$\|y - z^*\|^2 = \|(y - z^*) - (z^* - z)\|^2.$$

En développant le carré de la norme, on obtient

$$\begin{aligned} \|y - z\|^2 &= \|y - z^*\|^2 - 2\langle y - z^*, z^* - z \rangle + \|z^* - z\|^2 \\ &= \boxed{\|y - z^*\|^2 + 2\langle z^* - y, z^* - z \rangle + \|z^* - z\|^2}. \end{aligned}$$

- (b) Par hypothèse sur z^* , on a

$$\langle z^* - y, z^* - z \rangle \geq 0 \quad \text{et} \quad \|y - z^*\|^2 \geq 0.$$

Il s'ensuit que

$$\forall y \in C, \quad \|y - z\| \geq \|z - z^*\|.$$

On a montré que z^* vérifie

$$\|z - z^*\| = \inf_{y \in C} \|y - z\|,$$

donc

$$\boxed{z^* = p_C(z)}.$$

14. Pour tout $y \in C$, on a

$$\begin{aligned} \langle p_C(z) - z', p_C(z) - y \rangle &= \langle p_C(z) - p_C(z) - t(z - p_C(z)), p_C(z) - y \rangle \\ &= t \langle p_C(z) - z, p_C(z) - y \rangle \\ &\leq 0, \end{aligned}$$

d'après la question 12 (b) et car $t \geq 0$.

D'après la question 13 (b), on en déduit que $\boxed{p_C(z) = p_C(z')}$.

15. Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}^2 \setminus C)^2$. Comme $p_C(x) \in C$ et $p_C(y) \in C$, en utilisant l'inégalité établie à la question 12 (b) avec respectivement $z \leftarrow x$ et $y \leftarrow p_C(y)$, puis $z \leftarrow y$ et $y \leftarrow p_C(x)$, on obtient

$$\langle p_C(x) - x, p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq 0$$

et

$$\langle p_C(y) - y, p_C(y) - p_C(x) \rangle \leq 0 \iff \langle -p_C(y) + y, p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq 0.$$

En sommant ces deux inégalités, on a

$$\langle p_C(x) - p_C(y) + y - x, p_C(x) - p_C(y) \rangle \leq 0,$$

soit

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \leq \langle p_C(x) - p_C(y), x - y \rangle.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient finalement

$$\|p_C(x) - p_C(y)\|^2 \leq \|p_C(x) - p_C(y)\| \|x - y\|.$$

En simplifiant par $\|p_C(x) - p_C(y)\|$ (que l'on peut supposer non nul car sinon l'inégalité à montrer est claire), on a bien

$$\boxed{\|p_C(x) - p_C(y)\| \leq \|x - y\|}.$$

16. Soit \mathcal{D} une droite de \mathbf{R}^2 , il existe $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ tel que $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, ax + by = c\}$.

Soit f définie sur \mathbf{R}^2 par $f(x, y) = ax + by$.

Il est clair que f est une forme linéaire non nulle et on a

$$\mathcal{D} = \{w \in \mathbf{R}^2, f(w) = c\}.$$

17. Soit \mathcal{D} une droite de \mathbf{R}^2 . Soient f et c donnés par la question 16. Soient $\mathcal{D}_+ = \{w \in \mathbf{R}^2, f(w) > c\}$ et $\mathcal{D}_- = \{w \in \mathbf{R}^2, f(w) < c\}$.

De toute évidence, $(\mathcal{D}_-, \mathcal{D}, \mathcal{D}_+)$ est une partition de \mathbf{R}^2 , donc \mathcal{D} sépare le plan en deux parties.

18. Soit z l'élément de B et soit f la forme linéaire définie sur \mathbf{R}^2 par

$$f(y) = \langle z - p_A(z), y \rangle = -\langle p_A(z) - z, y \rangle.$$

Par la question 12 (b), on a

$$\forall y \in A, \quad \langle p_A(z) - z, p_A(z) \rangle \leq \langle p_A(z) - z, y \rangle$$

soit

$$\forall y \in A, \quad f(y) \leq f(p_A(z)).$$

De plus, on remarque que

$$f(z) - f(p_A(z)) = \langle z - p_A(z), z - p_A(z) \rangle = \|z - p_A(z)\|^2 > 0$$

car $z \neq p_A(z)$. Il s'ensuit que

$$\forall y \in A, \quad f(y) \leq f(p_A(z)) < f(z).$$

Si l'on prend $c \in]f(p_A(z)), f(z)[$, on a

$$\forall a \in A, \quad f(a) < c < f(z).$$

Le théorème Hahn-Banach est prouvé lorsque B est réduit à un point.

19. (a) • Soit x et y deux éléments de $A - B$: il existe a_1, a_2 deux éléments de A et b_1, b_2 deux éléments de B tels que

$$x = a_1 - b_1 \quad \text{et} \quad y = a_2 - b_2.$$

Soit $t \in [0, 1]$. On a

$$(1-t)x + ty = ((1-t)a_1 + ta_2) - ((1-t)b_1 + tb_2).$$

Comme A est convexe, $(1-t)a_1 + ta_2 \in A$.

De même, $(1-t)b_1 + tb_2 \in B$, ainsi $(1-t)x + ty \in A - B$.

On a montré que $A - B$ est convexe.

- Si $0 \in A - B$, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que

$$0 = a - b \iff a = b.$$

Comme A et B sont disjoints, cela ne peut se produire.

On a montré que $0 \notin A - B$.

- (b) i. Soit $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de B .

Comme B est borné, les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ le sont.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire de

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge.

La suite $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ étant bornée, d'après le théorème de Bolzano-

Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(y_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge.

La suite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge, donc la suite $(x_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Il s'ensuit que la suite $(x_{\varphi \circ \psi(n)}, y_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément de B car B est fermé.

- ii. Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $A - B$ qui converge vers ℓ , montrons que $\ell \in A - B$.

Par définition de $A - B$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in A$ et $b_n \in B$ tel que $z_n = a_n - b_n$.

La suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de B , par la question 19

(b) i, on peut en extraire une sous-suite $(b_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $b \in B$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}$ et comme les suites

$(z_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on en déduit que la suite

$(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un élément $a \in A$ car A est fermé.

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_{\varphi(n)} = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{\varphi(n)} - b_{\varphi(n)}) = a - b,$$

par unicité de la limite, on a $\ell = a - b$.

On a montré que $A - B$ est fermé.

- (c) $A - B$ est un convexe fermé, $\{0\}$ est réduit à un point, d'après la question 18, il existe une forme linéaire f définie sur \mathbb{R}^2 et $c' \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall y \in A - B, \quad f(y) < c' < f(0).$$

Déjà, $f(0) = 0$, donc $c' < 0$. Par définition de $A - B$, on en déduit que

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad f(a - b) < c'.$$

En utilisant la linéarité de f , on récupère

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad f(a) < c' + f(b). \quad (38.2)$$

Pour conclure, il suffit d'introduire $s = \sup_{a \in A} f(a)$ (on notera que cet infimum existe grâce à la ligne (38.2)) et $i = \inf_{b \in B} f(b)$ (il existe pour la même raison). On a de plus, $s \leq i + c' < i$.

Soit $c \in]s, i[$. On obtient finalement

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad f(a) < c < f(b).$$

Le théorème de Hahn-Banach est prouvé.

20. Il est clair que $[z, z']$ est convexe.

On va montrer que $\mathcal{E}([z, z']) = \{z, z'\}$.

On suppose $z \neq z'$ car sinon de toute évidence, $\mathcal{E}([z, z']) = \{z\}$.

- Soit $y \in]z, z'[$. Il existe $t \in]0, 1[$ tel que $y = (1-t)z + tz'$. Comme $z \neq z'$, on a montré que $y \notin \mathcal{E}([z, z'])$.
- On montre maintenant que z et z' sont des points extrémaux.

Soient $(x, y) \in [z, z']^2$ et $t \in]0, 1[$ tels que $z = (1-t)x + ty$.

Si $x \neq z$ ou $y \neq z$, alors $z = (1-t)x + ty \in]z, z']$, ce qui est exclu. Ainsi, $x = y = z$.

On a montré que z est un point extrémal de $[z, z']$. On procède de même pour montrer que z' est un point extrémal de $[z, z']$.

On a montré que $\mathcal{E}([z, z']) = \{z, z'\}$.

21. Il est clair que $[0, 1] \times [0, 1]$ est convexe.

On va montrer que

$$\mathcal{E}([0, 1] \times [0, 1]) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

- Soit $(x, y) \notin \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$, alors l'une des composantes de (x, y) est comprise entre 0 et 1 strictement, par exemple $x \in]0, 1[$.
Comme

$$(x, y) = x(1, y) + (1-x)(0, y),$$

on en déduit que $(x, y) \notin \mathcal{E}([0, 1] \times [0, 1])$.

- Soit

$$(x, y) \in \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\},$$

par exemple $(x, y) = (0, 0)$ et supposons que

$$(x, y) = (1-t)(a_1, b_1) + (1-t)(a_2, b_2)$$

avec $t \in [0, 1]$ et $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ deux éléments de $[0, 1] \times [0, 1]$. On en déduit

$$\begin{cases} (1-t)a_1 + ta_2 = 0 \\ (1-t)b_1 + tb_2 = 0 \end{cases}$$

La somme est constituée de termes positifs, on en déduit

$$(1-t)a_1 = ta_2 = 0 \quad \text{et} \quad (1-t)b_1 = tb_2 = 0.$$

Parmi les nombres t et $1-t$ l'un des deux au moins est non nul, par exemple $t \neq 0$. On en déduit alors $a_2 = b_2 = 0$.

On a montré que $(a_2, b_2) = (0, 0)$, ainsi $(0, 0)$ est un point extrémal.

On montre de même que $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$ sont des points extrémaux de $[0, 1] \times [0, 1]$.

On a montré que

$$\mathcal{E}([0, 1] \times [0, 1]) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}.$$

22. On commence par remarquer que

$$\mathcal{B} = \{z \in \mathbf{R}^2, \|z\| \leq 1\}.$$

Déjà, \mathcal{B} est convexe. En effet, si $(z, z') \in \mathcal{B}^2$ et $t \in [0, 1]$, comme $\|\cdot\|$ est une norme, en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|(1-t)z + tz'\| \leq (1-t)\|z\| + t\|z'\| \leq 1-t+t = 1.$$

On va montrer que $\mathcal{E}(\mathcal{B}) = \{(x, y) \in \mathcal{B}, x^2 + y^2 = 1\}$.

- Soit $(x, y) \in \mathcal{B}$ tel que $x^2 + y^2 < 1$.

Notons que $x \in]-1, 1[$. Comme $|y| < \sqrt{1-x^2}$, il existe $t \in]0, 1[$ tel que

$$y = t\sqrt{1-x^2} + (1-t)\left(-\sqrt{1-x^2}\right).$$

Ainsi $(x, y) = t\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) + (1-t)\left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$. De plus, comme $|x| < 1$, $\left(x, \sqrt{1-x^2}\right) \neq \left(x, -\sqrt{1-x^2}\right)$.

On en déduit que $(x, y) \notin \mathcal{E}(\mathcal{B})$.

- Soit $(x, y) \in \mathcal{B}$ tel que $x^2 + y^2 = 1$. On suppose que

$$(x, y) = t(a_1, b_1) + (1-t)(a_2, b_2)$$

avec $t \in [0, 1]$ et $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ deux éléments de \mathcal{B} .

Par l'inégalité triangulaire, on a

$$1 = \|(x, y)\| \leq t\|(a_1, b_1)\| + (1-t)\|(a_2, b_2)\|.$$

Si $\|(a_1, b_1)\| < 1$ ou $\|(a_2, b_2)\| < 1$, alors l'inégalité précédente est impossible. On en déduit $\|(a_1, b_1)\| = \|(a_2, b_2)\| = 1$.

Comme il y a égalité dans l'inégalité triangulaire, on en déduit que les vecteurs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) sont positivement liés : il existe $\lambda \in \mathbf{R}_+$ tel que $(a_1, b_1) = \lambda(a_2, b_2)$.

En utilisant le fait que $\|(a_1, b_1)\| = \|(a_2, b_2)\| = 1$, on en déduit $\lambda = 1$, puis $(a_1, b_1) = (a_2, b_2) = (x, y)$.

On a montré que $\mathcal{E}(\mathcal{B}) = \{(x, y) \in \mathcal{B}, x^2 + y^2 = 1\}$.

23. Comme C est non vide et borné, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $z \in C$, $\|z\| \leq M$.

On remarque aussi

$$\forall (x, y) \in C, \quad M \geq \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|.$$

L'ensemble $\{x \in \mathbf{R}, \exists y \in \mathbf{R}, (x, y) \in C\}$ est non vide et majoré (par M) :
il admet une borne supérieure x_0 .

24. • D'après la caractérisation de la borne supérieure, pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe x_n tel que $x_0 - \frac{1}{n+1} \leq x_n \leq x_0$ et $y_n \in \mathbf{R}$ tels que $(x_n, y_n) \in C$.

Il est clair que la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers x_0 .

La suite $(y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée car C est borné, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge vers un réel y_0 .

Il s'ensuit que la suite d'éléments de $C : \left((x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \right)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers (x_0, y_0) .

Comme C est fermé, on en déduit que $(x_0, y_0) \in C$.

On a montré que $C \cap S \neq \emptyset$.

- $C \cap S$ est convexe car c'est une intersection de convexes (question 1).

25. Comme C est borné, l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{y \in \mathbf{R}, (x_0, y) \in C\}$$

est non vide et borné, ainsi on pose

$$a = \inf \mathcal{A} \quad \text{et} \quad b = \sup \mathcal{A}.$$

Les suites $\left(a + \frac{b-a}{n+1} \right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ et $\left(b - \frac{b-a}{n+1} \right)_{n \in \mathbf{N}^*}$ d'éléments de C convergent respectivement vers a et b .

Comme C est fermé, on en déduit que (x_0, a) et (x_0, b) sont des éléments de C .

Comme $C \cap S$ est convexe, on en déduit que

$$\boxed{C \cap S = \{(x_0, y), y \in [a, b]\}}.$$

26. Montrons que le point (x_0, a) est extrémal.

Soient $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in C$ et $t \in]0, 1[$ tels que

$$(x_0, a) = (1-t)(a_1, b_1) + t(a_2, b_2).$$

On en déduit que $x_0 = (1-t)a_1 + ta_2$.

Comme $a_1 \leq x_0$ et $a_2 \leq x_0$ (par définition de x_0), on en déduit que $a_1 = a_2 = x_0$ car sinon on aurait $x_0 > (1-t)a_1 + ta_2$.

On a aussi $a = (1-t)b_1 + tb_2$. Un raisonnement analogue permet de conclure que $b_1 = b_2 = a$.

On a ainsi montré que $(x_0, a) = (a_1, b_1) = (a_2, b_2)$: le point (x_0, a) est un point extrémal de C .

On a montré que $\mathcal{E}(C)$ est non vide.

27. On remarque que l'on a toujours $A \subset \bar{A}$.

On prouve les deux implications.

\Rightarrow Soit $z \in \bar{A}$: il existe une suite d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$.

Comme A est une partie fermée, on a $z \in A$, donc $\bar{A} \subset A$, puis $\bar{A} = A$.

\Leftarrow Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $z \in \mathbb{R}^2$, montrons que $z \in \bar{A}$.

Par définition $z \in \bar{A} = A$, donc $z \in A$ et A est fermée.

On a montré que A est fermée si, et seulement si, $\bar{A} = A$.

28. Soit $z \in \bar{A}$. Il existe une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = z$.

Comme $A \subset B$, on en déduit que la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de B , puis par définition de \bar{B} , $z \in \bar{B}$.

On a montré que si $A \subset B$, alors $\bar{A} \subset \bar{B}$.

29. Cette inclusion est immédiate : par définition $\text{conv}(\mathcal{E}(C))$ est le plus petit convexe contenant $\mathcal{E}(C)$.

Comme $\mathcal{E}(C) \subset C$, on en déduit que

$$\text{conv}(\mathcal{E}(C)) \subset C,$$

puis en utilisant le résultat de la question 28, on en déduit que

$$\overline{\text{conv}(\mathcal{E}(C))} \subset \bar{C} = C$$

car $\bar{C} = C$ (C est fermé et question 27).

30. (a) Soit z et z' deux éléments de \bar{A} : il existe deux suites $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(z'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui convergent respectivement vers z et z' . Soit $t \in [0, 1]$.

Comme A est convexe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1-t)z_n + tz'_n \in A$.

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} ((1-t)z_n + tz'_n) = (1-t)z + tz',$$

par définition de l'adhérence, on en déduit que $(1-t)z + tz' \in \bar{A}$.

On a montré que si A est convexe, alors \bar{A} est convexe.

(b) C'est une conséquence directe de la question 30 (a) et du fait que $\text{conv}(C)$ est convexe.

31. C'est l'application du théorème de Hahn-Banach établi à la question 19 (c).

32. (a) Soit l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}) \\ (a, b) & \longmapsto (f_{a,b} : (x, y) \longmapsto ax + by) \end{cases}.$$

Il est clair que φ est linéaire. De plus, si $(a, b) \in \ker(\varphi)$, alors

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f_{a,b}(x, y) = ax + by = 0.$$

En prenant $(x, y) = (1, 0)$ et $(x, y) = (0, 1)$, on en déduit que $a = b = 0$. Ainsi, $\ker(\varphi) \subset \{(0, 0)\}$, puis $\ker(\varphi) = \{(0, 0)\}$.

Donc, φ est injective. Comme

$$\dim(\mathbf{R}^2) = \dim(\mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})) = 2,$$

on en déduit que φ est bijective.

Comme $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ (unique, mais cela ne sert pas ici) tel que $f = f_{a,b}$.

C étant borné, il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in C, \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \leq M.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in C, \quad |f(x, y)| &= |ax + by| \\ &\leq \max\{|a|, |b|\} (|x| + |y|). \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad |x| + |y| \leq \sqrt{2} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

D'où : pour tout $(x, y) \in C$,

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &\leq \sqrt{2} \max\{|a|, |b|\} \|(x, y)\| \\ &\leq \sqrt{2} \max\{|a|, |b|\} M. \end{aligned}$$

On a montré que f est bornée sur C .

(b) D'après la propriété de la borne supérieure, il existe une suite $(z_n = (x_n, y_n))_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de C telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = \sup_{w \in C} f(w).$$

D'après la question 19 (b) i, on peut extraire de la suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une sous-suite qui converge vers un élément de C : soit $\varphi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ strictement croissante telle que $(z_{\varphi(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers $(x_0, y_0) \in C$.

D'une part,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (ax_{\varphi(n)} + by_{\varphi(n)}) \\ &= \sup_{w \in C} f(w), \end{aligned}$$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(z_n) = \sup_{w \in C} f(w)$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (ax_{\varphi(n)} + by_{\varphi(n)}) \\ &= ax_0 + by_0 \\ &= f(z_0), \end{aligned}$$

où l'on a posé $z_0 = (x_0, y_0)$.

Comme $z_0 \in C$, par unicité de la limite, on a montré qu'il existe $z_0 \in C$ tel que $f(z_0) = \sup_{w \in C} f(w)$.

33. On commence par montrer que \mathcal{A} est convexe. Si w_1 et w_2 sont deux éléments de \mathcal{A} et $t \in [0, 1]$, alors par linéarité de f , on a

$$\begin{aligned} f((1-t)w_1 + tw_2) &= (1-t)f(w_1) + tf(w_2) \\ &= (1-t)\sup_{w \in C} f(w) + t\sup_{w \in C} f(w) \\ &= \sup_{w \in C} f(w). \end{aligned}$$

Or,

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \in C, ax + by = f(z_0)\}.$$

en utilisant le fait que \mathcal{A} est un convexe fermé et en utilisant la même méthode que celle utilisée à la question 25, il existe $(z', z'') \in C^2$ tel que $\mathcal{A} = [z', z'']$.

Soient $(w_1, w_2) \in C^2$ et $t \in]0, 1[$ tel que $(1-t)w_1 + tw_2 = z'$. Si $w_1 \notin \mathcal{A}$, par exemple, alors $f(w_1) < \sup_{w \in C} f(w)$.

On récupère

$$\begin{aligned} \sup_{w \in C} f(w) &= f(z') \\ &= f((1-t)w_1 + tw_2) \\ &= (1-t)f(w_1) + tf(w_2) \\ &< (1-t)\sup_{w \in C} f(w) + t\sup_{w \in C} f(w) \\ &< \sup_{w \in C} f(w), \end{aligned}$$

ce qui est exclu.

On a montré que w_1 et w_2 sont deux éléments de \mathcal{A} . D'après la question 20 l'ensemble des points extrémaux de $[z', z'']$ est $\{z', z''\}$. Ainsi, on en déduit que $w_1 = w_2$.

On a montré que z' est un point extrémal de C . Or, d'après la question 31, on a

$$z' \in \{x \in \mathbf{R}^2, f(w) < c\},$$

on en déduit une contradiction.

On a montré que $\overline{\text{conv}(\mathcal{E}(C))} = C$.

Quelques remarques culturelles

La plupart des résultats prouvés dans ce problème restent vrais dans un espace vectoriel normé quelconque (i.e. un espace vectoriel muni d'une norme pas nécessairement issue d'un produit scalaire).

Le théorème de projection sur les convexes fermés reste vrai en supposant que l'espace vectoriel est complet pour la norme (on parle alors d'espace de Banach). La preuve est sensiblement la même.

Le théorème de Hahn-Banach reste vrai aussi mais la conclusion est affaiblie. Sa preuve utilise le Lemme de Zorn dont la preuve utilise l'axiome du choix (voir Thème 3 : « Discussion autour de deux axiomes »). Quelques précisions à propos du théorème de Hahn-Banach. La version présentée ici s'appelle la version géométrique. Il existe une version dite analytique (équivalente à la version géométrique) :

Théorème. *Théorème de Hahn-Banach, version analytique.*

Soit E un \mathbf{R} -espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E . Soient $f : F \rightarrow \mathbf{R}$ une forme linéaire et $p : E \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe (voir le Thème 26 : « Une introduction aux fonctions convexes ») telles

$$\forall x \in F, \quad f(x) \leq p(x).$$

Alors, on peut prolonger f en une forme linéaire définie sur E que l'on note \tilde{f} telle que

$$\forall x \in E, \quad \tilde{f}(x) \leq p(x).$$

Le théorème de Minkowski reste vrai mais dans un espace vectoriel normé quelconque, on parle du théorème de Krein-Milman. Sa preuve utilise aussi l'axiome du choix.

Thème 39

Inversibilité de matrices aléatoires

Thèmes abordés : Probabilité, matrice, déterminant.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet, très court, permet d'établir un (petit) lien entre l'algèbre linéaire (le déterminant, plus exactement) et le vaste domaine des matrices aléatoires. Le point central est l'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev.

La partie 1 définit et montre certaines propriétés relatives aux variables aléatoires de Rademacher. Ces résultats sont utilisés dans la partie 2.

39.1 Variable aléatoire de Rademacher

Définition. *Variable aléatoire de Rademacher.*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire de Rademacher sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ si :

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1) = \frac{1}{2}.$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Rademacher. Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.
2. (a) Montrer que le produit de deux variables aléatoires de Rademacher indépendantes est une variable aléatoire de Rademacher.
(b) Généraliser la question précédente au cas de n variables aléatoires, avec $n \in \mathbf{N}^*$.

39.2 Une estimation de la probabilité d'une matrice soit inversible pour les matrices de petite taille

Soit $M = (X_{i,j})_{\substack{i \in [1,n] \\ j \in [1,n]}}$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$.

Soit D le déterminant de la matrice définie ci-dessus. On admet que D est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$.

3. Montrer que D admet une espérance et la calculer.

4. Montrer que D admet une variance et la calculer.
5. Montrer que

$$\forall \omega \in \Omega, \quad D(\omega) \in \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad 2^{n-1} \text{ divise } D(\omega).$$

6. Montrer que

$$\mathbf{P}(M \text{ inversible}) \leq \frac{n!}{4^{n-1}}. \quad (39.1)$$

7. Pour quelles valeurs de n , l'inégalité (39.1) donne t-elle une information non triviale?
8. Écrire un programme en `Python` qui permet de vérifier expérimentalement la majoration précédente.

Correction du Thème 39

1. Comme X prend un nombre fini de valeurs, X admet une espérance et une variance et

$$\boxed{\mathbf{E}(X) = -1 \times \mathbf{P}(X = -1) + 1 \times \mathbf{P}(X = 1) = 0}$$

et, d'après la formule de König-Huygens,

$$\boxed{\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 1.}$$

2. (a) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois de Rademacher. On pose $Z = XY$.

Il est clair que $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$. De plus,

$$(Z = 1) = ((X = 1) \cap (Y = 1)) \cup ((X = -1) \cap (Y = -1)).$$

Les événements

$$((X = 1) \cap (Y = 1))$$

et

$$((X = -1) \cap (Y = -1))$$

sont incompatibles, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = 1) &= \mathbf{P}((X = 1) \cap (Y = 1)) \\ &\quad + \mathbf{P}((X = -1) \cap (Y = -1)). \end{aligned}$$

Par indépendance de X et Y , on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z = 1) &= \mathbf{P}(X = 1) \times \mathbf{P}(Y = 1) + \mathbf{P}(X = -1) \times \mathbf{P}(Y = -1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}(Z = -1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On a montré que le produit de variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Rademacher, suit une loi de Rademacher.

- (b) On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « pour toute n -uplet (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Rademacher, $X_1 \cdots X_n$ suit une loi de Rademacher ».

\mathcal{P}_1 est claire et \mathcal{P}_2 découle de la question 2 (a).

Supposons \mathcal{P}_n vraie pour un certain entier naturel $n \in \mathbf{N}^*$.

Soient X_1, \dots, X_n, X_{n+1} ($n+1$) variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Rademacher.

D'après l'hypothèse de récurrence, $X_1 \cdots X_n$ suit une loi de Rademacher. Or, $X_1 \cdots X_n$ et X_{n+1} suivent toutes les deux des lois de Rademacher et sont indépendantes, d'après la question 2 (a), $X_1 \cdots X_n X_{n+1}$ suit une loi de Rademacher.

Par le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et pour toute suite (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi de Rademacher, $X_1 \cdots X_n$ suit une loi de Rademacher.

3. D'après une relation sur le déterminant, on a

$$D = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n X_{i, \sigma(i)}.$$

On note que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, d'après la question 2 (b), $\prod_{i=1}^n X_{i, \sigma(i)}$ suit une loi de Rademacher. Ainsi, D admet une espérance comme la somme de variables aléatoires admettant une espérance. En utilisant la linéarité de l'espérance et la question 1, on a

$$\mathbf{E}(D) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^n X_{i, \sigma(i)} \right) = 0.$$

4. Déjà, on a

$$\begin{aligned} D^2 &= \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n X_{i, \sigma(i)} \right) \left(\sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^n X_{i, \sigma'(i)} \right) \\ &= \sum_{(\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2} \varepsilon(\sigma) \varepsilon(\sigma') \prod_{i=1}^n X_{i, \sigma(i)} X_{i, \sigma'(i)}. \end{aligned}$$

Pour tout $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2$, $\prod_{i=1}^n X_{i, \sigma(i)} X_{i, \sigma'(i)}$ admet une espérance, donc D^2 admet une espérance et D admet une variance.

Soit $(\sigma, \sigma') \in \mathcal{S}_n^2$.

- On suppose $\sigma \neq \sigma'$.

Pour alléger les notations, on pose $\{\sigma = \sigma\}$ l'ensemble

$$\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(k) = \sigma'(k)\}$$

et $\{\sigma \neq \sigma\}$ l'ensemble

$$\{k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sigma(k) \neq \sigma'(k)\}.$$

On a

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)} &= \prod_{i \in \{\sigma = \sigma'\}} X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)} \prod_{i \in \{\sigma \neq \sigma'\}} X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)} \\ &= \prod_{i \in \{\sigma \neq \sigma'\}} X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)}, \end{aligned}$$

car si $i \in \{\sigma = \sigma'\}$, on a $X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)} = 1$.

Les variables aléatoires $X_{i,\sigma(i)}$ et $X_{i,\sigma'(i)}$ étant indépendantes pour tout $i \in \{\sigma \neq \sigma'\}$, par la question 2 (b), $X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)}$ suit une loi de Rademacher. Enfin, pour tout $i \in \{\sigma \neq \sigma'\}$, les variables $X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)}$ sont des variables aléatoires de Rademacher indépendantes, donc

$\prod_{i \in \{\sigma \neq \sigma'\}} X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)}$ est une variable aléatoire de Rademacher (question 2 (b)), donc son espérance vaut 0.

- On suppose $\sigma = \sigma'$. Alors, on a

$$\prod_{i=1}^n X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)} = 1,$$

donc

$$\mathbf{E} \left(X_{i,\sigma(i)} X_{i,\sigma'(i)} \right) = 1.$$

On en déduit que $\mathbf{E}(D^2) = n!$, puis, d'après la formule de König-Huygens, on a

$$\mathbf{V}(D) = \mathbf{E}(D^2) - \mathbf{E}(D)^2 = n!.$$

5. Soit $\omega \in \Omega$. On remarque que D est une matrice dont les coefficients sont soit -1 , soit 1 .

On effectue les opérations suivantes : pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$: $C_i \leftarrow C_i + C_1$. On remarque les colonnes numérotées de 2 à n sont à coefficients dans \mathbf{Z} et sont des multiples de 2. En factorisant par 2 chacune de ces colonnes et en utilisant le fait que le déterminant est n -linéaire, on obtient

$$D(\omega) = \det(M(\omega)) = 2^{n-1} \det(B(\omega))$$

avec $B(\omega) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, donc $\det(B(\omega)) \in \mathbf{Z}$.

On a montré que pour tout $\omega \in \Omega$, $D(\omega) \in \mathbf{Z}$ et que 2^{n-1} divise $D(\omega)$.

6. D'après la question 5, on a

$$M \text{ inversible} \iff |D| \geq 2^{n-1} \iff |D - \mathbf{E}(D)| \geq 2^{n-1}.$$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev, on récupère

$$\mathbf{P}(M \text{ inversible}) \leq \frac{\mathbf{V}(D)}{(2^{n-1})^2} \leq \frac{n!}{4^{n-1}}.$$

7. L'inégalité de la question 6 est non triviale lorsque $\frac{n!}{4^{n-1}} \leq 1$, c'est-à-dire lorsque $n! \leq 4^{n-1}$.

Une calculatrice montre que $n \leq 6$.

8. L'idée est de générer des matrices aléatoires dont les coefficients sont des variables aléatoires de Rademacher en grand nombre. Parmi ces matrices générées, on compte celles qui sont inversibles et on calcule la moyenne.

On peut écrire :

```

1 from random import *
2 from math import *
3 from numpy.linalg import *
4 from scipy import *
5 import numpy as np
6 def matricealeatoire(n,N):
7     compteur=0
8     for k in range(N):
9         A=np.random.rand(n,n)
10        B=2*floor(2*A)-1
11        if abs(det(B))>=1:
12            compteur=compteur+1
13    return [compteur/float(N),factorial(n)/float(4**(n-1))]

```

Voici ce que renvoie Python pour $n = 2, 3, 4, 5$ et 6 et $N = 10000$:

n	matricealeatoire(n,N)
2	[0,494; 0,5]
3	[0,3724; 0,375]
4	[0,3461; 0,375]
5	[0,3429; 0,46875]
6	[0,3748; 0,703125]

Quelques remarques culturelles

L'étude des valeurs propres (voir le Thème 36 : « Réduction des matrices symétriques réelles » pour la définition d'une valeur propre) des matrices aléatoires de grandes tailles fait l'objet de recherche active.

Le théorème de Wigner montre que si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de matrices symétriques dont les entrées sont des variables aléatoires d'espérance nulle et de variance \sqrt{n} .

Alors, les valeurs propres (voir le Thème 36 : « Réduction des matrices symétriques réelles » pour la définition d'une valeur propre) de la suite $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}M_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ se répartissent suivant le graphe de la fonction $x \in [-2, 2] \mapsto \frac{1}{2\pi} \sqrt{4-x^2}$.

Thème 40

Étude de l'opérateur diagonal

Thèmes abordés : Produit scalaire, norme associée à un produit, série, application linéaire, suite.

Difficulté : ■■■■■■

Ce sujet étudie l'opérateur diagonal sur l'ensemble des suites de carré sommable. En plus de montrer le caractère auto-adjoint de l'opérateur, on y montre que c'est un opérateur compact.

Ce sujet permet de faire une bonne introduction au cours sur les espaces vectoriels normés de classe de MP.

Les parties du sujets sont largement indépendantes.

40.1 Étude d'un ensemble de suites

Définition. $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$.

On définit $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ par

$$\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \sum_{n \geq 0} u_n^2 < +\infty \right\}.$$

1. Montrer que $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \times \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ par

$$\forall (u, v) \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \times \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}), \quad \langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$.

On note $\|\cdot\|_2$ la norme associée à ce produit scalaire.

3. Soit $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite réelle telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall (n, p) \in \mathbf{N}^2, (n, p \geq N) \implies (|a_n - a_p| \leq \varepsilon). \quad (40.1)$$

- (a) Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.

- (b) Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
4. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ telle que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, \quad (n, p \geq N) \implies (\|u_n - u_p\|_2 \leq \varepsilon).$$

On dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **suite de Cauchy**.

- (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(u_n(k))_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie (40.1).
- (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(u_n(k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note $u(k)$ la limite. On note \tilde{u} la suite $(u(k))_{k \in \mathbb{N}}$.
- (c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - \tilde{u}\|_2 = 0$.

40.2 Définition et premières propriétés

5. Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls de limite nulle et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Montrer que la suite $(\lambda_n x_n) \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Définition. *Opérateur diagonal sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.*

Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls telle que qui converge vers 0. On définit sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'application T_λ par :

$$\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \quad T_\lambda(x) = (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

6. Montrer que $T_\lambda \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}))$.
7. Montrer que T_λ est injectif.

Définitions. *Continuité.*

Soit $f : \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ une application.

- Soit $x_0 \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. On dit que f est **continue** en x_0 si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \quad (\|x - x_0\|_2 \leq \alpha) \implies (\|f(x) - f(x_0)\|_2 \leq \varepsilon).$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

- On dit que f continue sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ si f est continue en chaque point de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
8. Soit $f \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}))$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
- f est continue en 0 ;
 - f est continue sur $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$;
 - il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$,

$$\|f(x)\|_2 \leq k\|x\|_2 ;$$

- il existe $k' \geq 0$ tel que pour tout $x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$,

$$(\|x\|_2 = 1) \implies (\|f(x)\|_2 \leq k').$$

9. Montrer que si $f \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}))$ est continue, alors

$$\sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ \|x\|_2=1}} \|f(x)\|_2.$$

Définition. Norme d'opérateur.

Soit $f \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}))$ continue. On définit $\|f\|$ par

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ \|x\|_2=1}} \|f(x)\|_2.$$

Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = 0$.

10. Montrer que T_λ est continue sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et que $\|T_\lambda\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\lambda_n|$.

Définition. Opérateur auto-adjoint.

Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire (on dit que E est un espace préhilbertien) noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On dit que T est auto-adjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ si :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle.$$

11. Montrer que T_λ est auto-adjoint sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ muni du produit scalaire défini ci-dessus.

12. Soit A un sous-espace vectoriel de $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ stable par T_λ .

(a) Justifier que $T_{\lambda|_A}$ la restriction de T_λ à A est auto-adjoint pour la restriction du produit scalaire de $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ à A .

(b) Montrer que A^\perp est stable par T_λ .

40.3 Un propriété remarquable

13. L'image de T_λ est-elle un espace vectoriel de dimension finie ?

Définition. Application linéaire de rang fini.

Soit $U \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}))$. On dit que U est de rang fini si $\text{im}(U)$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Soit la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'applications de $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ définies par : pour tout $n \in \mathbf{N}$ et pour tout $x = (x_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$,

$$T_n(x) = (\lambda_0 x_0, \dots, \lambda_n x_n, 0, 0, \dots).$$

14. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $T_n \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}))$.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, T_n est continue sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et montrer que $\|T_n\| \leq \|T\|$.

15. Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite d'applications linéaires de rang fini vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T - T_n\| = 0.$$

Définition. *Boule ouverte.*

Soit $a \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et $r \geq 0$. On définit la *boule ouverte* de centre a et de rayon r par

$$B(a, r) = \{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}), \|x - a\|_2 < r\}.$$

Pour tout $i \in \mathbf{N}$, on note e_i la suite définie par

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad e_i(k) = \delta_{i,k} := \begin{cases} 1 & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si } k \neq i \end{cases}.$$

Pour tout $d \in \mathbf{N}$, on définit

$$F_d = \text{Vect}(e_0, \dots, e_d) \quad \text{et} \quad B_d = F_d \cap B(0, 1).$$

16. Soit $d \in \mathbf{N}$. Montrer que de toute suite d'éléments de B_d , on peut extraire une sous-suite qui converge.

Indication : On pourra procéder par récurrence et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass.

17. (a) Montrer que pour tout $d \in \mathbf{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_1, \dots, a_r \in B_d$ tels que

$$B_d \subset \bigcup_{i=1}^r B(a_i, \varepsilon).$$

- (b) De manière plus générale, montrer que pour tout $d \in \mathbf{N}$, pour tout $R > 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe a_1, \dots, a_r dans $B(0, R) \cap F_d$ tels que

$$B(0, R) \cap F_d \subset \bigcup_{i=1}^r B(a_i, \varepsilon).$$

18. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des points b_1, \dots, b_m de $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ tels que

$$T_\lambda(B(0, 1)) \subset \bigcup_{i=1}^m B(b_i, \varepsilon).$$

19. Interpréter le résultat de la question 18.

Correction du Thème 40

1. Il est clair que la suite nulle appartient à $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$.

Si $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont deux éléments de $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (\lambda u_n + v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + v_n^2.$$

Or, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|2\lambda u_n v_n| \leq |\lambda| (u_n^2 + v_n^2)$, ainsi : pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$(\lambda u_n + v_n)^2 \leq (\lambda^2 + |\lambda|) u_n^2 + (|\lambda| + 1) v_n^2.$$

Comme les séries $\sum_{n \geq 0} u_n^2$ et $\sum_{n \geq 0} v_n^2$ convergent, la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + v_n)^2$ converge et la suite $\lambda u + v \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$.

Cela montre que que $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, ainsi

$$\boxed{\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \text{ un espace vectoriel.}}$$

2. Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux éléments de $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$.

Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_n v_n| \leq \frac{1}{2} (u_n^2 + v_n^2)$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ converge absolument, donc converge.

- *Symétrie*

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est clairement symétrique : cela résulte de la commutativité du produit des réels.

- *Linéarité par rapport à la première variable*

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $w = (w_n)_{n \in \mathbf{N}}$ trois éléments de $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \langle u, v + \lambda w \rangle &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n (v_n + \lambda w_n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n w_n \\ &= \langle u, v \rangle + \lambda \langle u, w \rangle. \end{aligned}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la première variable. Par symétrie, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire par rapport à la deuxième variable.

- *Définie positive*

Si $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, alors si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0$, il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n = 0$ et donc $u = 0$. La réciproque est claire.

$$\boxed{\text{On a montré que } \langle \cdot, \cdot \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}).}$$

3. (a) Par définition, il existe $N \in \mathbf{N}^*$ tel que :

$$\forall n, p \geq N, \quad |a_n - a_p| \leq 1.$$

En particulier, pour tout $n \geq N$, on a $|a_n - a_N| \leq 1$, soit en utilisant l'inégalité triangulaire : pour tout $n \geq N$,

$$|a_n| = |a_n - a_N + a_N| \leq |a_N| + 1.$$

Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$|a_n| \leq \max \{|a_N| + 1, |a_0|, \dots, |a_{N-1}|\}.$$

On a montré que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée.

- (b) Comme la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite qui converge vers ℓ .

Soit $\psi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ une extractrice : on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\psi(n)} = \ell$.

Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n, p \geq N$, $|a_n - a_p| \leq \varepsilon$.

Comme ψ est une extractrice, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\psi(n) \geq n$ (car elle est strictement croissante), ainsi pour tout $n, p \geq N$, on a $|a_p - a_{\psi(n)}| \leq \varepsilon$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on a

$$|a_p - \ell| \leq \varepsilon.$$

On a montré que la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

4. (a) Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n, p \geq N$,

$$\|u_n - u_p\|_2 = \sqrt{\sum_{j=0}^{+\infty} (u_n(j) - u_p(j))^2} \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a

$$|u_n(k) - u_p(k)| \leq \sqrt{\sum_{j=0}^{+\infty} (u_n(j) - u_p(j))^2} \leq \varepsilon.$$

On a montré que pour tout $k \in \mathbf{N}$, la suite $(u_n(k))_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy.

- (b) On a montré à la question 4 (a), que pour tout $k \in \mathbf{N}$, la suite $(u_n(k))_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, donc, d'après la question 3 (b), pour tout $k \in \mathbf{N}$,

la suite $(u_n(k))_{n \in \mathbf{N}}$ converge.

- (c) Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n, p \geq N$,

$$\|u_n - u_p\|_2 \leq \varepsilon,$$

soit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_n(k) - u_p(k))^2 \leq \varepsilon^2.$$

En particulier, on a :

$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^m (u_n(k) - u_p(k))^2 \leq \varepsilon^2.$$

Lorsque l'on fait tendre p vers $+\infty$, on obtient

$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^m (u_n(k) - u(k))^2 \leq \varepsilon^2. \quad (40.2)$$

La ligne (40.2) étant vraie pour tout $m \in \mathbf{N}$, on récupère

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} (u_n(k) - u(k))^2} \leq \varepsilon,$$

soit

$$\|u_n - \tilde{u}\|_2 \leq \varepsilon.$$

On a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u_n - \tilde{u}\|_2 = 0$.

5. Comme la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, la suite est bornée. Soit M un majorant de $(|\lambda_n|)_{n \in \mathbf{N}}$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $(\lambda_n x_n)^2 \leq M^2 x_n^2$.
Comme la série $\sum_{n \geq 0} x_n^2$ converge, la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda_n x_n)^2$ converge.

On a montré que la suite $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$.

6. Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux éléments de $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et soit $\mu \in \mathbf{R}$. D'après la question 5, la suite $(\lambda_n x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. On a :

$$\begin{aligned} T_\lambda(x + \mu y) &= (\lambda_n(x_n + \mu y_n))_{n \in \mathbf{N}} \\ &= (\lambda_n x_n)_{n \in \mathbf{N}} + \mu (y_n)_{n \in \mathbf{N}} \\ &= T_\lambda(x) + \mu T_\lambda(y). \end{aligned}$$

On a montré que T_λ est linéaire, donc $T_\lambda \in \mathcal{L}(\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}))$.

7. Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \ker(T_\lambda)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a : $\lambda_n x_n = 0$.
Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\lambda_n \neq 0$, on en déduit que $x = 0$.
On a montré que $\ker(T_\lambda) \subset \{0\}$, l'inclusion réciproque étant claire, on a montré que $\ker(T_\lambda) = \{0\}$, donc T_λ est injectif.

8. On va montrer $i) \implies ii) \implies iii) \implies iv) \implies i)$.

$i) \implies ii)$ Soit $x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. Pour tout $h \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, par linéarité, on a :

$$f(x+h) = f(x) + f(h).$$

Par continuité de f en 0, on a $\lim_{h \rightarrow 0} f(h) = f(0) = 0$, il s'ensuit que

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x),$$

donc f est continue en tout point de $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, donc f est continue sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$.

$ii) \implies iii)$ En particulier, f est continue en 0, donc il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}), \quad (\|x - 0\|_2 \leq \alpha) \implies (\|f(x) - f(0)\|_2 \leq 1).$$

Soit $x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ non nul. Il est clair que

$$\left\| \frac{\alpha}{2\|x\|_2} x \right\|_2 = \frac{\alpha}{2} < \alpha,$$

donc

$$\left\| f\left(\frac{\alpha}{2\|x\|_2} x\right) \right\|_2 \leq \varepsilon.$$

Par linéarité, on obtient

$$\|f(x)\|_2 \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha} \|x\|_2.$$

Il est clair que cette dernière inégalité reste valable pour $x = 0$.
On a montré qu'il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$,

$$\|f(x)\|_2 \leq k \|x\|_2.$$

$iii) \implies iv)$ Pour tout $x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ tel que $\|x\|_2 = 1$, on a :

$$\|f(x)\|_2 \leq k \|x\|_2 = k.$$

$iv) \implies i)$ Soit $x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ non nul. Comme $\left\| \frac{1}{\|x\|_2} x \right\|_2 = 1$, on a

$$\left\| f\left(\frac{1}{\|x\|_2} x\right) \right\|_2 \leq k',$$

d'où par linéarité $\|f(x)\|_2 \leq k' \|x\|_2$. Cette inégalité reste valable pour $x = 0$.

Comme $f(0) = 0$, pour tout $x \in E$, on a

$$\|f(x) - f(0)\|_2 \leq k' \|x - 0\|_2.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \|x\|_2 = 0$, on en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|f(x) - f(0)\|_2 = 0,$$

ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$$

donc f est continue en 0.

L'équivalence est démontrée.

9. Comme f est continue sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, elle vérifie les conditions équivalentes de la question 8, en particulier,

$$\sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2} \quad \text{et} \quad \sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ \|x\|_2=1}} \|f(x)\|_2$$

existent.

- L'inégalité

$$\sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2} \geq \sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ \|x\|_2=1}} \|f(x)\|_2.$$

est claire

- Par linéarité de f , pour tout $x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ non nul,

$$\frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2} = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) \right\|_2.$$

Comme $\left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = 1$, il s'ensuit que

$$\sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2} \leq \sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ \|x\|_2=1}} \|f(x)\|_2.$$

On a montré que

$$\sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ x \neq 0}} \frac{\|f(x)\|_2}{\|x\|_2} = \sup_{\substack{x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}) \\ \|x\|_2=1}} \|f(x)\|_2.$$

10. Comme la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge, la suite $(|\lambda_n|)_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée. Soit $s = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\lambda_n|$. On a donc

$$\|T_\lambda(x)\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_n x_n)^2 \leq s^2 \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2.$$

Ainsi, pour tout $x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$,

$$\|T_\lambda(x)\|_2 \leq s \|x\|_2.$$

D'après la question 9, T_λ est continue sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et $s \leq \|T_\lambda\|$.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $s - \varepsilon > 0$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $s \geq |\lambda_{n_0}| \geq s - \varepsilon$.

Il est clair que $e_{n_0} \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et $\|e_{n_0}\|_2 = 1$.

De plus $\|T(e_{n_0})\|_2 = |\lambda_{n_0}|$, ainsi $\|T_\lambda\| \geq s - \varepsilon$.

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ vérifiant $s - \varepsilon > 0$,

$$s \geq \|T\| \geq s - \varepsilon,$$

il s'ensuit que $s = \|T_\lambda\|$.

On a montré que T_λ est continue sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et $\|T\| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |\lambda_n|$.

11. Soient $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deux éléments de $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. On a

$$\langle T_\lambda(x), y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_n x_n) y_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n (\lambda_n y_n) = \langle x, T_\lambda(y) \rangle.$$

On a montré que T_λ est auto-adjoint sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

12. (a) Comme T_λ est auto-adjoint sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$, on a :

$$\forall (x, y) \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})^2, \quad \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle.$$

Il est clair que cette relation reste vraie si $(x, y) \in A^2$.

On a montré que $T_{\lambda|_A}$ est auto-adjoint.

- (b) Soit $x \in A^\perp$. En utilisant le fait que $T_{\lambda|_A}$ est auto-adjoint, on a :

$$\forall y \in A, \quad \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle = 0$$

car $y \in A$ et A est stable par T .

On a montré que $\langle T(x), y \rangle = 0$ pour tout $y \in A$, donc $T(x) \in A^\perp$.

On a montré que A^\perp est stable par T .

13. Comme pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\lambda_n \neq 0$, on a $T_\lambda\left(\frac{1}{\lambda_n} e_n\right) = e_n$. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad e_n \in \text{im}(T_\lambda).$$

Cela prouve que

$$\text{Vect}(e_n, n \in \mathbf{N}) \subset \text{im}(T_\lambda).$$

Comme la famille $(e_n, n \in \mathbf{N})$ est libre, on en déduit que $\text{im}(T_\lambda)$ n'est pas de dimension finie.

14. (a) Soit $n \in \mathbf{N}$. La linéarité de T_n est claire.
 (b) Soit $x = (x_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$. On a

$$\begin{aligned} \|T_n(x)\|_2 &= \sqrt{\sum_{k=0}^n \lambda_k^2 x_k^2} \\ &\leq \max\{|\lambda_k|, k \in \mathbf{N}\} \sqrt{\sum_{k=0}^n x_k^2} \\ &\leq \|T_\lambda\| \|x\|_2. \end{aligned}$$

D'après la question 8, il s'ensuit que T_n est continue sur $\ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ et $\|T_n\| \leq \|T_\lambda\|$.

15. Par définition, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a

$$\text{im}(T_n) \subset \text{Vect}(e_0, \dots, e_n).$$

Or, $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ est un espace vectoriel de dimension finie donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$, T_n est une application linéaire de rang fini.

Pour tout $x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ tel que $\|x\|_2 = 1$, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \|(T_n - T)(x)\|_2^2 = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \lambda_k^2 x_k^2.$$

Mais la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers 0, donc si l'on fixe $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, $|\lambda_k| \leq \varepsilon$.

Ainsi, on a : pour tout $n \geq N$, pour tout $x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R})$ tel que $\|x\|_2 = 1$

$$\|T_n(x) - T(x)\|_2^2 \leq \varepsilon^2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k^2 \leq \varepsilon^2$$

car

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} x_k^2 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^2 = \|x\|_2^2 = 1.$$

En prenant le suprémum de l'inégalité établie, on récupère

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}, \forall n \in \mathbf{N}, (n \geq N) \implies (\|T - T_n\| \leq \varepsilon).$$

On a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T - T_n\| = 0$.

16. On procède par récurrence. Pour tout $d \in \mathbf{N}$, on introduit la proposition \mathcal{P}_d : « de toute suite d'éléments de B_d , on peut en extraire une sous-suite qui converge ».

\mathcal{P}_0 est vraie. En effet, soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'éléments de B_0 . L'inclusion $B_0 \subset F_0$ assure qu'il existe $a_n \in \mathbf{R}$ tel que $x_n = a_n e_0$.

Comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de B_0 , on a

$$\|x_n\|_2 = |a_n| \|e_0\|_2 = |a_n| \leq 1.$$

Il s'ensuit que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel a .

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|x_{\varphi(n)} - ae_0\|_2 = |a_{\varphi(n)} - a| \|e_0\|_2 = |a_{\varphi(n)} - a|,$$

on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = ae_0$.

Supposons \mathcal{P}_d vraie pour un entier naturel d , montrons que \mathcal{P}_{d+1} est vraie.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de B_{d+1} .

Comme $F_{d+1} = \text{Vect}(e_0, \dots, e_{d+1})$, on peut écrire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = (a_0(n), \dots, a_{d+1}(n), 0, \dots).$$

Il est clair que la suite \tilde{a} d'éléments de F_d définie par

$$\tilde{a}_n = ((a_0(n), \dots, a_d(n), 0, \dots))_{n \in \mathbb{N}}$$

est une suite de B_d . Par l'hypothèse de récurrence, il existe $\tilde{x} = (a_0, \dots, a_d, \dots)$ et une extractrice ψ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{a}_{\psi(n)} - \tilde{a}\|_2 = 0.$$

Comme la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : la suite $(a_{d+1}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, puis $(a_{d+1}(\psi(n)))_{n \in \mathbb{N}}$ l'est aussi. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une sous-suite qui converge vers un réel a_{d+1} : il existe une extractrice $\tilde{\psi}$ et $a_{d+1} \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{d+1}(\psi \circ \tilde{\psi}(n)) = a_{d+1}$.

La suite $(\tilde{a}_{\psi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \tilde{a} , donc la suite extraite $(\tilde{a}_{\psi \circ \tilde{\psi}(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers \tilde{a} .

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|x_{\psi \circ \tilde{\psi}(n)} - (a_0, \dots, a_d, a_{d+1}, \dots)\|_2^2 &= \|\tilde{a}_{\psi \circ \tilde{\psi}(n)} - (a_0, \dots, a_d, 0, \dots)\|_2^2 \\ &\quad + (a_{d+1}(\psi \circ \tilde{\psi}(n)) - a_{d+1})^2, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{a}_{\psi \circ \tilde{\psi}(n)} - (a_0, \dots, a_d, 0, \dots)\|_2^2 = 0$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{d+1}(\psi \circ \tilde{\psi}(n)) - a_{d+1})^2 = 0,$$

on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| x_{\psi \circ \tilde{\psi}(n)} - (a_0, \dots, a_d, a_{d+1}, \dots) \right\|_2^2 = 0.$$

On a extrait de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une sous-suite qui converge : on a montré que \mathcal{P}_{d+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_d est vraie pour tout entier naturel d .

On a montré que de toute suite de B_d , on peut en extraire une sous-suite qui converge.

17. (a) Soit $\varepsilon > 0$. On suppose qu'il n'existe pas de suite finie $(a_i)_{i \in [1, r]}$ de B_d telle que $B_d \subset \bigcup_{i=1}^r B(a_i, \varepsilon)$.

Soit $x_0 \in B_d$. Comme $B_d \not\subset B(x_0, \varepsilon)$, il existe $x_1 \in B_d \setminus B(x_0, \varepsilon)$. On a donc

$$\|x_0 - x_1\|_2 \geq \varepsilon.$$

Supposons x_0, \dots, x_n construits tels que :

$$\forall (i, j) \in [1, n], \quad (i \neq j) \implies (\|x_i - x_j\|_2 \geq \varepsilon).$$

Comme $B_d \not\subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon)$ (par hypothèse), il existe

$$x_{n+1} \in B_d \quad \text{et} \quad x_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon).$$

En particulier, pour tout $i \in [1, n]$,

$$\|x_i - x_{n+1}\|_2 \geq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $(i, j) \in [1, n+1]$, si $i \neq j$, alors $\|x_i - x_j\|_2 \geq \varepsilon$.

On a ainsi construit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de B_d telle que :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad (i \neq j) \implies (\|x_i - x_j\|_2 \leq \varepsilon).$$

D'après la question 16, on peut extraire une sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge : il existe un extractrice ψ et $x \in \ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| x_{\psi(n)} - x \right\|_2 = 0.$$

Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\left\| x_{\psi(n)} - x \right\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

puis tout $n, p \geq N$, on a

$$\left\| x_{\psi(n)} - x_{\psi(p)} \right\|_2 \leq \left\| x_{\psi(n)} - x \right\|_2 + \left\| x - x_{\psi(p)} \right\|_2 \leq \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Cela contredit la construction faite sur la suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$.

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_1, \dots, a_r \in \mathbf{S}^d$ tels que $B_d \subset \bigcup_{i=1}^r B(a_i, \varepsilon)$.

(b) Soient $R > 0$, $d \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon > 0$.

D'après la question 17 (a), il existe a_1, \dots, a_r des éléments de B_d tels que

$$B_d = B(0, 1) \cap F_d \subset \bigcup_{i=1}^r B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{R}\right).$$

Il s'ensuit que

$$B(0, R) \cap F_d \subset \bigcup_{i=1}^r B(Ra_i, \varepsilon).$$

On note que l'on a bien $Ra_i \in B(0, R)$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

18. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_n - T_\lambda\| = 0$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\|T_N - T\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par définition de la norme d'opérateur, on a donc

$$\forall x \in \ell^2(\mathbf{N}, \mathbf{R}), \quad \|T_\lambda(x) - T_N(x)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|x\|_2.$$

En particulier,

$$\forall x \in B(0, 1), \quad \|T_\lambda(x) - T_N(x)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (40.3)$$

D'après la question 14 (b) et par définition de la norme d'opérateur, on a

$$\forall x \in B(0, 1), \quad \|T_N(x)\|_2 \leq \|T_N\| \times \|x\|_2 \leq \|T_\lambda\|. \quad (40.4)$$

Comme $\text{im}(T_N) \subset F_N$ et (40.4), il s'ensuit que

$$T_N(B(0, 1)) \subset B(0, \|T_\lambda\|) \cap F_N.$$

D'après la question 17 (b), il existe a_1, \dots, a_r des éléments de $B(0, \|T_\lambda\|) \cap F_N$ tels que

$$B(0, \|T_\lambda\|) \cap F_N \subset \bigcup_{i=1}^r B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

soit

$$T_N(B(0, 1)) \subset \bigcup_{i=1}^r B\left(a_i, \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (40.5)$$

Soit $y \in T_\lambda(B(0, 1))$: il existe $x \in B(0, 1)$ tel que $y = T_\lambda(x)$. Par (40.3), on a :

$$\|y - T_N(x)\|_2 = \|T_\lambda(x) - T_N(x)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'après la ligne (40.5), il existe $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que

$$\|T_N(x) - a_j\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\|y - a_j\|_2 \leq \|y - T_N(x)\|_2 + \|T_N(x) - a_j\|_2 \leq \varepsilon.$$

Cela prouve que

$$y \in B(a_j, \varepsilon) \subset \bigcup_{i=1}^r B(a_i, \varepsilon).$$

On a montré que

$$T_\lambda(B(0, 1)) \subset \bigcup_{i=1}^r B(a_i, \varepsilon).$$

19. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 18, on peut écrire

$$T_\lambda(B(0, 1)) \subset \bigcup_{i=1}^r B(a_i, \varepsilon).$$

Il est clair que $\text{Vect}(a_1, \dots, a_r)$ est un espace vectoriel de dimension finie au plus égale à r .

Ainsi, même si $\text{im}(T_\lambda)$ n'est pas un espace vectoriel de dimension finie, il s'en « rapproche » aussi près que l'on veut (ε étant arbitraire).

Quelques remarques culturelles

Ce problème étudie l'opérateur diagonal qui est un des exemples les plus simples d'opérateur compact (i.e. il existe une suite d'opérateurs de rang fini qui converge vers l'opérateur diagonal, voir la question 15) et auto-adjoint. Il existe un résultat remarquable à propos de ces opérateurs.

Théorème. Théorème spectral.

Soit H un espace vectoriel séparable (qui veut dire très grossièrement, pas trop « gros ») muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et complet pour la norme associée au produit scalaire (on parle d'espace de Hilbert). Soit T un opérateur compact et auto-adjoint défini sur H . Alors, il existe une suite de réels $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle et une famille orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T(e_n) = \lambda_n e_n$ et

$$\forall x \in H, \quad T(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n.$$

Ce résultat généralise le théorème spectral en dimension finie établi au Thème 36 : « Réduction des matrices symétriques réelles ».

Thème 41

La méthode probabiliste

Thèmes abordés : Dénombrement, probabilité.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet montre quelques applications de la méthode dite probabiliste pour montrer des résultats non probabilistes. C'est Erdős qui développa et utilisa la première fois cette méthode. Cette méthode a des applications bien moins triviales que celles que nous présentons ici.

Nous donnons une première application naïve. La seconde application consiste à prouver un théorème de dénombrement.

Les deux parties sont largement indépendantes.

41.1 Un exemple « naïf »

Nous allons prouver le résultat suivant :

Proposition. *Soient 17 jetons placés en cercle : on suppose qu'il y a 5 jetons rouges et 12 jetons bleus.*

Il existe 7 jetons consécutifs contenant exactement 3 jetons rouges.

On place aléatoirement les 17 jetons sur le cercle trigonométrique.

On numérote les 17 jetons dans le sens trigonométrique J_0, \dots, J_{16} , le jeton J_0 étant choisi arbitrairement.

Si $k \in \mathbf{Z}$, J_k désigne le jeton $J_{k \pmod{17}}$.

Pour tout $i \in \llbracket 0, 16 \rrbracket$, la variable aléatoire X_i désigne le nombre de jetons rouges parmi les jetons J_i, \dots, J_{i+6} (la somme étant modulo 17).

Si $k \in \mathbf{Z}$, la variable aléatoire X_k est la variable aléatoire $X_{k \pmod{17}}$.

1. Combien y-a-t-il de façons de placer les jetons ?
2. Calculer $\sum_{i=0}^{16} \mathbf{E}(X_i)$. En déduire qu'il existe $k \in \llbracket 0, 16 \rrbracket$ tel que X_k prenne une valeur supérieure ou égale à 3.
3. (a) Montrer que si $X_k = 4$, alors il existe 7 jetons consécutifs contenant exactement 3 jetons rouges.

- (b) Montrer que si $X_k = 5$, alors il existe 7 jetons consécutifs contenant exactement 3 jetons rouges.
4. Terminer la preuve de la proposition.

41.2 Le théorème d'Erdős-Ko-Rado

Avant d'énoncer le théorème d'Erdős-Ko-Rado, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition. *Famille intersectante.*

Soit \mathcal{F} une famille d'ensembles. \mathcal{F} est intersectante si pour tout A et B dans \mathcal{F} , $A \cap B \neq \emptyset$.

Le but de cette partie est de prouver le théorème suivant :

Théorème. *Théorème d'Erdős-Ko-Rado*

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $k \in \mathbf{N}$, $k \leq \frac{n}{2}$. Soit $E = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Soit enfin \mathcal{F} une famille intersectante de sous-ensembles de E à k éléments. On a

$$\text{card}(\mathcal{F}) \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme. *Les hypothèses sont celles du théorème, en particulier, on a $k \leq \frac{n}{2}$.*

Pour tout $s \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on pose $A_s = \{s, s+1, \dots, s+k-1\}$, l'addition étant modulo n .

Alors, \mathcal{F} ne peut contenir plus de k ensembles A_s .

Nous prouvons le lemme. Soit $\ell \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $A_\ell \in \mathcal{F}$.

5. Montrer qu'il y a $2k-1$ ensembles A_s qui intersectent A_ℓ .
6. Montrer que l'on peut répartir ces $2k-2$ ensembles différents de A_ℓ en $k-1$ paires d'ensembles disjoints.
7. Terminer la preuve du lemme.

Nous prouvons le théorème. On note $\mathcal{A}_k(E)$ l'ensemble des parties à k éléments de E . On tire au hasard une permutation σ de $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$ et un élément de $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ de façon uniforme et indépendante.

On note X la variable aléatoire qui donne le choix de la permutation σ , ainsi X suit une loi uniforme sur $\mathcal{S}(E)$: l'ensemble des bijections de E dans E .

On note Y la variable aléatoire qui donne le choix de $i \in E$, ainsi Y suit une loi uniforme sur E .

On définit ainsi une variable aléatoire

$$Z : \begin{cases} \mathcal{S}(E) \times E & \longrightarrow \mathcal{A}_k(E) \\ (\sigma, i) & \longmapsto \{\sigma(i), \dots, \sigma(i+k-1)\} \text{ (addition modulo } n) \end{cases}$$

8. (a) Montrer que Z suit la loi uniforme sur $\mathcal{A}_k(E)$.

(b) En déduire que $\mathbf{P}(Z \in \mathcal{F}) = \frac{\text{card}(\mathcal{F})}{\binom{n}{k}}$.

9. (a) Justifier que l'on a aussi

$$\mathbf{P}(A \in \mathcal{F}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(E)} \mathbf{P}_{(X=\sigma)}(Z \in \mathcal{F}) \times \mathbf{P}(X = \sigma).$$

- (b) Montrer que

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}(E), \quad \mathbf{P}_{(X=\sigma)}(Z \in \mathcal{F}) \leq \frac{k}{n}.$$

- (c) En déduire que

$$\frac{\text{card}(\mathcal{F})}{\binom{n}{k}} \leq \frac{k}{n}.$$

10. Terminer la preuve du théorème d'Erdős-Ko-Rado.

Correction du Thème 41

1. Pour placer les jetons, il suffit de placer les jetons rouges ce qui se fait de

$$\boxed{\binom{17}{5} \text{ façons.}}$$

2. Comme chaque jeton est compté 7 fois et qu'il y a 5 jetons rouges, on a

$$\sum_{i=0}^{16} X_i = 7 \times 5 = 35, \text{ soit } \boxed{\sum_{i=0}^{16} \mathbf{E}(X_i) = 35.}$$

Il s'ensuit qu'il existe $k \in \llbracket 0, 16 \rrbracket$ tel que $\mathbf{E}(X_k) \geq \frac{35}{17} > 2$.

Comme X_k prend des valeurs entières comprises entre 0 et 5, X_k prend au moins l'une des valeurs suivantes : 3, 4 ou 5.

3. (a) Soient $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ les entiers compris entre 0 et 6 tels que les jetons $J_{k+i_1}, \dots, J_{k+i_4}$ soient rouges.

Le dernier jeton rouge se trouve soit parmi les jetons J_{k+7}, \dots, J_{k+11} , soit parmi les jetons J_{k-1}, \dots, J_{k-5} .

On suppose qu'il se trouve parmi les jetons J_{k+6}, \dots, J_{k+10} .

Ainsi parmi les jetons numérotés $J_{k+i_3}, J_{k+i_3-1}, \dots, J_{k+i_3-6}$, il y a exactement 3 jetons rouges : ceux numérotés J_{i_3}, J_{i_2} et J_{i_1} , les autres ne l'étant pas car il n'y a pas de jetons rouges dans les jetons J_{k-1}, \dots, J_{k-5} .

On a montré que si $X_k = 4$, alors il existe 7 jetons consécutifs contenant 3 jetons rouges.

- (b) Si $X_k = 5$, on remarque qu'il n'y a pas de jeton rouge dans les jetons J_{k+7}, \dots, J_{k+13} .

Soient $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5$ les entiers compris entre 0 et 6 tels que les jetons $J_{k+i_1}, \dots, J_{k+i_5}$ soient rouges.

Dans les jetons $J_{k+i_3}, J_{k+i_3+1}, \dots, J_{k+i_3+6}$, il y a donc exactement 3 jetons rouges : ceux numérotés P_{k+i_3}, P_{k+i_4} et P_{k+i_5} .

On a montré que si $X_k = 5$, alors il existe 7 jetons consécutifs contenant 3 jetons rouges.

4. À la question 2, on a montré l'existence d'un entier $k \in \llbracket 0, 16 \rrbracket$ tel que $X_k = 3, 4$ ou 5.

Si $X_k = 3$, alors, parmi les jetons $J_k, J_{k+1}, \dots, J_{k+6}$, il y a exactement 3 jetons rouges.

À la question 3 (a) (resp. question 3 (b)), on a montré que si $X_k = 4$ (resp. $X_k = 5$), alors il existe 7 jetons consécutifs contenant 3 jetons rouges.

Dans tous les cas, il existe 7 jetons consécutifs contenant 5 jetons rouges.

5. Pour $s \in \mathbf{Z}$, on pose $A_s = A_s \pmod{n}$.

Soit $A_s = \{s, \dots, s+k-1\}$ tel que A_s intersecte A_ℓ , alors il existe $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ et $m \in \mathbf{Z}$ (car l'addition est modulo n) tel que $\ell - nm \leq s+j \leq \ell - nm + k-1$, soit

$$\ell - nm - j \leq s \leq \ell - nm + k - j - 1.$$

Or, $0 \leq j \leq k-1$, donc $\ell - nm - k + 1 \leq s \leq \ell - nm + k - 1$, donc

$$A_s \in \{A_{\ell-nm-k+1}, A_{\ell-k+2}, \dots, A_{\ell-nm+k-1}\} = \{A_{\ell-k+1}, \dots, A_{\ell+k-1}\},$$

l'addition étant modulo n .

Réciproquement, si $A_s \in \{A_{\ell-k+1}, A_{\ell-k+2}, \dots, A_{\ell+k-1}\}$, alors A_s intersecte A_ℓ . Montrons que les ensembles $A_{\ell-k+1}, A_{\ell-k+2}, \dots, A_{\ell+k-1}$ sont deux à deux distincts.

Si i et j sont deux éléments de $\llbracket -k+1, k-1 \rrbracket$ tels que $A_{\ell+i} = A_{\ell+j}$.

Comme $\ell+i \in A_{\ell+j}$, il existe $s \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ et $\alpha \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\ell+i = \ell+j + \alpha n + s,$$

soit $i = j + \alpha n + s$. De même, comme $\ell+j \in A_{\ell+i}$, il existe $r \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ et $\beta \in \mathbf{Z}$ tels que

$$\ell+j = \ell+i + \beta n + r,$$

soit $j = i + \beta n + r$.

En sommant les relations $i = j + \alpha n + s$ et $j = i + \beta n + r$, on obtient

$$s+r = -(\alpha+\beta)n.$$

Mais $r \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ et $s \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, donc $r+s \in \llbracket 0, 2k-2 \rrbracket$.

Or, $2k-2 < n$ et $r+s$ est un multiple de n . Le seul multiple de n dans l'ensemble $\llbracket 0, 2k-2 \rrbracket$ est 0. Ainsi $r+s=0$, puis $r=s=0$ car $r \geq 0$ et $s \geq 0$. On en déduit que $i = j + \alpha n$.

Enfin, en utilisant le fait que $i, j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, on a $i-j \in \llbracket -2k+2, 2k-2 \rrbracket$.

$i-j$ étant un multiple de n et le seul multiple de n dans l'ensemble $\llbracket -2k+2, 2k-2 \rrbracket$ étant 0, on en déduit que $i = j$.

On a montré que les ensembles $A_{\ell-k+1}, A_{\ell-k+2}, \dots, A_{\ell+k-1}$ sont deux à deux distincts.

On a montré qu'il y a exactement $2k-1$ ensembles A_s qui intersectent A_ℓ .

6. Pour tout $j \in \llbracket -k+1, -1 \rrbracket$, la paire d'ensembles (A_j, A_{j+k}) est constituée d'éléments de $\{A_{\ell-k+1}, A_{\ell-k+2}, \dots, A_{\ell+k-1}\}$.

De plus, $A_j \cap A_{j+k} = \emptyset$ car $n \geq 2k$

On peut donc partitionner $\{A_{\ell-k+1}, A_{\ell-k+2}, \dots, A_{\ell+k-1}\}$ en $k-1$ paires d'ensembles deux à deux disjoints.

7. Comme \mathcal{F} est une famille intersectante, \mathcal{F} ne peut contenir au plus qu'un élément de chaque paire définie à la question 6.

Comme \mathcal{F} contient A_ℓ , il s'ensuit que \mathcal{F} contient au plus k ensembles A_s .

8. (a) Soit $A \in \mathcal{A}_k(E)$ et on note $I = \{i, \dots, i+k-1\}$.

Pour réaliser l'événement $Z = A$, on commence par choisir $i \in E$, ce que l'on peut faire de n façons.

Ensuite, on choisit $\sigma \in \mathcal{S}(E)$ tel que $\sigma(I) = A$ et $\sigma(E \setminus I) = E \setminus A$.

Comme $\text{card}(A) = k$, il y a $k! \times (n-k)!$ choix possibles.

En remarquant que $\text{card}(\mathcal{S}(E) \times E) = n \times n!$, par indépendance des tirages de i et σ , on en déduit que

$$\mathbf{P}(Z = A) = \frac{n \times k! \times (n-k)!}{n \times n!} = \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{A}_k(E))}.$$

On a montré que Z suit la loi uniforme sur $\mathcal{A}_k(E)$.

(b) Comme Z suit la loi uniforme sur $\mathcal{A}_k(E)$, on a

$$\mathbf{P}(Z \in \mathcal{F}) = \frac{\text{card}(\mathcal{F})}{\binom{n}{k}}.$$

9. (a) La famille $(X = \sigma)_{\sigma \in \mathcal{S}(E)}$ est un système complet d'événements. La formule des probabilités totales donne

$$\mathbf{P}(Z \in \mathcal{F}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(E)} \mathbf{P}_{(X=\sigma)}(Z \in \mathcal{F}) \times \mathbf{P}(X = \sigma).$$

(b) Soit Z' la variable aléatoire Z conditionnée par σ .

Comme Y suit la loi uniforme sur E , Z' suit la loi uniforme sur

$$\{\{\sigma(0), \dots, \sigma(k-1)\}, \dots, \{\sigma(n-1), \dots, \sigma(n+k-2)\}\}.$$

Le lemme précédent appliqué à la famille intersectante $\sigma^{-1}(\mathcal{F})$ (car $\sigma \in \mathcal{S}(E)$) et avec les ensembles

$$\begin{aligned} &\sigma^{-1}(\{\sigma(0), \dots, \sigma(k-1)\}) \\ &\vdots \\ &\sigma^{-1}(\{\sigma(n-1), \dots, \sigma(n+k-2)\}), \end{aligned}$$

soit A_0, \dots, A_{n-1} assure que $\text{card}(Z' \in \mathcal{F}) \leq k$, ainsi

$$\mathbf{P}(Z' \in \mathcal{F}) = \mathbf{P}_{(X=\sigma)}(Z \in \mathcal{F}) \leq \frac{k}{n}.$$

(c) En utilisant les résultats de la questions 8 et 9 (b), on en déduit que

$$\mathbf{P}(Z \in \mathcal{F}) \leq \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(E)} \frac{k}{n} \times \mathbf{P}(X = \sigma) = \frac{k}{n}.$$

10. En utilisant le résultat de la question 9 (c), on en déduit que

$$\text{card}(\mathcal{F}) \leq \binom{n-1}{k-1}.$$

Quelques remarques culturelles

Exceptionnellement, ce paragraphe ne sera pas consacré à des prolongements mais au mathématicien Paul Erdős, qui est l'un des plus grands mathématiciens avec plusieurs centaines d'articles. Il a notamment participé au développement de la théorie de Ramsey (voir le Thème 5 : « Coloriage sur les graphes » pour une introduction).

Paul Erdős a aussi laissé son nom à une fonction qui à un mathématicien associe son nombre de Erdős défini de la façon suivante : si le mathématicien a publié avec Erdős, alors son nombre de Erdős vaut 1, si le mathématicien a publié avec un mathématicien qui a publié avec Erdős mais qui n'a pas lui-même publié avec Erdős, son nombre de Erdős vaut 2, etc.

Par convention, le nombre de Erdős de Erdős lui-même vaut 0.

Thème 42

Convergence et probabilité

Thèmes abordés : Probabilité, série.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet montre de deux façons la convergence d'une suite de lois binomiales, avec de bons paramètres, vers une loi de Poisson : la seconde méthode permet de donner une estimation de la vitesse de convergence.

Les parties sont largement indépendantes.

42.1 Probabilité sur un univers infini

Définition. *Probabilité sur \mathbf{N} .*

Soit $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \rightarrow \mathbf{R}_+$ une application. On dit que \mathbf{P} est une *probabilité sur \mathbf{N}* si :

- i) $\mathbf{P}(\mathbf{N}) = 1$;
- ii) \mathbf{P} est σ -additive, i.e. pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de parties de \mathbf{N} deux à deux incompatibles,

$$\mathbf{P} \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

1. Soit \mathbf{P} une probabilité sur \mathbf{N} . Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(\{n\})$ converge et que sa somme vaut 1.
2. Soit $\mathbf{P} : \mathcal{P}(\mathbf{N}) \rightarrow \mathbf{R}_+$ une application σ -additive. Montrer que \mathbf{P} est une probabilité sur \mathbf{N} si, et seulement si, il existe une suite positive $(\mu_n)_{n \in \mathbf{N}}$ telle pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}(\{n\}) = \mu_n$ et la série $\sum_{n \geq 0} \mu_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n = 1$.

Définitions. *Système complet d'événements, variable aléatoire, variables aléatoires indépendantes.*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un ensemble infini muni d'une probabilité (on dit que $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ est un *espace probabilisé infini*).

- Soit $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'événements de Ω . On dit que la famille $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un *système complet d'événements* si :

i) la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constituée d'événements deux à deux incompatibles ;

$$\text{ii) } \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \Omega.$$

- Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une application. On dit que X est variable aléatoire sur \mathbb{N} si la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(X = n)$ converge et si sa somme vaut 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$. On dit que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes si : pour tout $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$,

$$\mathbf{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \in A_i).$$

On admet la proposition suivante qui généralise la formule des probabilités totales connu dans le cas d'univers fini :

Proposition. Formule des probabilités totales.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système complet d'événements. Soit B un événement.

La série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(A_n \cap B)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n \cap B) = \mathbf{P}(B).$$

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé infini et soit X une variable aléatoire définie sur cet espace probabilisé.

3. Soit $\mathbf{P}_X : \begin{cases} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \rightarrow \mathbf{R}_+ \\ A & \mapsto \mathbf{P}(X \in A) \end{cases}$. Montrer que \mathbf{P}_X est une probabilité sur \mathbb{N} .

42.2 Loi de Poisson

4. Soit $\lambda > 0$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ converge et que sa somme vaut 1.

Indication : On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction exp.

Définition. Loi de Poisson.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un univers probabilisé infini. Soit $\lambda > 0$. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ une variable aléatoire. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{P}(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

D'après la question 4, X ainsi définie est bien une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$. On suppose X et Y indépendantes et elles suivent respectivement des lois de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson dont on donnera le paramètre.
6. En déduire que si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes d'un même paramètre $\lambda > 0$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

42.3 Différentes façons de converger

Définitions. *Convergence presque-sûre, convergence en norme L^1 .*

Soit $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ et à valeurs dans \mathbf{N} . Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbf{N}$ une autre variable aléatoire. Pour tout $(n, k) \in \mathbf{N}^2$, on pose $\mu_{n,k} = \mathbf{P}(X_k = n)$ et $\mu_n = \mathbf{P}(X = n)$.

- On dit que la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge presque-sûrement vers la probabilité X si :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_{n,k} = \mu_n.$$

On note alors $X_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{p.s.} X$.

- Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose $\|X_k - X\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\mu_n - \mu_{n,k}|$.

On dit que la suite de probabilité $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge en norme L^1 si :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|X_k - X\|_1 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |\mu_n - \mu_{n,k}| = 0.$$

On note alors $X_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{L^1} X$.

7. Montrer que la convergence d'une suite de variables aléatoires à valeurs dans \mathbf{N} en norme L^1 implique la convergence presque-sûre.
8. Nous allons montrer que la convergence presque-sûre implique la convergence en norme L^1 . Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de variable aléatoires à valeurs dans \mathbf{N} définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui converge presque-sûrement vers une variable aléatoire X définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$. Pour tout $(n, k) \in \mathbf{N}^2$, on pose

$$\mu_{n,k} = \mathbf{P}(X_k = n) \quad \text{et} \quad \mu_n = \mathbf{P}(X = n).$$

Pour $(n, k) \in \mathbf{N}^2$, on pose $\nu_{n,k} = \min \{\mu_{n,k}, \mu_n\}$.

- (a) Vérifier que

$$\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2, \quad \min \{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

(b) Montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_{n,k} = 1.$$

(c) En déduire que la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers X en norme L^1 .

42.4 Convergence des lois binomiales vers la loi de Poisson

Soit $\lambda > 0$. Soit $(X_k)_{k \geq \lambda}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ qui suivent une binomiale $\mathcal{B}\left(k, \frac{\lambda}{k}\right)$ et soit X une probabilité de loi de Poisson de paramètre λ .

9. Montrer que la suite $(X_k)_{k \geq \lambda}$ converge presque-sûrement vers X .

10. En déduire que la suite $(X_k)_{k \geq \lambda}$ converge vers X en norme L^1 .

42.5 La preuve de Le Cam

La preuve précédente ne donne aucune information sur la vitesse de convergence. La preuve suivante, due à Le Cam, donne une estimation de la vitesse de convergence.

Définition. *Loi d'un couple de variables aléatoires.*

Soient X et Y deux variables aléatoires dont les supports respectifs sont inclus dans \mathbb{N} .

On définit la loi du couple (X, Y) par :

i) la donnée de $(X, Y)(\Omega) \subset \mathbb{N}^2$;

ii) la donnée de $\mathbf{P}(X = x \cap Y = y)$ pour tout $(x, y) \in (X, Y)(\Omega)$.

Soit $\lambda > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}$, $n > \lambda$. On pose $p = \frac{\lambda}{n} \in]0, 1[$. On considère n couples de variables aléatoires $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ définies sur \mathbb{N}^2 indépendantes et de même loi définie par : pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathbf{P}(X_i = x \cap Y_i = y) = \begin{cases} e^{-p} - p + p e^{-p} & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ p - p e^{-p} & \text{si } (x, y) = (0, 1) \\ p e^{-p} & \text{si } (x, y) = (1, 1) \\ \frac{p^n}{n!} e^{-p} & \text{si } (x, y) = (n, 0) \text{ et } n \geq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

On admettra que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes et que les variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n le sont aussi.

11. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, les variables X_i et Y_i suivent respectivement des lois de Poisson et de Bernoulli de paramètre p toutes les deux.

12. Montrer que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X_i = Y_i) \geq 1 - 2p^2.$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité suivante : pour tout réel x ,
 $e^{-x} \geq 1 - x$.

Soient les variables aléatoires $X = \sum_{k=1}^n X_k$ et $Y = \sum_{k=1}^n Y_k$.

13. Donner les lois des variables aléatoires X et Y .

14. Montrer que

$$\mathbf{P}(X \neq Y) \leq 2np^2.$$

15. (a) Soit $A \subset \mathbf{N}$. Montrer que $(X \in A) \subset (Y \in A) \cup (X \neq Y)$.

(b) Montrer que

$$|\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in A)| \leq \frac{2\lambda^2}{n}. \quad (42.1)$$

Soit $E = \{k \in \mathbf{N}, \mathbf{P}(X = k) \geq \mathbf{P}(Y = k)\}$.

16. En utilisant l'inégalité (42.1) à E et $\mathbf{N} \setminus E$, montrer que

$$\|X - Y\|_1 \leq \frac{4\lambda^2}{n}.$$

Correction du Thème 42

1. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \mathbf{P}(\{n\})$. Les ensembles A_n sont deux à deux incompatibles, donc

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{n\}),$$

soit, en utilisant $\mathbf{P}(\mathbf{N}) = 1$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{n\}) = 1.$$

2. On prouve les deux implications.

\Rightarrow Cette implication est claire, c'est le résultat de la question 1.

\Leftarrow Par définition d'une probabilité, il suffit de montrer que $\mathbf{P}(\mathbf{N}) = 1$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{n\}$.

On a $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \mathbf{N}$ et les A_n sont deux à deux incompatibles.

Par σ -additivité, on a

$$\mathbf{P}(\mathbf{N}) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n = 1.$$

On a bien montré que \mathbf{P} est une probabilité sur \mathbf{N} .

L'équivalence est montrée.

3. Il est clair que $\mathbf{P}_X(\mathbf{N}) = \mathbf{P}(X \in \mathbf{N}) = 1$.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de \mathbf{N} deux à deux incompatibles. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_X\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) &= \mathbf{P}\left(X \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \\ &= \mathbf{P}\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)\right) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} X^{-1}(A_n)\right). \end{aligned}$$

Comme les A_n sont deux à deux incompatibles, les $X^{-1}(A_n)$ le sont aussi. Puis, comme \mathbf{P} est une probabilité, on a :

$$\mathbf{P}_X\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X^{-1}(A_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_X(A_n).$$

On a montré que \mathbf{P}_X est une probabilité sur \mathbf{N} .

4. Soit $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$. On suit l'indication et on utilise la formule de Taylor avec reste intégral. Comme \exp est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} , on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad e^\lambda = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} + \int_0^\lambda \frac{e^t}{n!} (\lambda - t)^n dt.$$

Or, par croissance de \exp sur \mathbf{R} , on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \left| \int_0^\lambda \frac{e^t}{n!} (\lambda - t)^n dt \right| \leq \frac{e^\lambda}{n!} \lambda^{n+1}.$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^\lambda}{n!} \lambda^{n+1} = 0$ (c'est une croissance comparée si $\lambda > 1$), d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!} = e^\lambda.$$

On a montré que la série de terme général $e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = 1$.

5. Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire, on commence par donner le support : $(X + Y)(\Omega) = \mathbf{N}$. Soit $n \in \mathbf{N}$, pour calculer $\mathbf{P}(X + Y = n)$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X = k)_{k \in \mathbf{N}}$. Ainsi, en utilisant l'indépendance de X et Y

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X + Y = n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X + Y = n \cap X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n - k \cap X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n - k) \times \mathbf{P}(X = k). \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{P}(Y = n - k) = 0$ pour $k \geq n$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X + Y = n) &= \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X = k) \mathbf{P}(Y = n - k) \\ &= \sum_{k=0}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} \frac{\mu^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^k \mu^{n-k} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda + \mu)^n}{n!} \end{aligned}$$

On a montré que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

6. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on introduit la proposition \mathcal{P}_n : « pour toute suite de variables aléatoires indépendantes X_1, \dots, X_n suit suivent une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$ ».

\mathcal{P}_1 est vraie.

On suppose \mathcal{P}_n vraie pour un entier naturel n non nul.

Soit X_1, \dots, X_n une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent toute une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Par hypothèse de récurrence, la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

Comme les variables aléatoires $X_1 + \dots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètre $n\lambda$ et λ , d'après la question 5, la variable aléatoire $X_1 + \dots + X_{n+1}$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda + \lambda = (n+1)\lambda$.

On a montré que \mathcal{P}_{n+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

7. On conserve les notations utilisées à la définition. Soit $n \in \mathbf{N}$. Pour $k \in \mathbf{N}$, on a

$$|\mu_{n,k} - \mu_n| \leq \sum_{m=0}^{+\infty} |\mu_{m,k} - \mu_m|.$$

Or,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} |\mu_{m,k} - \mu_m| = 0,$$

donc par encadrement

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} |\mu_{n,k} - \mu_n| = 0.$$

On a montré que la convergence en norme L^1 implique la convergence presque-sûre.

8. (a) Si $a \leq b$, on a $\min\{a, b\} = a$ et

$$\frac{a+b-|a-b|}{2} = \frac{a+b-(b-a)}{2} = a.$$

Un calcul analogue montre que $\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}$ lorsque $a \geq b$.

$$\text{Ainsi, pour tout } (a, b) \in \mathbf{R}^2, \min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

- (b) Soit $\varepsilon > 0$.

Comme la série $\sum_{n \geq 0} \mu_n$ converge et de somme égale à 1, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel

$$\text{que pour tout } m \geq N, 1 \geq \sum_{n=0}^m \mu_n \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \nu_{n,k} = \sum_{n=0}^N \mu_n$ (par continuité de la fonction $x \mapsto \min\{x, a\}$, $a \in \mathbf{R}$ fixé, voir question 8 (a)), il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geq K$,

$$\left| \sum_{n=0}^N \nu_{n,k} - \sum_{n=0}^N \mu_n \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=0}^N \mu_n \leq \sum_{n=0}^N \nu_{n,k} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=0}^N \mu_n.$$

Il s'ensuit que pour tout $k \geq K$, on a :

$$\sum_{n=0}^N \nu_{n,k} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} \geq 1 - \varepsilon.$$

Comme pour tout $k \in \mathbf{N}$ et pour tout $N \in \mathbf{N}$, on a

$$1 \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_{n,k} \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_{n,k},$$

on a finalement montré que : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K \in \mathbf{N}$ tel que

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad (k \geq K) \implies 1 \geq \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_{n,k} \geq 1 - \varepsilon.$$

Donc, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_{n,k} = 1.$

(c) D'après la relation établie à la question 8 (a), pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_{n,k} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_{n,k} + \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n - \sum_{n=0}^{+\infty} |\mu_n - \mu_{n,k}| \\ &= 2 - \sum_{n=0}^{+\infty} |\mu_n - \mu_{n,k}|. \end{aligned}$$

D'après la question 8 (b)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_{n,k} = 1,$$

donc

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |\mu_n - \mu_{n,k}| = 0.$$

On a montré que la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge en norme L^1 vers la variable X .

9. Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrons que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_k = n) = \mathbf{P}(X = n).$$

On peut supposer $k \geq n$, ainsi pour tout $k \geq n$,

$$\mathbf{P}(X_k = n) = \binom{k}{n} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)^{k-n}.$$

Déjà, pour $k \geq n$, $\binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)!n!} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^n}{n!}$.

De plus, pour tout $k > \lambda$,

$$\left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)^{k-n} = \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)^{-n} \exp\left(k \ln\left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)\right).$$

Comme $\ln\left(1 - \frac{\lambda}{k}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\lambda}{k}$, on en déduit

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k \ln\left(1 - \frac{\lambda}{k}\right) = -\lambda,$$

puis par continuité de la fonction \exp sur \mathbf{R} , on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \exp\left(k \ln\left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)\right) = e^{-\lambda}.$$

En remarquant que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)^{-n} = 1$, on obtient finalement

$$\binom{k}{n} \left(\frac{\lambda}{k}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)^{k-n} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k^n}{n!} \frac{\lambda^n}{k^n} e^{-\lambda} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Ainsi, pour tout $n \geq \lambda$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{P}(X_k = n) = \mathbf{P}(X = n).$$

On a montré que la suite $(X_k)_{k \geq \lambda}$ converge presque-sûrement vers X .

10. La suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \geq \lambda}$ à valeurs dans \mathbf{N} converge presque-sûrement vers une variable aléatoire \tilde{X} à valeurs dans \mathbf{N} , d'après la question 8 (c) la suite $(X_k)_{k \geq \lambda}$ converge aussi en norme L^1 vers X .

11. Comme les couples suivent la même loi, les lois marginales aussi, ainsi il suffit de déterminer la loi de X_1 et Y_1 .

- *Loi de X_1*

Il est clair que $X_1(\Omega) = \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. La formule des probabilités totales donne :

$$\mathbf{P}(X_1 = k) = \mathbf{P}(X_1 = k \cap Y_1 = 0) + \mathbf{P}(X_1 = k \cap Y_1 = 1).$$

Cette somme se simplifie en : pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X_1 = k) = \begin{cases} e^{-p} - p + p e^{-p} + p - p e^{-p} = e^{-p} & \text{si } k = 0 \\ p e^{-p} & \text{si } k = 1 \\ e^{-p} \frac{p^k}{k!} & \text{si } k \geq 2 \end{cases}.$$

Ainsi, X_1 suit une loi de Poisson de paramètre p .

- *Loi de Y_1*

Il est clair que $Y_1(\Omega) = \llbracket 0, 1 \rrbracket$. De plus, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathbf{P}(Y_1 = 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(Y_1 = 1 \cap X_1 = n) = p - p e^{-p} + p e^{-p} = p.$$

Ainsi, Y_1 suit une Bernoulli de paramètre p .

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(p)$ et $Y_i \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

12. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_i = Y_i) &= \mathbf{P}(X_i = 0 \cap Y_i = 0) + \mathbf{P}(X_i = 0 \cap Y_i = 1) \\ &= e^{-p} - p + p e^{-p} + p e^{-p} \\ &= e^{-p} - p + 2p e^{-p}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité donnée en indication, on a

$$\mathbf{P}(X_i = Y_i) \geq 1 - p - p + 2p(1 - p),$$

soit

$$\mathbf{P}(X_i = Y_i) \geq 1 - 2p^2.$$

13. • X est la somme de n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes des lois de Poisson de paramètre p .

D'après la question 6, X suit une loi de Poisson de paramètre np .

• Y est la somme de n variables aléatoires qui suivent toutes des lois de Bernoulli de paramètre p .

Y suit donc une loi binomiale de paramètres n et p .

14. Il est clair que $(X \neq Y) \subset \bigcup_{i=1}^n (X_i \neq Y_i)$. Ainsi,

$$\mathbf{P}(X \neq Y) \leq \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^n (X_i \neq Y_i)\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \neq Y_i).$$

Or, d'après la question 12, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbf{P}(X_i = Y_i) \geq 1 - 2p^2,$$

d'où

$$\mathbf{P}(X_i \neq Y_i) \leq 1 - (1 - 2p^2) = 2p^2,$$

ainsi

$$\boxed{\mathbf{P}(X \neq Y) \leq 2np^2}.$$

15. (a) On a

$$(X \in A) = (X = Y \in A) \cup (Y \neq X \in A).$$

Comme $(Y \neq X \in A) \subset (X \neq Y)$, on en déduit que

$$\boxed{(X \in A) \subset (Y \in A) \cup (X \neq Y)}.$$

(b) L'inclusion établie à la question 15 (a) entraîne

$$\mathbf{P}(X \in A) \leq \mathbf{P}(X \neq Y) + \mathbf{P}(Y \in A),$$

soit

$$\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in A) \leq \mathbf{P}(X \neq Y).$$

Comme X et Y jouent des rôles symétriques, on a aussi

$$\mathbf{P}(Y \in A) - \mathbf{P}(X \in A) \leq \mathbf{P}(X \neq Y)$$

soit

$$\boxed{|\mathbf{P}(X \in A) - \mathbf{P}(Y \in A)| \leq \mathbf{P}(X \neq Y)}.$$

16. En utilisant l'inégalité de la question 15 (b) à E et $\mathbf{N} \setminus E$ avec le résultat de la question 14, on a

$$|\mathbf{P}(X \in E) - \mathbf{P}(Y \in E)| \leq \frac{2\lambda^2}{n}$$

et

$$|\mathbf{P}(X \in \mathbf{N} \setminus E) - \mathbf{P}(Y \in \mathbf{N} \setminus E)| \leq \frac{2\lambda^2}{n}.$$

Or,

$$\begin{aligned} \|X - Y\|_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} |\mathbf{P}(X = n) - \mathbf{P}(Y = n)| \\ &= (\mathbf{P}(Y \in \mathbf{N} \setminus E) - \mathbf{P}(X \in \mathbf{N} \setminus E)) + (\mathbf{P}(X \in E) - \mathbf{P}(Y \in E)). \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité demandée

$$\boxed{\|X - Y\|_1 \leq \frac{2\lambda^2}{n} + \frac{2\lambda^2}{n} = \frac{4\lambda^2}{n}}.$$

Thème 43

Inégalités de Khintchine

Thèmes abordés : Probabilité, formule de Taylor.

Difficulté : ■■■■□

Ce sujet montre que, pour un certain type de variables aléatoires, le moment d'ordre 2 et les moments d'ordre p , $p \in [1, +\infty[$, sont « comparables ».

La partie 1 expose le but du problème, la partie 2 montre l'inégalité de Hölder pour les variables aléatoires finies. La partie 3 consiste à montrer les inégalités de Khintchine.

Les parties sont largement indépendantes.

43.1 But du problème

Le but de ce problème est de montrer la proposition suivante.

Proposition. *Inégalités de Khintchine.*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur Ω indépendantes et de même loi :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad X_n(\Omega) = \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}.$$

Alors, pour tout $p \geq 1$, il existe deux constantes positives α_p et β_p tels que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, pour tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$\alpha_p \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2} \leq \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2}.$$

43.2 Inégalité de Hölder

Proposition. *Inégalité de Hölder*

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soient X et Y deux variables aléatoires finies positives et définies sur Ω . Alors, pour tout $(p, q) \in]1, +\infty[^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a :

$$\mathbf{E}(XY) \leq \mathbf{E}(X^p)^{1/p} \mathbf{E}(Y^q)^{1/q}.$$

On prouve l'inégalité de Hölder.

1. Montrer que

$$\forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2. Montrer l'inégalité de Hölder dans le cas où

$$\mathbf{E}(X^p) = \mathbf{E}(Y^q) = 1.$$

3. Montrer l'inégalité de Hölder dans le cas général.

43.3 Inégalités de Khintchine

Dans toute la suite, on fixe $p \geq 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{R}^n$ et $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une suite de variables aléatoires indépendantes toutes définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$ telles que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbf{P}(X_i = 1) = \mathbf{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

4. Soit $f_1, \dots, f_n : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbf{R}$. Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^n f_i(X_i) \right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(f_i(X_i)).$$

5. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}$ converge et montrer que

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Indication : On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

(b) En déduire que pour tout $t \in \mathbf{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ converge et montrer que

$$\operatorname{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

(c) Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch}(t) \leq e^{t^2/2}.$$

(d) Montrer enfin que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) \leq \exp \left(\frac{t^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right).$$

6. (a) Soit $(\alpha, \beta) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$. Déterminer le minimum sur \mathbf{R}_+^* de la fonction

$$x \mapsto -\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2.$$

- (b) Montrer que : pour tout $t \geq 0$ et pour tout $x \geq 0$,

$$\mathbf{P} \left(\left\{ \exp \left(x \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| \right) \geq e^{tx} \right\} \right) \leq 2 e^{-tx} \exp \left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right).$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité de Markov.

- (c) Montrer que

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P} \left(\left\{ \left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right\} \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right).$$

Définition. *Intégrale généralisée sur \mathbf{R}_+ .*

Soit $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue par morceaux. On dit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge si la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ admet une limite en $+\infty$. Le cas échéant, on note

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f(t) dt.$$

7. Soit X une variable aléatoire réelle positive finie définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$. Soit F_X la fonction définie sur \mathbf{R}_+ par

$$F_X(t) = \mathbf{P}(\{X > t\}).$$

- (a) Montrer qu'il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $t \geq A$, $F_X(t) = 0$.
 (b) Soit p un réel supérieur ou égal à 1. Montrer que X^p admet une espérance et montrer que

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt.$$

8. (a) Vérifier que pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$\int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x}.$$

En déduire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et calculer sa valeur.

(b) En déduire que pour tout $p \geq 1$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} pt^{p-1} e^{-t^2/2} dt$$

converge. On ne cherchera pas à la calculer.

9. On suppose dans cette question que $\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$. Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^4 \right) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t^2/2} dt.$$

10. (a) Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

(b) En déduire que pour tout $p \geq 1$, il existe un réel $\beta_p > 0$ tel que

$$\mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2}.$$

11. On suppose $p \geq 2$. Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2} \leq \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{1/p}.$$

12. On suppose $1 \leq p < 2$.

(a) Justifier qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4}$.

(b) Montrer que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) \leq \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{2\theta/p} \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^4 \right)^{(1-\theta)/2}.$$

(c) Montrer qu'il existe $\tilde{\alpha}_p > 0$ tel que

$$\tilde{\alpha}_p \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2} \leq \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{1/p}.$$

13. Conclure.

Correction du Thème 43

1. Soit $y \geq 0$. Si $y = 0$, l'inégalité à prouver est claire. On suppose $y > 0$ et on introduit la fonction f définie sur \mathbf{R}_+ par

$$f(x) = xy - \frac{x^p}{p} - \frac{y^q}{q}.$$

f est dérivable sur \mathbf{R}_+ et

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad f'(x) = y - x^{p-1}.$$

On a

$$\forall x \geq 0, \quad f'(x) > 0 \iff x < y^{1/(p-1)}.$$

En utilisant la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a :

$$f\left(y^{1/(p-1)}\right) = y^{1/(p-1)+1} - \frac{y^{p/(p-1)}}{p} - \frac{y^q}{q} = 0.$$

On en déduit que pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq 0$, soit

$$\boxed{\forall (x, y) \in (\mathbf{R}_+)^2, \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

2. D'après la question 1, on a

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X(\omega)Y(\omega) \leq \frac{X^p(\omega)}{p} + \frac{Y^q(\omega)}{q}.$$

Comme les variables X et Y sont finies, les variables aléatoires XY , X^p et Y^q admettent des espérances et en utilisant la croissance et la linéarité de l'espérance, on a

$$\boxed{\mathbf{E}(XY) \leq \mathbf{E}\left(\frac{X^p}{p} + \frac{Y^q}{q}\right) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \mathbf{E}(X^p)^{1/p} \mathbf{E}(Y^q)^{1/q}.$$

3. Si $\mathbf{E}(X^p) = 0$, alors X est presque-sûrement nulle et l'inégalité à montrer est claire. De même si $\mathbf{E}(Y^q) = 0$.

On suppose donc $\mathbf{E}(X^p) \neq 0$ et $\mathbf{E}(Y^q) \neq 0$.

Soient les variables aléatoires

$$\tilde{X} = \frac{X}{\mathbf{E}(X^p)^{1/p}} \quad \text{et} \quad \tilde{Y} = \frac{Y}{\mathbf{E}(Y^q)^{1/q}}$$

de sorte que

$$\mathbf{E}(\tilde{X}^p) = \mathbf{E}(\tilde{Y}^q) = 1.$$

D'après la question 2, on a

$$\mathbf{E}(\tilde{X}\tilde{Y}) \leq 1,$$

d'où, par linéarité de l'espérance,

$$\boxed{\mathbf{E}(XY) \leq \mathbf{E}(X^p)^{1/p} \mathbf{E}(Y^q)^{1/q}.$$

4. On procède par récurrence et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on introduit la proposition \mathcal{P}_k : « pour tout n -uplet de fonctions f_1, \dots, f_k ,

$$\mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^k f_i(X_i) \right) = \prod_{i=1}^k \mathbf{E}(f_i(X_i)) \text{ »}.$$

\mathcal{P}_1 est claire.

Soient $f_1, f_2 : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbf{R}$ deux fonctions. Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes, les variables aléatoires $f_1(X_1)$ et $f_2(X_2)$ le sont (lemme des coalitions). Ainsi

$$\mathbf{E}(f_1(X_1) f_2(X_2)) = \mathbf{E}(f_1(X_1)) \mathbf{E}(f_2(X_2)).$$

On a montré que \mathcal{P}_2 est vraie.

Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On suppose \mathcal{P}_k vraie. Soient $f_1, \dots, f_{k+1} : \{-1, 1\} \rightarrow \mathbf{R}$ ($k+1$) fonctions.

Les variables X_1, \dots, X_{k+1} sont indépendantes, donc les variables

$$f_1(X_1), \dots, f_{k+1}(X_{k+1})$$

le sont aussi (lemme des coalitions).

Par indépendance des variables aléatoires $f_1(X_1) \cdots f_k(X_k)$ et $f_{k+1}(X_{k+1})$, on a

$$\mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^k f_i(X_i) \times f_{k+1}(X_{k+1}) \right) = \mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^k f_i(X_i) \right) \mathbf{E}(f_{k+1}(X_{k+1})).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^k f_i(X_i) \right) = \prod_{i=1}^k \mathbf{E}(f_i(X_i)),$$

ainsi

$$\mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^{k+1} f_i(X_i) \right) = \prod_{i=1}^{k+1} \mathbf{E}(f_i(X_i)).$$

Ainsi, \mathcal{P}_{k+1} est vraie.

Par le principe de raisonnement par récurrence, la proposition \mathcal{P}_k est vraie pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, en particulier,

$$\boxed{\mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^n f_i(X_i) \right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}(f_i(X_i)).}$$

5. (a) Soit $t \in \mathbf{R}$. Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad e^t = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^t e^u (t-u)^n du.$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^t e^u (t-u)^n du \right| \leq \frac{\max\{e^t, 1\} |t|^{n+1}}{n!}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n!} \max\{1, e^t\} |t|^{n+1} = 0$ (croissance comparée lorsque $|t| > 1$), on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}$ converge et

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

(b) Soit $t \in \mathbf{R}$. Par définition de la fonction ch , on a :

$$\text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Or,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \right) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

Comme les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{(-t)^n}{n!}$ convergent et ont respectivement pour somme e^t et e^{-t} (question 5 (a)), on en déduit que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ converge et

$$\text{ch}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

(c) Soit $t \in \mathbf{R}$. On a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^n \frac{(t^2/2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{2^k k!} \right) t^{2k}.$$

Une simple récurrence montre que :

$$\forall k \in \mathbf{N}, \quad (2k)! \geq 2^k k!,$$

ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^k}{k!}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on récupère

$$\text{ch}(t) \leq \exp(t^2/2).$$

- (d) Soit $t \in \mathbf{R}$. Les variables X_1, \dots, X_n étant indépendantes, les variables aléatoires $e^{tc_1 X_1}, \dots, e^{tc_n X_n}$ le sont aussi (lemme des coalitions). D'après la question 4, on a :

$$\mathbf{E} \left(\exp \left(t \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E} \left(e^{tc_i X_i} \right).$$

Par le théorème de transfert, on a :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbf{E} \left(e^{tc_i X_i} \right) = \frac{1}{2} e^{tc_i} + \frac{1}{2} e^{-tc_i} = \operatorname{ch}(tc_i).$$

En utilisant la question 5 (c), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left(\exp \left(\alpha \sum_{i=1}^n c_i X_i \right) \right) &\leq \prod_{i=1}^n \exp \left(\frac{(\alpha c_i)^2}{2} \right) \\ &\leq \boxed{\exp \left(\frac{\alpha^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right)}. \end{aligned}$$

6. (a) On pose $g : x \mapsto -\alpha x + \frac{\beta}{2} x^2$. g est une fonction polynomiale de degré 2 dont le coefficient dominant est strictement négatif, donc g atteint son minimum en $\frac{\alpha}{\beta}$ et le minimum vaut $-\frac{\alpha^2}{2\beta}$.

- (b) On pose $R = \sum_{i=1}^n c_i X_i$. Soient $x > 0$ et $t \geq 0$.

De toute évidence,

$$e^{x|R|} \leq e^{xR} + e^{-xR}.$$

En utilisant la croissance de l'espérance, la linéarité de l'espérance et la question 5 (d) deux fois, on obtient :

$$\mathbf{E} \left(e^{x|R|} \right) \leq 2 \exp \left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right).$$

Or, $\{|R| > t\} = \{e^{x|R|} > e^{xt}\}$, ainsi en utilisant l'inégalité de Markov (on note que $e^{x|R|}$ est positive et admet une espérance car elle est finie), on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{P} (\{|R| > t\}) &= \mathbf{P} \left(\{e^{x|R|} > e^{xt}\} \right) \\ &\leq \frac{\mathbf{E} \left(e^{x|R|} \right)}{e^{xt}} \\ &\leq \boxed{2 e^{-xt} \exp \left(\frac{x^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right)}. \end{aligned}$$

(c) D'après la question 6 (a), le minimum de la fonction

$$x \mapsto 2 \exp \left(-xt + \frac{x^2}{2} \sum_{i=1}^n c_i^2 \right)$$

sur \mathbf{R}_+^* vaut $2 \exp \left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right)$.

En prenant cette valeur de x dans l'inégalité de la question 6 (b), on a montré que

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right| > t \right) \leq 2 \exp \left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i=1}^n c_i^2} \right).$$

7. Dans toute cette question, on notera $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ où

$$0 \leq x_1 < \dots < x_n$$

sont les valeurs prises par la variable aléatoire X .

(a) Par définition de F , on a

$$\forall t \geq x_n, \quad F_X(t) = 0.$$

(b) Par commodité, on pose $x_0 = 0$. On note que la fonction $t \mapsto pt^{p-1}F_X(t)$ est continue par morceaux et nulle pour $t > x_n$: l'intégrale

$\int_0^{+\infty} pt^{p-1}F_X(t) dt$ converge et par la relation de Chasles, on a :

$$\int_0^{+\infty} pt^{p-1}F_X(t) dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} pt^{p-1}F_X(t) dt.$$

Or

$$\int_0^{x_1} pt^{p-1}F_X(t) dt = \int_0^{x_1} pt^{p-1} dt = x_1^p$$

et pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_{i+1}} pt^{p-1}F_X(t) dt &= p \mathbf{P}(X > x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} t^{p-1} dt \\ &= \mathbf{P}(X > x_i) (x_{i+1}^p - x_i^p). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^{+\infty} pt^{p-1} F_X(t) dt = x_1^p + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X > x_i) (x_{i+1}^p - x_i^p).$$

De plus,

$$\begin{aligned} & x_1^p + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X > x_i) (x_{i+1}^p - x_i^p) \\ = & x_1^p + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X > x_i) x_{i+1}^p - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X > x_i) x_i^p \\ = & x_1^p + \sum_{i=2}^n \mathbf{P}(X > x_{i-1}) x_i^p - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbf{P}(X > x_i) x_i^p \\ = & (1 - \mathbf{P}(X > x_1)) x_1^p + x_n^p \mathbf{P}(X > x_n) \\ & + \sum_{i=1}^{n-1} (\mathbf{P}(X > x_{i-1}) - \mathbf{P}(X > x_i)) x_i^p \\ = & \mathbf{P}(X = x_1) x_1^p + \sum_{i=2}^{n-1} \mathbf{P}(X = x_i) x_i^p + \mathbf{P}(X = x_n) x_n^p \\ = & \mathbf{E}(X^p). \end{aligned}$$

On a montré que

$$\mathbf{E}(X^p) = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} F_X(t) dt.$$

8. (a) Pour tout $x \geq 0$, on a

$$\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = 1 - e^{-x}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = 1$, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

(b) Soit $p \geq 1$ et soit $g : t \mapsto pt^{p-1} \exp(-t^2/2)$. Comme g est positive sur \mathbf{R}_+ , la fonction $x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ est croissante sur \mathbf{R}_+ .

De plus, par croissance comparée, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{e^{-t}} = 0.$$

Ainsi, il existe $A \geq 0$ tel que pour tout $t \geq A$,

$$\frac{g(t)}{e^{-t}} \leq 1 \iff g(t) \leq e^{-t}.$$

Mais la fonction $t \mapsto \frac{g(t)}{e^{-t}}$ est continue sur le segment $[0, A]$, elle est donc bornée sur $[0, A]$ par M . Ainsi,

$$\forall t \geq 0, \quad \frac{g(t)}{e^{-t}} \leq \max\{1, M\} \iff g(t) \leq Ne^{-t},$$

où l'on a posé $N = \max\{1, M\}$.

Enfin, par croissance de l'intégrale et en utilisant la question 8 (a), on en déduit que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, \quad \int_0^x g(t) dt \leq N \int_0^x e^{-t} dt \leq N.$$

La fonction $x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ est croissante et majorée, on en déduit qu'elle admet une limite en $+\infty$.

On a montré que l'intégrale $\int_0^{+\infty} pt^{p-1} \exp(-t^2/2) dt$ converge.

9. On pose $R = \sum_{i=1}^n c_i X_i$. R prenant un nombre fini de valeurs, R^4 aussi. D'après la question 7 (b), on a

$$\mathbf{E}(R^4) = \mathbf{E}(|R|^4) = 4 \int_0^{+\infty} t^3 F_{|R|}(t) dt.$$

Or, d'après la question 6 (c),

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbf{P}(|R| \geq t) = F_{|R|}(t) \leq 2 \exp(-t^2/2).$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^3 \exp(-t^2/2) dt$ converge, on en déduit que

$$\mathbf{E}(R^4) \leq 8 \int_0^{+\infty} t^3 \exp(-t^2/2) dt.$$

10. (a) Il est classique que

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2 X_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} c_i c_j X_i X_j.$$

Comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $X_i^2 = 1$, on a $\mathbf{E}(X_i^2) = 1$ et par indépendance, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $i \neq j$,

$$\mathbf{E}(X_i X_j) = \mathbf{E}(X_i) \mathbf{E}(X_j) = 0.$$

Par linéarité de l'espérance, il s'ensuit que

$$\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right) = \sum_{i=1}^n c_i^2.$$

(b) Si tous les c_i sont nuls, l'inégalité est claire. On suppose que l'un des c_i au moins est non nul.

- On commence par supposer $\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$.

On pose $R = \sum_{i=1}^n c_i X_i$. Comme les variables aléatoires X_i prennent deux valeurs, il s'ensuit que $|R|$ prend un nombre fini de valeurs et il est clair que $|R|$ est à valeurs positives ou nulle. En utilisant les résultats des questions 7 (b) et 6 (c), on a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(|R|^p) &= \int_0^{+\infty} p t^{p-1} F_{|R|}(t) dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} p t^{p-1} \exp(-t^2/2) dt. \end{aligned}$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} p t^{p-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ converge d'après la question 8 (b).

On pose $\beta_p = \left(\int_0^{+\infty} p t^{p-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right)^{1/p}$. On a montré que l'on a

$$\mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{1/p} \leq \beta_p \underbrace{\mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2}}_{=1}.$$

- On ne suppose plus $\sum_{i=1}^n c_i^2 = 1$. Soient

$$\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^n c_i^2} \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tilde{c}_i = \frac{c_i}{\lambda}.$$

Il est clair que $\sum_{i=1}^n \tilde{c}_i^2 = 1$, ainsi d'après le point précédent, on a

$$\mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n \tilde{c}_i X_i \right|^p \right)^{1/p} \leq \beta_p.$$

En utilisant la définition des \tilde{c}_i , la linéarité de l'espérance et la question 10 (a), on obtient

$$\mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2}.$$

En posant $\beta_p = \left(\int_0^{+\infty} p t^{p-1} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \right)^{1/p}$, on a montré que

$$\boxed{\mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2}}.$$

11. On remarque que l'inégalité à montrer est claire pour $p = 2$. On suppose $p > 2$.

On pose $R = \sum_{i=1}^n c_i X_i$.

Comme $p > 2$, il existe $u > 1$ tel que $p = 2u$ ($\Leftrightarrow u = \frac{p}{2}$). Soit $v > 1$ tel que $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$. En appliquant l'inégalité de Hölder (question 3), on a

$$\mathbf{E}(R^2) = \mathbf{E}(|R|^2 \times 1) \leq \mathbf{E}(|R|^{2u})^{1/u} \mathbf{E}(1^v)^{1/v},$$

soit

$$\mathbf{E}(|R|^2)^{1/2} \leq \mathbf{E}(|R|^p)^{1/p}.$$

En remplaçant R par son expression, on obtient

$$\boxed{\forall p \geq 2, \quad \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2} \leq \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{1/p}}.$$

12. (a) De toute évidence, $\frac{1}{p} \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right]$, ainsi $\frac{1}{2} \in \left] \frac{1}{4}, \frac{1}{p} \right[$.

Or, tout élément de l'intervalle $\left] \frac{1}{4}, \frac{1}{p} \right[$ est une combinaison convexe de $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{p}$:

$$\exists \theta \in [0, 1], \quad \frac{1}{2} = \frac{\theta}{4} + \frac{1-\theta}{p}.$$

De plus, comme $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{p}$, on a $\theta \neq 0$ et $\theta \neq 1$.

On a montré qu'il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{p}$.

- (b) On pose à nouveau $R = \sum_{i=1}^n c_i X_i$.

On remarque que

$$R^2 = |R|^{2\theta} |R|^{2(1-\theta)}.$$

De plus, $\frac{1}{2} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{4} \iff 1 = \frac{2\theta}{p} + \frac{1-\theta}{2}$. En appliquant l'inégalité de Hölder, on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(R^2) &= \mathbf{E}\left(|R|^{2\theta} |R|^{2(1-\theta)}\right) \\ &\leq \mathbf{E}\left(\left(|R|^{2\theta}\right)^{p/2\theta}\right)^{2\theta/p} \mathbf{E}\left(\left(|R|^{2(1-\theta)}\right)^{2/(1-\theta)}\right)^{(1-\theta)/2}, \end{aligned}$$

soit après simplifications,

$$\mathbf{E}(R^2) \leq \mathbf{E}\left(|R|^p\right)^{2\theta/p} \mathbf{E}\left(|R|^4\right)^{(1-\theta)/2}.$$

En remplaçant R par son expression, on obtient l'inégalité souhaitée.

- (c) On pose $R = \sum_{i=1}^n c_i X_i$. D'après la question 11 (b) ii, on a

$$\mathbf{E}(R^2) \leq \mathbf{E}\left(|R|^p\right)^{2\theta/p} \left(\mathbf{E}(R^4)^{1/4}\right)^{2(1-\theta)}.$$

En utilisant le résultat de la question 10 (b), on a

$$\mathbf{E}(R^4)^{1/4} \leq \beta_4 \mathbf{E}(R^2)^{1/2}.$$

On en déduit

$$\mathbf{E}(R^2) \leq \mathbf{E}\left(|R|^p\right)^{2\theta/p} \beta_4^{2(1-\theta)} \mathbf{E}(R^2)^{1-\theta}.$$

Il s'ensuit que

$$\beta_4^{2(\theta-1)} \mathbf{E}(R^2)^\theta \leq \mathbf{E}\left(|R|^p\right)^{2\theta/p}.$$

En élevant à la puissance $\frac{1}{2\theta}$ ($x \mapsto x^{1/2\theta}$ est croissante sur \mathbf{R}_+^*), on récupère

$$\mathbf{E} (R^2)^{1/2} \beta_4^{(\theta-1)/\theta} \leq \mathbf{E} (|R|^p)^{1/p}.$$

En remarquant que $\theta = \frac{1/2 - 1/p}{1/4 - 1/p}$, θ ne dépend que de p . Ainsi, en posant $\tilde{\alpha}_p = \beta_4^{(\theta-1)/\theta}$, on a montré que

$$\tilde{\alpha}_p \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2} \leq \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{1/p}.$$

13. On pose $\alpha_p = \min \{1, \tilde{\alpha}_p\}$. Les questions 11 (a) et 11 (b) iii montrent que pour tout $p \geq 1$,

$$\alpha_p \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2} \leq \mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{1/p}. \quad (43.1)$$

La question 10 (b) montre que pour tout $p \geq 1$,

$$\mathbf{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n c_i X_i \right|^p \right)^{1/p} \leq \beta_p \mathbf{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n c_i X_i \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (43.2)$$

Les lignes (43.1) et (43.2) donnent l'encadrement souhaité.

Thème 44

Inégalité de Hoeffding

Thèmes abordés : Probabilité, matrice, déterminant.

Difficulté : ■■■□□

Ce sujet établit l'inégalité de Hoeffding. Cette inégalité est à classer dans la grande famille des inégalités dite de concentration de mesure, c'est-à-dire qui majore la probabilité qu'une variable aléatoire prenne des valeurs trop éloignées de sa moyenne. Un exemple déjà connu de vous : l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev.

Le lemme établi à la partie 1 sert dans la partie 2.

44.1 Un lemme préparatoire

Lemme. *Une majoration utile.*

Soit X une variable aléatoire finie réelle définie sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbf{P})$.

On suppose en outre que X est d'espérance nulle et bornée par 1. Alors

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{E} \left(e^{tX} \right) \leq \exp \left(\frac{t^2}{2} \right).$$

Nous prouvons le lemme.

- (a) Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Montrer que

$$\forall t \in [0, 1], \quad e^{(1-t)x+ty} \leq (1-t)e^x + te^y.$$

- (b) En déduire que

$$\forall x \in [-1, 1], \forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{tx} \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

2. En déduire que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{E} \left(e^{tX} \right) \leq \frac{1}{2} \operatorname{ch}(t).$$

3. (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}$ et montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

Indication : On pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

- (b) En déduire que pour tout $t \in \mathbf{R}$, la série $\sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$ converge et montrer que

$$\operatorname{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

4. Terminer la preuve du lemme.

44.2 Énoncé et preuve de l'inégalité de Hoeffding

Théorème. Inégalité de Hoeffding.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées définies sur un même univers Ω .

On suppose toutes les variables aléatoires finies.

On suppose que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe $c_n > 0$ tel que $|X_n| \leq c_n$ presque-sûrement.

Alors, si l'on pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leq 2 \exp \left(- \frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2} \right).$$

Nous prouvons le théorème. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $\varepsilon > 0$.

5. Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad \mathbf{P}(S_n > \varepsilon) \leq \frac{\mathbf{E}(e^{tS_n})}{e^{t\varepsilon}}.$$

6. En utilisant l'indépendance des variables aléatoires et le lemme *Une majoration utile*, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad \mathbf{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp \left(\frac{t^2 \sum_{j=1}^n c_j^2}{2} - t\varepsilon \right).$$

7. (a) Soit $(a, b) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$. Étudier sur \mathbf{R}_+^* la fonction

$$f : t \mapsto \frac{at^2}{2} - bt.$$

En particulier, on s'intéressera à son minimum.

- (b) En déduire que

$$\mathbf{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

8. En utilisant l'inégalité de la question 7 (b), montrer que

$$\mathbf{P}(-S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

9. Terminer la preuve de l'inégalité de Hoeffding.

Correction du Thème 44

1. (a) L'inégalité à montrer est claire lorsque $x = y$. On suppose donc $x \neq y$. Sans perte de généralité, on peut supposer $x < y$. Soit la fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(t) = e^{(1-t)x+ty} - (1-t)e^x - te^y.$$

f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$ et pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$f'(t) = (y-x)e^{(1-t)x+ty} + e^x - e^y$$

et

$$f''(t) = (y-x)e^{(1-t)x+ty}.$$

Il s'ensuit que f'' est strictement positive sur $[0, 1]$, donc f' est strictement croissante sur $[0, 1]$.

Or, $f'(0) = (y-x)e^x + e^x - e^y$, d'où en appliquant le théorème des accroissements finis à \exp entre x et y : il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$e^y - e^x = e^c(y-x),$$

ainsi,

$$f'(0) = (y-x)(e^x - e^c) < 0.$$

Un raisonnement analogue montre que $f'(1) > 0$.

On en déduit que f' s'annule en une unique valeur $\alpha \in]0, 1[$ et pour tout $x \in [0, \alpha]$, $f'(x) \leq 0$ et pour tout $x \in [\alpha, 1]$, $f'(x) \geq 0$.

On en déduit que f est décroissante sur $[0, \alpha]$ et croissante sur $[\alpha, 1]$.

Comme $f(0) = f(1) = 0$, on en déduit que pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) \leq 0$, soit

$$\boxed{\forall t \in [0, 1], \quad e^{(1-t)x+ty} \leq (1-t)e^x + te^y.}$$

Remarque. Le lecteur ayant traité le Thème 26 : « Une introduction aux fonctions convexes » reconnaîtra une inégalité de convexité pour la fonction \exp .

- (b) Soit $x \in [-1, 1]$ et $t \in \mathbf{R}$. On remarque que $\frac{1-x}{2}$ et $\frac{1+x}{2}$ sont deux réels de $[0, 1]$ dont la somme vaut 1. En utilisant la question 1 (a), on récupère

$$\boxed{e^{tx} = \exp\left(\frac{1-x}{2} \times (-t) + \frac{1+x}{2} \times t\right) \leq \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.}$$

2. Comme X est telle que $|X|$ est presque-sûrement bornée par 1, d'après la question 1 (b), on a

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad e^{tX} \leq \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t.$$

Notons que la variable aléatoire e^{tX} est finie (car X l'est), donc admet une espérance. Par croissance et linéarité de l'espérance, on a

$$\mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leq \frac{1-\mathbf{E}(X)}{2}e^{-t} + \frac{1+\mathbf{E}(X)}{2}e^t.$$

Comme $E(X) = 0$, on en déduit

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad E(e^{tX}) \leq \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t) = \frac{1}{2} \operatorname{ch}(t).$$

3. (a) Soit $t \in \mathbf{R}$. Par la formule de Taylor avec reste intégral, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad e^t = \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^t e^u (t-u)^n du.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a :

$$0 \leq \frac{1}{n!} \left| \int_0^t e^u (t-u)^n du \right| \leq \frac{\max\{1, e^t\} |t|^{n+1}}{n!}.$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\max\{1, e^t\} |t|^{n+1}}{n!} = 0$$

(croissance comparée lorsque $|t| > 1$), on en déduit que

$$e^t = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}.$$

(b) Par définition de la fonction ch , on a : pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Or, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k}{k!} + \sum_{k=0}^n \frac{(-t)^k}{k!} \right) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

On en déduit que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch}(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k}}{(2k)!}.$$

4. Pour terminer la preuve du lemme, il suffit de montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right),$$

soit en utilisant les résultats obtenus aux questions 3 (a) et 3 (b), il suffit de montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!}.$$

Une récurrence facile permet de montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad (2n)! \geq 2^n n!,$$

ce qui permet de conclure que

$$\mathbf{E} \left(e^{tX} \right) \leq \exp \left(\frac{t^2}{2} \right).$$

5. Attention! On ne peut pas utiliser directement l'inégalité de Markov, car la variable S_n n'est, a priori, pas positive. On commence par remarquer que

$$\forall t > 0, \quad \mathbf{P} (S_n > \varepsilon) = \mathbf{P} \left(e^{tS_n} > e^{t\varepsilon} \right).$$

On peut utiliser l'inégalité de Markov à la variable aléatoire e^{tS_n} car elle est positive et admet une espérance (car elle est finie). On en déduit

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad \mathbf{P} (S_n > \varepsilon) = \mathbf{P} \left(e^{tS_n} > e^{t\varepsilon} \right) \leq \frac{\mathbf{E} (e^{tS_n})}{e^{t\varepsilon}}.$$

6. Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. On a

$$\mathbf{E} \left(e^{tS_n} \right) = \mathbf{E} \left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i} \right).$$

Par indépendance, on en déduit que

$$\mathbf{E} \left(e^{tS_n} \right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E} \left(e^{tX_i} \right).$$

En utilisant le lemme établi à la question 4, on récupère

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \mathbf{E} \left(e^{tX_i} \right) = \mathbf{E} \left(\exp \left(c_i t \frac{X_i}{c_i} \right) \right) \leq \exp \left(\frac{c_i^2 t^2}{2} \right).$$

On en déduit

$$\mathbf{E} \left(e^{tS_n} \right) \leq \prod_{i=1}^n \exp \left(\frac{c_i^2 t^2}{2} \right) = \exp \left(\frac{t^2 \sum_{i=1}^n c_i^2}{2} \right).$$

Finalement, en utilisant l'inégalité de la question 5, on a montré que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad \mathbf{P} (S_n > \varepsilon) \leq \exp \left(\frac{t^2 \sum_{j=1}^n c_j^2}{2} - t\varepsilon \right).$$

7. (a) f est dérivable sur \mathbf{R}_+^* et

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad f'(t) = at - b.$$

Comme a et b sont strictement positifs, on en déduit que f est décroissante sur $\left[0, \frac{b}{a}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{b}{a}, +\infty\right[$.

$$\text{Ainsi, } f \text{ admet un minimum en } \frac{b}{a} \text{ et } f\left(\frac{b}{a}\right) = -\frac{b^2}{2a}.$$

- (b) L'inégalité de la question 6 étant valable pour tout $t > 0$, en particulier pour $t = \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n c_i^2}$. D'après le calcul fait à la question 7 (a), pour $t = \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n c_i^2}$, on a

$$\frac{t^2 \sum_{j=1}^n c_j^2}{2} - t\varepsilon = -\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}.$$

On en déduit que

$$\mathbf{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

8. On utilise l'inégalité de la question 7 avec la suite de variables aléatoires $(-X_n)_{n \in \mathbf{N}}$. On note que l'on a toujours $|-X_n| \leq c_n$ presque-sûrement. On a

$$\mathbf{P}(-S_n > \varepsilon) = \mathbf{P}(S_n < -\varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

9. On conclut la preuve de l'inégalité de Hoeffding en utilisant les inégalités établies aux questions 7 (b) et 8 :

$$\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) = \mathbf{P}(S_n > \varepsilon) + \mathbf{P}(S_n < -\varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2 \sum_{k=1}^n c_k^2}\right).$$

Quelques remarques culturelles

Ce sujet traite de l'inégalité de Hoeffding qui se range dans la vaste famille des inégalités de concentration de mesure.

L'inégalité de Hoeffding est valable pour des variables quelconques (i.e. aucune hypothèse n'est faite sur la loi des variables aléatoires), ce qui est d'une certaine façon étrange. La grosse hypothèse se trouve dans le fait que les variables aléatoires sont supposées bornées, ce qui arrive peu souvent en pratique.

Les inégalités de concentration sont des outils clés pour démontrer des résultats importants. On peut citer par exemple le théorème de Dvoretzky qui stipule que dans l'espace vectoriel \mathbf{R}^n , muni d'une norme quelconque (non euclidienne, a priori), il existe des sous-espaces vectoriels dont la dimension est « proche » de $\ln(n)$ et dont la boule unité de la restriction de la norme à ce sous-espace vectoriel est arbitrairement proche de la boule unité d'une norme euclidienne.

Bibliographie

- [1] S. Al Fakir, *Algèbre et théorie des nombres-Cryptographie-Primalité*. Ellipses, 2003.
- [2] P. Ageron, *Logique, ensembles, catégories : Le point de vue constructif*. Ellipses, 2000.
- [3] V. Beck, J. Malick, G. Peyré, *Objectif Agrégation*. H&K, 2005.
- [4] T. Belhaj Soulami, *Les olympiades de mathématiques. Réflexes et stratégies*. Ellipses, 2007.
- [5] J. Calais, *Éléments de théorie des anneaux*. Ellipses, 2006.
- [6] J. Calais, *Extensions de corps : Théorie de Galois*. Ellipses, 2006.
- [7] B. Candelpergher, *Calcul intégral*. Cassini, 2009.
- [8] W. A. Coppel, *The solution of equations by iterations*. Trinity College. Cambridge, 1954. Mathematisch Instituut der Technische Hogeschool, 1947.
- [9] N. G. de Bruijn, T. A. Springer, *On the zeros of a polynomial and of its derivative II*. Mathematisch Instituut der Technische Hogeschool, 1947.
- [10] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1997.
- [11] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 1*. Cassini, 2018.
- [12] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 2*. Cassini, 2009.
- [13] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 3*. Cassini, 2013.
- [14] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, Analyse 1*. Cassini, 2018.
- [15] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, Analyse 2*. Cassini, 2013.
- [16] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, Analyse 3*. Cassini, 2014.
- [17] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, Analyse 4*. Cassini, 2012.
- [18] X. Gourdon, *Algèbre*. Ellipses, 2009.
- [19] X. Gourdon, *Analyse*. Ellipses, 2008.
- [20] B. Hauchecorne, *Les Contre-Exemples en Mathématiques*. Ellipses, 2017.
- [21] I. Kaplansky, *Solution of the « problème des ménages »*. Amer. Math. Monthly 87, 1980.
- [22] J-Y. Ouvrard, *Probabilités : Tome 1, Licence-CAPES*. Cassini, 2008.
- [23] D. Perrin, *Cours d'algèbre*. Ellipses 1996.
- [24] D. Perrin, *La suite logistique et le chaos*. <https://www.math.u-psud.fr/perrin/>.
- [25] D. Perrin, *Réseaux et applications*. <https://www.math.u-psud.fr/perrin/>.

- [26] J-E. Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre & Géométrie*. Deboek, 2017.
- [27] R. Tyrell Rockafellar, *Convex Analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics and Physics, 1997.
- [28] F. Rouvière, *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*. Cassini, 2015.
- [29] , W. Rudin, *Analyse réelle et complexe*. Dunod, 2009.
- [30] E. Thomas, *Sur la convexité du déterminant*. Revue Quadrature numéro 112.
- [31] G. Vial, *Le système proie-prédateur de Volterra-Lotka*. <http://perso.ec-lyon.fr/vial.gregory/>.
- [32] N. Zinn-Justine, *Méthodes algébriques en théorie des nombres*. Ellipses, 2010.

44 problèmes olympiens de mathématiques

De la MPSI à l'agrégation

Cet ouvrage propose 44 problèmes de mathématiques pour les élèves de CPGE en classe de MPSI et de MP ; ils seront également utiles aux candidats préparant l'agrégation.

Ces problèmes ont été conçus pour mettre en relation plusieurs parties du programme afin d'être le plus près possible des sujets de concours.

Des questions d'informatique, en langage Python, sont également proposées.

Par ailleurs, ces thèmes vous permettront de découvrir des domaines des mathématiques non abordés en classe mais tout aussi passionnants. Ainsi, vous découvrirez la notion de graphes, la décomposition en mille-feuille ou encore une introduction à la théorie des distributions, et la liste n'est pas exhaustive ! Les problèmes sont de difficulté variée et une correction détaillée vous permettra de vérifier vos résultats.

Au bas de certains problèmes, une note souvent historique permet de situer le problème dans un cadre historique et de le motiver.

Erik Thomas est ancien élève de l'École normale supérieure de Rennes et docteur en mathématiques. Il occupe actuellement un poste de professeur agrégé en CPGE.

www.editions-ellipses.fr

