

Christine Amory • Françoise Bastin
Jacqueline Crasborn • Christophe Dozot • Gilles Godefroy

 **Fomesoutra.com**
ça soutra!

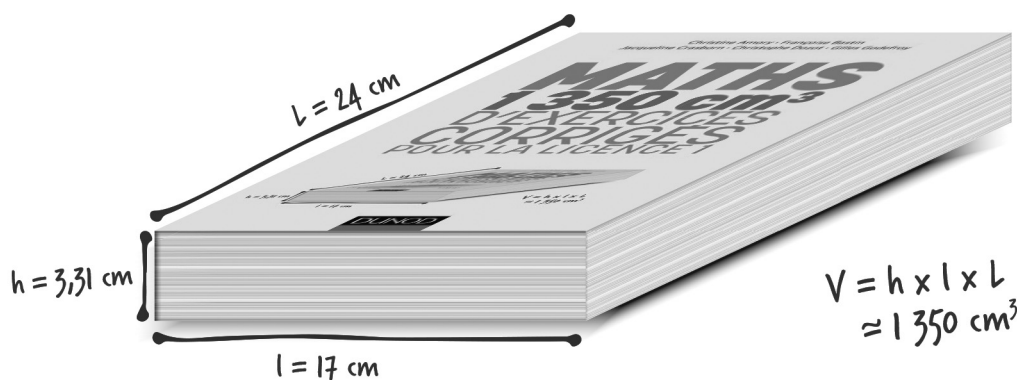
MATHS

1 350 cm³

D'EXERCICES

CORRIGÉS

POUR LA LICENCE 1



DUNOD

Conception de la couverture : Clément Pinçon (WIP)
Illustrations : Rachid Marai

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocopillage. Le Code de la propriété intellectuelle du 1^{er} juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique s'est généralisée dans les établissements	d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).
	

© Dunod, 2019
11, rue Paul Bert, 92240 Malakoff
www.dunod.com
ISBN 978-2-10-079197-2

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2° et 3° a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Introduction

Cet ouvrage contient de nombreux exercices qui portent sur diverses matières de base en mathématique nécessaires pour aborder des études en sciences. Il s'adresse à des étudiants entamant des études supérieures.

L'ouvrage débute par un « petit test ». Le lecteur le réalisera... ou non, selon son choix. L'objectif de ce test est de donner une idée au lecteur/utilisateur du niveau qu'il maîtrise. Il est basé sur de longues années de pratique.

L'ouvrage se poursuit avec un chapitre constitué de problèmes élémentaires. Nous entendons par là des questions relatives à la bien utile « règle de trois », à de petits problèmes qui se posent dans la vie courante, à des questions de logique de base, ... Nous avons fait en sorte que ces problèmes soient présentés selon une complexité croissante (contexte plus large, nécessitant une analyse, une modélisation et une identification des données utiles plus poussées), en termes de gestion des données et d'étendue des outils concernés pour les résoudre.

Les chapitres suivants sont tous organisés selon la même structure : un rappel de la théorie et des notations qui y sont utilisées, des exercices de base résolus en détail, une liste d'exercices pour s'entraîner (semblables aux exercices de base) et leurs solutions, des exercices plus élaborés, résolus également.

Précisons ce que nous entendons par « plus élaborés ». Il s'agit en fait d'exercices qui demandent davantage de réflexion et présentent tous un aspect qui les rend plus complexes à résoudre. Certains concernent des résultats théoriques, d'autres des applications contextualisées. Ils brassent tous plusieurs compétences et outils.

En fin d'ouvrage apparaît une annexe constituée de deux parties. L'une reprend quelques notations ; on sait tous que selon les pratiques, elles peuvent grandement différer ! L'autre reprend des informations complémentaires sur des mathématiciens célèbres, des compléments d'informations quant au contexte dans lequel certains problèmes sont apparus, et parfois des notes sur l'histoire de leur résolution. Afin de ne pas alourdir la présentation de l'exercice, nous avons préféré les rassembler dans une annexe.

Présentons brièvement chacun des chapitres qui suivent celui consacré aux problèmes élémentaires (premier chapitre).

Le deuxième chapitre reprend des bases à maîtriser et, notamment, des manipulations de système métrique.

Le troisième chapitre présente une étude générale des fonctions. Il débute par les notions et définitions de base et se poursuit par des exercices utilisant des outils fondamentaux tels que les limites, la dérivation et la primitivation.

Le quatrième chapitre présente une étude de base du calcul intégral.

Le cinquième chapitre traite d'équations différentielles. Il est essentiellement consacré aux équations différentielles linéaires à coefficients constants, outil très important en sciences, qui permet déjà de multiples modélisations.

Le dernier chapitre (annexe) contient quelques précisions de notations ainsi que quelques informations bibliographiques et historiques.

Dans la bibliographie, outre les ouvrages consultés, nous citons les sites sur lesquels nous avons puisé des idées ou des informations. Nous nous excusons par avance auprès des auteurs/concepteurs si nous avons omis de citer l'un ou l'autre.

Nous tenons à remercier très vivement toutes les personnes qui sont intervenues d'une manière ou d'une autre dans la genèse et la conception de cet ouvrage, ainsi que Madame Laetitia Herin pour sa disponibilité et son aide.

La vraie science est une ignorance qui se sait.
Montaigne.

Peu importe votre lenteur d'aller, à condition que vous ne vous arrêtiez pas.
Confucius.

Les dix commandements en mathématique

1. Bien organisé tu seras.
2. Les notions apprises tu approfondiras.
3. Conditions nécessaire et suffisante jamais tu ne confondras.
4. Des fonctions élémentaires les caractéristiques tu connaîtras.
5. À la question tu répondras, la marche à suivre te guidera.
6. À la cohérence de ta phrase mathématique attentif tu seras.
7. À calcul et raisonnement, sens critique toujours tu allieras.
8. Avant d'appliquer un théorème, les hypothèses tu vérifieras.
9. Gagner en autonomie et efficacité tu devras.
10. Aux cours tu écouteras, à la maison tu travailleras.

Table des matières

Introduction	V
Les dix commandements en mathématique	VII
Test préliminaire	1
Chapitre 1 Problèmes élémentaires	7
1. Rappels théoriques	7
2. Exercices de base résolus	7
3. Exercices pour s'entraîner	12
Chapitre 2 Outils de base	15
1. Rappels théoriques	15
2. Unités de mesure	21
3. Nombres réels	23
4. Équations et inéquations	33
5. Systèmes d'équations et d'inéquations linéaires	50
6. Polynômes et fractions rationnelles	58
7. Coniques	81
8. Trigonométrie	99
9. Calcul vectoriel, droites dans le plan, un peu de géométrie plane	129
10. Nombres complexes	165
11. Suites numériques	179
Chapitre 3 Fonctions	189
1. Rappels théoriques	189
2. Éléments de base relatifs aux fonctions	191
3. Limites	210
4. Suites numériques	220

5. Dérivées	227
6. Primitives	308
Chapitre 4 Calcul intégral	329
1. Rappels théoriques	329
2. Exercices de base résolus	333
3. Exercices pour s'entraîner	363
4. Exercices plus élaborés	372
Chapitre 5 Équations différentielles	411
1. Rappels théoriques	411
2. Exercices de base résolus	413
3. Exercices pour s'entraîner	435
4. Exercices plus élaborés	438
Annexe	451
1. Notations et appellations	451
2. Informations bibliographiques et historiques	451
Bibliographie	459
Index	461

Test préliminaire

Ce petit test est destiné à attirer l'attention du lecteur sur certains points fondamentaux qui donnent lieu parfois à de « mauvaises interprétations », ainsi que sur la grande importance de la lecture complète des énoncés et sur la bonne compréhension de tous les termes.

La résolution des questions est facilitée par le fait que pour chacune d'entre elles, un seul item proposé contient une réponse correcte.

Énoncés

Niveau 1

1. La racine carrée de $(-2)^2$ est égale à
 - (a) ± 2
 - (b) 2
 - (c) -2
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
2. Le sinus du réel 7
 - (a) n'existe pas
 - (b) est un nombre négatif plus grand que -1
 - (c) est un nombre défini à un multiple de 2π près
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
3. Quand on dit que la radiation en UV a augmenté de 60 %, cela signifie que la radiation a été
 - (a) multipliée par $3/5$
 - (b) divisée par $8/5$
 - (c) divisée par $5/8$
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
4. Un terrain carré a une aire égale à 81 m^2 . Son périmètre est alors égal à
 - (a) 20,25 m
 - (b) 36 m
 - (c) 40,50 m
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
5. La valeur absolue de la somme de deux réels est égale à
 - (a) la somme des valeurs absolues de chacun d'eux
 - (b) la différence des valeurs absolues de chacun d'eux
 - (c) la somme des carrés de chacun d'eux
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

Niveau 2

1. Si r est un nombre réel, alors la racine carrée de r^2 est égale à
 - (a) r
 - (b) $-r$
 - (c) $\sqrt{r}$
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
2. Le cosinus du carré d'un nombre réel est égal au
 - (a) carré du cosinus du réel
 - (b) double du cosinus du réel
 - (c) double du produit du sinus et du cosinus du réel
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
3. Un rectangle a une aire de 60 m^2 . Sa longueur est 4 m plus grande que sa largeur. Le périmètre du rectangle vaut alors
 - (a) 6 m
 - (b) 28 m
 - (c) 32 m
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
4. Si le carré d'un réel négatif r est un réel plus grand ou égal à 1, alors ce réel est toujours
 - (a) plus grand ou égal à 1
 - (b) plus petit ou égal à -1
 - (c) plus grand ou égal à -1 et plus petit ou égal à 1
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
5. Si x est un réel strictement positif, alors la valeur absolue de $-2x + x^2$ vaut toujours
 - (a) $2x - x^2$
 - (b) $x^2 - 2x$
 - (c) $2x + x^2$
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

Niveau 3

1. Si x désigne un réel, alors l'inégalité $x^2 > |x|$ est
 - (a) équivalente à dire que la valeur du réel x est strictement supérieure à 1
 - (b) une condition suffisante pour que le réel x soit strictement supérieur à 1
 - (c) une condition nécessaire au fait que le réel x soit strictement supérieur à 1
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

2. Pour que le carré d'un nombre réel soit plus petit ou égal à celui-ci,
 - (a) il suffit que le réel soit plus petit ou égal à 1
 - (b) il est nécessaire que le réel soit plus petit ou égal à 1
 - (c) il suffit que le réel soit positif
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
3. La somme des carrés de deux réels est toujours
 - (a) plus grande ou égale au produit de ces réels
 - (b) plus grande ou égale à la somme de ces réels
 - (c) plus petite ou égale au produit de ces réels
 - (d) plus petite ou égale à la somme de ces réels
4. L'expression $\sin(\arcsin(\pi/2))$ est égale à
 - (a) $\pi/2$
 - (b) 1
 - (c) 0
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte
5. L'expression $\arcsin(\sin(6\pi/7))$ est égale à
 - (a) $-\pi/7$
 - (b) $\pi/7$
 - (c) $6\pi/7$
 - (d) aucune des réponses précédentes n'est correcte

Solutions

Niveau 1

1. La réponse correcte est (b), à savoir $\sqrt{(-2)^2} = 2$.
De fait, la racine carrée d'un réel positif (ici $(-2)^2 = 2^2$) est le réel positif dont le carré est le nombre de départ.
2. La réponse correcte est (d).
De fait, le sinus d'un réel est un réel toujours défini. Comme le nombre 7, étant compris entre 2π et $2\pi + \pi/2$, son sinus est positif.
3. La réponse correcte est (c).
De fait, augmenter un nombre de 60 % revient à lui ajouter $6/10 = 3/5$ de sa valeur, ou encore à le multiplier par $1 + 3/5 = 8/5$, donc à le diviser par $5/8$.
4. La réponse correcte est (b).
De fait, puisque l'aire du carré vaut 81 m^2 , la longueur de son côté est égale à 9 m et par suite son périmètre mesure $4 \times 9 = 36 \text{ m}$.

5. La réponse correcte est (d).

Voici des contre-exemples pour les autres items.

Pour (a) : $|r + (-r)| = 0$ et $|r| + |-r| = 2|r| > 0$ quel que soit le réel non nul r .

Pour (b) : $|r + r| = 2|r| > 0$ et $|r| - |r| = 0$ quel que soit le réel non nul r .

Pour (c) : $|r + r| = 2|r|$ et $r^2 + r^2 = 2r^2 = 2|r|^2 = 2|r|$ si et seulement si $r = 0$ ou $|r| = 1$.

Niveau 2

1. La réponse correcte est (d).

De fait, la racine carrée de r^2 est égale à la valeur absolue de r , donc pas toujours égale à r ou à $-r$ (cela dépend du signe de r). Et enfin, l'expression $\sqrt{r}$ n'est définie que si r est positif !

2. La réponse correcte est (d).

Voici des contre-exemples pour les autres items.

Pour (a) : on a $\cos(\pi) = -1$ et $\cos^2(\sqrt{\pi}) \geq 0$.

Pour (b) : pour tout réel dont le cosinus est strictement plus grand que $1/2$, le double de ce cosinus est strictement plus grand que 1 et n'est donc égal au cosinus d'aucun réel.

Pour (c) : d'une part, on a $\sin(\pi) = 0$. D'autre part, on a $\cos(\pi^2) \neq 0$: en effet, puisque $\pi^2 \in]3\pi, 3\pi + (\pi/2)[$ et que la fonction cosinus est strictement croissante sur cet intervalle, on a $\cos(\pi^2) < \cos(3\pi + (\pi/2)) = 0$.

3. La réponse correcte est (c).

De fait, désignons par L la mesure de la longueur du rectangle. Vu l'hypothèse sur la mesure de sa largeur, l'expression du fait que son aire est égale à 60 m^2 s'écrit $L(L - 4) = 60$. Les deux solutions de cette équation du second degré sont de signes opposés ; la solution positive est égale à 10. Il s'ensuit que le périmètre du rectangle est égal à $2 \times 10 + 2 \times 6 = 32 \text{ m}$.

4. La réponse correcte est (b).

De fait, l'expression de l'hypothèse est $r^2 \geq 1$, ce qui revient à écrire $(r - 1)(r + 1) \geq 0$. Comme r est négatif, la simplification par $r - 1$ conduit à l'inégalité $r + 1 \leq 0$, c'est-à-dire $r \leq -1$.

5. La réponse correcte est (d).

De fait, les expressions (a) et (b) peuvent prendre des valeurs strictement négatives, donc ne peuvent être égales à la valeur absolue d'un réel. Comme $x > 0$, on a en effet d'une part $2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$ et d'autre part $x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Enfin, si $x \geq 2$, on a $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$ et $x^2 - 2x \neq x^2 + 2x$, donc (c) est également une réponse incorrecte.

Niveau 3

1. La réponse correcte est (c).

De fait, si x est un réel strictement supérieur à 1, alors il est égal à sa valeur absolue et strictement plus petit que son carré.

2. La réponse correcte est (b).

De fait, si r est un réel tel que $r^2 \leq r$, alors r est positif et l'inégalité précédente implique $r \leq 1$.

3. La réponse correcte est (a).

De fait, si x et y désignent deux réels, on a $|x| \geq |y|$ ou $|y| \geq |x|$. Dès lors, dans le premier cas, on obtient

$$x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \geq |x|^2 \geq |xy| \geq xy$$

et dans le second cas, on obtient

$$x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \geq |y|^2 \geq |xy| \geq xy.$$

4. La réponse correcte est (d).

De fait, comme la fonction arcsin est définie uniquement sur l'intervalle $[-1, 1]$ et que $\pi/2$ n'appartient pas à cet intervalle, l'expression donnée n'a pas de sens.

5. La réponse correcte est (b).

De fait, on a $\arcsin(\sin(x)) = x$ si et seulement si $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, donc

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)\right) &= \arcsin\left(\sin\left(\pi - \frac{6\pi}{7}\right)\right) \\ &= \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{7} \end{aligned}$$

car $\pi/7 \in [-\pi/2, \pi/2]$.

1 Rappels théoriques

Ce chapitre utilise des notions rudimentaires de calcul (« règle de trois », mise en équation de base, utilisation de notions élémentaires de géométrie plane). Les notations sont standards.

2 Exercices de base résolus

Cette section répartit les exercices en niveaux de complexité croissante.

2.1 Niveau 1

Énoncés

1. À l'occasion d'une foire aux vins, une grande surface propose une offre « Deux bouteilles achetées, la troisième gratuite ». Pour un lot de 3 bouteilles, quel est le nouveau prix d'une bouteille dont le prix affiché avant la promotion était 12 € et quel est le pourcentage de la remise ?
2. Sur une carte à l'échelle $1/2\,500$, la distance (en ligne droite) entre deux points est égale à 4 cm. À quelle distance réelle en kilomètres cela correspond-il ?
3. À la météo, on annonce une nuit de pluie. Le lendemain, sur la terrasse, on mesure une hauteur de 1 mm d'eau par mètre carré. À combien de litres par mètre carré cela correspond-il ?
4. Quand l'eau se transforme en glace, son volume augmente d'un quinzième. Quelle quantité d'eau, exprimée en litres, faut-il pour obtenir $1,280\text{ m}^3$ de glace ?

Solution

1. Le prix de deux bouteilles avant remise est $2 \times 12 = 24$ € ; puisqu'on reçoit en fait 3 bouteilles, le prix par bouteille après remise est $24/3 = 8$ €.

La remise de 4 € sur 12 € est donc une remise égale à un tiers du prix, c'est-à-dire à peu près 33,3 %.
2. Selon l'échelle, 1 cm sur la carte correspond à $2\,500\text{ cm} = 0,025\text{ km}$ dans la réalité. Dès lors, 4 cm correspondent à $4 \times 0,025 = 0,1\text{ km}$.

La distance réelle entre deux points distants de 4 cm sur une carte à l'échelle $1/2\,500$ est donc de 0,1 km.

3. Comme $1 \text{ mm} = 10^{-3} \text{ m}$, le volume d'eau sur la terrasse est égal à $10^{-3} \times 1 = 10^{-3} \text{ m}^3 = 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ litre}$.

Ainsi, 1 mm d'eau par m^2 correspond à 1 litre par m^2 .

4. Soit x la quantité demandée en litres ; la transformation de cette eau en glace va donner un volume de $x + \frac{x}{15} = \frac{16}{15}x$ litres. Comme $1 \text{ m}^3 = 10^3 \text{ l}$, la quantité d'eau demandée doit donc vérifier l'égalité

$$\frac{16}{15}x = 1280.$$

Cette équation a pour solution

$$x = \frac{1280}{16} \times 15 = 1200.$$

Il faut donc 1200 litres d'eau pour obtenir $1,280 \text{ m}^3$ de glace.

2.2 Niveau 2

Énoncés

1. Un laborantin doit préparer 18 ml d'une solution qui contient 3 % de glucose. Il a deux types de solution à sa disposition, l'une contenant 10 % de glucose et l'autre seulement 1 %. Combien de millilitres de chaque type de solution doit-il prendre pour obtenir ce qu'il désire ?
2. Deux petits bateaux téléguidés partent du même point sur un lac. Leur vitesse est respectivement égale à 3 et 4 mètres par minute. Si l'un se dirige vers le nord et l'autre vers l'est, combien de temps faut-il attendre pour que la distance entre les deux soit supérieure à 10 mètres ?
3. Vous faites du shopping et vous avez un coup de cœur pour une pièce de collection. Celle-ci est cependant un peu chère. Vous savez par ailleurs qu'une augmentation des prix va survenir la semaine qui suit et que cette augmentation sera de 30 %. Mais ensuite, ce sera la période des soldes et vous savez que les prix vont alors chuter de 30 %. Vous êtes de toute façon décidé à acquérir la pièce ; pour déboursier le moins possible, achetez-vous avant l'augmentation de prix ou attendez-vous les soldes ? Pourquoi ?
4. Lindsay a trois fois l'âge que Nacer avait quand elle avait l'âge actuel de Nacer. Quand Nacer aura l'âge de Lindsay, ils auront ensemble 112 ans. Quels sont les âges actuels de Nacer et de Lindsay ?

Solution

1. Soit x le nombre de millilitres de la solution contenant 10 % de glucose. Le nombre de millilitres de la solution contenant 1 % de glucose est donc $(18 - x)$. Cela étant, on a

$$\frac{10}{100}x + \frac{1}{100}(18 - x) = \frac{3}{100} \times 18$$

ce qui est équivalent à

$$10x + 18 - x = 54 \Leftrightarrow 9x = 36 \Leftrightarrow x = 4.$$

Ainsi, le laborantin doit prendre 4 ml de la solution contenant 10 % de glucose et 14 ml de la solution à 1 % pour obtenir 18 ml de solution à 3 %.

2. Supposons que les deux bateaux partent de l'origine d'un repère orthonormé. Après t minutes, l'un se trouvera au point de coordonnées $(0, 3t)$ et l'autre au point de coordonnées $(4t, 0)$. La distance en mètres entre ces deux points est donnée par $\sqrt{16t^2 + 9t^2} = 5t$ et elle sera supérieure à 10 mètres si $t > 2$. Ainsi, au-delà de 2 minutes la distance entre les deux bateaux est supérieure à 10 mètres.
3. Soit P le prix actuel de la pièce convoitée. Après l'augmentation, son prix sera de

$$P + \frac{30}{100}P$$

et lors des soldes, il sera de

$$P + \frac{30}{100}P - \frac{30}{100}\left(P + \frac{30}{100}P\right) = P - \frac{9}{100}P = \frac{91}{100}P.$$

Pour déboursier le moins possible, il faut donc attendre les soldes puisqu'on ne paiera alors que 91 % du prix actuel.

4. Soient x et y les âges actuels respectifs de Lindsay et de Nacer, comptés en années. Lindsay étant plus âgée que Nacer, la différence entre leurs âges est $x - y$. Dès lors, on peut donner les informations de l'énoncé à propos des âges sous la forme

	Lindsay	Nacer
Actuellement	x	y
Il y a $(x-y)$ ans	$x - (x - y) = y$	$y - (x - y) = 2y - x$
Dans $(x-y)$ ans	$x + (x - y) = 2x - y$	$y + (x - y) = x$

Ainsi, la traduction de l'énoncé en équations donne le système (S)

$$\begin{cases} x = 3(2y - x) \\ (2x - y) + x = 112. \end{cases}$$

C'est un système de deux équations linéaires à deux inconnues qui se résout directement :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3y \\ 3x - y = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 3y \\ 3x - \frac{2}{3}x = 112 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 48 \\ y = 32. \end{cases}$$

Ainsi, actuellement, Nacer a 32 ans et Lindsay a 48 ans.

2.3 Niveau 3

Énoncés

1. Lors de la construction de l'élément central d'une abbaye (jardin en plein air et promenade pour les jours de pluie), afin de conserver les surfaces, les architectes procédaient de manière bien précise, selon la méthode suivante.

Supposons que le jardin soit carré. On trace alors le cercle dont le centre est le centre du carré et qui passe par les quatre sommets de ce carré. On construit ensuite un second carré, de même centre, de côtés parallèles à ceux du premier et tangents au cercle que l'on vient de tracer. La « promenade » couverte est la partie située à l'intérieur du second carré en dehors du jardin. Son aire est la même que celle du jardin. Pourquoi ?

2. Kevin et Camille prennent le train chaque matin pour se rendre à leur travail. Kevin parcourt une distance de 20 km tandis que Camille n'en parcourt que 15. Les deux trajets sont cependant de même durée car la vitesse moyenne du train de Kevin est de 25 km/h plus élevée que celle du train de Camille. Quelles sont les vitesses moyennes de chaque train ?

3. En imprimerie, une des classifications standards des formats de papier s'appelle le système ISO A. Les feuilles A4 bien connues font partie de ce système, de même que les A3, A5, etc. On passe du type A4 au type A5 en divisant le plus grand des côtés du rectangle par 2 ; on procède ainsi successivement pour passer d'un type à l'autre.

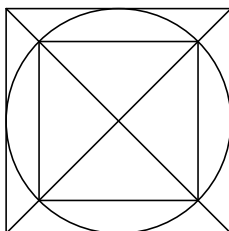
Vous préparez un envoi postal standard dont le poids ne doit pas excéder 100 g. Le papier employé est de la catégorie commerciale « 80 g/m² », ce qui signifie qu'un mètre carré de papier pèse 80 g. Sachant qu'une feuille A0 a une aire de 1 m² et que l'enveloppe utilisée pèse 20 g, combien de pages A4 pouvez-vous glisser dans l'enveloppe ?

4. Une ligne droite de 1300 m relie les points A et B. Lee part du point A dans la direction du point B à la vitesse constante de 6 km/h. Kayla part une minute plus tard du point B dans la direction de A, à la vitesse constante de 12 km/h. Combien de temps après son départ Lee rencontrera-t-il Kayla ?

Solution

1. Si c est la longueur d'un côté du carré inscrit (jardin), alors l'aire du jardin vaut c^2 . Un diamètre du cercle a la même longueur qu'une diagonale du carré inscrit mais également la même longueur qu'un côté du carré circonscrit. Par application du théorème de Pythagore¹ dans un des triangles rectangles formés par une diagonale et deux côtés consécutifs du carré inscrit, on a $D^2 = 2c^2$ si D est la longueur d'un diamètre du cercle.

Dès lors, l'aire du carré circonscrit vaut $D^2 = 2c^2$ et l'aire de la promenade, différence entre l'aire du carré circonscrit et celle du carré inscrit, vaut $2c^2 - c^2 = c^2$. Ainsi, l'aire du jardin est égale à l'aire de la promenade.



2. Notons t le temps en h du trajet, v_c la vitesse moyenne du train de Camille et v_k la vitesse moyenne du train de Kevin en km/h. La mise en équation des données conduit au système suivant

$$\begin{cases} v_k t = 20 \\ v_c t = 15 \\ v_k = 25 + v_c. \end{cases}$$

Il se résout facilement de la manière suivante

$$\begin{cases} v_k t = 20 \\ v_c t = 15 \\ v_k = 25 + v_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_k = 20/t \\ v_c = 15/t \\ 20/t = 25 + (15/t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1/5 \\ v_k = 20 \times 5 = 100 \\ v_c = 15 \times 5 = 75. \end{cases}$$

La vitesse moyenne du train de Camille est donc 75 km/h et celle du train de Kevin 100 km/h.

3. L'aire d'une feuille $A(i+1)$ vaut la moitié de l'aire d'une feuille A_i puisqu'on divise la longueur d'un des côtés par 2. Comme l'aire d'une feuille A_0 vaut 1 m^2 , l'aire d'une feuille A_4 vaut $1 \times (1/2)^4 = 1/16 \text{ m}^2$.

Sachant que 1 m^2 de papier pèse 80 g, une feuille A_4 pèse donc $80 \times 1/16 = 5 \text{ g}$.

Comme l'enveloppe pèse 20 g, le nombre de feuilles A_4 dans l'enveloppe est égal à

$$\frac{100 - 20}{5} = 16.$$

1. Voir l'annexe.

Ainsi, on pourra mettre 16 feuilles A4 dans l'enveloppe.

4. Une vitesse de 6 km/h correspond à $6\,000\text{ m}/60\text{ min} = 100\text{ m/min}$ et donc celle de 12 km/h correspond à 200 m/min.

Soit t le temps en minutes mis par Lee pour rencontrer Kayla. Le temps en minutes mis par Kayla pour rencontrer Lee est donc $t - 1$. La distance en mètres parcourue par Lee vaut $100t$ et celle parcourue par Kayla vaut $200(t - 1)$. Ensemble ils parcourent 1 300 m. Dès lors, le problème se traduit par l'équation suivante qu'il faut résoudre. On a successivement

$$100t + 200(t - 1) = 1300 \Leftrightarrow 300t - 200 = 1300 \Leftrightarrow 300t = 1500 \Leftrightarrow t = 5.$$

Ainsi Lee rencontrera Kayla 5 minutes après son départ.

3 Exercices pour s'entraîner

Énoncés

Niveau 1

1. Un tonneau rempli à moitié d'eau pèse 56 kg. Rempli aux deux tiers d'eau, il pèse un centième de tonne de plus. Quelle est la capacité en hectolitres de ce tonneau et quelle est la masse en grammes du tonneau vide ?
2. Au mois d'août 2009, à l'occasion des championnats du monde d'athlétisme à Berlin, le Jamaïcain Usain Bolt établissait un nouveau record du monde du 100 m en parcourant la distance en 9,58 secondes. À quelle vitesse moyenne exprimée en kilomètres par heure cela correspond-il ?
3. Un missile est lancé en mer sous un angle de 45 degrés et vole en ligne droite à une vitesse constante de 75 m/s. Combien de temps mettra-t-il pour atteindre une altitude de 4,5 km ?

Niveau 2

1. Lors d'une interrogation, un étudiant doit répondre à 100 questions d'un QCM. Pour toute réponse correcte, il obtient 1 point et pour toute réponse incorrecte, on lui retire 0,25 point. Sachant qu'il obtient 53,75 comme note finale et qu'il est obligé de répondre à toutes les questions, quel est le nombre de réponses correctes fournies ?
2. Si on compte les arbres d'un jardin par groupes de 8, il en reste 5 et si on les compte par groupes de 7, il en reste 2. Sachant que le nombre de groupes de 7 dépasse de 3 celui des groupes de 8, combien d'arbres y a-t-il dans ce jardin ?
3. Un touriste observe un monument depuis le sol. Il évalue une première fois l'angle d'élévation du monument et trouve 60° . Il recule de 100 m et son évaluation donne alors 45° . Quelle est approximativement la hauteur du monument ?

Remarque. Le touriste est supposé très petit par rapport au monument ; dans le calcul, on peut donc négliger sa taille.

Niveau 3

1. Une équipe de 18 ouvriers travaillant au même rythme 8 heures par jour a pavé une rue de 150 m en 10 jours. Combien faut-il d'ouvriers travaillant au même rythme 6 heures par jour pour paver une rue longue de 75 m en 15 jours, rue de même largeur que la précédente ?
2. Trois vannes coulant ensemble dans un bassin le rempliraient en un certain nombre d'heures. La première seule mettrait le double de temps ; la deuxième 6 heures de plus que les trois ensemble ; la troisième seule, 15 heures de plus. En combien de temps le bassin pourrait-il être rempli par chacune des trois vannes ? Et par les trois réunies ?
3. Pour réparer des dégâts dans une pelouse, un jardinier compte ensemercer d'herbe un terrain triangulaire dont les côtés mesurent 10 mètres, 6 mètres et 7 mètres. Sachant qu'il faut compter 500 g pour 25 m², combien de grammes de semences doit-il acheter ?

Solution

Niveau 1

1. La capacité du tonneau est de 0,6 hl et vide, il pèse 26 000 g.
2. La vitesse moyenne vaut 37,578 km/h.
3. Le temps mis pour atteindre cette altitude vaut $4\,500 \sqrt{2}/75 = 60 \sqrt{2}$ secondes, donc approximativement 85 secondes.

Niveau 2

1. Il a fourni 63 réponses correctes.
2. Il y a 149 arbres.
3. La hauteur du monument est de 236,6 mètres.

Niveau 3

1. Il faut 8 ouvriers.
2. Il faut 3 heures pour remplir le bassin avec les vannes réunies, 6 heures pour la première seule, 9 heures pour la seconde seule et 18 heures pour la troisième seule.
3. Pour réparer les dégâts dans la pelouse, il doit acheter 413,25 grammes de semences.

1 Rappels théoriques

1.1 Nombres réels

Faisons une première remarque de vocabulaire et de notation : on désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des naturels, encore appelés entiers positifs, par $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers, encore appelés entiers relatifs, par $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et par $\mathbb{C}$ l'ensemble des complexes¹. Cela étant, nous supposons que les connaissances de base sur les nombres réels sont connues. Insistons tout de même sur certains points qui, trop souvent, sont sources d'erreurs.

- Quand on multiplie les deux membres d'une inégalité par un réel négatif non nul, il faut changer le sens de l'inégalité.
- La racine carrée d'un nombre réel positif est *le réel positif* dont le carré est le nombre de départ. La notation employée est le symbole $\sqrt{}$. Si a est un nombre réel, on a donc $\sqrt{a^2} = |a|$ et non $\sqrt{a^2} = \pm a$!

1.2 Équations et inéquations

Une équation polynomiale du premier (resp.² second) degré en l'inconnue complexe z est une équation du type

$$az + b = 0 \quad (\text{resp. } az^2 + bz + c = 0)$$

où a est un complexe non nul et b, c des complexes. L'équation du premier degré possède une unique solution, à savoir le complexe

$$-\frac{b}{a}$$

et l'équation du second degré possède toujours deux solutions, à savoir

$$\frac{-b + z_0}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - z_0}{2a}$$

où z_0 est un complexe dont le carré est égal à $b^2 - 4ac$; cette expression est appelée discriminant ou réalisant. Rappelons que la somme des deux solutions est donc égale à $-b/a$ et que leur produit est égal à c/a . Par ailleurs, insistons sur le fait qu'on ne peut manipuler des inégalités que si les coefficients et la variable sont des réels !

1. Cet ensemble sera défini dans la sous-section 1.7 de ce chapitre.

2. L'abréviation resp. est utilisée pour respectivement.

1.3 Polynômes et fractions rationnelles

Voici quelques rappels relatifs à ces notions.

Tout polynôme à coefficients réels se factorise en un produit de puissances naturelles de polynômes à coefficients réels du premier degré et de polynômes à coefficients réels du second degré ne possédant pas de zéro réel.

Un polynôme P est divisible par le polynôme $x \mapsto x - a$ si et seulement si a est un zéro de P .

Une fraction rationnelle est dite propre lorsque le degré du numérateur est strictement inférieur à celui du dénominateur et que les numérateur et dénominateur n'ont pas de zéro commun. Parmi les fractions propres, on définit les fractions simples, lesquelles jouent un rôle important dans la primitivation. Il s'agit de fractions du type

$$\frac{A}{(ax + b)^p}, \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^p}$$

où les coefficients sont des réels ($a \neq 0$), $p \in \mathbb{N}_0$ et où le polynôme du second degré du dénominateur n'a pas de zéro réel.

Enfin, toute fraction rationnelle propre se décompose en fractions rationnelles simples selon une forme bien précise et qui dépend de la factorisation du dénominateur (voir fractions précédentes).

1.4 Coniques

Les coniques sont des courbes du plan qui peuvent être définies de différentes manières. La plupart du temps, on les introduit soit comme des lieux géométriques, utilisant la notion de foyer, de directrice et d'excentricité, soit comme étant l'ensemble des points du plan dont l'équation cartésienne est une équation du second degré en deux variables (abscisse et ordonnée des points) dans un repère orthonormé du plan. Dans ce cas, quand on choisit bien le repère, ces équations prennent une forme simple, dite « canonique ». Nous les rappelons ici, ainsi que l'expression de l'excentricité, de l'équation des directrices et des coordonnées des foyers correspondants.

Équation canonique d'une ellipse (non dégénérée¹)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a et b sont des réels strictement positifs. Si $a = b$, il s'agit bien sûr d'un cercle. Si $a > b$, on définit le réel c comme suit

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

1. Une conique est dite dégénérée si aucun point ou un seul couple vérifie son équation ou bien si l'équation est celle d'une ou de deux droites.

et l'excentricité e par

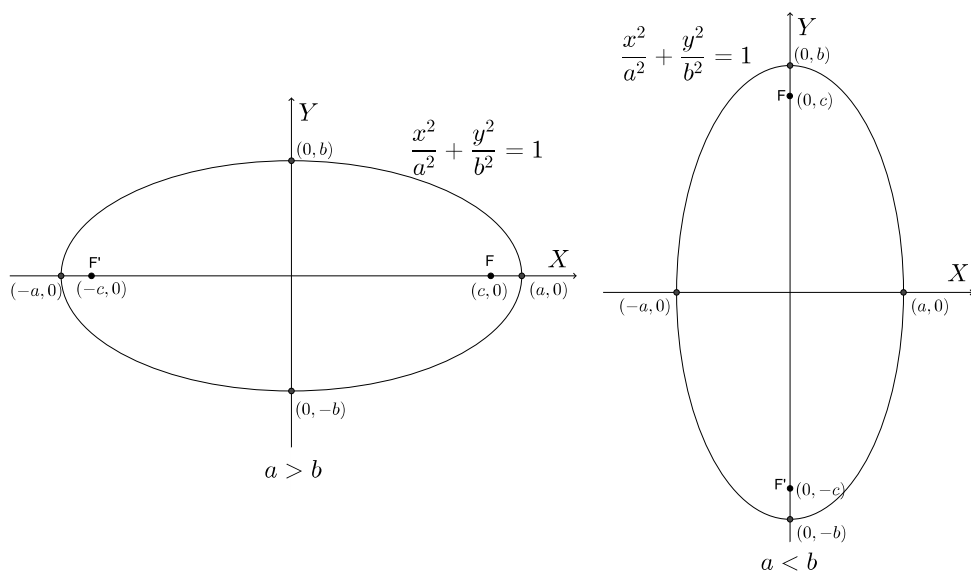
$$e = \frac{c}{a}.$$

Les foyers F' et F sont les points dont les coordonnées sont respectivement $(-c, 0)$ et $(c, 0)$ et les directrices sont les droites d'équation cartésienne

$$d' : x = -\frac{a}{e}, \quad d : x = \frac{a}{e}.$$

Si $a < b$, on a

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}, \quad e = \frac{c}{b}, \quad F'(0, -c), \quad F(0, c), \quad d' : y = -\frac{b}{e}, \quad d : y = \frac{b}{e}.$$



Équation canonique d'une hyperbole (non dégénérée)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où a et b sont des réels strictement positifs. On définit le réel c comme suit

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

et l'excentricité e par

$$e = \frac{c}{a}.$$

Les foyers F' et F sont les points dont les coordonnées sont respectivement $(-c, 0)$ et $(c, 0)$, les directrices sont les droites d'équation cartésienne

$$d' : x = -\frac{a}{e}, \quad d : x = \frac{a}{e}$$

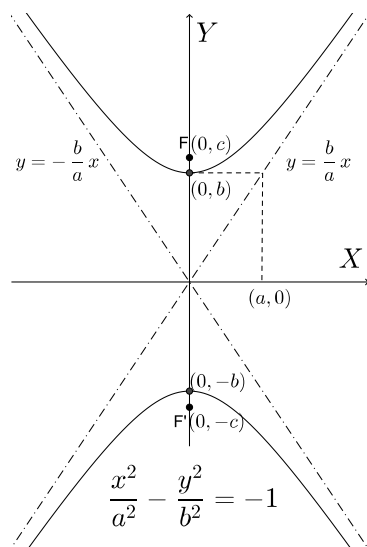
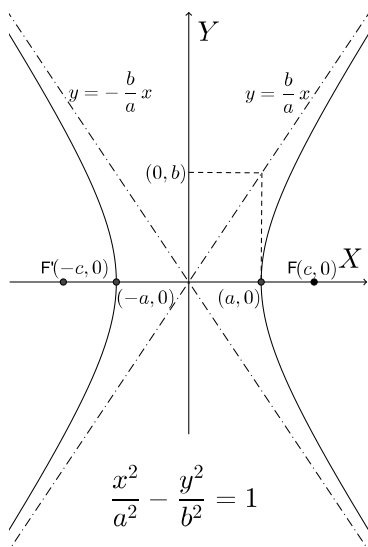
et les asymptotes sont les droites d'équation cartésienne

$$y = -\frac{b}{a}x, \quad y = \frac{b}{a}x.$$

Si l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1,$$

on permute les rôles des coordonnées et des paramètres a, b des définitions précédentes.



Équation canonique d'une parabole (non dégénérée)

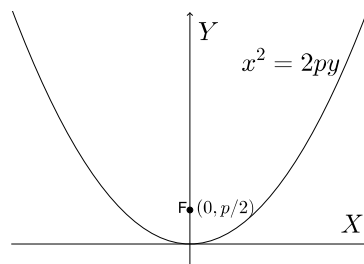
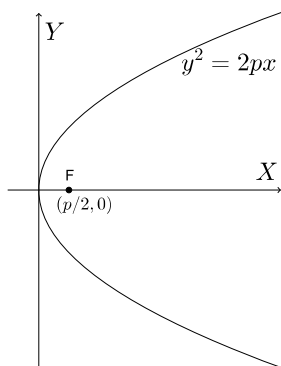
$$y^2 = 2px$$

où p est un réel non nul. Le foyer est le point de coordonnées $(p/2, 0)$, la directrice a pour équation cartésienne $x = -p/2$ et l'excentricité est égale à 1.

Si l'équation est

$$x^2 = 2py,$$

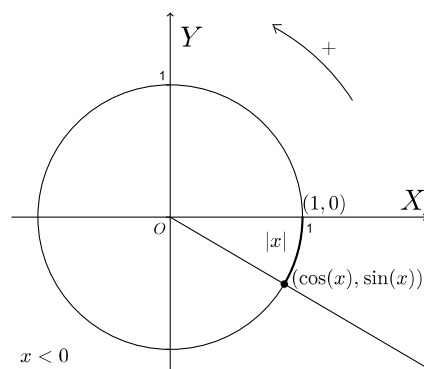
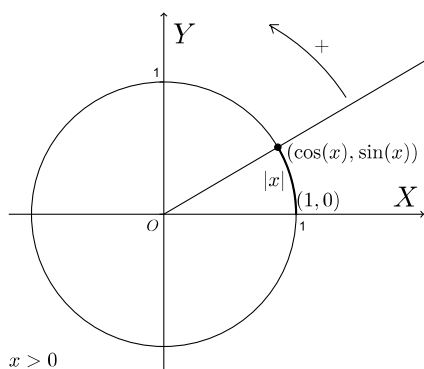
le foyer est le point de coordonnées $(0, p/2)$, la directrice a pour équation cartésienne $y = -p/2$ et l'excentricité est égale à 1.



Dans chaque cas, la conique est le lieu des points dont le rapport entre leur distance à un foyer et à la directrice correspondante est égal à l'excentricité.

1.5 Trigonométrie

Dans une première approche, les fonctions cosinus et sinus sont définies en tout réel x de façon géométrique respectivement comme abscisse et ordonnée du point que l'on place, dans un repère orthonormé, sur le cercle trigonométrique en partant de $(1, 0)$ et en reportant une longueur d'arc égale à $|x|$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre si $x > 0$ et dans le sens des aiguilles d'une montre si $x < 0$.



Il est utile de rappeler les propriétés essentielles de ces fonctions :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \text{ (Pythagore),}$$

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y), \quad \sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y)$$

quels que soient les réels x, y . Bien sûr de nombreuses autres égalités sont aussi très utilisées ; elles découlent des précédentes. Par ailleurs, il ne faut pas non plus oublier les valeurs des sinus et cosinus des « angles associés ».

Les fonctions tangente et cotangente sont alors définies à partir des fonctions sinus et cosinus, en tout réel où le dénominateur ne s'annule pas, par

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad \cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Leurs propriétés découlent bien sûr de celles des fonctions sinus et cosinus.

Les valeurs dites « remarquables » sont reprises dans le tableau suivant.

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	—
cotan	—	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

Au chapitre 3, nous définirons rigoureusement les fonctions sinus et cosinus, à partir de la fonction exponentielle.

1.6 Calcul vectoriel

Nous utiliserons les bases du calcul vectoriel « géométrique », à savoir addition de vecteurs, multiplication d'un vecteur par un nombre réel, produit scalaire, produit vectoriel, bases et composantes dans une base. Nous ne ferons pas appel à la notion générale plus abstraite d'« espace vectoriel ».

Dans la littérature, les notations utilisées pour désigner la norme (longueur) d'un vecteur, le produit scalaire et le produit vectoriel de deux vecteurs peuvent être bien différentes. Voici ce qui sera utilisé dans cet ouvrage, respectivement pour la norme, le produit scalaire et le produit vectoriel de vecteurs $\vec{z}$, $\vec{z}'$:

$$\|\vec{z}\|, \quad \vec{z} \bullet \vec{z}', \quad \vec{z} \wedge \vec{z}'.$$

Rappelons que le produit scalaire de deux vecteurs est égal à la somme des produits des composantes respectives des vecteurs dans n'importe quelle base orthonormée. Rappelons aussi que le produit vectoriel de deux vecteurs est un vecteur qui dépend de l'orientation dans laquelle on travaille ; dans une base orthonormée de l'orientation choisie, les composantes du produit vectoriel $\vec{z} \wedge \vec{z}'$ sont données à partir des composantes des deux vecteurs de départ $\vec{z}$, $\vec{z}'$ par

$$(z_2 z'_3 - z_3 z'_2, z_3 z'_1 - z_1 z'_3, z_1 z'_2 - z_2 z'_1)$$

où (z_1, z_2, z_3) sont les composantes de $\vec{z}$ et (z'_1, z'_2, z'_3) celles de $\vec{z}'$.

1.7 Nombres complexes

L'ensemble des complexes est l'ensemble des couples de réels, c'est-à-dire

$$\mathbb{C} := \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

muni d'une addition et d'une multiplication, généralisant ce qui est défini pour les nombres réels. Une grande différence cependant réside dans le fait qu'il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.

Le réel a s'appelle la partie réelle du complexe (a, b) et le réel b s'appelle la partie imaginaire du complexe (a, b) . Si z est un complexe, la notation habituelle pour désigner ses parties réelle et imaginaire est respectivement $\Re z$ et $\Im z$. Un réel est un complexe dont la partie imaginaire est nulle. Le conjugué d'un complexe est le complexe de même partie réelle et de partie imaginaire opposée. Le module d'un complexe est la racine carrée de la somme des carrés de ses parties réelle et imaginaire ; c'est donc un réel positif ou nul.

Le complexe i est défini par $i = (0, 1)$; on peut alors écrire

$$z = (a, b) = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Il a la particularité de vérifier la relation

$$i^2 = -1$$

et de permettre une manipulation algébrique aisée des opérations entre complexes.

L'introduction des complexes et des opérations entre eux permet d'obtenir la propriété essentielle suivante : pour tout complexe non nul, il en existe exactement deux (opposés l'un de l'autre) dont le carré est le complexe de départ. Cette propriété n'est bien entendu pas valable quand on ne travaille qu'avec des nombres réels !

1.8 Suites numériques

Une suite numérique est une application qui, à tout naturel (ou à une partie dénombrable de $\mathbb{N}$) associe un nombre (réel ou complexe). Une notation standard est la suivante : x_m ($m \in \mathbb{N}$).

2 Unités de mesure

Exercice 1

1. Compléter les phrases suivantes en français.

- | | |
|--|--------------------------------|
| (a) 10^6 correspond à ... | (b) 0,0001 correspond à ... |
| (c) 10^9 correspond à ... | (d) 10^{-9} correspond à ... |
| (e) 10^{-2} correspond à ... | (f) 10^{12} correspond à ... |
| (g) « mille milliards de mille sabords » correspond à ... de sabords | |

2. Compléter les phrases suivantes en ajoutant l'écriture numérique sous forme d'un entier ou d'un nombre décimal.
- (a) Un millièmè s'écrit ... (b) 10^0 s'écrit ...
(c) Un centièmè s'écrit ... (d) 1 milliard équivaut à ... millions
(e) Un milliard vingt millions s'écrit ...
3. Écrire l'expression suivante sous la forme d'une seule puissance de 10.

$$10^3 \times 10^{-9} \times 10^{13}$$

Solution

1. Les phrases complètes sont
- (a) 10^6 correspond à un million (b) 0,0001 correspond à un dix-millièmè
(c) 10^9 correspond à un milliard (d) 10^{-9} correspond à un milliardièmè
(e) 10^{-2} correspond à un centièmè (f) 10^{12} correspond à un billion
(g) « mille milliards de mille sabords » correspond à un billiard de sabords.
2. Les phrases complètes sont
- (a) un millièmè s'écrit 0,001 (b) 10^0 s'écrit 1
(c) un centièmè s'écrit 0,01 (d) 1 milliard équivaut à 1 000 millions
(e) un milliard vingt millions s'écrit 1 020 000 000
3. On a

$$10^3 \times 10^{-9} \times 10^{13} = 10^7.$$

Exercice 2

Dans le tableau suivant, il est question de conversion d'unités de mesure. Pour chaque item, on demande d'indiquer le nombre exact donnant la conversion.

	Forme décimale	Puissance de 10
(a)	543,5 hm	= $5,435 \times 10^{\dots\dots}$ mm
(b)	$\frac{3}{8}$ dm	= m
(c)	 km	= 805×10^{-4} m
(d)	$\frac{23}{50}$ km	= cm
(e)	481,96 dm ²	= $4,8196 \times 10^{\dots\dots}$ ha
(f)	32,5 cm ²	= a
(g)	$\frac{17}{25}$ m ²	= km ²

	Forme décimale	Puissance de 10
(h)	0,25 m ³	= 2,5 × 10 ^{.....} ml
(i)	 hl	= 4 × 10 ⁴ cm ³
(j)	2,75 m ³	= mm ³
(k)	4 800 cl	= kl
(l)	 kg	= 17 × 10 ² dg
(m)	35 cg	= 3,5 × 10 ^{.....} kg
(n)	 mg	= 4 × 10 ⁻⁷ t

Solution

	Forme décimale	Puissance de 10
(a)	543,5 hm	= 5,435 × 10 ⁷ mm
(b)	$\frac{3}{8}$ dm	= 3,75 × 10 ⁻² m
(c)	0,0000805 km	= 805 × 10 ⁻⁴ m
(d)	$\frac{23}{50}$ km	= 4,6 × 10 ⁴ cm
(e)	481,96 dm ²	= 4,8196 × 10 ⁻⁴ ha
(f)	32,5 cm ²	= 3,25 × 10 ⁻⁵ a
(g)	$\frac{17}{25}$ m ²	= 6,8 × 10 ⁻⁷ km ²
(h)	0,25 m ³	= 2,5 × 10 ⁵ ml
(i)	0,4 hl	= 4 × 10 ⁴ cm ³
(j)	2,75 m ³	= 2,75 × 10 ⁹ mm ³
(k)	4 800 cl	= 4,8 × 10 ⁻² kl
(l)	0,17 kg	= 17 × 10 ² dg
(m)	35 cg	= 3,5 × 10 ⁻⁴ kg
(n)	400 mg	= 4 × 10 ⁻⁷ t

3 Nombres réels

3.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

Que valent les expressions suivantes ?

(a) $\sqrt{(-\pi)^4}$

(b) $\sqrt[3]{(-4)^3}$

Solution

On a

$$(a) \sqrt{(-\pi)^4} = \pi^2$$

$$(b) \sqrt[3]{(-4)^3} = -4.$$

Exercice 2

1. Pour quelles valeurs du réel x l'expression $\sqrt{4x^2}$ est-elle définie ?
2. Peut-on affirmer que $\sqrt{4x^2} = 2x$ quel que soit le réel x ? Justifier votre réponse.
3. Si x est un réel négatif, que vaut $\sqrt{4x^2}$?

Solution

1. L'expression $\sqrt{4x^2}$ est définie pour tout réel x car $4x^2$ est un réel positif.
2. On ne peut pas l'affirmer car le premier membre est positif alors que le second est positif ou négatif selon la valeur de x . Cette égalité est vraie si et seulement si $x \geq 0$.
3. Si x est un réel négatif, alors $\sqrt{4x^2} = 2|x| = -2x$.

Exercice 3

1. Si n est un naturel non nul et si x est un réel, comparer les réels $(-x)^{2n}$ et $-x^{2n}$: sont-ils égaux ou différents ? Justifier votre réponse.
2. Même question avec $(-x)^{2n+1}$ et $-x^{2n+1}$.

Solution

1. Ces réels ne sont égaux que si $x = 0$. Sinon le premier est strictement positif tandis que le second est strictement négatif.
2. Ces réels sont égaux pour tout réel x puisque

$$(-x)^{2n+1} = (-1)^{2n+1} x^{2n+1} = -x^{2n+1}.$$

Exercice 4

1. Si r est un réel négatif, que vaut la valeur absolue de $-r + r^2$?

Solution

Comme r est négatif, le réel $-r + r^2$ est positif donc égal à sa valeur absolue.

Exercice 5

1. On donne des réels x, y et on considère les inégalités

$$(a) x^2 \leq y^2 \quad \text{et} \quad (b) x \leq y.$$

En justifiant, répondre par vrai ou faux à chacune des affirmations suivantes.

1. Quels que soient x, y , l'inégalité (a) est une condition suffisante pour que l'inégalité (b) soit vraie.
2. Quels que soient x, y , l'inégalité (a) est une condition nécessaire pour que l'inégalité (b) soit vraie.
3. Quels que soient x, y , l'inégalité (b) est une condition suffisante pour que l'inégalité (a) soit vraie.
4. Quels que soient x, y , l'inégalité (b) est une condition nécessaire pour que l'inégalité (a) soit vraie.
5. Quels que soient x, y , les deux inégalités sont équivalentes.

Solution

1. L'affirmation est fausse car (a) peut être vérifié et pas (b); par exemple pour $x = -1, y = -2$.
2. L'affirmation est fausse car (b) peut être vérifié et pas (a); par exemple pour $x = -2, y = -1$.
3. L'affirmation est fausse car (b) peut être vérifié et pas (a) (voir le cas précédent).
4. L'affirmation est fausse car (a) peut être vérifié et pas (b) (voir le premier cas).
5. Les deux inégalités ne sont bien sûr pas équivalentes (voir tous les exemples précédents).

Exercice 6

Écrire les sommes suivantes à l'aide d'un symbole sommatoire.

$$(a) s_1 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 \quad (b) s_2 = 3 - 9 + 27 - 81 + 243$$

Solution

- (a) La somme s_1 est la somme des 8 premiers naturels pairs non nuls ; par exemple, elle peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=1}^8 2k.$$

- (b) La somme s_2 est la somme alternée des 5 premières puissances naturelles non nulles de 3 ; par exemple, elle peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{k=1}^5 (-1)^{k+1} 3^k.$$

3.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Calculer la valeur des expressions suivantes ($x \in \mathbb{R}$).

(a) $\sqrt{(-4)^2}$ (b) $\sqrt[3]{(-8)^2}$ (c) $\sqrt{4x^2}$ (d) $\sqrt[3]{8x^3}$ (e) $\sqrt[3]{-8x^3}$

Exercice 2

1. Le cube d'un réel et de son opposé sont-ils toujours égaux ?
2. Si r est un réel négatif, que vaut $\sqrt[4]{(-r)^8}$?
3. Soit $r > 0$ et soit $a \in \mathbb{R}$. Décrire sous forme d'intervalle l'ensemble des réels dont la distance à a est inférieure ou égale à r .
4. Si x est un réel négatif, que vaut la valeur absolue de $\sqrt[3]{x^3} + x^3$?
5. Chacune des affirmations suivantes est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
Pour que le carré d'un réel soit plus grand ou égal à celui-ci,
 - (a) il suffit que le réel soit positif.
 - (b) il suffit que le réel soit négatif.
 - (c) il faut que le réel soit positif.
 - (d) il faut que le réel soit négatif.

Exercice 3

1. On considère la somme

$$s_1 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11.$$

- (a) Exprimer cette somme en français.
- (b) Comment note-t-on de façon générale un terme de cette somme ?
- (c) Écrire cette somme à l'aide d'un symbole sommatoire.

2. On considère la somme

$$s_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}.$$

- (a) Comment caractériser chacun des termes de cette somme sans tenir compte de son signe ?
- (b) Dans une somme, comment peut-on passer alternativement d'un terme positif à un terme négatif ?
- (c) Écrire s_2 à l'aide d'un symbole sommatoire.

3. On considère la somme

$$s_3 = \sum_{j=1}^4 (-3)^{2j}.$$

- (a) Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?
- (b) Que vaut le terme correspondant à $j = 2$?
- (c) Que vaut cette somme ?
- (d) Si j varie de 0 à 20, quelle formule pratique peut-on utiliser pour calculer la somme ? L'appliquer sans calculer le résultat numérique final.

4. On considère la somme

$$s_4 = \sum_{l=2}^7 (\sqrt[3]{3})^2.$$

- (a) Combien de termes cette somme comporte-t-elle ?
- (b) Que vaut le terme correspondant à $l = 3$?
- (c) Que vaut cette somme ?

Solution 1

Les expressions sont égales aux valeurs suivantes.

$$(a) \ 4 \quad (b) \ 4 \quad (c) \ 2|x| \quad (d) \ 2x \quad (e) \ -2x$$

Solution 2

1. Non. Le cube d'un réel a le même signe que le réel ; le cube d'un réel et de son opposé sont donc égaux si et seulement si le réel est nul.
2. r^2 .
3. $[a - r, a + r]$.
4. $\left| \sqrt[3]{x^3} + x^3 \right| = |x + x^3| = |x(1 + x^2)| = -x(1 + x^2)$.
5. (a) Faux (par exemple, avec $r = 1/2$, on a $r^2 < r$).
 (b) Vrai car le carré d'un réel étant toujours un réel positif, il est plus grand que tout nombre négatif.
 (c) Faux (par exemple, on a $r < r^2$ pour tout réel r strictement négatif).
 (d) Faux (par exemple, avec $r = 2$, on a $r^2 > r$).

Solution 3

1. (a) C'est la somme des six premiers naturels impairs.
 (b) On peut le noter $2n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}_0$ ou $2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.
 (c) Par exemple, on peut noter cette somme sous la forme

$$\sum_{n=0}^5 (2n + 1).$$

2. (a) Chaque terme de la somme est une puissance naturelle de $1/2$.
 (b) On peut passer alternativement d'un terme positif à un terme négatif grâce à un facteur du type $(-1)^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.
 (c) Par exemple, on peut noter cette somme sous la forme

$$\sum_{k=0}^4 (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

3. (a) Cette somme comporte quatre termes.
 (b) Le terme correspondant à $j = 2$ vaut $(-3)^4$ qui est égal à 81.
 (c) L'évaluation de cette somme donne

$$9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 = 9(1 + 9 + 9^2 + 9^3) = 9 \times 820 = 7\,380.$$

(d) On peut utiliser la formule suivante, dans laquelle q est un réel (ou un complexe) et M est un naturel non nul :

$$\sum_{m=0}^{M-1} q^m = \begin{cases} \frac{1 - q^M}{1 - q} & \text{si } q \neq 1 \\ M & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

On obtient alors

$$\sum_{j=0}^{20} (-3)^{2j} = \sum_{j=0}^{20} 9^j = \frac{1 - 9^{21}}{1 - 9} = \frac{9^{21} - 1}{8}.$$

4. (a) Cette somme comporte six termes.
 (b) Le terme correspondant à $l = 3$ vaut $(\sqrt[3]{3})^2$.
 (c) Cette somme vaut $6(\sqrt[3]{3})^2$ c'est-à-dire $6\sqrt[3]{9}$.

3.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

Y a-t-il un terme indépendant dans l'expression

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{18} ?$$

Si la réponse est affirmative, quelle est sa valeur ?

Solution

Le développement du binôme de Newton¹ donne

$$\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{18} = \sum_{j=0}^{18} C_{18}^j x^{2j} \left(\frac{-1}{x}\right)^{18-j}$$

1. Voir l'annexe.

où C_{18}^j est le nombre de combinaisons possibles de 18 éléments distincts pris j à j . L'éventuel terme indépendant est donc celui pour lequel $2j = 18 - j$, c'est-à-dire pour $j = 6$. Comme 6 est bien un naturel compris entre 0 et 18, le terme indépendant est égal à

$$C_{18}^6 (-1)^{12} = \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13}{6!} = 18\,564.$$

Exercice 2

i Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Solution

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Alors il existe deux naturels non nuls p, q premiers entre eux, tels que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

Il s'ensuit que $p^2 = 2q^2$ donc que p^2 est un nombre pair. Le carré d'un nombre impair étant un nombre impair, cela implique que p soit un nombre pair donc qu'il existe un naturel n tel que $p = 2n$. De $p^2 = 2q^2$ on déduit alors que $2n^2 = q^2$, donc que q est pair aussi (par le raisonnement précédent). On obtient ainsi une contradiction puisque p et q sont premiers entre eux. D'où la conclusion.

Une autre façon de procéder est la suivante.

Définissons l'ensemble de naturels strictement positifs E comme suit

$$E = \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : n\sqrt{2} \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Si $\sqrt{2}$ est rationnel, l'ensemble E est non vide. Mais si $n \in E$, alors $n\sqrt{2} - n \in E$ car c'est un naturel strictement positif et $(n\sqrt{2} - n)\sqrt{2} = 2n - n\sqrt{2} \in \mathbb{N}_0$. On a aussi $0 < n\sqrt{2} - n < n$. Ceci entraîne que E n'a pas de plus petit élément. Mais tout sous-ensemble non vide de naturels a un plus petit élément. D'où une contradiction.

Notons que cette dernière méthode permet également de prouver que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel puisque $\sqrt{3} - 1 < 1$ et même, en toute généralité, que la racine carrée d'un naturel est soit un naturel, soit un nombre irrationnel, comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 3

Soient $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}_0$ et $x \in]0, +\infty[$ tels que

$$x^2 = ax + b.$$

Montrer alors que x est naturel ou irrationnel.

Solution

Supposons que x n'est pas un naturel. On a alors la décomposition

$$x = n_0 + r_0 \quad \text{avec} \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad r_0 \in]0, 1[.$$

Cela étant, posons

$$E = \{n \in \mathbb{N}_0 : nx \in \mathbb{N}_0\}$$

et montrons que si un naturel n appartient à E alors il en est de même pour le réel nr_0 .

De fait, puisque nx est naturel, d'une part on a

$$0 < nr_0 = n(x - n_0) = nx - nn_0 \in \mathbb{N}_0$$

et d'autre part

$$0 < nr_0x = n(x - n_0)x = nx^2 - nn_0x = n(ax + b) - nn_0x = nb + (a - n_0)nx \in \mathbb{N}_0.$$

En itérant, on obtient donc que les naturels nr_0^k ($k \in \mathbb{N}_0$) appartiennent tous à l'ensemble E . Cette suite nr_0^k ($k \in \mathbb{N}_0$) est donc constituée de naturels strictement positifs et est strictement décroissante puisque $r_0 \in]0, 1[$, ce qui est impossible.

Dès lors l'ensemble E est vide et x est donc irrationnel.

Exercice 4

Soient $N \in \mathbb{N}_0$, un polynôme P à coefficients entiers de degré au plus $N - 1$ et un réel x tels que

$$x^N = P(x).$$

Montrer alors que x est entier ou irrationnel.

Solution

Si $N = 1$, c'est clair. Considérons donc $N > 1$.

Supposons que x ne soit pas un entier. On a alors la décomposition

$$x = n_0 + r_0 \quad \text{avec} \quad n_0 \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad r_0 \in]0, 1[.$$

Cela étant, posons

$$E = \{n \in \mathbb{N}_0 : nx^k \in \mathbb{Z}, \forall k = 0, \dots, N - 1\}$$

et montrons que si un naturel n appartient à E alors il en est de même pour le réel nr_0 .

De fait, puisque nx est naturel, on a premièrement

$$0 < nr_0 = n(x - n_0) = nx - nn_0 \in \mathbb{N}_0.$$

Ensuite, d'une part, pour tout $k = 0, \dots, N - 2$, on a

$$0 < nr_0x^k = n(x - n_0)x^k = nx^{k+1} - nn_0x^k \in \mathbb{N}_0$$

puisque, étant donné que l'on a $n \in E$, les nombres nx^{k+1} et nx^k sont naturels. Et d'autre part, on a

$$0 < nr_0x^{N-1} = n(x - n_0)x^{N-1} = nx^N - nn_0x^{N-1} = nP(x) - nn_0x^{N-1} \in \mathbb{N}_0$$

vu les propriétés de P et $n \in E$. En itérant, on obtient donc que les naturels nr_0^k ($k \in \mathbb{N}_0$) appartiennent tous à l'ensemble E . Cette suite nr_0^k ($k \in \mathbb{N}_0$) est donc constituée de naturels strictement positifs et est strictement décroissante puisque $r_0 \in]0, 1[$, ce qui est impossible.

Dès lors l'ensemble E est vide et x est donc irrationnel.

Exercice 5

1. Montrer que si deux naturels sont des sommes de carrés de naturels, alors leur produit l'est aussi.
2. Montrer que tout naturel impair est la différence de deux carrés de naturels.
3. Montrer que si k est naturel, alors $4k + 3$ n'est jamais la somme de deux carrés de naturels.
4. Un résultat attribué à Fermat¹ est celui-ci : tout nombre premier de la forme $4k + 1$ ($k \in \mathbb{N}$) est somme de deux carrés de naturels. Cette propriété étant admise, en déduire que si, dans la décomposition en facteurs premiers d'un naturel, tous les facteurs du type $4k + 3$ sont à une puissance paire, alors le naturel est la somme de deux carrés de naturels².
5. Admettons qu'un naturel est la somme de deux carrés de naturels si et seulement si, dans sa décomposition en facteurs premiers, tous les facteurs du type $4k + 3$ ($k \in \mathbb{N}$) sont à une puissance paire. En déduire qu'un naturel est la somme de deux carrés de naturels si et seulement s'il est la somme de deux carrés de rationnels.

Solution

1. Supposons que n, n_1, n_2 et m, m_1, m_2 soient des naturels tels que

$$n = n_1^2 + n_2^2 \quad \text{et} \quad m = m_1^2 + m_2^2.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} nm &= (n_1^2 + n_2^2) (m_1^2 + m_2^2) \\ &= n_1^2 m_1^2 + n_1^2 m_2^2 + n_2^2 m_1^2 + n_2^2 m_2^2 \\ &= (n_1^2 m_1^2 + n_2^2 m_2^2 - 2n_1 n_2 m_1 m_2) + (n_1^2 m_2^2 + n_2^2 m_1^2 + 2n_1 n_2 m_1 m_2) \\ &= (n_1 m_1 - n_2 m_2)^2 + (n_1 m_2 + n_2 m_1)^2 \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

1. Voir l'annexe.

2. La réciproque est vraie mais la preuve sort du cadre de cet ouvrage.

Remarque. Si on connaît les nombres complexes, on constate aisément que le résultat est facile à obtenir. De fait, n et m apparaissent comme les carrés des modules des complexes (n_1, n_2) et (m_1, m_2) et le produit du module de complexes est égal au module du produit de ces complexes.

2. Pour tout naturel n , on a

$$2n + 1 = (n + 1)^2 - n^2$$

et on conclut.

3. Soient des naturels n_1, n_2 . Écrivons

$$n_1 = 2k_1 + j_1 \quad \text{et} \quad n_2 = 2k_2 + j_2$$

avec $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ et $j_1, j_2 \in \{0, 1\}$. On obtient dès lors

$$n_1^2 + n_2^2 = 4(k_1^2 + k_2^2 + k_1j_1 + k_2j_2) + j_1^2 + j_2^2,$$

qui est un naturel de la forme

$$4k, \quad 4k + 1 \quad \text{ou} \quad 4k + 2$$

où $k \in \mathbb{N}$. On peut donc conclure.

4. Tous les naturels peuvent s'écrire sous la forme $4k, 4k + 1, 4k + 2 = 2(2k + 1)$ ou $4k + 3$, avec $k \in \mathbb{N}$. Les nombres premiers sont donc de la forme

$$4k + 1, \quad 4k + 3 \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Tout naturel est donc le produit de puissances naturelles de facteurs du type

$$2, \quad 4k + 1, \quad 4j + 3$$

où k, j sont des naturels et $4k + 1, 4j + 3$ sont premiers. Bien sûr $2 = 1 + 1$ est la somme de deux carrés de naturels. Par le résultat de Fermat, il en est de même pour $4k + 1$. Et bien sûr on a $(4j + 3)^2 = (4j + 3)^2 + 0^2$. Vu la partie 1 de cet exercice, on déduit que le produit de naturels qui sont des sommes de carrés de naturels est encore une somme de carrés de naturels. En particulier, toute puissance naturelle d'un naturel somme de carrés de naturels est aussi une somme de carrés de naturels. On peut donc conclure.

5. Soit un naturel n et deux rationnels q_1, q_2 tels que

$$n = q_1^2 + q_2^2.$$

Si q est le plus petit commun multiple des dénominateurs des rationnels, on a alors

$$q^2 n = n_1^2 + n_2^2$$

où $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que les puissances de naturels de type $4k + 3$ dans la factorisation de $q^2 n$ en facteurs premiers sont paires. Cela étant, la factorisation de q^2 en facteurs premiers donne nécessairement des puissances paires puisque ce naturel est un carré. Ainsi, les puissances de naturels de type $4k + 3$ dans la factorisation de n en facteurs premiers sont nécessairement paires et ce naturel est dès lors la somme de deux carrés de naturels.

Exercice 6

Cet exercice permet de voir comment se comportent les approximations des racines de naturels par des nombres rationnels : si la racine carrée de $n \in \mathbb{N}_0$ n'est pas un naturel et si les naturels p, q ($q \neq 0$) vérifient

$$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{n} \right| \leq \frac{\sqrt{n}}{2}$$

alors prouver que l'on a

$$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{n} \right| \geq \frac{2}{5q^2\sqrt{n}}.$$

Cela montre que lorsqu'on approche des racines carrées de naturels par des rationnels, les dénominateurs « croissent assez vite ».

Solution

Notons tout d'abord que puisque la racine carrée de n n'est pas un naturel, alors c'est un nombre irrationnel (voir l'exercice 3 de cette sous-section 3.3). Dès lors, comme le réel $q^2 |(p^2/q^2) - n|$ est en fait un nombre naturel non nul, on a

$$\frac{1}{q^2} \leq \left| \frac{p^2}{q^2} - n \right| = \left| \frac{p}{q} - \sqrt{n} \right| \left(\frac{p}{q} + \sqrt{n} \right).$$

Cela étant, de l'inégalité

$$\left| \frac{p}{q} + \sqrt{n} \right| = \left| \frac{p}{q} - \sqrt{n} + 2\sqrt{n} \right| \leq \left| \frac{p}{q} - \sqrt{n} \right| + 2\sqrt{n} \leq \frac{5\sqrt{n}}{2},$$

on déduit que

$$\left| \frac{p}{q} - \sqrt{n} \right| \geq \frac{1}{q^2 \left(\frac{p}{q} + \sqrt{n} \right)} \geq \frac{2}{5q^2\sqrt{n}}.$$

4 Équations et inéquations

4.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes (x est l'inconnue réelle).

(a) $\pi^2 x - \frac{1}{3} = -\frac{x}{\pi}$

(b) $64x^2 + 1 = 0$

(c) $64x^3 + 1 = 0$

(d) $2x - \frac{2}{x} = 1$

(e) $64x^4 - 16 = 0$

(f) $-4x + 4 = -x^2$

.....

$$(g) \frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2-1}$$

$$(h) x+1 = \frac{1}{x-1} - 2x + 6$$

$$(i) \frac{8}{1-x} = x^2 - 2x + 1$$

$$(j) x(x+1)^2 = -3x$$

Solution

(a) On a successivement

$$\pi^2 x - \frac{1}{3} = -\frac{x}{\pi} \Leftrightarrow \pi^2 x + \frac{x}{\pi} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi^3 + 1}{\pi} x = \frac{1}{3}.$$

La solution est donc le réel

$$\frac{\pi}{3(\pi^3 + 1)}.$$

(b) Cette équation n'a pas de solution car, puisque x représente un réel, le membre de gauche est toujours strictement positif.

(c) La solution réelle est la racine cubique de $-1/64$, à savoir $-1/4$.

(d) L'équation est définie si $x \in \mathbb{R}_0$. On a successivement

$$2x - \frac{2}{x} = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2 = x \text{ et } x \neq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0 \text{ et } x \neq 0.$$

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant vaut $1 + 16 = 17$. Les solutions sont donc les réels

$$\frac{1 + \sqrt{17}}{4} \quad \text{et} \quad \frac{1 - \sqrt{17}}{4}.$$

(e) En divisant les deux membres par 16 et en utilisant un produit remarquable, on obtient

$$64x^4 - 16 = 0 \Leftrightarrow (2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1) = 0.$$

Les solutions sont donc les réels

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(f) On a successivement

$$-4x + 4 = -x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

La solution est donc le réel 2.

(g) Étant donné la présence des dénominateurs, on doit chercher les solutions parmi les réels différents de -1 et 1 . Pour tout x différent de -1 et 1 , on a

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x^2-1} \Leftrightarrow x^2 - 1 = x - 1 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) = (x-1) \Leftrightarrow x+1 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

La solution de cette équation est donc 0.

- (h) Étant donné la présence du dénominateur, on doit chercher les solutions parmi les réels différents de 1. Cela étant, pour de tels réels, on a successivement

$$\begin{aligned}x + 1 &= \frac{1}{x-1} - 2x + 6 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 + (x-1)(6-2x) \\&\Leftrightarrow x^2 - 1 = 1 + 8x - 2x^2 - 6 \\&\Leftrightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0.\end{aligned}$$

Cette équation du second degré possède un discriminant égal à 16. Il s'ensuit que les réels qui la vérifient sont

$$\frac{8-4}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{8+4}{6} = 2.$$

- (i) Étant donné la présence du dénominateur, on doit chercher les solutions parmi les réels différents de 1. Cela étant, on a alors successivement

$$\frac{8}{1-x} = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow 8 = (1-x)(1-x)^2 \Leftrightarrow 8 = (1-x)^3 \Leftrightarrow 1-x = 2 \Leftrightarrow x = -1.$$

La solution est donc le réel -1 .

- (j) On a successivement

$$x(x+1)^2 = -3x \Leftrightarrow x(x+1)^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x((x+1)^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

car le second facteur du membre de gauche est un nombre réel strictement positif quelle que soit la valeur de x . La solution de l'équation est donc 0.

Exercice 2

... Résoudre les équations suivantes (A et x sont les inconnues réelles).

(a) $|-A + \sqrt{2}| = |-2A|$ (b) $|A^2 - |A^4|| + 1 = 0$ (c) $|A^2 - |A^4|| - 1 = 0$
 (d) $x - 1 = \frac{1}{|x-1|}$ (e) $|x|x| - 1| = 3|x-1| + 2$ (f) $-|x|x + 3x = -1$

Solution

- (a) On a successivement¹

$$\begin{aligned}|-A + \sqrt{2}| &= |-2A| \Leftrightarrow (-A + \sqrt{2})^2 = 4A^2 \\&\Leftrightarrow (-A + \sqrt{2} - 2A)(-A + \sqrt{2} + 2A) = 0 \\&\Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \text{ou} \quad A = -\sqrt{2}.\end{aligned}$$

1. Une autre résolution est possible en appliquant $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$.

- (b) L'équation n'a pas de solution car le membre de gauche est un réel strictement positif.
- (c) On a

$$\left| A^2 - |A^4| \right| - 1 = 0 \Leftrightarrow A^2 - A^4 = 1 \text{ ou } A^2 - A^4 = -1.$$

Ce sont deux équations du second degré en la variable A^2 . La première n'a pas de solution car son discriminant est strictement négatif. Le discriminant de la seconde vaut 5 ; ainsi la solution de la seconde équation en A^2 est $A^2 = (1 + \sqrt{5})/2$. Les solutions de l'équation de départ sont donc les réels

$$\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} \quad \text{et} \quad -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

- (d) Comme la valeur absolue d'un réel est toujours un nombre positif et comme on est en présence de $|x - 1|$ au dénominateur, on doit chercher les solutions parmi les réels strictement plus grands que 1. Cela étant, un réel $x > 1$ est donc solution si et seulement si $(x - 1)|x - 1| = (x - 1)^2 = 1$ ou encore si et seulement si

$$0 = (x - 1)^2 - 1 \Leftrightarrow (x - 1 - 1)(x - 1 + 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 2) = 0.$$

La solution est donc le réel 2.

- (e) Si $x < 0$, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} |x|x| - 1| &= 3|x - 1| + 2 \Leftrightarrow \left| -x^2 - 1 \right| = 3(1 - x) + 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 = 5 - 3x \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0. \end{aligned}$$

On obtient donc une équation du second degré dont le discriminant est égal à $9 + 16 = 25 = 5^2$; le réel négatif qui en est solution est donc le réel $(-3 - 5)/2 = -4$. Si $x \in [0, 1[$, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} |x|x| - 1| &= 3|x - 1| + 2 \Leftrightarrow \left| x^2 - 1 \right| = 3(1 - x) + 2 \\ &\Leftrightarrow 1 - x^2 = 5 - 3x \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 0. \end{aligned}$$

On obtient donc une équation du second degré dont le discriminant est $9 - 16 = -7$, nombre strictement négatif. Il n'y a donc pas de solution.

Si $x \geq 1$, on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} |x|x| - 1| &= 3|x - 1| + 2 \Leftrightarrow \left| x^2 - 1 \right| = 3(x - 1) + 2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 1 = 3x - 1 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 3) = 0. \end{aligned}$$

Dans ce cas, la solution est donc le réel 3.

En conclusion, les solutions de l'équation donnée au départ sont les réels

$$-4 \quad \text{et} \quad 3.$$

(f) Cherchons les réels strictement négatifs vérifiant l'équation. On doit donc résoudre

$$x^2 + 3x + 1 = 0,$$

équation du second degré dont on ne garde que les éventuelles solutions strictement négatives. Comme le discriminant de cette équation est égal à 5, il y a toujours deux solutions réelles, à savoir

$$\frac{-3 + \sqrt{5}}{2} = -\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Comme ces deux solutions sont des réels strictement négatifs, on peut les conserver. Cherchons à présent les réels positifs vérifiant cette équation. On doit donc résoudre

$$-x^2 + 3x + 1 = 0,$$

équation du second degré dont on ne garde que les éventuelles solutions positives. Comme le discriminant de cette équation est égal à 13, il y a toujours deux solutions réelles, à savoir les nombres

$$\frac{-3 + \sqrt{13}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3 - \sqrt{13}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Comme on ne doit garder que les solutions positives, on ne conserve que le nombre

$$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

En conclusion, l'équation de départ possède trois solutions réelles, à savoir les réels

$$-\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad -\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3 + \sqrt{13}}{2}.$$

Exercice 3

Soit λ un paramètre réel.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de λ existe-t-il un seul réel x vérifiant l'égalité

$$x^2 + \lambda x + \lambda = 0 ?$$

2. Pour quelle(s) valeur(s) de λ n'existe-t-il pas de réel x vérifiant l'égalité

$$\lambda^2 x^2 + 2\lambda^2 x + 1 = 0 ?$$

3. Résoudre l'équation suivante en fonction de λ (x est l'inconnue réelle)

$$\lambda x|x - 1| = x - 1.$$

Solution

1. L'égalité donnée est une équation du second degré en la variable x ; celle-ci possède une seule solution si et seulement si son discriminant est nul, c'est-à-dire

$$\lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4) = 0.$$

L'égalité donnée est donc vérifiée pour un seul réel x si et seulement si $\lambda = 0$ ou $\lambda = 4$.

2. Si $\lambda = 0$, l'égalité n'est vérifiée pour aucun réel x .

Si $\lambda \neq 0$, l'égalité est une équation du second degré en la variable réelle x et elle n'a pas de solution réelle si et seulement si son discriminant est strictement négatif, autrement dit si et seulement si

$$4\lambda^4 - 4\lambda^2 = 4\lambda^2(\lambda^2 - 1) = 4\lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1) < 0$$

ou encore si et seulement si

$$\lambda \in]-1, 0[\cup]0, 1[.$$

Il n'y a donc pas de réel vérifiant l'égalité donnée si et seulement si λ est un réel de l'intervalle

$$]-1, 1[.$$

3. Si $\lambda = 0$, cette équation possède l'unique solution 1.

Considérons alors le cas $\lambda \neq 0$. Comme l'équation fait intervenir la valeur absolue $|x - 1|$, résolvons-la en considérant les cas $x < 1$ et $x \geq 1$.

- Dans le cas $x < 1$, la valeur absolue de $x - 1$ est égale à $-x + 1$. L'équation est donc équivalente à

$$\lambda x = -1,$$

laquelle a pour solution le réel $-1/\lambda$. Comme $x < 1$, on doit avoir

$$-\frac{1}{\lambda} < 1 \Leftrightarrow \lambda < -1 \text{ ou } \lambda > 0.$$

Il s'ensuit que l'équation possède une solution si et seulement si

$$\lambda \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

et que celle-ci est égale à

$$-\frac{1}{\lambda}.$$

- Le réel $x = 1$ vérifie bien sûr l'équation, quelle que soit la valeur de λ .
- Dans le cas $x > 1$, la valeur absolue de $x - 1$ est égale à $x - 1$. L'équation est donc équivalente à

$$\lambda x = 1,$$

laquelle a pour solution le réel $1/\lambda$. Comme $x > 1$, on doit avoir

$$\frac{1}{\lambda} > 1 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1.$$

Il s'ensuit que l'équation possède une solution si et seulement si

$$\lambda \in]0, 1[$$

et que celle-ci est égale à

$$\frac{1}{\lambda}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation de départ en fonction du paramètre λ sont données comme suit.

– Si $\lambda < -1$, il y a deux solutions, à savoir les réels

$$-\frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad 1.$$

– Si $\lambda \in [-1, 0]$, il y a une unique solution, à savoir le réel

$$1.$$

– Si $\lambda \in]0, 1[$, il y a trois solutions, à savoir les réels

$$-\frac{1}{\lambda}, \quad 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\lambda}.$$

– Si $\lambda \in [1, +\infty[$, il y a deux solutions, à savoir les réels

$$-\frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad 1.$$

Exercice 4

Résoudre les inéquations suivantes (x est l'inconnue réelle).

$$(a) \ x^2 \geq x \qquad (b) \ x^2 \geq x + 1 + \frac{1}{x-1} \qquad (c) \ \frac{-1}{2x-1} \leq \frac{-1}{x-2}$$

Solution

(a) On a $x^2 \geq x \Leftrightarrow x^2 - x = x(x-1) \geq 0$. Dès lors, les solutions sont les réels de l'ensemble

$$]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[.$$

(b) Pour $x \neq 1$, on a successivement

$$\begin{aligned}
 x^2 \geq x + 1 + \frac{1}{x-1} &\Leftrightarrow x^2 \geq \frac{x^2 - 1 + 1}{x-1} \\
 &\Leftrightarrow x^2 \geq \frac{x^2}{x-1} \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2(x-1) - x^2}{x-1} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x^2(x-2)}{x-1} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \frac{x-2}{x-1} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les réels qui sont solutions de cette inéquation sont ceux de l'ensemble

$$\{0\} \cup]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[=]-\infty, 1[\cup [2, +\infty[.$$

(c) Pour $x \neq 1/2$ et $x \neq 2$, on a successivement

$$\begin{aligned}
 \frac{-1}{2x-1} \leq \frac{-1}{x-2} &\Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x-2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{-(x+1)}{(2x-1)(x-2)} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x+1}{(2x-1)(x-2)} \leq 0.
 \end{aligned}$$

Une étude du signe du numérateur et du produit des deux facteurs du dénominateur

x	-1			$1/2$			2		
$x+1$	-	0	+	+	+	+	+	+	+
$(2x-1)(x-2)$	+	+	+	0	-	0	+	+	+
$(x+1)/(2x-1)(x-2)$	-	0	+	$\neq$	-	$\neq$	+	+	+

conduit à l'ensemble des solutions

$$]-\infty, -1] \cup \left] \frac{1}{2}, 2 \right[.$$

Exercice 5

Résoudre les inéquations suivantes (x est l'inconnue réelle).

(a) $|3x - 2| > 3$

(b) $\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{|5x - 2x^2 - 3|}$

(c) $|x^2 + x - 2| \leq 1 - x$

(d) $x|x| - 1 \geq 3|x - 1| + 2$

(e) $2x - 2| - x + 1| \geq x$

(f) $|x - 1| \geq \frac{1}{|x + 1|}$

Solution

- (a) Si
- $|x| > a$
- (
- $a \geq 0$
-) alors
- $|x| > a \Leftrightarrow (x < -a \text{ ou } x > a)$
- .

Dès lors, on a successivement

$$\begin{aligned} |3x - 2| > 3 &\Leftrightarrow 3x - 2 < -3 \text{ ou } 3x - 2 > 3 \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{1}{3} \text{ ou } x > \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Les réels qui vérifient cette inéquation sont donc ceux de l'ensemble

$$\left] -\infty, -\frac{1}{3} \right[\cup \left] \frac{5}{3}, +\infty \right[.$$

- (b) On a
- $5x - 2x^2 - 3 = -2(x - 1)(x - 3/2)$
- . Il s'ensuit que dès le départ, il faut exclure les réels 1 et
- $3/2$
- de l'ensemble des solutions puisque l'inéquation n'est pas définie en ces réels. De plus, comme la valeur absolue d'un réel est un réel positif, le second membre est positif. Le premier doit donc l'être aussi et, dès lors, les solutions doivent être cherchées parmi les réels strictement plus grands que 1.

Cela étant, pour $x > 1$, on a

$$\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{|5x-2x^2-3|} \Leftrightarrow |5x-2x^2-3| \geq x-1.$$

On a aussi

$$|5x-2x^2-3| = \begin{cases} 5x-2x^2-3 = -2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) & \text{si } x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \\ -5x+2x^2+3 = 2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) & \text{si } x \in]-\infty, 1] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[. \end{cases}$$

Dès lors, d'une part, pour $x \in]1, 3/2[$, on a

$$\begin{aligned} |5x-2x^2-3| \geq x-1 &\Leftrightarrow -2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq x-1 \\ &\Leftrightarrow -2(x-3/2) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow -2x \geq -2 \\ &\Leftrightarrow x \leq 1, \end{aligned}$$

et cette dernière inégalité n'est vérifiée pour aucune valeur de x strictement supérieure à 1. Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.D'autre part, pour $x > 3/2$, on a

$$|5x-2x^2-3| \geq x-1 \Leftrightarrow 2(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right) \geq x-1 \Leftrightarrow 2x-3 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 2;$$

les solutions dans ce cas sont donc tous les réels plus grands ou égaux à 2.

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation de départ sont les réels de l'intervalle

$$[2, +\infty[.$$

- (c) Comme la valeur absolue d'un réel est un réel positif, les solutions doivent être cherchées parmi les réels plus petits ou égaux à 1. Cela étant, on a

$$x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2),$$

donc

$$|x^2 + x - 2| = \begin{cases} -(x - 1)(x + 2) & \text{si } x \in [-2, 1] \\ (x - 1)(x + 2) & \text{si } x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[. \end{cases}$$

Dès lors, d'une part, pour $x \in]-\infty, -2]$, on a

$$\begin{aligned} |x^2 + x - 2| \leq 1 - x &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) \leq 1 - x \\ &\Leftrightarrow -(x + 2) \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \geq -3; \end{aligned}$$

les solutions dans ce cas sont donc les réels de l'intervalle $[-3, -2]$.

D'autre part, pour $x \in [-2, 1]$, on a

$$\begin{aligned} |x^2 + x - 2| \leq 1 - x &\Leftrightarrow (1 - x)(x + 2) \leq 1 - x \\ &\Leftrightarrow x + 2 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x \leq -1; \end{aligned}$$

les solutions dans ce cas sont donc les réels de l'intervalle $[-2, -1]$.

Finalement, comme l'inéquation est vérifiée pour $x = 1$, on obtient

$$[-3, -1] \cup \{1\}$$

comme ensemble de réels qui vérifient l'inéquation.

- (d) Comme le membre de droite est un réel strictement positif quel que soit le réel x , il n'y a pas de solution lorsque x est un réel négatif car dans ce cas le membre de gauche est un réel négatif.

Cela étant, pour $x \in]0, 1]$, on a $|x - 1| = 1 - x$ et l'inégalité donnée est équivalente à

$$x|x| - 1 \geq 3(1 - x) + 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 \geq 5 - 3x$$

ou encore à

$$x^2 + 3x - 6 \geq 0.$$

Le polynôme $x \mapsto x^2 + 3x - 6$ possède les zéros $-(3 + \sqrt{33})/2$ et $(-3 + \sqrt{33})/2$; l'inégalité ci-dessus est donc vérifiée si et seulement si

$$x \leq -\frac{3 + \sqrt{33}}{2} \quad \text{ou} \quad x \geq \frac{-3 + \sqrt{33}}{2}.$$

Comme $-(3 + \sqrt{33})/2$ est un réel négatif et comme $(-3 + \sqrt{33})/2$ est un réel strictement plus grand que 1, il n'y a pas de solution pour l'intervalle considéré.

Pour $x > 1$, on a $|x - 1| = x - 1$ et les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} x|x| - 1 &\geq 3|x - 1| + 2 &\Leftrightarrow x^2 - 1 &\geq 3(x - 1) + 2 \\ &&\Leftrightarrow x^2 - 1 &\geq 3x - 1 \\ &&\Leftrightarrow x(x - 3) &\geq 0. \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, on a $x(x - 3) \geq 0 \Leftrightarrow x - 3 \geq 0$ et finalement les réels $x > 1$ qui vérifient cette inégalité sont ceux de l'intervalle $[3, +\infty[$.

En conclusion, les réels qui vérifient l'inéquation de départ sont ceux de l'intervalle

$$[3, +\infty[.$$

(e) On a immédiatement

$$2x - 2| - x + 1| \geq x \Leftrightarrow x \geq 2|x - 1|.$$

Comme le membre de droite est un réel positif, celui de gauche doit l'être aussi et les solutions doivent être cherchées parmi les réels positifs.

Cela étant, pour $0 \leq x < 1$, on a

$$x \geq -2x + 2 \Leftrightarrow 3x \geq 2,$$

ce qui conduit à l'intervalle $[2/3, 1[$ dans ce cas.

Pour $x \geq 1$, on a

$$x \geq 2x - 2 \Leftrightarrow x \leq 2,$$

ce qui conduit à l'intervalle $[1, 2]$ comme ensemble de solutions dans ce cas.

En conclusion, les réels qui vérifient l'inéquation de départ sont ceux de l'intervalle

$$\left[\frac{2}{3}, 1\right[\cup [1, 2] = \left[\frac{2}{3}, 2\right].$$

(f) Étant donné la présence de $|x + 1|$ au dénominateur, on doit chercher les solutions parmi les réels différents de -1 . Cela étant, pour $x \neq -1$, l'inégalité est équivalente à

$$|x - 1| |x + 1| \geq 1 \Leftrightarrow |x^2 - 1| \geq 1.$$

Pour $x < -1$ ou $x \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &\geq 1 &\Leftrightarrow x^2 &\geq 2 \\ &&\Leftrightarrow x &\in]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[. \end{aligned}$$

Pour $-1 < x < 1$, on a

$$1 - x^2 \geq 1 \Leftrightarrow 0 \geq x^2 \Leftrightarrow x = 0.$$

En conclusion, les solutions sont les réels de l'ensemble

$$]-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty[\cup \{0\}.$$

4.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes.

- (a) $-2x + \frac{7}{5} = -3x$ (b) $2x^3 + 5x^2 - 3x = 0$ (c) $(x-1)^2 = (-2x+3)^2$
 (d) $|x+2| = |-x+1|$ (e) $x|x|^3 = x^2$ (f) $x|x| + 2x + 1 = 0$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes.

- (a) $-2x + 3 \geq 0$ (b) $2x^3 + 5x^2 - 3x \leq 0$ (c) $\frac{x^2 - 3x + 2}{(1-x)^3} \leq 0$
 (d) $\frac{1}{x+1} > \frac{1}{-x+2}$ (e) $x^2 \geq 4$ (f) $|x-3| < 2$
 (g) $|x|(-x+2) \leq |x|^2 + x$ (h) $x|x|^3 \geq x^2$ (i) $|x-1|x \geq -x+4$

Exercice 3

Si a et b sont des réels non nuls tels que

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b},$$

peut-on dire que $a > b$? Justifier la réponse.

Exercice 4

On donne l'équation suivante, dans laquelle x désigne l'inconnue réelle et λ un paramètre réel

$$x^2 + 2\lambda x + 1 = 0.$$

Pour quelles valeurs de λ cette équation

1. n'a-t-elle aucune solution réelle?
2. a-t-elle deux solutions distinctes strictement négatives?

Solution 1

- (a) $S = \{-7/5\}$ (b) $S = \{-3, 0, 1/2\}$ (c) $S = \{4/3, 2\}$
 (d) $S = \{-1/2\}$ (e) $S = \{0, 1\}$ (f) $S = \{1 - \sqrt{2}\}$

Solution 2

- (a) $S =]-\infty, 3/2]$ (b) $S =]-\infty, -3] \cup [0, 1/2]$ (c) $S = [2, +\infty[$
 (d) $S =]-1, 1/2[\cup]2, +\infty[$ (e) $S =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ (f) $S =]1, 5[$
 (g) $S = \{0\} \cup [1/2, +\infty[$ (h) $S = \{0\} \cup [1, +\infty[$ (i) $S = [2, +\infty[$

Solution 3

Non. Par exemple, on a $1/(-2) < 1/10$ mais on n'a pas $-2 > 10$.

Solution 4

- Il n'y a pas de solution si et seulement si $|\lambda| < 1$ c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \in]-1, 1[$.
- Il y a deux réels distincts négatifs qui vérifient l'égalité si et seulement si $\lambda > 1$.

4.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

Résoudre l'équation suivante en fonction du paramètre réel λ (x est l'inconnue réelle)

$$\lambda x^2 + 1 = |x|.$$

Solution

Remarquons que l'équation s'écrit aussi

$$\lambda|x|^2 - |x| + 1 = 0.$$

Cela étant, pour $\lambda = 0$, l'équation est $1 = |x|$ et est vérifiée par les réels -1 et 1 .

Pour $\lambda \neq 0$, l'équation est une équation du second degré en la variable $|x|$ dont le discriminant est égal à $1 - 4\lambda$.

- Lorsque $1 - 4\lambda < 0$, c'est-à-dire lorsque $\lambda > \frac{1}{4}$, il n'y a aucune solution réelle.
- Lorsque $1 - 4\lambda = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{1}{4}$, on a

$$\lambda|x|^2 - |x| + 1 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 4 = 0 \Leftrightarrow (|x| - 2)^2 = 0;$$

les solutions sont donc les réels -2 et 2 .

- Lorsque $1 - 4\lambda > 0$, c'est-à-dire lorsque $\lambda < \frac{1}{4}$, les solutions sont les réels x dont la valeur absolue est égale à

$$a_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda} \quad \text{ou} \quad a_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Le produit de ces réels est égal à $1/\lambda$, de même que leur somme. Lorsque $\lambda > 0$, a_1 et a_2 sont donc strictement positifs ; il s'ensuit que pour $\lambda \in]0, 1/4[$, l'équation possède quatre solutions, à savoir les réels

$$-\sqrt{a_1}, \quad \sqrt{a_1}, \quad -\sqrt{a_2}, \quad \sqrt{a_2}.$$

Lorsque $\lambda < 0$, a_1 et a_2 sont de signes contraires et comme dans ce cas $a_1 < 0$, on a $a_2 > 0$. Il s'ensuit que pour $\lambda < 0$, l'équation possède deux solutions, à savoir les réels

$$-\sqrt{a_2}, \quad \sqrt{a_2}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation de départ en fonction du paramètre λ sont les suivantes.

- Si $\lambda \in]-\infty, 0[$, il y a deux solutions, à savoir les réels

$$-\sqrt{a_2}, \quad \sqrt{a_2}.$$

- Si $\lambda = 0$, il y a deux solutions, à savoir -1 et 1 .

- Si $\lambda \in]0, 1/4[$, il y a quatre solutions, à savoir les réels

$$-\sqrt{a_1}, \quad \sqrt{a_1}, \quad -\sqrt{a_2}, \quad \sqrt{a_2}.$$

- Si $\lambda = 1/4$, il y a deux solutions à savoir -2 et 2 .

- Si $\lambda \in]1/4, +\infty[$, il n'y a pas de solution réelle.

Exercice 2

Résoudre l'équation suivante en fonction du paramètre réel λ (x est l'inconnue réelle)

$$\lambda x|x| + 3x = \lambda.$$

Solution

Pour $\lambda = 0$, cette équation s'écrit $3x = 0$; elle a donc l'unique réel 0 comme solution. Considérons à présent le cas $\lambda \neq 0$.

- Cherchons les réels positifs x vérifiant l'équation.

On doit donc résoudre l'équation

$$\lambda x^2 + 3x - \lambda = 0$$

en la variable réelle x et ne garder que les réels positifs.

Cette équation est une équation du second degré dont le discriminant est égal à

$$\Delta_1 = 9 + 4\lambda^2.$$

Comme $\Delta_1 > 0$, l'équation possède toujours deux solutions réelles, à savoir les nombres

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{\Delta_1}}{2\lambda} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{\Delta_1}}{2\lambda}.$$

Le produit de x_1 et x_2 étant égal à -1 , ces nombres sont toujours de signes opposés et on ne doit donc garder que l'un d'entre eux, à savoir celui qui est positif. En conclusion, dans le cas considéré ici, l'unique solution est le réel

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{\Delta_1}}{2\lambda} = -\frac{3 + \sqrt{9 + 4\lambda^2}}{2\lambda} \quad \text{si} \quad \lambda < 0$$

et

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{\Delta_1}}{2\lambda} = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\lambda^2}}{2\lambda} \quad \text{si} \quad \lambda > 0.$$

- Cherchons à présent les réels strictement négatifs x vérifiant l'équation.
On doit donc résoudre l'équation

$$-\lambda x^2 + 3x - \lambda = 0$$

en la variable réelle x et ne garder que les réels strictement négatifs.

Cette équation est une équation du second degré dont le discriminant est égal à

$$\Delta_2 = 9 - 4\lambda^2.$$

- (a) Lorsque $\Delta_2 < 0$, c'est-à-dire lorsque $\frac{3}{2} < |\lambda|$, il n'y a aucune solution réelle.
(b) Lorsque $\Delta_2 = 0$, c'est-à-dire lorsque $|\lambda| = \frac{3}{2}$, la solution est le réel $\frac{3}{2\lambda}$, c'est-à-dire

$$1 \quad \text{si} \quad \lambda = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad -1 \quad \text{si} \quad \lambda = -\frac{3}{2}.$$

- (c) Lorsque $\Delta_2 > 0$, c'est-à-dire lorsque $|\lambda| < \frac{3}{2}$, les solutions sont les réels

$$x_3 = \frac{-3 - \sqrt{\Delta_2}}{-2\lambda} = \frac{3 + \sqrt{9 - 4\lambda^2}}{2\lambda} \quad \text{et} \quad x_4 = \frac{-3 + \sqrt{\Delta_2}}{-2\lambda} = \frac{3 - \sqrt{9 - 4\lambda^2}}{2\lambda}.$$

Le produit de x_3 et x_4 étant égal à 1, ces réels sont toujours de même signe et on ne doit donc les garder que s'ils sont négatifs ; comme leur somme est égale à $3/\lambda$, on ne les garde que lorsque $\lambda < 0$.

En conclusion, les solutions de l'équation donnée en fonction du paramètre λ sont données comme suit.

– Si $\lambda \in]-\infty, -3/2[$, il y a une seule solution, à savoir le réel

$$x_1 = -\frac{3 + \sqrt{9 + 4\lambda^2}}{2\lambda}.$$

– Si $\lambda = -3/2$, il y a deux solutions, à savoir les réels

$$x_1 = 1 + \sqrt{2} \quad \text{et} \quad -1.$$

– Si $\lambda \in]-3/2, 0[$, il y a trois solutions, à savoir les réels

$$x_1 = -\frac{3 + \sqrt{9 + 4\lambda^2}}{2\lambda}, \quad x_3 = \frac{3 + \sqrt{9 - 4\lambda^2}}{2\lambda}, \quad x_4 = \frac{3 - \sqrt{9 - 4\lambda^2}}{2\lambda}.$$

– Si $\lambda = 0$, il y a une seule solution à savoir 0.

– Si $\lambda \in]0, 3/2[$, il y a une seule solution, à savoir le réel

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\lambda^2}}{2\lambda}.$$

– Si $\lambda = 3/2$, il y a deux solutions, à savoir les réels

$$x_2 = \sqrt{2} - 1 \quad \text{et} \quad 1.$$

– Si $\lambda \in]3/2, +\infty[$, il y a une seule solution, à savoir le réel

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{9 + 4\lambda^2}}{2\lambda}.$$

Exercice 3. Le nombre d'or

Le nombre d'or est le réel défini comme suit. Il s'agit du rapport entre deux longueurs (la plus grande au numérateur) telles que le rapport entre la somme de celles-ci et la plus grande soit égal au rapport entre la plus grande et la plus petite. On le désigne par

$$\Phi.$$

Que vaut le nombre d'or¹ ?

1. Le nom « nombre d'or » et la notation Φ sont apparus au début du XX^e siècle. La notation fait référence au sculpteur grec Phidias, décorateur du Parthénon d'Athènes où l'on peut retrouver la présence du nombre d'or. Euclide y fait aussi référence dans un de ses ouvrages. Les Grecs n'avaient pas de nom spécifique pour ce nombre.



Solution

Désignons par L la plus grande longueur et par l la plus petite. Le problème est donc de déterminer L/l tel que

$$\frac{L}{l} = \frac{L+l}{L}.$$

Posons $x = L/l$. L'égalité précédente devient alors

$$x = 1 + \frac{1}{x} \quad \text{ou encore } x^2 - x - 1 = 0.$$

La seconde forme est une équation polynomiale du second degré en la variable x dont les solutions sont

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Le nombre d'or étant positif par définition, on obtient

$$\Phi = \frac{L}{l} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Les premières décimales de ce nombre irrationnel sont données par

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948...$$

5 Systèmes d'équations et d'inéquations linéaires

5.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants et interpréter graphiquement la solution.

$$(a) \begin{cases} y + \pi x = 0 \\ 2y - x = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 3 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} y + 2x + z = 2 \\ y - 2x + 2z = 0 \end{cases}$$

Solution

(a) On a successivement

$$\begin{cases} y + \pi x = 0 \\ 2y - x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\pi x \\ -2\pi x - x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\pi x \\ -(2\pi + 1)x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2\pi + 1} \\ y = \frac{3\pi}{2\pi + 1} \end{cases}$$

La solution du système est donc le couple

$$\left(-\frac{3}{2\pi + 1}, \frac{3\pi}{2\pi + 1}\right).$$

Dans un repère du plan, il s'agit du couple des coordonnées cartésiennes du point d'intersection des droites d'équations $y + \pi x = 0$ et $2y - x = 3$.

(b) On a successivement

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x - y + 1 = 0.$$

Les solutions du système sont donc les couples

$$(x, 2x + 1), x \in \mathbb{R}.$$

Dans un repère du plan, il s'agit des coordonnées cartésiennes des points de la droite d'équation cartésienne $y = 2x + 1$.

(c) On a successivement

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x - 2y + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = -2 \\ 4x - 2y = -5 \end{cases}$$

Aucun couple de réels ne vérifie simultanément les deux égalités ; il n'y a donc pas de solution. Les deux équations sont en fait celles de droites parallèles distinctes.

(d) On a successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} y + 2x + z = 2 \\ y - 2x + 2z = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 2 \\ 2x = y + 2z \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3z}{2} + 1 \\ x = \frac{y}{2} + z. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{3z}{2} + 1 \\ x = \frac{z}{4} + \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions sont donc les triplets

$$\left(\frac{z}{4} + \frac{1}{2}, -\frac{3z}{2} + 1, z \right), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Dans l'espace muni d'un repère, il s'agit des coordonnées cartésiennes des points d'une droite, intersection de deux plans sécants d'équations cartésiennes $y + 2x + z = 2$ et $y - 2x + 2z = 0$.

Exercice 2

On donne les systèmes d'inéquations linéaires suivants.

$$(a) \begin{cases} x + 2y \geq -3x + 4 \\ y - x \leq 2 \end{cases} \qquad (b) \begin{cases} y \leq 2(x + 1) \\ y \geq 2(x - 1) \\ y \leq 2(1 - x) \\ y \geq -2(x + 1) \end{cases}$$

Dans un repère, représenter l'ensemble des points du plan dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient ces systèmes. Déterminer la forme d'une inéquation (non linéaire) équivalente au système (b).

Solution

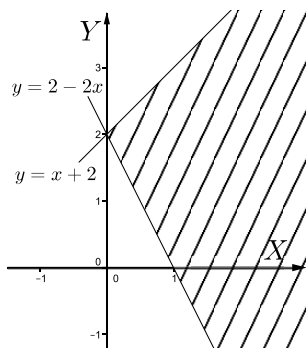
(a) On a successivement

$$\begin{cases} x + 2y \geq -3x + 4 \\ y - x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ y \leq 2 + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 2 - 2x \\ y \leq 2 + x \end{cases}$$

La représentation graphique des couples vérifiant le système précédent est obtenue à partir des graphiques des droites d'équations cartésiennes

$$y = 2 - 2x, \quad y = 2 + x$$

en prenant les points qui constituent l'intersection des régions du plan délimitées par ces droites et spécifiées par les inégalités du système.



- (b) Comme on a $|r| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq r \leq \varepsilon$ pour tous réels r et ε (si $\varepsilon < 0$ aucun réel r ne vérifie ces inégalités bien sûr), la première et la quatrième inéquation sont ensemble équivalentes à l'inéquation

$$|y| \leq 2(x + 1)$$

et la seconde et la troisième sont ensemble équivalentes à l'inéquation

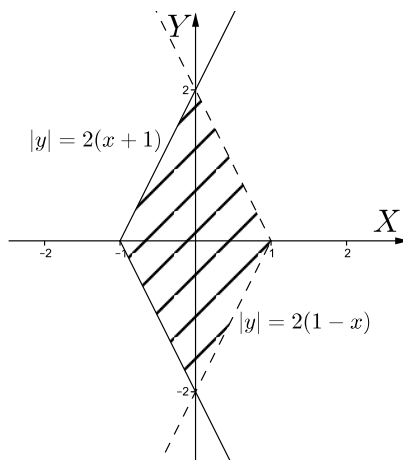
$$|y| \leq 2(1 - x).$$

Les membres de gauche des deux inégalités précédentes étant positifs, $x + 1$ et $1 - x$ sont positifs et dès lors $x \in [-1, 1]$.

Par ailleurs, on a

$$2(x + 1) \geq 2(1 - x) \Leftrightarrow x \geq 0.$$

Dès lors, si le couple (x, y) est solution du système, on a $x \in [-1, 1]$, $|y| \leq 2(1 - x) = 2(1 - |x|)$ si x est positif et $|y| \leq 2(x + 1) = 2(1 - |x|)$ si x est négatif. Réciproquement, si le couple (x, y) est tel que $x \in [-1, 1]$ et $|y| \leq 2(1 - |x|)$ alors il est aussi solution du système.



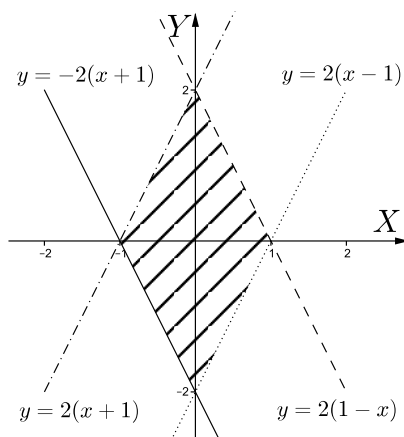
D'après la discussion précédente, le système est donc équivalent à l'inéquation

$$|y| \leq 2(1 - |x|).$$

Bien sûr, on peut aussi directement représenter graphiquement les droites d'équations cartésiennes

$$y = 2(x + 1), \quad y = 2(x - 1), \quad y = 2(1 - x), \quad y = -2(x + 1)$$

et ensuite considérer les points qui constituent l'intersection des régions du plan délimitées par ces droites et spécifiées par les inégalités du système.



5.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants et interpréter graphiquement la solution.

$$(a) \begin{cases} 2y = x + \sqrt{\pi} \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ 6x + 5 = 1 + 4y \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 3x - 2y + 2 = 0 \\ 6x + 5 = 4y \end{cases}$$

$$(d) \begin{cases} x + 2y + t = 2t \\ t - 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

1. Si on considère l'équation $2y + x + 3z = 6$, comment peut-on représenter graphiquement l'ensemble des solutions dans un repère cartésien de l'espace ? Quel est le nom donné à un tel ensemble ?
2. Si on a un système formé de deux équations du type de l'exercice 1, quelles situations peut-on avoir graphiquement ? En déduire le type d'ensemble de solutions dans chacun des cas.
3. Résoudre le système

$$\begin{cases} 2y + x + 3z = 6 \\ 2y - x + 5z = 0. \end{cases}$$

Exercice 3

On donne les systèmes d'inéquations linéaires suivants.

$$(a) \begin{cases} 2x + 2y \leq -x + 1 \\ y - 3x \leq 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x - 1 \leq 1 + y \\ x + y \geq 0 \\ x - 1 \leq 1 - y \end{cases}$$

Dans un repère, représenter l'ensemble des points du plan dont les coordonnées cartésiennes (x, y) vérifient ces systèmes.

Solution 1

- (a) La solution est l'ensemble à un élément

$$S = \left\{ \left(\frac{\sqrt{\pi} - 2}{3}, \frac{2\sqrt{\pi} - 1}{3} \right) \right\}.$$

Les coordonnées de ce seul élément sont les coordonnées cartésiennes du point d'intersection de deux droites sécantes du plan.

(b) La solution est l'ensemble

$$S = \left\{ \left(x, \frac{3x+2}{2} \right) : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des coordonnées cartésiennes des points d'une droite.

(c) L'ensemble des solutions est vide. Les équations sont celles de deux droites parallèles distinctes.

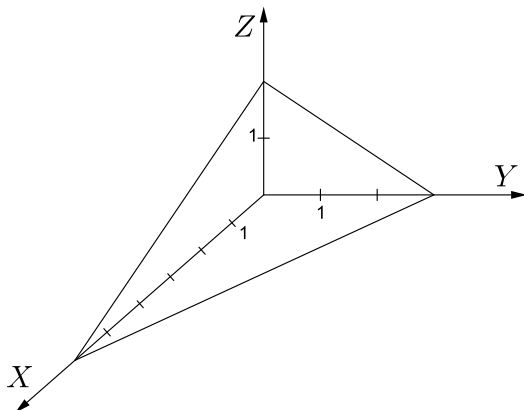
(d) La solution est l'ensemble

$$S = \{(4y, y, 6y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Il s'agit de l'ensemble des coordonnées cartésiennes des points d'une droite qui est l'intersection de deux plans sécants.

Solution 2

1. On a la représentation suivante



Cet ensemble est un plan.

2. Trois cas sont possibles :

- (a) deux plans sécants ; ils ont une droite de points en commun et leur ensemble de solutions dépend d'un paramètre.
- (b) deux plans parallèles confondus ; ils ont tous leurs points en commun et leur ensemble de solutions dépend de deux paramètres.
- (c) deux plans parallèles distincts ; ils n'ont aucun point en commun et leur ensemble de solutions est l'ensemble vide.

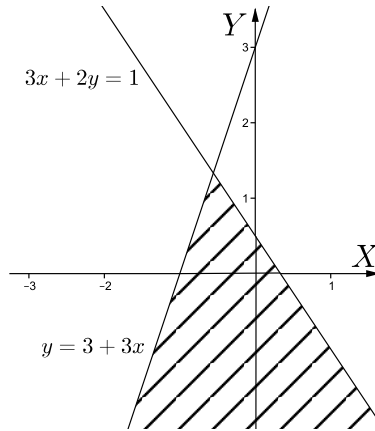
3. L'ensemble des solutions est donné par $S = \{(z+3, 3/2-2z, z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Solution 3

(a) La représentation graphique des couples vérifiant le système est obtenue à partir des graphiques des droites d'équations cartésiennes

$$3x + 2y = 1, \quad y = 3 + 3x.$$

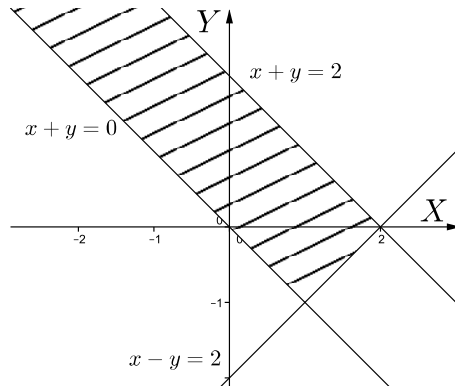
La représentation de ces couples solutions est la suivante, les points des « bords » étant compris dans l'ensemble.



- (b) La représentation graphique des couples vérifiant le système est obtenue à partir des graphiques des droites d'équations cartésiennes

$$x - y = 2, \quad x + y = 0, \quad x + y = 2.$$

La représentation de ces couples solutions est la suivante, les points des « bords » étant compris dans l'ensemble.



5.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

On suppose que X et Y sont des naturels strictement inférieurs à 100. William est né en l'année X et Yoko est née en l'année Y du même siècle. Quand William aura Y ans, Yoko aura X ans. Pourquoi ?

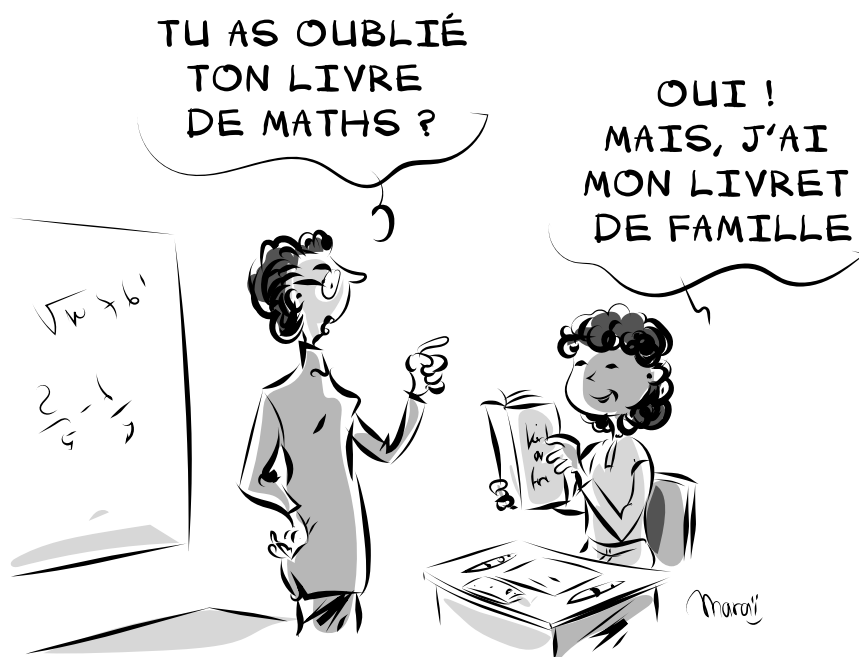
Solution

Étant donné la symétrie du problème, quitte à permuter les notations, on peut supposer que $X \leq Y$.

Cela étant, comme la différence d'âge entre William et Yoko est égale à $|Y - X| = Y - X$, quand William aura Y ans, Yoko en aura $Y - (Y - X) = X$, ce qui explique bien le « phénomène ».

Exercice 2

Jean et Sarah ont une fille. Lorsqu'elle est née, ils avaient respectivement 27 et 25 ans. Depuis que Jean a 41 ans, il remarque que, tous les 11 ans, son âge et celui de sa fille sont des nombres dont les chiffres sont inversés. Ce fait ne se passe jamais avec Sarah. Comment expliquer cela ? Plus généralement, quelle est la condition nécessaire et suffisante sur l'âge d'un parent pour que cela se produise ? Et quel est le nombre d'années à attendre entre deux occurrences successives de cette situation ?



Solution

Soient x et y deux naturels tels que $x \in \{1, \dots, 9\}$ et $y \in \{1, \dots, 9\}$. Le « phénomène » observé s'écrit

$$(10x + y) - (10y + x) = P$$

où P est l'âge d'un parent à la naissance de l'enfant, $10x+y$ son âge au moment considéré et donc $10y+x$ celui de sa fille. Avec ces notations, on a nécessairement $x \geq y$. Cela étant, comme

$$(10x+y) - (10y+x) = P \Leftrightarrow 9(x-y) = P,$$

la situation décrite se produit si et seulement si P est un multiple de 9. Cela explique déjà pourquoi cela se passe avec Jean mais pas avec Sarah.

Puisque $x-y \in \mathbb{N}$, si on augmente x d'une unité, on doit nécessairement augmenter y d'une unité. Cela explique donc pourquoi il s'écoule bien 11 ans entre deux occurrences successives de la situation.

Pour savoir à partir de quel âge de Jean cela commence à se produire, il suffit de chercher la première valeur de $x \in \{1, \dots, 9\}$ pour laquelle on peut trouver un $y \in \{1, \dots, 9\}$ tel que $9(x-y) = 27$. Comme $9(x-y) = 27 \Leftrightarrow x-y = 3$, il s'agit donc de $x = 4$ et $y = 1$.

6 Polynômes et fractions rationnelles

6.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

Factoriser les polynômes donnés explicitement ci-dessous en un produit de polynômes à coefficients réels du premier degré et du second degré sans zéro réel.

(a) $x^2 - 2x + 1$

(b) $x^2 - x - 1$

(c) $x^3 + 8$

(d) $-2x^3 + 7x^2 - 7x + 2$

(e) $x^4 + x^2 - 2$

(f) $16x^4 + 1$

Solution

(a) Pour tous réels r, s , on a $(r+s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$. On obtient donc directement

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2.$$

(b) Le discriminant de ce polynôme est égal à 5 ; ses deux zéros réels sont donc les nombres

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

On obtient donc la factorisation

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

- (c) Pour tous réels r, s , on a $r^3 + s^3 = (r+s)(r^2 - rs + s^2)$. On obtient donc directement

$$x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4),$$

ce qui achève la décomposition puisque le polynôme du second degré n'a pas de zéro réel, son discriminant étant négatif.

- (d) L'expression donnée s'annule en $x = 1$; le facteur $x - 1$ est donc présent dans la factorisation et la division du polynôme de départ par ce facteur donne

$$-2x^3 + 7x^2 - 7x + 2 = (x-1)(-2x^2 + 5x - 2).$$

Cela étant, le discriminant du polynôme du second degré étant égal à 9, ce polynôme possède les deux zéros réels

$$\frac{-5+3}{-4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-5-3}{-4} = 2.$$

On obtient donc la factorisation

$$-2x^3 + 7x^2 - 7x + 2 = (x-1)(-2)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) = (1-2x)(x-1)(x-2).$$

- (e) Considérons le polynôme donné explicitement par $y \mapsto y^2 + y - 2$. Comme son discriminant est égal à 9, il possède deux zéros réels, à savoir

$$\frac{-1+3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{-1-3}{2} = -2.$$

Le polynôme de départ se factorise donc de la manière suivante

$$x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 2) = (x-1)(x+1)(x^2 + 2),$$

ce qui achève la décomposition puisque le polynôme du second degré n'a pas de zéro réel.

- (f) On a successivement

$$\begin{aligned} 16x^4 + 1 &= 16x^4 + 8x^2 - 8x^2 + 1 \\ &= (16x^4 + 8x^2 + 1) - 8x^2 \\ &= (4x^2 + 1)^2 - 8x^2 \\ &= (4x^2 + 1 - 2\sqrt{2}x)(4x^2 + 1 + 2\sqrt{2}x), \end{aligned}$$

ce qui achève la décomposition puisque les polynômes du second degré n'ont pas de zéro réel, leur discriminant étant négatif.

Exercice 2

Soient des réels a, b, s, p tels que

$$a + b = s \quad \text{et} \quad ab = p.$$

Montrer alors que a et b sont les zéros du polynôme

$$x \mapsto x^2 - sx + p.$$

Solution

On a

$$x^2 - sx + p = x^2 - (a + b)x + ab = (x - a)(x - b)$$

et on conclut immédiatement.

Exercice 3

Déterminer les réels r, s, t pour que le polynôme P soit divisible par le polynôme Q et déterminer le quotient de la division.

(a) $P(x) = x^5 + rx^4 + 2rx^3 + sx^2 - 7x + 2s$ et $Q(x) = x^2 + x - 2$

(b) $P(x) = 3x^4 + rx^3 - rx - 35$ et $Q(x) = x^3 + sx^2 + tx + 7$

(c) $P(x) = 8x^6 - rx^4 + 4x^2 - 21$ et $Q(x) = x^2 - 3$

Solution

(a) La division euclidienne donne

$$\begin{aligned} & x^5 + rx^4 + 2rx^3 + sx^2 - 7x + 2s \\ &= (x^2 + x - 2) \left(x^3 + (r - 1)x^2 + (r + 3)x + (r + s - 5) \right) \\ & \quad + \left((r - s + 4)x + 2(r + 2s - 5) \right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le polynôme P est divisible par le polynôme Q si et seulement si r et s vérifient le système

$$\begin{cases} r - s + 4 = 0 \\ r + 2s = 5. \end{cases}$$

La solution est $r = -1$ et $s = 3$. Le quotient est donc le polynôme donné explicitement par

$$x^3 - 2x^2 + 2x - 3.$$

On peut aussi procéder de la façon suivante. Comme $Q(x) = (x + 2)(x - 1)$, P est divisible par Q si et seulement si $P(-2) = 0$ et $P(1) = 0$, ce qui donne $6s - 18 = 0$ et $3r + 3s - 6 = 0$.

En résolvant le système formé par ces deux équations, on obtient $s = 3$ et $r = -1$. Dès lors, en effectuant la division de $P(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 7x + 6$ par $Q(x)$, on obtient le quotient trouvé précédemment.

(b) La division euclidienne donne

$$\begin{aligned} & 3x^4 + rx^3 - rx - 35 \\ &= (x^3 + sx^2 + tx + 7) (3x + (r - 3s)) \\ &+ \left((-3t - rs + 3s^2)x^2 + (-r - 21 - rt + 3st)x + (-35 - 7r + 21s) \right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le polynôme P est divisible par le polynôme Q si et seulement si r, s, t vérifient le système

$$\begin{cases} -3t - rs + 3s^2 = 0 \\ -r - 21 - rt + 3st = 0 \\ -5 - r + 3s = 0. \end{cases}$$

On obtient successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} -3t - rs + 3s^2 = 0 \\ -r - 21 - rt + 3st = 0 \\ -5 - r + 3s = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 3s - 5 \\ 3s^2 - 3t - s(3s - 5) = 0 \\ -3s + 5 - 21 - t(3s - 5) + 3st = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 3s - 5 \\ -3t + 5s = 0 \\ 5t - 3s = 16. \end{cases} \end{aligned}$$

La solution est $r = 4$, $s = 3$ et $t = 5$. Le quotient est donc le polynôme donné explicitement par

$$3x - 5.$$

(c) D'après la forme des polynômes donnés, considérons

$$P'(y) = 8y^3 - ry^2 + 4y - 21 \quad \text{et} \quad Q'(y) = y - 3, \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Le polynôme P' est divisible par Q' si et seulement si $P'(3) = 0$ c'est-à-dire, si et seulement si

$$8 \times 27 - 9r + 12 - 21 = 0 \Leftrightarrow 8 \times 3 - r - 1 = 0,$$

donc si et seulement si $r = 23$.

Cela étant, on pourrait utiliser la division euclidienne pour trouver le quotient mais on peut procéder directement comme suit. On a

$$\begin{aligned} 8y^3 - 23y^2 + 4y - 21 &= (8y^3 - 24y^2) + (y^2 + 4y - 21) \\ &= 8y^2(y - 3) + (y - 3)(y + 7) \\ &= (y - 3) (8y^2 + y + 7). \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que le quotient demandé est le polynôme donné explicitement par

$$8x^4 + x^2 + 7.$$

Exercice 4

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.

(a) $\frac{1}{x^2 - 4x + 4}$

(b) $\frac{x}{-x^2 + 2x + 3}$

(c) $\frac{x^3}{x^3 + 1}$

(d) $\frac{x^2 + 1}{3x + 1}$

(e) $\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$

(f) $\frac{2}{x(x^2 - 4x + 4)}$

(g) $\frac{2x^2 + 4}{x^3 - x^2 + x - 1}$

(h) $\frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2}$

(i) $\frac{-2}{(x^2 + 1)(x + 1)^2}$

Solution

(a) Comme $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$, on a

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 4} = \frac{1}{(x - 2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

qui est une fraction rationnelle simple.

(b) On a la factorisation

$$-x^2 + 2x + 3 = (3 - x)(x + 1).$$

La fraction donnée étant une fraction propre, on sait qu'il existe des réels uniques A, B tels que

$$\frac{x}{-x^2 + 2x + 3} = \frac{x}{(3 - x)(x + 1)} = \frac{A}{3 - x} + \frac{B}{x + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}.$$

On obtient alors successivement, pour tout réel différent de -1 et 3 ,

$$\begin{aligned} \frac{x}{-x^2 + 2x + 3} &= \frac{A}{3 - x} + \frac{B}{x + 1} \Leftrightarrow x = A(x + 1) + B(3 - x) \\ &\Leftrightarrow x = (A - B)x + (A + 3B). \end{aligned}$$

Étant donné les propriétés des polynômes, cette égalité est vraie pour tout réel et équivalente au système d'équations linéaires

$$\begin{cases} A - B = 1 \\ A + 3B = 0. \end{cases}$$

Réolvons ce système. On a

$$\begin{cases} A - B = 1 \\ A + 3B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 + B \\ 4B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1/4 \\ A = 1 - 1/4 = 3/4. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{x}{-x^2 + 2x + 3} = \frac{3}{4(3 - x)} - \frac{1}{4(x + 1)}$$

pour tout réel x différent de -1 et 3 .

Cet exercice peut se résoudre directement de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{-x^2 + 2x + 3} &= \frac{x}{(3-x)(x+1)} \\
 &= \frac{x+1-1}{(3-x)(x+1)} \\
 &= \frac{x+1}{(3-x)(x+1)} - \frac{1}{(3-x)(x+1)} \\
 &= \frac{1}{3-x} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3-x} \right) \\
 &= \frac{3}{4(3-x)} - \frac{1}{4(x+1)}
 \end{aligned}$$

pour tout réel x différent de -1 et 3 .

- (c) Le dénominateur de la fraction se factorise sous la forme $(x+1)(x^2-x+1)$; la fraction est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ puisque le polynôme du second degré qui apparaît au dénominateur n'a pas de zéro réel.

Cela étant, la fraction donnée n'est pas propre; on effectue donc d'abord la division.

On a

$$\frac{x^3}{x^3+1} = \frac{(x^3+1)-1}{x^3+1} = 1 - \frac{1}{x^3+1} = 1 - \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)}.$$

La fraction $1/(x^3+1)$ étant une fraction propre, on sait qu'il existe des réels A , B et C uniques tels que

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

On obtient alors successivement, pour tout réel x différent de -1 ,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} &\Leftrightarrow 1 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) \\
 &\Leftrightarrow 1 = (A+B)x^2 + (-A+B+C)x + (A+C).
 \end{aligned}$$

Vu les propriétés des polynômes, cette égalité est vraie pour tout x réel et équivalente au système d'équations linéaires

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1. \end{cases}$$

Résolvons ce système. On a

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ C=1-A \\ 0=-A-A+1-A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1/3 \\ B=-1/3 \\ C=2/3. \end{cases}$$

Ainsi,

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1/3}{x+1} + \frac{-x/3+2/3}{x^2-x+1} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{-x+2}{3(x^2-x+1)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

Finalement, on a

$$\frac{x^3}{x^3 + 1} = 1 - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{x-2}{3(x^2 - x + 1)}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

- (d) La fraction donnée est définie pour tout réel x différent de $-1/3$; comme le degré du numérateur est supérieur à celui du dénominateur, ce n'est pas une fraction propre. La division des polynômes donne

$$\frac{x^2 + 1}{3x + 1} = \frac{x}{3} - \frac{1}{9} + \frac{10}{9(3x + 1)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$$

ce qui achève la décomposition demandée.

- (e) La fraction donnée est définie pour tout réel x mais comme le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur, ce n'est pas une fraction propre. On doit donc effectuer la division. On a directement, pour tout réel x ,

$$\frac{x^2 - 2}{x^2 + 2} = \frac{x^2 + 2 - 4}{x^2 + 2} = 1 - \frac{4}{x^2 + 2},$$

ce qui achève la décomposition.

- (f) Le dénominateur de la fraction se factorise sous la forme $x(x - 2)^2$; la fraction est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.

La fraction donnée est une fraction propre ; il existe donc des réels uniques A , B et C tels que

$$\frac{2}{x(x^2 - 4x + 4)} = \frac{2}{x(x - 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

On obtient donc, pour tout réel x différent de 0 et 2,

$$\frac{2}{x(x - 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 2} + \frac{C}{(x - 2)^2} \Leftrightarrow 2 = A(x - 2)^2 + Bx(x - 2) + Cx.$$

Vu les propriétés des polynômes, l'égalité précédente est également vraie pour tout x réel. En évaluant alors la relation pour $x = 0$, $x = 2$ et, par exemple, $x = 1$, on a

$$\begin{cases} 2 = 4A \\ 2 = 2C \\ 2 = A - B + C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ C = 1 \\ B = A + C - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ C = 1 \\ B = -1/2. \end{cases}$$

Ainsi, on a finalement

$$\frac{2}{x(x^2 - 4x + 4)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x - 2)} + \frac{1}{(x - 2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}.$$

Cet exercice se résout directement de la manière suivante. Pour tout réel x différent de 0 et 2, on a

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{x(x^2 - 4x + 4)} &= \frac{2 - x + x}{x(x - 2)^2} \\
 &= \frac{2 - x}{x(x - 2)^2} + \frac{x}{x(x - 2)^2} \\
 &= -\frac{1}{x(x - 2)} + \frac{1}{(x - 2)^2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x - 2} \right) + \frac{1}{(x - 2)^2} \\
 &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x - 2)} + \frac{1}{(x - 2)^2},
 \end{aligned}$$

ce qui achève la décomposition.

(g) Quel que soit le réel x , on a

$$x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^2 + 1).$$

La fraction donnée est donc définie quel que soit le réel x différent de 1. Cela étant, comme cette fraction est propre, on sait qu'il existe des réels A, B, C uniques tels que

$$\frac{2x^2 + 4}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

On obtient alors, pour tout réel x différent de 1,

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 4 &= A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x - 1) \\
 &= (A + B)x^2 + (C - B)x + (A - C).
 \end{aligned}$$

Vu les propriétés des polynômes, cette égalité est vraie pour tout x réel et équivalente au système d'équations linéaires

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -B + C = 0 \\ A - C = 4. \end{cases}$$

Résolvons ce système. On a

$$\begin{cases} A + B = 2 \\ -B + C = 0 \\ A - C = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 2 \\ C = B \\ A - B = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2A = 6 \\ C = B \\ 2B = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = -1 \\ C = -1. \end{cases}$$

Ainsi, on a finalement

$$\frac{2x^2 + 4}{x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{3}{x - 1} - \frac{x + 1}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

- (h) Comme on a $x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$, la fraction est définie pour tout réel différent de 0 et 1. Cependant, comme le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur, la fraction donnée n'est pas une fraction propre et on doit d'abord effectuer la division. On peut toutefois effectuer la division et la décomposition directement comme suit. On a successivement, pour tout réel x différent de 0 et 1,

$$\begin{aligned}
 \frac{x^3 - 2}{x^3 - x^2} &= \frac{x^3 - x^2 + x^2 - 2}{x^3 - x^2} \\
 &= 1 + \frac{x^2 - 2}{x^2(x - 1)} \\
 &= 1 + \frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x^2(x - 1)} \\
 &= 1 + \frac{1}{x - 1} + 2 \frac{x - 1 - x}{x^2(x - 1)} \\
 &= 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x^2} - 2 \frac{1}{x(x - 1)} \\
 &= 1 + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x^2} - 2 \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}.
 \end{aligned}$$

- (i) Le dénominateur ne s'annule que lorsque $x = -1$. La fraction donnée est donc définie quel que soit le réel x différent de -1 . Cela étant, comme cette fraction est propre, on sait qu'il existe des réels A, B, C, D uniques tels que

$$\frac{-2}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

On obtient alors, pour tout réel x différent de -1 ,

$$\begin{aligned}
 -2 &= A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx + D)(x + 1)^2 \\
 &= A(x^3 + x^2 + x + 1) + B(x^2 + 1) + (Cx^3 + 2Cx^2 + Cx + Dx^2 + 2Dx + D) \\
 &= (A + C)x^3 + (A + B + 2C + D)x^2 + (A + C + 2D)x + (A + B + D).
 \end{aligned}$$

Vu les propriétés des polynômes, cette égalité est vraie pour tout x réel et équivalente au système d'équations linéaires

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ A + B + 2C + D = 0 \\ A + C + 2D = 0 \\ A + B + D = -2. \end{cases}$$

Réolvons ce système. On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} A + C = 0 \\ A + B + 2C + D = 0 \\ A + C + 2D = 0 \\ A + B + D = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} A + C = 0 \\ D = 0 \\ A + B + 2C = 0 \\ A + B = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = -C \\ B = -2 - A \\ 2C = 2 \\ D = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = -1 \\ B = -1 \\ C = 1 \\ D = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, on a finalement

$$\frac{-2}{(x^2 + 1)(x + 1)^2} = -\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{(x + 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$$

6.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Factoriser les polynômes suivants en un produit de polynômes à coefficients réels du premier degré et du second degré sans zéro réel.

(a) $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24$

(b) $2x^3 + 9x^2 - 2x - 24$

(c) $x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 24x + 36$

(d) $x^3 - 5x + 2$

(e) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$

(f) $5x^4 - 6x^3 - 19x^2 + 24x - 4$

(g) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4$

(h) $x^4 - x^2 + 1$

Exercice 2

Déterminer le reste de la division du polynôme P par le polynôme Q .

(a) $P(x) = x^{100} - x + 1$ et $Q(x) = x^2 - 1$

(b) $P(x) = x^{10} - x^2$ et $Q(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Exercice 3

Décomposer les fractions rationnelles suivantes en fractions rationnelles simples à coefficients réels.

(a) $\frac{1}{x^2 + 6x + 9}$

(b) $\frac{x}{x^2 + x - 6}$

(c) $\frac{3x^2 + 1}{x - 1}$

(d) $\frac{x^3}{x^3 - 1}$

(e) $\frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$

(f) $\frac{x^2 + 9}{x(x^2 + 6x + 9)}$

(g) $\frac{x^2 + x + 10}{x^3 + x^2 + 4x + 4}$

(h) $\frac{x^3 + 2}{x^3 + x^2}$

(i) $\frac{2}{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$

Solution 1

On a

(a) $(x - 2)(x - 6)(3x - 2)$

(b) $(x + 2)(x + 4)(2x - 3)$

(c) $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 6)$

(d) $(x - 2)(x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$

(e) $(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3)$

(f) $(x - 1)(x - 2)(x + 2)(5x - 1)$

(g) $(x - 1)(x - 2)^2(x^2 + x + 1)$

(h) $x^4 - x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - 3x^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{3}x)(x^2 + 1 + \sqrt{3}x)$

Solution 2

(a) $-x + 2$

(b) $340(x^2 - 1)$

Solution 3

On a les décompositions suivantes

(a) $\frac{1}{(x + 3)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

(b) $\frac{1}{5} \left(\frac{3}{x + 3} + \frac{2}{x - 2} \right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$

(c) $3(x + 1) + \frac{4}{x - 1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(d) $1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{x + 2}{x^2 + x + 1} \right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

(e) $1 - \frac{4}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R}$

(f) $\frac{1}{x} - \frac{6}{(x + 3)^2}, \forall x \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-3\}$

(g) $\frac{2}{x + 1} - \frac{x - 2}{x^2 + 4}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(h) $1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x + 1}, \forall x \in \mathbb{R}_0 \setminus \{-1\}$

(i) $\frac{-1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} + \frac{x}{x^2 + 1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

6.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}_0$, démontrer que l'on a

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

pour tous¹ $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution

Démontrons tout d'abord cette égalité pour $y = 1$.

Elle est bien sûr valable pour $n = 1$. Supposons donc qu'elle le soit pour n et montrons qu'elle le reste pour $n + 1$. On a successivement

$$\begin{aligned} x^{n+1} - 1 &= x^{n+1} - x^n + x^n - 1 \\ &= x^n(x - 1) + (x - 1) \sum_{k=0}^{n-1} x^k \\ &= (x - 1) \sum_{k=0}^n x^k. \end{aligned}$$

On peut donc conclure dans ce cas.

Cela étant, l'égalité est bien sûr valable pour $y = 0$. Pour $y \neq 0$, on a

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n - 1 = \left(\frac{x}{y} - 1\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{y}\right)^k,$$

donc

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$$

et on conclut.

Exercice 2

Montrer que le polynôme $x \mapsto x^n - x^{n-2} - 2x + 2$ (n naturel > 2) est divisible par le polynôme $x \mapsto (x - 1)^2$ et déterminer le quotient.

1. Cela reste bien sûr valable pour $x, y \in \mathbb{C}$.

Solution

On a immédiatement

$$\begin{aligned}x^n - x^{n-2} - 2x + 2 &= x^{n-2}(x^2 - 1) - 2(x - 1) \\&= (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} - 2) \\&= (x - 1)((x^{n-1} - 1) + (x^{n-2} - 1)).\end{aligned}$$

Cela étant, comme on a (voir l'exercice précédent)

$$x^k - 1 = (x - 1) \sum_{j=0}^{k-1} x^j$$

quel que soit le naturel strictement positif k , on obtient la factorisation

$$x^n - x^{n-2} - 2x + 2 = (x - 1)^2 \left(\sum_{j=0}^{n-2} x^j + \sum_{l=0}^{n-3} x^l \right) = (x - 1)^2 \left(x^{n-2} + 2 \sum_{j=0}^{n-3} x^j \right).$$

On a donc bien la divisibilité annoncée et le quotient est le polynôme Q donné explicitement par

$$Q(x) = x^{n-2} + 2 \sum_{j=0}^{n-3} x^j.$$

Exercice 3

Soit un polynôme P et soient des réels a, b avec $a \neq b$. Exprimer le reste de la division de P par le polynôme $D : x \mapsto (x - a)(x - b)$ en fonction de a, b et $P(a), P(b)$.
En déduire le reste de la division de P par $x \mapsto (x - 1)(x - 2)$ sachant qu'en divisant le polynôme P successivement par les monômes $x \mapsto x - 1$ et $x \mapsto x - 2$, on obtient respectivement 6 et 18 comme reste.

Solution

La division du polynôme P par le polynôme D donne l'existence d'un polynôme Q et de réels r, s uniques tels que

$$P(x) = (x - a)(x - b)Q(x) + rx + s, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{cases} ra + s &= P(a) \\ rb + s &= P(b), \end{cases}$$

ce qui donne

$$r = \frac{P(a) - P(b)}{a - b}$$

et

$$s = P(b) - \frac{P(a) - P(b)}{a - b}b = \frac{aP(b) - bP(a)}{a - b}.$$

On obtient donc la forme générale de $rs + t$.

Appliquons cela au cas particulier demandé. Avec $a = 1$ et $b = 2$, on a $P(1) = 6$ et $P(2) = 18$, donc le reste demandé en particulier a pour expression explicite

$$\frac{P(1) - P(2)}{-1}x + \frac{P(2) - 2P(1)}{-1} = 12x - 6 = 6(2x - 1).$$

Exercice 4

Soit le polynôme

$$P : x \mapsto 24x^3 - 26x^2 + 9x - 1.$$

On désigne ses zéros par a , b , c . Déterminer les valeurs de

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{et de} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Solution

Comme a , b , c sont les zéros du polynôme P et que le coefficient du terme en x^3 est 24, on a l'égalité

$$\begin{aligned} P(x) &= 24(x - a)(x - b)(x - c) \\ &= 24(x^2 - (a + b)x + ab)(x - c) \\ &= 24(x^3 - (a + b + c)x^2 + (ac + bc + ab)x - abc); \end{aligned}$$

en identifiant les coefficients, on obtient

$$\begin{cases} a + b + c = \frac{26}{24} = \frac{13}{12} \\ ab + ac + bc = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} \\ abc = \frac{1}{24}. \end{cases}$$

Dès lors, en divisant les deux membres de la seconde égalité par abc , on obtient immédiatement

$$\frac{1}{c} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = 9.$$

Cela étant, on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 2\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \frac{2}{abc}(c + b + a), \end{aligned}$$

donc

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 81 - 48 \times \frac{13}{12} = 81 - 4 \times 13 = 29.$$

Exercice 5

..... Démontrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F (dans laquelle les numérateur et dénominateur n'ont pas de zéro commun) telle que

$$F^2(x) = x$$

..... pour tout réel n'étant pas un zéro du dénominateur de F .

Solution

Supposons que l'égalité soit vraie. Si p, q sont respectivement les degrés des numérateur et dénominateur de F , on a

$$2p - 2q = 2(p - q) = 1,$$

ce qui n'est pas possible puisque p et q sont des naturels.

Exercice 6

..... Soient les polynômes P_1, P_2, P_3 donnés explicitement par

$$P_1(x) = (x - 1)(x - 2)^2, \quad P_2(x) = x(x - 2)^2, \quad P_3(x) = x(x - 1).$$

..... Trouver des polynômes Q_1, Q_2, Q_3 tels que

$$Q_1 P_1 + Q_2 P_2 + Q_3 P_3 = 1.$$

Solution

La solution est immédiate en pensant à la décomposition en fractions simples ! En effet, la fraction rationnelle

$$\frac{1}{x(x - 1)(x - 2)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}$$

étant une fraction propre, on sait qu'il existe des réels A, B, C, D tels que

$$\frac{1}{x(x - 1)(x - 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 2} + \frac{D}{(x - 2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2\}.$$

On a en fait $A = -1/4$, $B = 1$, $C = -3/4$, $D = 1/2$. En multipliant les deux membres de l'égalité par $x(x - 1)(x - 2)^2$, on obtient donc, pour tout réel x différent de 0, 1, 2,

$$\begin{aligned} 1 &= A(x - 1)(x - 2)^2 + Bx(x - 2)^2 + Cx(x - 1)(x - 2) + Dx(x - 1) \\ &= AP_1(x) + BP_2(x) + (C(x - 2) + D)P_3(x). \end{aligned}$$

Vu les propriétés des polynômes, cette égalité est vraie pour tout réel x et dès lors on a

$$Q_1P_1 + Q_2P_2 + Q_3P_3 = 1$$

avec

$$Q_1(x) = A, \quad Q_2(x) = B, \quad Q_3(x) = C(x - 2) + D.$$

Exercice 7

⋮ Pour quelles valeurs des paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ le polynôme

$$x \mapsto x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

⋮ est-il divisible par le polynôme $x \mapsto x^2 + 1$?

Solution

La division euclidienne donne

$$x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = (x^2 + 1)(x^2 + \alpha x + \beta - 1) + (\gamma - \alpha)x + \delta - \beta + 1 ;$$

ainsi, on a la divisibilité demandée si et seulement si le reste est nul, c'est-à-dire si et seulement si

$$\alpha = \gamma \quad \text{et} \quad \beta - \delta = 1.$$

Exercice 8

⋮ Si un polynôme à coefficients entiers possède un zéro entier, montrer que ce zéro est
⋮ un diviseur du terme indépendant.

Solution

En effet, si

$$P : x \mapsto \sum_{j=0}^n b_j x^j$$

est divisible par $(x - a)$ ($a \in \mathbb{Z}$) alors

$$P(x) = (x - a)Q(x) = (x - a) \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k.$$

Comme les termes indépendants sont égaux, on a $b_0 = -ac_0$ et le terme indépendant de P est un multiple de a .

Exercice 9

Factoriser les polynômes suivants en un produit de polynômes à coefficients réels du premier degré et du second degré sans zéro réel.

(a) $x^4 - 3x - 2$

(b) $8x^3 + 8x^2 - 1$

(c) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Solution

(a) Comme le polynôme est de degré 4 et qu'il n'a pas de zéro entier, et puisque le coefficient de la quatrième puissance de la variable est 1, on sait qu'il existe des réels r, r', s, s' tels que

$$\begin{aligned} x^4 - 3x - 2 &= (x^2 + rx + r')(x^2 + sx + s') \\ &= x^4 + sx^3 + s'x^2 + rx^3 + rsx^2 + rs'x + r'x^2 + r'sx + r's' \\ &= x^4 + (s + r)x^3 + (s' + rs + r')x^2 + (rs' + r's)x + r's' \end{aligned}$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Ces dernières égalités ont lieu si et seulement si

$$\begin{cases} s + r = 0 \\ s' + rs + r' = 0 \\ rs' + r's = -3 \\ r's' = -2. \end{cases}$$

Réolvons ce système. On a

$$\begin{cases} s + r = 0 \\ s' + rs + r' = 0 \\ rs' + r's = -3 \\ r's' = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = -r \\ s' + r' = r^2 \\ r(s' - r') = -3 \\ r's' = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = -r \\ s' + r' = r^2 \\ s' - r' = -\frac{3}{r} \\ r's' = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = -r \\ s' = \frac{1}{2} \left(r^2 - \frac{3}{r} \right) \\ r' = \frac{1}{2} \left(r^2 + \frac{3}{r} \right) \\ r^4 - \frac{9}{r^2} = -8. \end{cases}$$

Cela étant, on a successivement

$$\begin{aligned} r^4 - \frac{9}{r^2} = -8 &\Leftrightarrow r^6 + 8r^2 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow r^6 - r^2 + 9r^2 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow r^2(r^2 - 1)(r^2 + 1) + 9(r^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (r^2 - 1)(r^4 + r^2 + 9) = 0, \end{aligned}$$

ce qui donne $r = 1$ ou $r = -1$ puisque le discriminant du polynôme $y \mapsto y^2 + y + 9$ est négatif.

Dès lors, les solutions du système de départ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} r = 1 \\ s = -1 \\ r' = 2 \\ s' = -1 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = -1 \\ s = 1 \\ r' = -1 \\ s' = 2. \end{array} \right.$$

Finalement, on obtient

$$x^4 - 3x - 2 = (x^2 + x + 2)(x^2 - x - 1) = (x^2 + x + 2) \left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

puisque le discriminant du premier facteur est négatif.

On peut aussi procéder de la manière suivante.

Pour tout x , on a successivement

$$\begin{aligned} x^4 - 3x - 2 &= x^4 - (x^2 + 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1) - 3x - 2 \\ &= (x^4 - (x + 1)^2) + x^2 - x - 1 \\ &= (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 1) + x^2 - x - 1 \\ &= (x^2 - x - 1)(x^2 + x + 2) \\ &= (x^2 + x + 2)(x - \Phi) \left(x + \frac{1}{\Phi} \right) \end{aligned}$$

où

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

est le nombre d'or.

- (b) Comme le polynôme est de degré 3 et qu'il n'a pas de zéro entier, on sait qu'il existe des réels r, s, s' tels que

$$\begin{aligned} 8x^3 + 8x^2 - 1 &= 8(x^3 + x^2 - 1/8)) \\ &= 8(x + r)(x^2 + sx + s') \\ &= 8(x^3 + (r + s)x^2 + (rs + s')x + rs') \end{aligned}$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$. Ces dernières égalités ont lieu si et seulement si

$$\begin{cases} r + s = 1 \\ rs + s' = 0 \\ rs' = -1/8. \end{cases}$$

Réolvons ce système. On a

$$\begin{cases} r + s = 1 \\ rs + s' = 0 \\ rs' = \frac{-1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{-1}{8s'} \\ s = 1 + \frac{1}{8s'} \\ \frac{1}{8s'} + \frac{1}{64s'^2} = s'. \end{cases}$$

Cela étant, on a successivement

$$\begin{aligned} 64s'^3 - 8s' - 1 &= 0 \Leftrightarrow (64s'^3 + 1) - 2(4s' + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (4s' + 1)(16s'^2 - 4s' + 1) - 2(4s' + 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (4s' + 1)(16s'^2 - 4s' - 1) = 0. \end{aligned}$$

En poursuivant les calculs, on obtient les valeurs de r , s et s' mais les calculs sont assez longs.

Cependant, on peut procéder comme suit :

$$\begin{aligned} 8x^3 + 8x^2 - 1 &= 8x^3 + 4x^2 + 4x^2 - 1 \\ &= 4x^2(2x + 1) + (2x + 1)(2x - 1) \\ &= (2x + 1)(4x^2 + 2x - 1) \\ &= (2x + 1) \left(2x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(2x + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ &= (2x + 1)(2x + \Phi) \left(2x - \frac{1}{\Phi} \right) \end{aligned}$$

où

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

est le nombre d'or.

(c) Le polynôme $x \mapsto x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ n'a pas de zéro réel car dans $\mathbb{R}$, on a

$$(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = x^5 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Dès lors, il existe des réels uniques r, r', s, s' tels que

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + rx + r')(x^2 + sx + s'), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $r^2 - 4r' < 0$ et $s^2 - 4s' < 0$.

On peut bien sûr encore utiliser la méthode par identification des coefficients. Cependant, les calculs sont relativement longs et surtout ... fastidieux. Procédons donc d'une autre manière.

Pour $x \neq 0$, on peut écrire

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2 \left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right).$$

Comme on a

$$\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2,$$

on obtient

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2 \left(\left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right).$$

On factorise alors le polynôme du second degré

$$y \mapsto y^2 + y - 1.$$

Les zéros de ce polynôme sont les réels

$$-\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = -\Phi \quad \text{et} \quad \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi}$$

où Φ désigne le nombre d'or introduit dans l'exercice 3 de la sous-section 4.3 de ce chapitre. Il s'ensuit que l'on a

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= x^2 \left(x + \frac{1}{x} + \Phi \right) \left(x + \frac{1}{x} - \frac{1}{\Phi} \right) \\ &= (x^2 + \Phi x + 1) \left(x^2 - \frac{x}{\Phi} + 1 \right). \end{aligned}$$

Comme

$$\Phi^2 - 4 < 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Phi^2} - 4 < 0,$$

on ne peut pas factoriser davantage dans ce cadre.

Remarque. Cette factorisation peut bien sûr être obtenue également en utilisant les racines complexes de l'unité mais la résolution précédente présente l'intérêt d'être menée uniquement en utilisant les nombres réels. Cela sera traité dans la partie relative aux nombres complexes.

Exercice 10. Résolution d'une équation du troisième degré particulière¹

L'équation dont il est question est

$$x^3 + px + q = 0$$

1. Voir l'annexe : Cardan et Dal Ferro.

où p, q sont réels. En fait, toute équation du troisième degré peut être ramenée à une équation de ce type ; il s'agit donc d'un exercice qui présente un grand intérêt (et est chargé d'histoire...).

1. Montrer que pour tous réels A, B on a

$$(A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B)$$

et en déduire que, lorsque $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \geq 0$, on a

$$x^3 = 3\sqrt[3]{a^2 - b}x + 2a$$

avec

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}.$$

2. En déduire que si p et q sont des réels tels que $(q^2/4) + (p^3/27) \geq 0$ alors une solution de l'équation

$$x^3 + px + q = 0$$

est

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

3. En guise d'application, montrer que

$$3 = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$$

en utilisant l'équation

$$x^3 - 3x - 18 = 0.$$

Solution

1. La première partie résulte d'une simple manipulation : on a en effet

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 = A^3 + B^3 + 3AB(A + B).$$

Cela étant, posons

$$A = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \quad \text{et} \quad B = \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}.$$

En tenant compte de la notation

$$x = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}},$$

l'application de l'expression précédente donne

$$x^3 = (A + B)^3 = A^3 + B^3 + 3ABx. \quad (*)$$

Comme on a

$$A^3 + B^3 = (a + \sqrt{b}) + (a - \sqrt{b}) = 2a$$

et

$$AB = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = \sqrt[3]{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})} = \sqrt[3]{a^2 - b},$$

l'égalité (*) devient

$$x^3 = \left(3\sqrt[3]{a^2 - b}\right) x + 2a$$

et on conclut.

2. Avec

$$p = -3\sqrt[3]{a^2 - b} \quad \text{et} \quad q = -2a,$$

le point précédent montre que le réel

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$$

est solution de l'équation

$$x^3 + px + q = 0.$$

Pour conclure, il suffit donc d'exprimer a et b en fonction de p et q . On a

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3\sqrt[3]{a^2 - b} = -p \\ 2a = -q \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{q}{2} \\ 3\sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - b} = -p \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{q}{2} \\ \frac{q^2}{4} - b = -\frac{p^3}{27} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{q}{2} \\ b = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \end{cases} \end{aligned}$$

et on peut donc conclure.

3. On a la factorisation

$$x^3 - 3x - 18 = (x - 3)(x^2 + 3x + 6), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme le discriminant du polynôme du second degré est égal à -15 , il n'y a pas de zéro réel. La seule solution réelle de l'équation $x^3 - 3x - 18 = 0$ est donc 3. D'après ce qui précède, avec $p = -3$ et $q = -18$ on a

$$-\frac{q}{2} = 9 \quad \text{et} \quad \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = \sqrt{9^2 - 1} = \sqrt{81 - 1} = 4\sqrt{5},$$

donc

$$a = -\frac{q}{2} = 9 \quad \text{et} \quad \sqrt{b} = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = 4\sqrt{5}$$

et on conclut.

Exercice 11

Soit P un polynôme. Montrer que pour tout réel¹ a , le polynôme $P - P(a)$ est divisible par $x \mapsto x - a$ (donc en particulier P est divisible par $x \mapsto x - a$ si et seulement si $P(a) = 0$).

En déduire qu'il existe des coefficients $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$P(x) = \sum_{j=0}^n a_j (x - a)^j.$$

Solution

Si

$$P(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$$

alors

$$P(a) = \sum_{k=0}^n b_k a^k \quad \text{et} \quad P(x) - P(a) = \sum_{k=1}^n b_k (x^k - a^k).$$

Comme

$$x^p - a^p = (x - a) \sum_{m=0}^{p-1} x^{p-1-m} a^m, \quad \forall p \in \mathbb{N}_0,$$

on conclut en ce qui concerne la première partie.

En ce qui concerne la conséquence, un argument de récurrence permet aisément de conclure. En effet, pour $n = 1$ on a

$$P(x) = b_1 x + b_0 = b_1(x - a) + (b_1 a + b_0)$$

et on trouve bien la forme indiquée. Supposons à présent que la forme soit correcte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n et montrons qu'elle le reste pour un polynôme P de degré $n+1$. Vu ce qui précède, il existe un polynôme Q de degré n tel que

$$P(x) = P(a) + (x - a)Q(x).$$

1. Bien sûr cela est encore correct dans l'ensemble des complexes.

Cela étant, l'hypothèse de récurrence fournit des coefficients $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$Q(x) = \sum_{j=0}^n a_j (x-a)^j.$$

Dès lors

$$P(x) = P(a) + \sum_{j=0}^n a_j (x-a)^{j+1} = P(a) + \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} (x-a)^j$$

et on conclut.

7 Coniques

7.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes.

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \frac{x^2}{4} - y^2 = 4 & \text{(b)} x = y^2 + 2 & \text{(c)} \frac{x^2}{4} + y^2 = 4 & \text{(d)} x^2 + y^2 + y = 0 \\ \text{(e)} x^2 = -y^2 & \text{(f)} \frac{y^2}{4} - x^2 = 4 & \text{(g)} y = xy^2 & \text{(h)} \frac{y^2}{4} + x^2 = 4 \end{array}$$

Quelles sont celles qui sont l'équation cartésienne d'un cercle, d'une ellipse, d'une hyperbole, d'une parabole ? Dans le cas des cercles, en déterminer le centre et le rayon.

Solution

À l'exception du cas (g), toutes les expressions pourraient être des équations de coniques car elles sont toutes de la forme $P(x, y) = 0$ où P est un polynôme du second degré en les variables x et y .

(a) L'équation s'écrit aussi

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

qui est l'équation canonique d'une hyperbole.

(b) L'équation

$$y^2 = x$$

est l'équation canonique d'une parabole $\mathcal{P}$. La courbe d'équation cartésienne $y^2 = x - 2$ est donc une parabole obtenue à partir d'une translation de $\mathcal{P}$ de deux unités dans le sens des abscisses croissantes.

(c) L'équation s'écrit aussi

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1,$$

qui est l'équation canonique d'une ellipse.

(d) On a

$$x^2 + y^2 + y = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + y + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

La courbe d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + y = 0$ est donc le cercle de centre $(0, -1/2)$ et de rayon égal à $1/2$.

(e) L'équation donnée est vérifiée uniquement par l'origine des axes. Il s'agit donc d'un seul point : c'est une conique dégénérée.

(f) L'équation s'écrit aussi

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1,$$

qui est l'équation canonique d'une hyperbole.

(g) On a

$$y(xy - 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } xy = 1.$$

L'équation $y = 0$ est celle de l'axe des abscisses et l'équation $xy = 1$, équivalente à $y = 1/x$, est celle d'une hyperbole dont on trouve une équation canonique en effectuant une rotation des axes (voir l'exercice 9 de la sous-section 9.3 de ce chapitre).

(h) L'équation s'écrit aussi

$$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{4} = 1,$$

qui est l'équation canonique d'une ellipse.

Exercice 2

1. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement chacune des ellipses repérées à l'exercice précédent et déterminer les coordonnées cartésiennes de leurs points d'intersection avec les axes.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes des foyers et la valeur de l'excentricité des ellipses représentées ci-dessus.
3. Déterminer les coordonnées cartésiennes des foyers, des points d'intersection avec les axes, les équations cartésiennes des asymptotes et la valeur de l'excentricité des hyperboles repérées dans l'exercice précédent.
4. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement ces hyperboles et leurs asymptotes.

5. Déterminer les coordonnées cartésiennes du foyer des éventuelles paraboles représentées à l'exercice précédent et les représenter graphiquement dans un repère orthonormé.

Solution

1. L'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 4$$

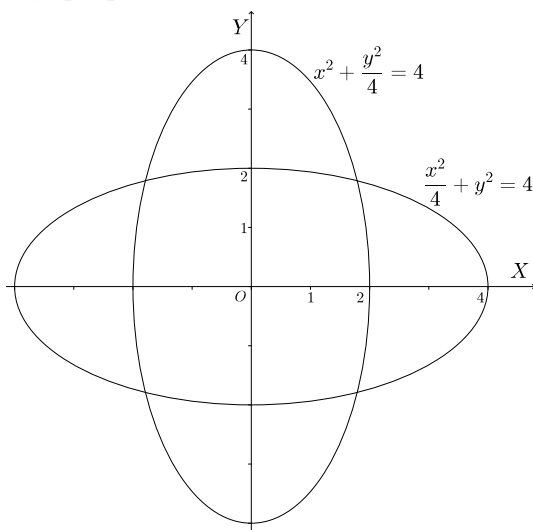
intersecte les axes aux points de coordonnées (4, 0), (−4, 0) et (0, 2), (0, −2).

L'ellipse d'équation

$$\frac{y^2}{4} + x^2 = 4$$

intersecte les axes aux points de coordonnées (2, 0), (−2, 0) et (0, 4), (0, −4).

Leur représentation graphique est la suivante.



2. Les foyers de l'ellipse d'équation (c) ont pour coordonnées $(2\sqrt{3}, 0)$ et $(-2\sqrt{3}, 0)$; son excentricité vaut $\sqrt{3}/2$.
 Les foyers de l'ellipse d'équation (h) ont pour coordonnées $(0, 2\sqrt{3})$ et $(0, -2\sqrt{3})$; son excentricité vaut $\sqrt{3}/2$.
3. L'hyperbole d'équation cartésienne

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 4$$

a des foyers de coordonnées $(0, 2\sqrt{5})$ et $(0, -2\sqrt{5})$ et des sommets (points d'intersection avec les axes) de coordonnées (0, 4) et (0, −4). Les asymptotes ont pour équation cartésienne $y = 2x$ et $y = -2x$. Enfin, l'excentricité vaut $\sqrt{5}/2$.

L'hyperbole d'équation cartésienne

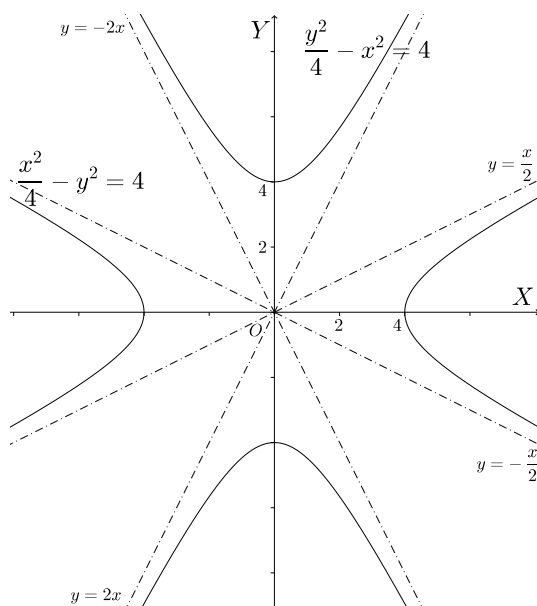
$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 4$$

a des foyers de coordonnées $(2\sqrt{5}, 0)$ et $(-2\sqrt{5}, 0)$ et des sommets de coordonnées $(4, 0)$ et $(-4, 0)$. Les asymptotes ont pour équation cartésienne $x = 2y$ et $x = -2y$. Enfin, l'excentricité vaut $\sqrt{5}/2$.

4. La représentation graphique des hyperboles d'équation cartésienne

$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 4 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{4} - y^2 = 4$$

est la suivante.

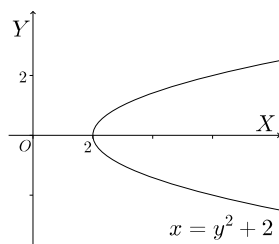


5. La parabole d'équation cartésienne

$$x = y^2 + 2$$

a un foyer de coordonnées $(9/4, 0)$.

La représentation graphique de cette parabole est la suivante.



Exercice 3

1. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les ensembles A et B donnés par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0 \text{ et } x^2 \geq y^2 \geq 1 - 4x^2\}$$

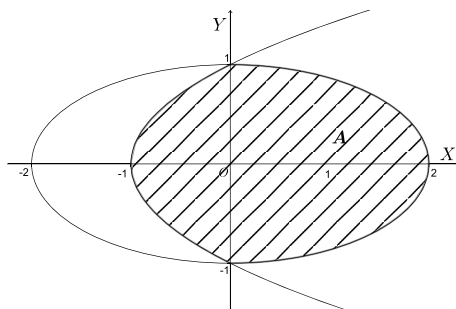
et

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 0 \text{ et } y + 1 - x^2 \geq 0\}.$$

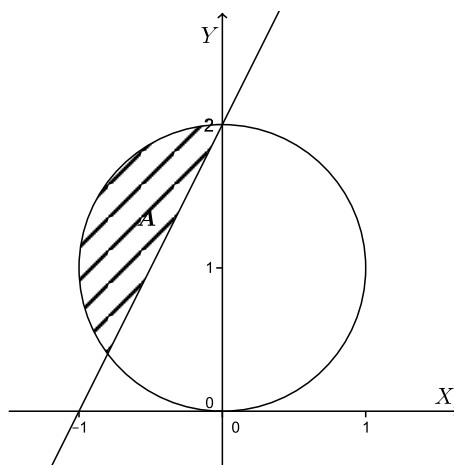
Pour l'ensemble B ,

- déterminer son ensemble E_x (resp. E_y) de variation des abscisses (resp. des ordonnées).
 - à abscisse (resp. ordonnée) fixée dans E_x (resp. E_y) donner l'ensemble de variation des ordonnées (resp. des abscisses) de ses points.
 - donner deux descriptions analytiques en se servant des items précédents.
2. Décrire analytiquement les ensembles bornés fermés hachurés A ci-dessous en commençant par l'ensemble de variation des abscisses puis, à abscisse fixée, l'ensemble de variation des ordonnées.
- Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées.

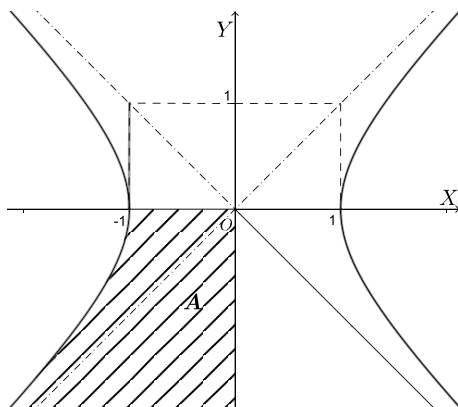
- (a) L'une des courbes délimitant l'ensemble est une parabole et l'autre une ellipse.



- (b) L'une des courbes délimitant l'ensemble est un cercle.

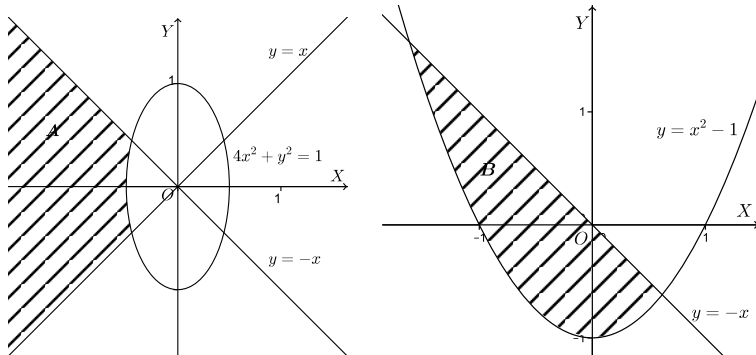


(c) L'une des courbes délimitant l'ensemble est une hyperbole.



Solution

1. La représentation graphique est la suivante.



Les points des bords sont compris dans A et dans B .

Considérons alors l'ensemble B . On a

(a) $E_x = \left[-(1 + \sqrt{5})/2, (-1 + \sqrt{5})/2 \right]$ et $E_y = \left[-1, (1 + \sqrt{5})/2 \right]$.

(b) Si x est fixé dans $\left[-(1 + \sqrt{5})/2, (-1 + \sqrt{5})/2 \right]$, alors les ordonnées varient dans l'intervalle $[x^2 - 1, -x]$.

Si y est fixé dans $[-1, (1 - \sqrt{5})/2]$, alors les abscisses varient dans $[-\sqrt{y+1}, \sqrt{y+1}]$ et si y est fixé dans $[(1 - \sqrt{5})/2, (1 + \sqrt{5})/2]$, alors les abscisses varient dans l'intervalle $[-\sqrt{y+1}, -x]$.

(c) On a

$$\begin{aligned} B &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right], y \in [x^2 - 1, -x] \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[-1, \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right], x \in [-\sqrt{y+1}, \sqrt{y+1}] \right\} \\ &\cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right], x \in [-\sqrt{y+1}, -x] \right\}. \end{aligned}$$

2. (a) L'ellipse a pour équation cartésienne $x^2/4 + y^2 = 1$ ou encore $x^2 + 4y^2 = 4$; celle de la parabole est $y^2 = 1 + x$. Dès lors, l'ensemble A fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in [-\sqrt{1+x}, \sqrt{1+x}]\} \\ &\cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], y \in \left[-\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \right] \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 1], x \in [y^2 - 1, 2\sqrt{1 - y^2}] \right\}. \end{aligned}$$

(b) Le cercle de rayon 1 centré au point de coordonnées $(0, 1)$ a pour équation cartésienne $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ et la droite représentée a pour équation $y = 2x + 2$. L'un des points d'intersection entre ces deux courbes a pour coordonnées $(0, 2)$. L'abscisse du second point d'intersection entre ces courbes est le réel $-4/5$, zéro strictement négatif de l'équation $x^2 + (2x + 2 - 1)^2 = 1$ équivalente à $5x^2 + 4x = 0$. Son ordonnée est $2/5$.

Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\begin{aligned} A &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[-1, -\frac{4}{5} \right], y \in \left[1 - \sqrt{1 - x^2}, 1 + \sqrt{1 - x^2} \right] \right\} \\ &\cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[-\frac{4}{5}, 0 \right], y \in \left[2x + 2, 1 + \sqrt{1 - x^2} \right] \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[\frac{2}{5}, 2 \right], x \in \left[-\sqrt{1 - (y - 1)^2}, \frac{y}{2} - 1 \right] \right\}. \end{aligned}$$

- (c) L'hyperbole a pour équation $x^2 - y^2 = 1$. Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\begin{aligned}
 A &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\infty, -1], y \in]-\infty, -\sqrt{x^2 - 1}] \right\} \\
 &\quad \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 0], y \in]-\infty, 0] \right\} \\
 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]-\infty, 0], x \in \left[-\sqrt{1 + y^2}, 0\right] \right\}.
 \end{aligned}$$

7.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Dans un repère orthonormé, on considère les équations cartésiennes suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad (x + y)^2 + (x - y)^2 = 2 & \text{(b)} \quad (x + y)^2 - (x - y)^2 = 0 & \text{(c)} \quad (x - 1)^2 = y \\
 \text{(d)} \quad x^2 - y^2 + 4y = 0 & \text{(e)} \quad 9 - 16x^2 = -y^2 & \text{(f)} \quad -\frac{y^2}{9} - x = 1 \\
 \text{(g)} \quad y - x = x^2 - y^2 & \text{(h)} \quad \frac{y^2}{9} - x^2 = 1 & \text{(i)} \quad 2x^4 + x^2y^2 = x^2
 \end{array}$$

Déterminer la nature des courbes que ces équations représentent.

Exercice 2

Représenter graphiquement les courbes dont les équations cartésiennes sont données dans l'exercice précédent. S'il s'agit de coniques, en déterminer l'excentricité, les éventuels points d'intersection avec les axes, les coordonnées cartésiennes des foyers et les éventuelles asymptotes.

Exercice 3

1. Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les ensembles A et B donnés par

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, -x - 2 \leq y \leq 2, x^2 + y^2 \geq 4\}$$

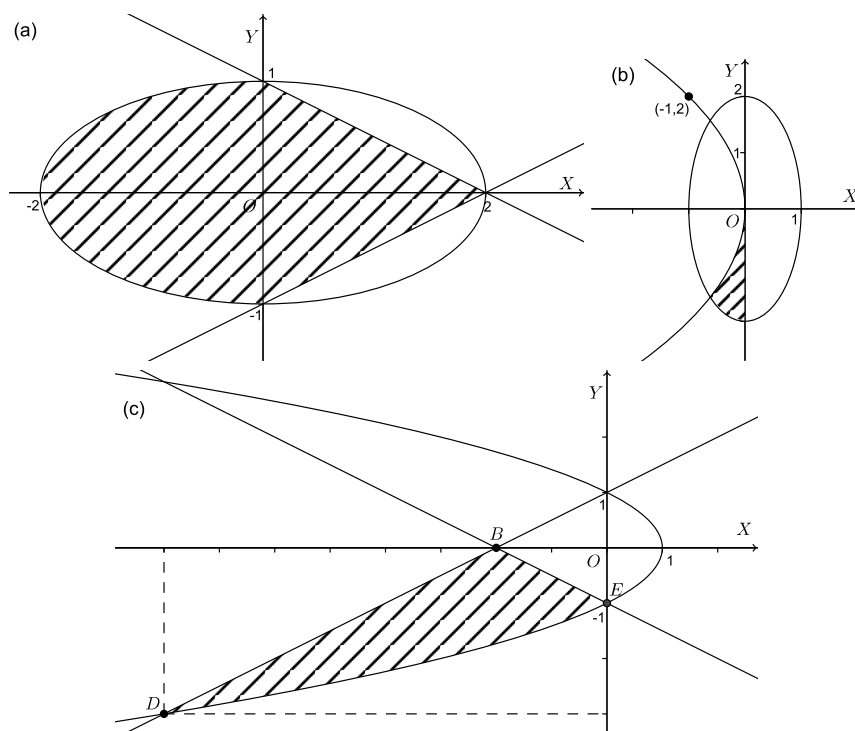
et

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq -1, \frac{-1}{x} \leq y \leq \sqrt{-x}\}.$$

Pour chacun de ces deux ensembles,

- (a) déterminer leur ensemble E_x (resp. E_y) de variation des abscisses (resp. des ordonnées).
 - (b) à abscisse (resp. ordonnée) fixée dans E_x (resp. E_y) donner l'ensemble de variation des ordonnées (resp. des abscisses) de leurs points.
 - (c) donner deux descriptions analytiques en utilisant les items précédents.
2. Décrire analytiquement l'ensemble borné fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses.

Faire de même en commençant par l'ensemble de variation des abscisses.



Solution 1

- (a) L'égalité s'écrit aussi $x^2 + y^2 = 1$; il s'agit donc de l'équation cartésienne du cercle centré à l'origine et de rayon 1.
- (b) Le membre de gauche de l'égalité est en fait égal à $4xy$. L'égalité est donc équivalente à $(x = 0$ ou $y = 0)$ et caractérise donc les points situés sur les axes du repère.
- (c) Il s'agit de l'équation cartésienne de la parabole obtenue par la translation « d'une unité dans le sens de l'axe des abscisses » de la parabole d'équation cartésienne canonique $y = x^2$.
- (d) L'équation s'écrit aussi

$$\frac{(y-2)^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1 ;$$

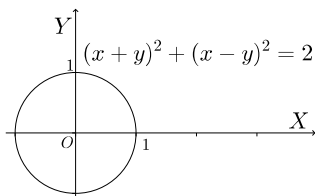
il s'agit donc de l'équation d'une hyperbole, obtenue par translation « de deux unités dans le sens de l'axe des ordonnées » à partir de l'hyperbole d'équation cartésienne canonique

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1.$$

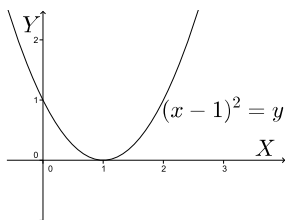
- (e) Il s'agit d'une hyperbole.
- (f) Il s'agit de la parabole obtenue par la translation « d'une unité dans le sens de l'axe des abscisses » de la parabole d'équation canonique $y^2 = -9x$.
- (g) L'égalité est équivalente à $y - x = (x - y)(x + y)$; elle caractérise donc deux droites d'équations cartésiennes $y = x$ et $x + y = -1$.
- (h) Il s'agit d'une hyperbole.
- (i) L'égalité caractérise les points de l'axe des ordonnées et une ellipse.

Solution 2

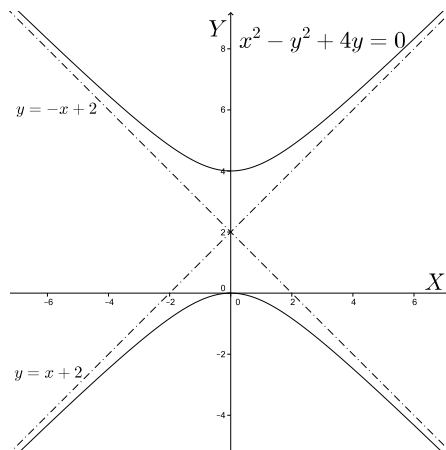
- (a) Il s'agit d'un cercle ; l'excentricité est donc nulle. Les points d'intersection avec les axes ont pour coordonnées $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$ et le foyer est le centre d'un cercle qui, dans le cas présent, est l'origine du repère.



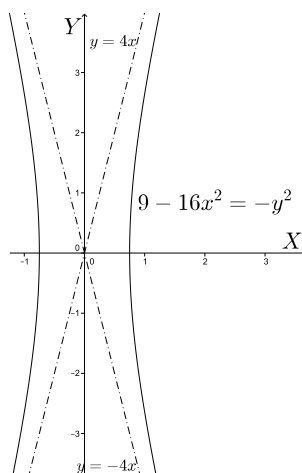
- (b) Le graphique consiste simplement à tracer les axes du repère !
- (c) Comme il s'agit d'une parabole, l'excentricité est égale à 1. Les coordonnées cartésiennes des points d'intersection avec les axes X , Y sont respectivement $(1, 0)$ (c'est le sommet de la parabole) et $(0, 1)$. Le foyer a pour coordonnées $(1, 1/4)$.



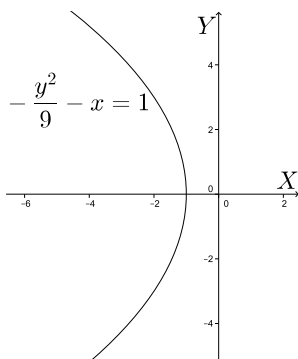
- (d) L'excentricité de cette hyperbole est égale à $\sqrt{2}$. Ses intersections avec l'axe des ordonnées ont pour coordonnées $(0, 0)$ et $(0, 4)$; il n'y a pas d'intersection avec l'axe des abscisses. Ses foyers ont pour coordonnées $(0, -2\sqrt{2} + 2)$ et $(0, 2\sqrt{2} + 2)$.



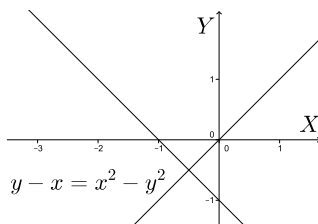
- (e) L'excentricité de cette hyperbole est égale à $\sqrt{17}$. Les points d'intersection avec l'axe des abscisses ont pour coordonnées $(-3/4, 0)$ et $(3/4, 0)$; il n'y a pas d'intersection avec l'axe des ordonnées. Ses foyers ont pour coordonnées $(-3\sqrt{17}/4, 0)$ et $(3\sqrt{17}/4, 0)$.



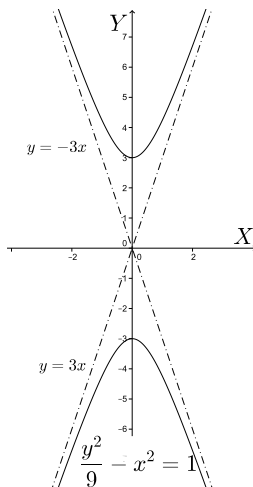
- (f) Comme il s'agit d'une parabole, l'excentricité est égale à 1. Les coordonnées du seul point d'intersection avec les axes sont $(-1, 0)$: c'est le sommet de la parabole. Le foyer a pour coordonnées $(-13/4, 0)$.



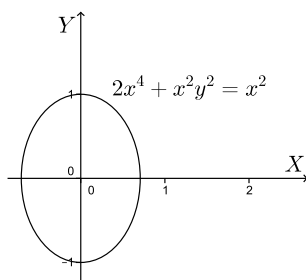
- (g) La représentation est le graphique de deux droites. Les coordonnées des points d'intersection avec les axes sont $(0, 0)$, $(0, -1)$ et $(-1, 0)$.



- (h) L'excentricité de cette hyperbole est égale à $\sqrt{10}/3$. Les points d'intersection avec l'axe des ordonnées ont pour coordonnées $(0, -3)$ et $(0, 3)$; il n'y a pas d'intersection avec l'axe des abscisses. Les foyers ont pour coordonnées $(0, -\sqrt{10})$ et $(0, \sqrt{10})$.

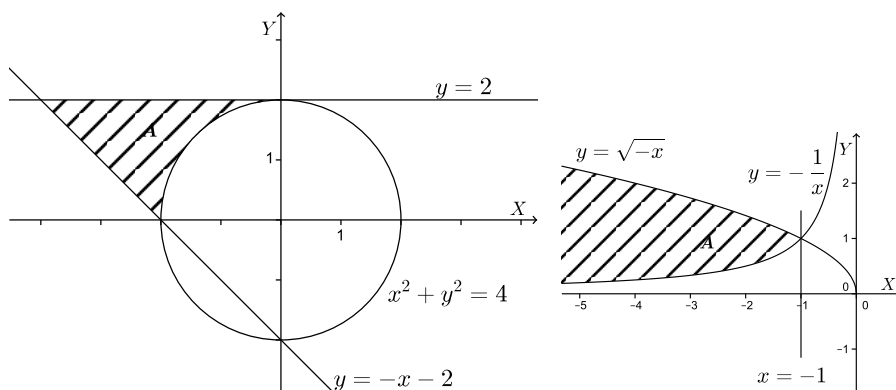


- (i) La représentation graphique est celle d'une droite et d'une ellipse. L'excentricité de l'ellipse est égale à $\sqrt{2}/2$. La droite est en fait l'axe des ordonnées et les points d'intersection de l'ellipse avec les axes ont pour coordonnées $(-\sqrt{2}/2, 0)$, $(\sqrt{2}/2, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$. Les foyers ont pour coordonnées $(0, -\sqrt{2}/2)$ et $(0, \sqrt{2}/2)$.



Solution 3

1. On a les représentations suivantes.



Les points des bords sont compris dans A et dans B .

Pour l'ensemble A , on a les réponses suivantes.

(a) $E_x = [-4, 0]$ et $E_y = [0, 2]$.

(b) Si x est fixé dans $[-4, -2]$ alors les ordonnées varient dans $[-x - 2, 2]$; si x est fixé dans $[-2, 0]$ alors les ordonnées varient dans $[\sqrt{4 - x^2}, 2]$ et si y est fixé dans $[0, 2]$ alors les abscisses varient dans $[-2 - y, -\sqrt{4 - y^2}]$.

(c) Vu ce qui précède, des descriptions analytiques de l'ensemble sont

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-4, -2], y \in [-x - 2, 2]\} \\ \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0], y \in [\sqrt{4 - x^2}, 2]\}$$

et

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2], x \in [-2 - y, -\sqrt{4 - y^2}]\}.$$

Pour l'ensemble B , on a les réponses suivantes.

(a) $E_x =]-\infty, -1]$ et $E_y =]0, +\infty[$.

(b) Si x est fixé dans $]-\infty, -1]$ alors les ordonnées varient dans $[-1/x, \sqrt{-x}]$; si y est fixé dans $]0, 1]$ alors les abscisses varient dans $]-\infty, -1/y]$ et si y est fixé dans $[1, +\infty[$ alors les abscisses varient dans $]-\infty, -y^2]$.

(c) Vu ce qui précède, des descriptions analytiques de l'ensemble sont

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]-\infty, -1], y \in [-1/x, \sqrt{-x}] \right\}$$

et

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in]0, 1], x \in]-\infty, -1/y]\} \\ \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [1, +\infty[, x \in]-\infty, -y^2]\}.$$

2. (a) Les droites passent par des points qui ont respectivement pour coordonnées $(0, 1)$, $(0, -1)$ et $(2, 0)$. Les droites qui délimitent l'ensemble ont pour équation $x + 2y - 2 = 0$, $x - 2y - 2 = 0$ et l'ellipse a pour équation $x^2/4 + y^2 = 1$ ou encore $x^2 + 4y^2 = 4$.

Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par l'union des deux ensembles suivants

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0], x \in \left[-2\sqrt{1-y^2}, 2y+2\right] \right\}$$

et

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 1], x \in \left[-2\sqrt{1-y^2}, -2y+2\right] \right\}$$

ou encore par l'union de

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0], y \in \left[\frac{-\sqrt{4-x^2}}{2}, \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right] \right\}$$

et de

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2], y \in [x/2 - 1, -x/2 + 1]\}.$$

- (b) L'ellipse a pour équation $x^2 + y^2/4 = 1$ ou encore $4x^2 + y^2 = 4$ et la parabole a pour équation $y^2 = -4x$. Le point d'intersection entre les deux courbes est le point de coordonnées $\left((1 - \sqrt{5})/2, -\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}\right)$.

Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par l'union de

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[-2, -\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}\right], x \in \left[-\frac{\sqrt{4-y^2}}{2}, 0\right] \right\}$$

et de

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \left[-\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}, 0\right], x \in \left[-\frac{y^2}{4}, 0\right] \right\}$$

ou encore par

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right], y \in \left[-2\sqrt{1-x^2}, -2\sqrt{-x}\right] \right\}.$$

- (c) Les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(-2, 0)$, $(-8, -3)$ et $(0, -1)$. La droite passant par D et B a pour équation $x - 2y + 2 = 0$ et celle passant

par B et E a pour équation $x + 2y + 2 = 0$; la parabole a pour équation $1 - y^2 = x$.
Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par l'union de

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-3, -1], x \in [2y - 2, 1 - y^2]\}$$

et de

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [-1, 0], x \in [2y - 2, -2y - 2]\}$$

ou encore par l'union de

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-8, -2], y \in \left[-\sqrt{1-x}, \frac{x}{2} + 1\right]\}$$

et de

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2, 0], y \in \left[-\sqrt{1-x}, -\frac{x}{2} - 1\right]\}.$$

7.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

On se place dans un repère orthonormé du plan.

1. Quelle est l'équation cartésienne de la parabole dont le foyer a pour coordonnées $(0, 1/4)$ et pour directrice la droite d'équation $y = -1/4$?
2. Soit P un point de la parabole et Q la projection orthogonale de P sur la directrice d . Montrer que la tangente à la parabole au point P est la bissectrice de l'angle formé par $\widehat{FPQ}$ si F est le foyer de la parabole¹.

Solution

1. Un point P de coordonnées (x, y) appartient à la parabole si et seulement si la distance entre ce point et la directrice est égale à la distance entre ce point et le foyer. Vu les données, on obtient donc que $P(x, y)$ appartient à la parabole si et seulement si

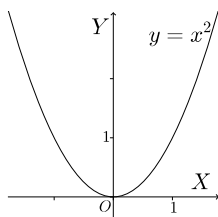
$$x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(y + \frac{1}{4}\right)^2.$$

On a alors successivement

$$\begin{aligned} x^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 &= \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 &\Leftrightarrow x^2 &= \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 \\ &&\Leftrightarrow x^2 &= \left(y + \frac{1}{4} + y - \frac{1}{4}\right) \left(y + \frac{1}{4} - y + \frac{1}{4}\right) \\ &&\Leftrightarrow x^2 &= y \end{aligned}$$

et cette dernière égalité est l'équation cartésienne de la parabole.

1. Voir l'annexe : miroirs ardents.



2. Soit $P(x_0, x_0^2)$ un point de cette parabole. Le triangle FPQ étant isocèle, la médiatrice du segment $[FQ]$ passe par P et elle est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{FPQ}$. Son équation cartésienne est

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0).$$

Montrons que cette droite est bien la tangente en question en montrant que son intersection avec la parabole est réduite à un point, à savoir P . On a successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \\ y = x^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \\ x_0^2 + 2x_0(x - x_0) = x^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \\ x^2 - 2x_0x + x_0^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0) \\ (x - x_0)^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x_0^2 \\ x = x_0 \end{cases} \end{aligned}$$

et il n'y a qu'un point d'intersection. La droite est bien la tangente à la parabole au point P .

Notons que si on connaît la notion de dérivée (voir la section 5 du chapitre 3), on peut utiliser le fait que le coefficient angulaire de la droite tangente en un point d'une parabole dont l'équation s'écrit sous la forme $y = ax^2 + bx + c$ est égal à la valeur de la dérivée en l'abscisse du point. Dans le cas présent on a tout simplement $y = x^2$, donc l'équation de la droite tangente au point de coordonnées (x_0, x_0^2) a pour équation

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$$

qui est celle de la bissectrice trouvée précédemment.

Exercice 2

- ⋮ Soit une ellipse $\mathcal{E}$ et soit un point P du plan. Quel est le lieu du milieu du segment
⋮ $[PQ]$ lorsque Q est un point qui parcourt $\mathcal{E}$?

Solution

Fixons un repère orthonormé de telle sorte que l'équation cartésienne de l'ellipse soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a \geq b > 0$. Notons (x_0, y_0) les coordonnées du point donné P dans ce repère. Cela étant, un point $M(x, y)$ appartient au lieu si et seulement s'il existe des λ, μ tels que

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda + x_0}{2} \\ y = \frac{\mu + y_0}{2} \\ \frac{\lambda^2}{a^2} + \frac{\mu^2}{b^2} = 1, \end{cases}$$

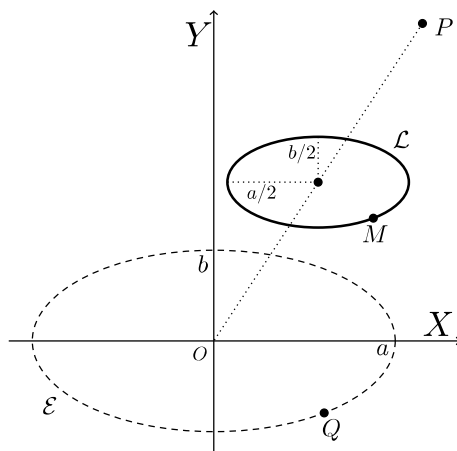
donc si et seulement si

$$\frac{(2x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(2y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Cette égalité s'écrit aussi

$$\frac{\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2}{a^2/4} + \frac{\left(y - \frac{y_0}{2}\right)^2}{b^2/4} = 1,$$

ce qui permet de bien visualiser la nature du lieu : il s'agit de l'ellipse dont le centre est le milieu du segment joignant P au centre de $\mathcal{E}$, dont les distances maximale et minimale au centre sont respectivement égales à $a/2$ et $b/2$ (« demi-grand axe et demi-petit axe »).



Exercice 3

On donne une droite d tangente à un cercle C . Quel est le lieu des points dont la distance à C est égale à la distance à d ? Représenter graphiquement ce lieu.

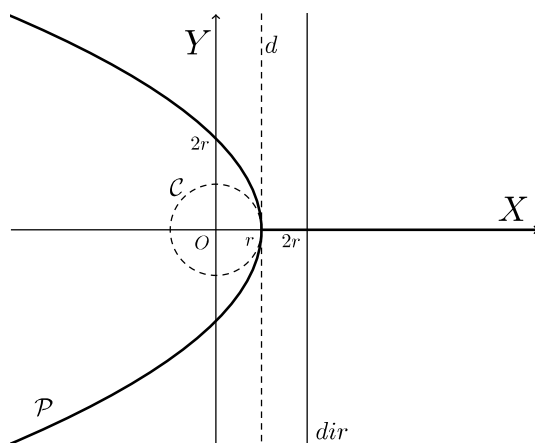
Solution

Remarquons tout d'abord que seuls les points extérieurs au cercle peuvent faire partie du lieu.

Cela étant, deux situations se présentent, en fonction des demi-plans définis par la droite d .

D'une part, un point du lieu qui est dans le demi-plan différent de celui dans lequel se trouve le cercle est nécessairement sur la droite orthogonale à la droite d passant par le point d'intersection entre d et le cercle, car la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est strictement plus grande que celle de chacun des autres côtés. Et réciproquement, tout point de ce demi-plan situé sur cette droite fait partie du lieu.

D'autre part, si P est un point du lieu qui se trouve dans le même demi-plan que le cercle, la distance de P au centre du cercle est égale à la distance entre P et d augmentée du rayon du cercle. Ainsi, P se trouve sur la parabole dont le foyer est le centre du cercle et dont la directrice est la droite parallèle à d située à une distance de d égale au rayon du cercle et située dans le demi-plan défini par d qui ne contient pas le cercle. Et réciproquement, les points de cette parabole font bien partie du lieu.



8 Trigonométrie

8.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

On considère un réel x appartenant à l'intervalle $] -\pi/2, 0]$ vérifiant $\tan(x) = -4/3$.
 Sans utiliser de calculatrice, déterminer la valeur des trois autres nombres trigonométriques.

Solution

On a

$$\cotan(x) = \frac{1}{\tan(x)} = -\frac{3}{4},$$

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(x)}} = \frac{3}{5} \text{ car } \cos(x) > 0$$

et

$$\sin(x) = -\sqrt{1 - \cos^2(x)} = -\frac{4}{5} \text{ car } \sin(x) < 0,$$

mais on peut aussi calculer $\sin(x)$ en utilisant l'égalité $\sin(x) = \tan(x) \cos(x)$.

Exercice 2

1. Pour quelle(s) valeur(s) du réel x l'expression

$$\tan(x) + \cotan(x) - \frac{1}{\sin(x) \cos(x)}$$

est-elle définie ?

2. En simplifiant cette expression, montrer qu'elle est indépendante de x .

Solution

1. Vu les dénominateurs intervenant dans l'expression, elle est définie pour

$$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2. On a successivement

$$\begin{aligned} & \tan(x) + \cotan(x) - \frac{1}{\sin(x) \cos(x)} \\ &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\cos(x)}{\sin(x)} - \frac{1}{\sin(x) \cos(x)} \\ &= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x) - 1}{\sin(x) \cos(x)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 3

Si x est un réel appartenant à $] \pi/2, \pi[\setminus \{3\pi/4\}$, transformer les expressions suivantes de telle sorte qu'elles ne contiennent plus qu'un seul facteur faisant intervenir la fonction trigonométrique sinus ou cosinus.

$$(a) \sqrt{\cotan^2(x)} \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (b) \sqrt{\cos^2(x)} |\sin(2x)| + \frac{\sin(x + \pi)}{\sqrt{1 + \tan^2(2x)}}$$

Solution

(a) Puisque $\cotan(x)$ est un nombre négatif, on a

$$\begin{aligned} \sqrt{\cotan^2(x)} \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\cotan(x) \sin^2(x) \\ &= -\cos(x) \sin(x) \\ &= -\frac{\sin(2x)}{2}. \end{aligned}$$

(b) Puisque x est dans $] \pi/2, \pi[\setminus \{3\pi/4\}$, on a $\sin(2x) \leq 0$ et $\cos(x) \leq 0$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} &\sqrt{\cos^2(x)} |\sin(2x)| + \sin(x + \pi) \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(2x)}} \\ &= \sin(2x) \cos(x) - |\cos(2x)| \sin(x) \\ &= \begin{cases} \sin(2x) \cos(x) + \cos(2x) \sin(x) = \sin(3x) & \text{si } x \in] \pi/2, 3\pi/4[\\ \sin(2x) \cos(x) - \cos(2x) \sin(x) = \sin(x) & \text{si } x \in] 3\pi/4, \pi[. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 4

Prouver que

$$4 \sin\left(\frac{7\pi}{24}\right) \cos\left(\frac{11\pi}{24}\right) = \sqrt{2} - 1.$$

Solution

En utilisant l'égalité

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y),$$

on obtient

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin(x) \cos(y).$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
 4 \sin\left(\frac{7\pi}{24}\right) \cos\left(\frac{11\pi}{24}\right) &= 2 \left(\sin\left(\frac{18\pi}{24}\right) + \sin\left(\frac{-4\pi}{24}\right) \right) \\
 &= 2 \left(\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \\
 &= 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
 &= \sqrt{2} - 1.
 \end{aligned}$$

Exercice 5

Résoudre les équations suivantes (x est l'inconnue réelle). Puis, parmi toutes les solutions de chacune, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle I .

(a) $\sin(4x) = \cos(2x)$ avec $I = [0, 2\pi]$

(b) $\cos(4x) = \cos(2x)$ avec $I = [\pi, 3\pi]$

(c) $\cos(2x) = 3 \sin(x) + 2$ avec $I = [\pi, 3\pi]$

(d) $\sin(x) + 1 = \cos(x)$ avec $I = [\pi, 2\pi]$

(e) $\cos^2(x) + \cos(5x) + \cos(x) = \sin^2(x)$ avec $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Solution

(a) On a successivement

$$\begin{aligned}
 \sin(4x) = \cos(2x) &\Leftrightarrow 2 \sin(2x) \cos(2x) = \cos(2x) \\
 &\Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \text{ ou } \sin(2x) = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Examinons les deux dernières égalités. On a d'une part

$$\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$$

et d'autre part

$$\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,$$

c'est-à-dire

$$\sin(2x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi.$$

Dès lors, l'équation de départ a pour ensemble de solutions

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont

$$\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{4}, \frac{17\pi}{12}, \frac{7\pi}{4}.$$

(b) On a successivement

$$\begin{aligned}\cos(4x) = \cos(2x) &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 4x = 2x + 2k\pi \text{ ou } 4x = -2x + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi \text{ ou } x = k\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

L'équation de départ a donc pour ensemble de solutions

$$S = \left\{ k\frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont

$$\pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2\pi, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}, 3\pi.$$

(c) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. Dès lors

$$\cos(2x) = 3\sin(x) + 2 \Leftrightarrow 2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 1 = 0.$$

Cela étant, les solutions de l'équation polynomiale $2X^2 + 3X + 1 = 0$ étant les réels -1 et $-1/2$, on a

$$\cos(2x) = 3\sin(x) + 2 \Leftrightarrow 2(\sin(x) + 1) \left(\sin(x) + \frac{1}{2} \right) = 0.$$

Ainsi

$$\cos(2x) = 3\sin(x) + 2 \Leftrightarrow \sin(x) = -1 \text{ ou } \sin(x) = -\frac{1}{2}.$$

Examinons les deux égalités de droite. On a d'une part

$$\sin(x) = -1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

et d'autre part

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi.$$

L'équation de départ a donc pour ensemble de solutions

$$S = \left\{ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{11\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}.$$

(d) On a successivement

$$\begin{aligned}\sin(x) + 1 = \cos(x) &\Leftrightarrow 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) + 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \text{ ou } \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

Examinons les deux dernières égalités. On a d'une part

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{x}{2} = k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\pi$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= -\sin\left(\frac{x}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \cos\left(\frac{x}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{x}{2} &= \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} + 2k\pi \text{ ou } \frac{x}{2} = -\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi.\end{aligned}$$

L'équation de départ a donc pour ensemble de solutions

$$S = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ sont

$$\frac{3\pi}{2}, 2\pi.$$

(e) Quels que soient les réels a, b , on a

$$\cos(a) + \cos(b) = 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

et

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a).$$

On obtient donc successivement

$$\begin{aligned}\cos^2(x) + \cos(5x) + \cos(x) &= \sin^2(x) \\ \Leftrightarrow (\cos^2(x) - \sin^2(x)) + (\cos(5x) + \cos(x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(2x) + 2 \cos(3x) \cos(2x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(2x) (1 + 2 \cos(3x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(2x) = 0 \text{ ou } \cos(3x) &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Examinons les deux dernières égalités. On a d'une part

$$\begin{aligned}\cos(2x) = 0 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}\cos(3x) = -\frac{1}{2} &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 3x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 3x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{2\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

L'équation de départ a donc pour ensemble de solutions l'union des trois ensembles suivants

$$\left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}, \quad \left\{ \frac{2\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ -\frac{2\pi}{9} + 2k\frac{\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, \pi/2]$ sont

$$\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}.$$

Exercice 6

- ... Pour quelles valeurs du réel $x \in [0, 2\pi]$ les inégalités suivantes sont-elles vraies ?
- (a) $\sin(x) \geq \sin^2(x)$ (b) $\cos(2x) \leq 2 - \sin^2(x)$ (c) $2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 \geq 0$
- (d) $\sin(x) \geq \cos(x)$ (e) $\sin(x) \geq \frac{1}{\cos(x)}$ (f) $\tan(x) \leq \tan^2(x)$
- ... Illustrer la solution de (d) sur un cercle trigonométrique.

Solution

(a) Pour $x \in [0, 2\pi]$, on a

$$\sin(x) \geq \sin^2(x) \Leftrightarrow \sin(x)(1 - \sin(x)) \geq 0;$$

dès lors si $\sin(x) = 1$, c'est-à-dire si $x = \pi/2$, l'inégalité est vérifiée et si $\sin(x) \neq 1$, comme $1 - \sin(x) > 0$, l'inéquation est équivalente à $\sin(x) \geq 0$, qui a pour ensemble de solutions $[0, \pi]$. Les réels de $[0, 2\pi]$ qui vérifient l'inégalité sont donc ceux de l'intervalle $[0, \pi]$.

Remarquons que cette inéquation aurait pu être résolue encore plus rapidement : d'une part puisque $\sin^2(x)$ est un réel positif quel que soit x , elle ne peut être vérifiée que lorsque $\sin(x)$ est positif, donc pour des réels x de $[0, \pi]$; d'autre part, puisque le sinus d'un réel est toujours inférieur à 1, on a $\sin^2(x) \leq \sin(x)$ quel que soit le réel x de $[0, \pi]$.

(b) On a

$$\cos(2x) \leq 2 - \sin^2(x) \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2(x) \leq 2 - \sin^2(x) \Leftrightarrow -\sin^2(x) \leq 1.$$

Le carré d'un réel étant toujours positif, cette inégalité est donc vérifiée quel que soit le réel x .

Remarquons qu'on aurait pu également procéder plus rapidement en notant que, puisque le carré du sinus d'un réel est compris entre 0 et 1, on a toujours $2 - \sin^2(x) \geq 1$ et comme le cosinus d'un réel est toujours inférieur ou égal à 1, on a $\cos(2x) \leq 1 \leq 2 - \sin^2(x)$ quel que soit x .

(c) Les solutions de l'équation polynomiale $2X^2 - 3X + 1 = 0$ étant les réels $1/2$ et 1 , on a

$$2\sin^2(x) - 3\sin(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sin(x) - 1) \left(\sin(x) - \frac{1}{2} \right) \geq 0.$$

Si $\sin(x) = 1$, l'inégalité est vérifiée. Si $\sin(x) \neq 1$, comme on a alors $\sin(x) - 1 < 0$, on obtient

$$2 \sin^2(x) - 3 \sin(x) + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin(x) - \frac{1}{2} \leq 0.$$

Si on ne considère que des réels de $[0, 2\pi]$, cette inéquation a pour solution les réels de l'ensemble

$$\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right].$$

On obtient donc que les réels de $[0, 2\pi]$ qui vérifient l'inégalité de départ sont ceux de l'ensemble

$$\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right].$$

- (d) Pour $x \in [0, \pi/2[\cup]3\pi/2, 2\pi]$ on a $\cos(x) > 0$ et pour $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$ on a $\cos(x) < 0$. Dès lors, pour $x \in [0, \pi/2[\cup]3\pi/2, 2\pi]$, on a

$$\sin(x) \geq \cos(x) \Leftrightarrow \tan(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

et, pour $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$, on a

$$\sin(x) \geq \cos(x) \Leftrightarrow \tan(x) \leq 1 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Enfin, le cosinus s'annule en $\pi/2$ et $3\pi/2$ et on a $\sin(\pi/2) = 1$ et $\sin(3\pi/2) = -1$.

En conclusion, les réels de l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui vérifient l'inégalité de départ sont donc ceux de l'intervalle

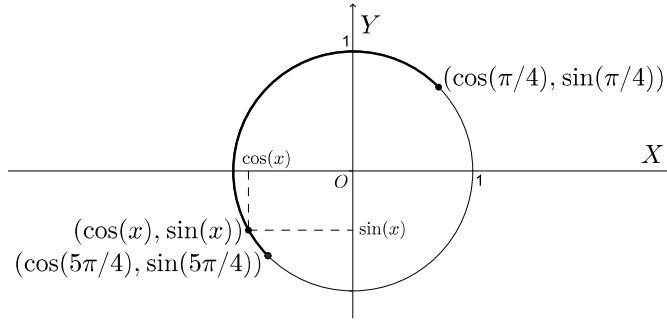
$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right].$$

Voici une autre méthode de résolution de cette inéquation.

Comme on a $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$ et $\sin(x) - \sin(y) = 2 \sin((x-y)/2) \cos((x+y)/2)$ quels que soient les réels x et y , on obtient successivement

$$\begin{aligned} \sin(x) \geq \cos(x) &\Leftrightarrow \sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{x - \pi/2 + x}{2}\right) \cos\left(\frac{x + \pi/2 - x}{2}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \pi + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Dès lors, dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation est vérifiée par les réels de l'ensemble $[\pi/4, 5\pi/4]$.



- (e) Dans $[0, 2\pi]$, les réels $\pi/2$ et $3\pi/2$ ne peuvent vérifier l'inéquation, celle-ci n'y étant pas définie.

Cela étant, pour $x \in [0, \pi/2[\cup]3\pi/2, 2\pi]$ on a $\cos(x) > 0$ et pour $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$ on a $\cos(x) < 0$. Dès lors, pour $x \in [0, \pi/2[\cup]3\pi/2, 2\pi]$, on a

$$\sin(x) \geq \frac{1}{\cos(x)} \Leftrightarrow \sin(2x) \geq 2,$$

ce qui est impossible. Et pour $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$, on a

$$\sin(x) \geq \frac{1}{\cos(x)} \Leftrightarrow \sin(2x) \leq 2,$$

ce qui est toujours vrai.

En conclusion, les réels de l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui vérifient l'inégalité de départ sont donc ceux de l'intervalle

$$\left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right[.$$

- (f) Dans $[0, 2\pi]$, les réels $\pi/2$ et $3\pi/2$ ne peuvent vérifier l'inéquation, celle-ci n'étant pas définie en ces réels.

Cela étant, comme le carré d'un nombre réel est toujours positif, l'inégalité est vérifiée pour les réels de l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour lesquels la tangente est définie et négative, à savoir les réels de l'intervalle

$$\{0\} \cup \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right] \cup \left] \frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[.$$

Pour $\tan(x) > 0$ et $x \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi/2, 3\pi/2\}$, c'est-à-dire pour $x \in]0, \pi/2[\cup]\pi, 3\pi/2[$, on a

$$\tan(x) \leq \tan^2(x) \Leftrightarrow 1 \leq \tan(x) \Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[.$$

En conclusion, les réels de l'intervalle $[0, 2\pi]$ qui vérifient l'inégalité de départ sont donc ceux de l'ensemble

$$\{0\} \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \right[\cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right[.$$

On peut aussi résoudre cette inéquation de la façon suivante, sachant qu'un produit de deux facteurs est positif si et seulement si ses facteurs sont de même signe. On a successivement

$$\begin{aligned}\tan(x) \leq \tan^2(x) &\Leftrightarrow \tan(x)(\tan(x) - 1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (\tan(x) \geq 0 \text{ et } \tan(x) \geq 1) \text{ ou } (\tan(x) \leq 0 \text{ et } \tan(x) \leq -1) \\ &\Leftrightarrow \tan(x) \geq 1 \text{ ou } \tan(x) \leq -1 \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{3\pi}{4} + k\pi \text{ ou } \frac{5\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{7\pi}{4} + k\pi.\end{aligned}$$

Ainsi, dans $[0, 2\pi]$ l'inéquation est vérifiée par les réels de l'ensemble

$$\{0\} \cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right].$$

8.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

1. Pour quelles valeurs du réel x les deux membres de l'égalité suivante sont-ils définis ? Démontrer ensuite cette égalité.

$$\frac{2}{\cos(x)} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + \cotan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

2. Pour quelles valeurs du réel x les deux membres de l'égalité suivante sont-ils définis ? Démontrer ensuite cette égalité.

$$\frac{1}{\sin(x)} = \cotan\left(\frac{x}{2}\right) - \cotan(x)$$

Calculer ensuite l'expression

$$\frac{1}{\sin(x)} + \frac{1}{\sin(2x)} + \frac{1}{\sin(4x)} + \frac{1}{\sin(8x)}.$$

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes (x est l'inconnue réelle). Ensuite, pour chacune des équations, déterminer les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$.

(a) $1 + \cos(x) = \sin(x)$

(b) $\cos(2x)\cos(4x) = \sin(2x)\sin(4x)$

(c) $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{6}/2$

(d) $2\sin^2(x) = 3\cos(x)$

(e) $\cos(2x) + \sin(x) = 0$

(f) $\sin(x) + \sin(3x) = 2\sin(2x)$

(g) $2\sin^2(x) + \sin(2x) = 0$

(h) $\sin(3x)\cos(2x) + \sin^2(x) = 1/2$

Exercice 3

1. (a) Rapprocher l'expression $\sin^4(x) - 2\sin^2(x)\cos^2(x) + \cos^4(x)$ d'un produit remarquable qui permettrait de simplifier cette expression. Lequel envisager ?
 (b) Transformer l'expression précédente en utilisant la formule trouvée pour simplifier au maximum cette expression.
2. (a) Parmi les formules de trigonométrie, quelle est celle qui permet de transformer un double produit de cosinus ? La citer.
 (b) Prouver que

$$4 \cos\left(\frac{31\pi}{24}\right) \cos\left(\frac{11\pi}{24}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

3. (a) Si un produit de deux facteurs est positif, que peut-on affirmer à propos de ces facteurs ?
 (b) Transformer $\sin(4x)$ en un produit de facteurs dont deux sont des fonctions trigonométriques.
 (c) Résoudre l'inéquation $\sin(2x) \geq \sin(4x)$.
 (d) Parmi toutes les solutions, déterminer celles qui appartiennent à l'intervalle $[0, \pi]$.

Exercice 4

Pour quelles valeurs du réel $x \in [0, 2\pi]$ les inégalités suivantes sont-elles vraies ?

- | | |
|----------------------------------|--|
| (a) $1 + \sin(x) < \cos(x)$ | (b) $\sin(x) \cos(x) > 1/2$ |
| (c) $\sin(x/2) + \cos(x) \leq 1$ | (d) $\sin(3x) - \sin(x) \geq 2 \cos(2x)$ |

Solution 1

1. Les deux membres de l'égalité sont définis pour

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'égalité se démontre (par exemple) en utilisant la formule

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

puis en utilisant les formules reliant le carré des tangentes et le carré des fonctions sinus et cosinus. On peut aussi remplacer les fonctions tangente et cotangente par leur définition en sinus et cosinus.

2. Les deux membres de l'égalité sont définis pour tout réel qui n'annule pas les dénominateurs, à savoir pour

$$x \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Cela étant, on obtient directement la preuve de l'égalité en utilisant la définition de la fonction cotangente et les propriétés de base des fonctions sinus et cosinus.

L'expression définie pour tout $x \neq k\pi/8$ ($k \in \mathbb{Z}$) est égale à

$$\cotan\left(\frac{x}{2}\right) - \cotan(8x).$$

Solution 2

(a) Cette équation a pour ensemble de solutions

$$S = \{\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dès lors, la solution qui appartient à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ est $\frac{\pi}{2}$.

(b) Cette équation a pour ensemble de solutions

$$S = \left\{\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{6} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont

$$\frac{-5\pi}{12}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}.$$

(c) Cette équation a pour ensemble de solutions

$$S = \left\{\frac{\pi}{12} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$.

(d) Cette équation a pour ensemble de solutions

$$S = \left\{\frac{-\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$.

(e) Cette équation a pour ensemble de solutions

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$.

(f) Cette équation a pour ensemble de solutions

$$S = \left\{k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sont $\frac{-\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}$.

(g) Cette équation a pour ensemble de solutions

$$S = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{ \frac{-\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ sont $\frac{-\pi}{4}, 0$.

(h) Cette équation a pour ensemble de solutions

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dès lors, les solutions qui appartiennent à l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ sont

$$\frac{-7\pi}{18}, \frac{-\pi}{4}, \frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{18}.$$

Solution 3

1. (a) On peut envisager le carré d'une différence de deux termes donc, par exemple, l'expression $r^2 - 2rs + s^2 = (r - s)^2$, $r, s \in \mathbb{R}$.

(b) L'expression donnée peut donc s'écrire sous la forme

$$(\cos^2(x) - \sin^2(x))^2 = \cos^2(2x).$$

2. (a) Pour transformer un double produit de cosinus, on utilise la formule

$$\cos(r + s) + \cos(r - s) = 2 \cos(r) \cos(s), \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

3. (a) Si un produit de deux facteurs est positif alors les facteurs sont de même signe, tous deux positifs ou tous deux négatifs.

(b) On a la formule $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(c) L'ensemble des solutions est donné par

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, k\pi \right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right] \right).$$

(d) Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, \pi]$ sont les réels de l'ensemble $\{0\} \cup [\pi/6, \pi/2] \cup [5\pi/6, \pi]$.

Solution 4

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont les réels des ensembles suivants.

(a) $]3\pi/2, 2\pi[$ (b) $\emptyset$ (pas de solution)

(c) $[\pi/3, 5\pi/3] \cup \{0, 2\pi\}$ (d) $[\pi/4, 3\pi/4] \cup [5\pi/4, 7\pi/4]$

8.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

Soient a, b, c trois réels de l'intervalle $]0, \pi[$ qui désignent les mesures des angles d'un triangle.

1. Démontrer que si on a

$$\tan(b) = \frac{\sin(c)}{1 - \cos(c)}$$

alors le triangle est isocèle. Qu'en est-il de la réciproque ?

2. Démontrer que si on a

$$\sin(a) = \frac{\sin(b) + \sin(c)}{\cos(b) + \cos(c)}$$

alors le triangle est rectangle en a . Qu'en est-il de la réciproque ?

3. Démontrer que le triangle est rectangle si et seulement si

$$\sin^2(a) + \sin^2(b) + \sin^2(c) = 2.$$

Solution

1. Tout d'abord, remarquons que comme $c \in]0, \pi[$, le dénominateur qui apparaît n'est pas nul et $\tan(b)$ n'est défini que si $b \neq \pi/2$.

Cela étant, on a successivement

$$\begin{aligned} \tan(b) = \frac{\sin(c)}{1 - \cos(c)} &\Leftrightarrow \sin(b) (1 - \cos(c)) = \sin(c) \cos(b) \\ &\Leftrightarrow \sin(b) = \sin(c) \cos(b) + \cos(c) \sin(b) \\ &\Leftrightarrow \sin(b) = \sin(b + c). \end{aligned}$$

Pour $b, c \in]0, \pi[$ la dernière égalité est vraie si et seulement si

$$b = \pi - (b + c).$$

Comme la somme des mesures des angles d'un triangle vaut π , l'égalité implique bien que la valeur de la mesure du troisième angle est égale à b , donc que le triangle est isocèle.

La réciproque est fausse. De fait, précédemment on a établi que

$$\tan(b) = \frac{\sin(c)}{1 - \cos(c)} \Leftrightarrow b = \pi - (b + c) \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{2} - \frac{c}{2}.$$

Dès lors, si $a = b$ alors on a bien $b = \pi - (b + c)$ mais si $a = c$ ou $b = c$, cette égalité n'a lieu que si le triangle est équilatéral.

2. Remarquons tout d'abord que comme $b, c \in]0, \pi[$, le dénominateur qui apparaît dans l'énoncé n'est jamais nul.

Cela étant, on a successivement

$$\begin{aligned} \frac{\sin(b) + \sin(c)}{\cos(b) + \cos(c)} &= \frac{\sin((b+c)/2) \cos((b-c)/2)}{\cos((b+c)/2) \cos((b-c)/2)} \\ &= \frac{\sin((b+c)/2)}{\cos((b+c)/2)} \\ &= \frac{\cos(a/2)}{\sin(a/2)}, \end{aligned}$$

la dernière égalité étant obtenue en utilisant le fait que la somme de a, b, c vaut π . Il s'ensuit que l'on a

$$\sin(a) = \frac{\sin(b) + \sin(c)}{\cos(b) + \cos(c)} \Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\cos(a/2)}{\sin(a/2)}.$$

Comme $a \in]0, \pi[$, on a $\cos(a/2) \neq 0$; dès lors

$$\sin(a) = \frac{\sin(b) + \sin(c)}{\cos(b) + \cos(c)} \Leftrightarrow 2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)} \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Comme $a \in]0, \pi[$, on a

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \sin\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{a}{2} = \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Comme les développements précédents sont des équivalences, l'égalité de l'énoncé est donc bien équivalente au fait que le triangle soit rectangle en a .

3. Comme $a + b + c = \pi$, on a $\sin(c) = \sin(\pi - (a + b)) = \sin(a + b)$. On obtient alors successivement

$$\begin{aligned} \sin^2(a) + \sin^2(b) + \sin^2(c) &= 2 \\ \Leftrightarrow \sin^2(a) + \sin^2(b) + \sin^2(a+b) &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} (1 - \cos(2a) + 1 - \cos(2b) + 1 - \cos(2(a+b))) &= 2 \\ \Leftrightarrow \cos(2a) + \cos(2b) + \cos(2(a+b)) &= -1 \\ \Leftrightarrow 2 \cos(a+b) \cos(a-b) + 2 \cos^2(a+b) - 1 &= -1 \\ \Leftrightarrow \cos(a+b) (\cos(a-b) + \cos(a+b)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(a+b) \cos(a) \cos(b) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(a) \cos(b) \cos(c) &= 0. \end{aligned}$$

Comme $a, b, c \in]0, \pi[$, on a

$$\cos(a) \cos(b) \cos(c) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} \text{ ou } b = \frac{\pi}{2} \text{ ou } c = \frac{\pi}{2}.$$

Dès lors l'égalité annoncée est bien correcte.

Exercice 2

Résoudre les équations suivantes (x est l'inconnue réelle). Puis, pour chacune, déterminer les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

(a) $2 \sin(2x) + \cos(2x) = 2 \sin^2(x) + 3 \tan(x)$

(b) $\frac{\tan(x) - \sin(x)}{\tan(x) + \sin(x)} = 2 - 2 \cos(x)$

(c) $\tan^2(x) - 4 \tan(x) + 1 = 0$

Solution

- (a) En raison de la présence de la fonction tangente, l'équation n'est définie que pour les réels x qui n'annulent pas la fonction cosinus, à savoir pour $x \neq \pi/2 + k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}$. Cela étant, on a successivement

$$\begin{aligned} 2 \sin(2x) + \cos(2x) &= 2 \sin^2(x) + 3 \tan(x) \\ \Leftrightarrow 4 \sin(x) \cos(x) + 1 - 2 \sin^2(x) &= 2 \sin^2(x) + 3 \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\ \Leftrightarrow 4 \sin(x) \cos^2(x) + (1 - 4 \sin^2(x)) \cos(x) &= 3 \sin(x) \\ \Leftrightarrow 4 \sin(x) (1 - \sin^2(x)) + (1 - 4 \sin^2(x)) \cos(x) &= 3 \sin(x) \\ \Leftrightarrow \sin(x) - 4 \sin^3(x) + \cos(x) - 4 \sin^2(x) \cos(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(x) + \cos(x) - 4 \sin^2(x) (\sin(x) + \cos(x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\sin(x) + \cos(x)) (1 - 4 \sin^2(x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(x) + \cos(x) = 0 \text{ ou } 4 \sin^2(x) = 1. \end{aligned}$$

Examinons les deux dernières égalités. On a successivement

$$\begin{aligned} \sin(x) + \cos(x) = 0 &\Leftrightarrow \cos(x) = \sin(-x) \\ &\Leftrightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 4 \sin^2(x) = 1 &\Leftrightarrow \sin(x) = \frac{1}{2} \text{ ou } \sin(x) = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc les réels de l'ensemble

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont

$$-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}.$$

- (b) En raison de la présence de la fonction tangente et du dénominateur du premier membre de l'égalité, l'équation n'est définie que pour les réels x tels que

$$\cos(x) \neq 0, \quad \sin(x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \cos(x) \neq -1,$$

c'est-à-dire pour

$$x \neq k\frac{\pi}{2}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par $\cotan(x)$, on a successivement

$$\frac{\tan(x) - \sin(x)}{\tan(x) + \sin(x)} = 2 - 2\cos(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} = 2(1 - \cos(x))$$

$$\Leftrightarrow 1 - \cos(x) = 0 \text{ ou } 1 + \cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = 1 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = 2k\pi \text{ ou } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi.$$

Comme $x \neq k\pi/2, \forall k \in \mathbb{Z}$, les valeurs $x = 2k\pi$ sont à rejeter et dès lors les solutions sont les réels de l'ensemble

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont

$$-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}.$$

- (c) Notons que les solutions cherchées doivent appartenir à $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Cela étant, comme on a

$$\tan^2(x) + 1 = \frac{1}{\cos^2(x)},$$

on obtient successivement

$$\tan^2(x) - 4\tan(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2(x)} - 4\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin(x)\cos(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(2x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 2x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{12} + k\pi.$$

Les solutions sont donc les réels de l'ensemble

$$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{12} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont

$$-\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}.$$

Exercice 3

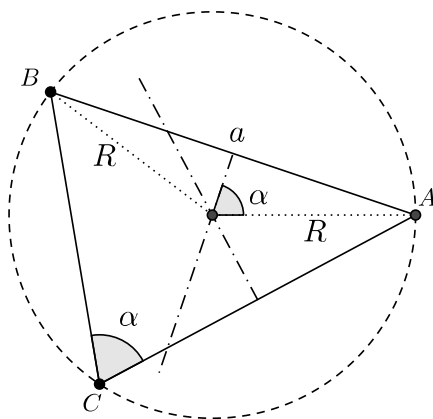
Montrer que le quotient de la mesure d'un côté d'un triangle et du sinus de la mesure de l'angle opposé est égal au diamètre du cercle circonscrit au triangle. On en déduit bien sûr que ce quotient est toujours le même quel que soit le côté choisi au départ.

Solution

Notons a la longueur d'un côté du triangle et α la mesure de l'angle opposé à ce côté. Sachant que la mesure de l'angle « au centre » vaut deux fois celle de l'angle inscrit qui intercepte le même arc et que le centre du cercle circonscrit à un triangle est le point d'intersection des médiatrices de ce triangle, on a

$$\frac{a}{2} = R \sin(\alpha)$$

où R désigne la longueur du rayon du cercle. On peut donc conclure.



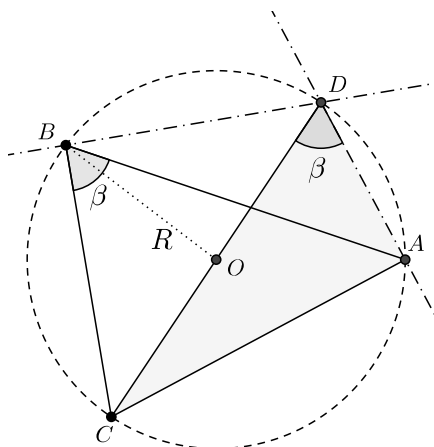
Voici une autre façon de prouver cette propriété.

Soit le triangle ABC et soit β la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$. Par A , on trace la droite orthogonale au segment $[CA]$ et par B celle orthogonale au segment $[CB]$; on note D leur point d'intersection. Le triangle CBD étant rectangle en B , le milieu O de l'hypoténuse est le centre du cercle passant par C , D et B ; notons R la longueur du rayon de ce cercle. De même, le triangle CAD est rectangle en A et a la même hypoténuse que le triangle CBD . Le point O est donc également le centre du cercle passant par C , D et A . Ainsi,

les points A, B, C, D sont sur le même cercle. Cela étant, la mesure de l'angle $\widehat{CDA}$ est β puisque les angles $\widehat{CBA}$ et $\widehat{CDA}$ interceptent le même arc. Il s'ensuit que, dans le triangle rectangle CDA , on a

$$\overline{CA} = 2R \sin(\beta)$$

et on peut donc conclure.



Exercice 4. Le nombre d'or Φ et les grandeurs associées

Pour l'introduction du nombre d'or, voir l'exercice 3 de la sous-section 4.3 de ce chapitre.

On appelle « triangle d'or » (resp. « gnomon d'or »¹) un triangle isocèle dont le rapport entre la mesure commune à deux côtés et la mesure du troisième côté est égal au nombre d'or (resp. à son inverse). Si L et l désignent respectivement ces mesures, on a donc $L/l = \Phi$ (resp. $L/l = 1/\Phi$) avec $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

1. Soit un triangle isocèle dont les mesures des angles sont notées β, α, α . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
 - (a) le triangle est un triangle d'or
 - (b) $\alpha = 2\beta$
 - (c) $2 \cos(\alpha) = 1/\Phi$ et $2 \cos(\beta) = \Phi$
 - (d) $\beta = \pi/5$ et $\alpha = 2\pi/5$
2. Soit un triangle isocèle dont les mesures des angles sont notées δ, γ, γ . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Le gnomon d'or est encore appelé « triangle d'argent ».

- (a) le triangle est un gnomon d'or
- (b) $\delta = 3\gamma$
- (c) $2 \cos(\gamma) = \Phi$ et $2 \cos(\delta) = 1 - \Phi$
- (d) $\gamma = \pi/5$, $\delta = 3\pi/5$

3. Montrer que dans un pentagone régulier, le rapport entre la mesure de la longueur d'une diagonale et de celle d'un côté est égal au nombre d'or.

Solution

Commençons par établir quelques relations vérifiées dans un triangle isocèle. Désignons par l, L, L les mesures des côtés et par a_2, a_1, a_1 les mesures des angles respectivement opposés à ces côtés. Cela étant, comme on a $\pi = 2a_1 + a_2$ on obtient

$$\frac{\sin(a_1)}{L} = \frac{\sin(a_2)}{l} = \frac{2 \sin(a_1) \cos(a_1)}{l},$$

donc

$$2 \cos(a_1) = \frac{l}{L}$$

et

$$\cos(a_2) = -\cos(2a_1) = 1 - 2 \cos^2(a_1) = 1 - \frac{l^2}{2L^2}.$$

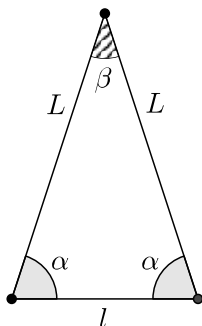
Comme $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, on a $\Phi^2 = \Phi + 1$, donc

$$\Phi^3 = 2\Phi + 1 \quad \text{et} \quad \Phi = 2 - \frac{1}{\Phi^2}$$

puisque $\Phi^3 = 2\Phi + 1 = 2(\Phi + 1) - 1 = 2\Phi^2 - 1$.

Dans les points (c) des deux premiers items, il suffit donc de trouver la valeur de $\cos(\alpha)$ et de $\cos(\gamma)$.

1. Visualisons la situation.



Cela étant, l'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (d) est claire car puisque $2\alpha + \beta = \pi$, on a

$$\alpha = 2\beta \quad \Leftrightarrow \quad 5\beta = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{5} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{2\pi}{5}.$$

Par ailleurs, l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (c) est claire aussi d'après le préambule car le triangle est d'or si et seulement si $L/l = \Phi$.

Montrons à présent l'équivalence entre (a) et (b), c'est-à-dire que le triangle est d'or si et seulement si $\alpha = 2\beta$.

Notons tout d'abord que l'on peut supposer dès le départ que $\alpha, \beta \in]0, \pi/2[$ car si le triangle est d'or alors $0 < \beta < \alpha < \pi/2$ et si $\alpha = 2\beta$ alors bien sûr $\alpha, \beta \in]0, \pi/2[$ car $2\alpha + \beta = \pi$.

Cela étant, comme $\beta = \pi - 2\alpha$, on a

$$\begin{aligned}\alpha = 2\beta &\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \cos(2\beta) = 2\cos^2(\beta) - 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(\alpha) = 2\left(-2\cos^2(\alpha) + 1\right)^2 - 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(\alpha) = 8\cos^4(\alpha) - 8\cos^2(\alpha) + 1.\end{aligned}$$

Posons $x = \cos(\alpha)$ et factorisons le polynôme

$$x \mapsto 8x^4 - 8x^2 + 1 - x.$$

Comme ce polynôme s'annule en $x = 1$, il est divisible par $x \mapsto x - 1$; faisons donc d'abord apparaître ce facteur puis poursuivons. On a successivement¹

$$\begin{aligned}8x^4 - 8x^2 - x + 1 &= 8x^2(x^2 - 1) - (x - 1) \\ &= (x - 1)(8x^2(x + 1) - 1) \\ &= (x - 1)(8x^3 + 8x^2 - 1) \\ &= (x - 1)(8x^3 + 4x^2 + 4x^2 - 1) \\ &= (x - 1)\left(4x^2(2x + 1) + (2x + 1)(2x - 1)\right) \\ &= (x - 1)(2x + 1)(4x^2 + 2x - 1) \\ &= 4(x - 1)(2x + 1)\left(x + \frac{\Phi}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2\Phi}\right).\end{aligned}$$

Comme $\alpha \in]0, \pi/2[$, $\cos(\alpha) > 0$; on obtient dès lors

$$\begin{aligned}\alpha = 2\beta &\Leftrightarrow \cos(\alpha) = 8\cos^4(\alpha) - 8\cos^2(\alpha) + 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{2\Phi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque, d'après le préambule,

$$\frac{l}{L} = 2\cos(\alpha),$$

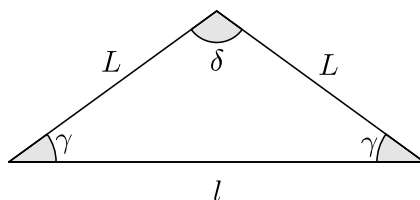
on obtient finalement

$$\alpha = 2\beta \Leftrightarrow \frac{1}{\Phi} = 2\cos(\alpha) = \frac{l}{L},$$

c'est-à-dire que le triangle est d'or si et seulement si $\alpha = 2\beta$.

1. On pourrait procéder d'une autre manière si, au départ, on voyait que le polynôme est aussi divisible par $x + 1/2$.

2. Visualisons la situation.



Cela étant, l'équivalence (b) $\Leftrightarrow$ (d) est claire car puisque $2\gamma + \delta = \pi$, on a

$$\delta = 3\gamma \quad \Leftrightarrow \quad 5\gamma = \pi \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{\pi}{5} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{3\pi}{5}.$$

Par ailleurs, l'équivalence (a) $\Leftrightarrow$ (c) est claire aussi vu le préambule car le triangle est un gnomon d'or si et seulement si $l/L = \Phi$.

Montrons à présent l'équivalence entre (a) et (b), c'est-à-dire que le triangle est un gnomon d'or si et seulement si $\delta = 3\gamma$.

En fait, on y arrive facilement vu l'exercice sur les triangles d'or. De fait, d'une part, si $\delta = 3\gamma$, alors

$$2\gamma + \delta = \pi \quad \text{donc} \quad \gamma = \frac{\pi}{5}$$

et dès lors

$$\frac{l}{L} = 2 \cos(\gamma) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \Phi.$$

D'autre part, si le triangle est un gnomon d'or, alors

$$\frac{l}{L} = \Phi = 2 \cos(\gamma),$$

donc

$$\gamma = \frac{\pi}{5}, \quad \delta = \pi - 2\gamma = \frac{3\pi}{5} = 3\gamma.$$

On peut aussi procéder directement à partir d'une factorisation de polynôme. Comme

$$\delta = \pi - 2\gamma \quad \text{et} \quad \cos(3\gamma) = 4 \cos^3(\gamma) - 3 \cos(\gamma),$$

on a

$$\begin{aligned} \delta = 3\gamma &\Leftrightarrow \cos(\pi - 2\gamma) = 4 \cos^3(\gamma) - 3 \cos(\gamma) \\ &\Leftrightarrow -2 \cos^2(\gamma) + 1 = 4 \cos^3(\gamma) - 3 \cos(\gamma) \\ &\Leftrightarrow 4 \cos^3(\gamma) + 2 \cos^2(\gamma) - 3 \cos(\gamma) - 1 = 0. \end{aligned}$$

On considère ensuite le polynôme

$$x \mapsto 4x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$

qui se factorise sous la forme

$$4x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = 4(x+1)\left(x - \frac{\Phi}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2\Phi}\right).$$

3. Montrons que le rapport entre la mesure de la longueur d'une diagonale et de celle d'un côté est égal au nombre d'or.

Nous présentons ici deux méthodes.

Désignons par A, B, C, D, E les sommets d'un pentagone régulier convexe. Soient aussi respectivement l et L les mesures des côtés et des diagonales.

Méthode 1

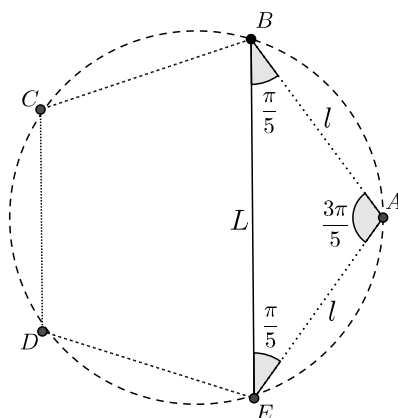
Dans le triangle isocèle BAE , les mesures des angles¹ sont égales à

$$\frac{3\pi}{5}, \quad \frac{\pi - (3\pi/5)}{2} = \frac{\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{5}.$$

Il s'agit donc d'un gnomon d'or, c'est-à-dire que l'on a

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{\Phi} \Leftrightarrow L = l\Phi$$

d'après ce qui précède. On peut donc conclure.



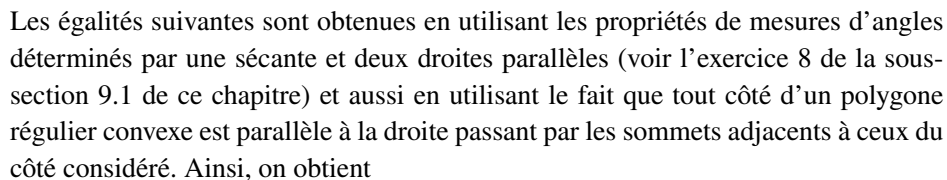
Méthode 2

Soit I l'intersection des diagonales AD et BE .

(a) Montrons tout d'abord que le triangle ABI est isocèle.

Soient α et γ respectivement les mesures des angles $\widehat{IAB}$ et $\widehat{AIB}$. Traçons aussi la diagonale CE .

1. Voir l'exercice 8 de la sous-section 9.1 de ce chapitre (propriétés des polygones convexes).



Comme les mesures des côtés $[EC]$ et $[EB]$ du triangle BEC sont égales, ce triangle est isocèle ; il s'ensuit que

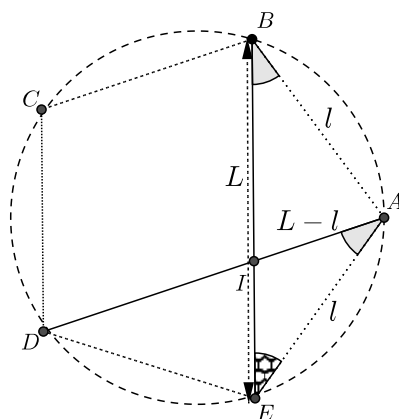
et on conclut.

(b) Cela étant, comme les triangles EAB et EAD sont égaux, les mesures des angles sont égales ; il s'ensuit que les triangles EIA et EAB ont des angles de même mesure ; ils sont donc semblables et on obtient

En posant $x = L/l$, on obtient donc

La seule solution positive de cette équation est

c'est-à-dire le nombre d'or.



Exercice 5. Construction d'un pentagone régulier

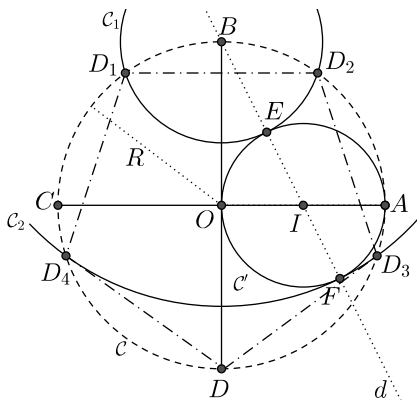
À partir de la règle et du compas, construire un pentagone régulier.



Solution

On trace un cercle C de centre O et de rayon R , puis deux diamètres orthogonaux $[AC]$ et $[BD]$. On trace ensuite le cercle C' de centre I , milieu de $[OA]$ et de rayon $R/2$, puis la droite d passant par B et I . La droite d coupe le cercle C' en deux points ; désignons ces points par E et F , en considérant que la distance entre B et E est inférieure à celle entre B et F .

Soient alors C_1 et C_2 les cercles de centre B et de rayon égal à la distance entre B et E pour C_1 et égal à la distance entre B et F pour C_2 . Ceux-ci coupent le cercle C respectivement en D_1, D_2 et D_3, D_4 (voir la figure).



Montrons que le polygone de sommets D_1, D_2, D_3, D, D_4 est un pentagone régulier. Comme le pentagone est inscrit dans un cercle, il suffit de prouver que ses côtés sont de même mesure ou, ce qui revient au même, que les angles au centre qui interceptent les arcs définis par les sommets sont tous de même mesure (voir l'exercice 8 de la sous-section 9.1 de ce chapitre).

Par construction on a

$$(\overline{BI})^2 = R^2 + \frac{R^2}{4} = \frac{5R^2}{4} \quad \text{et} \quad \overline{EI} = \frac{R}{2};$$

dès lors

$$\overline{BE} = \overline{BI} - \frac{R}{2} = R \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) = \frac{R}{\Phi}$$

et

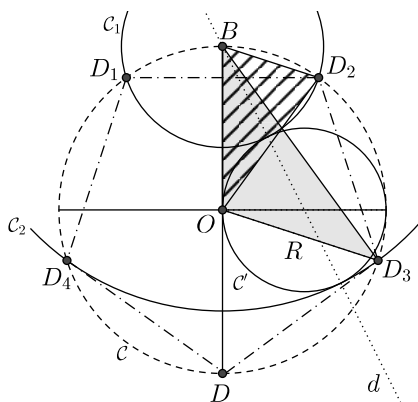
$$\overline{BF} = \overline{BI} + \frac{R}{2} = R \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) = R\Phi.$$

Les triangles isocèles BOD_2 et BOD_3 ont donc des côtés de mesures respectivement égales à

$$R, R, \frac{R}{\Phi} \quad \text{et} \quad R, R, R\Phi;$$

il s'ensuit que BOD_2 est un triangle d'or et BOD_3 un gnomon d'or. Les mesures de leurs angles sont donc respectivement (voir l'exercice 4 de la sous-section 8.3 de ce chapitre)

$$\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{5} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}.$$



Il s'ensuit que

$$mes\left(\widehat{D_2OD_3}\right) = \frac{3\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \quad \text{et} \quad mes\left(\widehat{D_3OD}\right) = \pi - \frac{3\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}.$$

La symétrie de la construction donne

$$mes\left(\widehat{D_2OD_1}\right)=\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{5}=\frac{2\pi}{5}$$

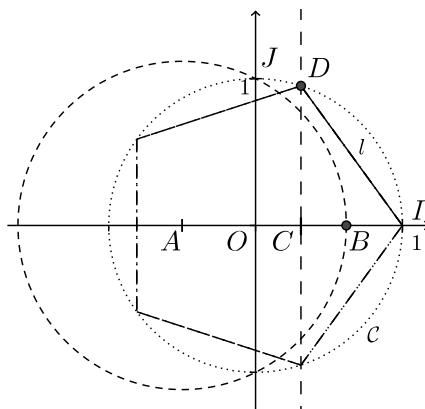
et

$$mes\left(\widehat{D_1OD_4}\right) = mes\left(\widehat{D_2OD_3}\right) = \frac{2\pi}{5}, \quad \left(\widehat{D_4OD}\right) = mes\left(\widehat{DOD_3}\right) = \frac{2\pi}{5};$$

d'où la conclusion.

Voici une autre méthode.

On trace un cercle C de centre O , de mesure de rayon égale à R et deux diamètres orthogonaux. On désigne par I et J deux points d'intersection de ces diamètres avec C (voir la figure). On trace ensuite le cercle passant par J et centré en A , point de la droite OI situé du côté opposé à I par rapport à O à une distance $R/2$ de O . Ce cercle coupe la droite OI en deux points car $\overline{AJ} = \sqrt{R^2 + R^2/4} = R\sqrt{5}/2 < 3R/2$; on note B celui qui est situé sur le segment $[OI]$. Par le point C , milieu du segment $[OB]$, on trace alors la droite parallèle à OJ et on note D un des points d'intersection de celle-ci et de C . À l'aide du compas, on reporte alors la longueur l du segment $[DI]$ sur le cercle C . Montrons que cette construction aboutit à un pentagone régulier. Comme la figure construite est inscrite dans un cercle et a ses côtés de même mesure, il suffit de montrer que $5l$ vaut le périmètre d'un pentagone régulier.



On commence par calculer l . Par construction, on obtient les relations suivantes

$$l^2 = \overline{DI}^2 = \overline{DC}^2 + \overline{CI}^2 = \overline{DC}^2 + (R - \overline{OC})^2 \quad \text{et} \quad \overline{DC}^2 = R^2 - \overline{OC}^2 ;$$

dès lors

$$l^2 = R^2 - \overline{OC}^2 + (R - \overline{OC})^2 = 2R(R - \overline{OC})$$

et il ne reste plus qu'à obtenir la longueur $\overline{OC}$.

D'après la construction, comme on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AJ}^2 = \frac{5R^2}{4},$$

on obtient

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OB}}{2} = \frac{1}{2} \left(\overline{AB} - \frac{R}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{AJ} - \frac{R}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{5}R}{2} - \frac{R}{2} \right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} R,$$

donc

$$l^2 = 2R(R - \overline{OC}) = \frac{5-\sqrt{5}}{2} R^2.$$

Cela étant, dans un polygone convexe régulier ayant n côtés, si x désigne la mesure de l'angle au centre et R le rayon du cercle dans lequel ce polygone est inscrit, le périmètre est donné par

$$2n \sin \left(\frac{\pi}{n} \right) R.$$

Pour terminer, on doit donc montrer que

$$5\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = 10 \sin \left(\frac{\pi}{5} \right),$$

c'est-à-dire

$$\sin^2 \left(\frac{\pi}{5} \right) = \frac{5-\sqrt{5}}{8}.$$

On peut faire cela de la manière suivante. La trigonométrie donne

$$\sin(5x) = \sin(x) \left(16 \sin^4(x) - 20 \sin^2(x) + 5 \right).$$

Ainsi, on obtient

$$0 = \sin(\pi) = \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \left(16 \sin^4\left(\frac{\pi}{5}\right) - 20 \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + 5 \right);$$

notons aussi que comme $\pi/6 < \pi/5 < \pi/4$, on a

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right].$$

Cela étant, on a

$$16Y^2 - 20Y + 5 = 16\left(Y - \frac{5 + \sqrt{5}}{8}\right)\left(Y - \frac{5 - \sqrt{5}}{8}\right)$$

et

$$\frac{5 + \sqrt{5}}{8} > \frac{1}{2}, \quad \frac{5 - \sqrt{5}}{8} \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right].$$

Dès lors

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

et on conclut.

Exercice 6

Montrer que

$$2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

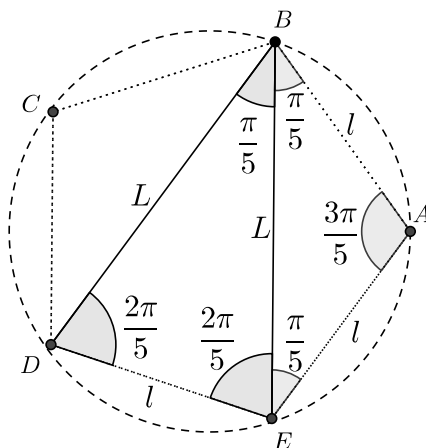
Solution

Nous présentons ici plusieurs méthodes (qui ne sont sans doute pas exhaustives).

Méthode utilisant le pentagone régulier

Dans un pentagone régulier convexe, la mesure de chaque angle est égale à $3\pi/5$ (voir l'exercice 8 de la sous-section 9.1 de ce chapitre). Les mesures des angles du triangle isocèle BAE sont donc égales à $3\pi/5$ et $\pi/5$ et par conséquent celles du triangle d'or EBD sont égales à $(3\pi/5) - (\pi/5) = 2\pi/5$ et $\pi/5$. Ainsi, on a

$$\frac{l}{2} = L \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \quad \text{donc} \quad 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{l}{L} = \frac{1}{\Phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$



Méthode utilisant la technique « polynomiale » utilisée pour les triangle et gnomon d'or (voir l'exercice 4 de la sous-section 8.3 de ce chapitre).

Si on utilise le résultat directement, alors c'est immédiat d'après les équivalences prouvées.

Cependant, on peut noter que ceci peut se faire directement avec la trigonométrie (qui se trouve d'ailleurs dans la résolution concernant les triangle et gnomon d'or).

L'idée est de considérer deux réels $r, s \in]0, \pi[$ vérifiant $2r + s = \pi$ (voir les mesures des angles dans les triangles isocèles) et à caractériser quand on a $r = 2s$ ou $s = 3r$.

Méthode utilisant la factorisation d'un polynôme de degré 4

Dans l'exercice précédent où sont présentées deux méthodes permettant de construire un pentagone régulier, on montre que

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

en se servant de la factorisation d'un polynôme de degré 4. On obtient alors directement

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - \frac{5 - \sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Méthode utilisant les nombres complexes

Ici, nous renvoyons à un exercice de la sous-section consacrée aux nombres complexes (voir l'exercice 3 de la sous-section 10.3 de ce chapitre).

Exercice 7

Les fonctions D_n ($n \in \mathbb{N}$) suivantes, appelées « noyau de Dirichlet¹ » sont très célèbres en analyse du signal, plus précisément dans la théorie des séries trigonométriques de Fourier². Elles sont définies par

$$D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}, \quad x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que l'on a

$$D_n\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx)$$

quel que soit le réel x qui n'est pas un multiple entier de π et quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$.

Solution

Montrons ces égalités par récurrence.

Pour $n = 1$, on a bien l'égalité annoncée car

$$\begin{aligned} \frac{\sin(3x/2)}{\sin(x/2)} &= \frac{\sin(x) \cos(x/2) + \cos(x) \sin(x/2)}{\sin(x/2)} \\ &= 2 \cos^2(x/2) + \cos(x) \\ &= 1 + 2 \cos(x). \end{aligned}$$

Supposons donc que l'égalité soit vraie pour le naturel n et démontrons qu'elle reste valable pour $n + 1$. On a successivement

$$\begin{aligned} &\frac{\sin((2n+3)x/2)}{\sin(x/2)} \\ &= \frac{\sin((2n+1)x/2) \cos(x) + \cos((2n+1)x/2) \sin(x)}{\sin(x/2)} \\ &= \frac{\sin((2n+1)x/2) (1 - 2 \sin^2(x/2)) + 2 \cos((2n+1)x/2) \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin(x/2)} \\ &= D_n\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \sin((2n+1)x/2) \sin(x/2) + 2 \cos((2n+1)x/2) \cos(x/2) \\ &= D_n\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \cos((n+1)x) \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) + 2 \cos((n+1)x) \\ &= 1 + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \cos(kx); \end{aligned}$$

on peut donc conclure.

1. Voir l'annexe.
2. Voir l'annexe.

9 Calcul vectoriel, droites dans le plan, un peu de géométrie plane

9.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé.

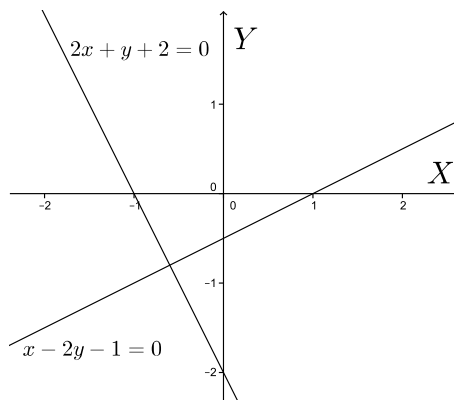
1. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par le point de coordonnées $(1, 0)$ et orthogonale à la droite d d'équation $2x + y + 2 = 0$. Représenter graphiquement ces deux droites.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 passant par les points de coordonnées $(2, 3)$ et $(1, 2)$ ainsi qu'une équation cartésienne de la droite d_2 passant par $(2, 3)$ et $(2, 0)$. Représenter graphiquement ces deux droites.
3. Déterminer une équation cartésienne de la droite parallèle à la droite d' d'équation $x = 2y - 1$ et passant par le point de coordonnées $(-1, 1)$. Représenter graphiquement ces deux droites.

Solution

1. Puisque $2x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = -2x - 2$, le coefficient angulaire de d est égal à -2 . Celui de la droite demandée est donc égal à $1/2$ et une équation cartésienne est $y - 0 = (x - 1)/2$ ou encore

$$x - 2y - 1 = 0.$$

La représentation graphique est la suivante.



2. Un vecteur directeur de d_1 a pour composantes les différences des coordonnées des deux points donnés, à savoir $(2 - 1, 3 - 2) = (1, 1)$. Une équation cartésienne est donc

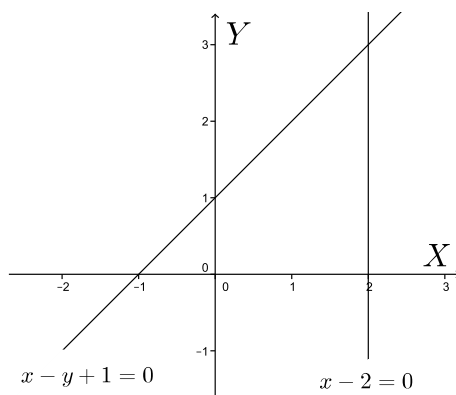
$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{1}$$

ou encore

$$x - y + 1 = 0.$$

Comme d_2 passe par deux points distincts ayant la même abscisse, elle est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation cartésienne

$$x - 2 = 0.$$

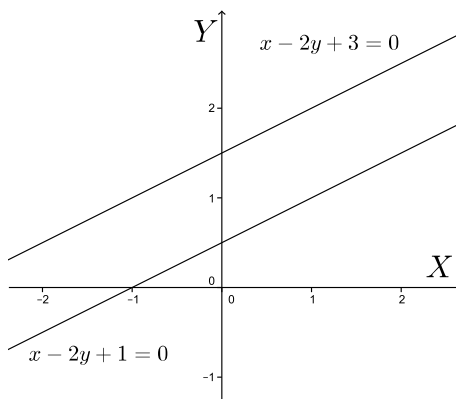


3. Comme la droite dont on demande une équation est parallèle à d' , elle a le même coefficient angulaire que d' et une équation est donc de la forme

$$x = 2y + m$$

où m peut être déterminé en exprimant que le point de coordonnées $(-1, 1)$ est sur cette droite. On obtient donc la relation $-1 = 2 + m$, ce qui donne $m = -3$ et finalement une équation est $x = 2y - 3$ ou encore

$$x - 2y + 3 = 0.$$



Exercice 2

On donne un repère orthonormé et on considère la droite d'équation cartésienne $2x + y + 2 = 0$.

1. Déterminer les composantes d'un vecteur directeur de cette droite.
2. Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point de cette droite.
3. Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.
4. La droite donnée passe par le point de coordonnées $(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2} - 2)$; à quelle valeur du paramètre correspond ce point ?

Solution

1. L'équation de la droite peut se mettre sous la forme

$$\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-2} ;$$

un vecteur directeur de cette droite a donc pour composantes $(1, -2)$.

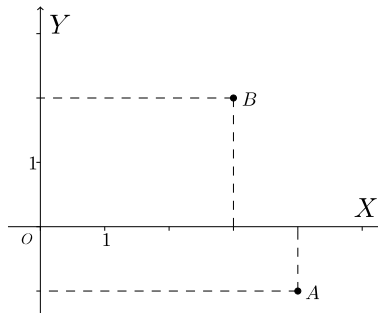
2. En prenant par exemple $y = 0$ pour ordonnée, on trouve l'abscisse $x = -1$. Ainsi le point de coordonnées $(-1, 0)$ est sur cette droite.
3. Vu les deux points précédents, on peut immédiatement donner des équations paramétriques, à savoir

$$\begin{cases} x = -1 + r \\ y = 0 - 2r = -2r \end{cases}, r \in \mathbb{R}.$$

4. Vu les équations paramétriques données au point précédent, ce point correspond à $r = 1 - \sqrt{2}$.

Exercice 3

1. Quelles sont les composantes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ dans la base correspondant au repère orthonormé ci-dessous ?
2. Déterminer les composantes de $\overrightarrow{AB}$ dans la même base.

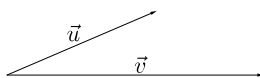


Solution

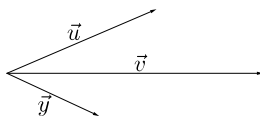
1. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ont respectivement pour composantes les coordonnées des points A et B , à savoir $(4, -1)$ et $(3, 2)$.
2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes les différences entre les coordonnées des points B et A , c'est-à-dire $(3 - 4, 2 + 1) = (-1, 3)$.

Exercice 4

Soit la base du plan définie par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



1. Soient $\vec{x} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ et $\vec{x}' = 2\vec{x} - \vec{u}$. Déterminer les composantes de $\vec{x}$ et de $\vec{x}'$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}$.
2. Représenter $\vec{x}$ dans la base donnée.
3. On considère le vecteur $\vec{y}$. Le décomposer comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis en déterminer les composantes dans cette base.



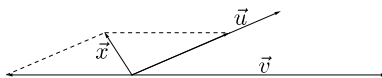
Solution

1. Comme

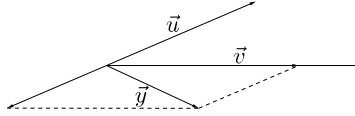
$$\vec{x} = \frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{x}' = 2\vec{x} - \vec{u} = \frac{4}{3}\vec{u} - \vec{v} - \vec{u} = \frac{1}{3}\vec{u} - \vec{v},$$

les composantes de $\vec{x}$ sont $(2/3, -1/2)$ et celles de $\vec{x}'$ sont $(1/3, -1)$.

2. Voici la représentation demandée.



3. Les côtés du parallélogramme ayant servi à décomposer le vecteur $\vec{y}$ ont des longueurs de mesure égale à $2/3$ de la longueur de $\vec{u}$ et $3/4$ de la longueur de $\vec{v}$. Dans ce cas, les composantes de $\vec{y}$ dans la base $\vec{u}, \vec{v}$ sont $(-2/3, 3/4)$.



Exercice 5

On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$, et on donne les vecteurs

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2, \quad \vec{y} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_3.$$

Les composantes demandées ci-dessous sont à considérer dans la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

1. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ et le produit vectoriel $\vec{y} \wedge \vec{x}$.
2. Déterminer les composantes des vecteurs suivants.

$$\vec{z} = 2\vec{y} - \vec{y} \wedge \vec{x}, \quad \vec{w} = (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{x}, \quad \vec{t} = \vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{x})$$

3. Déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur $\vec{x}$ sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

Solution

1. Dans la base orthonormée donnée, les composantes des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont respectivement

$$\left(\frac{1}{2}, 2, 0\right) \quad \text{et} \quad (1, 1, -1).$$

Leur produit scalaire est donc égal à

$$\frac{1}{2} + 2 + 0 = \frac{5}{2}$$

et leur produit vectoriel

$$\vec{y} \wedge \vec{x} = (0 + 2)\vec{u}_1 + \left(-\frac{1}{2} - 0\right)\vec{u}_2 + \left(2 - \frac{1}{2}\right)\vec{u}_3 = 2\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{3}{2}\vec{u}_3.$$

2. Les composantes de $2\vec{y}$ et de $\vec{y} \wedge \vec{x}$ sont respectivement

$$(2, 2, -2) \quad \text{et} \quad \left(2, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right);$$

dès lors celles de $\vec{z}$ sont

$$\left(2 - 2, 2 + \frac{1}{2}, -2 - \frac{3}{2}\right) = \left(0, \frac{5}{2}, -\frac{7}{2}\right).$$

Étant donné les composantes de $\vec{x}$ et de $\vec{y}$, leur produit scalaire est égal à $(1/2) + 2 = 5/2$. Les composantes de $\vec{w}$ sont donc égales à celles de $\vec{x}$ multipliées par $5/2$, à savoir

$$\left(\frac{5}{4}, 5, 0\right).$$

Vu la première partie de cet exercice, les composantes du produit vectoriel $\vec{y} \wedge \vec{x}$ sont $(2, -1/2, 3/2)$. Les composantes de $\vec{t} = \vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{x})$ sont donc

$$\left(3, -\frac{3}{4}, -\frac{17}{4}\right).$$

3. La projection orthogonale dont il est question est le vecteur

$$\frac{\vec{x} \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)}{\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\|^2} (\vec{u}_1 + \vec{u}_2).$$

Les composantes de ce vecteur dans la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ sont donc

$$\frac{\vec{x} \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2)}{\|\vec{u}_1 + \vec{u}_2\|^2} (1, 1, 0) = \frac{5/2}{2} (1, 1, 0) = \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, 0\right).$$

Exercice 6

On se place dans l'espace et on considère des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ avec $\vec{x} \neq \vec{0}$. On définit alors $\vec{y}^*$ par

$$\vec{y}^* = \vec{y} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x}.$$

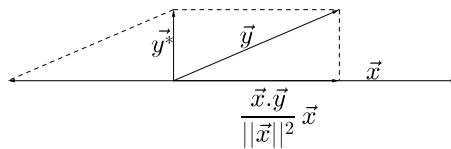
Montrer que $\vec{y}^*$ et $\vec{x}$ sont orthogonaux et illustrer graphiquement ce fait.

Solution

Les vecteurs sont effectivement orthogonaux car

$$\vec{y}^* \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{x} - \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\|^2} \vec{x} \cdot \vec{x} = \vec{y} \cdot \vec{x} - \vec{y} \cdot \vec{x} = 0.$$

En fait, $\vec{y}^*$ est obtenu en retirant au vecteur $\vec{y}$ sa projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par $\vec{x}$.



Exercice 7

On se place dans l'espace et on considère des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$. S'ils sont orthogonaux, montrer que

$$\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 \vec{y}.$$

Solution

Si l'un des deux vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$ est nul, il est clair que l'égalité est vraie car chaque membre de celle-ci est en fait le vecteur nul.

Cela étant, supposons maintenant qu'aucun des deux vecteurs ne soit nul. D'une part, par définition du produit vectoriel, le vecteur $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{x})$ est orthogonal à $\vec{y} \wedge \vec{x}$. Il s'ensuit que c'est une combinaison linéaire de $\vec{x}$ et $\vec{y}$. Par ailleurs, toujours par définition du produit vectoriel, il est orthogonal à $\vec{x}$. Il s'ensuit que c'est un multiple de $\vec{y}$. Il existe donc un réel r tel que

$$\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{x}) = r\vec{y}.$$

Comme

$$\|\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{x})\| = \|\vec{x}\| \|\vec{y} \wedge \vec{x}\| \sin(\pi/2) = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|$$

puisque $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont orthogonaux, et comme

$$\|r\vec{y}\| = |r| \|\vec{y}\|$$

on obtient

$$r = -\|\vec{x}\|^2 \quad \text{ou} \quad r = \|\vec{x}\|^2.$$

En utilisant l'orientation de l'espace, on obtient que r est positif ; ainsi, finalement

$$\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 \vec{y}.$$

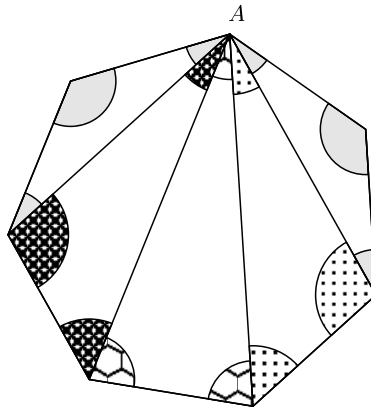
Exercice 8. Quelques propriétés des polygones convexes

Rappelons que, par définition, un polygone convexe est régulier si ses côtés ont même mesure et s'il est inscriptible dans un cercle. Cela étant, montrer que

1. la somme des mesures des angles d'un polygone convexe de n côtés est égale à $(n - 2)\pi$.
2. un polygone convexe dont les côtés sont de même mesure est inscriptible dans un cercle si et seulement si tous ses angles sont de même mesure.
3. un quadrilatère convexe est inscriptible dans un cercle si et seulement si la somme des mesures de ses angles opposés est égale à π .
4. dans un polygone régulier convexe, un côté est toujours parallèle à la diagonale passant par les sommets adjacents à ceux du côté considéré.

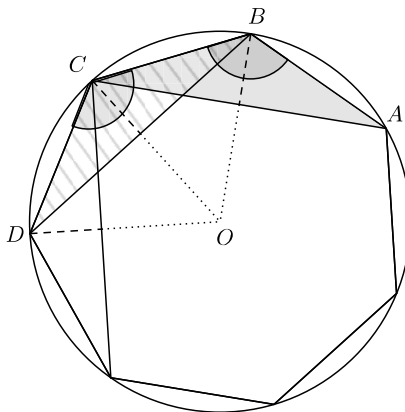
Solution

1. Un polygone convexe de n côtés possède n sommets. À partir de l'un de ses sommets, noté A , on trace toutes ses diagonales (segments de droite joignant deux sommets non consécutifs) pour diviser le polygone en triangles. On trace ainsi $(n - 3)$ diagonales qui divisent le polygone en $(n - 2)$ triangles. Ainsi, la somme des mesures des angles du polygone est égale à la somme des mesures des angles des triangles, c'est-à-dire $(n - 2)\pi$.

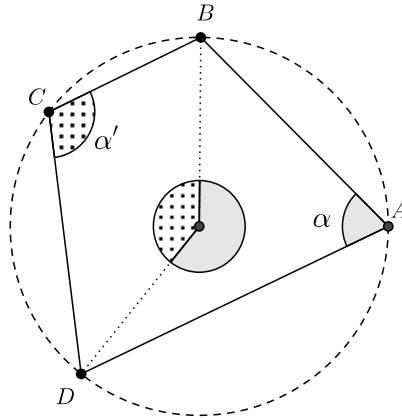


2. Si le polygone convexe dont les côtés sont de même mesure est inscriptible dans un cercle, alors le centre du cercle et deux sommets consécutifs forment un triangle et ce triangle a les mêmes mesures quels que soient les sommets choisis au départ. En prenant trois sommets consécutifs, on forme ainsi un angle du polygone et l'égalité des triangles donne l'égalité des mesures des angles du polygone.

Réciproquement, supposons que le polygone convexe possède des côtés de même mesure et des angles de même mesure. Les triangles formés par trois sommets consécutifs sont donc isocèles et ils sont tous égaux. L'intersection des médiatrices issues du sommet qui est l'intersection des deux côtés de même mesure pour deux triangles consécutifs est le centre du cercle cherché comme on le voit par exemple en répétant la construction de proche en proche.

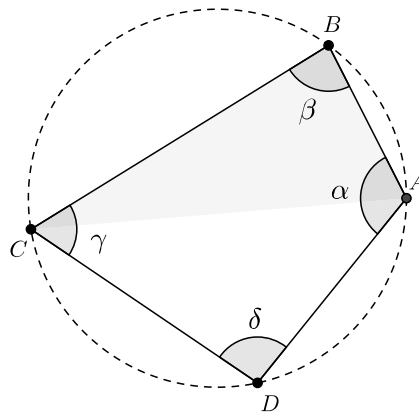


3. Notons α, α' deux angles opposés du quadrilatère inscrit. La somme de leurs mesures est égale à la moitié de la somme des mesures des angles au centre qui interceptent le même arc que α, α' . Comme la somme des mesures des deux angles au centre est égale à 2π , on conclut.

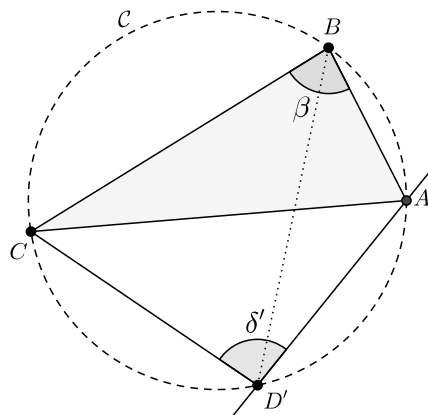


Montrons la réciproque. Soit un quadrilatère $ABCD$; notons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les mesures des angles correspondants. Par hypothèse on a donc

$$\alpha + \gamma = \pi = \beta + \delta.$$



Considérons alors le cercle C circonscrit au triangle ABC .



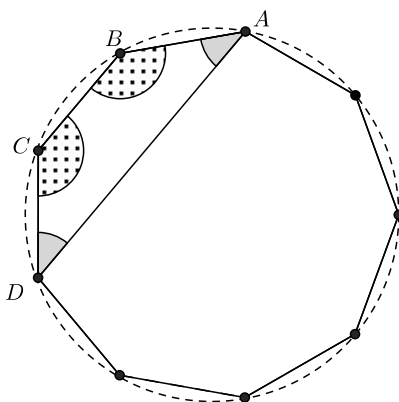
Notons D' le point d'intersection du cercle et de la droite passant par A et D et montrons que $D = D'$. Puisque les points A, B, C, D' sont les sommets d'un quadrilatère inscrit, on a

$$\beta + \delta' = \pi,$$

donc l'hypothèse $\beta + \delta = \pi$ entraîne $\delta = \delta'$ donc nécessairement aussi $D = D'$.

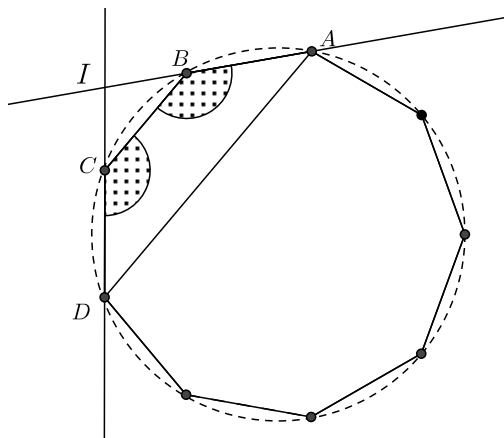
4. Désignons par A, B, C, D des sommets consécutifs d'un polygone régulier convexe ; considérons le côté $[BC]$ et la diagonale $[AD]$. Prouvons que les droites BC et AD sont parallèles.

Le quadrilatère convexe $ABCD$ est inscrit à un cercle ; ses angles opposés sont donc supplémentaires. Comme les angles du polygone ont tous même mesure, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{DCB}$ ont également même mesure. Dès lors, les angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{CDA}$ ont aussi même mesure. Ainsi, le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze isocèle et les droites BC et AD sont parallèles.



On peut aussi prouver cette propriété de la façon suivante. Soit I le point d'intersection des droites AB et CD . Comme les mesures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont égales, le triangle BIC est isocèle. Comme les segments $[AB]$ et $[CD]$ sont de même longueur, le théorème de Thalès¹ (réciproque) implique le parallélisme entre les segments $[BC]$ et $[AD]$.

1. Voir l'annexe.



9.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

On se place dans le plan muni d'un repère orthomormé.

Soient les points $A(0, 4)$, $B(-3, 1)$ et $C(4, -1)$.

- Déterminer les coordonnées cartésiennes du point M , centre du cercle circonscrit au triangle ABC (point d'intersection des médiatrices du triangle).
- Déterminer les coordonnées cartésiennes du point G , centre de gravité du triangle ABC (point d'intersection des médianes du triangle).
- Déterminer les coordonnées cartésiennes du point H , orthocentre du triangle ABC (point d'intersection des hauteurs du triangle).
- Vérifier que ces trois points sont alignés¹.

Exercice 2

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé et on considère la droite d'équation cartésienne $2y = 3x + 4$.

- Déterminer les composantes d'un vecteur directeur de cette droite.
- Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point de cette droite.
- Déterminer des équations paramétriques cartésiennes de cette droite.
- La droite passe par le point de coordonnées $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3} + 2)$; à quelle valeur du paramètre correspond ce point ?

Exercice 3

On fixe une base orthonormée de l'espace, notée $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.

- Si $\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$, quelles sont les composantes de $\vec{a}$ dans cette base ?

1. La droite passant par ces 3 points porte le nom de droite d'Euler (voir l'annexe).

- (b) Si $\vec{b} = -\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$, quelles sont les composantes de $\vec{b}$ dans cette base ?
- (c) Déterminer le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
- (d) Déterminer le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$.
- (e) Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{x} = 2\vec{b} - \vec{b} \wedge 3\vec{a}$, $\vec{y} = (\vec{a} \cdot 2\vec{b})\vec{a}$ et $\vec{z} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a})$.

Exercice 4

- (a) Dans une base orthonormée du plan, déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur de composantes $(-1, 2)$ sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur de composantes $(1, 3)$. Représenter ces vecteurs.
- (b) Dans une base orthonormée de l'espace, déterminer les composantes de la projection orthogonale du vecteur de composantes $(0, 1, -2)$ sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur de composantes $(-1, 2, -2)$.

Solution 1

Les coordonnées des points sont $M(11/18, 7/18)$, $G(1/3, 4/3)$ et $H(-2/9, 29/9)$. La droite GH a pour équation $51x + 15y - 37 = 0$ et le point M est bien un de ses points puisque ses coordonnées vérifient l'équation de la droite. Les trois points sont donc bien alignés.

Solution 2

- (a) Un vecteur directeur de cette droite a pour composantes $(2, 3)$ (ou tout autre multiple non nul) .
- (b) Le point de coordonnées $(0, 2)$, par exemple, est un point de cette droite.
- (c) Des équations paramétriques cartésiennes de cette droite sont données, par exemple, par

$$\begin{cases} x = 2r \\ y = 3r + 2 \end{cases}, r \in \mathbb{R}.$$

- (d) Vu les équations paramétriques données au point précédent, ce point correspond à $r = \sqrt{3}$.

Solution 3

- (a) Dans cette base, les composantes de $\vec{a}$ sont $(-1/3, -3, 0)$.
- (b) Dans cette base, les composantes de $\vec{b}$ sont $(-1, 1, -2)$.
- (c) Le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ vaut $-8/3$.
- (d) Le produit vectoriel $\vec{b} \wedge \vec{a}$ est le vecteur de composantes $(-6, 2/3, 10/3)$; on a donc

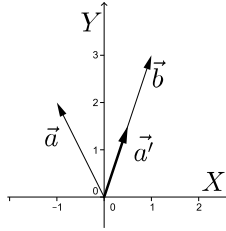
$$\vec{b} \wedge \vec{a} = -6\vec{u}_1 + \frac{2}{3}\vec{u}_2 + \frac{10}{3}\vec{u}_3.$$

(e) Les composantes des différents vecteurs sont les suivantes.

$$\vec{x}(16, 0, -14), \quad \vec{y}\left(\frac{16}{9}, 16, 0\right), \quad \vec{z}\left(-10, \frac{10}{9}, -\frac{164}{9}\right)$$

Solution 4

(a) Le vecteur $\vec{a}'$ a pour composantes $(1/2, 3/2)$.



(b) Le vecteur $\vec{a}'$ a pour composantes $(-2/3, 4/3, -4/3)$.

9.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

On fixe une base quelconque du plan, notée $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et on donne les vecteurs

$$\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2, \quad \vec{y} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{u}_1 - \vec{u}_2$ forment encore une base du plan.
2. Déterminer les composantes des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans cette nouvelle base.
3. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ à partir de leur expression dans la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2$.

Solution

1. Étant donné un vecteur $\vec{x}$, on doit montrer qu'il existe des coefficients uniques r_1, r_2 tels que

$$\vec{x} = r_1(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + r_2(\vec{u}_1 - \vec{u}_2).$$

Montrons l'unicité. À partir de l'égalité précédente, on obtient

$$\vec{x} = (r_1 + r_2)\vec{u}_1 + (r_1 - r_2)\vec{u}_2.$$

Par ailleurs, comme $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ constituent une base, il existe des coefficients uniques x_1 et x_2 tels que

$$\vec{x} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2.$$

Il s'ensuit que

$$x_1 = r_1 + r_2 \quad \text{et} \quad x_2 = r_1 - r_2,$$

donc

$$r_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}.$$

Réciproquement, les coefficients

$$r_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}$$

donnent bien

$$\vec{x} = r_1(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + r_2(\vec{u}_1 - \vec{u}_2).$$

2. Comme $x_1 = 1/2$ et $x_2 = 2$, on a

$$r_1 = \frac{1/2 + 2}{2} = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{1/2 - 2}{2} = -\frac{3}{4}.$$

Les composantes de $\vec{x}$ dans la nouvelle base sont donc $(5/4, -3/4)$ et celles de $\vec{y}$ sont $(0, 1)$.

3. Dans la base $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, vu les propriétés de linéarité du produit scalaire, on a

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \left(\frac{1}{2}\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 \right) \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \frac{1}{2}\|\vec{u}_1\|^2 + \frac{3}{2}\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 - 2\|\vec{u}_2\|^2.$$

Exercice 2. Produit mixte et double produit vectoriel

On donne les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

1. Démontrer que

$$(\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z}).$$

2. Démontrer que

$$\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{z}.$$

Solution

1. Considérons une base orthonormée $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ et désignons par (x_1, x_2, x_3) (resp. $(y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)$) les composantes du vecteur $\vec{x}$ (resp. $\vec{y}, \vec{z}$) dans cette base. On a alors¹

$$\begin{aligned} (\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z} &= z_1(x_2y_3 - x_3y_2) - z_2(x_1y_3 - x_3y_1) + z_3(x_1y_2 - x_2y_1) \\ &= x_1(y_2z_3 - y_3z_2) - x_2(y_1z_3 - y_3z_1) + x_3(y_1z_2 - y_2z_1) \\ &= \vec{x} \cdot (\vec{y} \wedge \vec{z}). \end{aligned}$$

1. En fait cette propriété résulte d'une propriété des déterminants des matrices carrées ; dans le cas présent, le produit scalaire dont il est question est égal au déterminant de la matrice de dimension 3 dont les lignes (ou les colonnes) sont formées par les composantes des trois vecteurs impliqués.

2. En reprenant la base orthonormée et les notations précédentes, le vecteur $\vec{y} \wedge \vec{z}$ a pour composantes

$$(y_2 z_3 - y_3 z_2, y_3 z_1 - y_1 z_3, y_1 z_2 - y_2 z_1).$$

La première composante du vecteur $\vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z})$ est donc

$$\begin{aligned} & x_2 y_1 z_2 - x_2 y_2 z_1 - x_3 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_3 \\ &= (x_2 z_2 + x_3 z_3) y_1 - (x_2 y_2 + x_3 y_3) z_1 \\ &= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_1 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) z_1 \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{z}) y_1 - (\vec{x} \cdot \vec{y}) z_1. \end{aligned}$$

De même, la deuxième composante de ce vecteur est

$$\begin{aligned} & x_3 y_2 z_3 - x_3 y_3 z_2 - x_1 y_1 z_2 + x_1 y_2 z_1 \\ &= (x_1 z_1 + x_3 z_3) y_2 - (x_1 y_1 + x_3 y_3) z_2 \\ &= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_2 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) z_2 \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{z}) y_2 - (\vec{x} \cdot \vec{y}) z_2. \end{aligned}$$

Enfin, la troisième composante est

$$\begin{aligned} & x_1 y_3 z_1 - x_1 y_1 z_3 - x_2 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_2 \\ &= (x_1 z_1 + x_2 z_2) y_3 - (x_1 y_1 + x_2 y_2) z_3 \\ &= (x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3) y_3 - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) z_3 \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{z}) y_3 - (\vec{x} \cdot \vec{y}) z_3. \end{aligned}$$

Ces composantes sont celles du vecteur $(\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{z}$; on a donc bien l'égalité annoncée.

Voici une autre manière de procéder.

Il est possible d'établir cette égalité sans passer par les composantes des vecteurs dans une base.

Si $\vec{z} = \vec{0}$, alors chaque membre de l'égalité est le vecteur nul; l'égalité a donc lieu.

Si $\vec{z} \neq \vec{0}$, alors les vecteurs

$$\vec{z} \quad \text{et} \quad \vec{y}^* = \vec{y} - \frac{\vec{y} \cdot \vec{z}}{\|\vec{z}\|^2} \vec{z}$$

sont orthogonaux et on a

$$\vec{y}^* \wedge \vec{z} = \vec{y} \wedge \vec{z} - \frac{\vec{y} \cdot \vec{z}}{\|\vec{z}\|^2} \vec{z} \wedge \vec{z} = \vec{y} \wedge \vec{z}.$$

Posons

$$\vec{w} = \vec{x} \wedge (\vec{y} \wedge \vec{z}) = \vec{x} \wedge (\vec{y}^* \wedge \vec{z}).$$

Par définition du produit vectoriel, $\vec{w}$ est orthogonal au vecteur $\vec{y}^* \wedge \vec{z}$; il s'ensuit que c'est une combinaison linéaire de $\vec{y}^*$ et $\vec{z}$ donc

$$\vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{y}^*}{\|\vec{y}^*\|^2} \vec{y}^* + \frac{\vec{w} \cdot \vec{z}}{\|\vec{z}\|^2} \vec{z},$$

$\vec{y}^*$ et $\vec{z}$ étant non parallèles puisqu'ils sont orthogonaux. Calculons les deux produits scalaires apparaissant dans le membre de droite de l'égalité. Pour cela, nous utilisons les propriétés démontrées en 1 ci-dessus et dans l'exercice 7 de la sous-section 9.1 de ce chapitre. On a successivement

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{y}^* &= \left(\vec{x} \wedge (\vec{y}^* \wedge \vec{z}) \right) \cdot \vec{y}^* \\ &= \vec{x} \cdot \left((\vec{y}^* \wedge \vec{z}) \wedge \vec{y}^* \right) \\ &= \vec{x} \cdot \left(\vec{y}^* \wedge (\vec{z} \wedge \vec{y}^*) \right) \\ &= \|\vec{y}^*\|^2 \vec{x} \cdot \vec{z} \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{z} &= \left(\vec{x} \wedge (\vec{y}^* \wedge \vec{z}) \right) \cdot \vec{z} \\ &= \vec{x} \cdot \left((\vec{y}^* \wedge \vec{z}) \wedge \vec{z} \right) \\ &= -\vec{x} \cdot \left(\vec{z} \wedge (\vec{y}^* \wedge \vec{z}) \right) \\ &= -\|\vec{z}\|^2 \vec{x} \cdot \vec{y}^*. \end{aligned}$$

Cela étant, en utilisant l'expression explicite de $\vec{y}^*$, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \vec{w} &= (\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y}^* - (\vec{x} \cdot \vec{y}^*) \vec{z} \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{z}) \frac{\vec{y} \cdot \vec{z}}{\|\vec{z}\|^2} \vec{z} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{z} + (\vec{x} \cdot \vec{z}) \frac{\vec{y} \cdot \vec{z}}{\|\vec{z}\|^2} \vec{z} \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{z}) \vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y}) \vec{z}. \end{aligned}$$

Exercice 3

On considère un cercle C de centre O et deux diamètres orthogonaux $[AB]$ et $[CD]$ de ce cercle. Un point variable P parcourt le cercle. On note Q l'intersection des droites AP et CD . Déterminer le lieu de l'orthocentre du triangle OPQ .

Solution

Choisissons le repère orthonormé déterminé comme suit : l'origine des axes est le centre du cercle, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ définit l'axe X , le vecteur $\overrightarrow{CD}$ définit l'axe Y et l'unité est égale au rayon du cercle.

La symétrie du problème permet de ne considérer que des points P d'ordonnées positives dans un premier temps. Par ailleurs, le cas où P coïncide avec A , D ou B ne doit pas être pris en considération car la question posée n'a alors pas de sens. Ainsi, on est amené à considérer les points P de coordonnées

$$(r, \sqrt{1-r^2}), \quad r \in]-1, 0[\cup]0, 1[.$$

La droite passant par A et P a pour équation cartésienne

$$y = \frac{\sqrt{1-r^2}}{1+r} (x+1).$$

Dès lors les coordonnées de Q sont

$$\left(0, \frac{\sqrt{1-r^2}}{1+r}\right).$$

Notons h_P et h_Q les hauteurs du triangle OPQ respectivement issues des sommets P et Q . Pour $r \in]-1, 0[\cup]0, 1[$, les équations cartésiennes correspondantes sont

$$h_P : y = \sqrt{1-r^2}, \quad h_Q : y - \frac{\sqrt{1-r^2}}{1+r} = -\frac{r}{\sqrt{1-r^2}} x.$$

Les coordonnées (x_0, y_0) de l'orthocentre sont donc

$$y_0 = \sqrt{1-r^2}, \quad x_0 = -\frac{\sqrt{1-r^2}}{r} \left(\sqrt{1-r^2} - \frac{\sqrt{1-r^2}}{1+r} \right) = r-1$$

et elles vérifient l'égalité

$$(x_0+1)^2 + y_0^2 = 1.$$

On déduit de ce qui précède que tout point du lieu est un point du cercle centré en $A(-1, 0)$, de rayon 1, dont l'équation cartésienne est

$$(x+1)^2 + y^2 = 1$$

à l'exception des points de coordonnées $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$ et $(-1, -1)$ par symétrie.

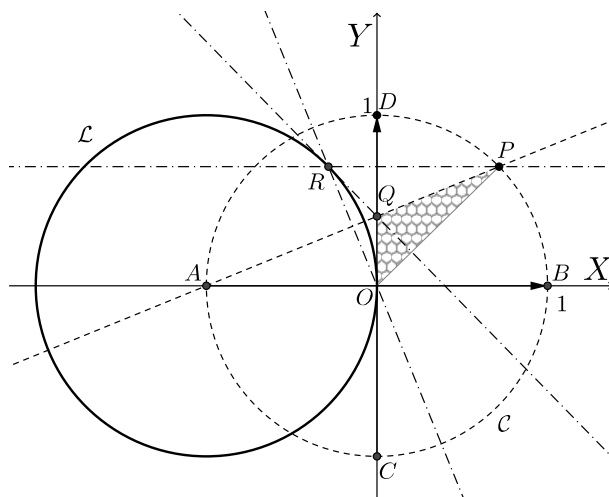
Pour conclure, il reste à montrer que tout point du cercle d'équation

$$(x+1)^2 + y^2 = 1,$$

à l'exception des points de coordonnées $(-2, 0)$, $(0, 0)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, fait bien partie du lieu. Soit $R(x_0, y_0)$ un tel point. En posant $r = 1 + x_0$, on a $r \in]-1, 0[\cup]0, 1[$ et les coordonnées de R s'écrivent aussi

$$(r-1, \sqrt{1-r^2}) \quad \text{ou} \quad (r-1, -\sqrt{1-r^2}).$$

Vu les calculs précédents, le point R est l'orthocentre obtenu par la construction initiale à partir du point de coordonnées $(r, \sqrt{1-r^2})$ ou du point de coordonnées $(r, -\sqrt{1-r^2})$ et fait donc partie du lieu.



On peut aussi résoudre cet exercice de la manière suivante, sans passer par la géométrie analytique.

Bien sûr, si P est l'un des points A, B, C, D il n'y a pas de triangle et il ne faut donc pas envisager ces cas.

Cela étant, on désigne par R l'orthocentre du triangle OPQ . Par définition de l'orthocentre d'un triangle, la droite OR est orthogonale à la droite AP . De plus, le triangle APB est rectangle en P puisque le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle et que P appartient au cercle. Il s'ensuit que les segments $[OR]$ et $[PB]$ sont parallèles ; par construction, les segments $[OB]$ et $[PR]$ sont aussi parallèles. On obtient dès lors que le quadrilatère $ORPB$ est en fait un parallélogramme. Lorsque P parcourt le cercle (à l'exception des points A, B, C, D), le point R parcourt donc lui aussi un cercle, obtenu par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ du cercle de départ (sauf A, B, C, D).

Exercice 4

Soient deux droites orthogonales X et Y , sécantes en O . Sur X , on fixe les points A et B , différents de O , de telle sorte que l'on ait $\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB}$. Pour tout $P \in Y$, on définit le point Q tel que $3\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$. Déterminer le lieu des points communs aux droites AP et BQ lorsque P parcourt Y .

Solution

Choisissons le point O comme origine du repère et les droites X et Y comme axes du repère, l'orientation étant choisie de telle sorte que le vecteur unité de l'axe X soit $\overrightarrow{OB}$. Ainsi, le point B a pour coordonnées $(1, 0)$ et le point A a pour coordonnées $(2, 0)$.

Cela étant, un point P appartient à l'axe Y si et seulement si ses coordonnées s'écrivent $(0, \lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dans ces conditions, le point Q a pour coordonnées $(0, \lambda/3)$, la droite AP a pour équation cartésienne

$$y = -\frac{\lambda}{2}(x - 2)$$

et la droite BQ a pour équation cartésienne

$$y = -\frac{\lambda}{3}(x - 1).$$

Il s'ensuit que le lieu cherché est l'ensemble des points L de coordonnées cartésiennes (x, y) pour lesquels il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y = -\frac{\lambda}{2}(x - 2) \\ y = -\frac{\lambda}{3}(x - 1). \end{cases}$$

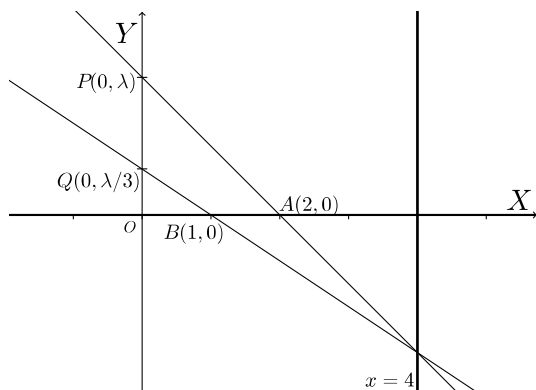
Par conséquent, si $L(x, y)$ est un point du lieu, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} y = -\frac{\lambda}{2}(x - 2) \\ 0 = \lambda(x - 4). \end{cases}$$

On en déduit que si $\lambda = 0$ alors $y = 0$ et si $\lambda \neq 0$ alors $x = 4$.

Réciproquement, si $y = 0$ alors le point de coordonnées $(x, 0)$ est un point du lieu quel que soit le réel x (il suffit de prendre $\lambda = 0$) et si $x = 4$ alors $(4, y)$ est aussi un point du lieu quel que soit le réel y (il suffit de prendre $\lambda = -y$).

En conclusion, le lieu demandé est l'ensemble des points de l'axe X et de la droite d'équation cartésienne $x = 4$.



Exercice 5

On se place dans un repère orthonormé du plan. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le cercle C_λ de centre $(\lambda, 0)$ tangent à l'axe Y et le cercle Γ_λ de centre (λ, λ) tangent à l'axe X . Démontrer que le lieu des points d'intersection de C_λ et Γ_λ est une union de deux droites (et donner les équations cartésiennes de celles-ci).

Solution

Le point de coordonnées (x, y) appartient au lieu si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} (x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 \\ (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2 \end{cases}$$

ou encore si et seulement si

$$\begin{cases} (x - \lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 \\ \lambda(\lambda - 2y) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Il reste donc à éliminer le paramètre λ .

Supposons qu'il existe λ, x, y vérifiant le système. Si $\lambda = 0$, alors $x = y = 0$. Sinon, $\lambda = 2y$ et la première équation donne

$$\begin{aligned} (x - 2y)^2 + y^2 = 4y^2 &\Leftrightarrow (x - 2y)^2 = 3y^2 \\ &\Leftrightarrow x - 2y = \sqrt{3}y \quad \text{ou} \quad x - 2y = -\sqrt{3}y. \end{aligned}$$

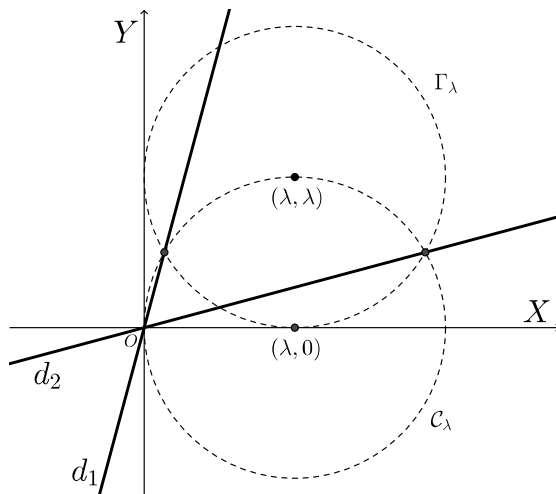
Comme $(0, 0)$ vérifie aussi ces équations, on conclut donc qu'un point du lieu est nécessairement sur l'une des droites d_1 ou d_2 d'équation cartésienne

$$d_1 : x = (2 + \sqrt{3})y, \quad d_2 : x = (2 - \sqrt{3})y.$$

Réciproquement, si (x, y) sont les coordonnées cartésiennes d'un point de d_1 ou d_2 , alors $(x - 2y)^2 = 3y^2$ ou encore

$$(x - 2y)^2 + y^2 = 4y^2.$$

En posant $\lambda = 2y$, on obtient que λ, x, y vérifient le système (*), donc que (x, y) sont bien les coordonnées cartésiennes d'un point du lieu.

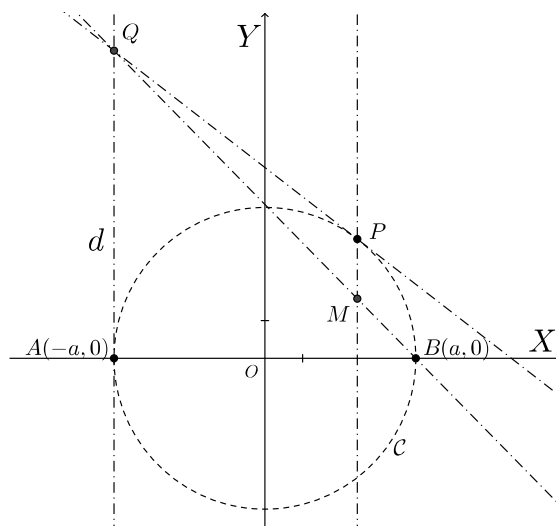


Exercice 6

On se place dans un repère orthonormé du plan et on donne les points $A(-a, 0)$ et $B(a, 0)$ (avec $a > 0$). On considère le cercle C de diamètre $[AB]$, P un point de C , d la tangente en A au cercle C , Q le (ou un des) point(s) d'intersection de d et de la tangente à C en P et M le point d'intersection de la droite passant par B et Q et de la parallèle à l'axe Y passant par P . On demande le lieu des points M lorsque P parcourt C .

Solution

La représentation graphique de l'énoncé est la suivante.



Vu les données, l'équation du cercle est $x^2 + y^2 = a^2$ et celle de la droite d est $x = -a$. Notons (λ, μ) les coordonnées cartésiennes d'un point quelconque P du cercle.

Une équation cartésienne de la tangente au cercle au point P est donc

$$\frac{x - \lambda}{-\mu} = \frac{y - \mu}{\lambda}$$

avec la convention habituelle.

Lorsque $\mu = 0$, seul le cas $\lambda = -a$ est à considérer car pour $\lambda = a$, d et la tangente en $P(a, 0)$ sont parallèles ; pour ces valeurs particulières ($\mu = 0$ et $\lambda = -a$), d et la tangente en $(-a, 0)$ sont confondues ; tous les points de d jouent donc le rôle de Q et on en déduit que la droite d fait partie du lieu.

Pour $\mu \neq 0$, la résolution du système

$$\begin{cases} x &= -a \\ \frac{x - \lambda}{-\mu} &= \frac{y - \mu}{\lambda} \end{cases}$$

fournit les coordonnées de Q , à savoir

$$Q \left(-a, \frac{a}{\mu}(\lambda + a) \right)$$

puisque $\lambda^2 + \mu^2 = a^2$. On obtient ainsi l'équation de la droite d' passant par B et Q , à savoir

$$d' : \frac{x - a}{-2a} = \frac{\mu y}{a(\lambda + a)}.$$

Il s'ensuit que les coordonnées d'un point M du lieu, à l'exception de ceux de la droite d , sont celles de la solution du système

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ \frac{x - a}{-2a} &= \frac{\mu y}{a(\lambda + a)} \end{cases}$$

lequel est équivalent à

$$\begin{cases} x &= \lambda \\ y &= \frac{a^2 - \lambda^2}{2\mu} = \frac{\mu}{2} \end{cases}$$

où $\mu \neq 0$. On obtient donc une autre partie du lieu en éliminant les paramètres (λ, μ) qui sont tels que $\lambda^2 + \mu^2 = a^2$ et $\mu \neq 0$. Vu la forme du système précédent, on obtient immédiatement que l'équation cartésienne de cette partie du lieu est

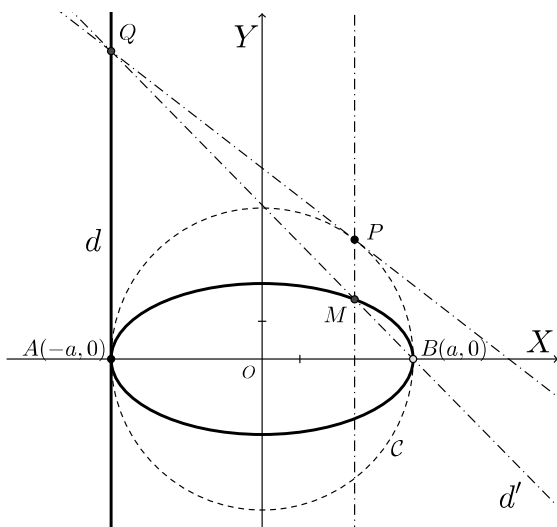
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2/4} = 1 \quad \text{avec } x \neq a, x \neq -a,$$

qui est l'équation cartésienne d'une ellipse privée de deux points.

Finalement, le lieu est constitué de la droite d et des points de l'ellipse d'équation cartésienne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2/4} = 1$$

privée du point B .



Exercice 7

Considérons à nouveau le nombre d'or Φ introduit dans l'exercice 3 de la sous-section 4.3 de ce chapitre.

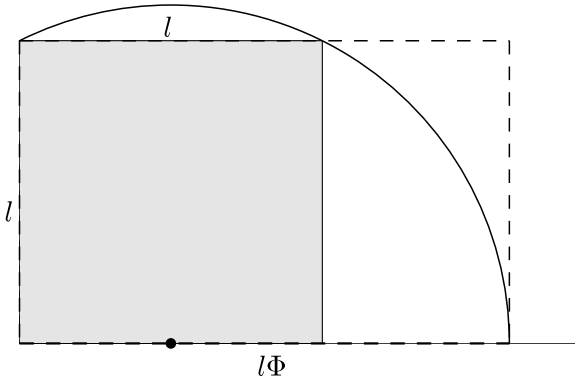
1. On appelle « rectangle d'or » un rectangle dont le rapport entre la mesure de la longueur et celle de la largeur est égal au nombre d'or. Avec règle et compas, construire un rectangle d'or à partir d'un carré et à partir d'un rectangle dont la longueur est égale à deux fois sa largeur.
2. Avec règle et compas et à partir d'un carré, construire un « triangle d'or », c'est-à-dire un triangle isocèle dont le rapport entre la mesure commune à deux côtés et la mesure du troisième côté est égal au nombre d'or ou à son inverse. Le triangle donnant lieu au rapport égal à l'inverse du nombre d'or est plutôt appelé « gnomon d'or ».
3. Avec règle et compas, construire un rectangle d'or à partir d'un triangle d'or et *vice versa*.

Solution

1. On construit un carré de côté de mesure l . On trace alors un arc de cercle centré au milieu d'un côté et qui passe par les sommets du côté opposé du carré. L'intersection de cet arc avec le prolongement du côté du carré où se trouve le centre du cercle se

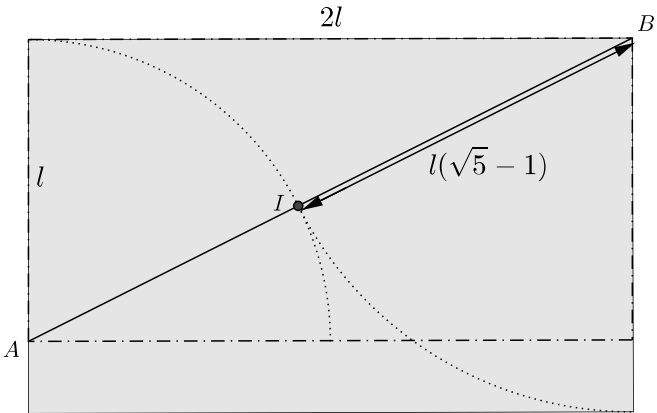
situé exactement à une distance $l\Phi$ du sommet du carré qui se trouve de l'autre côté du centre du cercle. En effet, le rayon du cercle est égal à $l\sqrt{5}/2$, donc la distance entre le point d'intersection et le sommet du carré mentionné est égale à

$$l \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = l\Phi.$$



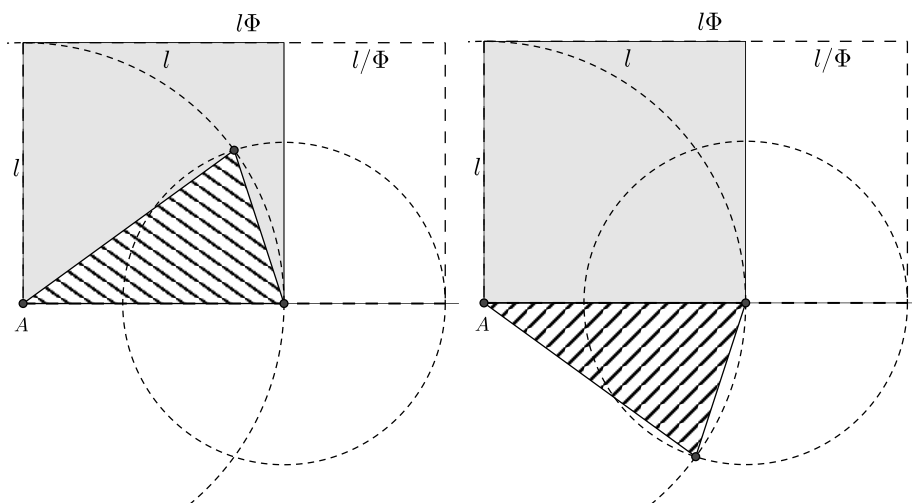
Pour traiter la deuxième partie de la question, on trace tout d'abord un rectangle dont les mesures des côtés sont l et $2l$ et ensuite une de ses diagonales ; désignons par A, B les extrémités de cette diagonale. On trace ensuite un arc de cercle de centre A et de rayon l ; cet arc intersecte la diagonale en un point, noté I . Le rectangle dont les mesures des côtés sont d'une part $2l$ et d'autre part la longueur du segment joignant I à B est un rectangle d'or. En effet, la mesure de la diagonale étant égale à $l\sqrt{5}$, celle du segment joignant I à B est égale à $l\sqrt{5} - l = l(\sqrt{5} - 1)$. On a donc bien

$$\frac{2l}{l(\sqrt{5} - 1)} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \Phi.$$

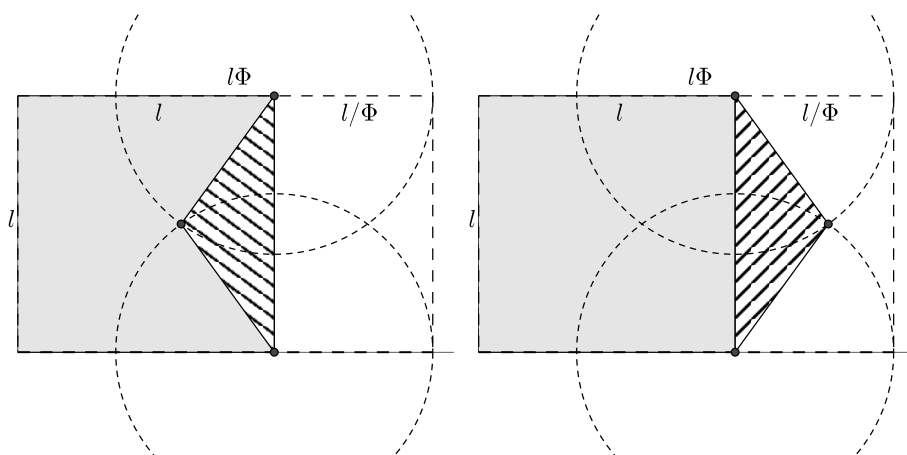


2. À partir d'un carré dont la mesure du côté est l , on reprend la construction précédente pour obtenir un segment de mesure égale à $l\Phi$, donc aussi un segment de mesure égale à $l\Phi - l = l/\Phi$.

On trace alors un cercle dont le rayon a comme mesure l et dont le centre est un sommet du carré (noté A) et un cercle dont le rayon a comme mesure l/Φ et comme centre un des sommets du carré adjacent à A . Chacun des deux points d'intersection des deux cercles et les deux sommets utilisés forment un triangle d'or. En effet, deux côtés ont comme mesure l et le troisième a comme mesure l/Φ .

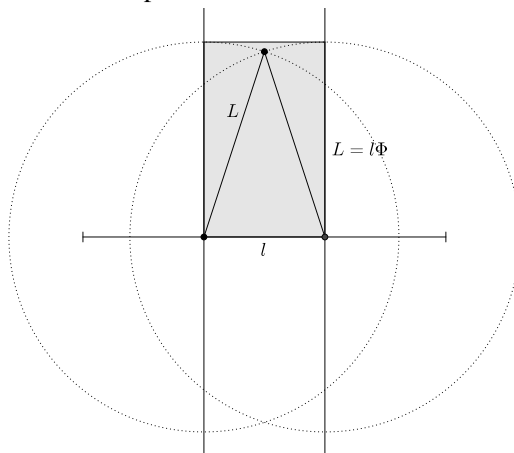


Si on effectue la même construction que la précédente mais avec des cercles de mesure de rayon égale à l/Φ , on obtient un gnomon d'or car deux côtés ont comme mesure l/Φ et le troisième a comme mesure l .



3. La construction des triangles d'or à partir d'un rectangle d'or s'effectue comme dans la construction précédente puisqu'on dispose des valeurs l et $l\Phi$.

Supposons maintenant que l'on dispose d'un triangle d'or et notons L la mesure commune à deux côtés et l la mesure du troisième côté. On prolonge le côté de mesure l d'une longueur l de part et d'autre de ce côté de telle sorte que les deux sommets du triangle qui sont sur ce côté soient les milieux de deux segments de longueur $2l$. On trace les médiatrices de ces segments ainsi que les cercles de rayon de mesure égale à L dont les centres sont ces deux sommets. L'intersection des médiatrices et des cercles permet d'obtenir un rectangle d'or. Le rectangle formé par le côté de mesure l du triangle et deux points d'intersection situés « d'un même côté » de ce segment a en effet l et L comme mesures pour ses côtés.



Terminons par une remarque : il existe de nombreuses autres façons de construire ces figures ; le nombre d'or est en effet vraiment « magique » et possède de nombreuses propriétés dont plusieurs seront étudiées par la suite.

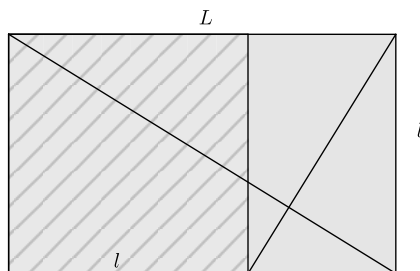
Exercice 8

Considérons à nouveau le nombre d'or Φ introduit dans l'exercice 3 de la sous-section 4.3 de ce chapitre.

1. (a) Étant donné un rectangle d'or, montrer que si on retire un carré de côté égal à la largeur de ce rectangle, on obtient encore un rectangle d'or.
 (b) De même si, à un rectangle d'or, on juxtapose un carré de côté égal à la longueur du rectangle, montrer qu'on obtient encore un rectangle d'or.
 (c) Montrer qu'un triangle d'or (resp. un gnomon d'or) peut toujours être divisé en un triangle d'or et en un gnomon d'or.
2. Montrer que si L est la mesure de la longueur d'un rectangle d'or et l celle de la largeur, alors la mesure des largeurs des rectangles d'or successifs obtenus par le procédé décrit en (a) est égale à $l/\Phi^n = L/\Phi^{n+1}$ (donc la mesure des longueurs est L/Φ^n).

De même, pour la construction (b), les longueurs des rectangles d'or successifs sont égales à $L\Phi^n = l\Phi^{n+1}$ (donc la mesure des largeurs est $l\Phi^n$).

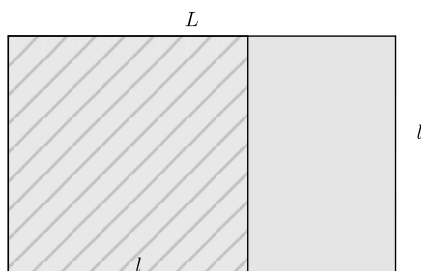
3. Soient deux rectangles d'or construits consécutivement comme indiqué dans les processus décrits précédemment. Montrer que leurs diagonales (issues de sommets « opposés ») sont orthogonales.



4. Montrer que les diagonales (issues de sommets « opposés ») de deux rectangles d'or construits consécutivement comme indiqué dans les processus décrits précédemment sont toutes des segments des deux droites prolongeant les diagonales de départ.

Solution

1. (a) Visualisons.



Le carré à enlever a un côté de mesure l . Le nouveau rectangle a donc des côtés de mesure l et $L-l$. Cette dernière valeur est un nombre strictement inférieur à l puisque $L/l = \Phi < 2$. Le rectangle obtenu a donc une longueur de mesure l et une largeur de mesure $L-l$. Comme $\Phi^2 = \Phi + 1$, on obtient

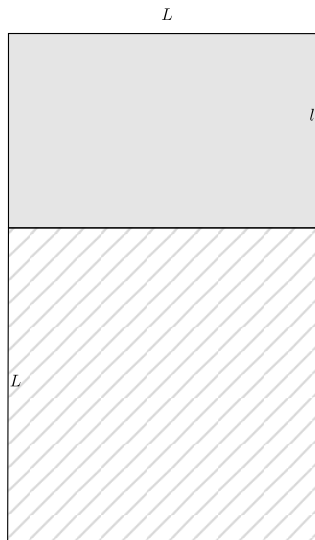
$$\frac{l}{L-l} = \frac{1}{\Phi-1} = \Phi$$

et le nouveau rectangle est bien un rectangle d'or.

(b) De même pour cette construction, les longueur et largeur du nouveau rectangle ont respectivement pour mesure $L+l$ et L ; comme

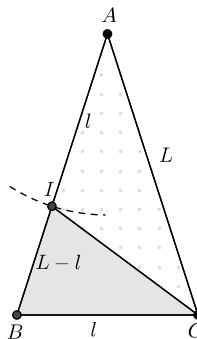
$$\frac{L+l}{L} = 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi,$$

on obtient bien que le nouveau rectangle est encore un rectangle d'or.



Remarquons que les deux processus sont en fait analogues ; tout dépend du point de départ adopté.

(c) Visualisons.



Soient un triangle d'or, L la mesure commune à deux côtés et l la mesure du troisième côté ; on a donc $L = l\Phi$. Notons A le sommet qui est à l'intersection des deux côtés de même mesure et notons les deux autres B, C . Si I désigne le point situé sur le côté $[AB]$ à une distance l de A , alors le triangle de départ et le triangle de sommets B, I, C sont semblables. De fait, ils ont un angle commun compris entre deux côtés qui sont tels que

$$\frac{l}{l/\Phi} = \frac{L}{l} = \Phi.$$

Le triangle de sommets B, I, C est donc isocèle et ses côtés ont pour mesures l, l et l/Φ ; c'est donc un triangle d'or. Enfin, le triangle de sommets A, C, I est un gnomon d'or car ses côtés ont pour mesure l, l et L .

On procède de façon analogue à partir d'un gnomon d'or.

2. (a) Si X et x sont respectivement les mesures des longueur et largeur à une étape donnée, le processus décrit conduit à un rectangle dont la largeur a une mesure égale à

$$X - x = x \left(\frac{X}{x} - 1 \right) = x(\Phi - 1) = \frac{x}{\Phi}.$$

À chaque étape, la mesure de la nouvelle largeur est donc égale à celle qui précède divisée par le nombre d'or. Si l est la mesure de la largeur au départ, la mesure de la largeur à l'étape n est donc l/Φ^n .

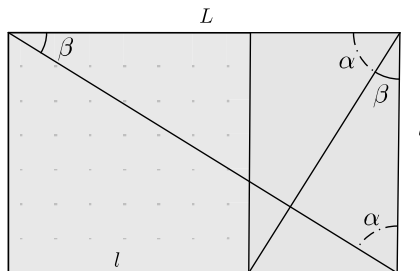
- (b) Si X et x sont respectivement les mesures des longueur et largeur à une étape donnée, le processus décrit conduit à un rectangle dont la longueur a une mesure égale à

$$X + x = X \left(1 + \frac{x}{X} \right) = X \left(1 + \frac{1}{\Phi} \right) = X\Phi.$$

À chaque étape, la mesure de la nouvelle longueur est donc égale à celle qui précède multipliée par le nombre d'or. Si L est la mesure de la longueur au départ, la mesure de la longueur à l'étape n est donc $L\Phi^n$.

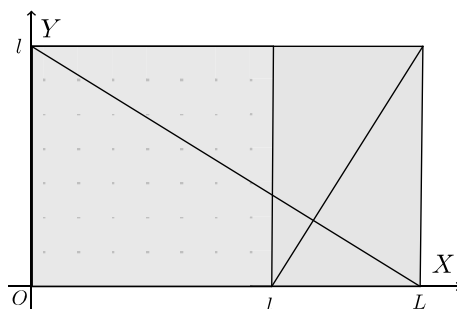
3. Preuve utilisant la géométrie (sans intervention de géométrie analytique)

Puisqu'on a $L = l\Phi$ dans un rectangle d'or, les angles aigus α , β des deux triangles rectangles formés par une diagonale et les sommets qui ne lui appartiennent pas ont une tangente et une cotangente qui est égale à Φ . Ces mesures α et β sont donc toujours les mêmes, quelles que soient les mesures des côtés du rectangle d'or. La somme $\alpha + \beta$ étant égale à $\pi/2$, le triangle formé par l'intersection des diagonales et deux de leurs extrémités est donc un triangle rectangle en ce point d'intersection.



Preuve avec la géométrie analytique

Fixons un repère orthonormé dont l'origine est un des sommets du rectangle et dont les axes sont déterminés par les deux côtés qui le contiennent.



Dans ce repère, les points qui déterminent les diagonales dont il est question ont pour coordonnées $(0, l)$, $(L, 0) = (l\Phi, 0)$ et $(l, 0)$, $(L, l) = (l\Phi, l)$. Des vecteurs directeurs ont donc pour composantes $(\Phi, -1)$ et $(\Phi - 1, 1)$. Comme

$$\Phi(\Phi - 1) - 1 = \Phi^2 - \Phi - 1 = 0,$$

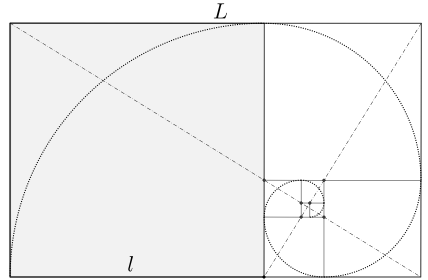
on conclut que ces droites sont bien orthogonales.

4. Raisonnons sur la construction pour laquelle il s'agit de prendre des rectangles de plus en plus petits. Soit d_0 une diagonale d'un rectangle d'or R_0 et soit d_1 la diagonale du rectangle d'or R_1 de l'étape suivante, comme indiqué par la construction. À l'étape suivante, les diagonales d_1 et d_2 respectivement des rectangles R_1 et R_2 sont orthogonales. La diagonale d_2 est donc parallèle à d_0 . Comme elle passe par un des deux sommets du rectangle R_0 qui se trouve sur d_0 , la diagonale d_2 est une partie de d_0 .

Remarque. Le point d'intersection entre les deux diagonales (à chaque étape) est le « centre » d'une spirale logarithmique dont une approximation est construite comme sur la figure suivante (cette approximation est appelée la « spirale de Fibonacci¹ » ou encore la « spirale d'or »).

Soient L et l tels que $L/l = \Phi$. Dans le carré de côté l , on construit un arc de cercle de rayon l et de centre en un sommet du carré de départ (cf dessin ci-dessous). Dans le carré de côté $L - l = l/\Phi$, on fait de même mais cette fois le centre du cercle est le sommet « en bas à gauche ». Dans le carré suivant, on fait encore de même mais avec le centre du cercle au sommet « en haut à gauche » et on poursuit ainsi de suite la construction.

1. Voir l'annexe.



Exercice 9

On donne un repère orthonormé. Montrer que l'équation cartésienne

$$xy = 1$$

est celle d'une hyperbole. Plus précisément, dans un repère orthonormé plus « approprié », c'est l'hyperbole d'équation cartésienne canonique

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = 1.$$

Solution

Une équation cartésienne canonique d'une hyperbole s'écrit

$$\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

avec $a, b > 0$. On peut aussi écrire cette équation sous la forme

$$\left(\frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} \right) \left(\frac{x'}{a} - \frac{y'}{b} \right) = 1.$$

Ainsi, si on pose

$$\begin{cases} x &= \frac{x'}{a} + \frac{y'}{b} \\ y &= \frac{x'}{a} - \frac{y'}{b}, \end{cases}$$

on définit x' et y' en fonction de x et y par

$$\begin{cases} x' &= \frac{a}{2} (x + y) \\ y' &= \frac{b}{2} (x - y). \end{cases}$$

On obtient

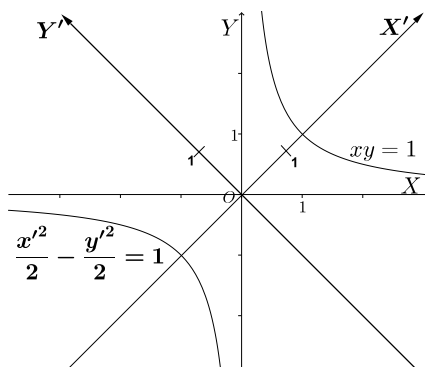
$$xy = 1 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1.$$

Les relations du premier système caractérisent un changement de repère du plan en conservant l'origine des axes. Les composantes des vecteurs de la nouvelle base sont $(a/2, a/2)$ et $(b/2, -b/2)$; dès lors le nouveau repère est orthonormé si et seulement si

$$ab - ab = 0 \quad \text{et} \quad a^2 = 2 = b^2,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$a = b = \sqrt{2}.$$



Exercice 10

Dans un repère orthonormé du plan, on considère l'équation cartésienne

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

où A, B, C, D, E, F sont des réels avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$.

1. Montrer que le polynôme

$$\lambda \mapsto (A - \lambda)(B - \lambda) - C^2$$

possède toujours deux zéros réels (notons-les λ_1 et λ_2).

2. Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, quelle est la nature de la courbe dont l'équation cartésienne est donnée ci-dessus ?

3. Lorsque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} (A - \lambda_1)x + Cy = 0 \\ Cx + (B - \lambda_1)y = 0 \end{cases} \quad (*)$$

et montrer que si (x_1, y_1) est solution, alors $(-y_1, x_1)$ est solution du système

$$\begin{cases} (A - \lambda_2)x + Cy = 0 \\ Cx + (B - \lambda_2)y = 0. \end{cases} \quad (**)$$

4. Soit une solution (x_1, y_1) du système (*) vérifiant $x_1^2 + y_1^2 = 1$. Montrer que le changement de repère caractérisé par les relations

$$\begin{cases} x = x_1 x' - y_1 y' \\ y = y_1 x' + x_1 y' \end{cases}$$

conduit à l'existence de réels D', E' tels que

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + D'x' + E'y' + F = 0.$$

5. On se place dans le cas $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Sauf cas dégénérés, montrer que si $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ (resp. $\lambda_1 \lambda_2 > 0$), alors l'équation

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

est celle d'une hyperbole (resp. ellipse) et que si λ_1 ou λ_2 est nul, alors il s'agit de l'équation d'une parabole.

6. Montrer que, sauf cas dégénérés, l'équation

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

est celle d'une hyperbole (resp. ellipse, parabole) si et seulement si

$$AB - C^2 < 0 \quad (\text{resp.} \quad AB - C^2 > 0, \quad AB - C^2 = 0).$$

Solution

La méthode présentée pour résoudre cet exercice utilise des notions de base revues précédemment. Bien sûr, des connaissances du calcul matriciel (et plus précisément de la diagonalisation) permettent de conclure plus rapidement.

1. Le polynôme donné est un polynôme du second degré qui a aussi pour expression

$$\lambda^2 - (A + B)\lambda + AB - C^2.$$

Son discriminant est égal à

$$(A + B)^2 - 4(AB - C^2) = (A - B)^2 + 4C^2;$$

comme il est positif, le polynôme admet toujours deux zéros réels.

2. Les deux zéros sont égaux si et seulement si le discriminant du polynôme est nul ; dans le cas présent, cela est équivalent à

$$A = B \quad \text{et} \quad C = 0.$$

Ainsi on a

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F &= 0 \\ \Leftrightarrow Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ \Leftrightarrow A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + A \left(y + \frac{E}{2A} \right)^2 &= \frac{D^2 + E^2}{4A} - F. \end{aligned}$$

Ainsi, en fonction du signe du membre de droite, la courbe est un cercle, un point ou est vide.

3. Rappelons que puisque λ_1 et λ_2 désignent les zéros du polynôme donné au point 1, on a

$$(A - \lambda_1)(B - \lambda_1) = C^2 \quad \text{et} \quad (A - \lambda_2)(B - \lambda_2) = C^2.$$

Cela étant, d'une part, lorsque $C = 0$, on a nécessairement ($A = \lambda_1$ ou $B = \lambda_1$) et ($A = \lambda_2$ ou $B = \lambda_2$). Puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, cela implique que l'on a

$$A = \lambda_1 \text{ et } B = \lambda_2 \quad \text{ou} \quad B = \lambda_1 \text{ et } A = \lambda_2.$$

Considérons le cas $A = \lambda_1$ et $B = \lambda_2$. Le système (*) est alors équivalent à l'unique équation $y = 0$ et le système (**) à l'unique équation $x = 0$. Les solutions du système (*) sont donc les couples qui s'écrivent $(r, 0)$ avec $r \in \mathbb{R}$ et celles du système (**) sont les couples qui s'écrivent $(0, r)$ avec $r \in \mathbb{R}$.

Dans le cas $A = \lambda_2$ et $B = \lambda_1$, le système (*) est équivalent à l'unique équation $x = 0$ et le système (**) à l'unique équation $y = 0$. Les solutions du système (*) sont donc les couples qui s'écrivent $(0, r)$ avec $r \in \mathbb{R}$ et celles du système (**) sont les couples qui s'écrivent $(r, 0)$ avec $r \in \mathbb{R}$.

Dans ces deux cas donc, si (x_1, y_1) est solution de (*) alors $(-y_1, x_1)$ est bien solution de (**).

D'autre part, lorsque $C \neq 0$, on a successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} (A - \lambda_1)x + Cy &= 0 \\ Cx + (B - \lambda_1)y &= 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{A - \lambda_1}{C}x \\ Cx - \frac{(B - \lambda_1)(A - \lambda_1)}{C}x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{A - \lambda_1}{C}x \\ (C^2 - (B - \lambda_1)(A - \lambda_1))x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{A - \lambda_1}{C}x \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y = -\frac{A - \lambda_1}{C}x. \end{aligned}$$

Les solutions du système (*) sont donc les couples qui s'écrivent

$$r(C, -A + \lambda_1), \quad r \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, quel que soit le réel λ , on a

$$\lambda^2 - (A + B)\lambda + AB - C^2 = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2,$$

donc

$$A + B = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad AB - C^2 = \lambda_1\lambda_2.$$

Dès lors, vérifions que $(A - \lambda_1, C)$ est solution de (**). On a

$$(A - \lambda_2)(A - \lambda_1) + C^2 = -(B - \lambda_1)(A - \lambda_1) + C^2 = 0$$

et

$$C(A - \lambda_1) + (B - \lambda_2)C = 0.$$

Donc si (x_1, y_1) est solution de (*) alors $(-y_1, x_1)$ est bien solution de (**).

4. Ceci est simplement le résultat du remplacement des variables x et y en fonction des variables x' et y' .

On a successivement

$$\begin{aligned} x^2 &= (x_1 x' - y_1 y')^2 &= x_1^2 x'^2 - 2x_1 y_1 x' y' + y_1^2 y'^2, \\ y^2 &= (y_1 x' + x_1 y')^2 &= y_1^2 x'^2 + 2x_1 y_1 x' y' + x_1^2 y'^2, \\ xy &= (x_1 x' - y_1 y')(y_1 x' + x_1 y') &= x_1 y_1 x'^2 + (x_1^2 - y_1^2) x' y' - x_1 y_1 y'^2. \end{aligned}$$

Prouvons que le coefficient de x'^2 est égal à λ_1 , c'est-à-dire que

$$Ax_1^2 + By_1^2 + 2Cx_1 y_1 = \lambda_1.$$

Comme (x_1, y_1) est solution du système (*), on a

$$Ax_1 + Cy_1 = \lambda_1 x_1 \quad \text{et} \quad Cx_1 + By_1 = \lambda_1 y_1.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} Ax_1^2 + By_1^2 + 2Cx_1 y_1 &= (Ax_1 + Cy_1)x_1 + (By_1 + Cx_1)y_1 \\ &= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_1 y_1^2 = \lambda_1 (x_1^2 + y_1^2) \\ &= \lambda_1 \end{aligned}$$

puisque $x_1^2 + y_1^2 = 1$.

Prouvons à présent que le coefficient de y'^2 est égal à λ_2 , c'est-à-dire que

$$Ay_1^2 + Bx_1^2 - 2Cx_1 y_1 = \lambda_2.$$

Comme $(-y_1, x_1)$ est solution du système (**), on a

$$Ay_1 - Cx_1 = \lambda_2 y_1 \quad \text{et} \quad Bx_1 - Cy_1 = \lambda_2 x_1.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} Ay_1^2 + Bx_1^2 - 2Cx_1 y_1 &= (Ay_1 - Cx_1)y_1 + (Bx_1 - Cy_1)x_1 \\ &= \lambda_2 y_1^2 + \lambda_2 x_1^2 = \lambda_2 (x_1^2 + y_1^2) \\ &= \lambda_2 \end{aligned}$$

puisque $x_1^2 + y_1^2 = 1$.

Enfin, en tenant encore compte du fait que (x_1, y_1) est solution du système (*), on obtient que le coefficient de $x' y'$ est nul :

$$\begin{aligned} -2Ax_1 y_1 + 2Bx_1 y_1 + 2C(x_1^2 - y_1^2) &= 2 \left((-Ax_1 y_1 - Cy_1^2) + (Bx_1 y_1 + Cx_1^2) \right) \\ &= 2 (-\lambda_1 x_1 y_1 + \lambda_1 x_1 y_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On obtient donc les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} Ax^2 + By^2 + 2Cxy + Dx + Ey + F &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + D(x_1 x' - y_1 y') + E(y_1 x' + x_1 y') + F &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + (Dx_1 + Ey_1)x' + (-Dy_1 + Ex_1)y' + F &= 0 \end{aligned}$$

et on conclut.

5. On utilise la nouvelle forme de l'équation obtenue dans la partie 4 de cet exercice. Traitons le cas $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + D'x' + E'y' + F &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 \left(x'^2 + \frac{D'}{\lambda_1} x' + \frac{D'^2}{4\lambda_1^2} \right) + \lambda_2 \left(y'^2 + \frac{E'}{\lambda_2} y' + \frac{E'^2}{4\lambda_2^2} \right) + F - \frac{D'^2}{4\lambda_1} - \frac{E'^2}{4\lambda_2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_1 \left(x' + \frac{D'}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{E'}{2\lambda_2} \right)^2 &= -F + \frac{D'^2}{4\lambda_1} + \frac{E'^2}{4\lambda_2}. \end{aligned}$$

Lorsque $\lambda_1 \lambda_2 < 0$, si le second membre de la dernière égalité est nul alors l'équation est celle de deux droites sécantes. Dans le cas contraire, une simple translation du repère permet d'obtenir la forme canonique d'une hyperbole.

Lorsque $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, si le second membre est nul alors un seul point du plan a des coordonnées qui vérifient l'équation. Dans le cas contraire, si le signe du second membre est opposé au signe de λ_1 et λ_2 alors aucun couple (x', y') ne vérifie l'équation ; si le signe du second membre est le même que celui de λ_1 et λ_2 alors une translation du repère permet d'obtenir la forme canonique d'une ellipse.

Si $\lambda_2 = 0$ alors $\lambda_1 \neq 0$ et on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \lambda_1 x'^2 + D'x' + E'y' + F &= 0 \\ \Leftrightarrow x'^2 + \frac{D'}{\lambda_1} x' + \frac{D'^2}{4\lambda_1^2} + \frac{E'}{\lambda_1} y' + \frac{F}{\lambda_1} - \frac{D'^2}{4\lambda_1^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x' + \frac{D'}{2\lambda_1} \right)^2 + \frac{E'}{\lambda_1} y' &= -\frac{F}{\lambda_1} + \frac{D'^2}{4\lambda_1^2}. \end{aligned}$$

Si $E' \neq 0$, une translation du repère permet alors d'obtenir la forme canonique d'une parabole. Si $E' = 0$ et si le second membre de l'égalité est nul alors l'équation est celle d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées ; si le second membre de l'égalité est négatif, aucun couple (x', y') ne vérifie l'équation et s'il est positif alors l'équation est celle de deux droites parallèles.

Bien sûr, le cas $\lambda_1 = 0$ se traite de manière analogue.

6. Rappelons que l'on a (voir partie 3 de cet exercice)

$$A + B = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad AB - C^2 = \lambda_1 \lambda_2.$$

La propriété énoncée dans la partie 5 permet alors de conclure.

10 Nombres complexes

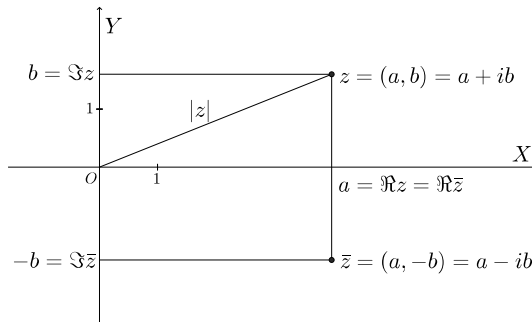
10.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

1. Dans le plan complexe, quelle est l'interprétation graphique du module d'un nombre complexe ? Que dire de la représentation d'un nombre complexe et de son conjugué ?
2. Que peut-on dire des puissances naturelles de i ?
3. Si z est un nombre complexe non nul, comment transformer l'expression $1/z$ de telle sorte que le dénominateur soit réel ?
4. Si $z = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$), en donner la forme trigonométrique. Quel lien peut-on faire avec les coordonnées polaires ?
5. Quelles différences y a-t-il entre la résolution et les solutions d'une équation du second degré dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$?

Solution

1. Le module d'un complexe correspond à la longueur du vecteur joignant l'origine des axes du repère et le complexe positionné dans le plan. Le conjugué d'un complexe est le point du plan obtenu en appliquant une symétrie orthogonale au complexe par rapport à l'axe X .



2. Tout naturel n peut s'écrire de manière unique sous la forme $n = 4m + k$, où m est un naturel et où k vaut 0, 1, 2 ou 3. On obtient donc

$$i^n = (i^4)^m i^k = i^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ i & \text{si } k = 1 \\ -1 & \text{si } k = 2 \\ -i & \text{si } k = 3. \end{cases}$$

3. Il suffit de multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué de z : on a

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

4. La forme trigonométrique d'un nombre complexe est très étroitement liée aux coordonnées polaires d'un point du plan : si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et si (r, θ) désignent les coordonnées polaires du point du plan de coordonnées cartésiennes (a, b) alors

$$z = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos(\theta) + i \sin(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi[.$$

5. Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, il faut chercher les racines carrées d'un complexe.

Une équation du second degré à coefficients réels et variable réelle n'a pas toujours de solution. Une équation du second degré à coefficients et variable complexes a toujours deux solutions.

Lorsque les coefficients et la variable sont réels, l'étude du signe de $b^2 - 4ac$ permet de dire si l'équation possède des solutions réelles (cela a lieu si et seulement si $b^2 - 4ac \geq 0$).

Exercice 2

Déterminer les parties réelle et imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes suivants. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire »).

$$z_1 = i + 1, \quad z_2 = (-i + 1)(-1 - 2i), \quad z_3 = \frac{1}{-i + 1}, \quad z_4 = \frac{i^7}{i - 1}, \quad z_5 = (1 - i)^2.$$

Solution

On a directement

$$\Re z_1 = 1, \quad \Im z_1 = 1, \quad \overline{z_1} = 1 - i, \quad |z_1| = \sqrt{2}.$$

On a

$$z_2 = i + 2i^2 - 1 - 2i = -3 - i,$$

donc

$$\Re z_2 = -3, \quad \Im z_2 = -1, \quad \overline{z_2} = -3 + i, \quad |z_2| = \sqrt{10}.$$

On a

$$z_3 = \frac{1 + i}{(-i + 1)(i + 1)} = \frac{1 + i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$$

donc

$$\Re z_3 = \frac{1}{2}, \quad \Im z_3 = \frac{1}{2}, \quad \overline{z_3} = \frac{1 - i}{2}, \quad |z_3| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a

$$z_4 = \frac{i^7}{-1+i} = \frac{-i}{-1+i} \times \frac{-1-i}{-1-i} = \frac{i+i^2}{2} = \frac{-1+i}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i,$$

donc

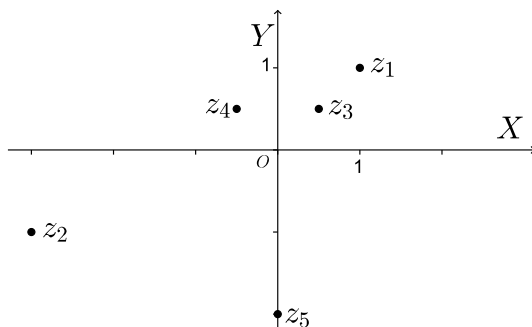
$$\Re z_4 = -\frac{1}{2}, \quad \Im z_4 = \frac{1}{2}, \quad \bar{z}_4 = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2}i, \quad |z_4| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

On a

$$z_5 = 1 - 2i + i^2 = -2i,$$

donc

$$\Re z_5 = 0, \quad \Im z_5 = -2, \quad \bar{z}_5 = 2i, \quad |z_5| = 2.$$



Exercice 3

..... Déterminer la forme trigonométrique des complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire »).

$$z_1 = -i, \quad z_2 = i + 1, \quad z_3 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - i).$$

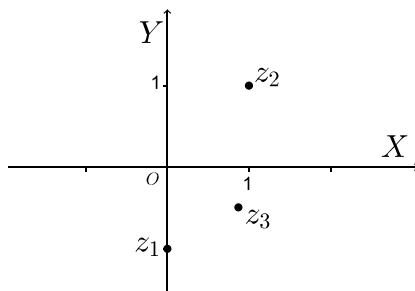
Solution

Vu les valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus, on a directement

$$z_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right),$$

$$z_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right),$$

$$z_3 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{6}\right).$$



Exercice 4

On suppose que α est un nombre réel. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes suivants. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire ») en supposant que α appartient à l'intervalle $[\pi/2, \pi[$.

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos(\alpha) - i \sin(\alpha) & z_2 &= \frac{1}{\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)} \\ z_3 &= (\cos(1) + i \sin(1))(\cos(\alpha) - i \sin(\alpha)) & z_4 &= \sin(2\alpha) - i \cos(2\alpha) \end{aligned}$$

Solution

On a directement

$$\Re z_1 = \cos(\alpha), \Im z_1 = -\sin(\alpha), \overline{z_1} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$$

et

$$|z_1| = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = 1.$$

On a

$$z_2 = \frac{\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha),$$

donc

$$\Re z_2 = \cos(\alpha), \Im z_2 = \sin(\alpha), \overline{z_2} = \cos(\alpha) - i \sin(\alpha)$$

et

$$|z_2| = \sqrt{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)} = 1.$$

On a

$$\begin{aligned} z_3 &= \cos(1)\cos(\alpha) + \sin(1)\sin(\alpha) + i(\cos(\alpha)\sin(1) - \sin(\alpha)\cos(1)) \\ &= \cos(1 - \alpha) + i \sin(1 - \alpha), \end{aligned}$$

donc

$$\Re z_3 = \cos(1 - \alpha), \Im z_3 = \sin(1 - \alpha), \overline{z_3} = \cos(1 - \alpha) - i \sin(1 - \alpha)$$

et

$$|z_3| = \sqrt{\cos^2(1 - \alpha) + \sin^2(1 - \alpha)} = 1.$$

On a

$$\Re z_4 = \sin(2\alpha), \Im z_4 = -\cos(2\alpha), \overline{z_4} = \sin(2\alpha) + i \cos(2\alpha)$$

et

$$|z_4| = \sqrt{\sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha)} = 1.$$

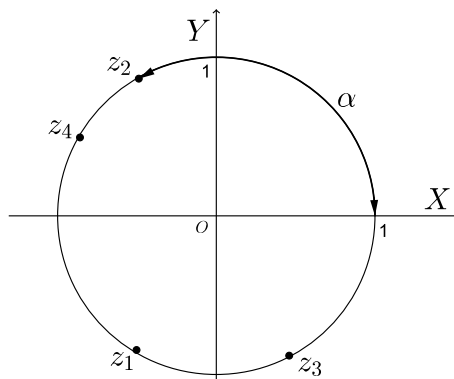
Cela étant, représentons graphiquement ces complexes. Vu la valeur du module, les points représentatifs de chacun des complexes donnés se situent sur le cercle de rayon 1 centré à l'origine du repère. On a aussi

$$\begin{aligned} \Re z_1 &= \cos(-\alpha), \Im z_1 = \sin(-\alpha) && \text{avec } -\alpha \in \left] -\pi, -\frac{\pi}{2} \right], \\ \Re z_2 &= \cos(\alpha), \Im z_2 = \sin(\alpha) && \text{avec } \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right], \\ \Re z_3 &= \cos(1 - \alpha), \Im z_3 = \sin(1 - \alpha) && \text{avec } 1 - \alpha \in \left] 1 - \pi, 1 - \frac{\pi}{2} \right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{cases} \Re z_4 = \sin(2\alpha) = \cos(\pi/2 - 2\alpha) = \cos(2\alpha - \pi/2) \\ \Im z_4 = -\cos(2\alpha) = -\sin(\pi/2 - 2\alpha) = \sin(2\alpha - \pi/2) \end{cases}$$

avec $2\alpha - \pi/2 \in [\pi/2, 3\pi/2]$. Comme un radian correspond à un peu plus de 57 degrés, on obtient la représentation suivante.



Exercice 5

Résoudre les équations suivantes et représenter les solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire »).

(a) $z^2 + 8 = 0$

(b) $27z^3 + 1 = 0$

(c) $z^2 + 2 = iz$

(d) $z^2 - z + 1 + i = 0$

(e) $z^2 - (1 - 2i)z = 1 + i$

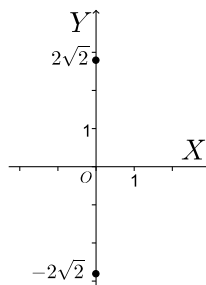
(f) $z^4 + 1 = 0$

Solution

(a) On a directement

$$z^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow z^2 = -8i^2 \Leftrightarrow z = 2\sqrt{2}i \text{ ou } z = -2\sqrt{2}i$$

donc les solutions sont les complexes $2\sqrt{2}i$ et $-2\sqrt{2}i$, qui sont situés sur l'axe « imaginaire pur ».



(b) La résolution algébrique donne

$$27z^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (3z + 1)(9z^2 - 3z + 1) = 0 \Leftrightarrow z = -1/3 \text{ ou } 9z^2 - 3z + 1 = 0.$$

Puisque le discriminant de la deuxième équation vaut $-27 = 27i^2$, les solutions de l'équation donnée sont

$$-1/3, \quad \frac{3 + 3\sqrt{3}i}{18} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{6} \text{ et } \frac{3 - 3\sqrt{3}i}{18} = \frac{1 - \sqrt{3}i}{6}.$$

L'ensemble des solutions de l'équation de départ est donc

$$S = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{6} (1 + i\sqrt{3}), \frac{1}{6} (1 - i\sqrt{3}) \right\}.$$

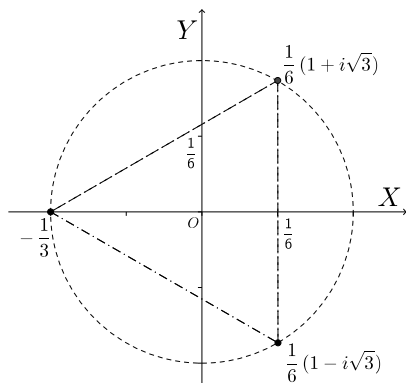
Cette écriture des solutions ne permet pas une représentation immédiate de celles-ci. L'écriture trigonométrique va faciliter le travail. De fait, comme on peut écrire

$$\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right),$$

on a aussi

$$S = \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right), \frac{1}{3} \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) \right\}.$$

Cette écriture permet de préciser rapidement que les trois points images des solutions, ayant $1/3$ pour module, sont situés sur un cercle de centre à l'origine du repère et de rayon $1/3$. Ce sont les sommets d'un triangle équilatéral dont l'un des sommets a pour coordonnées $(-1/3, 0)$.



- (c) Le discriminant de l'équation du second degré $z^2 - iz + 2 = 0$ est égal à $(-i)^2 - 8 = -9 = (3i)^2$. Dès lors, les solutions de l'équation sont les complexes

$$\frac{i+3i}{2} = 2i \quad \text{et} \quad \frac{i-3i}{2} = -i,$$

qui sont situés sur l'axe « imaginaire pur ».

- (d) Le discriminant de l'équation du second degré $z^2 - z + 1 + i = 0$ est égal à $1 - 4(1 + i) = -3 - 4i$. Cherchons les complexes qui ont ce discriminant comme carré, c'est-à-dire cherchons les réels x et y tels que

$$(x + iy)^2 = -3 - 4i.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 = -3 - 4i &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = -3 - 4i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4 = -3x^2 \\ xy = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

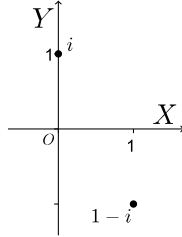
L'équation du second degré $X^2 + 3X - 4 = 0$ possède les solutions -4 et 1 ; dès lors on obtient

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 = -3 - 4i &\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4 = -3x^2 \\ xy = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -1 \\ xy = -2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les solutions de l'équation de départ sont les complexes

$$\frac{1 + (1 - 2i)}{2} = 1 - i \quad \text{et} \quad \frac{1 - (1 - 2i)}{2} = i.$$

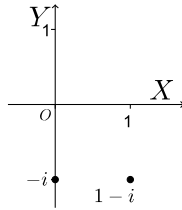
Leur représentation graphique est la suivante.



- (e) Le discriminant de l'équation du second degré $z^2 - (1 - 2i)z - (1 + i) = 0$ est égal à $(1 - 2i)^2 + 4(1 + i) = 1 - 4 - 4i + 4 + 4i = 1$. Les solutions de l'équation sont donc les complexes

$$\frac{1}{2} (1 - 2i + 1) = 1 - i \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} (1 - 2i - 1) = -i.$$

Leur représentation graphique est la suivante.



- (f) On a

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = i \text{ ou } z^2 = -i.$$

Une résolution algébrique des deux équations du second degré est la suivante. Cherchons d'une part les réels x et y tels que

$$(x + iy)^2 = i.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 = i &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 1 = 0 \\ 2xy = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}/2 \\ 2xy = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{2}/2 \\ 2xy = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}/2 \\ y = \sqrt{2}/2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{2}/2 \\ y = -\sqrt{2}/2 \end{cases}. \end{aligned}$$

Cherchons ensuite les réels x et y tels que

$$(x + iy)^2 = -i.$$

Avec le même type de calcul que dans le cas précédent, on obtient

$$\begin{aligned}(x + iy)^2 = -i &\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = -i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}/2 \\ y = -\sqrt{2}/2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{2}/2 \\ y = \sqrt{2}/2. \end{cases}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation de départ est donc

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), -\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i) \right\}.$$

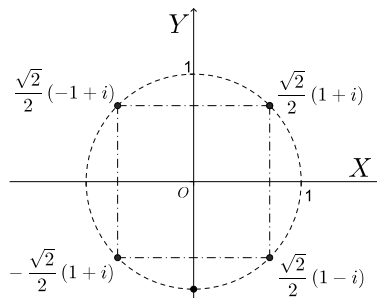
Cette écriture des solutions donne rapidement la représentation graphique ; notons que l'on a aussi

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

donc

$$S = \left\{ \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \right. \\ \left. \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right\}.$$

Cette écriture permet de préciser rapidement que les quatre points images des solutions, ayant 1 pour module, sont situés sur un cercle centré à l'origine du repère et de rayon 1. Ce sont les sommets d'un carré dont l'un des sommets a pour coordonnées $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.



Exercice 6

Reprenons les noyaux de Dirichlet (voir l'exercice 7 de la sous-section 8.3 de ce chapitre)

$$D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}, \quad x \neq k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que l'on a

$$D_n\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{k=-n}^n e^{ikx}$$

quel que soit le réel x qui n'est pas un multiple entier de 2π .

Solution

On a successivement

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^n e^{ikx} &= e^{-inx} \sum_{k=0}^{2n} e^{ikx} = e^{-inx} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= e^{-inx} e^{-ix/2} \frac{1 - e^{i(2n+1)x}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \\ &= \frac{e^{-i(2n+1)x/2} - e^{i(2n+1)x/2}}{e^{-ix/2} - e^{ix/2}} \\ &= D_n\left(\frac{x}{2}\right); \end{aligned}$$

on peut donc conclure.

10.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Déterminer les parties réelle et imaginaire, le conjugué et le module de chacun des complexes suivants. Représenter ces complexes dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire »).

$$z_1 = \frac{1}{i}, \quad z_2 = i(-i + 3), \quad z_3 = \frac{2i + 1}{2i - 1}, \quad z_4 = i^3, \quad z_5 = \frac{-3i + 1}{i - 1}, \quad z_6 = \frac{i^{2018}}{1 + 3i}$$

Exercice 2

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants et les représenter dans le plan muni d'un repère orthonormé (« X = axe réel » et « Y = axe imaginaire »).

$$z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad z_2 = -\sqrt{3} + 3i, \quad z_3 = (-1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i),$$

$$z_4 = \frac{-2}{-\sqrt{3} + i}, \quad z_5 = \frac{-2i}{1 + i}$$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes.

(a) $z^2 - 6z + 13 = 0$

(c) $z^2 = (1 - i)(z - 2)$

(e) $z^3 - 125 = 0$

(b) $z^2 + (2 - 3i)z - 6i = 0$

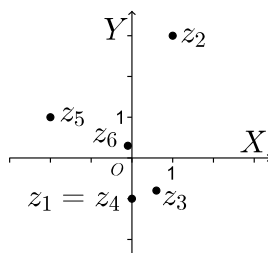
(d) $z^3 + 3z + 2i = 0$

(f) $z^6 + 729 = 0$

Solution 1

z	$\Re z$	$\Im z$	$\bar{z}$	$ z $
z_1	0	-1	i	1
z_2	1	3	$1 - 3i$	$\sqrt{10}$
z_3	$\frac{3}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{3+4i}{5}$	1

z	$\Re z$	$\Im z$	$\bar{z}$	$ z $
z_4	0	-1	i	1
z_5	-2	1	$-2 - i$	$\sqrt{5}$
z_6	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{-1-3i}{10}$	$\frac{\sqrt{10}}{10}$



Solution 2

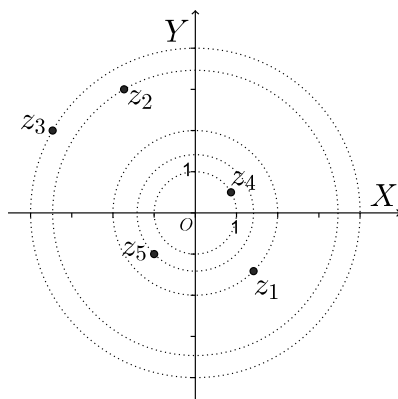
$z_1 = 2 (\cos(7\pi/4) + i \sin(7\pi/4))$

$z_3 = 4 (\cos(5\pi/6) + i \sin(5\pi/6))$

$z_2 = 2\sqrt{3} (\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3))$

$z_4 = \cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)$

$z_5 = \sqrt{2} (\cos(5\pi/4) + i \sin(5\pi/4))$



Solution 3

Si S est l'ensemble des solutions, on a

(a) $S = \{3 - 2i, 3 + 2i\}$ (b) $S = \{3i, -2\}$ (c) $S = \{-2i, 1 + i\}$

(d) $S = \{-i, 2i\}$ (e) $S = \left\{ 5, \frac{5(-1 + i\sqrt{3})}{2}, \frac{5(-1 - i\sqrt{3})}{2} \right\}$

(f) $S = \left\{ -3i, 3i, \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i), \frac{3}{2}(-\sqrt{3} + i), \frac{3}{2}(\sqrt{3} - i) \right\}$

10.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

On considère l'équation $z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = 0$.

1. Montrer que cette équation a des solutions réelles.
2. Résoudre l'équation.

Solution

1. On a successivement

$$\begin{aligned}
 a \in \mathbb{R} \text{ est solution} &\Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + (2 - i)a^2 + 3a - 3 + i = 0 \\
 &\Leftrightarrow a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 + i(-a^2 + 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0 \\ -a^2 + 1 = 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'équation $-a^2 + 1 = 0$ admet les solutions réelles 1 et -1 ; comme ces nombres vérifient aussi $a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 3a - 3 = 0$, ce sont les deux solutions réelles de l'équation de départ.

2. En divisant le polynôme $z \mapsto z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i$ par $(z - 1)(z + 1) = z^2 - 1$, on trouve

$$z^4 - 3z^3 + (2 - i)z^2 + 3z - 3 + i = (z^2 - 1)(z^2 - 3z + 3 - i).$$

Il reste donc à trouver les zéros du second facteur, c'est-à-dire à résoudre une équation polynomiale du second degré. En appliquant la méthode standard, on trouve les solutions

$$1 - i, \quad 2 + i.$$

Les solutions de l'équation de départ sont donc les nombres

$$-1, \quad 1, \quad 1 - i, \quad 2 + i.$$

Exercice 2

..... Déterminer l'ensemble des complexes c pour lesquels l'équation

$$iz^2 + cz + 1 = 0$$

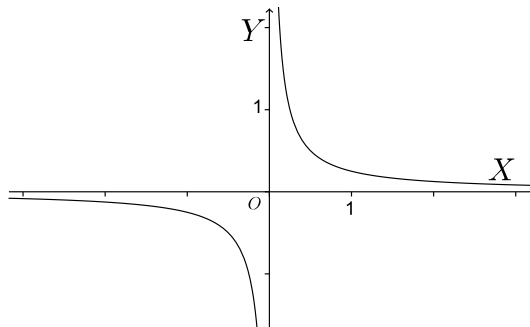
..... admet au moins une solution réelle.

Solution

Le réel x est solution de l'équation si et seulement si

$$\begin{aligned} ix^2 + (\Re c)x + i(\Im c)x + 1 &= 0 \Leftrightarrow x^2 + (\Im c)x = 0 \quad \text{et} \quad (\Re c)x + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\Im c \quad \text{et} \quad x = -\frac{1}{\Re c} \\ &\Leftrightarrow (\Re c) \cdot (\Im c) = 1. \end{aligned}$$

Les complexes c dont le produit des parties réelle et imaginaire est égal à 1 sont donc ceux pour lesquels l'équation a au moins une solution réelle ; ils se situent sur une hyperbole équilatère.



Exercice 3

Montrer que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{1}{2\Phi}$$

où Φ est le nombre d'or (voir l'exercice 3 de la sous-section 4.3 de ce chapitre).

Solution

Rappelons que (voir l'exercice 1 de la sous-section 6.3 de ce chapitre) pour tous complexes a, b et tout naturel non nul n , on a

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Dès lors, en posant

$$z_0 = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right),$$

on obtient

$$z_0^5 - 1 = (z_0 - 1)(z_0^4 + z_0^3 + z_0^2 + z_0 + 1).$$

Comme

$$z_0^5 = \cos\left(\frac{5(2\pi)}{5}\right) + i \sin\left(\frac{5(2\pi)}{5}\right) = 1,$$

on obtient

$$z_0^4 + z_0^3 + z_0^2 + z_0 + 1 = 0,$$

donc aussi

$$z_0^2 + z_0 + 1 + \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0^2} = 0. \quad (*)$$

Mais on a

$$z_0^2 + \frac{1}{z_0^2} = \left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 - 2$$

et dès lors (*) devient

$$\left(z_0 + \frac{1}{z_0}\right)^2 + z_0 + \frac{1}{z_0} - 1 = 0.$$

Cela étant, les solutions de l'équation du second degré

$$y^2 + y - 1 = 0$$

sont les nombres $(\sqrt{5} - 1)/2$ et $-(\sqrt{5} + 1)/2$; comme $\cos(2\pi/5)$ est positif, vu que $1/z_0 = \cos(-2\pi/5) + i \sin(-2\pi/5) = \cos(2\pi/5) - i \sin(2\pi/5)$, on obtient finalement

$$z_0 + \frac{1}{z_0} = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

et on conclut.

Plusieurs autres manières d'effectuer le calcul de $\cos(2\pi/5)$ ont été présentées auparavant (voir l'exercice 6 de la sous-section 8.3 de ce chapitre).

Exercice 4

⋮ Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins un
⋮ zéro réel.

Solution

Si z_0 est un zéro d'un polynôme à coefficients réels, alors son conjugué $\bar{z}_0$ est aussi zéro du polynôme. Comme le degré du polynôme est impair, il possède un nombre impair de zéros. Dès lors il y a au moins un zéro réel.

11 Suites numériques

11.1 Exercice de base résolu

Exercice. Nombre d'or et suite de Fibonacci

⋮ On définit la suite a_n ($n \in \mathbb{N}$) de la manière suivante :

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Cette suite a_n ($n \in \mathbb{N}$) s'appelle la suite de « Fibonacci » et elle est intimement liée au nombre d'or Φ (voir l'exercice 3 de la sous-section 4.3 de ce chapitre).

Si n est un naturel, démontrer que l'on a

$$1. \Phi^n = a_{n-1}\Phi + a_{n-2}, \quad \forall n \geq 2$$

$$2. a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n - \frac{(-1)^n}{\Phi^n} \right), \quad \forall n \geq 1$$

$$3. \sum_{k=0}^n a_k^2 = a_n a_{n+1}, \quad \forall n$$

$$4. a_n^2 - a_{n-1} a_{n+1} = (-1)^n, \quad \forall n \geq 1.$$

Solution

Avant d'aborder la preuve des propriétés énoncées, donnons explicitement les premières valeurs des éléments de cette suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55

1. Prouvons cette égalité par récurrence.

L'égalité annoncée est vérifiée pour $n = 2$ car elle s'écrit simplement

$$\Phi^2 = \Phi + 1$$

et on a bien les coefficients adéquats car $a_0 = a_1 = 1$.

Supposons alors que l'égalité soit vraie pour les naturels inférieurs ou égaux à n et montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$. On a successivement

$$\begin{aligned}
 \Phi^{n+1} &= \Phi \Phi^n = \Phi (a_{n-1}\Phi + a_{n-2}) \\
 &= a_{n-1}\Phi^2 + a_{n-2}\Phi \\
 &= a_{n-1}(\Phi + 1) + a_{n-2}\Phi \\
 &= (a_{n-1} + a_{n-2})\Phi + a_{n-1} \\
 &= a_n\Phi + a_{n-1}
 \end{aligned}$$

et la relation est donc bien vérifiée.

On peut donc conclure que l'égalité est vraie quel que soit le naturel n supérieur ou égal à 2.

2. Prouvons cette égalité par récurrence.

L'égalité annoncée est vérifiée pour $n = 1$ car on a

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi + \frac{1}{\Phi} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 + \sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = 1 = a_1.$$

Supposons alors que l'égalité soit vraie pour les naturels inférieurs ou égaux à n et montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$. On a

$$\begin{aligned}
 a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n - \frac{(-1)^n}{\Phi^n} + \Phi^{n-1} - \frac{(-1)^{n-1}}{\Phi^{n-1}} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n + \Phi^{n-1} - (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\Phi^{n-1}} - \frac{1}{\Phi^n} \right) \right).
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $\Phi^2 = 1 + \Phi$ et $1 = 1/\Phi^2 + 1/\Phi$, on obtient

$$\Phi^{j+1} = \Phi^{j-1} + \Phi^j \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Phi^{j-1}} = \frac{1}{\Phi^{j+1}} + \frac{1}{\Phi^j}, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

Dès lors, il vient

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n + \Phi^{n-1} - (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\Phi^{n-1}} - \frac{1}{\Phi^n} \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^{n+1} - (-1)^{n-1} \frac{1}{\Phi^{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^{n+1} - (-1)^{n+1} \frac{1}{\Phi^{n+1}} \right) \end{aligned}$$

et la relation est donc bien vérifiée.

On peut donc conclure que l'égalité est vraie quel que soit le naturel n supérieur ou égal à 1.

3. Prouvons cette égalité par récurrence.

L'égalité annoncée est vérifiée pour $n = 0$ car $a_0 = a_1 = 1$.

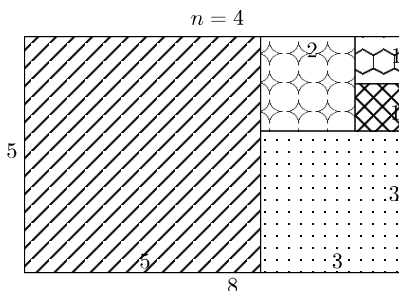
Supposons alors que l'égalité soit vraie pour les naturels inférieurs ou égaux à n et montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$. On a directement

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k^2 = a_{n+1}^2 + \sum_{k=0}^n a_k^2 = a_{n+1}^2 + a_n a_{n+1} = a_{n+1}(a_{n+1} + a_n) = a_{n+1} a_{n+2}$$

et la relation est donc bien vérifiée.

On peut donc conclure que l'égalité est vraie quel que soit le naturel n .

L'interprétation graphique de cette relation est la suivante : le fait de juxtaposer $n + 1$ carrés de côtés $a_0, a_1, \dots, a_n$ conduit à un rectangle de côtés a_n et a_{n+1} ; l'égalité 3 traduit l'égalité des aires.



4. Prouvons cette égalité par récurrence.

L'égalité annoncée est vérifiée pour $n = 1$ car $a_0 = a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

Supposons alors que l'égalité soit vraie pour les naturels inférieurs ou égaux à n et montrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$. On a

$$\begin{aligned}
 a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} &= (a_n + a_{n-1})^2 - a_n a_{n+2} \\
 &= a_n^2 + a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-1} - a_n (a_{n+1} + a_n) \\
 &= a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-1} - a_n a_{n+1} \\
 &= a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-1} - a_n (a_n + a_{n-1}) \\
 &= a_{n-1}^2 + a_n a_{n-1} - a_n^2 \\
 &= a_{n-1} (a_{n-1} + a_n) - a_n^2 \\
 &= a_{n-1} a_{n+1} - a_n^2 \\
 &= -(a_n^2 - a_{n-1} a_{n+1}) \\
 &= -(-1)^n = (-1)^{n+1}
 \end{aligned}$$

et la relation est donc bien vérifiée.

On peut donc conclure que l'égalité est vraie quel que soit le naturel n plus grand ou égal à 1.

11.2 Exercice pour s'entraîner

Exercice

⋮ Démontrer par récurrence que l'on a

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

⋮ quel que soit le naturel strictement positif n .

Solution

C'est direct par simple calcul.

11.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1. Un problème de découpage ...

⋮ Voici une illustration de la propriété

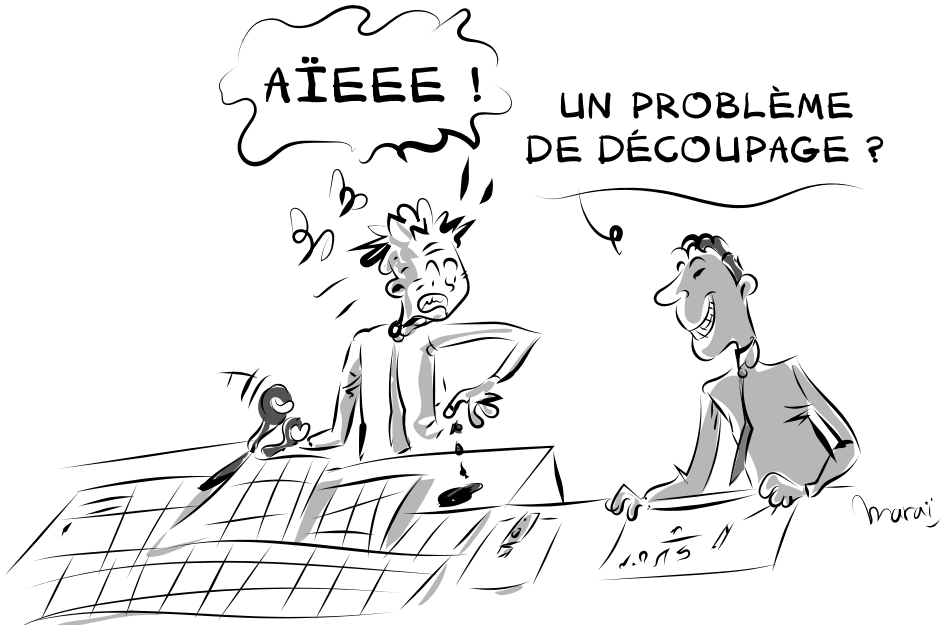
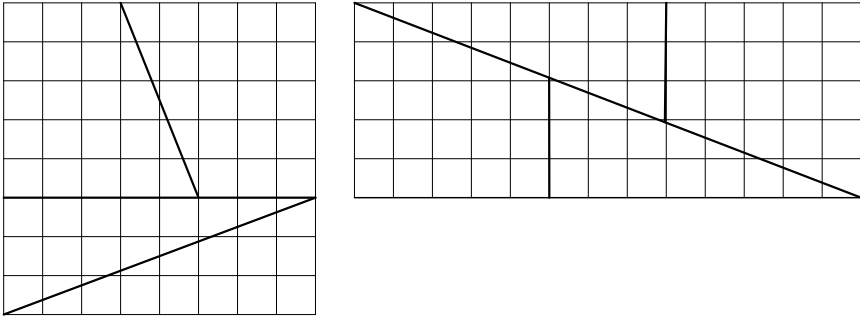
$$a_n^2 - a_{n-1} a_{n+1} = (-1)^n, \quad \forall n \geq 1$$

⋮ où a_n ($n \in \mathbb{N}$) est la suite de Fibonacci (voir l'exercice de la sous-section 11.1 de ce chapitre).

On trace un carré de côté de mesure 8 et on dessine à l'intérieur des petits carrés de côté de mesure 1 ; on a donc $8 \times 8 = 64$ petits carrés. On découpe alors l'intérieur du carré de départ en quatre parties comme indiqué sur le schéma suivant. Comme si on avait un puzzle, avec les différentes pièces, on construit un rectangle dont les côtés ont pour mesure 5 et 13. Ce rectangle est formé de $\dots 13 \times 5 = 65$ petits carrés. On a en effet, pour $n = 5$,

$$8 \times 8 - 5 \times 13 = -1.$$

D'où vient ce carré supplémentaire ?

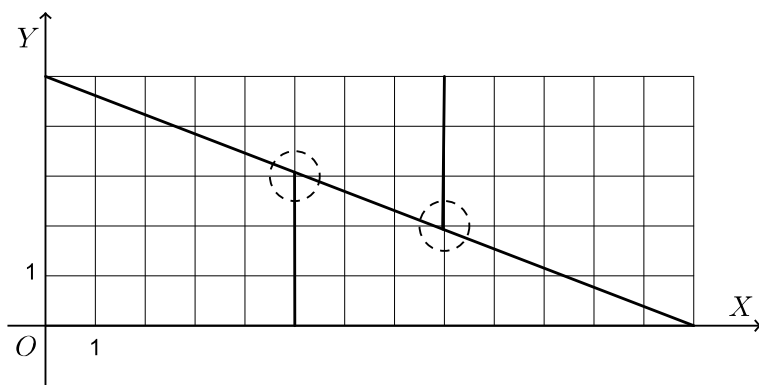


Solution

Il s'agit en fait d'une illusion ! La mise en place des pièces du puzzle pour constituer le « soi-disant » rectangle ne reconstruit en fait pas le rectangle complet : le sommet opposé à l'angle droit de chacun des trapèzes du puzzle ne se situe pas sur la diagonale du rectangle, l'un est « en dessous » et l'autre « au-dessus » de cette diagonale. Il manque donc une petite surface pour recouvrir le rectangle.

Pour s'en convaincre sans risquer d'être trompé par la représentation graphique, on peut procéder en utilisant la géométrie analytique. Fixons un repère orthonormé dont les axes sont formés à partir de deux côtés du rectangle comme indiqué sur la figure suivante. Les sommets dont il est question précédemment ont pour coordonnées $(5, 3)$ et $(8, 2)$ et la diagonale a pour équation cartésienne $y = (-5/13)(x - 13)$. On a bien

$$-\frac{5}{13}(5 - 13) = \frac{40}{13} > 3 \quad \text{et} \quad -\frac{5}{13}(8 - 13) = \frac{25}{13} < 2.$$



Exercice 2

Soit a_n ($n \in \mathbb{N}$) la suite de Fibonacci (voir l'exercice de la sous-section 11.1 de ce chapitre).

1. Montrer que la construction du rectangle à partir du carré de mesure de côté égale à a_n via le « puzzle » du premier exercice de cette sous-section conduit à un rectangle de surface plus petite que celle du carré lorsque n est pair et de mesure plus grande lorsque n est impair.
2. Illustrer le point précédent en positionnant les sommets des trapèzes par rapport à la diagonale du rectangle.
3. Montrer que l'illusion de l'exactitude de la reproduction est rapidement très grande lorsque n augmente.

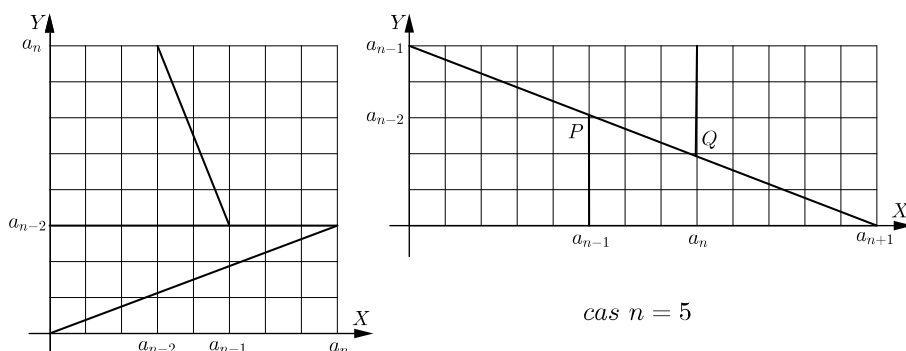
Solution

1. Le côté du carré de départ a comme mesure a_n ; le rectangle « reconstruit » à partir de ce carré découpé a respectivement a_{n-1} et $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ comme mesures de largeur et de longueur. Ainsi pour se convaincre du fait énoncé, il suffit de reprendre les égalités

$$a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}_0 ;$$

2. Comme dans le premier exercice de cette sous-section, la géométrie analytique permet d'apporter une réponse à la question.

De fait, fixons un repère orthonormé dont les axes sont formés à partir de deux côtés du rectangle comme indiqué sur la figure suivante.



Dans le carré de départ, les deux trapèzes sont égaux ; comme $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, les mesures des trois côtés consécutifs qui se coupent à angle droit valent $a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n-1}$. Ainsi, les points P, Q dont il faut examiner la position par rapport à la diagonale ont respectivement pour coordonnées

$$(a_{n-1}, a_{n-2}) \quad \text{et} \quad (a_{n-1} + a_n - a_{n-1}, a_{n-1} - a_{n-2}) = (a_n, a_{n-3}).$$

Cela étant, l'équation cartésienne de la diagonale considérée du rectangle est

$$y = \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - x).$$

Ainsi, l'ordonnée du point de la diagonale dont l'abscisse est égale à a_{n-1} vaut

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_{n-1}) &= \frac{a_{n-1}a_n}{a_{n+1}} \\
 &= \frac{a_{n-1}(a_{n-1} + a_{n-2})}{a_{n+1}} \\
 &= \frac{(-1)^{n-1} + a_{n-2}a_n + a_{n-1}a_{n-2}}{a_{n+1}} \\
 &= \frac{(-1)^{n-1} + a_{n-2}a_{n+1}}{a_{n+1}} \\
 &= a_{n-2} + \frac{(-1)^{n-1}}{a_{n+1}}
 \end{aligned}$$

et celle du point de la diagonale dont l'abscisse est égale à a_n vaut

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_n).$$

En remarquant que l'on a aussi

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_{n-1}) &= a_{n-1} - \frac{a_{n-1}^2}{a_{n+1}} \\
 &= a_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_n),
 \end{aligned}$$

on peut en déduire l'égalité

$$a_{n-2} + \frac{(-1)^{n-1}}{a_{n+1}} = a_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_n)$$

ou encore

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_n) = a_{n-1} - a_{n-2} - \frac{(-1)^{n-1}}{a_{n+1}}.$$

L'ordonnée du point de la diagonale dont l'abscisse est égale à a_n vaut donc

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_n) &= a_{n-1} - a_{n-2} - \frac{(-1)^{n-1}}{a_{n+1}} \\
 &= a_{n-3} + \frac{(-1)^n}{a_{n+1}}.
 \end{aligned}$$

On peut alors conclure aisément. De fait, si n est impair, alors

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_{n-1}) > a_{n-2}$$

et

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_n) < a_{n-3};$$

de même, si n est pair, alors

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_{n-1}) < a_{n-2}$$

et

$$\frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_n) > a_{n-3}.$$

Ainsi, lorsque n est impair, l'aire du carré est plus petite que celle du rectangle puisque les trapèzes ne « remplissent pas » le rectangle. C'est le contraire lorsque n est pair.

3. Il s'agit d'estimer le module de la différence entre les ordonnées de P, Q et des points de la diagonale qui ont respectivement la même abscisse, c'est-à-dire

$$\left| \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_{n-1}) - a_{n-2} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_n) - a_{n-3} \right|.$$

Le calcul à l'item 2 de cet exercice donne

$$\left| \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_{n-1}) - a_{n-2} \right| = \left| \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}} (a_{n+1} - a_n) - a_{n-3} \right| = \frac{1}{a_{n+1}}$$

quel que soit n . L'expression explicite de a_{n+1} étant (voir l'exercice 1 de la sous-section 11.1 de ce chapitre)

$$a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^{n+1} - (-1)^{n+1} \frac{1}{\Phi^{n+1}} \right),$$

on obtient bien que $1/a_{n+1}$ devient rapidement petit lorsque n augmente puisque $\Phi > 3/2$.

1 Rappels théoriques

1.1 Définitions de base

La définition précise de la notion de limite des valeurs d'une fonction est supposée connue, de même que les propriétés de base concernant la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient. La notion de « cas indéterminé » est aussi supposée connue.

Les notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction sont des cas particuliers de limites. Nous utilisons la notation Df pour désigner la dérivée d'une fonction f et $Df(x)$ pour désigner la valeur de cette dérivée au point x .

Si f est une fonction continue sur un intervalle $I =]a, b[$, elle admet toujours une primitive sur cet intervalle, c'est-à-dire qu'il existe une fonction (en fait beaucoup !) dont la dérivée est égale à la fonction de départ sur I . Une telle primitive est notée généralement $\int f(x) dx$, $x \in]a, b[$. Il faut bien noter que les symboles $\int$ et dx n'ont aucune signification en soi ici. Il s'agit juste d'une notation.

1.2 Propriétés et théorèmes fondamentaux

Sans en rappeler le contenu, notons qu'il faut bien connaître notamment le théorème de l'Hospital¹ pour le calcul de certaines limites, le théorème des valeurs intermédiaires, le théorème des bornes atteintes, le développement limité de Taylor² (et le cas particulier du théorème des accroissements finis, du théorème de Rolle³).

1.3 Fonction exponentielle

Nous rappelons ici la définition de la fonction exponentielle faisant intervenir les séries. Il importe de bien se rappeler les propriétés de cette fonction, surtout quand elle est considérée sur $\mathbb{R}$. Nous donnons ensuite la définition rigoureuse des fonctions sinus et cosinus.

1. Voir l'annexe.
2. Voir l'annexe.
3. Voir l'annexe.

La fonction exponentielle est la fonction

$$z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{z^m}{m!}.$$

On utilise la notation $\exp$ pour désigner cette fonction mais bien souvent on écrira

$$\exp(z) = e^z.$$

On définit alors les fonctions sinus et cosinus par

$$\cos(x) = \Re e^{ix}, \quad \sin(x) = \Im e^{ix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.4 Limites et dérivées des fonctions élémentaires

Rappelons ici quelques cas fondamentaux de limites et de dérivées.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccot}(x) = \pi$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arccot}(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$Dx^m = mx^{m-1}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

$$D\frac{1}{x^m} = -\frac{m}{x^{m+1}}, \quad x \in \mathbb{R}_0 \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

$$D\cos(x) = -\sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D\sin(x) = \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D\tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$D\cotan(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}, \quad x \neq k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$D\arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1, 1[$$

$$D\arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1, 1[$$

$$D\arctan(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$De^x = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$D\ln(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in]0, +\infty[$$

$$Dx^r = De^{r\ln(x)} = rx^{r-1}, \quad x \in]0, +\infty[\quad (r \in \mathbb{R})$$

1.5 Suites numériques

Rappelons que toute suite numérique réelle, $x_m (m \in \mathbb{N})$ croissante (resp. décroissante) et majorée (resp. minorée) converge vers une limite finie, ce qui signifie qu'il existe un nombre x tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $|x_m - x| \leq \varepsilon$ quel que soit $m \geq M$.

Rappelons aussi la définition de la « convergence vers l'infini » : la suite x_m ($m \in \mathbb{N}$) converge vers l'infini si, quel que soit $R > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $|x_m| \geq R$ quel que soit $m \geq M$.

2 Éléments de base relatifs aux fonctions

2.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

Représenter graphiquement les fonctions suivantes données explicitement, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

$$f_1(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$f_2(x) = -f_1(x)$$

$$f_3(x) = f_1(-x)$$

$$f_4(x) = |f_1(x)|$$

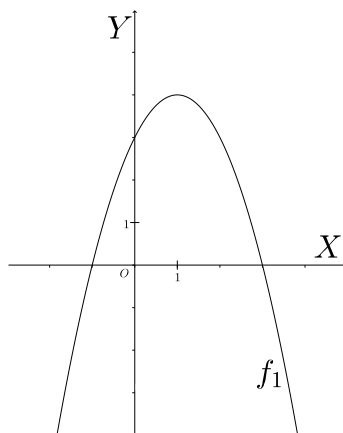
$$f_5(x) = f_1(x - 1)$$

$$f_6(x) = f_1(x) + 2$$

Solution

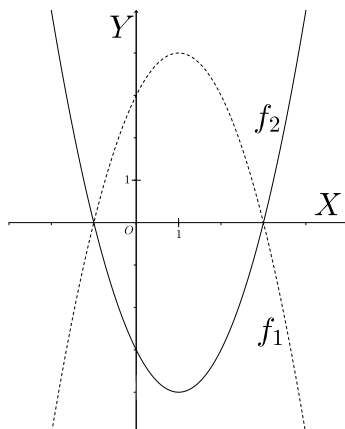
La fonction f_1

La fonction f_1 est un polynôme du second degré à coefficients réels dont les zéros sont -1 et 3 ; elle a donc pour représentation graphique la parabole coupant l'axe X en les réels -1 et 3 , d'axe d'équation cartésienne $x = 1$ et de sommet de coordonnées $(1, f_1(1)) = (1, 4)$.



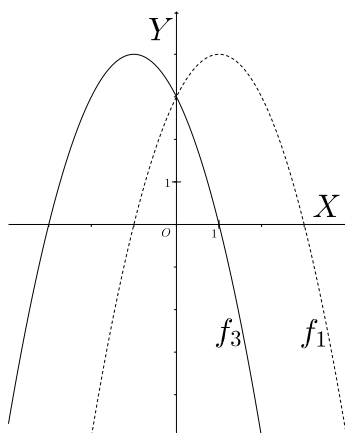
La fonction f_2

Vu sa définition, la fonction f_2 a pour graphique le symétrique de celui de f_1 par rapport à l'axe X .



La fonction f_3

Vu sa définition, la fonction f_3 a pour graphique le symétrique de celui de f_1 par rapport à l'axe Y .

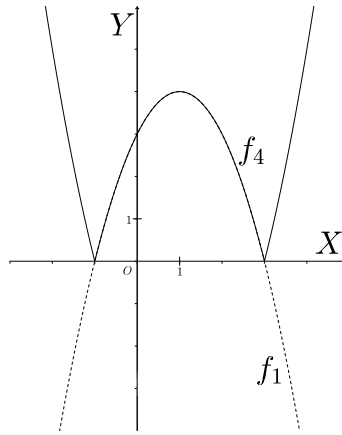


La fonction f_4

Par définition de la valeur absolue d'un réel, on a

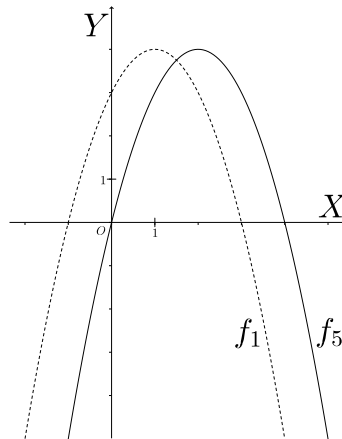
$$\begin{aligned}
 f_4(x) &= \begin{cases} f_1(x) = -x^2 + 2x + 3 & \text{si } f_1(x) \geq 0 \\ -f_1(x) = x^2 - 2x - 3 & \text{si } f_1(x) \leq 0 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} f_1(x) = -x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \in [-1, 3] \\ -f_1(x) = x^2 - 2x - 3 & \text{si } x \in]-\infty, -1] \cup [3, +\infty[. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Le graphique de f_4 est donc celui de f_1 sur l'intervalle $[-1, 3]$ et celui du symétrique du graphique de f_1 par rapport à l'axe X sur les intervalles $] -\infty, -1]$ et $[3, +\infty[$.



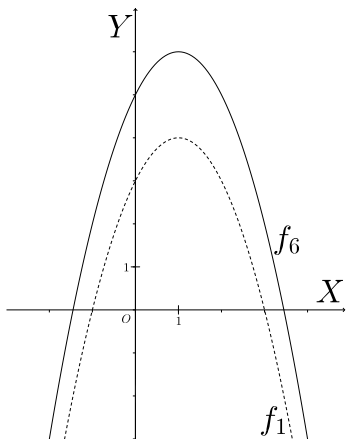
La fonction f_5

Vu sa définition, la fonction f_5 a pour graphique celui de f_1 translaté d'une unité dans le sens de l'axe des abscisses.



La fonction f_6

Vu sa définition, la fonction f_6 a pour graphique celui de f_1 translaté de deux unités dans le sens de l'axe des ordonnées.



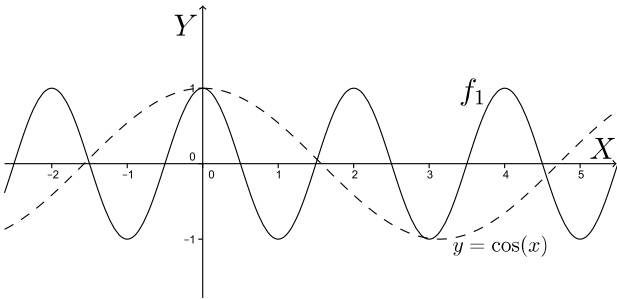
Exercice 2

- Déterminer le domaine de définition, la parité, la périodicité et le graphique des fonctions suivantes données explicitement.
- | | | |
|------------------------|-----------------------------|---|
| $f_1(x) = \cos(\pi x)$ | $f_2(x) = \sin(x) $ | $f_3(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ |
| $f_4(x) = \arccos(x)$ | $f_5(x) = \arccos(\cos(x))$ | $f_6(x) = \cos(\arccos(x))$ |
-

Solution

La fonction f_1

Comme la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$, paire et de période 2π , la fonction f_1 est également définie sur $\mathbb{R}$, paire et de période 2. Son graphique est analogue à celui de la fonction cosinus, avec une oscillation plus grande puisque la période est plus petite que celle du cosinus.

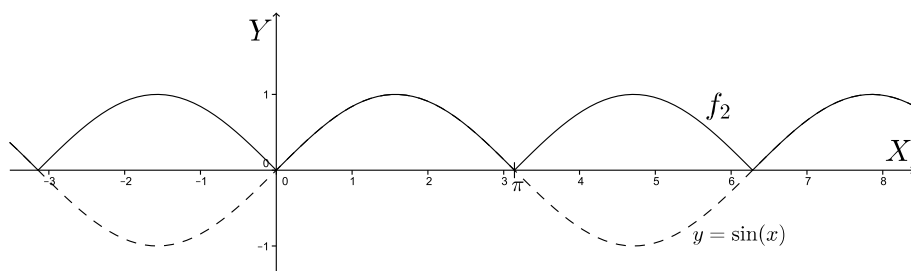


La fonction f_2

Comme les fonctions sinus et valeur absolue sont définies sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour la fonction f_2 . De plus, la fonction sinus étant impaire et la fonction valeur absolue étant paire, la fonction f_2 est paire. Enfin, comme on a

$$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$$

quel que soit le réel x , la fonction f_2 est périodique de période π . Son graphique est celui de la fonction sinus lorsque celle-ci est à valeurs positives et le symétrique du graphique de la fonction sinus par rapport à l'axe des abscisses lorsque la fonction sinus est à valeurs négatives.

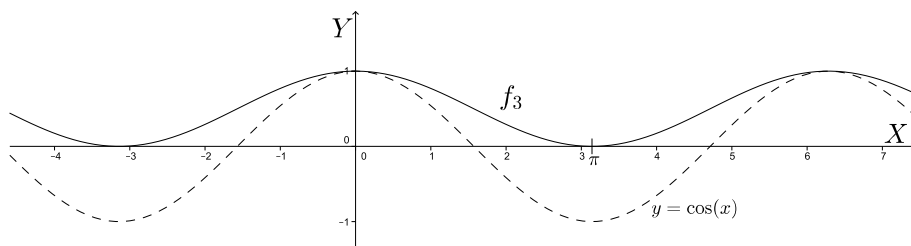


La fonction f_3

La fonction cosinus étant définie sur $\mathbb{R}$ et paire, il en est de même pour la fonction f_3 . Comme

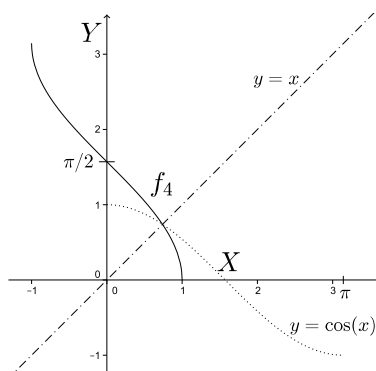
$$\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(x)}{2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

la fonction f_3 est périodique de période 2π . Son graphique est donc celui de la fonction cosinus, un peu « aplati » (toutes les ordonnées sont divisées par 2) et translaté d'une demi-unité dans le sens de l'axe des ordonnées.



La fonction f_4

La fonction f_4 est définie uniquement sur l'intervalle $[-1, 1]$, qui est un ensemble borné ; elle ne peut donc pas être périodique. Par ailleurs, on a $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ et $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$; la fonction n'est donc ni paire, ni impaire. Cela étant, comme f_4 est l'inverse de la fonction cosinus définie sur $[0, \pi]$, son graphique s'obtient par une symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice.

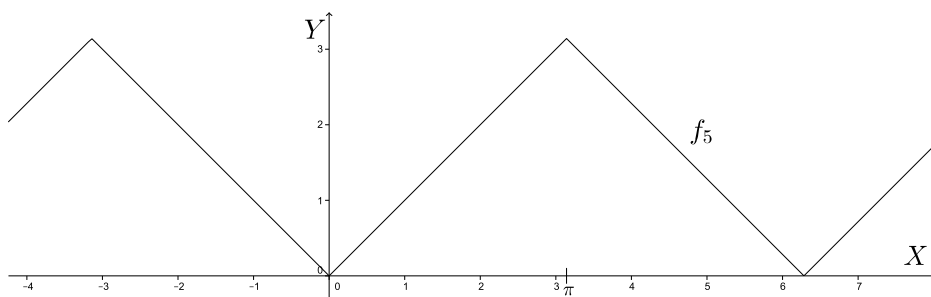


La fonction f_5

Comme la fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs dans $[-1, 1]$, domaine de définition de la fonction arccosinus, la fonction f_5 est définie sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, comme la fonction cosinus est paire et de période 2π , la fonction f_5 l'est aussi. Enfin, pour tout réel $x \in [0, 2\pi[$, on a

$$f_5(x) = \arccos(\cos(x)) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, \pi] \\ \arccos(\cos(2\pi - x)) = 2\pi - x & \text{si } x \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Le graphique de la fonction f_5 est donc le suivant.



La fonction f_6

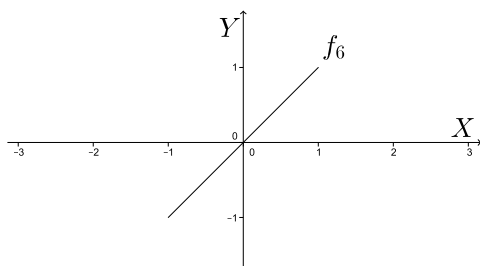
Comme la fonction arccosinus est définie sur $[-1, 1]$ et la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$, la fonction f_6 est définie sur l'intervalle $[-1, 1]$. Cet intervalle étant borné, elle n'est pas périodique. Comme

$$\arccos(x), x \in [-1, 1] \quad \text{et} \quad \cos(x), x \in [0, \pi]$$

sont inverses l'une de l'autre, on a

$$f_6(x) = \cos(\arccos(x)) = x, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

La fonction est donc impaire et son graphique est le suivant.



Exercice 3

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes données explicitement.

$$\begin{array}{lll}
 f_1(x) = \sqrt{-x^2 + x - 6} & f_2(x) = \ln(x^2 - 1) & f_3(x) = \arcsin(\ln(x)) \\
 f_4(x) = \frac{\sqrt{4 - 9x^2}}{\ln(|x - 1|)} & f_5(x) = \arccos(2e^{-x} - e^x) & f_6(x) = \sqrt{-1 + \ln^2(x)} \\
 f_7(x) = \ln(\arcsin(x)) & f_8(x) = \sqrt{-x^2 + x + 6} & f_9(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - e^{-x} + 1}}
 \end{array}$$

Solution

La fonction f_1

Comme la fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$ et comme un polynôme est défini sur $\mathbb{R}$, la fonction f_1 est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : -x^2 + x - 6 \geq 0\}.$$

Comme le discriminant du polynôme est strictement négatif et comme le coefficient de x^2 est négatif, ce polynôme est toujours strictement négatif. La fonction f_1 n'est donc pas définie.

La fonction f_2

Comme la fonction logarithme est définie sur $]0, +\infty[$ et comme un polynôme est défini sur $\mathbb{R}$, la fonction f_2 est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

La fonction f_3

Comme la fonction arcsinus est définie sur $[-1, 1]$ et comme la fonction logarithme est définie sur $]0, +\infty[$, la fonction f_3 est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ et } \ln(x) \in [-1, 1]\}.$$

Comme on a

$$-1 \leq \ln(x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} \leq x \leq e,$$

le domaine de définition de f_3 est l'intervalle

$$\left[\frac{1}{e}, e\right].$$

La fonction f_4

Comme le domaine de définition de la fonction logarithme est l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, comme celui de la fonction racine carrée est l'intervalle $[0, +\infty[$, comme tout polynôme est défini sur $\mathbb{R}$ et comme une fraction est définie en dehors des zéros de son dénominateur, le domaine de définition de f_4 est l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 1, |x - 1| \neq 1 \text{ et } 4 - 9x^2 \geq 0\}.$$

Cela étant, on a

$$|x - 1| = 1 \Leftrightarrow x - 1 = 1 \text{ ou } x - 1 = -1 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = 0$$

et

$$4 - 9x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (2 + 3x)(2 - 3x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

Il s'ensuit que le domaine de définition de la fonction f_4 est l'union de deux intervalles, à savoir

$$\left[-\frac{2}{3}, 0\right[\cup \left]0, \frac{2}{3}\right].$$

La fonction f_5

Comme la fonction arcocsinus est définie sur $[-1, 1]$ et comme la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f_5 est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : 2e^{-x} - e^x \in [-1, 1]\}.$$

Cela étant, on a

$$-1 \leq 2e^{-x} - e^x \leq 1 \Leftrightarrow -e^x \leq 2 - e^{2x} \leq e^x \Leftrightarrow \begin{cases} -e^{2x} + e^x + 2 \geq 0 \\ e^{2x} + e^x - 2 \geq 0. \end{cases}$$

Vu la façon dont le système se présente, en remplaçant e^x par y , on effectue tout d'abord la résolution suivante :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -y^2 + y + 2 \geq 0 \\ y^2 + y - 2 \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -(y - 2)(y + 1) \geq 0 \\ (y + 2)(y - 1) \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow y \in [-1, 2] \cap \left(]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[)\right) \\ &\Leftrightarrow y \in [1, 2]. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'on a

$$-1 \leq 2e^{-x} - e^x \leq 1 \Leftrightarrow e^x \in [1, 2] \Leftrightarrow x \in [0, \ln(2)] ;$$

la fonction f_5 est donc définie sur l'intervalle

$$[0, \ln(2)].$$

La fonction f_6

Comme le domaine de définition de la fonction logarithme est l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$ et comme celui de la fonction racine carrée est l'intervalle $[0, +\infty[$, le domaine de définition de la fonction f_6 est

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ et } \ln(x) \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\}.$$

Cela étant, pour $x > 0$, on a

$$\ln(x) \leq -1 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{e}$$

et

$$\ln(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \geq e.$$

La fonction f_6 est donc définie sur

$$\left]0, \frac{1}{e}\right] \cup [e, +\infty[.$$

La fonction f_7

Comme la fonction arcsinus est définie sur $[-1, 1]$ et comme la fonction logarithme est définie sur $]0, +\infty[$, la fonction f_7 est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x \in [-1, 1] \text{ et } \arcsin(x) > 0\} =]0, 1].$$

La fonction f_8

Comme la fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$ et comme un polynôme est défini sur $\mathbb{R}$, la fonction f_8 est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : -x^2 + x + 6 = (x+2)(3-x) \geq 0\} = [-2, 3].$$

La fonction f_9

Comme la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, la fonction racine carrée sur $[0, +\infty[$ et toute fraction en dehors des zéros de son dénominateur, la fonction f_9 est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : e^x - e^{-x} + 1 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} : e^{2x} - 1 + e^x > 0\}.$$

Cela étant, le polynôme du second degré $y \mapsto y^2 + y - 1$ a pour zéros les réels $-(1 + \sqrt{5})/2$ et $(\sqrt{5} - 1)/2$ et est strictement positif sur

$$\left] -\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[\cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty \right[.$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} e^{2x} - 1 + e^x > 0 &\Leftrightarrow e^x \in \left] -\infty, -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right[\cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, +\infty \right[\\ &\Leftrightarrow x \in \left] \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), +\infty \right[; \end{aligned}$$

la fonction f_9 est donc définie sur l'intervalle

$$\left] \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), +\infty \right[.$$

Exercice 4

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes données explicitement et les représenter graphiquement, uniquement en se servant des symétries et des représentations graphiques des fonctions logarithme et exponentielle.

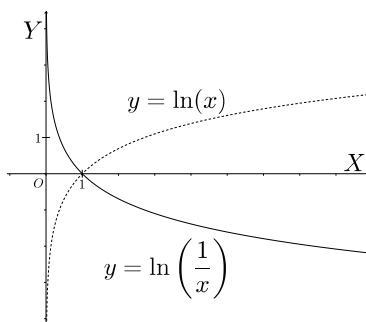
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right), \quad \ln(ex), \quad -\frac{1}{\exp(x)}, \quad \exp(-\ln(1/|x|)).$$

Solution

La fonction $x \mapsto \ln(1/x)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x), \quad \forall x > 0.$$

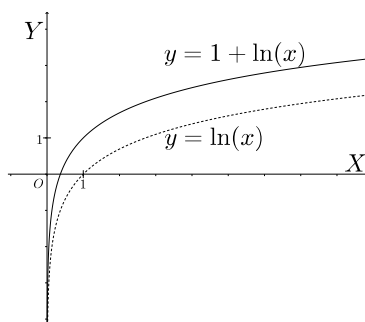
Il s'ensuit que son graphique est obtenu à partir de celui de la fonction $\ln$ par une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.



La fonction $x \mapsto \ln(ex)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\ln(ex) = \ln(e) + \ln(x) = 1 + \ln(x), \quad \forall x > 0.$$

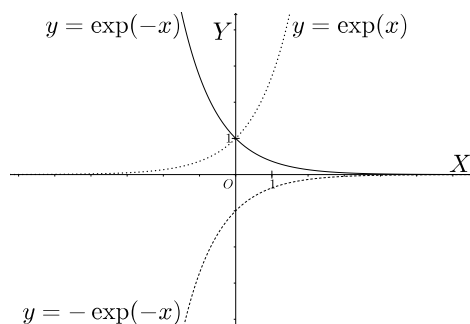
Il s'ensuit que son graphique est obtenu à partir de celui de la fonction $\ln$ par une translation d'une unité dans le sens des ordonnées.



La fonction $x \mapsto -1/\exp(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on a

$$-\frac{1}{\exp(x)} = -\exp(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

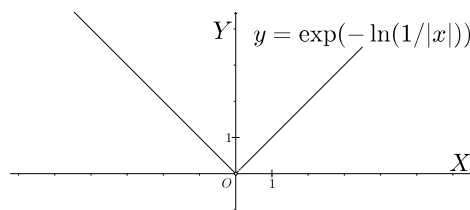
Il s'ensuit que son graphique est obtenu en deux étapes. La première consiste à partir du graphique de la fonction exponentielle et à appliquer une symétrie orthogonale par rapport à l'axe des ordonnées ; on obtient alors le graphique de la fonction $x \mapsto \exp(-x)$. La seconde consiste à appliquer une symétrie orthogonale de ce dernier graphique par rapport à l'axe des abscisses.



La fonction $x \mapsto \exp(-\ln(1/|x|))$ est définie sur $\mathbb{R}_0$ et on a

$$\exp\left(-\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) = \exp(\ln(|x|)) = |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0.$$

Il s'ensuit que son graphique est le suivant.



2.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Représenter graphiquement les fonctions suivantes données explicitement, toutes définies sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = x\sqrt{(x-2)^2} & f_2(x) = -f_1(x) & f_3(x) = f_1(-x) \\ f_4(x) = |f_1(x)| & f_5(x) = f_1(x+1) & f_6(x) = f_1(x) - 3 \end{array}$$

Exercice 2

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes données explicitement et les représenter graphiquement, uniquement en se servant des symétries et des représentations graphiques des fonctions logarithme et exponentielle.

$$\ln(x) - 1, \quad \ln\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |-\ln(-x)|, \quad -\exp(x) + 1, \quad \exp(x-1), \quad \exp(x) - 2.$$

Exercice 3

Déterminer le domaine de définition, la parité, la périodicité et le graphique des fonctions suivantes données explicitement.

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = \sin(2\pi x) & f_2(x) = |\cos(x)| & f_3(x) = \sin^2\left(\frac{x}{4}\right) \\ f_4(x) = \arcsin(2x) & f_5(x) = \arcsin(\sin(2x)) & \end{array}$$

Exercice 4

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes données explicitement. Dans les cas de f_8 , f_9 , f_{10} et f_{11} , mentionner de quelles fonctions élémentaires chacune de ces fonctions est la composée.

$$\begin{array}{lll} f_1(x) = \ln(\ln(\tan(x))) & f_2(x) = \arcsin(e^x) & f_3(x) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1-2e^x}{1+2e^x}}\right) \\ f_4(x) = \frac{1}{1-|x+1|} & f_5(x) = \ln(e^x - e) & f_6(x) = \ln\left(x - \sqrt{1+x^2}\right) \\ f_7(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} & f_8(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x+2}} & f_9(x) = \ln(x^2 + x - 6) \\ f_{10}(x) = \arcsin(x^2 - 1) & f_{11}(x) = \arctan(\ln(x)) & \end{array}$$

Exercice 5

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes données explicitement, ainsi que leur image (x est une variable réelle). Dans chaque cas, déterminer la fonction inverse, si elle existe ; au besoin, réduire le domaine de définition pour pouvoir en définir une. Représenter alors f et son inverse dans le même repère orthonormé.

$$f_1(x) = 2x + 1, \quad f_2(x) = x^2 - 1, \quad f_3(x) = \frac{2}{x}, \quad f_4(x) = |x - 1|.$$

Exercice 6

1. Soient une fonction g définie sur l'intervalle $[-1, 0]$ et la fonction

$$f : y \mapsto f(y) = g(\ln(y - 2)).$$

- (a) Déterminer le domaine de définition de f .
 (b) Si elle existe, que vaut l'image de 3 par f sachant que

$$g(-1) = 3, \quad g(-1/2) = 4 \quad \text{et} \quad g(0) = 7 ?$$

2. Même question pour g défini sur l'intervalle $[0, 4]$ et

$$f : x \mapsto f(x) = g(\sqrt{10x - x^2})$$

sachant que

$$g(0) = -5, \quad g(2) = \sqrt{3} \quad \text{et} \quad g(3) = \sqrt{2}.$$

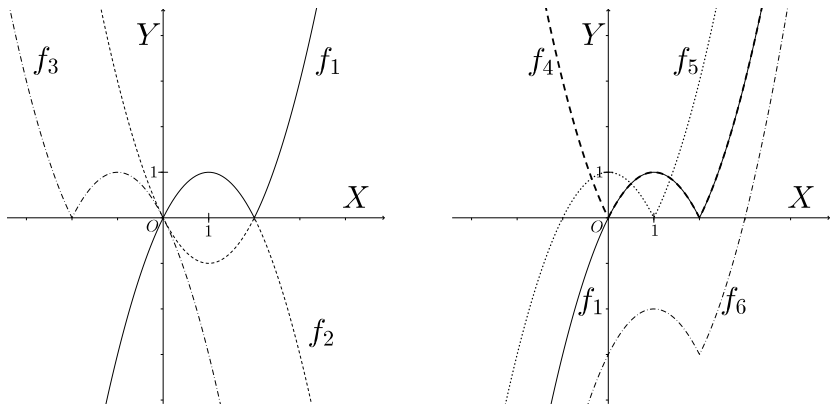
Exercice 7

Si elles sont définies, simplifier les expressions suivantes au maximum.

- | | |
|---|---|
| (a) $\ln(\cos^2(2\pi/3)) + \ln(\sin(2\pi/3))$ | (b) $\cotan(\ln(e^{3\pi/2}))$ |
| (c) $\exp(2 \ln(3e))$ | (d) $\arccos(-\sqrt{2}/2)$ |
| (e) $\arccos(\cos(6\pi/5))$ | (f) $\operatorname{arccotan}(\sqrt{3})$ |
| (g) $\cotan(\operatorname{arccotan}(\pi/2))$ | (h) $\operatorname{arccotan}(\cotan(8\pi/7))$ |

Solution 1

On a les représentations suivantes.

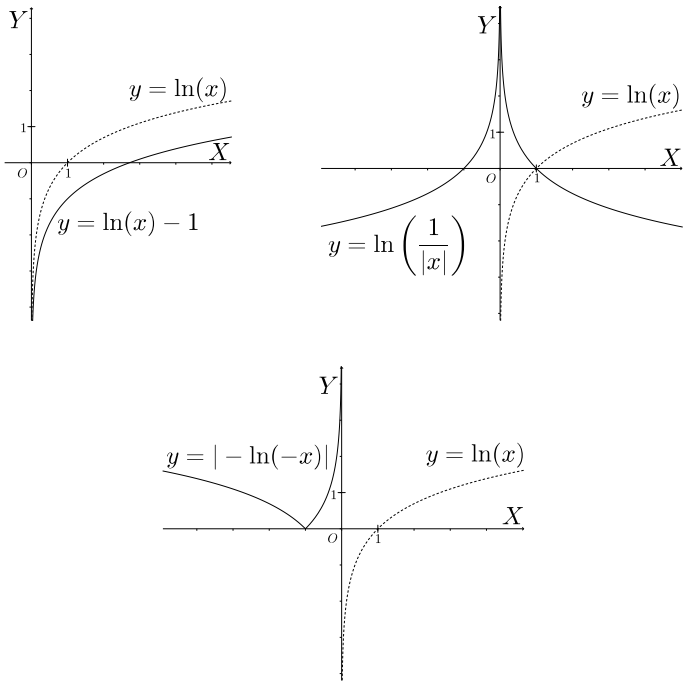


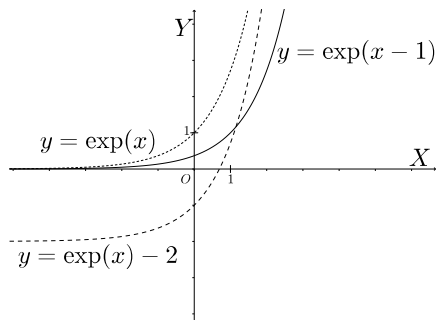
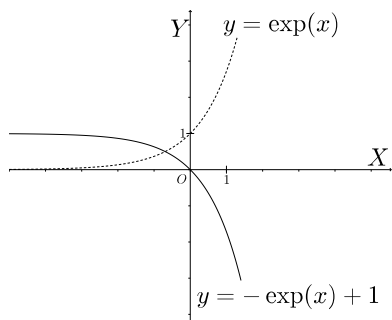
Solution 2

Le domaine de définition de la première fonction est $]0, +\infty[$, celui de la deuxième est $\mathbb{R}_0$ et celui de la troisième est $] - \infty, 0[$.

Le domaine de définition des trois fonctions exponentielles est $\mathbb{R}$.

Cela étant, on a les représentations graphiques suivantes.

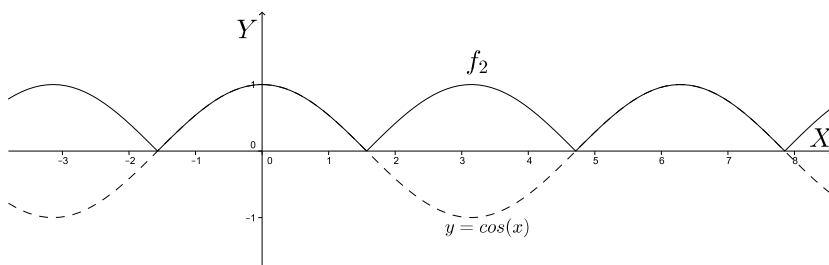
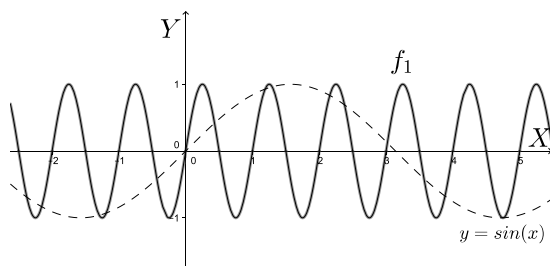


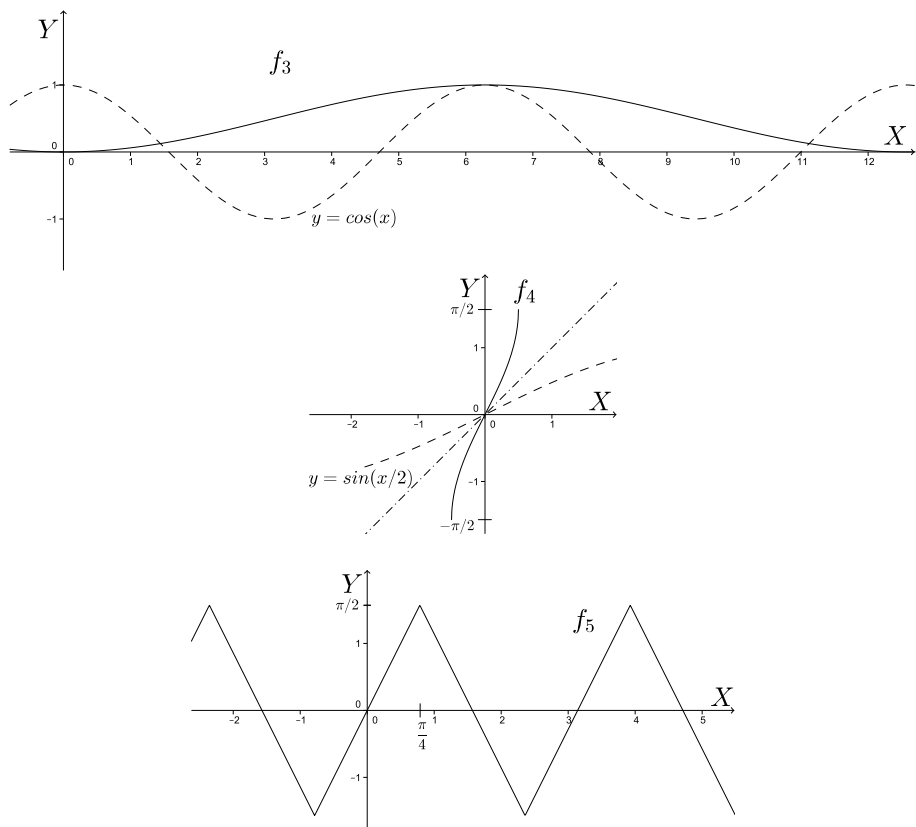


Solution 3

Fonction	Domaine de définition	Parité	Période
f_1	$\mathbb{R}$	impair	1
f_2	$\mathbb{R}$	pair	π
f_3	$\mathbb{R}$	pair	4π
f_4	$[-1/2, 1/2]$	impair	non périodique
f_5	$\mathbb{R}$	impair	π

Les graphiques sont les suivants.





Solution 4

Fonction	Domaine de définition	Fonction	Domaine de définition
f_1	$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]\pi/4 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$	f_2	$] - \infty, 0]$
f_3	$] - \infty, -\ln(2)]$	f_4	$\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$
f_5	$]1, +\infty[$	f_6	$\emptyset$
f_7	$[-1, +\infty[$	f_8	$] - \infty, -2 [\cup [-1, +\infty[$
f_9	$] - \infty, -3[\cup]2, +\infty[$	f_{10}	$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
f_{11}	$]0, +\infty[$		

Si on note la fonction donnée par $f \circ g$ alors on a successivement

- pour $f_8 : x \mapsto \sqrt{(x+1)/(x+2)}$, les fonctions $g : x \mapsto (x+1)/(x+2)$ et $f : y \mapsto \sqrt{y}$
- pour $f_9 : x \mapsto \ln(x^2 + x - 6)$, les fonctions $g : x \mapsto x^2 + x - 6$ et $f : y \mapsto \ln(y)$
- pour $f_{10} : x \mapsto \arccos(x^2 - 1)$, les fonctions $g : x \mapsto x^2 - 1$ et $f : y \mapsto \arccos(y)$
- pour $f_{11} : x \mapsto \arctan(\ln(x))$, les fonctions $g : x \mapsto \ln(x)$ et $f : y \mapsto \arctan(y)$.

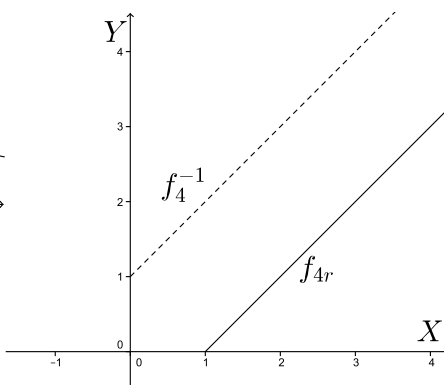
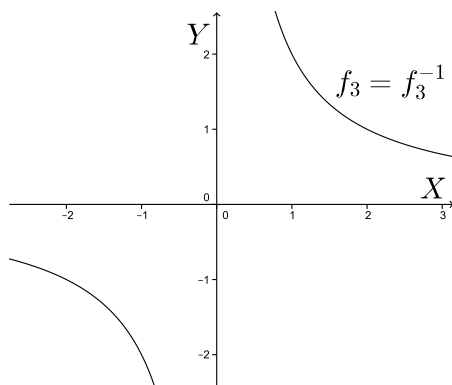
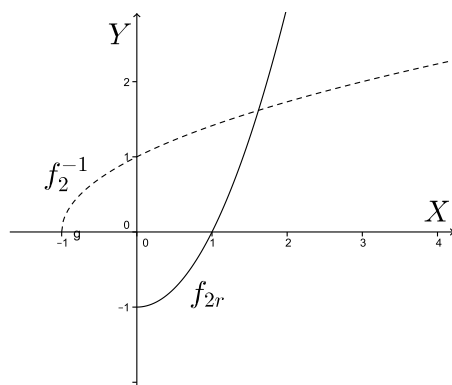
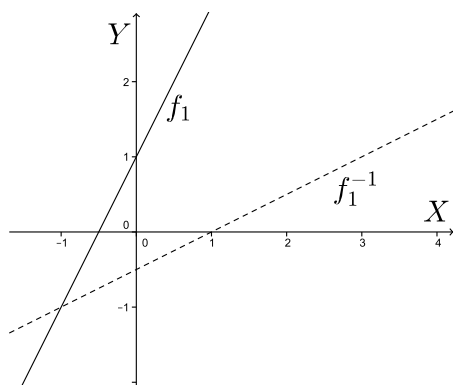
Solution 5

Fonction	Domaine de définition	Image	Fonction inverse
f_1	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f_1^{-1} : x \mapsto (x - 1)/2$
f_2	$\mathbb{R}$	$[-1, +\infty[$	pas d'inverse (voir ci-dessous)
f_3	$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R}_0$	$f_3^{-1} : x \mapsto 2/x$
f_4	$\mathbb{R}$	$[0, +\infty[$	pas d'inverse (voir ci-dessous)

Si on restreint le domaine de définition de f_2 à l'ensemble $[0, +\infty[$ par exemple, alors la fonction $f_{2r} : [0, +\infty[\rightarrow [-1, +\infty[: x \mapsto x^2 - 1$ admet une fonction inverse donnée par $f_2^{-1} : [-1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto \sqrt{x + 1}$.

Si on restreint le domaine de définition de f_4 à l'ensemble $[1, +\infty[$ par exemple, alors la fonction $f_{4r} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[: x \mapsto x - 1$ admet une fonction inverse donnée par $f_4^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[: x \mapsto x + 1$.

Les graphiques sont les suivants.



Solution 6

1. (a) Le domaine de définition de f est l'intervalle $[2 + (1/e), 3]$.
 (b) Puisque 3 appartient au domaine de définition de f , on a $f(3) = 7$.
2. (a) Le domaine de définition de f est $[0, 2] \cup [8, 10]$.
 (b) Puisque 3 n'appartient pas au domaine de définition de f , l'image de 3 par f n'existe pas.

Solution 7

Les expressions sont définies et ont respectivement les valeurs suivantes.

- | | | | |
|-----------------------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| (a) $\frac{1}{2} \ln 3 - 3 \ln 2$ | (b) 0 | (c) $9e^2$ | (d) $\frac{3\pi}{4}$ |
| (e) $\frac{4\pi}{5}$ | (f) $\frac{\pi}{6}$ | (g) $\frac{\pi}{2}$ | (h) $\frac{\pi}{7}$ |

2.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

1. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle I . La fonction fg l'est-elle encore ? Si la réponse est affirmative, le démontrer. Dans le cas contraire, en donner une justification ainsi qu'une (des) condition(s) sous laquelle (lesquelles) elle l'est.
2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $] -r, r[$ où $r > 0$. Étudier la parité des fonctions $f + g$ et fg dans le cas où les deux fonctions f, g sont paires (resp. impaires, une paire et l'autre impaire).

Solution

1. La réponse est négative et l'exemple qui suit le justifie. La fonction $f = \sin$ est croissante sur $[0, \pi/2]$, ainsi que la fonction $g = -\cos$; cependant, on a $(fg)(0) = 0$ et $(fg)(\pi/4) = -1/2$.

Cela étant, si les deux fonctions sont à valeurs positives, le produit est encore croissant. De fait, si f et g sont définis sur I , à valeurs positives et si $x < x'$, alors

$$f(x)g(x) \leq f(x')g(x) \leq f(x')g(x').$$

On peut aussi remarquer que si les fonctions sont définies sur I , à valeurs négatives et si $x < x'$, alors

$$f(x)g(x) \geq f(x')g(x) \geq f(x')g(x') ;$$

dès lors fg est décroissant.

2. Dans le cas où les deux fonctions sont paires, leur somme et leur produit sont bien sûr pairs aussi car on a

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

et

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x)$$

quel que soit $x \in]-r, r[$.

Dans le cas où les deux fonctions sont impaires, alors leur somme l'est aussi et leur produit est pair car on a

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f + g)(x)$$

et

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = (-1)^2 f(x)g(x) = (fg)(x)$$

quel que soit $x \in]-r, r[$.

Dans le cas où f est pair et g impair, leur produit est impair car on a

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -(fg)(x)$$

quel que soit $x \in]-r, r[$. Quant à leur somme, on a

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x)$$

quel que soit $x \in]-r, r[$. Ainsi, si la somme est paire, alors g est identiquement nul. Si la somme est impaire, f est identiquement nul. Pour $f(x) = x^2$ et $g(x) = x$, $f + g$ n'est ni pair ni impair ($(f + g)(-1) = 0$, $(f + g)(1) = 2$).

Exercice 2

⋮ S'il existe, déterminer l'inverse de la fonction $f : x \mapsto x|x|$. Représenter alors f
⋮ et son inverse.

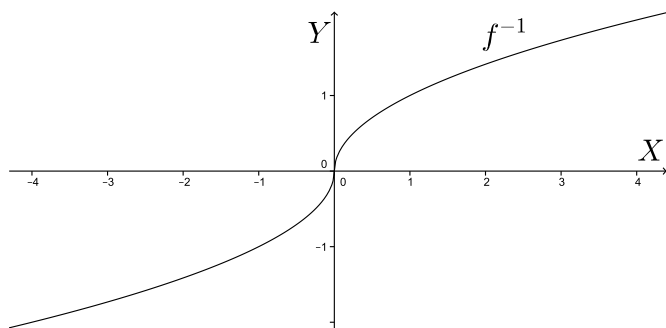
Solution

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et elle s'écrit aussi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 0 ; \end{cases}$$

elle est injective sur $\mathbb{R}$. Cela étant, on a directement

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$



3 Limites

3.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

Déterminer si les limites suivantes sont envisageables. Si la réponse est affirmative et si elles existent, les déterminer sans utiliser le théorème de l'Hôpital.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 2x)$

(b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 5x}{x^2 + 3}$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + x^6}}{x^3}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{1}{x+2}\right)$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotan(x)}{\sin(3x)}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{\sin(2x)}$

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln(x^2)}$

(j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(|-x + \pi|)$

(k) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right)$

(l) $\lim_{x \rightarrow -1/2} \ln(\arctan(x))$

(m) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{|1 - x|}$

(n) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2| - 1}{x^2 - 4}$

(o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{1 + x + 2x^2} - \sqrt{2x^2 + 3} \right)$

(p) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x + 2) - \ln(3x))$

(q) $\lim_{y \rightarrow +\infty} \log_y(3)$

(r) $\lim_{u \rightarrow -\infty} u \exp\left(\frac{1}{u-1}\right)$

(s) $\lim_{x \rightarrow 1} \arcsin\left(\frac{x^2 - 1}{x - 1}\right)$

(t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(2x)}{\exp(x^2)}$

(u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^x$

(v) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \log_{\ln(x)}(\pi)$

Solution

- (a) La fonction donnée est un polynôme ; elle est donc définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non majoré ; la limite est donc envisageable.

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \left(-1 + \frac{2}{x} \right) \right) = -\infty.$$

- (b) La fonction donnée est une fraction rationnelle ; elle est donc définie en dehors des zéros du dénominateur, qui sont ici les réels -2 et 2 . Cette fraction est donc définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, ensemble qui rencontre tout intervalle ouvert contenant 2 . La limite est donc envisageable.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x - 2)(x + 2)} = \infty.$$

On peut préciser que

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x^2 - 4} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x^2 - 4} = +\infty.$$

- (c) La fonction donnée est une fraction rationnelle ; elle est donc définie en dehors des zéros du dénominateur. Dans le cas présent, il n'y a pas de zéro réel ; ainsi la fonction est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non minoré ; la limite est donc envisageable.

On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 + 5x}{x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(-2 + (5/x))}{x^2(1 + 3/x^2)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2 + (5/x)}{1 + (3/x^2)} = -2.$$

- (d) La fonction $x \mapsto \sqrt{1 + x^6}/x^3$ est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non minoré ; la limite est donc envisageable.

On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1 + x^6}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|^3 \sqrt{(1/x^6) + 1}}{x^3} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{(1/x^6) + 1} = -1.$$

- (e) La fonction $x \mapsto \exp(1/x)$ est définie sur $\mathbb{R}_0$. Puisque tout intervalle ouvert contenant 0 rencontre ce domaine, la limite est envisageable.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \exp(y) = +\infty ;$$

ainsi, vu le théorème des limites des fonctions de fonction, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \exp(y) = +\infty.$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} \exp(y) = 0 ;$$

dès lors, vu le théorème des limites des fonctions de fonction, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \exp(y) = 0.$$

La limite n'existe donc pas.

- (f) La fonction $x \mapsto \exp(-1/(x+2))$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, ensemble non majoré ; la limite est donc envisageable.

On a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \exp(-y) = 1 ;$$

vu le théorème des limites des fonctions de fonction, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{1}{x+2}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \exp(-y) = 1.$$

- (g) La fonction cotan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et la fonction $x \mapsto \sin(3x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule en les multiples entiers de $\pi/3$. Il s'ensuit que la fonction $x \mapsto \cotan(x)/\sin(3x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi/3 : k \in \mathbb{Z}\}$, en particulier sur $A =]-\pi/3, 0[\cup]0, \pi/3[$. Puisque tout intervalle ouvert contenant 0 rencontre A, la limite peut être envisagée.

Comme on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) \sin(3x)) = 0^+,$$

on obtient directement

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotan(x)}{\sin(3x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{\sin(x) \sin(3x)} = +\infty.$$

- (h) La fonction tan est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et la fonction $x \mapsto \sin(2x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et s'annule en les multiples entiers de $\pi/2$. Il s'ensuit que la fonction $x \mapsto \tan(x)/\sin(2x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus (\{k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$, en particulier sur $A =]-\pi/2, 0[\cup]0, \pi/2[$. Puisque tout intervalle ouvert contenant 0 rencontre A, la limite peut être envisagée.

On obtient alors directement

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{\sin(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) 2 \sin(x) \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos^2(x)} = \frac{1}{2}.$$

- (i) La fonction $x \mapsto 1/\ln(x^2)$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 0 \text{ et } \ln(x^2) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}.$$

Puisque cet ensemble n'est pas minoré, la limite est envisageable.

On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln(y) = +\infty ;$$

ainsi, vu le théorème des limites des fonctions de fonction, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln(x^2)} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(y)} = 0^+.$$

- (j) La fonction $x \mapsto \ln(|-x + \pi|)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pi\}$; cet ensemble n'étant pas majoré, la limite est envisageable.

Pour $x > \pi$, on a $\ln(|-x + \pi|) = \ln(x - \pi)$; dès lors, on obtient directement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(|-x + \pi|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x - \pi) = +\infty.$$

- (k) La fonction $x \mapsto \arctan(1/(x-1))$ est définie sur $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Puisque tout intervalle ouvert contenant 1 rencontre $A \cap]1, +\infty[=]1, +\infty[$, la limite est envisageable.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-;$$

ainsi, vu le théorème des limites des fonctions de fonction, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \arctan\left(\frac{1}{x-1}\right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-.$$

- (l) La fonction $x \mapsto \ln(\arctan(x))$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R} : \arctan(x) > 0\} =]0, +\infty[$. Comme cet ensemble ne rencontre pas tous les intervalles ouverts contenant $-1/2$, la limite n'est donc pas envisageable.
- (m) La fonction $x \mapsto (x^2 - 1)/|1 - x|$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Comme tout intervalle ouvert contenant 1 rencontre $(\mathbb{R} \setminus \{1\}) \cap]-\infty, 1[=]-\infty, 1[$, la limite peut être envisagée. On aurait également pu dire que tout intervalle du type $]r, 1[$ (avec $r < 1$) rencontrant le domaine $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, la limite peut être envisagée.

Pour $x < 1$, on a

$$\frac{x^2 - 1}{|1 - x|} = \frac{(x-1)(x+1)}{1-x} = -(x+1)$$

et dès lors

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{|1 - x|} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = -2.$$

- (n) La fonction $x \mapsto (|x-2|-1)/(x^2-4)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Comme tout intervalle ouvert contenant 2 rencontre cet ensemble, la limite peut être envisagée.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 2} (|x-2|-1) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} (x^2-4) = 0;$$

il s'ensuit donc directement

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|-1}{x^2-4} = \infty.$$

On ne peut pas préciser davantage car le dénominateur est positif si $x > 2$ et négatif si $x < 2$ et dès lors

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2| - 1}{x^2 - 4} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2| - 1}{x^2 - 4} = +\infty.$$

- (o) La fonction $x \mapsto \sqrt{1+x+2x^2} - \sqrt{2x^2+3}$ est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : 1+x+2x^2 \geq 0 \text{ et } 2x^2+3 \geq 0\} = \mathbb{R}.$$

Cet ensemble n'étant pas minoré, on peut calculer la limite en $-\infty$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1+x+2x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{2x^2+3} = +\infty,$$

on a l'indétermination « $\infty - \infty$ ». Pour lever cette indétermination, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le « binôme conjugué » de l'expression. Ainsi,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{1+x+2x^2} - \sqrt{2x^2+3})(\sqrt{1+x+2x^2} + \sqrt{2x^2+3})}{\sqrt{1+x+2x^2} + \sqrt{2x^2+3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x+2x^2 - 2x^2 - 3}{\sqrt{1+x+2x^2} + \sqrt{2x^2+3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-2}{\sqrt{2}|x| + \sqrt{2}|x|} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-2\sqrt{2}x} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

- (p) La fonction $x \mapsto \ln(3x+2) - \ln(3x)$ est définie sur $]0, +\infty[$, ensemble non majoré. La limite est donc envisageable.

Cela étant, la fonction s'écrit aussi

$$\ln(3x+2) - \ln(3x) = \ln\left(\frac{3x+2}{3x}\right), \quad \forall x > 0.$$

Vu le théorème des limites des fonctions de fonction, on a immédiatement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(3x+2) - \ln(3x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3x+2}{3x}\right) = \lim_{y \rightarrow 1} \ln(y) = \ln(1) = 0.$$

- (q) La fonction $y \mapsto \log_y(3) = \ln(3)/\ln(y)$ est définie sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$. Cet ensemble n'étant pas majoré, la limite est envisageable.

On a directement

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \log_y(3) = 0$$

car $\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln(y) = +\infty$.

- (r) La fonction $u \mapsto u \exp(1/(u-1))$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, ensemble non minoré ; la limite est donc envisageable.

Vu le théorème des limites des fonctions de fonction, on a

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} \exp\left(\frac{1}{u-1}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \exp(y) = 1 ;$$

on obtient donc directement

$$\lim_{u \rightarrow -\infty} u \exp\left(\frac{1}{u-1}\right) = -\infty.$$

- (s) La fonction $x \mapsto \arcsin((x^2-1)/(x-1))$ est définie sur

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \text{ et } \frac{x^2-1}{x-1} = x+1 \in [-1, 1] \right\} = [-2, 0].$$

Comme tous les intervalles ouverts contenant 1 ne rencontrent pas cet intervalle, la limite n'est pas envisageable.

- (t) La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas ; la fonction $x \mapsto \exp(2x)/\exp(x^2)$ est donc définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non majoré. La limite est donc envisageable.

On a

$$\frac{\exp(2x)}{\exp(x^2)} = \exp(2x - x^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - x^2) = -\infty.$$

Vu le théorème des limites des fonctions de fonction, on obtient dès lors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(2x)}{\exp(x^2)} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \exp(y) = 0.$$

- (u) Remarquons tout d'abord que la fonction donnée s'écrit aussi explicitement

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x = \exp\left(x \ln(\sqrt{2}/2)\right).$$

Elle est donc définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non majoré. La limite est donc envisageable.

Comme $\ln(\sqrt{2}/2) < 0$, on obtient directement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^x = 0.$$

- (v) Remarquons tout d'abord que la fonction donnée s'écrit aussi explicitement

$$\log_{\ln(x)}(\pi) = \frac{\ln(\pi)}{\ln(\ln(x))}.$$

Elle est donc définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x > 0, \ln(x) > 0 \text{ et } \ln(x) \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0, x > 1 \text{ et } x \neq e\} \\ =]1, e[\cup]e, +\infty[.$$

Tout intervalle de type $[1, r[$ (où $r > 1$) rencontre cet ensemble ; la limite en 1^+ peut donc être envisagée.

On a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(y) = -\infty ;$$

vu le théorème des limites des fonctions de fonction, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \log_{\ln(x)}(\pi) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(\pi)}{\ln(\ln(x))} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\pi)}{\ln(y)} = 0.$$

3.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

- Traduire en symboles mathématiques l'égalité suivante. En donner une interprétation graphique.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

- En utilisant les limites relatives aux fonctions élémentaires, déterminer la valeur des limites suivantes par application du théorème des limites des fonctions de fonction.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\ln(|x|)} \quad (c) \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \arctan\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

Exercice 2

Déterminer si les limites suivantes sont envisageables. Si la réponse est affirmative et si elles existent, les déterminer sans utiliser le théorème de l'Hospital.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x^2 - 9}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 3x)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \frac{\tan(x)}{\cos(3x)}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x+4x^2} - \sqrt{4x^2+1} \right)$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -1/2} \ln(\arcsin(x))$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{|2 - x|}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cotan(x)}{\sin(2x)}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(|-2x - \pi|)$$

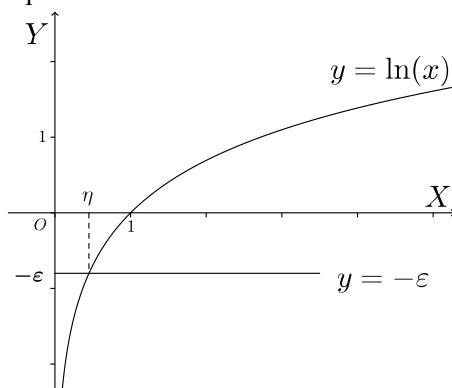
- (k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(4x - 1) - \ln(4x))$ (l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 + 4x}{2x^2 + 1}$
- (m) $\lim_{y \rightarrow +\infty} \log_y \left(\frac{1}{\pi} \right)$ (n) $\lim_{u \rightarrow -\infty} u \exp \left(\frac{u}{u+1} \right)$
- (o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp \left(\frac{1}{2-x} \right)$

Solution 1

1. En symboles mathématiques, la définition de $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ est donnée par

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ tel que } 0 < x \leq \eta \Rightarrow \ln(x) \leq -\varepsilon.$$

L'interprétation graphique est la suivante.



2. La limite (a) n'existe pas, la limite (b) vaut 0^+ et la limite (c) vaut $(-\pi/2)^+$.

Solution 2

Toutes ces limites peuvent être envisagées à l'exception des limites (f) et (h) ; elles sont respectivement égales aux valeurs suivantes.

- (a) $-\infty$ (b) $-\infty$ (c) $-\infty$ (d) $-\infty$ (e) $\left(-\frac{1}{4}\right)^-$ (g) 4^+
- (i) $\left(\frac{1}{2}\right)^+$ (j) $+\infty$ (k) 0^- (l) $\left(-\frac{3}{2}\right)^-$ (m) 0^- (n) $-\infty$ (o) 1^-

3.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

Démontrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$$

n'existe pas et que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sin(x)) = +\infty.$$

Solution

D'une part, comme la fonction sinus est bornée, il est clair que la limite ne peut pas être infinie. Montrons qu'elle ne peut être finie non plus en procédant par contraposition.

Si cette limite vaut $r \neq 0$, alors il existe $R > 0$ tel que

$$|\sin(x) - r| \leq \frac{|r|}{2}, \quad \forall x \geq R;$$

cela est impossible car il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $m\pi \geq R$ et dans ce cas on aurait $|\sin(m\pi) - r| = |r| \leq |r|/2$, ce qui est impossible puisque $r \neq 0$.

Pour l'autre cas, il suffit de noter que

$$|x + \sin(x)| \geq x - |\sin(x)| \geq x - 1$$

quel que soit le réel $x \geq 0$.

Exercice 2. Théorème de l'étau¹

Soient f, g, h trois fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs réelles et telles que

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad \forall x \in I.$$

Si la limite en α de f et de g est égale au réel r , alors il en est de même pour la fonction h .

Solution

Supposons d'abord que α soit un réel de l'intervalle I ou l'une de ses extrémités. Soit alors $\varepsilon > 0$. On doit trouver $\eta > 0$ tel que

$$|h(x) - r| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I \cap [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$$

ou encore

$$-\varepsilon \leq h(x) - r \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I \cap [\alpha - \eta, \alpha + \eta].$$

Vu l'hypothèse, il existe $\eta_0 > 0$ tel que

$$|f(x) - r| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I \cap [\alpha - \eta_0, \alpha + \eta_0]$$

et

$$|g(x) - r| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I \cap [\alpha - \eta_0, \alpha + \eta_0].$$

1. Ce théorème est aussi appelé théorème du gendarme ou théorème du sandwich.

Il s'ensuit alors que l'on a

$$-\varepsilon \leq f(x) - r \leq h(x) - r \leq g(x) - r \leq \varepsilon, \quad \forall x \in I \cap [\alpha - \eta_0, \alpha + \eta_0]$$

et on peut donc conclure en prenant $\eta = \eta_0$.

L'argumentation s'adapte bien sûr directement lorsque $\alpha = -\infty$ ou $\alpha = +\infty$.

Exercice 3

⋮ Sachant que¹ $\ln(x+1) \leq x$ quel que soit $x > 0$, démontrer que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} = +\infty.$$

Solution

Comme on a

$$\ln(x+1) \leq x, \quad \forall x > 0,$$

il s'ensuit que pour tout $M \in \mathbb{N}_0$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} &\geq \sum_{m=1}^M \ln\left(\frac{1}{m} + 1\right) \\ &= \sum_{m=1}^M \left(\ln(m+1) - \ln(m)\right) \\ &= \ln(M+1). \end{aligned}$$

Comme

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \ln(y) = +\infty,$$

on obtient finalement

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^M \frac{1}{m} = +\infty$$

et on peut conclure.

1. De fait, comme la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est continûment dérivable sur $] -1, +\infty[$, le théorème des accroissements finis permet de dire que pour tout $x > 0$ il existe $u \in [0, x]$ tel que

$$\ln(x+1) = \ln(1) + \frac{x-0}{u+1} = \frac{x}{u+1}.$$

Comme $u > 0$, on a $1/(u+1) < 1$ et on conclut.

Exercice 4

⋮ Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins un
 ⋮ zéro réel.

Solution

Cet exercice a déjà été traité dans le chapitre 2 (voir l'exercice 4 de la sous-section 10.3 : utilisation des nombres complexes). Nous présentons ici une autre méthode de résolution (utilisation du théorème des valeurs intermédiaires).

Notons P le polynôme et supposons d'abord que le coefficient du terme de degré maximal soit positif. Comme le polynôme est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et est de degré impair, on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty ;$$

le théorème des valeurs intermédiaires permet donc de conclure directement.

L'argumentation s'adapte bien sûr directement lorsque le coefficient du terme de degré maximal est négatif.

4 Suites numériques

4.1 Exercice de base résolu

Déterminer si les suites suivantes convergent. Si la réponse est affirmative, en déterminer la limite.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \frac{m}{m^2 + 1} \quad (m \in \mathbb{N}) & \text{(b)} \frac{m}{1 - 2m} \quad (m \in \mathbb{N}) & \text{(c)} 2^m \quad (m \in \mathbb{N}) \\ \text{(d)} \sqrt[n]{2} \quad (m \in \mathbb{N}_0) & \text{(e)} \sqrt[n]{m} \quad (m \in \mathbb{N}_0) & \text{(f)} m \left(\sqrt{1 + 1/m} - 1 \right) \quad (m \in \mathbb{N}_0) \end{array}$$

Solution

(a) Pour tout naturel strictement positif m , on a

$$0 \leq \frac{m}{m^2 + 1} \leq \frac{1}{m}.$$

Cela étant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un naturel M tel que $1/\varepsilon \leq M$. Dès lors, on obtient

$$0 \leq \frac{m}{m^2 + 1} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{M} \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq M$$

et la suite converge donc vers 0.

(b) Quel que soit le naturel m , on a

$$\frac{m}{1 - 2m} = -\frac{1}{2} \times \frac{-2m + 1 - 1}{1 - 2m} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1 - 2m)}.$$

On a aussi

$$0 \leq \left| \frac{1}{2(1-2m)} \right| = \frac{1}{2(2m-1)} \leq \frac{1}{2m}, \quad \forall m \in \mathbb{N}_0;$$

dès lors (voir le cas précédent), la suite $1/(2(1-2m))$ ($m \in \mathbb{N}$) converge vers 0. La suite de départ converge donc vers $-1/2$.

(c) Quel que soit le naturel strictement positif m , on a

$$2^m = \sum_{j=0}^m C_m^j \geq C_m^1 = m.$$

Par ailleurs, quel que soit $R > 0$, il existe $M \in \mathbb{N}_0$ tel que $M \geq R$. Dès lors, on a

$$2^m \geq m \geq R, \quad \forall m \geq M$$

et la suite converge donc vers $+\infty$.

(d) Quel que soit le naturel strictement positif m et le complexe z , on a

$$z^m - 1 = (z - 1) \sum_{j=0}^{m-1} z^j.$$

Dès lors, on obtient

$$2 - 1 = \left(\sqrt[m]{2} \right)^m - 1 = \left(\sqrt[m]{2} - 1 \right) \sum_{j=0}^{m-1} \left(\sqrt[m]{2} \right)^j \geq \left(\sqrt[m]{2} - 1 \right) m,$$

donc aussi

$$\frac{1}{m} \geq \sqrt[m]{2} - 1 \geq 0$$

quel que soit le naturel strictement positif m . Comme la suite $1/m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers 0, on en déduit que la suite $\sqrt[m]{2}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers 1.

(e) Quel que soit le naturel $m \geq 2$, on a

$$m = \left(\sqrt[m]{m} \right)^m = \left(\sqrt[m]{m} - 1 + 1 \right)^m = \sum_{j=0}^m C_m^j \left(\sqrt[m]{m} - 1 \right)^j \geq \frac{m(m-1)}{2} \left(\sqrt[m]{m} - 1 \right)^2,$$

donc aussi

$$\frac{4}{m} \geq \frac{2}{m-1} \geq \left(\sqrt[m]{m} - 1 \right)^2.$$

Comme la suite $1/m$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers 0, on en déduit que la suite $\sqrt[m]{m}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers 1.

(f) On connaît le comportement des suites qui sont formées à partir de chaque facteur de la suite donnée mais un passage direct à la limite ne permet pas de conclure puisque l'on obtient formellement « $+\infty \cdot 0$ ».

Cela étant, quel que soit le naturel strictement positif m , on a

$$m \left(\sqrt{1 + \frac{1}{m}} - 1 \right) = m \frac{1 + (1/m) - 1}{\sqrt{1 + (1/m)} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 + (1/m)} + 1};$$

sous cette forme, un passage direct à la limite conduit à la conclusion que la suite de départ converge vers $1/2$.

4.2 Exercice pour s'entraîner

Exercice

Déterminer si les suites suivantes convergent. Si la réponse est affirmative, en déterminer la limite.

- (a) $\frac{\sqrt{m} + 1}{\sqrt{m} - 1}$ ($m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$) (b) $\frac{\cos(m)}{1 - 2m}$ ($m \in \mathbb{N}$) (c) $\cos^m(\pi/4)$ ($m \in \mathbb{N}$)
 (d) $\sqrt[m]{2^m}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) (e) $\sqrt[m^2]{m}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) (f) $\frac{m}{\cos(\pi m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$)

Solution

- (a) La suite converge vers 1.
 (b) La suite converge vers 0.
 (c) La suite converge vers 0.
 (d) La suite converge vers 2 (en fait la suite est constante ; tous ses termes sont égaux à 2).
 (e) La suite converge vers 1.
 (f) La suite converge vers l'infini.

4.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

Soient a_n ($n \in \mathbb{N}$) la suite de Fibonacci (voir l'exercice de la sous-section 11.1 du chapitre 2) et Φ le nombre d'or (voir l'exercice 3 la sous-section 4.3 du chapitre 2). Quel que soit le naturel n , on pose

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Démontrer que

1. la suite x_{2n} ($n \in \mathbb{N}$) est strictement croissante,
2. la suite x_{2n+1} ($n \in \mathbb{N}$) est strictement décroissante,
3. on a

$$x_{2n} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} < \Phi < \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} = x_{2n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

4. on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \Phi.$$

Solution

1. et 2. Étant donné la définition de la suite de Fibonacci, on a

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{\frac{a_n}{a_{n-1}}} = 1 + \frac{1}{x_{n-1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1,$$

donc

$$x_n = 1 + \frac{1}{x_{n-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_{n-2}}} = 1 + \frac{x_{n-2}}{1 + x_{n-2}}$$

quel que soit le naturel $n \geq 2$. Cela étant, quels que soient les réels strictement positifs r et s , comme

$$r < s \Leftrightarrow r + rs < s + rs \Leftrightarrow r(1 + s) < s(1 + r) \Leftrightarrow \frac{r}{1 + r} < \frac{s}{1 + s},$$

on obtient

$$\begin{aligned} x_n < x_{n-2} &\Leftrightarrow \frac{x_n}{1 + x_n} < \frac{x_{n-2}}{1 + x_{n-2}} \\ &\Leftrightarrow 1 + \frac{x_n}{1 + x_n} < 1 + \frac{x_{n-2}}{1 + x_{n-2}} \\ &\Leftrightarrow x_{n+2} < x_n \quad (*) \end{aligned}$$

et, de la même manière

$$x_n > x_{n-2} \Leftrightarrow x_{n+2} > x_n \quad (**)$$

quel que soit le naturel $n \geq 2$. Comme

$$x_3 = \frac{a_4}{a_3} = \frac{5}{3} < x_1 = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2$$

et comme

$$x_2 = \frac{a_3}{a_2} = \frac{3}{2} > x_0 = \frac{a_1}{a_0} = \frac{1}{1} = 1,$$

la relation (*) permet de conclure par récurrence à la décroissance de la suite x_{2n+1} ($n \in \mathbb{N}$) et la relation (**) permet de conclure par récurrence à la croissance de la suite x_{2n} ($n \in \mathbb{N}$).

3. Rappelons (voir précédemment) que, quel que soit le naturel $n \geq 2$, on a

$$x_n = 1 + \frac{x_{n-2}}{1 + x_{n-2}}.$$

Posons $f(x) = \frac{x}{1+x}$. On a donc

$$x_n = 1 + f(x_{n-2})$$

quel que soit le naturel $n \geq 2$ et, étant donné la relation $\Phi^2 = \Phi + 1$,

$$1 + f(\Phi) = 1 + \frac{\Phi}{1+\Phi} = 1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi.$$

Cela étant, on a (voir les parties 1 et 2 précédentes)

$$r < s \Leftrightarrow 1 + f(r) < 1 + f(s)$$

quels que soient les réels strictement positifs r et s . Dès lors

$$x_{2n} < \Phi \Leftrightarrow 1 + f(x_{2n}) < 1 + f(\Phi) \Leftrightarrow x_{2n+2} < \Phi$$

et

$$x_{2n+1} > \Phi \Leftrightarrow 1 + f(x_{2n+1}) > 1 + f(\Phi) \Leftrightarrow x_{2n+3} > \Phi$$

quel que soit le naturel n . Comme

$$x_0 = \frac{a_1}{a_0} = 1 < \Phi \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{a_2}{a_1} = 2 > \Phi,$$

les relations précédentes permettent de conclure par récurrence que les inégalités annoncées en 3 sont exactes.

4. Nous présentons ici deux preuves différentes.

Voici la première.

Comme la suite x_{2n} ($n \in \mathbb{N}$) est croissante et majorée par Φ , elle converge vers un réel l_p ; de même, comme la suite x_{2n+1} ($n \in \mathbb{N}$) est décroissante et minorée par Φ , elle converge vers un réel l_i .

Par ailleurs, vu les points précédents, on a

$$x_n = 1 + \frac{x_{n-2}}{1+x_{n-2}}$$

pour tout naturel $n \geq 2$. En considérant cette égalité pour les naturels pairs d'une part et les naturels impairs d'autre part, puis en passant à la limite, on obtient

$$L = 1 + \frac{L}{1+L}$$

où L peut être remplacé par l_p et l_i . On a

$$L = 1 + \frac{L}{1+L} \Leftrightarrow L - 1 = \frac{L}{1+L} \Leftrightarrow L^2 - 1 = L \Leftrightarrow L^2 - L - 1 = 0 \Leftrightarrow L = \Phi.$$

Il s'ensuit que $l_i = l_p$ et que la suite $x_n = a_{n+1}/a_n$ ($n \in \mathbb{N}$) converge bien vers le nombre d'or.

Et voici la seconde preuve.

La forme explicite de a_n (voir l'exercice de la sous-section 11.1 du chapitre 2) est

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n - (-1)^n \frac{1}{\Phi^n} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Phi^n + (-1)^{n+1} \frac{1}{\Phi^n} \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Dès lors, on a

$$x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\Phi^{n+1} + (-1)^{n+2} \frac{1}{\Phi^{n+1}}}{\Phi^n + (-1)^{n+1} \frac{1}{\Phi^n}} = \Phi \frac{1 + (-1)^{n+2} \frac{1}{\Phi^{2n+2}}}{1 + (-1)^{n+1} \frac{1}{\Phi^{2n}}}$$

quel que soit le naturel strictement positif n . Comme $\Phi > 1$, la suite Φ^{-k} ($k \in \mathbb{N}$) converge vers 0 et on obtient finalement que la suite x_n ($n \in \mathbb{N}$) converge vers Φ .

Pour illustrer les exercices précédents, voici un tableau reprenant les premières valeurs de $x_n = a_{n+1}/a_n$. Rappelons que

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,6180339887498948\dots$$

n	a_n	$x_n = a_{n+1}/a_n$
0	1	1
1	1	2
2	2	$3/2 = 1,5$
3	3	$5/3 = 1,66667$
4	5	$8/5 = 1,6$
5	8	$13/8 = 1,625$
6	13	$21/13 = 1,61538$
7	21	$34/21 = 1,61905$
8	34	$55/34 = 1,61765$
9	55	$89/55 = 1,61818$
10	89	$144/89 = 1,61798$
11	144	$233/144 = 1,61806$
12	233	$377/233 = 1,61803$
13	377	$610/377 = 1,61804$

Pour poursuivre l'illustration, voici un tableau reprenant la suite croissante $x_{2n} = a_{2n+1}/a_{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) et la suite décroissante $x_{2n+1} = a_{2n+2}/a_{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

n	0	1	2	3	4	5	6
x_{2n}	1	1,5	1,6	1,61538	1,61765	1,61798	1,61803
x_{2n+1}	2	1,66667	1,625	1,61905	1,61818	1,61806	1,61804

Exercice 2

Si Φ désigne le nombre d'or (voir l'exercice 3 de la sous-section 4.3 du chapitre 2), démontrer que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^M \frac{1}{\Phi^m} = \Phi^2$$

et aussi que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^M \frac{1}{\Phi^{2m}} = \Phi, \quad \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^M \frac{1}{\Phi^{2m+1}} = 1.$$

Solution

Pour tout $M \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{m=0}^M \frac{1}{\Phi^m} = \frac{1 - (1/\Phi)^{M+1}}{1 - (1/\Phi)} = \Phi^2 \left(1 - \frac{1}{\Phi^{M+1}}\right)$$

car de $\Phi^2 = \Phi + 1$ on tire

$$1 = \frac{1}{\Phi} + \frac{1}{\Phi^2}.$$

Comme $\Phi > 1$, la suite $1/\Phi^{M+1}$ ($M \in \mathbb{N}$) converge vers 0 et on conclut en ce qui concerne la première limite.

La seconde s'obtient de la même manière :

$$\sum_{m=0}^M \frac{1}{\Phi^{2m}} = \frac{1 - (1/\Phi^2)^{M+1}}{1 - (1/\Phi^2)} = \Phi \left(1 - \frac{1}{\Phi^{2(M+1)}}\right)$$

et on conclut de même.

La troisième limite est alors évidente par division par Φ .

Exercice 3. Théorème de Cesàro¹

Si la suite x_m ($m \in \mathbb{N}_0$) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors la suite des moyennes

$$y_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m x_k \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

converge aussi vers l .

Solution

Pour tous $m_0, m \in \mathbb{N}_0$, $m_0 < m$, on a

$$y_m - l = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (x_k - l) = \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^{m_0} (x_k - l) + \sum_{k=m_0+1}^m (x_k - l) \right).$$

Cela étant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $m_0 \in \mathbb{N}_0$ tel que

$$|x_m - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m > m_0,$$

1. Voir l'annexe.

donc

$$|y_m - l| \leq \frac{1}{m} \left(\sum_{k=1}^{m_0} |x_k - l| + \frac{\varepsilon}{2} (m - m_0) \right) \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m_0} |x_k - l| + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m > m_0.$$

En prenant ensuite $M_0 \geq m_0$ tel que

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m_0} |x_k - l| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall m \geq M_0,$$

on obtient finalement

$$|y_m - l| \leq \varepsilon, \quad \forall m \geq M_0$$

et on conclut.

5 Dérivées

5.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. En déterminer le domaine de définition, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$$f_1(x) = x^2 - 5x$$

$$f_2(x) = (x + 1)(3 - x)$$

$$f_3(x) = \frac{1}{3x^2 + 6x + 3}$$

$$f_4(x) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$f_5(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$f_6(x) = x \sin^2(3x)$$

$$f_7(x) = \cos(\pi x) e^{2x}$$

$$f_8(x) = \tan^2(x)$$

$$f_9(x) = \sin(\cos(x))$$

$$f_{10}(x) = \arctan(\cos(x))$$

$$f_{11}(x) = \sin(\cotan(x))$$

$$f_{12}(x) = \sqrt{\sin(2x)}$$

$$f_{13}(x) = e^{\arccos(x)}$$

$$f_{14}(x) = e^{(e^x)}$$

$$f_{15}(x) = (e^x)^x$$

$$f_{16}(x) = e^{(x^x)}$$

$$f_{17}(x) = x^{(x^x)}$$

$$f_{18}(x) = \ln(x^2 + x - 2)$$

$$f_{19}(x) = (\ln(4))^x$$

$$f_{20}(x) = \ln(x^4)$$

$$f_{21}(x) = \ln(e^x - e^{-x^2})$$

$$f_{22}(x) = \frac{1}{\ln(1 - x) + 1}$$

Solution

Les fonctions f_1 et f_2

Ces fonctions sont des polynômes ; elles sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a immédiatement

$$Df_1(x) = 2x - 5, \quad Df_2(x) = (3 - x) - (x + 1) = -2x + 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f_3

Cette fonction s'écrit aussi

$$f_3(x) = \frac{1}{3(x^2 + 2x + 1)} = \frac{1}{3(x + 1)^2}.$$

Vu les propriétés des fractions rationnelles, elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et, sur cet ensemble, on a

$$Df_3(x) = -\frac{2}{3(x + 1)^3}.$$

La fonction f_4

Vu les propriétés de la fonction racine carrée, cette fonction est définie sur l'intervalle $] -\infty, 1/2]$ et est dérivable sur l'intervalle $] -\infty, 1/2[$; sur ce dernier, on a

$$Df_4(x) = \frac{-2}{2\sqrt{1 - 2x}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - 2x}}.$$

La fonction f_5

Vu les propriétés de la fonction racine carrée, cette fonction est définie et dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| > 1\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

Sur cet ensemble, on a

$$Df_5(x) = -\frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-3/2}(2x) = -\frac{x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Les fonctions f_6 et f_7

Comme les fonctions polynomiales, sinus, cosinus et exponentielle sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, les fonctions f_6 et f_7 sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df_6(x) = \sin^2(3x) + 6x \sin(3x) \cos(3x) = \sin^2(3x) + 3x \sin(6x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$Df_7(x) = \left(-\pi \sin(\pi x) + 2 \cos(\pi x) \right) e^{2x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f_8

Cette fonction est définie et dérivable sur l'union des intervalles $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$) et, sur cet ensemble, on a

$$Df_8(x) = 2 \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} = 2 \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}.$$

Les fonctions f_9 et f_{10}

Comme les fonctions sinus, cosinus et arctangente sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, les fonctions f_9 et f_{10} sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df_9(x) = -\cos(\cos(x)) \sin(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$Df_{10}(x) = -\frac{\sin(x)}{1 + \cos^2(x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f_{11}

Comme la fonction sinus est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f_{11} est définie et dérivable sur le même ensemble que la fonction cotangente, à savoir sur l'union des intervalles $]k\pi, (k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$). Sur cet ensemble, on a

$$Df_{11}(x) = -\frac{\cos(\cotan(x))}{\sin^2(x)}.$$

La fonction f_{12}

Comme la fonction sinus est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que la fonction racine carrée est définie sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction f_{12} est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : \sin(2x) \geq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right]$$

et dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} : \sin(2x) > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] k\pi, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right[.$$

Sur cet ensemble, on a

$$Df_{12}(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\sin(2x)}}.$$

La fonction f_{13}

Comme la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et comme la fonction arcossinus est définie sur $[-1, 1]$ et dérivable sur $] -1, 1[$, la fonction f_{13} est définie sur $[-1, 1]$, dérivable sur $] -1, 1[$ et on a

$$Df_{13}(x) = -\frac{e^{\arccos(x)}}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

La fonction f_{14}

Comme la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f_{14} l'est aussi et on a

$$Df_{14}(x) = e^x e^{(e^x)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f_{15}

Cette fonction s'écrit aussi

$$f_{15}(x) = e^{x \ln(e^x)} = e^{x^2}.$$

Elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df_{15}(x) = 2xe^{x^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f_{16}

Par définition, on a $x^x = e^{x \ln(x)}$, $x > 0$; la fonction f_{16} s'écrit donc aussi

$$f_{16}(x) = e^{(e^x \ln(x))}.$$

Elle est donc définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, sur cet ensemble, on a

$$Df_{16}(x) = e^{(x^x)} Dx^x = e^{(x^x)} x^x (\ln(x) + 1).$$

La fonction f_{17}

Par définition, on a $x^x = e^{x \ln(x)}$, $x > 0$; la fonction f_{17} s'écrit donc aussi

$$f_{17}(x) = e^{(x^x \ln(x))} = e^{(\ln(x)e^{x \ln(x)})}.$$

Elle est donc définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et, sur cet ensemble, on a

$$\begin{aligned} Df_{17}(x) &= x^{(x^x)} D(\ln(x)e^{x \ln(x)}) \\ &= x^{(x^x)} (x^{x-1} + \ln(x)x^x(\ln(x) + 1)) \\ &= x^{x-1}x^{(x^x)} + x^x x^{(x^x)} \ln(x) + x^x x^{(x^x)} \ln^2(x). \end{aligned}$$

La fonction f_{18}

Comme la fonction logarithme est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction f_{18} est définie et dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2) > 0\} =]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$$

et sur cet ensemble, on a

$$Df_{18}(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}.$$

La fonction f_{19}

La fonction f_{19} s'écrit aussi

$$f_{19}(x) = e^{x \ln(\ln(4))}.$$

Ainsi, elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df_{19}(x) = \ln(\ln(4))e^{x \ln(\ln(4))} = \ln(\ln(4)) (\ln(4))^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f_{20}

Comme la fonction logarithme est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction f_{20} est définie et dérivable sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x^4 > 0\} = \mathbb{R}_0$$

et on a

$$Df_{20} = \frac{4x^3}{x^4} = \frac{4}{x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0.$$

On peut aussi remarquer que l'on a

$$f_{20}(x) = \ln(x^4) = 4 \ln(|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}_0.$$

La fonction f_{21}

Comme la fonction logarithme est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, la fonction f_{21} est définie et dérivable sur

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} : e^x - e^{-x^2} > 0\} &= \{x \in \mathbb{R} : e^x > e^{-x^2}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x > -x^2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x(x+1) > 0\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[\end{aligned}$$

et, sur cet ensemble, on a

$$Df_{21}(x) = \frac{e^x + 2xe^{-x^2}}{e^x - e^{-x^2}}.$$

La fonction f_{22}

La fonction logarithme est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$, donc la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ est définie et dérivable sur $] -\infty, 1[$. Cela étant, pour $x < 1$, on a

$$\ln(1-x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(1-x) = -1 \Leftrightarrow 1-x = e^{-1} \Leftrightarrow x = 1 - e^{-1};$$

il s'ensuit que la fonction f_{22} est définie et dérivable sur

$$]-\infty, 1 - e^{-1}[\cup]1 - e^{-1}, 1[.$$

Sur cet ensemble, on a

$$Df_{22}(x) = \frac{1}{(1-x)(\ln(1-x)+1)^2}.$$

Exercice 2. Exemples fondamentaux à bien connaître pour la suite

1. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

En déduire que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1.$$

2. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = 0, \quad \forall r > 0.$$

En déduire que, quel que soit le réel strictement positif r , on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^r e^x = 0.$$

On résume ces résultats en disant que

« toute puissance antagoniste domine le logarithme en 0 et $+\infty$ »

et que

« l'exponentielle domine toute puissance antagoniste en $-\infty$ et $+\infty$ ».

Solution

1. La fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ est définie sur $\mathbb{R}_0$ et tout intervalle ouvert contenant 0 rencontre cet ensemble ; la limite en 0 peut donc être considérée.

Cela étant, comme on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \sin(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

un passage direct à la limite aux numérateur et dénominateur ne permet pas de conclure puisqu'on obtient la forme indéterminée « 0/0 ». Cependant, cette forme se prête bien à l'utilisation du théorème de l'Hospital puisque les numérateur et dénominateur sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et que la dérivée du dénominateur ne s'annule pas. Comme on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D \sin(x)}{Dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1,$$

le théorème de l'Hospital donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D \sin(x)}{Dx} = 1.$$

Enfin, comme

$$\frac{\tan(x)}{x} = \frac{1}{\cos(x)} \frac{\sin(x)}{x},$$

l'utilisation de la propriété qui affirme que la limite d'un produit de deux fonctions est égale au produit des limites de chacune d'entre elles lorsque ces limites sont finies permet de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

2. La fonction $x \mapsto \ln(x)/x^r$ ($r > 0$) est définie sur $]0, +\infty[$, ensemble non majoré ; la limite en $+\infty$ peut donc être considérée.

Les limites des numérateur et dénominateur étant infinies, on est dans le cas indéterminé « ∞/∞ ». Cependant, cette forme se prête bien à l'utilisation du théorème de l'Hospital puisque les numérateur et dénominateur sont des fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et que la dérivée du dénominateur ne s'y annule pas. Comme on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D \ln(x)}{D x^r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-1}}{r x^{r-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{r x^r} = 0,$$

le théorème de l'Hospital donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{D \ln(x)}{D x^r} = 0.$$

Etablissons à présent les résultats annoncés et qui découlent de ce qui précède.

La fonction $x \mapsto x^r \ln(x)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et tout intervalle ouvert du type $]0, \alpha[$ ($\alpha > 0$) rencontre cet ensemble ; la limite en 0^+ peut donc être considérée.

En utilisant le théorème qui régit les limites des fonctions de fonction, on a directement

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^r \ln(x)) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^r} \ln\left(\frac{1}{y}\right) = - \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y^r} = 0.$$

La fonction $x \mapsto e^x/x^r$ est définie sur $]0, +\infty[$, ensemble non majoré ; la limite en $+\infty$ peut donc être considérée.

Comme $x^r = \exp(r \ln(x))$, on a $e^x/x^r = \exp(x - r \ln(x)) = e^{x-r \ln(x)}$. De plus, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - r \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 - \frac{r \ln(x)}{x} \right) \right) = +\infty.$$

Vu le théorème des limites des fonctions de fonction, on obtient donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x-r \ln(x))} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y = +\infty.$$

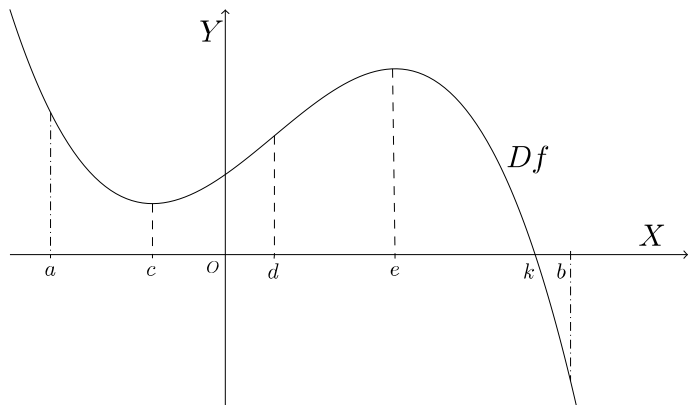
La fonction $x \mapsto |x|^r e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non minoré ; la limite en $-\infty$ peut donc être considérée.

Vu le théorème des limites des fonctions de fonction, on a directement

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^r e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x)^r}{e^{-x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y^r}{e^y} = 0.$$

Exercice 3

Soit f une fonction continûment dérivable sur $]a, b[$, à valeurs réelles. On donne la représentation graphique de sa dérivée ci-dessous.



Lorsque c'est possible, répondre aux questions suivantes. Si les données ne permettent pas de répondre, en expliquer la raison.

1. Déterminer les zéros de f .
2. Déterminer le signe de f .
3. Où la fonction f est-elle croissante ? Où est-elle décroissante ? Pourquoi ?
4. Où la fonction f est-elle concave, convexe ? Pourquoi ?

Solution

1. Il n'est pas possible de déterminer les réels où la fonction f s'annule car, quelle que soit la constante r , la fonction $f + r$ a la même dérivée que f .
2. Même réponse que dans le cas précédent.
3. Si une fonction est à valeurs réelles et dérivable, alors elle est croissante (resp. décroissante) sur un intervalle ouvert si et seulement si sa dérivée y est positive (resp. négative). Dès lors la représentation graphique de la dérivée permet de déterminer la monotonie de la fonction puisqu'il suffit de déterminer les intervalles pour lesquels le graphique se situe « au-dessus » ou « en dessous » de l'axe des abscisses.

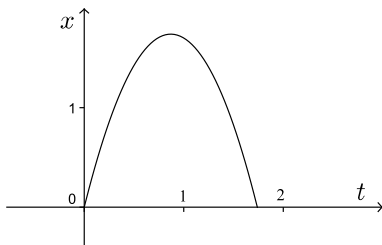
Cela étant, vu la représentation donnée, la fonction f est croissante sur $]a, k[$ et décroissante sur $]k, b[$, et même sur $]a, k]$ et $[k, b[$ du fait de la continuité de f en k .

4. Si une fonction est à valeurs réelles et dérivable, alors elle est convexe (resp. concave) sur un intervalle ouvert si et seulement si sa dérivée première y est croissante (resp. décroissante). Dès lors la représentation graphique de la dérivée permet de déterminer la concavité de la fonction puisqu'il suffit de déterminer les intervalles où la dérivée est croissante ou décroissante.

Cela étant, vu la représentation donnée, la fonction f est concave sur $]a, c]$ et sur $[e, b[$ et convexe sur $[c, e]$.

Exercice 4

Le graphique suivant représente la position x en fonction du temps t d'un mobile qui se déplace de manière rectiligne.



Si r et s sont deux constantes réelles strictement positives, laquelle des expressions suivantes décrit le mieux l'accélération γ du mobile ?

- | | | |
|--------------------------|--------------------------|-----------------------|
| (a) $\gamma(t) = 0$ | (b) $\gamma(t) = r$ | (c) $\gamma(t) = -s$ |
| (d) $\gamma(t) = r + st$ | (e) $\gamma(t) = r - st$ | (f) $\gamma(t) = t^2$ |

Solution

La représentation graphique est celle d'une fonction concave, donc de dérivée seconde à valeurs négatives. L'accélération étant la dérivée seconde de la distance parcourue, c'est la proposition (c) qui est correcte.

Exercice 5

Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes données explicitement, le domaine de dérivabilité, le domaine où elles sont deux fois dérivables, leurs éventuelles asymptotes, leurs monotonie et concavité, leurs éventuels extrema et points d'inflexion au graphique. Sur base des résultats, esquisser les graphiques dans un repère orthonormé.

$$f_1(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 13$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$f_3(x) = \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)}}$$

$$f_4(x) = x \exp(-x)$$

$$f_5(x) = \sqrt{x(x-1)}$$

$$f_6(x) = x^2 \ln(x)$$

$$f_7(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$f_8(x) = \frac{1}{-x^2 + x + 6}$$

$$f_9(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f_{10}(x) = \frac{x^2 + x}{|x| + 1}$$

Solution

La fonction f_1

La fonction est un polynôme du troisième degré à coefficients réels. C'est donc une fonction définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique intersecte l'axe des abscisses au moins une fois. Elle ne possède pas d'asymptote et on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty.$$

Cela étant, on a

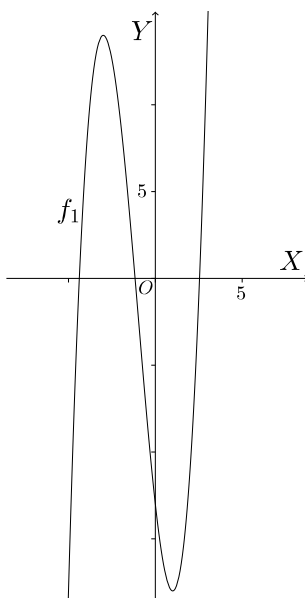
$$Df_1(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x - 1)(x + 3), \quad D^2f_1(x) = 6(x + 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'étude du signe de la dérivée première conduit à dire que f_1 est croissant sur $]-\infty, -3]$ et sur $[1, +\infty[$, décroissant sur $[-3, 1]$, qu'elle admet un maximum en -3 et un minimum en 1 . Les valeurs de f_1 en ces points sont

$$f_1(-3) = 14, \quad f_1(1) = -18.$$

Vu les signes différents de ces nombres et la continuité de la fonction sur $\mathbb{R}$, on en déduit que le graphique intersecte trois fois l'axe des abscisses. Enfin, l'étude du signe de la dérivée seconde donne un point d'inflexion en -1 en lequel la fonction vaut $f_1(-1) = -2$ et permet d'obtenir que la fonction est concave sur l'intervalle $]-\infty, -1]$ et convexe sur l'intervalle $[-1, +\infty[$.

Sa représentation graphique est la suivante.



La fonction f_2

La fonction est définie et indéfiniment dérivable sur

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : 1 - x \neq 0, \frac{1+x}{1-x} > 0 \right\} =]-1, 1[.$$

Il n'y a donc pas d'asymptote oblique ; il y a cependant deux asymptotes verticales, à savoir les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$ car

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f_2(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f_2(x) = +\infty.$$

Cela étant, on a

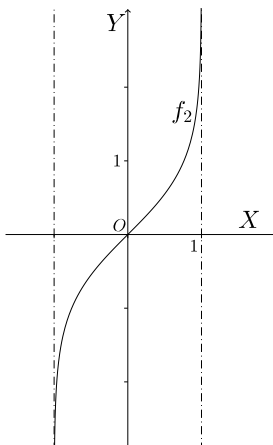
$$Df_2(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

et

$$D^2 f_2(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

La dérivée première étant toujours à valeurs strictement positives, la fonction est strictement croissante et il n'y pas d'extremum. La dérivée seconde s'annule en le seul réel 0. Vu son expression, elle a le même signe que la variable ; la fonction est donc concave sur $] -1, 0]$, convexe sur $[0, 1[$ et a un point d'inflexion en 0 en lequel elle vaut 0.

Sa représentation graphique est la suivante.

**La fonction f_3**

Comme la fonction sinus est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f_3 est définie sur

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \sin(x) \neq 1 \text{ et } \frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} \geq 0 \right\}$$

et indéfiniment dérivable sur

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \sin(x) \neq 1 \text{ et } \frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)} > 0 \right\}.$$

Cela étant, comme la fonction sinus est à valeurs dans $[-1, 1]$, est égale à 1 en les réels $(\pi/2) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) et à -1 en les réels $(-\pi/2) + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), les ensembles précédents sont respectivement égaux à

$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

et

$$\mathbb{R} \setminus \left(\left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \right) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Par ailleurs, la fonction sinus étant périodique de période 2π , la fonction f_3 l'est aussi et il n'y a pas d'asymptote oblique. Étudions f_3 sur l'ensemble

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right].$$

Comme on a

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} f_3(x) = +\infty,$$

la droite d'équation $x = \pi/2$ est asymptote verticale.

Étant donné que la fonction s'annule en $-\pi/2$ et en $3\pi/2$ et qu'elle est toujours à valeurs positives, elle admet un minimum global en ces points.

Par ailleurs, pour tout $x \in]-\pi/2, \pi/2[\cup]\pi/2, 3\pi/2[$, on a

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{1 - \sin(x)}} \\ &= \sqrt{\frac{(1 + \sin(x))^2}{1 - \sin^2(x)}} \\ &= \frac{1 + \sin(x)}{|\cos(x)|} \\ &= \begin{cases} \frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} & \text{si } x \in]-\pi/2, \pi/2[\\ -\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)} & \text{si } x \in]\pi/2, 3\pi/2[. \end{cases} \end{aligned}$$

Dès lors, pour la dérivée première on obtient

$$Df_3(x) = \frac{\cos^2(x) + (1 + \sin(x)) \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1 + \sin(x)}{\cos^2(x)}$$

si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ et

$$Df_3(x) = -\frac{1 + \sin(x)}{\cos^2(x)}$$

si $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$. La fonction est donc croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et décroissante sur $]\pi/2, 3\pi/2[$.

En ce qui concerne la dérivée seconde, on a

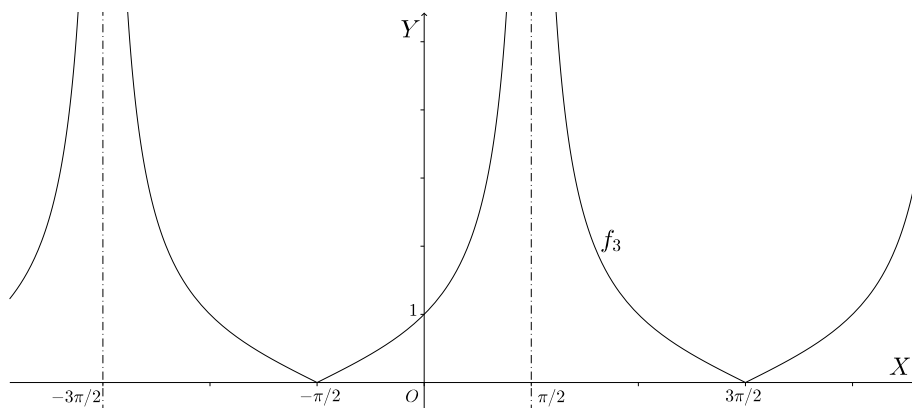
$$\begin{aligned}
 D^2 f_3(x) &= \frac{\cos^3(x) + 2(1 + \sin(x)) \cos(x) \sin(x)}{\cos^4(x)} \\
 &= \frac{\cos^2(x) + 2 \sin(x) + 2 \sin^2(x)}{\cos^3(x)} \\
 &= \frac{1 + 2 \sin(x) + \sin^2(x)}{\cos^3(x)} \\
 &= \frac{(1 + \sin(x))^2}{\cos^3(x)}
 \end{aligned}$$

si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ et

$$D^2 f_3(x) = -\frac{(1 + \sin(x))^2}{\cos^3(x)}$$

si $x \in]\pi/2, 3\pi/2[$. Comme cette fonction ne s'annule pas sur les intervalles sur lesquels elle est définie, il n'y a pas de point d'inflexion. Enfin, comme les valeurs du cosinus sont positives sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et négatives sur $]\pi/2, 3\pi/2[$, on conclut que la fonction f_3 est convexe.

Sa représentation graphique est la suivante.



La fonction f_4

Comme la fonction exponentielle est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f_4 l'est aussi et il n'y a donc pas d'asymptote verticale.

Cela étant, vu les propriétés de la fonction exponentielle, on a immédiatement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = 0;$$

l'axe des abscisses est donc asymptote horizontale en $+\infty$. Par ailleurs, on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_4(x)}{x} = +\infty;$$

il n'y a donc pas d'asymptote oblique en $-\infty$ et on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_4(x) = -\infty$.

La dérivée première est

$$Df_4(x) = \exp(-x) - x \exp(-x) = (1 - x) \exp(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

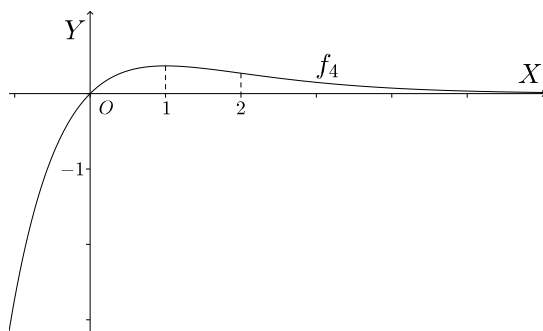
elle s'annule en $x = 1$, est positive pour $x \leq 1$ et négative pour $x \geq 1$. La fonction est donc croissante sur $] -\infty, 1]$, décroissante sur $[1, +\infty[$, a un maximum en $x = 1$ et la valeur de ce maximum est $f_4(1) = 1/e$.

La dérivée seconde est

$$D^2f_4(x) = -\exp(-x) - (1 - x) \exp(-x) = (x - 2) \exp(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

elle s'annule en $x = 2$, est négative pour $x \leq 2$ et positive pour $x \geq 2$. La fonction admet donc un point d'inflexion en $x = 2$ en lequel elle vaut $f_4(2) = 2/e^2$, est concave sur $] -\infty, 2]$ et convexe sur $[2, +\infty[$.

Sa représentation graphique est la suivante.



La fonction f_5

La fonction est définie sur

$$\{x \in \mathbb{R} : x(x - 1) \geq 0\} =] -\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

et indéfiniment dérivable sur

$$]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[.$$

Elle n'admet pas d'asymptote verticale mais deux asymptotes obliques. De fait, on a successivement

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_5(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1-(1/x)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f_5(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(x-1) - x^2}{\sqrt{x(x-1)} + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x(\sqrt{1-(1/x)} + 1)} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_5(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{1-(1/x)}}{x} \\
 &= -\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = -1, \\
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (f_5(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x-1) - x^2}{\sqrt{x(x-1)} - x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x(\sqrt{1-(1/x)} + 1)} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Dès lors, les droites d'équation cartésienne

$$y = x - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y = -x + \frac{1}{2}$$

sont respectivement asymptotes obliques en $+\infty$ et en $-\infty$.

Étant donné que la fonction s'annule en 0 et en 1 et qu'elle est toujours à valeurs positives, elle admet un minimum global en ces points, lequel vaut bien sûr 0.

Cela étant, la dérivée première est

$$Df_5(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x(x-1)}}, \quad \forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[;$$

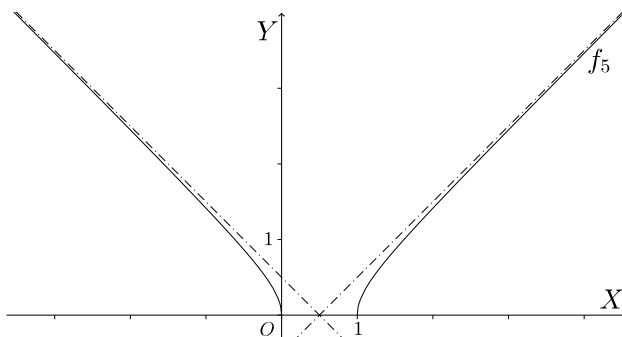
elle ne s'annule pas, est négative pour $x < 0$ et est positive pour $x > 1$. La fonction est donc décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.

La dérivée seconde est

$$\begin{aligned}
 D^2 f_5(x) &= \frac{2\sqrt{x(x-1)} - (2x-1)^2 2^{-1}(x(x-1))^{-1/2}}{2x(x-1)} \\
 &= \frac{4x(x-1) - (2x-1)^2}{4x(x-1)\sqrt{x(x-1)}} \\
 &= -\frac{1}{4x(x-1)\sqrt{x(x-1)}}, \quad \forall x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[;
 \end{aligned}$$

comme elle est toujours négative, la fonction est concave.

Sa représentation graphique est la suivante.



La fonction f_6

La fonction est définie et indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$. Comme on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_6(x) = 0,$$

la fonction admet un prolongement continu en 0 par 0 et n'a donc pas d'asymptote verticale. D'autre part, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_6(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \ln(x)) = +\infty$$

et il n'y a donc pas d'asymptote oblique non plus. On peut aussi remarquer que le graphique intersecte l'axe des abscisses en 1 puisque la fonction est nulle en ce point et que le graphique est « au-dessus » de cet axe lorsque $x \geq 1$ et « en dessous » lorsque $0 < x < 1$.

Cela étant, la dérivée première est

$$Df_6(x) = 2x \ln(x) + x = x(2 \ln(x) + 1), \quad \forall x > 0$$

et on a

$$Df_6(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

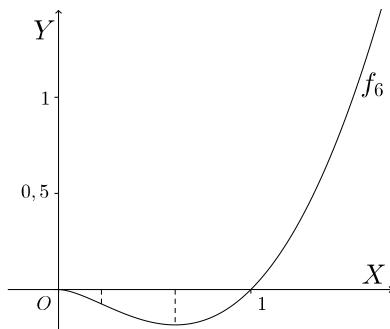
La fonction logarithme étant croissante, on obtient que la dérivée de f_6 est négative pour $0 < x \leq 1/\sqrt{e}$ et positive pour $x \geq 1/\sqrt{e}$. La fonction est donc décroissante sur $]0, 1/\sqrt{e}]$, croissante sur $[1/\sqrt{e}, +\infty[$ et a un minimum global en $x = 1/\sqrt{e}$, dont la valeur est $f_6(1/\sqrt{e}) = -1/(2e)$.

La dérivée seconde est

$$D^2 f_6(x) = 2 \ln(x) + 3, \quad \forall x > 0;$$

elle s'annule en $x = 1/(e\sqrt{e})$, est négative pour $0 < x \leq 1/(e\sqrt{e})$ et est positive pour $x \geq 1/(e\sqrt{e})$. La fonction est donc concave sur $]0, 1/(e\sqrt{e})]$, convexe sur $[1/(e\sqrt{e}), +\infty[$ et possède un point d'inflexion en $1/(e\sqrt{e})$ en lequel elle est égale à $f_6(1/(e\sqrt{e})) = -3/(2e^3)$.

Sa représentation graphique est la suivante.



La fonction f_7

La fonction f_7 est définie et indéfiniment dérivable sur le complémentaire des zéros du dénominateur, c'est-à-dire sur

$$\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Cette fonction étant impaire, on l'étudie sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$. Pour obtenir son graphique complet, on effectue une symétrie centrale par rapport à l'origine des axes.

Comme on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} f_7(x) = \infty,$$

elle admet la droite d'équation cartésienne

$$x = 1$$

comme asymptote verticale. De plus, on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_7(x)}{x} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f_7(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0;$$

dès lors, la droite d'équation cartésienne

$$y = x$$

est asymptote oblique en $+\infty$.

Cela étant, la dérivée première est

$$Df_7(x) = \frac{3x^2(x^2 - 1) - 2x^4}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}, \quad \forall x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[;$$

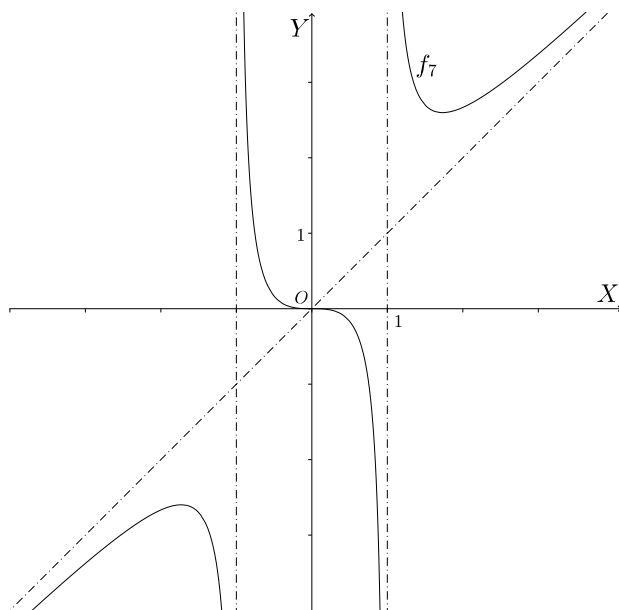
cette fonction s'annule en $x = 0$ et en $x = \sqrt{3}$, elle est positive sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et négative sur $[0, \sqrt{3}] \setminus \{1\}$. Il s'ensuit que la fonction f_7 est croissante sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et qu'elle est décroissante sur $[0, 1[$ et sur $]1, \sqrt{3}[$. On a un minimum local en $\sqrt{3}$ valant $3\sqrt{3}/2$.

La dérivée seconde est

$$D^2f_7(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2 - 1) - (x^4 - 3x^2)4x}{(x^2 - 1)^3} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}, \quad \forall x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Cette fonction s'annule en $x = 0$ et a le signe du polynôme $x \mapsto x(x^2 - 1)$; elle est donc négative sur $[0, 1[$ et positive sur $\{0\} \cup]1, +\infty[$. Il s'ensuit que la fonction f_7 possède l'origine comme point d'inflexion, est concave sur $[0, 1[$ et convexe sur $]1, +\infty[$.

Sa représentation graphique est la suivante.



La fonction f_8

La fonction est définie et indéfiniment dérivable sur le complémentaire des zéros du dénominateur, c'est-à-dire sur

$$\{x \in \mathbb{R} : -x^2 + x + 6 = (x+2)(3-x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}.$$

On peut immédiatement noter que la fonction est à valeurs positives pour $x \in]-2, 3[$ et à valeurs négatives pour $x \in]-\infty, -2[\cup]3, +\infty[$ et ne s'annule pas. Par ailleurs, d'une part comme

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x+2)(3-x)} = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+2)(3-x)} = \infty,$$

elle admet les droites d'équation cartésienne

$$x = -2 \quad \text{et} \quad x = 3$$

comme asymptotes verticales. D'autre part, comme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(x+2)(3-x)} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+2)(3-x)} = 0,$$

l'axe des abscisses est asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

Cela étant, la dérivée première est

$$Df_8(x) = \frac{2x-1}{(-x^2+x+6)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\};$$

elle s'annule en $x = 1/2$, est négative sur l'ensemble $] -\infty, 1/2[\setminus \{-2\}$, est positive sur l'ensemble $[1/2, +\infty[\setminus \{3\}$. La fonction est donc décroissante sur $] -\infty, -2[$ et sur

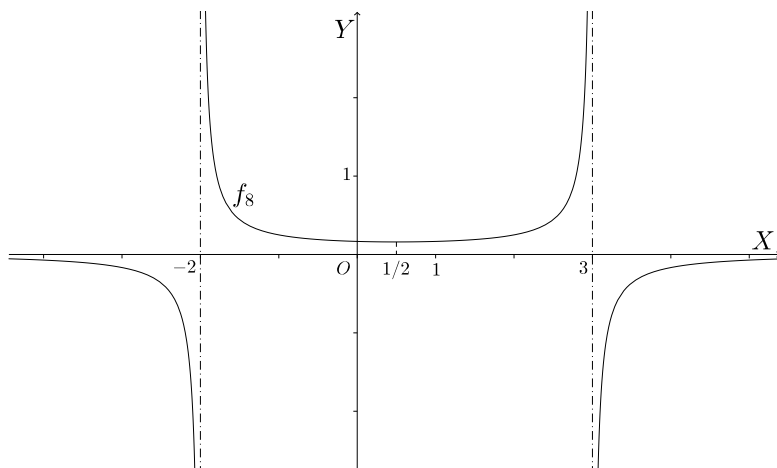
$] -2, 1/2]$, croissante sur $[1/2, 3[$ et sur $]3, +\infty[$ et admet un minimum local en $x = 1/2$, dont la valeur est $f_8(1/2) = 4/25$.

La dérivée seconde est

$$\begin{aligned} D^2 f_8 &= \frac{2(-x^2 + x + 6) - 2(2x - 1)(-2x + 1)}{(-x^2 + x + 6)^3} \\ &= \frac{2(-x^2 + x + 6 + 4x^2 - 4x + 1)}{(-x^2 + x + 6)^3} \\ &= \frac{2(3x^2 - 3x + 7)}{(-x^2 + x + 6)^3}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}. \end{aligned}$$

Comme le discriminant du numérateur est strictement négatif et le coefficient de x^2 positif, il s'ensuit que la dérivée seconde a le signe de f_8 . La fonction est donc convexe sur $] -2, 3[$, concave sur $] -\infty, -2[$ et sur $]3, +\infty[$ et ne possède pas de point d'inflexion.

Sa représentation graphique est la suivante.



La fonction f_9

La fonction f_9 est définie et indéfiniment dérivable sur

$$]0, +\infty[$$

et on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_9(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty ;$$

l'axe des ordonnées est donc asymptote verticale. Par ailleurs, comme on a également

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0,$$

l'axe des abscisses est asymptote horizontale.

Cela étant, la dérivée première est

$$Df_9(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}, \quad \forall x > 0;$$

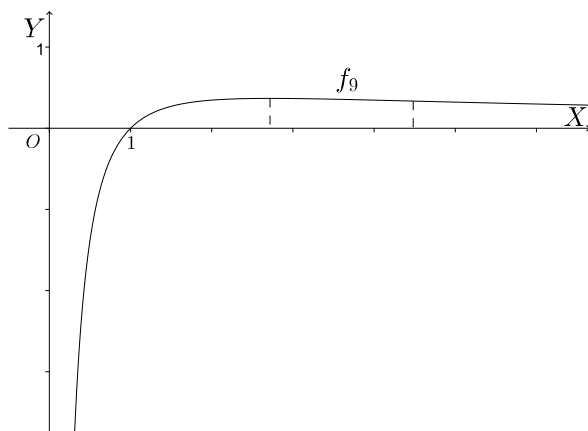
elle s'annule en $x = e$, est positive sur $]0, e]$ et est négative sur $[e, +\infty[$. La fonction f_9 est donc croissante sur $]0, e]$, décroissante sur $[e, +\infty[$ et admet un maximum global en $x = e$, dont la valeur est $1/e$.

La dérivée seconde est

$$D^2f_9(x) = \frac{-x - (1 - \ln(x))2x}{x^4} = -\frac{3 - 2\ln(x)}{x^3}, \quad \forall x > 0;$$

elle s'annule en $x = e^{3/2} = e\sqrt{e}$, est négative sur $]0, e\sqrt{e}]$ et est positive sur $[e\sqrt{e}, +\infty[$. La fonction possède donc le point d'inflexion de coordonnées $(e^{3/2}, (3/2)e^{-3/2})$, est concave sur $]0, e\sqrt{e}]$ et convexe sur $[e\sqrt{e}, +\infty[$.

Sa représentation graphique est la suivante.



La fonction f_{10}

La fonction f_{10} est définie sur $\mathbb{R}$ et est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_0$. Comme elle est continue sur $\mathbb{R}$, examinons la dérivabilité en 0. Malgré la présence de la valeur absolue, elle est également dérivable en 0 grâce à la présence du facteur x au numérateur. De fait, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_{10}(h) - f_{10}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h+1)}{h(|h|+1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h+1}{|h|+1} = 1.$$

En remarquant que si $x < 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f_{10}(x) &= \frac{x^2 + x - 2 + 2}{1 - x} = \frac{(x-1)(x+2) + 2}{1 - x} \\ &= -2 - x + \frac{2}{1 - x}, \quad \forall x < 0, \end{aligned}$$

on a aisément

$$Df_{10}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 + \frac{2}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cette dérivée est bien sûr dérivable sur $\mathbb{R}_0$; comme elle est continue en 0, examinons encore la dérivabilité en 0. On a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{Df_{10}(h) - Df_{10}(0)}{h} = 0$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{Df_{10}(h) - Df_{10}(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-2(1-h)^2 + 2}{h(1-h)^2} \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2-h}{(1-h)^2} \\ &= 4 ; \end{aligned}$$

la fonction n'est donc pas deux fois dérivable en 0.

Cela étant, sur $[0, +\infty[$, on a $f_{10}(x) = x$; sa représentation graphique est donc claire puisqu'il s'agit de la droite d'équation cartésienne $y = x$ considérée uniquement pour des abscisses positives. Étudions donc la fonction sur $] -\infty, 0[$. On a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_{10}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(x+1)}{x(1-x)} = -1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f_{10}(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2 + \frac{2}{1-x} \right) = -2 ;$$

la fonction f_{10} admet donc la droite d'équation cartésienne

$$y = -x - 2$$

comme asymptote oblique en $-\infty$.

Cela étant, la dérivée première est

$$Df_{10}(x) = \frac{2 - (1-x)^2}{(1-x)^2} = \frac{2 - 1 + 2x - x^2}{(1-x)^2} = \frac{-x^2 + 2x + 1}{(1-x)^2}, \quad \forall x < 0.$$

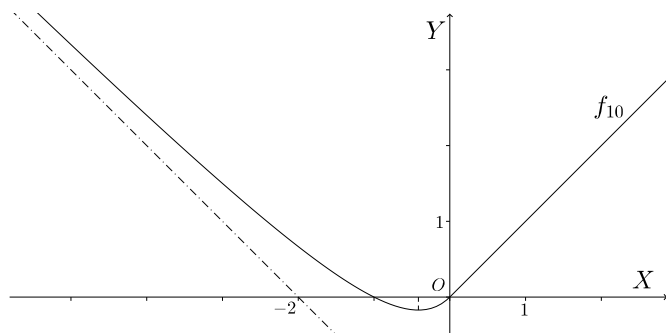
Le numérateur est un polynôme du second degré dont le discriminant est égal à 8 ; ce polynôme s'annule donc en $x_1 = (-2 + 2\sqrt{2})/(-2) = 1 - \sqrt{2}$ et en $x_2 = (-2 - 2\sqrt{2})/(-2) = 1 + \sqrt{2}$, est positif pour $x \in [x_1, x_2]$ et négatif en dehors de cet intervalle. Puisque le dénominateur de la dérivée est toujours strictement positif, on en déduit que la fonction f_{10} , considérée uniquement sur $] -\infty, 0]$, est décroissante sur $] -\infty, x_1]$, croissante sur $[x_1, 0]$ et admet un minimum global en x_1 , dont la valeur est $f_{10}(x_1) = 2\sqrt{2} - 3$.

La dérivée seconde est

$$D^2 f_{10}(x) = D \left(-1 + \frac{2}{(1-x)^2} \right) = \frac{4}{(1-x)^3}, \quad \forall x < 0 ;$$

elle est donc toujours positive. Il s'ensuit que la fonction f_{10} n'a pas de point d'inflexion et est convexe sur $] -\infty, 0]$.

Sa représentation graphique est la suivante.



Exercice 6

On donne les fonctions f , g et h de manière explicite par

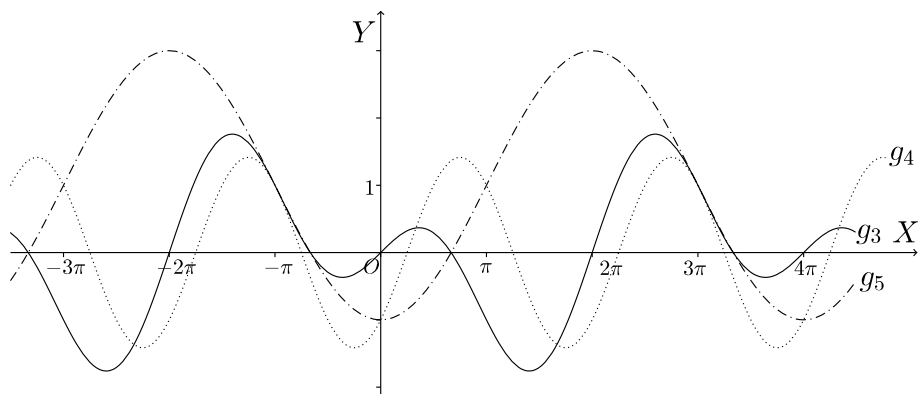
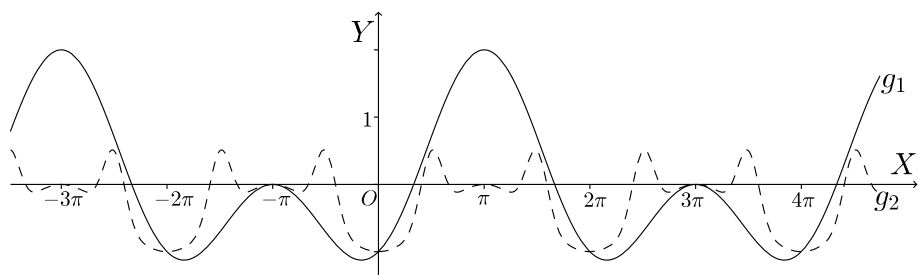
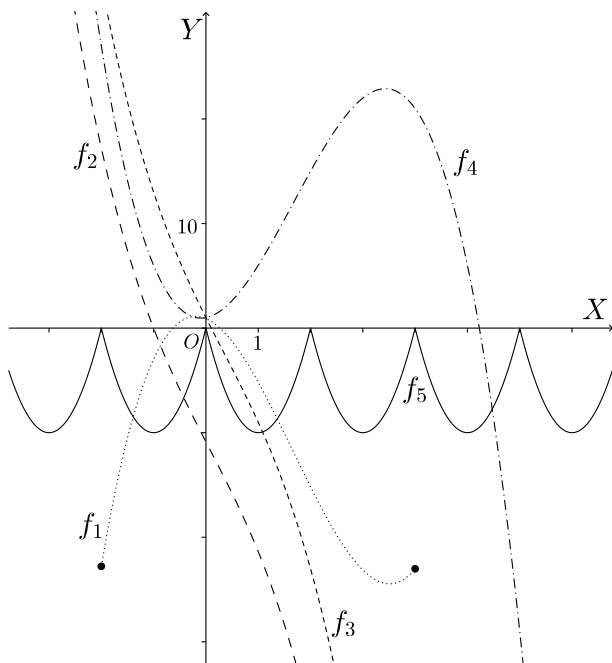
$$f(x) = -x^3 + x^2 - 10x + 1,$$

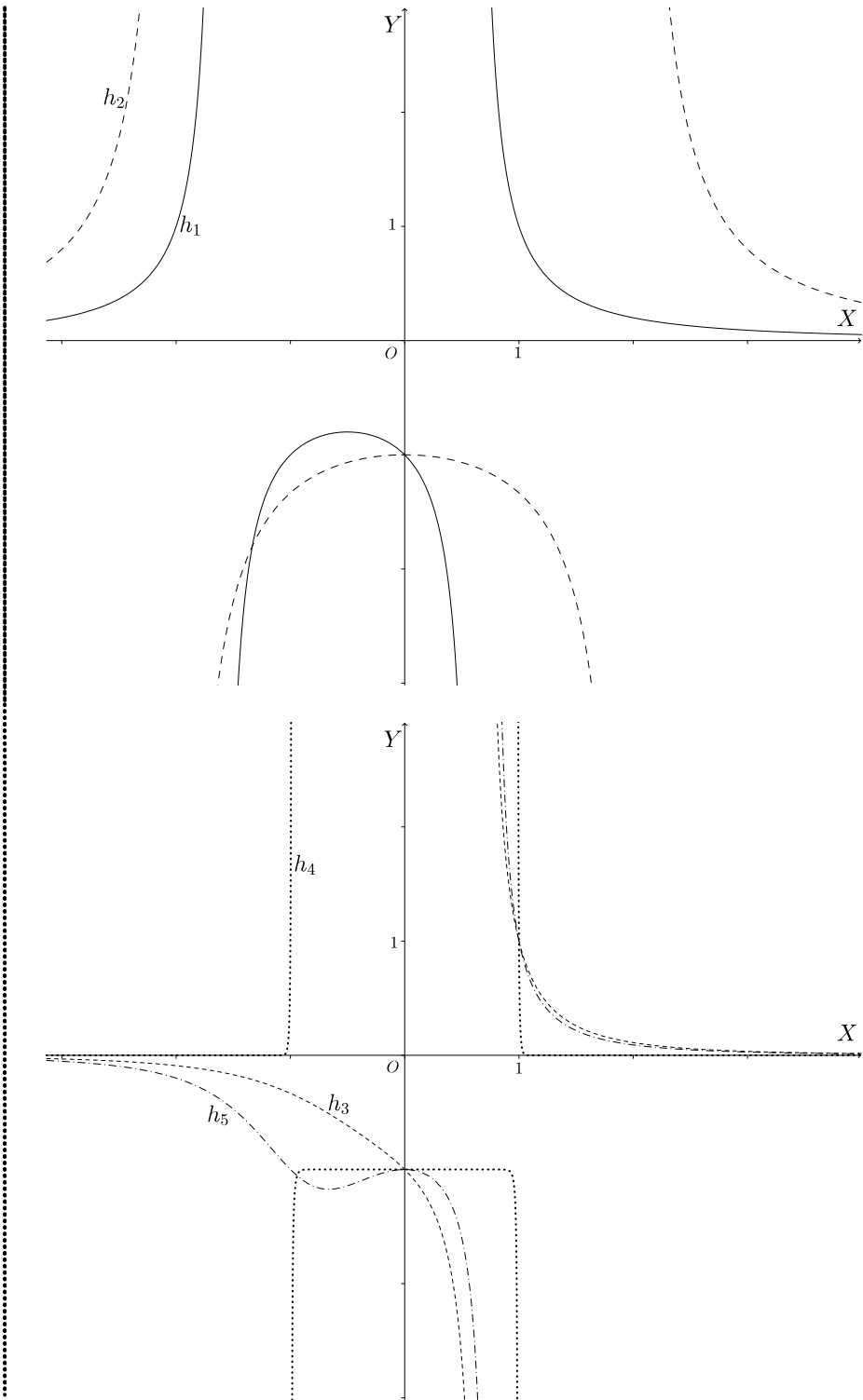
$$g(x) = \sin^{10}(x) - \cos^2\left(\frac{x}{2}\right),$$

$$h(x) = \frac{1}{x^{100} + x^{50} - 1}.$$

Parmi les graphiques suivants, quel est celui (ou quels sont ceux) qui peut (peuvent) être celui (ceux) de f ? Pourquoi ? Si aucun ne convient, en expliquer la raison.

Même question pour la fonction g et pour la fonction h .





Solution

Voici une manière de procéder pour répondre à la question.

La fonction f

La fonction est un polynôme de degré impair ; elle est donc définie sur $\mathbb{R}$, y est indéfiniment dérivable et son graphique intersecte au moins une fois l'axe des abscisses. Remarquons d'emblée que les graphiques f_1 et f_5 ne peuvent représenter la fonction proposée car dans un cas, il s'agit du graphique d'une fonction qui n'est définie que sur un intervalle fermé et dans l'autre, il s'agit du graphique d'une fonction périodique. Le graphique f_2 ne représente pas non plus la fonction f puisque $f(0) = 1$. Comme on a

$$Df(x) = -3x^2 + 2x - 10 < 0 \text{ et } D^2f(x) = -6x + 2 = 2(1 - 3x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

la fonction f ne possède qu'un seul zéro, est strictement décroissante, convexe sur $] -\infty, 1/3]$, concave sur $[1/3, +\infty[$ et son graphique possède un point d'inflexion de coordonnées $(1/3, f(1/3)) = (1/3, -61/27)$. Comme $f(0) = 1 > 0$, on peut même immédiatement préciser que le zéro de f est un réel strictement compris entre 0 et $1/3$. Comme seul le graphique de f_3 possède les caractéristiques repérées précédemment, c'est le seul possible pour être représentatif de f .

La fonction g

La fonction est définie et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$; elle y est également paire. Parmi les graphiques proposés, deux pourraient convenir à savoir ceux de g_2 et g_5 , les autres étant des graphiques de fonctions impaires ou ni paires ni impaires. Comme π est un zéro évident de la fonction g , seule la fonction g_2 pourrait convenir.

La fonction h

La fonction étant paire, seuls les graphiques h_2 et h_4 peuvent convenir.

Le dénominateur de la fonction s'écrit aussi

$$h^*(x) = |x|^{100} + |x|^{50} - 1 = H(|x|^{50}) \quad \text{avec} \quad H(t) = t^2 + t - 1.$$

La fonction H possède deux zéros réels de signes différents ; le zéro positif est $(\sqrt{5} - 1)/2$. Si on pose $x_0 = ((\sqrt{5} - 1)/2)^{1/50}$, h^* s'annule en x_0 et en $-x_0$. Ainsi, la fonction h est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-x_0, x_0\}$ et possède les asymptotes verticales d'équation $x = -x_0$ et $x = x_0$. Les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ sont nulles ; l'axe des abscisses est donc également asymptote horizontale en $-\infty$ et $+\infty$. Par ailleurs, la fonction vaut -1 en 0 et s'écrit

$$h(x) = \frac{1}{x^{100} + x^{50} - 1} = \frac{1}{(x^{50} - x_0^{50})(x^{50} - x_1)}$$

où $x_1 < 0$. Dès lors, puisque le dénominateur est une fonction croissante pour $x \geq 0$, la fonction est décroissante sur $[0, x_0[$ et sur $]x_0, +\infty[$; de plus elle est négative pour $x \in [0, x_0[$ et positive pour $x \in]x_0, +\infty[$. Parmi les graphiques proposés, aucun ne répond à ces propriétés.

Exercice 7

Montrer qu'on a les inégalités suivantes.

$$(a) \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{4!}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (b) \ln(x) + \frac{1}{s} \leq \frac{x^s}{s}, \quad \forall x, s > 0$$

De même, montrer qu'il existe des constantes positives r, r' et r'' telles que

$$(c) \left| \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} - \frac{x}{6} \right| \leq r|x|^3, \quad \forall x \in [-1, 1], x \neq 0$$

$$(d) \left| \frac{1}{x^2} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{6} \right| \leq r'x^2, \quad \forall x \in [-1, 1], x \neq 0$$

$$(e) \left| \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} \right| \leq r''x^2, \quad \forall x \in [-1, 1], x \neq 0.$$

Solution

(a) Posons

$$f(x) = \frac{x^4}{4!} - \cos(x) + 1 - \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

et montrons que cette fonction admet 0 comme minimum global ; on aura donc

$$f(0) = 0 \leq \frac{x^4}{4!} - \cos(x) + 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et on pourra conclure.

Comme la fonction est paire, on peut se contenter de montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. Cela étant, f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{x^3}{3!} + \sin(x) - x, & D^2f(x) &= \frac{x^2}{2} + \cos(x) - 1, \\ D^3f(x) &= x - \sin(x), & D^4f(x) &= 1 - \cos(x). \end{aligned}$$

La dérivée d'ordre 4 est positive pour tout x , donc la dérivée d'ordre 3 est croissante sur $\mathbb{R}$; dès lors

$$D^3f(x) \geq D^3f(0) = 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Cette inégalité implique que la dérivée d'ordre 2 est croissante sur $[0, +\infty[$, donc vérifie

$$D^2f(x) \geq D^2f(0) = 0, \quad \forall x \geq 0.$$

De même, cette inégalité implique que la dérivée d'ordre 1 est croissante sur $[0, +\infty[$, donc vérifie

$$Df(x) \geq Df(0) = 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Enfin, cette inégalité implique que la fonction est croissante sur $[0, +\infty[$, donc vérifie

$$f(x) \geq f(0) = 0, \quad \forall x \geq 0.$$

On peut bien sûr procéder d'une autre manière si on connaît le résultat appelé développement limité de Taylor ; son utilisation ici permet de conclure très aisément. De fait, la fonction cosinus est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$D \cos(x) = -\sin(x), D^2 \cos(x) = -\cos(x), D^3 \cos(x) = \sin(x), D^4 \cos(x) = \cos(x).$$

Il s'ensuit que pour tout réel x , il existe un réel u compris entre 0 et x tel que

$$\cos(x) = \sum_{j=0}^3 \frac{x^j}{j!} D^j \cos(0) + \frac{x^4}{4!} D^4 \cos(u) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \cos(u).$$

Puisque les valeurs du cosinus sont toujours inférieures à 1 et que x^4 est positif, on obtient ainsi

$$\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^4}{4!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Posons

$$f(x) = \frac{x^s}{s} - \ln(x), \quad x > 0.$$

La fonction f est indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = x^{s-1} - \frac{1}{x} = \frac{x^s - 1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

La dérivée s'annule en $x = 1$, est négative sur $]0, 1]$ et positive sur $[1, +\infty[$. Dès lors, la fonction f est décroissante sur $]0, 1]$, croissante sur $[1, +\infty[$ et admet un minimum global en $x = 1$. Ainsi

$$f(1) = \frac{1}{s} \leq f(x), \quad \forall x, s > 0.$$

(c), (d), (e) Les exercices (c), (d) et (e) peuvent être résolus en se servant du développement limité de Taylor. Pour cela, les résultats suivants sont utilisés : pour tout réel x , il existe des réels u et v compris entre 0 et x tels que

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} \cos(u),$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \cos(v),$$

et un réel w compris entre 0 et $2x$ tel que

$$\begin{aligned} \sin^2(x) &= \frac{1 - \cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} \cos(w) \right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2^5 x^6}{6!} \cos(w). \end{aligned}$$

La première égalité implique aussi

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1], x \neq 0$$

puisque on a

$$\left| -\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} \cos(u) \right| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

Cela étant, pour (c), on a alors successivement

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} - \frac{x}{6} \right| &= \frac{|6x - 6 \sin(x) - x^2 \sin(x)|}{6|x \sin(x)|} \\ &= \frac{\left| 6x - 6x + x^3 - 6 \frac{x^5}{5!} \cos(u) - x^3 + \frac{x^5}{6} - \frac{x^7}{5!} \cos(u) \right|}{6|x \sin(x)|} \\ &= \frac{\left| \left(-\frac{6}{5!} \cos(u) + \frac{1}{6} \right) x^4 - \frac{\cos(u)}{5!} x^6 \right|}{6|\sin(x)|} \\ &\leq \frac{\left| \left(-\frac{6}{5!} \cos(u) + \frac{1}{6} \right) x^3 - \frac{\cos(u)}{5!} x^5 \right|}{3} = r|x|^3, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (c).

Pour (d), on a

$$\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{6} = \frac{6 \sin^2(x) - 6x^2 \cos(x) - x^2 \sin^2(x)}{6x^2 \sin^2(x)}.$$

Cela étant, on a aussi

$$\begin{aligned} &6 \sin^2(x) - 6x^2 \cos(x) - x^2 \sin^2(x) \\ &= 6x^2 - 2x^4 + \frac{2^5}{5!} x^6 \cos(w) - 6x^2 + 3x^4 - \frac{x^6}{4} \cos(v) - x^4 + \frac{x^6}{3} - \frac{2^5 x^8}{6!} \cos(w) \\ &= \left(\frac{2^5}{5!} \cos(w) - \frac{1}{4} \cos(v) + \frac{1}{3} \right) x^6 - \frac{2^5 x^8}{6!} \cos(w) \end{aligned}$$

et

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2} \geq \frac{1}{4}.$$

Ainsi, on obtient finalement, pour $0 < |x| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x^2} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} - \frac{1}{6} \right| &= \frac{\left| \left(\frac{2^5}{5!} \cos(w) - \frac{1}{4} \cos(v) + \frac{1}{3} \right) x^6 - \frac{2^5}{6!} \cos(w) x^8 \right|}{6x^2 \sin^2(x)} \\ &\leq \frac{2}{3} \left| \left(\frac{2^5}{5!} \cos(w) - \frac{1}{4} \cos(v) + \frac{1}{3} \right) x^2 - \frac{2^5}{6!} \cos(w) x^4 \right| \\ &\leq r' x^2 \end{aligned}$$

et on conclut.

Enfin, pour (e), on a

$$\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} = \frac{3x^2 - 3\sin^2(x) - x^2\sin^2(x)}{3x^2\sin^2(x)}.$$

Cela étant, on a aussi

$$\begin{aligned} & 3x^2 - 3\sin^2(x) - x^2\sin^2(x) \\ &= 3x^2 - 3\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2^5x^6}{6!}\cos(w)\right) - x^2\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2^5x^6}{6!}\cos(w)\right) \\ &= \left(-\frac{2^4}{5!}\cos(w) + \frac{1}{3}\right)x^6 - \frac{2^5}{6!}\cos(w)x^8 \end{aligned}$$

et

$$\frac{\sin^2(x)}{x^2} \geq \frac{1}{4}.$$

Ainsi, on obtient finalement, pour $0 < |x| \leq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} \right| &= \frac{\left| \left(-\frac{2^4}{5!}\cos(w) + \frac{1}{3}\right)x^6 - \frac{2^5}{6!}\cos(w)x^8 \right|}{3x^2\sin^2(x)} \\ &\leq \frac{4}{3} \left| \left(-\frac{2^4}{5!}\cos(w) + \frac{1}{3}\right)x^2 - \frac{2^5}{6!}\cos(w)x^4 \right| \\ &\leq r''x^2 \end{aligned}$$

et on conclut.

Exercice 8

Calculer les limites suivantes, si elles sont envisageables et si elles existent. Si ce n'est pas le cas, en donner la raison.

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x)}{x+1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x)}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^3} \ln\left(\sqrt[5]{x}\right)$

(e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}}$

(f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{\arctan(x^2 + 2)}$

(g) $\lim_{t \rightarrow 1^+} |1-t| \ln(t^2 - 1)$

(h) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\ln(x-2)}{|2-x|}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^3}$

(j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(|2-x|) - \ln(x^2))$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos(x)}{\sin(x)}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3}$$

$$(m) \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^2}{e^{3u}}$$

$$(n) \lim_{y \rightarrow -\infty} y e^{-y^2}$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$(q) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(x)$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sin(x))$$

Solution

- (a) La fonction $x \mapsto \cos(x)/(x+1)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ensemble non minoré ; la limite en $-\infty$ peut donc être considérée.

Un passage direct à la limite au numérateur et au dénominateur ne permet pas de conclure car la limite en l'infini de la fonction cosinus n'existe pas. Cependant, on a

$$0 \leq \left| \frac{\cos(x)}{x+1} \right| \leq \frac{1}{|x+1|}, \quad \forall x \neq -1 ;$$

dès lors, comme

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x+1|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x-1} = 0,$$

le théorème de l'étau donne

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cos(x)}{x+1} = 0.$$

- (b) La fonction $x \mapsto x \ln(2 + (1/x))$ est définie sur l'ensemble

$$\begin{aligned} \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ et } 2 + \frac{1}{x} > 0 \right\} &= \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \text{ et } \frac{2x+1}{x} > 0 \right\} \\ &=]-\infty, -1/2[\cup]0, +\infty[, \end{aligned}$$

ensemble non majoré ; la limite en $+\infty$ peut donc être considérée.

Comme on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{y \rightarrow 0} \ln(2+y) = \ln(2) > 0,$$

on obtient directement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right) \right) = +\infty.$$

- (c) La fonction $x \mapsto \arcsin(2x)/x$ est définie sur $[-1/2, 0[\cup]0, 1/2]$ et tout intervalle ouvert contenant 0 rencontre cet ensemble ; la limite en 0 peut donc être considérée.

Cela étant, comme on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin(2x) = \arcsin(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0,$$

un passage direct à la limite aux numérateur et dénominateur ne permet pas de conclure puisqu'on obtient la forme indéterminée « 0/0 ». Cependant, cette forme se prête bien à l'utilisation du théorème de l'Hospital puisque les numérateur et dénominateur sont des fonctions dérivables sur $] -1/2, 1/2[$ et que la dérivée du dénominateur ne s'annule pas. Comme on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D \arcsin(2x)}{Dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} = 2,$$

le théorème de l'Hospital donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D \arcsin(2x)}{Dx} = 2.$$

- (d) La fonction $x \mapsto \sqrt{x^3} \ln(\sqrt[5]{x})$ est définie sur $]0, +\infty[$ et les intervalles du type $[0, r[$ (avec $r > 0$) ont une intersection non vide avec cet ensemble ; la limite en 0^+ peut donc être considérée.

En utilisant la propriété disant que « toute puissance antagoniste domine le logarithme en 0 », on obtient immédiatement que la limite demandée vaut 0.

- (e) La fonction $x \mapsto \ln(1/|x|)/\sqrt{x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}_0$, ensemble non minoré ; la limite en $-\infty$ peut donc être considérée.

Pour tout réel x strictement négatif, on a

$$\frac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}} = -\frac{\ln(-x)}{-x},$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}} = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y}.$$

En utilisant la propriété disant que « toute puissance antagoniste domine le logarithme en $+\infty$ », on obtient immédiatement que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1/|x|)}{\sqrt{x^2}} = -\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0.$$

- (f) La fonction $x \mapsto (3x^2 + 1)/\arctan(x^2 + 2)$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non minoré ; la limite en $-\infty$ peut donc être considérée.

En passant directement à la limite aux numérateur et dénominateur, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 + 1}{\arctan(x^2 + 2)} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 + 1)}{\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x^2 + 2)} = \frac{2}{\pi} \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 + 1) = +\infty.$$

- (g) La fonction $t \mapsto |1-t| \ln(t^2-1)$ est définie sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ et les intervalles du type $[1, r[$ (avec $r > 1$) ont une intersection non vide avec cet ensemble ; la limite en 1^+ peut donc être considérée.

Pour tout réel t strictement plus grand que 1, on a

$$|1 - t| \ln(t^2 - 1) = (t - 1) \left(\ln(t - 1) + \ln(t + 1) \right).$$

Cela étant, comme

$$\lim_{t \rightarrow 1} ((t - 1) \ln(t + 1)) = 0 \cdot \ln(2) = 0,$$

examinons

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} ((t - 1) \ln(t - 1)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x)).$$

Un passage direct à la limite dans les deux facteurs ne permet pas de conclure car on est dans le cas indéterminé « $0 \times \infty$ ». Mais l'expression

$$x \ln(x) = \frac{\ln(x)}{x^{-1}}, \quad x > 0$$

fournit le cas indéterminé « ∞/∞ » et se prête alors bien à l'utilisation du théorème de l'Hospital puisque les numérateur et dénominateur sont des fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et que la dérivée du dénominateur ne s'y annule pas. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{D \ln(x)}{D(x^{-1})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0,$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 1^+} ((t - 1) \ln(t - 1)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x)) = 0.$$

Dès lors, la limite demandée vaut 0.

- (h) La fonction $x \mapsto \ln(x - 2)/|2 - x|$ est définie sur $]2, +\infty[$; les intervalles du type $]r, 2]$ (où $r < 2$) ne rencontrent pas cet ensemble ; la limite en 2^- ne peut donc pas être considérée.
- (i) La fonction $x \mapsto (\cos(x) - 1 + (x^2/2)) / x^3$ est définie sur $\mathbb{R}_0$ et tout intervalle ouvert contenant 0 a une intersection non vide avec cet ensemble. La limite en 0 peut donc être considérée.

Un passage direct à la limite aux numérateur et dénominateur ne permet pas de conclure car on est dans le cas indéterminé « $0/0$ ». Cela étant, cette forme se prête bien à l'utilisation du théorème de l'Hospital puisque les numérateur et dénominateur sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_0$ et que la dérivée du dénominateur ne s'annule qu'en 0. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D(\cos(x) - 1 + (x^2/2))}{Dx^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + x}{3x^2} = \ll \frac{0}{0} \gg$$

et on ne peut donc pas encore conclure. On a

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D(-\sin(x) + x)}{3Dx^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x) + 1}{6x} = \ll \frac{0}{0} \gg$$

et on ne peut toujours pas conclure. Cependant,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{D(-\cos(x) + 1)}{6Dx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{6} = 0$$

et on peut enfin conclure par trois applications successives du théorème de l'Hospital :

$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D(-\cos(x) + 1)}{6Dx} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos(x) + 1}{6x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D(-\sin(x) + x)}{3Dx^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + x}{3x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D(\cos(x) - 1 + (x^2/2))}{Dx^3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + (x^2/2)}{x^3}.
 \end{aligned}$$

Remarquons qu'on aurait pu également procéder comme suit, sans recourir au théorème de l'Hospital : on a (voir l'exercice 7 de cette sous-section 5.1)

$$\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \leq x^4, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donc

$$\left| \frac{\cos(x) - 1 + (x^2/2)}{x^3} \right| \leq |x|, \quad \forall x \neq 0$$

et on conclut directement que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1 + (x^2/2)}{x^3} = 0$$

par le théorème de l'étau.

- (j) La fonction $x \mapsto (\ln(|2-x|) - \ln(x^2))$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, ensemble non majoré ; la limite en $+\infty$ peut donc être considérée.

Cela étant, on a directement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(|2-x|) - \ln(x^2)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{|2-x|}{x^2}\right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(y) = -\infty$$

en utilisant le théorème des limites de fonctions de fonction et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2-x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x^2} = 0^+.$$

- (k) La fonction $x \mapsto (1 + \cos(x))/\sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et tout intervalle ouvert contenant π a une intersection non vide avec cet ensemble ; la limite en π peut donc être considérée.

Un passage direct à la limite aux numérateur et dénominateur ne permet pas de conclure car on est dans le cas indéterminé « 0/0 ». Écrivons alors la fonction d'une autre manière. Pour tout réel x qui n'est pas un multiple entier de π , on a

$$\frac{1 + \cos(x)}{\sin(x)} = \frac{2 \cos^2(x/2)}{2 \sin(x/2) \cos(x/2)} = \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} ;$$

il s'ensuit alors directement

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos(x)}{\sin(x)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(x/2)}{\sin(x/2)} = \lim_{x \rightarrow \pi} \cotan(x/2) = 0.$$

- (I) La fonction $x \mapsto (\tan(x) - \sin(x))/x^3$ est définie sur $A = \mathbb{R}_0 \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ et tout intervalle ouvert contenant 0 a une intersection non vide avec cet ensemble ; la limite en 0 peut donc être considérée.

Cela étant, pour tout réel $x \in A$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} &= \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\cos(x)} \times \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \\ &= \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\cos(x)} \times \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} \\ &= \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\cos(x)} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2. \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit donc de se rappeler que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$$

car on a alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x^3} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{\cos(x)} \times \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Remarque. Si on évalue immédiatement cette limite en utilisant le théorème de l'Hospital, puisqu'un passage direct à la limite aux numérateur et dénominateur donne la forme indéterminée « 0/0 », on est amené à évaluer

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/\cos^2(x)) - \cos(x)}{3x^2}$$

qui nécessite encore des manipulations, pour finalement encore faire appel au théorème de l'Hospital. On peut bien sûr aussi conclure par cette méthode.

- (m) La fonction $u \mapsto u^2/e^{3u} = u^2/\exp(3u)$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non majoré ; la limite en $+\infty$ peut donc être considérée.

Un passage direct à la limite aux numérateur et dénominateur ne permet pas de conclure car on est dans le cas indéterminé « ∞/∞ ». Écrivons alors

$$\frac{u^2}{e^{3u}} = \left(\frac{u^{2/3}}{e^u} \right)^3, \quad \forall u \in]0, +\infty[.$$

On conclut alors immédiatement que la limite est égale à 0 car

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} (u^{2/3} e^{-u}) = 0.$$

- (n) La fonction $y \mapsto ye^{-y^2} = y \exp(-y^2)$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non minoré ; la limite en $-\infty$ peut donc être considérée.

Un passage direct à la limite dans les deux facteurs qui constituent la fonction ne permet pas de conclure car on est dans le cas indéterminé « $0 \times \infty$ ». Cela étant, on peut écrire

$$y \exp(-y^2) = \frac{1}{y} y^2 \exp(-y^2), \quad \forall y \neq 0.$$

On conclut alors immédiatement que la limite est égale à 0 car

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} (y^2 \exp(-y^2)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t \exp(-t)) = 0.$$

- (o) La fonction $x \mapsto \exp(x)/\sqrt{\exp(x^2)}$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non majoré ; la limite en $+\infty$ peut donc être considérée.

Les limites des numérateur et dénominateur étant infinies, on est dans le cas indéterminé « ∞/∞ ». On peut alors procéder comme suit : pour tout réel x , on a

$$\frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}} = \exp(x) \exp(-x^2/2) = \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right);$$

dès lors, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2/2) = -\infty$, le théorème des limites des fonctions de fonction donne

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \exp(y) = 0.$$

- (p) La fonction $x \mapsto x/\sqrt{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non minoré ; la limite en $-\infty$ peut donc être considérée.

Les limites des numérateur et dénominateur étant infinies, on est dans le cas indéterminé « ∞/∞ ». On peut alors procéder comme suit : on a

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{|x|\sqrt{(1/x^2)+1}} = \frac{x}{-x\sqrt{(1/x^2)+1}} = \frac{1}{-\sqrt{(1/x^2)+1}}, \quad \forall x < 0,$$

donc on obtient directement

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1+(1/x^2)}} = -1.$$

Notons que même si les hypothèses du théorème de l'Hospital sont remplies, son utilisation ne permet pas de conclure car

$$\frac{Dx}{D\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \quad \text{et} \quad \frac{D\sqrt{1+x^2}}{Dx} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0.$$

- (q) La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non minoré ; la limite en $-\infty$ peut donc être considérée.

Cela étant, comme la fonction sinus est à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, la limite éventuelle ne peut être infinie. Elle ne peut pas non plus être finie : de fait, si

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(x) = r$, alors $\forall \varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que

$$|\sin(x) - r| \leq \varepsilon, \quad \forall x < -R.$$

Par conséquent, en prenant un naturel pair m tel que $\frac{\pi}{2} - m\pi < -R$, si on remplace x par $-m\pi$ (resp. $\frac{\pi}{2} - m\pi$), on obtient

$$|\sin(-m\pi) - r| = |r| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \sin\left(\frac{\pi}{2} - m\pi\right) - r \right| = |1 - r| \leq \varepsilon.$$

Puisque ceci est valable quel que soit $\varepsilon > 0$, cela implique $r = 0$ d'une part et $r = 1$ d'autre part !

- (r) La fonction $x \mapsto x + \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble non minoré ; la limite en $-\infty$ peut donc être considérée.

Cela étant, on a directement

$$x + \sin(x) \leq x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sin(x)) = -\infty$$

puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 1) = -\infty$.

Exercice 9

Montrer que l'on a

$$e^x \geq x^e, \quad \forall x > 0 \quad \text{et} \quad e^x = x^e \Leftrightarrow x = e.$$

En déduire que

$$a^x \geq x^a, \quad \forall x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = e.$$

Solution

Comme la fonction exponentielle est une fonction croissante, on a

$$e^x \geq x^e = e^{e \ln(x)}, \quad \forall x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq e \ln(x), \quad \forall x > 0.$$

Étudions alors la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \quad x > 0.$$

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $]0, +\infty[$ et comme

$$Df(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \begin{cases} \geq 0 & \text{si } x \in]0, e] \\ \leq 0 & \text{si } x \in [e, +\infty[\end{cases}$$

elle est strictement croissante sur $]0, e]$, strictement décroissante sur $[e, +\infty[$ et admet un maximum global en $x = e$, lequel vaut $f(e) = 1/e$. Dès lors

$$f(x) \leq f(e), \quad \forall x > 0 \quad \text{ou encore} \quad e \ln(x) \leq x, \quad \forall x > 0$$

et on a l'égalité si et seulement si $x = e$.

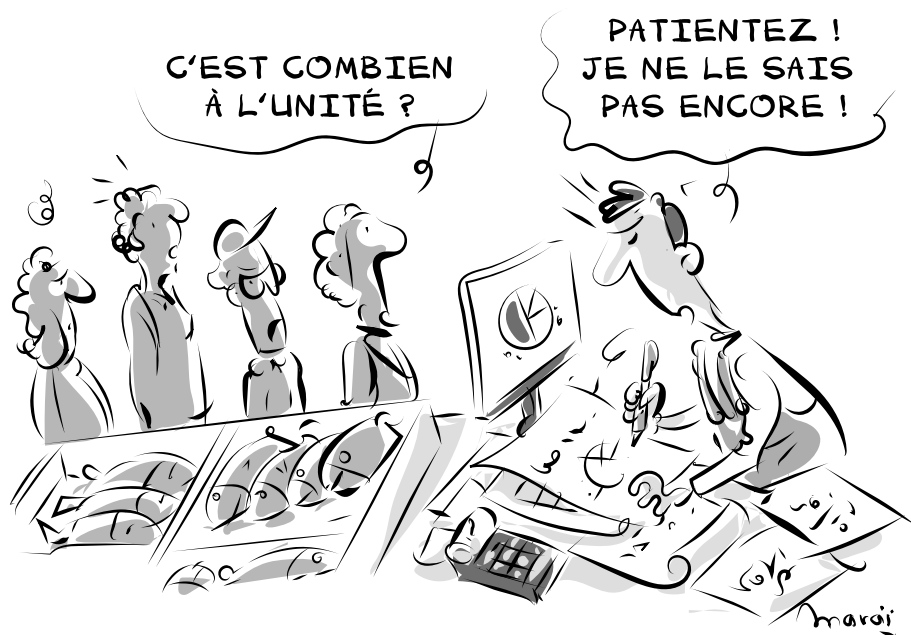
Cela étant, comme on a $e^x \geq x^e$ pour tout $x > 0$ et l'égalité si et seulement si $x = e$, on obtient

$$a^x \geq x^a, \quad \forall x > 0 \quad \Rightarrow \quad a^e \geq e^a \geq a^e \quad \Rightarrow \quad e^a = a^e \quad \Rightarrow \quad a = e$$

et on conclut.

Exercice 10

Un commerçant vend en moyenne 100 jeux vidéo par mois au prix unitaire de 50 euros. Cependant, chaque réduction de 1 euro sur le prix unitaire lui permettrait d'en vendre 5 supplémentaires. À quel prix unitaire devrait-il vendre ses jeux pour que son revenu total soit maximum ? Combien en vendrait-il alors ?



Solution

Soit $x \in \mathbb{N}_0$ le nombre d'euros de réduction sur le prix unitaire. Celui-ci vaut alors $(50 - x)$ euros. À ce prix, le commerçant vend $(100 + 5x)$ jeux et son revenu total est égal à

$$R(x) = (100 + 5x)(50 - x) = 5\,000 + 150x - 5x^2.$$

En fait R est une fonction indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$DR(x) = 150 - 10x.$$

Cette dérivée s'annule en $x = 15$, est positive pour $x \leq 15$ et négative pour $x \geq 15$; cette valeur donne donc bien lieu à une valeur maximale pour R . Ainsi, pour avoir un revenu total maximum, le commerçant doit vendre au prix unitaire de 35 euros et il vendra $100 + 5 \times 15 = 175$ jeux en moyenne par mois.

Exercice 11

Une source lumineuse ponctuelle est située en un point S . Son éclairage au point P est égal au quotient de l'intensité de la source par le carré de la distance entre les points P et S . On suppose que le quotient des intensités de deux sources lumineuses situées aux points A et B distants d'une longueur L est égal au quotient de 8 par 27. Sur le segment $[AB]$, quel est alors l'emplacement du point qui reçoit l'éclairage minimum ?

Solution

Soit P un point du segment $[AB]$ situé à une distance $x > 0$ du point A et donc à une distance $L - x > 0$ de B . Si on note I_A l'intensité lumineuse de la source située en A et I_B celle de la source située en B , l'éclairage en P produit par la source en A est égal à

$$E_A(x) = \frac{I_A}{x^2}$$

et celui produit par la source en B est égal à

$$E_B(x) = \frac{I_B}{(L - x)^2}.$$

L'éclairage en P est donc égal à

$$E(x) = E_A(x) + E_B(x) = \frac{I_A}{x^2} + \frac{I_B}{(L - x)^2}, \quad x \in]0, L[.$$

Comme $I_A/I_B = 8/27$, on obtient

$$E(x) = I_B \left(\frac{8}{27x^2} + \frac{1}{(L-x)^2} \right), \quad x \in]0, L[.$$

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, L\}$ et, dans cet ensemble, on a

$$\begin{aligned} DE(x) &= I_B \left(\frac{-16}{27x^3} + \frac{2}{(L-x)^3} \right) \\ &= 2I_B \frac{-(2(L-x))^3 + (3x)^3}{27x^3(L-x)^3} \\ &= 2I_B \frac{(3x - 2L + 2x)(9x^2 + 6x(L-x) + 4(L-x)^2)}{27x^3(L-x)^3} \\ &= 2I_B \frac{(5x - 2L)(7x^2 - 2Lx + 4L^2)}{27x^3(L-x)^3}. \end{aligned}$$

La dérivée première s'annule si et seulement si $x = 2L/5$, le polynôme du second degré du numérateur étant toujours strictement positif. Le dénominateur étant toujours strictement positif lorsque $x \in]0, L[$, la dérivée est donc négative sur l'intervalle $]0, 2L/5[$ et positive sur $[2L/5, L[$. Le réel $2L/5$ donne donc lieu à la valeur minimale de l'éclairement et le point qui reçoit l'éclairement minimum est situé aux $2/5$ de la longueur du segment $[AB]$ à partir du point A .

Exercice 12

Un fabricant de conserves utilise des boîtes métalliques cylindriques d'un litre. Quelles sont les dimensions à donner à une boîte pour que la tôle nécessaire à sa fabrication ait la plus petite aire possible sachant que les disques formant le fond et le couvercle sont découpés dans des carrés, le déchet étant perdu ?

Solution

Soit R le rayon du cylindre et H sa hauteur, exprimés en centimètres. Puisque un litre correspond à un volume de $1\,000 \text{ cm}^3$, on a

$$\pi R^2 H = 1\,000 \quad \Leftrightarrow \quad H = \frac{1\,000}{\pi R^2}.$$

L'aire de la tôle nécessaire à la fabrication de la boîte est donc égale à

$$A(R) = 2(2R)^2 + 2\pi RH = 8R^2 + \frac{2\,000}{R}, \quad R > 0.$$

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et on a

$$DA(R) = 16R - \frac{2000}{R^2} = 16 \left(R - \frac{125}{R^2} \right) = 16 \frac{R^3 - 125}{R^2}, \quad \forall R \neq 0.$$

La dérivée première s'annule donc en le seul réel $R = 5$, est négative pour $R \leq 5$ et positive pour $R \geq 5$. Cette valeur de R donne bien lieu à un minimum des valeurs de la fonction et ainsi, les boîtes auront un rayon de 5 cm et une hauteur de $1000/25\pi = 40/\pi \approx 12,73$ cm.

Exercice 13

On donne une bobine de rayon $R > 0$ et on y fait passer un courant électrique. Sur un aimant situé à une distance x du centre de la bobine, ce courant exerce une force dont l'expression est

$$F(x) = \frac{kx}{(x^2 + R^2)^{5/2}}$$

où k est une constante strictement positive. À quelle distance du centre de la bobine la force exercée sur l'aimant est-elle maximale ?

Solution

L'expression $F(x)$ définit une fonction F dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\begin{aligned} DF(x) &= k(x^2 + R^2)^{-5/2} - 5x(x^2 + R^2)^{-7/2} kx \\ &= k(x^2 + R^2)^{-7/2}(x^2 + R^2 - 5x^2) \\ &= k \frac{R^2 - 4x^2}{(x^2 + R^2)^{7/2}} \\ &= k \frac{(R - 2x)(R + 2x)}{(x^2 + R^2)^{7/2}}. \end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule en $x = -R/2$ et en $x = R/2$; cependant, elle ne doit être étudiée que sur l'intervalle $[0, +\infty[$ puisque x représente une distance. Comme la dérivée est positive pour $0 \leq x \leq R/2$ et négative pour $x \geq R/2$, le réel $R/2$ donne donc lieu à la valeur maximale de la force.

Exercice 14

Un navire doit parcourir une distance de K kilomètres. Parmi toutes les dépenses, on considère celle du combustible et celle du personnel. La dépense horaire du combustible est proportionnelle au carré du module v de la vitesse du navire ; elle sera notée Cv^2 où C est une constante strictement positive et où v est exprimé en km/h. Le salaire horaire du personnel est constant et égal à P euros. Déterminer la vitesse du navire pour que la dépense totale soit minimale.



Solution

Soit N le nombre d'heures mis par le navire pour parcourir la distance K à la vitesse v . En fonction de la vitesse v , la dépense totale est alors donnée explicitement par

$$d(v) = N(Cv^2 + P).$$

Comme $K = Nv$, on a aussi

$$d(v) = \frac{K}{v} (Cv^2 + P) = K \left(Cv + \frac{P}{v} \right), \quad \forall v > 0.$$

La fonction d est une fonction indéfiniment continûment dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$\begin{aligned} Dd(v) &= K \left(C - \frac{P}{v^2} \right) = K \frac{Cv^2 - P}{v^2} \\ &= K \frac{(\sqrt{C}v - \sqrt{P})(\sqrt{C}v + \sqrt{P})}{v^2}, \quad \forall v > 0. \end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule en $v = \sqrt{P/C}$, est négative pour $0 \leq v \leq \sqrt{P/C}$ et positive pour $v \geq \sqrt{P/C}$. Le réel $\sqrt{P/C}$ donne donc la valeur minimale pour la dépense. La vitesse recherchée est, dès lors, $\sqrt{P/C}$ km/h.

Exercice 15

..... Afin de réduire au maximum le frottement d'un fluide contre les parois d'un canal à l'intérieur duquel il s'écoule, on conçoit ce dernier de telle sorte que l'aire de la surface de contact soit minimale. Quelles doivent être les dimensions d'un canal parallélépipédique ouvert dont l'aire de la section transversale est donnée ?

Solution

Notons h la hauteur du canal, l sa largeur, L sa longueur et A l'aire de la section transversale. L'aire de la surface de contact est donc égale à $2Lh + Ll = 2Lh + L(A/h)$. Définissons alors la fonction S comme suit

$$S(h) = L \left(2h + \frac{A}{h} \right), \quad h > 0.$$

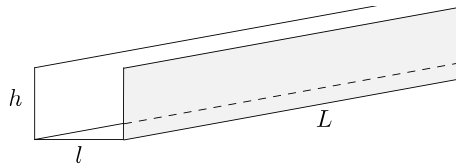
Le problème posé demande de minimiser cette fonction. La fonction S est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$DS(h) = L \left(2 - \frac{A}{h^2} \right), \quad \forall h > 0.$$

Cette dérivée s'annule en $h = \sqrt{A/2}$, est négative pour $0 < h < \sqrt{A/2}$, positive pour $h \geq \sqrt{A/2}$. Le réel $\sqrt{A/2}$ donne donc la valeur minimale pour l'aire S et la relation entre les largeur et hauteur est

$$l = \frac{A}{h} = 2h,$$

c'est-à-dire que la largeur du canal doit être le double de sa hauteur.



5.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

En appliquant la définition, montrer que $f : x \mapsto 4x^2 - x$ est dérivable en -1 et donner la valeur de sa dérivée en ce point.

Exercice 2

On donne des fonctions par les expressions explicites suivantes. Pour chacune d'entre elles, en déterminer le domaine de définition, de continuité, de dérivabilité et en calculer la dérivée première.

$$f_1(x) = -\frac{x^3}{2} + \pi x$$

$$f_2(x) = \frac{1}{(x+1)(3-x)}$$

$$f_3(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$$

$$f_4(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$$

$$f_5(x) = x \sin(x^2)$$

$$f_6(x) = (x-1)(e^x - e^{-x})$$

$$f_7(x) = \arctan(\tan(x))$$

$$f_8(x) = \cos(\sin^2(x))$$

$$f_9(x) = \arccos\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$f_{10}(x) = \frac{1}{\arctan(x) - \pi/4}$$

$$f_{11}(x) = \left(\sqrt{2} - 1\right)^x$$

$$f_{12}(x) = \ln(1 - \ln(x))$$

$$f_{13}(x) = \ln(\ln^2(x))$$

$$f_{14}(x) = (\ln(x))^{\ln(x)}$$

$$f_{15}(x) = x^{\ln(x)}$$

$$f_{16}(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x^2 + x - 2)}}$$

Exercice 3

- On donne la fonction g dérivable sur $] -1, 1[$ et la fonction $f : t \mapsto f(t) = g(\ln(t))$.
 - Déterminer le plus grand ouvert dans lequel f est dérivable.
 - Calculer la dérivée de f en fonction de la dérivée de g .
 - Mêmes questions si g est dérivable sur $]0, 3[$ et si f est la fonction $y \mapsto f(y) = g\left(\sqrt{y^2 - 1}\right)$.
 - Mêmes questions si g est dérivable sur $]0, \pi/3[$ et si f est la fonction $a \mapsto f(a) = g\left(\arcsin(\sqrt{1 - a})\right)$.
- Soit $F : t \mapsto F(t) = f(x(t))$ avec $x(3) = 2$, $Dx(3) = 5$ et $(D_x f)(2) = -4$. En supposant F dérivable en 3, que vaut $(DF)(3)$?

Exercice 4

Calculer les limites suivantes si elles sont envisageables et existent. Si ce n'est pas le cas, en donner la raison.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x)}{x - 1}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \ln\left(3 + \frac{1}{x^2}\right)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{1}{x - 2}\right)$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2} \ln\left(\sqrt[3]{|x|}\right)$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(4/|x|)}{\sqrt{x^3}}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 1}{\arctan(x^2 + 1)}$$

$$(g) \lim_{t \rightarrow (-1)^-} (1 + t) \ln(t^2 - 1)$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\ln^2(x - 3)}{|3 - x|}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - 3x - 4)}{x + 1}$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\ln(|3 - x|) - \ln\left(\sqrt{x^2}\right)\right)$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cotan(x) - \cos(x)}{(x - \pi/2)^3}$$

$$(m) \lim_{u \rightarrow +\infty} u \exp\left(\frac{1}{u - 1}\right)$$

$$(n) \lim_{y \rightarrow +\infty} \log_y 4$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\exp(x)}{\sqrt{\exp(x^2)}}$$

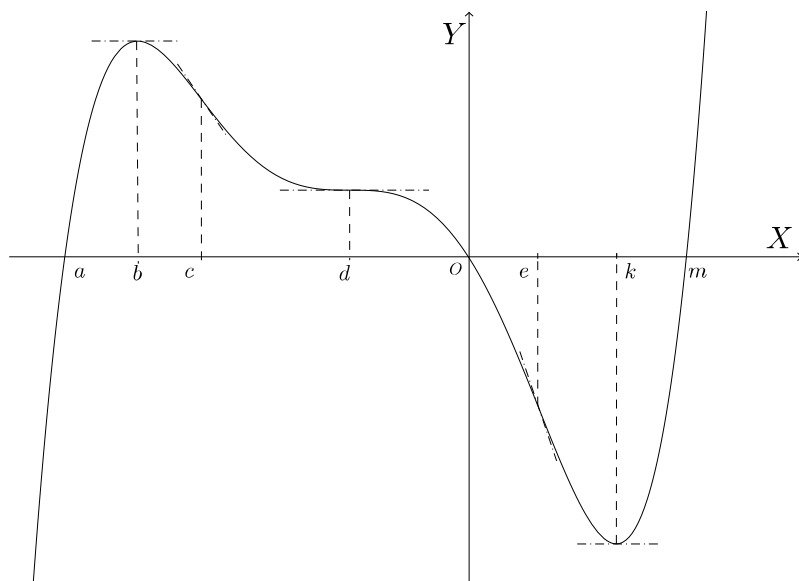
$$(p) \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(x))^{1 - \cos(x)}$$

Exercice 5

- Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ au point d'abscisse $-\pi/4$. Représenter cette fonction et cette tangente.

Exercice 6

On donne le graphique suivant ($x \in]a, m[$). On considère alors trois cas : dans le premier il s'agit de celui d'une fonction, dans le second, il s'agit de celui de sa dérivée et dans le troisième, il s'agit de celui de sa dérivée seconde. Pour chaque cas, on désigne la fonction par f_1, f_2, f_3 .



Lorsque c'est possible, répondre aux questions suivantes. Si les données ne permettent pas de répondre, en expliquer la raison.

1. Déterminer les zéros de f_1, f_2, f_3 .
2. Déterminer le signe de f_1, f_2, f_3 .
3. Où la fonction f_1 (resp. f_2, f_3) est-elle croissante ? Où est-elle décroissante ? Pourquoi ?
4. Où la fonction f_1 (resp. f_2, f_3) est-elle concave, convexe ? Pourquoi ?
5. Déterminer les zéros, le signe et la monotonie de Df_1, D^2f_1 .

Exercice 7

- Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes données explicitement, leurs domaines de continuité et de dérivabilité, leurs éventuelles asymptotes, leurs

monotonie et concavité, leurs éventuels extrema et points d'inflexion au graphique. Sur la base des résultats obtenus, esquisser les graphiques dans un repère orthonormé.

$$f_1(x) = \sin(x) + \cos(x)$$

$$f_2(x) = 4 \cos^2(x) - 8 \cos(x) + 3$$

$$f_3(x) = x^3 e^{-x}$$

$$f_4(x) = x \ln(x)$$

$$f_5(x) = \sqrt{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$f_6(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_7(x) = \exp(-x^2)$$

$$f_8(x) = \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

$$f_9(x) = e^{-|x|} \sin(x)$$

$$f_{10}(x) = \frac{x|x-1|}{1-|1-x|}$$

Exercice 8

Une lentille convexe est caractérisée par une distance focale f . Si un objet se trouve à une distance p de la lentille, son image sera située à une distance q liée à p par la relation $1/f = 1/p + 1/q$. Si la distance focale vaut 3 cm et que p croît, quelle est la vitesse de variation de q lorsque p vaut 33 cm ?



Solution 1

On a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (4h - 9) = -9.$$

Comme cette limite existe et est finie, la fonction est dérivable en -1 . La limite valant -9 , la dérivée de cette fonction en -1 vaut -9 .

Solution 2

Dans ce qui suit, on rappelle la forme explicite de la fonction et les quatre données suivantes sont successivement le domaine de définition A , le domaine de continuité B , le domaine de dérivabilité C et l'expression explicite de la dérivée première.

La fonction f_1 donnée par $f_1(x) = -(x^3/2) + \pi x$

$$A = B = C = \mathbb{R}; Df_1(x) = -3x^2/2 + \pi.$$

La fonction f_2 donnée par $f_2(x) = 1/((x+1)(3-x))$

$$A = B = C = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}; Df_2(x) = 2(x-1)/((x+1)^2(3-x)^2).$$

La fonction f_3 donnée par $f_3(x) = \arcsin(\sqrt{1-x^2})$

$$A = B = [-1, 1]; C =]-1, 0[\cup]0, 1[;$$

$$Df_3(x) = 1/\sqrt{1-x^2} \quad \text{si } x < 0 \quad \text{et} \quad Df_3(x) = -1/\sqrt{1-x^2} \quad \text{si } x > 0.$$

La fonction f_4 donnée par $f_4(x) = \sqrt[3]{1+x^3}$

$$A = B = \mathbb{R}; C = \mathbb{R} \setminus \{-1\}; Df_4(x) = x^2/\sqrt[3]{(1+x^3)^2}.$$

La fonction f_5 donnée par $f_5(x) = x \sin(x^2)$

$$A = B = C = \mathbb{R}; Df_5(x) = \sin(x^2) + 2x^2 \cos(x^2).$$

La fonction f_6 donnée par $f_6(x) = (x-1)(e^x - e^{-x})$

$$A = B = C = \mathbb{R}; Df_6(x) = xe^x + (x-2)e^{-x}.$$

La fonction f_7 donnée par $f_7(x) = \arctan(\tan(x))$

$$A = B = C = \mathbb{R} \setminus \{(\pi/2) + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}; Df_7(x) = 1.$$

La fonction f_8 donnée par $f_8(x) = \cos(\sin^2(x))$

$$A = B = C = \mathbb{R}; Df_8(x) = -\sin(\sin^2(x)) \sin(2x).$$

La fonction f_9 donnée par $f_9(x) = \arccos(x^2 - (1/2))$

$$A = B = [-\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}]; C =]-\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}[;$$

$$Df_9(x) = -4x/\sqrt{(3-2x^2)(1+2x^2)}.$$

La fonction f_{10} donnée par $f_{10}(x) = 1/(\arctan(x) - \pi/4)$

$$A = B = C = \mathbb{R} \setminus \{1\}; Df_{10}(x) = -1/((x^2+1)(\arctan(x) - \pi/4)^2).$$

La fonction f_{11} donnée par $f_{11}(x) = (\sqrt{2}-1)^x$

$$A = B = C = \mathbb{R}; Df_{11}(x) = \ln(\sqrt{2}-1) (\sqrt{2}-1)^x.$$

La fonction f_{12} donnée par $f_{12}(x) = \ln(1 - \ln(x))$

$$A = B = C =]0, e[; Df_{12}(x) = -1/(x(1 - \ln(x))).$$

La fonction f_{13} donnée par $f_{13}(x) = \ln(\ln^2(x))$

$$A = B = C =]0, 1[\cup]1, +\infty[; Df_{13}(x) = 2/(x \ln(x)).$$

La fonction f_{14} donnée par $f_{14}(x) = (\ln(x))^{\ln(x)}$

$$A = B = C =]1, +\infty[; Df_{14}(x) = ((1 + \ln(\ln(x)))/x) \times (\ln(x))^{\ln(x)}.$$

La fonction f_{15} donnée par $f_{15}(x) = x^{\ln(x)}$

$$A = B = C =]0, +\infty[; Df_{15}(x) = x^{\ln(x)} \times (2 \ln(x)/x).$$

La fonction f_{16} donnée par $f_{16}(x) = 1/\sqrt{\ln(x^2 + x - 2)}$

$$A = B = C = \left] -\infty, -(1 + \sqrt{13})/2 \right[\cup \left] (-1 + \sqrt{13})/2, +\infty \right[;$$

$$Df_{16}(x) = -\frac{2x + 1}{2(x^2 + x - 2) \ln(x^2 + x - 2) \sqrt{\ln(x^2 + x - 2)}}.$$

Solution 3

1. (a) Le plus grand ouvert dans lequel f est dérivable est $]1/e, e[$.

(b) Sur son domaine de dérivabilité, on a $Df(t) = D_y g(y)|_{y=\ln(t)} \times (1/t)$.

(c) Le plus grand ouvert dans lequel f est dérivable est l'ensemble $] -\sqrt{10}, -1[\cup]1, \sqrt{10}[$; sur cet ensemble, sa dérivée vaut

$$Df(y) = D_t g(t)|_{t=\sqrt{y^2-1}} \times \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}.$$

(d) Le plus grand ouvert sur lequel f est dérivable est $]0, 3/4[$; sur cet ensemble, sa dérivée vaut

$$Df(a) = D_u g(u)|_{u=\arcsin(\sqrt{1-a})} \times \left(\frac{1}{2\sqrt{a(1-a)}} \right).$$

2. La dérivée de F en 3 vaut -20 .

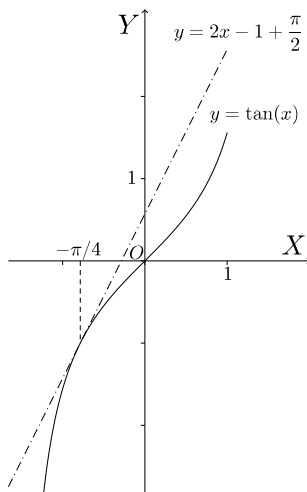
Solution 4

Voici les domaines de définition des fonctions et les limites demandées.

Domaine de définition	Limite	Domaine de définition	Limite
(a) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$	0^-	(b) $\mathbb{R}_0$	$+\infty$
(c) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$	1^-	(d) $\mathbb{R}_0$	0^+
(e) $]0, +\infty[$	0	(f) $\mathbb{R}$	$+\infty$
(g) $] -\infty, -1[\cup]1 + \infty[$	0	(h) $]3, +\infty[$	pas de sens
(i) $] -\infty, -1[\cup]4, +\infty[$	0	(j) $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$	0
(k) $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	0	(l) $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$	$-1/2$
(m) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$+\infty$	(n) $]0, 1[\cup]1, +\infty[$	0^+
(o) $\mathbb{R}$	0^+	(p) $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi, \pi + 2k\pi[$	1

Solution 5

Une équation cartésienne de la tangente au graphique de la fonction $x \mapsto \tan(x)$ au point d'abscisse $-\pi/4$ est $2x - y - 1 + (\pi/2) = 0$; le graphique de cette fonction et de cette tangente est le suivant.



Solution 6

1. Le zéro de f_1 est 0.

Par ailleurs il n'est pas possible de déterminer les zéros de f_2 ni de f_3 car quel que soit le réel r , les fonctions $f_2 + r$ et $f_3 + r$ ont la même dérivée que f_2 et f_3 , respectivement ; dès lors, la donnée du graphique des dérivées de f_2 , f_3 ne permet pas de déterminer où f_2 , f_3 s'annulent.

2. La fonction f_1 est positive sur $]a, 0]$ et négative sur $[0, m[$.

Il n'est pas possible de déterminer le signe de f_2 ni de f_3 (voir ci-dessus).

3. La fonction f_1 est croissante sur $]a, b]$ et sur $[k, m[$, décroissante sur $[b, k]$.

Dans le cas où le graphique est celui de Df_2 , il permet de dire que la fonction f_2 est croissante sur $]a, 0]$ et décroissante sur $[0, m[$.

Le graphique de la dérivée seconde D^2f_3 ne permet pas de déterminer la monotonie de la fonction f_3 (par étude du signe de sa dérivée première puisque la fonction est dérivable) car on a $D^2f_3 = D(Df_3 + r)$ quel que soit le réel r .

4. La fonction f_1 est concave sur $]a, c]$ et $[d, e]$, convexe sur $[c, d]$ et $[e, m[$.

La fonction f_2 est concave sur $[b, k]$, convexe sur $]a, b]$ et $[k, m[$.

La fonction f_3 est convexe sur $]a, 0]$ et concave sur $[0, m[$.

5. Les zéros de la dérivée de f_1 sont les réels b , d et k puisque la tangente au graphique de cette fonction aux points ayant ces abscisses est horizontale. La fonction Df_1 est positive sur $]a, b]$ et sur $[k, m[$, négative sur $[b, k]$; elle est décroissante sur $]a, c]$ et $[d, e]$ et elle est croissante sur $[c, d]$ et sur $[e, m[$.

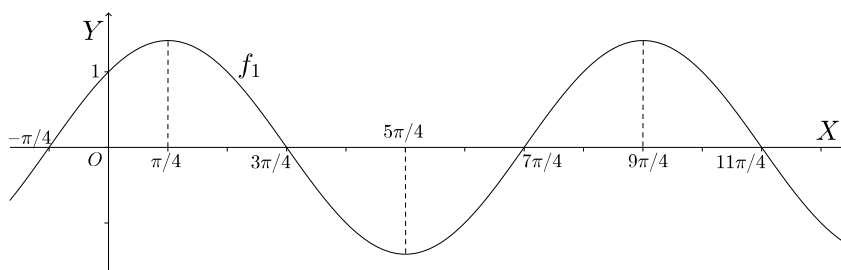
Les réels c , d et e sont des zéros de la dérivée seconde puisqu'ils donnent lieu à des points d'inflexion. Mais cette dérivée seconde peut avoir d'autres zéros puisque son annulation est une condition nécessaire mais non suffisante pour avoir un point d'inflexion. La dérivée seconde est positive si f_1 est convexe, c'est-à-dire sur $[c, d]$ et sur $[e, m[$ et elle est négative si f_1 est concave, c'est-à-dire sur $]a, c]$ et $[d, e]$. Le graphique de la fonction ne permet pas directement de déterminer la monotonie de la dérivée seconde.

Solution 7

La fonction f_1

Cette fonction est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π et n'a pas d'asymptote. Sur $[0, 2\pi]$: elle est croissante sur $[0, \pi/4]$ et sur $[5\pi/4, 2\pi]$, décroissante sur $[\pi/4, 5\pi/4]$ et a un minimum global en $5\pi/4$, un maximum global en $\pi/4$; elle est convexe sur $[3\pi/4, 7\pi/4]$, concave sur $[0, 3\pi/4]$ et sur $[7\pi/4, 2\pi]$ et admet les points d'inflexion d'abscisses $3\pi/4$ et $7\pi/4$.

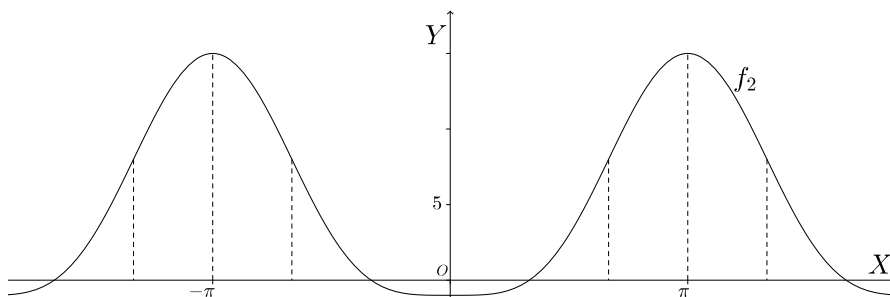
La représentation graphique est la suivante.



La fonction f_2

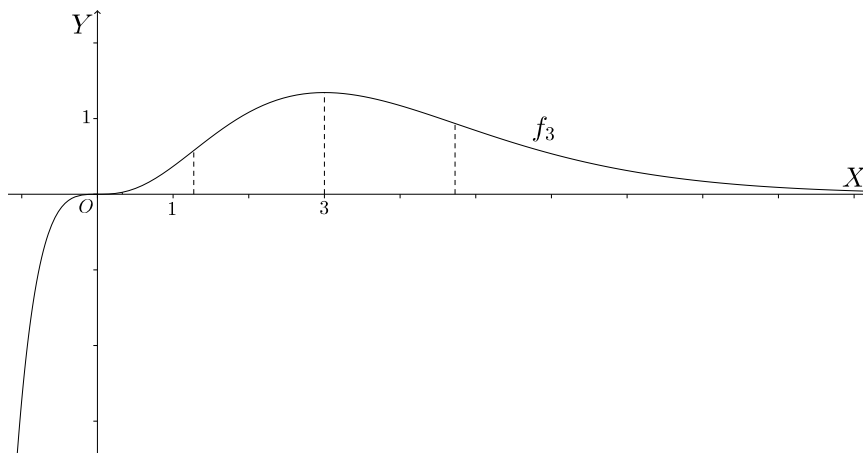
Cette fonction est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2π , paire, n'a pas d'asymptote, a le même signe que celui de la fonction $x \mapsto 1 - 2\cos(x)$. Sur $[0, \pi]$: elle est croissante, admet un minimum global en 0, un maximum global en π ; elle est convexe sur $[0, 2\pi/3]$, concave sur $[2\pi/3, \pi]$ et admet un point d'inflexion d'abscisse $2\pi/3$.

La représentation graphique est la suivante.



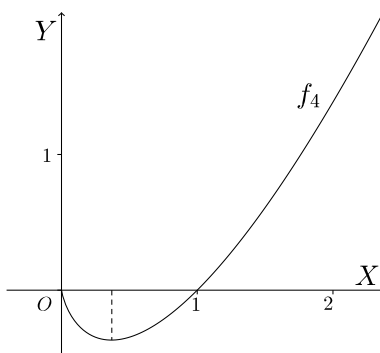
La fonction f_3

Cette fonction est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$, elle admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$ et $f_3(x)$ et x ont le même signe quel que soit x . Croissante sur $]-\infty, 3]$, décroissante sur $[3, +\infty[$, elle admet un maximum global en 3, est concave sur $]-\infty, 0]$ et sur $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$, convexe sur $[0, 3 - \sqrt{3}]$ et sur $[3 + \sqrt{3}, +\infty[$ et a les points d'inflexion d'abscisses 0, $3 - \sqrt{3}$ et $3 + \sqrt{3}$. La représentation graphique est la suivante.



La fonction f_4

Cette fonction est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$, elle se prolonge continûment en 0 par 0, elle n'a pas d'asymptote et est à valeurs négatives sur $[0, 1]$ et positives sur $[1, +\infty[$. Décroissante sur $[0, 1/e]$, croissante sur $[1/e, +\infty[$, elle admet un minimum global en $1/e$ et est convexe sur $[0, +\infty[$. La représentation graphique est la suivante.

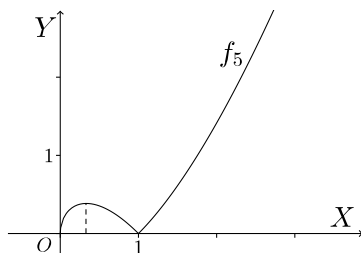


La fonction f_5

Cette fonction est définie, continue sur $[0, +\infty[$, indéfiniment dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, n'a pas d'asymptote et est à valeurs positives. Croissante sur $[0, 1/3]$ et sur $[1, +\infty[$, décroissante sur $[1/3, 1]$, elle admet un minimum global en 0 et en 1 ainsi

qu'un maximum local en $1/3$; elle est concave sur $[0, 1]$, convexe sur $[1, +\infty[$ et n'a pas de point d'inflexion.

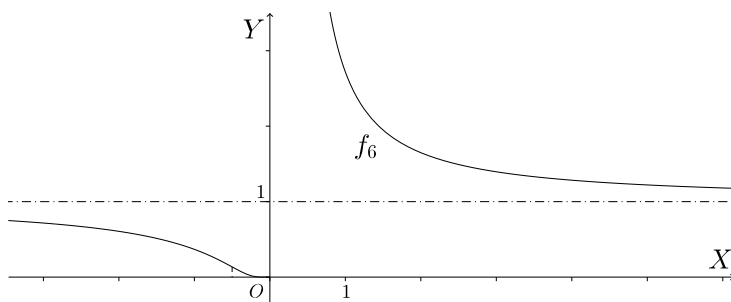
La représentation graphique est la suivante.



La fonction f_6

Cette fonction est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_0$, admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale, la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ et est à valeurs positives. Décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, elle est prolongée par 0 en 0, continue à gauche en 0 et admet un minimum global en 0 ; elle est concave sur $]-\infty, 0]$, convexe sur $]0, +\infty[$ et n'admet pas de point d'inflexion.

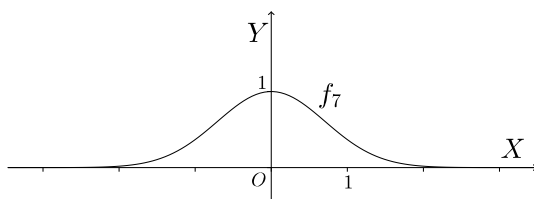
La représentation graphique est la suivante.



La fonction f_7

Cette fonction est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$; elle est paire, admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ et est à valeurs positives. Croissante sur $]-\infty, 0]$, décroissante sur $]0, +\infty[$, elle admet un maximum global en 0 ; elle est convexe sur $]-\infty, -\sqrt{2}/2]$ et sur $[\sqrt{2}/2, +\infty[$, concave sur $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ et présente des points d'inflexion d'abscisses $-\sqrt{2}/2$ et $\sqrt{2}/2$.

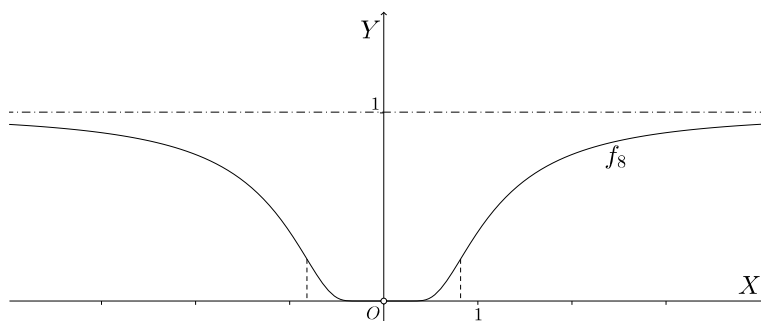
La représentation graphique est la suivante.



La fonction f_8

Cette fonction est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et est paire. Si on la prolonge en 0 par 0, elle est aussi dérivable en 0. Elle admet la droite d'équation $y = 1$ comme asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$ et est à valeurs positives. Décroissante sur $]-\infty, 0]$, croissante sur $[0, +\infty[$, elle admet un minimum global en 0 ; elle est concave sur $]-\infty, -\sqrt{3/2}]$ et sur $[\sqrt{3/2}, +\infty[$, convexe sur $[-\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}]$ et présente des points d'inflexion d'abscisses $-\sqrt{3/2}$ et $\sqrt{3/2}$.

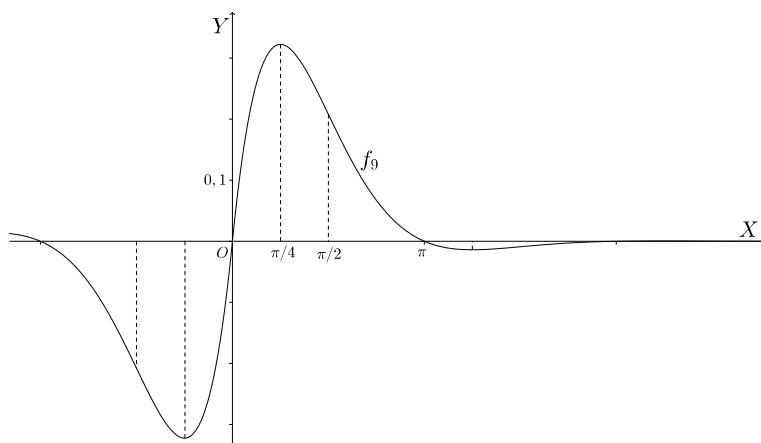
La représentation graphique est la suivante.



La fonction f_9

Cette fonction est définie, continue et continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale et est impaire. Vu la parité, examinons la fonction sur $[0, +\infty[$. Croissante sur les intervalles du type $[2k\pi, \pi/4 + 2k\pi]$ et $[5\pi/4 + 2k\pi, 2(k+1)\pi]$, décroissante sur les intervalles du type $[\pi/4 + 2k\pi, 5\pi/4 + 2k\pi]$ ($k \in \mathbb{Z}$), elle admet un maximum et un minimum globaux respectivement en $\pi/4$ et $5\pi/4$, des maxima locaux en $\pi/4 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}_0$) et des minima locaux en $5\pi/4 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}_0$) ; la concavité est la même que celle de la fonction $-\cos$.

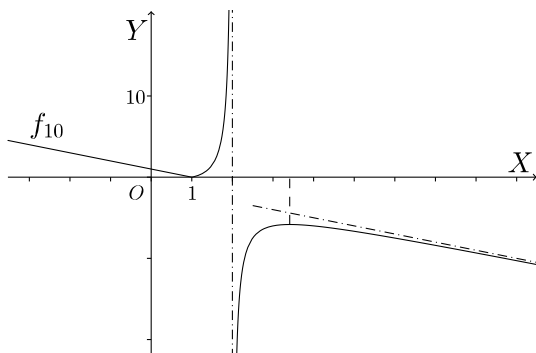
La représentation graphique est la suivante.



La fonction f_{10}

Cette fonction est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_0 \setminus \{2\}$. Si on la prolonge par 1 en 0, elle est aussi dérivable en 0. Indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, le graphique est une demi-droite sur $] -\infty, 1]$; elle admet la droite d'équation $x = 2$ comme asymptote verticale, la droite d'équation $y + x + 1 = 0$ comme asymptote oblique en $+\infty$. Croissante sur $]1, 2[$ et sur $]2, 2 + \sqrt{2}[$, elle admet un maximum en $2 + \sqrt{2}$ et est décroissante sur $]2 + \sqrt{2}, +\infty[$; enfin, elle est concave sur $[1, 2[$ et convexe sur $]2, +\infty[$ et n'a pas de point d'inflexion.

La représentation graphique est la suivante.



Solution 8

Si la distance focale vaut 3 cm et que p croît, la vitesse de variation de q lorsque p vaut 33 cm est égale à $-1/100$. La distance q de l'image décroît donc à la vitesse de $1/100$ cm pour une variation de 1 cm de p .

5.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1

1. Où la fonction $f_1 : x \mapsto x\sqrt{|x|}$ est-elle dérivable ? Quelle est l'expression explicite de la dérivée ? Représenter graphiquement la fonction f_1 dans un repère orthonormé.
2. Soit la fonction f_2 donnée par

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Démontrer qu'elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Que valent ses dérivées en 0 ? Représenter graphiquement cette fonction dans un repère orthonormé.

3. Où la fonction $f_3 : x \mapsto \arcsin(\sin(x))$ est-elle dérivable ? Quelle est l'expression explicite de la dérivée ? Représenter graphiquement la dérivée dans un repère orthonormé.

Solution

1. La fonction s'écrit aussi

$$f_1(x) = \begin{cases} x\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x\sqrt{x} & \text{si } x > 0 ; \end{cases}$$

vu cette expression, on peut immédiatement dire que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et que l'on a

$$Df_1(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{2}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases} = \frac{3}{2}\sqrt{|x|}.$$

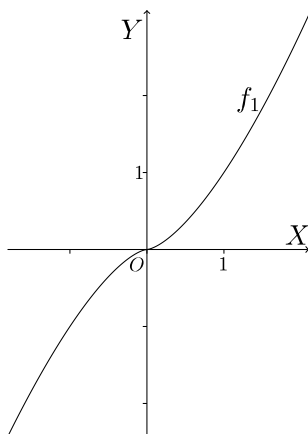
Examinons alors la dérivabilité en 0. On a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_1(0+h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\sqrt{|h|}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{|h|} = 0 ;$$

la fonction est donc dérivable en 0 et

$$Df_1(0) = 0.$$

Sur le graphique, on voit qu'il y a effectivement une tangente en 0, à savoir l'axe des abscisses.



2. L'expression de f_2 permet de dire tout de suite qu'elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et que l'on a

$$Df_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-1/x}/x^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Montrons alors que la fonction est dérivable en 0. On a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h} = \lim_{h' \rightarrow +\infty} h' e^{-h'} = 0$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0}{h} = 0 ;$$

dès lors f_2 est bien dérivable en 0 et

$$Df_2(0) = 0.$$

Pour obtenir la valeur de n'importe quelle dérivée en 0, une récurrence s'impose. Tout d'abord, il nous faut obtenir la forme générale d'une dérivée quelconque sur $]0, +\infty[$. On a

$$Df_2(x) = \frac{1}{x^2}e^{-1/x} \quad \text{et} \quad D^2f_2(x) = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right)e^{-1/x}, \quad \forall x > 0.$$

Démontrons alors par récurrence que pour tout naturel strictement positif n , il existe des constantes réelles $r_{n,j}$ ($j = 1, \dots, n$) telles que

$$D^n f_2(x) = \sum_{j=1}^n \frac{r_{n,j}}{x^{n+j}} e^{-1/x}, \quad \forall x > 0.$$

Vu les calculs précédents, cette égalité est vraie pour $n = 1$ (et même pour $n = 2$). Supposons donc qu'elle soit vraie pour n et démontrons qu'elle reste vraie pour $n + 1$. On a successivement

$$\begin{aligned} D^{n+1} f_2(x) &= DD^n f_2(x) = D \sum_{j=1}^n \frac{r_{n,j}}{x^{n+j}} e^{-1/x} \\ &= - \sum_{j=1}^n \frac{(n+j)r_{n,j}}{x^{n+j+1}} e^{-1/x} + \sum_{j=1}^n \frac{r_{n,j}}{x^{n+j+2}} e^{-1/x} \\ &= - \sum_{j=1}^n \frac{(n+j)r_{n,j}}{x^{n+j+1}} e^{-1/x} + \sum_{j=2}^{n+1} \frac{r_{n,j-1}}{x^{n+j+1}} e^{-1/x} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{r_{n+1,j}}{x^{n+1+j}} e^{-1/x} \end{aligned}$$

avec

$$r_{n+1,1} = -(n+1)r_{n,1}, \quad r_{n+1,n+1} = r_{n,n}$$

et

$$r_{n+1,j} = -(n+j)r_{n,j} + r_{n,j-1}, \quad j = 2, \dots, n.$$

Montrons enfin que toutes les dérivées de la fonction sont nulles en 0. C'est vrai pour la dérivée d'ordre 1. Supposons alors que ce soit vrai pour toutes les dérivées jusqu'à l'ordre n et démontrons que

$$D^{n+1} f_2(0) = 0.$$

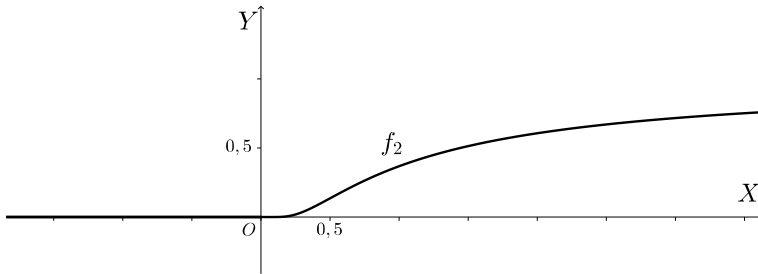
On a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{D^n f_2(h) - D^n f_2(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \sum_{j=1}^{n+1} \frac{r_{n+1,j}}{h^{n+1+j}} e^{-1/h} \\ &= \lim_{h' \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n+1} r_{n+1,j} (h')^{n+2+j} e^{-h'} \\ &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{D^n f_2(h) - D^n f_2(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{0}{h} = 0 ;$$

d'où la conclusion.



Le graphique de la fonction montre bien qu'en 0, le « raccord » se passe de façon très régulière, ce qui est expliqué par l'existence des dérivées, et leur annulation.

3. Puisque la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et que la fonction sin, définie sur $\mathbb{R}$, est à valeurs dans l'intervalle $[-1, 1]$, la fonction f_3 est définie sur $\mathbb{R}$. De plus, étant donné que la fonction arcsin(x) ($x \in [-1, 1]$) est la fonction inverse de sin(x) ($x \in [-\pi/2, \pi/2]$), on a, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \arcsin(\sin(x)) \\ &= \begin{cases} x - 2k\pi & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] \\ (2k+1)\pi - x & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right] \end{cases} \end{aligned}$$

Sur tous les intervalles ouverts du type indiqué ci-dessus, la fonction est un polynôme du premier degré ; elle y est donc dérivable et on a, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$Df_3(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[\\ -1 & \text{si } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi\right[\end{cases}$$

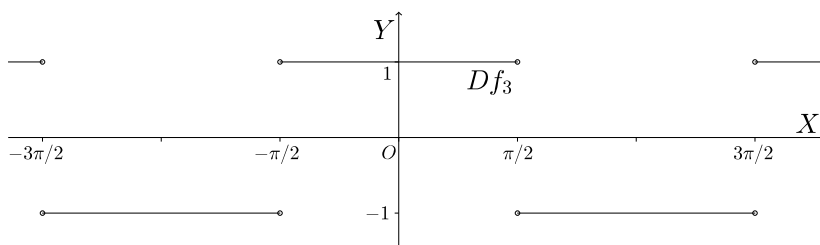
Elle n'est cependant pas dérivable aux extrémités des intervalles. On a par exemple

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f_3((\pi/2) + h) - f_3(\pi/2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\pi - ((\pi/2) + h) - (\pi/2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f_3((\pi/2) + h) - f_3(\pi/2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{((\pi/2) + h) - (\pi/2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1.\end{aligned}$$

Les autres cas se traitent bien sûr de la même manière.



Exercice 2

Soient les naturels non nuls m et n et la fonction définie explicitement par

$$f(x) = \sqrt[m]{x^n}.$$

En fonction de m et n , rechercher le domaine de définition et de dérivabilité de f ainsi que l'expression explicite de sa dérivée première.

Solution

Si m est impair, cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ quel que soit n . Examinons sa dérivabilité en un point quelconque $x_0 \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire étudions la limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[m]{x^n} - \sqrt[m]{x_0^n}}{x - x_0}.$$

Rappelons que l'on a

$$a^J - b^J = (a - b) \sum_{j=0}^{J-1} a^j b^{J-1-j}, \quad \forall a, b \in \mathbb{C} \text{ et } J \in \mathbb{N}_0.$$

Ainsi, avec $a = x$, $b = x_0$ et $J = n$, on obtient

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k};$$

de même, avec $a = \sqrt[m]{x^n}$, $b = \sqrt[m]{x_0^n}$ et $J = m$, on obtient

$$x^n - x_0^n = \left(\sqrt[m]{x^n} - \sqrt[m]{x_0^n} \right) \sum_{j=0}^{m-1} x^{nj/m} x_0^{n(m-1-j)/m}.$$

Ainsi, on a d'une part

$$\frac{\sqrt[n]{x^n} - \sqrt[n]{x_0^n}}{x - x_0} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k}}{\sum_{j=0}^{m-1} x^{nj/m} x_0^{n(m-1-j)/m}}$$

quel que soit $x \neq x_0$. D'autre part, on a aussi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=0}^{n-1} x^k x_0^{n-1-k} = n x_0^{n-1}$$

et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{j=0}^{m-1} x^{nj/m} x_0^{n(m-1-j)/m} = m x_0^{n(m-1)/m} = m x_0^{n-(n/m)}.$$

Il s'ensuit que la fonction est dérivable en $x_0 \neq 0$ et que sa dérivée en ce point est égale à

$$\frac{n}{m} x_0^{(n/m)-1} = \frac{n}{m} \frac{\sqrt[n]{x_0^n}}{x_0}.$$

Si $x_0 = 0$ alors

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{x^n}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{n/m}}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{n}{m} > 1 \\ 1 & \text{si } \frac{n}{m} = 1 \\ \infty & \text{si } \frac{n}{m} < 1. \end{cases}$$

La fonction est donc dérivable en 0 si et seulement si $n \geq m$ et dans ce cas la valeur de cette dérivée est nulle si $n > m$ et vaut 1 si $n = m$.

Traitons le cas où m est pair. Si n est pair, alors la fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f(x) = \sqrt[n]{|x|^n}.$$

Les manipulations précédentes peuvent être répétées. On obtient que la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et est dérivable en 0 si et seulement si $n \geq m$. L'expression de la dérivée est alors

$$Df(x) = \frac{n}{m} |x|^{(n/m)-1}.$$

Si n est impair, alors la fonction est définie sur $[0, +\infty[$ et les manipulations précédentes peuvent aussi être répétées. On en arrive à la conclusion que la fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$, dérivable à droite en 0 si et seulement si $n \geq m$ et

$$Df(x) = \frac{n}{m} |x|^{(n/m)-1}.$$

Exercice 3

Démontrer les égalités suivantes, en spécifiant le domaine sur lequel elles sont valables.

(a) $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

(b) $\arctan(x) = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

(c) $\arcsin\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right) = \arctan\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$

Solution

(a) La fonction donnée explicitement dans le membre de gauche (notons-la f) est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_0$ et vérifie

$$Df(x) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0.$$

Dès lors, il existe une constante réelle r_+ telle que

$$f(x) = r_+, \quad \forall x > 0$$

et une constante réelle r_- telle que

$$f(x) = r_-, \quad \forall x < 0.$$

En évaluant la première égalité en $x = 1$, on obtient

$$r_+ = f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

En évaluant la deuxième égalité en $x = -1$, on obtient

$$r_- = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Il s'ensuit que

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \forall x > 0.$$

(b) Comme

$$\left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$$

quel que soit le réel x , la fonction

$$x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la fonction arctangente est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ également. Dès lors, les fonctions données sont toutes les deux continûment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Cela étant, on a successivement

$$\begin{aligned} D \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2/(1+x^2))}} \frac{\sqrt{1+x^2} - (x^2/\sqrt{1+x^2})}{1+x^2} \\ &= \sqrt{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Cette expression étant également celle de la dérivée de la fonction arctangente, on obtient l'existence d'une constante réelle r telle que

$$\arctan(x) = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) + r, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En prenant cette égalité en $x = 0$, on obtient $r = 0$ et finalement

$$\arctan(x) = \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) Comme

$$\left| \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right| = \frac{|e^x - e^{-x}|}{e^x + e^{-x}} < 1$$

quel que soit le réel x , la fonction

$$x \mapsto \arcsin \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)$$

est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, la fonction arctangente est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ également. Dès lors, les fonctions données sont toutes les deux continûment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Cela étant, posons

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Quel que soit le réel x , on a successivement

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{(e^x + e^{-x} + e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\ &= \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \end{aligned}$$

et

$$1 - f^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = Df(x).$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
 D \arcsin \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) &= D \arcsin(f(x)) \\
 &= \frac{Df(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}} = \sqrt{Df(x)} \\
 &= \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
 D \arctan \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2 \left(1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \right)} \\
 &= \frac{2(e^x + e^{-x})}{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}} \\
 &= \frac{2(e^x + e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2} \\
 &= \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Dès lors, on a

$$D \arcsin \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) = D \arctan \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et il existe donc une constante réelle r telle que

$$\arcsin \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) = \arctan \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) + r, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En prenant cette égalité en $x = 0$, on obtient $r = 0$ et finalement

$$\arcsin \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) = \arctan \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4

..... Déterminer une relation de récurrence pour le calcul des dérivées successives des fonctions suivantes données explicitement. Dans chaque cas, spécifier l'intervalle sur lequel on travaille.

$$f_1(x) = e^{x^2}$$

$$f_2(x) = \arctan(x)$$

Solution

La fonction f_1

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df_1(x) = 2x e^{x^2} = 2x f_1(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En utilisant la formule de Leibniz¹, on obtient ainsi directement

$$\begin{aligned} D^{n+1} f_1(x) &= 2 \sum_{j=0}^n C_n^j D^j x D^{n-j} f_1(x) \\ &= 2x D^n f_1(x) + 2n D^{n-1} f_1(x), \end{aligned}$$

quels que soient le naturel strictement positif n et le réel x .

La fonction f_2

Cette fonction est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df_2(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

donc aussi

$$(1 + x^2) Df_2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Comme les dérivées d'un polynôme de degré 2 sont nulles à partir de celles d'ordre 3, la formule de Leibniz donne

$$\begin{aligned} D^n \left((1 + x^2) Df_2(x) \right) &= \sum_{j=0}^n C_n^j D^j (1 + x^2) D^{n-j+1} f_2(x) \\ &= C_n^0 (1 + x^2) D^{n+1} f_2(x) + C_n^1 D (1 + x^2) D^n f_2(x) + C_n^2 D^2 (1 + x^2) D^{n-1} f_2(x) \\ &= (1 + x^2) D^{n+1} f_2(x) + 2nx D^n f_2(x) + n(n-1) D^{n-1} f_2(x), \end{aligned}$$

quels que soient le réel x et le naturel $n \geq 2$. Ainsi, on obtient finalement la relation

$$(1 + x^2) D^{n+1} f_2(x) + 2nx D^n f_2(x) + n(n-1) D^{n-1} f_2(x) = 0,$$

quels que soient le réel x et le naturel $n \geq 2$. On vérifie aussi immédiatement que cette égalité reste valable pour $n = 1$.

Exercice 5

† Déterminer la valeur en 0 de toutes les dérivées de la fonction arcsin.

Solution

La fonction $f : x \mapsto \arcsin(x)$ appartient à $C_\infty]-1, 1[$ et on a successivement

$$Df(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \forall x \in]-1, 1[$$

1. Voir l'annexe.

et

$$D^2 f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{1-x^2} Df(x), \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Dès lors, on a

$$(1-x^2)D^2 f(x) = xDf(x), \quad \forall x \in]-1, 1[. \quad (*)$$

D'une part, la formule de Leibniz donne

$$\begin{aligned} D^n \left((1-x^2)D^2 f(x) \right) &= \sum_{j=0}^n C_n^j D^j (1-x^2) D^{n-j+2} f(x) \\ &= C_n^0 (1-x^2) D^{n+2} f(x) - 2xC_n^1 D^{n+1} f(x) - 2C_n^2 D^n f(x) \\ &= (1-x^2) D^{n+2} f(x) - 2xn D^{n+1} f(x) - n(n-1) D^n f(x), \end{aligned}$$

quels que soient le réel $x \in]-1, 1[$ et le naturel $n \geq 2$ car les dérivées d'ordre supérieur à 3 d'un polynôme de degré 2 sont nulles ; on vérifie aussi immédiatement que cette égalité reste vraie pour $n = 1$.

D'autre part, elle donne aussi

$$\begin{aligned} D^n \left(xDf(x) \right) &= \sum_{j=0}^n C_n^j D^j x D^{n-j+1} f(x) \\ &= C_n^0 x D^{n+1} f(x) + C_n^1 D^n f(x) \\ &= x D^{n+1} f(x) + n D^n f(x), \end{aligned}$$

quels que soient le réel $x \in]-1, 1[$ et le naturel n strictement positif car les dérivées d'ordre supérieur à 2 d'un polynôme de degré 1 sont nulles.

Il s'ensuit qu'à partir de la relation (*) précédente, on obtient

$$(1-x^2)D^{n+2} f(x) - 2xn D^{n+1} f(x) - n(n-1) D^n f(x) = x D^{n+1} f(x) + n D^n f(x)$$

ou encore

$$(1-x^2) D^{n+2} f(x) - (2n+1)x D^{n+1} f(x) - n^2 D^n f(x) = 0,$$

quels que soient le réel $x \in]-1, 1[$ et le naturel n strictement positif. En considérant cette égalité en $x = 0$, on a alors

$$D^{n+2} f(0) - n^2 D^n f(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Cela étant, on a

$$f(0) = \arcsin(0) = 0 \quad \text{et} \quad Df(0) = 1 ;$$

ainsi, à partir de la formule de récurrence entre les dérivées en 0, on obtient finalement aussi

$$D^{2n} f(0) = 0$$

et

$$D^{2n+1}f(0) = (2n-1)^2(2n-3)^2 \dots 3^2 = \frac{((2n)!)^2}{2^{2n}(n!)^2},$$

quel que soit le naturel strictement positif n .

Exercice 6

1. Dans un repère orthonormé, un triangle rectangle est formé en utilisant le point de coordonnées $(-1, 0)$, un point de l'arc du cercle de rayon 1 centré à l'origine situé dans le premier quadrant et sa projection orthogonale sur l'axe des abscisses. Quelle est l'aire maximale (resp. minimale) d'un tel triangle ? On demande aussi une représentation graphique de ce problème et de sa solution.
2. Quels sont les réels strictement positifs dont la somme de l'inverse et de cinq fois le carré est minimale ?

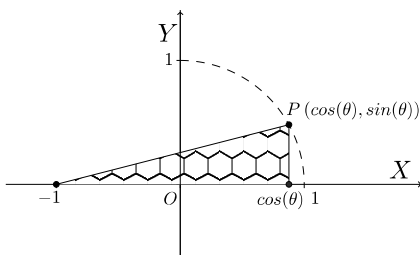
Solution

1. Un point quelconque P de l'arc de cercle dont il est question a pour coordonnées cartésiennes $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ avec $\theta \in [0, \pi/2]$. La projection orthogonale de ce point sur l'axe des abscisses a donc pour coordonnées $(\cos(\theta), 0)$. Il s'ensuit qu'en fonction du point P , l'aire du triangle en question est égale à

$$\frac{(1 + \cos(\theta)) \sin(\theta)}{2}.$$

Le problème posé consiste donc à maximaliser et minimaliser la fonction f donnée par

$$f(\theta) = \frac{(1 + \cos(\theta)) \sin(\theta)}{2} = \frac{1}{4} (2 \sin(\theta) + \sin(2\theta)), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$



La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Df(\theta) = \frac{1}{2} (\cos(\theta) + \cos(2\theta)), \quad \forall \theta \in \mathbb{R};$$

ainsi,

$$\begin{aligned}
 Df(\theta) = 0 &\Leftrightarrow \cos(2\theta) = -\cos(\theta) \\
 &\Leftrightarrow \cos(2\theta) = \cos(\pi - \theta) \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : 2\theta = \pi - \theta + 2k\pi \text{ ou } 2\theta = \theta - \pi + 2k\pi \\
 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \theta = \frac{(2k+1)\pi}{3} \text{ ou } \theta = (2k-1)\pi.
 \end{aligned}$$

Comme on ne doit considérer cette fonction que sur $[0, \pi/2]$, le seul réel de cet intervalle qui annule la dérivée est

$$\frac{\pi}{3}.$$

Cela étant, comme la fonction Df est décroissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, on a

$$0 = Df\left(\frac{\pi}{3}\right) \leq Df(\theta) \quad \text{si} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

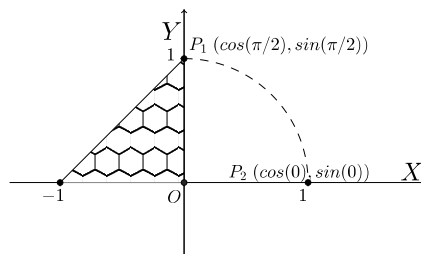
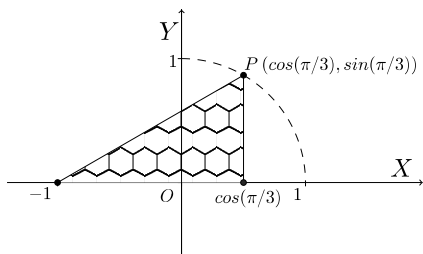
et

$$Df(\theta) \leq Df\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad \text{si} \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Il s'ensuit que f est croissant sur $[0, \pi/3]$ et décroissant sur $[\pi/3, \pi/2]$; dès lors en $\pi/3$ la fonction f correspondant à l'aire du triangle atteint un maximum; celui-ci vaut

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos(\pi/3)\right) \sin(\pi/3) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Enfin, la fonction est nulle (évidemment vu l'interprétation graphique !) lorsque $\theta = 0$ sinon elle est toujours à valeurs positives. L'aire atteint donc un minimum en $\theta = 0$ et en $\theta = \pi/2$ et vaut respectivement 0 et $1/2$.



2. Notons x les réels à chercher. La traduction de l'énoncé conduit à définir la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} + 5x^2, \quad x > 0$$

et à en rechercher les minima éventuels. Cette fonction étant dérivable sur $]0, +\infty[$, on a

$$Df(x) = -\frac{1}{x^2} + 10x, \quad \forall x > 0$$

et ainsi

$$Df(x) = 0 \Leftrightarrow 10x = \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{1}{10}}.$$

De plus,

$$Df(x) \leq 0 \Leftrightarrow 10x \leq \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow x^3 \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow x \leq \sqrt[3]{\frac{1}{10}}$$

et de même

$$Df(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \sqrt[3]{\frac{1}{10}}.$$

La fonction est donc décroissante sur $]0, \sqrt[3]{1/10}]$ et croissante sur $[\sqrt[3]{1/10}, +\infty[$.

Le réel $\sqrt[3]{1/10}$ est donc celui qui minimise la fonction, donc celui qui répond à la question.

Exercice 7

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne

$$x^2 = 4y.$$

1. Déterminer l'équation cartésienne d'une tangente quelconque à la courbe $\mathcal{P}$.
2. Déterminer le lieu des points à partir desquels les tangentes menées à la courbe $\mathcal{P}$ sont orthogonales entre elles.
3. Montrer que le lieu est en fait la directrice de la parabole.

Solution

1. La courbe $\mathcal{P}$ est la représentation graphique de la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, la tangente au graphique de f au point de coordonnées $(\lambda, \mu) = (\lambda, \lambda^2/4)$ a pour coefficient angulaire $Df(\lambda) = \lambda/2$; l'équation cartésienne de cette tangente est donc

$$y - \frac{\lambda^2}{4} = \frac{\lambda}{2}(x - \lambda)$$

ou encore

$$y = \frac{\lambda}{2}x - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2.$$

Il s'ensuit que toute tangente à $\mathcal{P}$ est une droite d'équation cartésienne

$$y = mx - m^2$$

où m est un paramètre réel.

2. En utilisant l'expression précédente pour l'équation d'une tangente, on obtient qu'un point $P(x, y)$ est un point du lieu si et seulement s'il existe un réel non nul m tel que

$$\begin{cases} y = mx - m^2 \\ y = -\frac{1}{m}x - \frac{1}{m^2} \end{cases} \quad (*)$$

Cela étant, pour x, y réels et m réel non nul, on a (« élimination » du paramètre m)

$$\begin{cases} y = mx - m^2 \\ y = -\frac{1}{m}x - \frac{1}{m^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - m^2 \\ m^2 y = -mx - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = mx - m^2 \\ (1 + m^2)y = -(m^2 + 1) \end{cases}$$

ce qui implique $y = -1$. On peut donc dire qu'un point P du lieu a des coordonnées cartésiennes (x, y) qui vérifient

$$y = -1.$$

Démontrons maintenant que la droite d'équation cartésienne $y = -1$ est bien le lieu. Vu ce qui précède, il reste à montrer que tout point $P(x_0, -1)$ de cette droite se trouve à l'intersection de deux tangentes à la courbe $\mathcal{P}$, ces tangentes étant orthogonales. Vu le système (*), cela revient à montrer l'existence d'un réel non nul m tel que

$$\begin{cases} -1 = mx_0 - m^2 \\ -1 = -\frac{1}{m}x_0 - \frac{1}{m^2} \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - x_0 m - 1 = 0.$$

Étant donné x_0 , cette équation du second degré en m possède effectivement deux solutions réelles (et le produit de ces deux solutions est égal à -1).

3. On a

$$x^2 = 4y = (y^2 + 2y + 1) - (y^2 - 2y + 1) = (y + 1)^2 - (y - 1)^2.$$

Dès lors, un point de coordonnées (x, y) appartient à la parabole si et seulement si

$$(y + 1)^2 = x^2 + (y - 1)^2,$$

c'est-à-dire si et seulement si la distance entre ce point et le point de coordonnées $(0, 1)$ est égale à la distance entre ce point et la droite d'équation cartésienne $y = -1$. Cette droite est donc bien la directrice de la parabole.

Exercice 8. Évolution de population en présence de « facteurs limitants »

Dans la nature, l'accroissement d'une population est modulé par la disponibilité des ressources alimentaires, par la prédation, par les facteurs du milieu. Tous ces éléments peuvent avoir un effet défavorable sur la croissance de la population et faire varier les taux de natalité et de mortalité. C'est ce que l'on appelle des « facteurs limitants ».

Un modèle largement utilisé en écologie est celui de Verhulst¹. Selon ce modèle, le « taux de croissance » R de la population prend en compte la capacité biotique maximale, qui est fonction des facteurs limitants du milieu,

$$R(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right),$$

1. Voir l'annexe.

où $N(t)$ est la population au temps t , r est une constante strictement positive qui représente le taux d'accroissement intrinsèque¹ et K est l'effectif maximum de la population dans le milieu². On constate que ce modèle rend compte du fait que lorsque N est petit, R est proche de r et que quand N est proche de K , R est proche de 0.

La vitesse $D_t N(t)$ d'accroissement de la population est alors donnée par

$$D_t N(t) = R(t) N(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t). \quad (*)$$

Les fonctions N qui vérifient une telle relation s'écrivent

$$N(t) = \frac{K}{1 + c_0 e^{-rt}}, \quad t \geq 0$$

avec

$$c_0 = \frac{K - N(0)}{N(0)}$$

et $K > N(0)$. La justification de cette affirmation sera traitée dans le chapitre 5 à l'exercice 3 de la section 4.

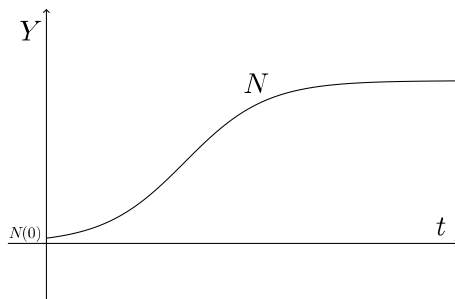
1. Représenter graphiquement N .
2. Vérifier que ces fonctions N vérifient bien l'égalité (*).
3. Discuter la monotonie (et les éventuels extrema) de la vitesse d'accroissement de la population en fonction de la valeur des données K et $N(0)$.



1. C'est le coefficient multiplicateur de la population à chaque génération s'il n'y a aucune contrainte du milieu sur l'évolution de la population ; par exemple $r \in [4; 50]$ pour les insectes, $r \in [0, 3; 8]$ pour les petits mammifères, $r \in [0, 05; 1, 5]$ pour les oiseaux, $r \in [0, 02; 0, 5]$ pour les grands mammifères.
 2. K est encore appelé « capacité biotique du milieu ».

Solution

1. Le graphique de N est du type suivant lorsque $2N(0) < K$, cas le plus naturel (voir discussion au point 3).



2. Remarquons tout d'abord que la dérivation de N ne pose aucun problème. En effet, il s'agit d'une fonction qui est indéfiniment continûment dérivable puisque le dénominateur (et le numérateur) a cette propriété et ne s'annule pas car $c_0 \geq 0$. Pour $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} DN(t) &= \frac{K c_0 r e^{-rt}}{(1 + c_0 e^{-rt})^2} \\ &= r \frac{K}{1 + c_0 e^{-rt}} \frac{c_0 e^{-rt}}{1 + c_0 e^{-rt}} \\ &= r N(t) \frac{1 + c_0 e^{-rt} - 1}{1 + c_0 e^{-rt}} \\ &= r N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right), \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

3. La « vitesse d'accroissement de l'effectif » est la dérivée de N . On a

$$DN(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t) = r \left(N(t) - \frac{N^2(t)}{K} \right), \quad \forall t \geq 0$$

et il s'agit donc d'étudier la monotonie de cette fonction. On a

$$D^2 N(t) = r \left(1 - \frac{2N(t)}{K} \right) DN(t) = r^2 N(t) \left(1 - \frac{2N(t)}{K} \right) \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right);$$

comme $0 < N(t) < K$ quel que soit t , $D^2 N(t)$ a donc le signe de

$$1 - \frac{2N(t)}{K}.$$

En reprenant l'expression explicite de N , on voit donc que l'on doit étudier le signe de la fonction

$$f(t) = 1 - \frac{2N(t)}{K} = \frac{c_0 e^{-rt} - 1}{1 + c_0 e^{-rt}}, \quad t \geq 0.$$

Cela étant, on a successivement

$$\begin{aligned}
 f(t) \geq 0 &\Leftrightarrow c_0 e^{-rt} - 1 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow c_0 \geq e^{rt} \\
 &\Leftrightarrow \ln(c_0) = \ln\left(\frac{K}{N(0)} - 1\right) \geq rt \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{r} \ln\left(\frac{K}{N(0)} - 1\right) \geq t.
 \end{aligned}$$

Lorsque

$$\frac{K}{N(0)} - 1 \leq 1,$$

on a donc $f(t) \leq 0$ quel que soit le réel positif t ; dès lors, D^2N est à valeurs négatives et la vitesse d'accroissement est toujours décroissante.

Lorsque

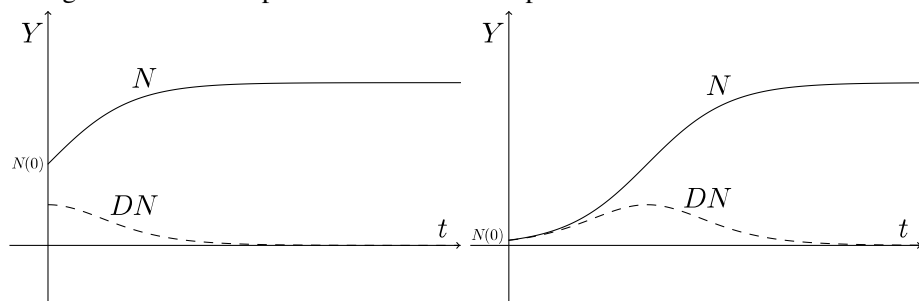
$$\frac{K}{N(0)} - 1 > 1,$$

f s'annule en

$$t_0 = \frac{1}{r} \ln\left(\frac{K}{N(0)} - 1\right),$$

est à valeurs positives pour $t \in [0, t_0]$ et négatives pour $t \in [t_0, +\infty[$. La vitesse d'accroissement est donc croissante sur l'intervalle $[0, t_0]$, atteint son maximum en t_0 et décroît ensuite.

Les figures suivantes représentent les deux cas précédents.



Exercice 9

Démontrer que pour tous réels positifs x, y et tous réels strictement positifs p, q tels que $p^{-1} + q^{-1} = 1$, on a¹

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geq xy.$$

1. Cette inégalité est appelée « inégalité de Young » ; voir l'annexe pour Young.

Solution

Cette inégalité est bien sûr vraie pour $x = 0$ et $y = 0$. Remarquons aussi que la condition sur p, q implique nécessairement $p, q > 1$.

Fixons alors les réels strictement positifs p, q, y et considérons la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy.$$

Cette fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a

$$Df(x) = x^{p-1} - y = 0 \Leftrightarrow x = y^{\frac{1}{p-1}}, \quad \forall x > 0$$

de même que

$$D^2f(x) = (p-1)x^{p-2} > 0, \quad \forall x > 0.$$

Le zéro de la dérivée première est donc un minimum global pour f et ainsi

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \geq f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right), \quad \forall x > 0. \quad (*)$$

Comme $q = p/(p-1)$, on a

$$f\left(y^{\frac{1}{p-1}}\right) = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{1+\frac{1}{p-1}} = \frac{y^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^q = 0$$

et la relation (*) donne bien l'inégalité annoncée.

Exercice 10

1. Soit $f : x \mapsto ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}_0$). À quelles conditions la fonction f admet-elle un maximum et pas de minimum ? Les conditions sont-elles nécessaires ?
2. Soit $f : x \mapsto x^3 + px - 1$ ($p \in \mathbb{R}$). À quelles conditions la fonction f admet-elle un maximum, un minimum et trois zéros distincts ? Les conditions sont-elles nécessaires ?
3. Déterminer tous les réels m qui impliquent que le graphique de $f : x \mapsto x^3 - 1 - m(x-1)$ soit tangent à l'axe des abscisses.

Solution

1. Comme la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, examinons le problème à l'aide de sa dérivée première. On a

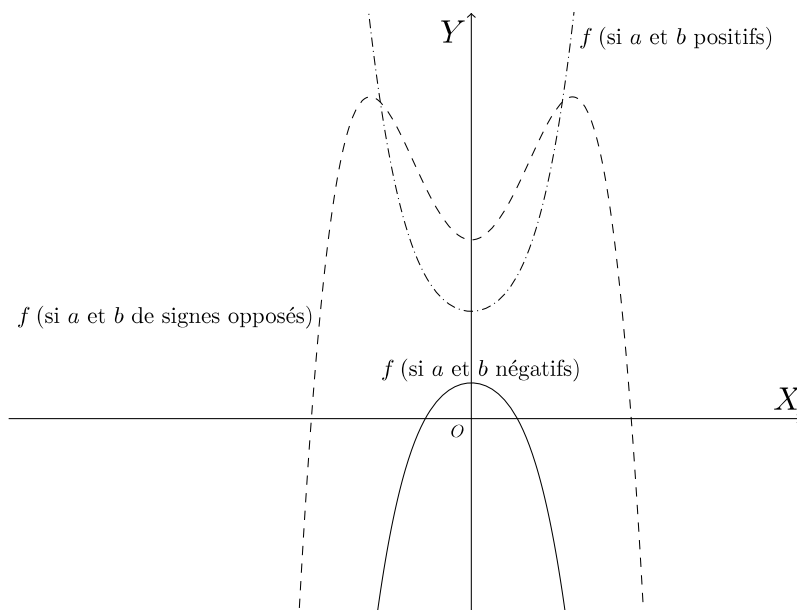
$$Df(x) = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b).$$

Selon les signes de a et b , l'équation $Df(x) = 0$ possède une ou trois solutions : la seule solution 0 si a et b sont de même signe et trois solutions si a et b sont de signes

opposés. Cela étant, comme la dérivée s'annule en tout extremum, si f admet un maximum et pas de minimum, alors a et b sont nécessairement de même signe. De plus, vu l'expression de la dérivée et comme on parle d'existence d'un maximum, le signe de la dérivée doit être opposé à celui de x ; cela implique que le signe de a et de b doit être négatif.

Montrons alors que la condition est aussi suffisante. C'est direct puisque si a et b sont strictement négatifs, l'étude de la dérivée permet immédiatement de conclure.

On peut aussi traiter cet exercice en remarquant que si on pose $F(y) = ay^2 + by + c$ alors $f(x) = F(x^2)$ et on doit seulement examiner le polynôme du second degré F .



2. Comme la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, examinons le problème à l'aide de sa dérivée première.

Supposons que f possède un maximum, un minimum et trois zéros distincts. Sa dérivée a pour expression explicite $Df(x) = 3x^2 + p$; comme elle s'annule, on a nécessairement $p < 0$ et la fonction est croissante sur $]-\infty, -\sqrt{-p/3}]$, sur $[\sqrt{-p/3}, +\infty[$ et décroissante sur $[-\sqrt{-p/3}, \sqrt{-p/3}]$. La valeur minimale locale de f est

$$f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = \left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 + p\sqrt{\frac{-p}{3}} - 1 = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - 1$$

et la valeur maximale locale est

$$f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = -\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)^3 - p\sqrt{\frac{-p}{3}} - 1 = -\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - 1.$$

Clairement, quel que soit le réel négatif p , on a

$$f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = \frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - 1 < 0.$$

Dès lors, comme la fonction possède trois zéros distincts, on doit nécessairement avoir aussi

$$f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) = -\frac{2p}{3}\sqrt{\frac{-p}{3}} - 1 > 0,$$

c'est-à-dire

$$-4p^3 > 27.$$

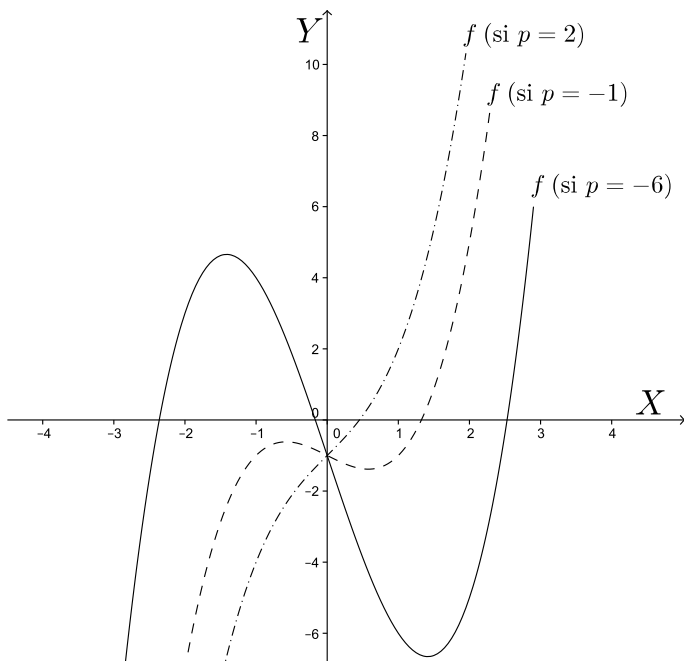
Cela étant, les conditions

$$p < 0 \quad \text{et} \quad 4p^3 + 27 < 0$$

sont aussi suffisantes pour que f admette un minimum, un maximum et trois zéros distincts. De fait, l'étude de la dérivée donne l'existence des extrema et le fait que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad f\left(-\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) > 0, \quad f\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right) < 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

donne l'existence des zéros en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires.



3. La fonction étant dérivable sur $\mathbb{R}$, son graphique possède effectivement une tangente en chaque point.

Cela étant, un réel m donne l'existence d'une tangente à l'axe des abscisses si et seulement si le système

$$\begin{cases} Df(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

en l'inconnue x possède une solution. Compte tenu de la forme explicite de f , ce système s'écrit aussi

$$\begin{cases} 3x^2 - m = 0 \\ (x - 1)(x^2 + x + 1 - m) = 0. \end{cases}$$

Cela étant, un réel x vérifie le système si et seulement si $m \geq 0$ et

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{m}{3}} \\ f(x) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{m}{3}} \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

ou encore si et seulement si

$$\begin{cases} x = \sqrt{\frac{m}{3}} \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \sqrt{\frac{m}{3}} \\ x^2 + x + 1 - m = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{m}{3}} \\ x = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{m}{3}} \\ x^2 + x + 1 - m = 0 \end{cases}.$$

Ceci conduit au fait qu'il y a une solution x si et seulement si m est tel que

$$m = 3 \quad \text{ou} \quad -2\frac{m}{3} + \sqrt{\frac{m}{3}} + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -2\frac{m}{3} - \sqrt{\frac{m}{3}} + 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$m = 3 \quad \text{ou} \quad m = \frac{3}{4}.$$

Exercice 11

On définit la suite u_n ($n \in \mathbb{N}$) suivante par récurrence :

$$u_0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad u_n = \sin(u_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

1. Montrer que cette suite converge vers 0.
2. En utilisant l'inégalité

$$\left| \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} \right| \leq r''|x|^3, \forall x \in [-1, 1]$$

établie précédemment (voir l'exercice 7 de la sous-section 5.1 de ce chapitre), montrer qu'en fait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} u_n) = \sqrt{3}.$$

Solution

1. Comme la fonction $x \mapsto x - \sin(x)$ est strictement croissante sur $]0, 2\pi[$ et que les valeurs du sinus d'un réel sont toujours inférieures à 1, on a $x - \sin(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Il s'ensuit que la suite définie ci-dessus est décroissante et minorée par 0 ; elle est donc convergente. Si l désigne sa limite, on a $l \in [0, 1]$ et

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(u_{n-1}) = \sin(l) ;$$

par conséquent $l = 0$.

2. L'inégalité rappelée donne lieu à

$$\left| \frac{1}{\sin^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{3} \right| \leq r''|u_n|^3, \quad \forall n \in \mathbb{N} ;$$

dès lors, puisque la suite u_n ($n \in \mathbb{N}$) converge vers 0, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sin^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2} \right) = \frac{1}{3}.$$

Cela étant, pour tout naturel $n \geq 2$, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_n^2} &= \frac{1}{u_1^2} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} \right) = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{u_k^2} - \frac{1}{u_{k-1}^2} \right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\sin^2(u_{k-1})} - \frac{1}{u_{k-1}^2} \right). \end{aligned}$$

Vu le résultat nommé théorème de Cesàro (voir l'exercice 3 de la sous-section 4.3 de ce chapitre), on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{\sin^2(u_{k-1})} - \frac{1}{u_{k-1}^2} \right) \right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Et par conséquent, on obtient bien

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} u_n = \sqrt{3}.$$

Exercice 12

⋮ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique deux fois continûment dérivable. Montrer
⋮ qu'il existe deux fonctions convexes dont la différence est égale à f .

Solution

La dérivée d'une fonction dérivable périodique est périodique car si g est dérivable et périodique de période T , on a

$$Dg(x+T) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+T+h) - g(x+T)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = Dg(x).$$

Il s'ensuit que la dérivée seconde de f est périodique et continue sur $\mathbb{R}$, donc bornée. Soit alors un réel strictement positif r tel que

$$\left| D^2 f(x) \right| \leq r, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

On écrit alors

$$f(x) = \left(f(x) + r \frac{x^2}{2} \right) - \left(r \frac{x^2}{2} \right).$$

Les fonctions

$$f_1(x) = f(x) + r \frac{x^2}{2}, \quad f_2(x) = r \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

sont convexes sur $\mathbb{R}$ car leur dérivée seconde est positive ; elles permettent donc de conclure.

Exercice 13

⋮ Pour tout $s > 0$ on considère les fonctions

$$f_s(x) = \frac{x^s}{s} - \ln(x), \quad x > 0.$$

⋮ Effectuer une étude complète de ces fonctions f_s en terminant par une représentation graphique.

Solution

Quel que soit $s > 0$, les fonctions f_s sont indéfiniment dérivables sur $]0, +\infty[$. Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_s(x) = +\infty,$$

les fonctions f_s admettent toutes l'axe des ordonnées comme asymptote verticale. De plus, comme on a (voir l'exercice 7 de la sous-section 5.1 de ce chapitre)

$$\ln(x) \leq \frac{x^r}{r}, \quad \forall r, x > 0,$$

on obtient

$$f_s(x) = \frac{x^s}{s} - \ln(x) \geq \frac{x^s}{s} - 2 \frac{x^{s/2}}{s} = \frac{x^{s/2}}{s} (x^{s/2} - 2), \quad \forall x > 0$$

donc aussi, puisque $s > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_s(x) = +\infty.$$

Par ailleurs, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)/x = 0$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_s(x)}{x} = \frac{1}{s} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{s-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } s < 1 \\ 1 & \text{si } s = 1 \\ +\infty & \text{si } s > 1 \end{cases}$$

et aussi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x) - x) = -\infty.$$

Les fonctions f_s n'admettent donc pas d'asymptote oblique, quel que soit $s > 0$.

Cela étant, les dérivées premières des fonctions f_s sont

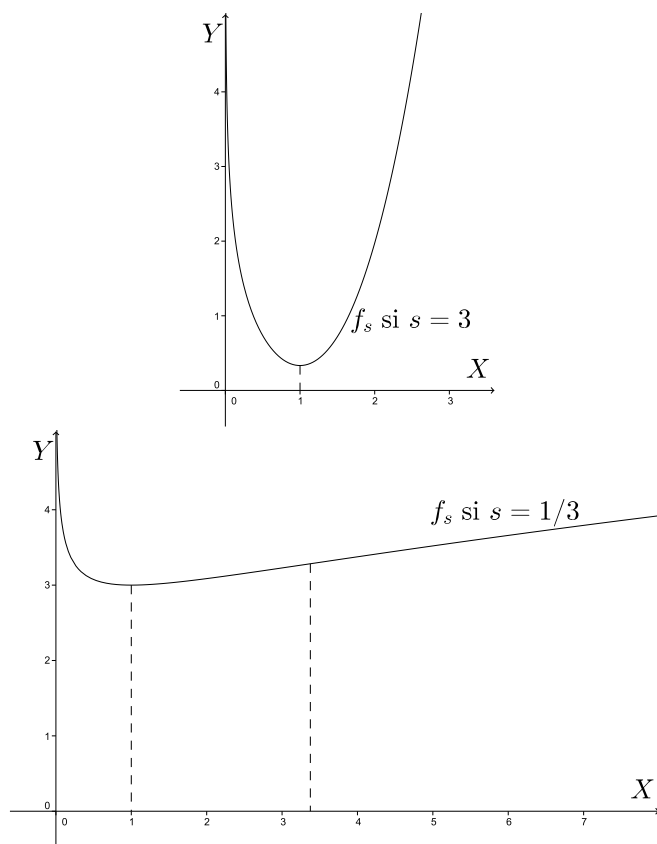
$$Df_s(x) = x^{s-1} - \frac{1}{x} = \frac{x^s - 1}{x}, \quad \forall x > 0;$$

quel que soit $s > 0$, elles s'annulent en $x = 1$, sont négatives sur $]0, 1[$ et positives sur $[1, +\infty[$. Les fonctions f_s sont donc décroissantes sur $]0, 1[$, croissantes sur $[1, +\infty[$ et possèdent un minimum global en $x = 1$, lequel vaut $f_s(1) = 1/s$.

Les dérivées secondes sont

$$D^2 f_s(x) = \frac{s x^s - (x^s - 1)}{x^2} = \frac{(s-1)x^s + 1}{x^2}, \quad \forall x > 0.$$

Si $s \geq 1$, ces fonctions sont toujours strictement positives; les fonctions f_s sont donc convexes sur $]0, +\infty[$. Si $s \in]0, 1[$, les fonctions $D^2 f_s$ s'annulent en $x = x_0 = (1-s)^{-1/s}$, sont positives pour $x \in]0, x_0[$ et négatives pour $x \in [x_0, +\infty[$; il s'ensuit que les fonctions sont convexes sur $]0, x_0[$, concaves sur $[x_0, +\infty[$ et possèdent un point d'inflexion en x_0 .



Exercice 14

Soient des réels p, q . Montrer que le polynôme P donné explicitement par

$$P(x) = x^3 + px + q$$

admet un seul zéro réel si et seulement si le « discriminant »

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

est positif.

Solution

Si p est positif, on a $\Delta \geq 0$ et le polynôme admet un seul zéro réel puisque sa dérivée est toujours positive.

Considérons donc $p < 0$. On a

$$DP(x) = 3x^2 + p,$$

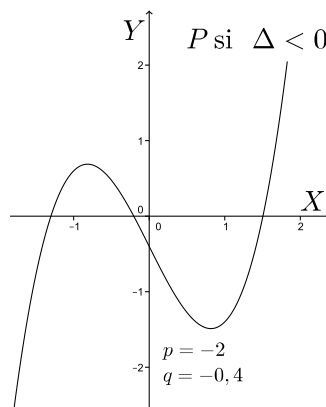
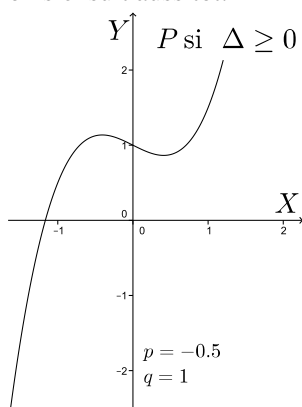
donc si on pose $r = \sqrt{-p/3}$, la dérivée est nulle en r et $-r$, positive pour $|x| \geq r$ et négative pour $|x| \leq r$. Le polynôme P est donc une fonction croissante sur $]-\infty, -r]$ et $[r, +\infty[$ et décroissante sur $[-r, r]$ (donc $P(-r) \geq P(r)$). Il s'ensuit que le polynôme P

n'a qu'un zéro réel si et seulement si $P(-r)$ et $P(r)$ ont le même signe car le graphique de P ne peut alors intersecter l'axe des abscisses qu'en un seul réel.

Cela étant, vu la forme particulière de P , on a

$$\begin{aligned}
 P(-r) P(r) &= (-r^3 - rp + q)(r^3 + pr + q) \\
 &= -r^6 - 2pr^4 - p^2r^2 + q^2 \\
 &= \frac{p^3}{27} - 2\frac{p^3}{9} + \frac{p^3}{3} + q^2 \\
 &= \frac{4p^3}{27} + q^2.
 \end{aligned}$$

La conclusion s'ensuit aussitôt.



Exercice 15

On donne le polynôme P par

$$P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n), \quad x \in \mathbb{R}$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des réels.

1. Exprimer les fonctions S_1 et S_2 suivantes en utilisant P et ses dérivées.

$$S_1(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - a_k}, \quad S_2(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x - a_k)^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}.$$

2. Démontrer que si r est un zéro de la dérivée de P mais pas de P , alors il existe des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k = r.$$

3. Soient m , M respectivement le plus petit et le plus grand des zéros de P . Démontrer que si r est un zéro réel de la dérivée de P , alors $r \in [m, M]$.

Solution

1. La dérivée de P est donnée explicitement par

$$DP(x) = \sum_{k=1}^n \prod_{j=1, j \neq k}^n (x - a_j) = \sum_{k=1}^n \frac{P(x)}{x - a_k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}.$$

Il s'ensuit immédiatement que

$$S_1(x) = \frac{DP(x)}{P(x)}$$

et

$$S_2(x) = -DS_1(x) = -D\left(\frac{DP(x)}{P(x)}\right) = \frac{(DP(x))^2 - D^2P(x)P(x)}{P^2(x)}$$

quel que soit le réel x différent de $a_1, \dots, a_n$.

2. Le réel r est différent de $a_1, \dots, a_n$ et annule la dérivée de P . Ainsi, en utilisant le point précédent, l'expression de la valeur de S_1 en r donne

$$S_1(r) = \frac{DP(r)}{P(r)} = 0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{r - a_k}.$$

On obtient alors successivement

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{r - a_k} = \sum_{k=1}^n \frac{r - a_k}{(r - a_k)^2} \\ &= r \sum_{k=1}^n \frac{1}{(r - a_k)^2} - \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(r - a_k)^2}. \quad (*) \end{aligned}$$

Ainsi, en posant

$$\mu = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{(r - a_k)^2} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad \lambda_k = \frac{\mu}{(r - a_k)^2}, \quad k = 1, \dots, n$$

l'égalité (*) donne

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k a_k = r,$$

et on peut conclure puisque les λ_k sont des réels positifs tels que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1.$$

3. Si r est un zéro de P , c'est l'un des a_k et on a bien $r \in [m, M]$. Si r n'est pas zéro de P , vu le point précédent, il existe des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k = r.$$

On obtient alors directement

$$m = \sum_{k=1}^n \lambda_k m \leq r = \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k M = M.$$

Remarque. Si tous les zéros du polynôme P de degré n sont simples, alors, vu le théorème de Rolle, la dérivée possède $n - 1$ zéros simples, situés entre les zéros de P . On conclut donc immédiatement que $r \in [m, M]$.

Exercice 16

⋮ Pour quelles valeurs de a le polynôme $x \mapsto (x + 1)^7 - x^7 - a$ admet-il un zéro réel
⋮ de multiplicité strictement plus grande que 1 ?

Solution

Désignons ce polynôme par P . S'il admet un zéro r de multiplicité au moins égale à 2, alors il existe un polynôme Q tel que

$$P(x) = (x - r)^2 Q(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il s'ensuit que $P(r) = DP(r) = 0$. On a alors successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} (r + 1)^7 - r^7 - a = 0 \\ 7(r + 1)^6 - 7r^6 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (r + 1)^7 - r^7 - a = 0 \\ (r + 1)^2 = r^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 = a \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} r = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2^6} = a. \end{cases} \end{aligned}$$

On montre alors que cette valeur de a conduit à ce que P soit divisible par $x \mapsto (x + 1/2)^2$ en effectuant la division euclidienne. Bien sûr, si on connaît la caractérisation de la multiplicité qui utilise l'annulation de dérivées, alors on conclut directement car en fait le polynôme admet un zéro réel de multiplicité strictement plus grande que 1 si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $P(r) = DP(r) = 0$.

Exercice 17

⋮ Montrer qu'un polynôme P de degré N admet a comme zéro de multiplicité $\alpha \leq N$
⋮ si et seulement si $D^j P(a) = 0$ pour $j = 0, \dots, \alpha - 1$ et $D^\alpha P(a) \neq 0$.

Solution

Si P admet a comme zéro de multiplicité α alors (par définition) il existe un polynôme Q de degré $N - \alpha$ qui ne s'annule pas en a tel que

$$P(x) = (x - a)^\alpha Q(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La formule de Leibniz pour les dérivées d'un produit de fonctions donne alors la propriété annoncée sur les dérivées.

Réciproquement, supposons que $D^j P(a) = 0$ pour $j = 0, \dots, \alpha - 1$ et $D^\alpha P(a) \neq 0$. Comme le développement de Taylor de P à l'ordre $N + 1$ en a donne

$$P(x) = \sum_{j=0}^N \frac{D^j P(a)}{j!} (x - a)^j, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

on obtient immédiatement

$$P(x) = (x - a)^\alpha \sum_{j=\alpha}^N \frac{D^j P(a)}{j!} (x - a)^{j-\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En définissant Q par

$$Q(x) = \sum_{j=\alpha}^N \frac{D^j P(a)}{j!} (x - a)^{j-\alpha},$$

on peut conclure. De fait, d'une part $Q(a) = D^\alpha P(a) \neq 0$ et d'autre part le degré de Q est bien $N - \alpha$ car le coefficient de $x^{N-\alpha}$ est $D^N P(a)/N!$, non nul puisque le degré de P est N .

6 Primitives

6.1 Exercices de base résolus

Exercice 1

Primitiver les fonctions suivantes données explicitement. Dans chaque cas, spécifier l'intervalle sur lequel on travaille.

$$f_1(x) = \sqrt{1 - 2x}$$

$$f_2(x) = x \sin^2(3x)$$

$$f_3(x) = \sin(\pi x) e^{2x}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{8x^3 + 2x}$$

$$f_5(x) = \tan(x)$$

$$f_6(x) = \tan^2(x)$$

$$f_7(x) = \frac{x e^{-2x^2}}{3 - e^{-2x^2}}$$

$$f_8(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$f_9(x) = \sin(3x) \cos(2x)$$

$$f_{10}(x) = \ln(x)$$

$$f_{11}(x) = \arcsin(x)$$

$$f_{12}(x) = \ln(|x|)$$

$$\begin{array}{lll}
 f_{13}(x) = x|x| & f_{14}(x) = \ln(x^2) & f_{15}(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1} \\
 f_{16}(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1} & f_{17}(x) = \sqrt[3]{(1-x)^4} & f_{18}(x) = \cos^3(x)
 \end{array}$$

Solution

La fonction f_1

La fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{1-2x}$ est continue sur $\{x \in \mathbb{R} : 1-2x \geq 0\} =]-\infty, 1/2]$; elle est donc primitivable sur $] -\infty, 1/2[$.

Par une primitivation par substitution, on a

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{1-2x} \, dx &= \frac{-1}{2} \int (-2) \sqrt{1-2x} \, dx \\
 &= \frac{-1}{2} \left[\int \sqrt{t} \, dt \right]_{t=1-2x} \\
 &\simeq \frac{-1}{2} \times \frac{2}{3} \left[\sqrt{t^3} \right]_{t=1-2x} \\
 &\simeq \frac{-1}{3} \sqrt{(1-2x)^3}, \quad x \in]-\infty, 1/2[.
 \end{aligned}$$

La fonction f_2

La fonction $f_2 : x \mapsto x \sin^2(3x) = (x/2)(1 - \cos(6x))$ est continue sur $\mathbb{R}$ et y est donc primitivable. Par une primitivation par combinaison linéaire puis par parties, on a

$$\begin{aligned}
 \int x \sin^2(3x) \, dx &= \frac{1}{2} \int x \, dx - \frac{1}{2} \int x \cos(6x) \, dx \\
 &= \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \int x D\left(\frac{\sin(6x)}{6}\right) \, dx \\
 &= \frac{x^2}{4} - \frac{x}{12} \sin(6x) + \frac{1}{12} \int \sin(6x) \, dx \\
 &\simeq \frac{x^2}{4} - \frac{x}{12} \sin(6x) - \frac{1}{72} \cos(6x), \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

La fonction f_3

La fonction $f_3 : x \mapsto \sin(\pi x) e^{2x}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et y est donc primitivable. Par deux primitivations par parties successives, on a

$$\begin{aligned}
 P(x) &= \int \sin(\pi x) e^{2x} \, dx \\
 &= \frac{e^{2x}}{2} \sin(\pi x) - \frac{\pi}{2} \int \cos(\pi x) e^{2x} \, dx \\
 &= \frac{e^{2x}}{2} \sin(\pi x) - \frac{\pi}{2} \frac{e^{2x}}{2} \cos(\pi x) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int \sin(\pi x) e^{2x} \, dx \\
 &\simeq \frac{e^{2x}}{2} \sin(\pi x) - \frac{\pi}{2} \frac{e^{2x}}{2} \cos(\pi x) - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 P(x).
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) P(x) \simeq \frac{e^{2x}}{4} (2 \sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x)),$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} P(x) &\simeq \left(\frac{4}{4 + \pi^2}\right) \frac{e^{2x}}{4} (2 \sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x)) \\ &\simeq \left(\frac{e^{2x}}{4 + \pi^2}\right) (2 \sin(\pi x) - \pi \cos(\pi x)), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La fonction f_4

La fonction $f_4 : x \mapsto \frac{1}{8x^3 + 2x}$ est continue sur

$$\{x \in \mathbb{R} : 8x^3 + 2x \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : 2x(4x^2 + 1) \neq 0\} = \mathbb{R}_0;$$

elle est donc primitivable sur $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Puisque la fraction est propre et que tous les coefficients sont réels, il existe des réels uniques A, B, C tels que

$$\frac{1}{8x^3 + 2x} = \frac{A}{2x} + \frac{Bx + C}{4x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0.$$

Vu les propriétés des polynômes, on a donc, quel que soit le réel x

$$\begin{aligned} A(4x^2 + 1) + (Bx + C)2x &= 1 \Leftrightarrow (4A + 2B)x^2 + 2Cx + A = 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4A + 2B = 0 \\ 2C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ C = 0 \\ B = -2. \end{cases} \end{aligned}$$

On a donc

$$\frac{1}{8x^3 + 2x} = \frac{1}{2x} + \frac{-2x}{4x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_0.$$

Ainsi, par primitivation par décomposition linéaire puis par substitution, on a sur $] -\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{8x^3 + 2x} dx &= \int \left(\frac{1}{2x} - \frac{2x}{4x^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{2x}{4x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(|x|) - \frac{1}{4} \int \frac{8x}{4x^2 + 1} dx \\ &\simeq \frac{1}{2} \ln(|x|) - \frac{1}{4} \ln(4x^2 + 1).\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\int \frac{1}{8x^3 + 2x} dx \simeq \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(-x) - \frac{1}{4} \ln(4x^2 + 1), & x \in] -\infty, 0[\\ \frac{1}{2} \ln(x) - \frac{1}{4} \ln(4x^2 + 1), & x \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

La fonction f_5

La fonction $f_5 : x \mapsto \tan(x)$ est continue sur les intervalles du type

$$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

où $k \in \mathbb{Z}$. Elle est donc primitivable sur chacun d'eux. Travaillons sur

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Comme la dérivée de la fonction cosinus est l'opposé de la fonction sinus, une primitivation par substitution donne immédiatement

$$\int \tan(x) dx = - \int \frac{D \cos(x)}{\cos(x)} dx \simeq -\ln(\cos(x)), \quad x \in I.$$

La fonction f_6

La fonction $f_6 : x \mapsto \tan^2(x)$ est continue sur les intervalles du type

$$\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$$

où $k \in \mathbb{Z}$. Elle est donc primitivable sur chacun d'eux. Travaillons sur

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

On a directement

$$\int \tan^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} dx \simeq \tan(x) - x, \quad x \in I.$$

La fonction f_7

La fonction $f_7 : x \mapsto xe^{-2x^2} / (3 - e^{-2x^2})$ est continue en dehors des zéros du dénominateur, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$ puisque $e^{-2x^2} \leq 1 < 3$ pour tout réel x . Elle est donc primitivable sur $\mathbb{R}$. On a directement

$$\begin{aligned} \int \frac{xe^{-2x^2}}{3 - e^{-2x^2}} dx &= -\frac{1}{4} \int \frac{De^{-2x^2}}{3 - e^{-2x^2}} dx \\ &= \frac{1}{4} \int D \ln(3 - e^{-2x^2}) dx \\ &\simeq \frac{1}{4} \ln(3 - e^{-2x^2}), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La fonction f_8

La fonction $f_8 : x \mapsto 1/\sin(x)$ est continue en dehors des zéros du dénominateur, c'est-à-dire sur les intervalles du type $]k\pi, \pi + k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$. Elle est donc primitivable sur chacun d'eux. Travaillons sur

$$I =]0, \pi[.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin(x)} dx &= \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} dx \\ &= - \int \frac{D \cos(x)}{1 - \cos^2(x)} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{D \cos(x)}{1 - \cos(x)} + \frac{D \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \int (-D \ln(1 - \cos(x)) + D \ln(1 + \cos(x))) dx \\ &\simeq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)} \right), \quad x \in I. \end{aligned}$$

La fonction f_9

La fonction $f_9 : x \mapsto \sin(3x) \cos(2x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle y est donc primitivable. La trigonométrie permet de se ramener à des primitives directes. De fait, comme on a

$$\sin(3x) \cos(2x) = \frac{1}{2} (\sin(5x) + \sin(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} \int \sin(3x) \cos(2x) dx &= \frac{1}{2} \int (\sin(5x) + \sin(x)) dx \\ &\simeq -\frac{1}{10} \cos(5x) - \frac{1}{2} \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La fonction f_{10}

La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle y est donc primitive. Par primitivation par parties, on obtient

$$\int \ln(x) dx = \int D_x \ln(x) dx = x \ln(x) - \int dx \simeq x \ln(x) - x, \quad x \in]0, +\infty[.$$

La fonction f_{11}

La fonction $x \mapsto \arcsin(x)$ est continue sur $[-1, 1]$. Elle est donc primitive sur $] -1, 1[$. Par primitivation par parties, on obtient

$$\begin{aligned} \int \arcsin(x) dx &= \int D_x \arcsin(x) dx \\ &= x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin(x) + \frac{1}{2} \int \frac{D(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &\simeq x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}, \quad x \in]-1, 1[. \end{aligned}$$

La fonction f_{12}

La fonction $f_{12} : x \mapsto \ln(|x|)$ est continue sur $\mathbb{R}_0$. Elle est donc primitive sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Sur $]0, +\infty[$, on utilise bien sûr la fonction f_{10} :

$$\int \ln(|x|) dx \simeq x \ln(x) - x, \quad x \in]0, +\infty[.$$

Sur $] -\infty, 0[$, il suffit de noter que $D \ln(-x) = 1/x$ et dès lors

$$\int \ln(|x|) dx \simeq x \ln(-x) - x, \quad x \in] -\infty, 0[.$$

La fonction f_{13}

La fonction $f_{13} : x \mapsto x|x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle y est donc primitive. Comme on a

$$\int x|x| dx = \begin{cases} \int x^2 dx \simeq \frac{x^3}{3} \simeq \frac{|x|^3}{3}, & x > 0 \\ -\int x^2 dx \simeq -\frac{x^3}{3} \simeq \frac{|x|^3}{3}, & x < 0 \end{cases}$$

et comme la fonction $x \mapsto |x|^3$ est dérivable en 0, on en conclut que

$$\int x|x| dx \simeq \frac{|x|^3}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f_{14}

La fonction $f_{14} : x \mapsto \ln(x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}_0$; elle est donc primitivable sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Comme on a

$$\ln(x^2) = 2 \ln(|x|), \quad x \in \mathbb{R}_0,$$

on peut tout de suite conclure en utilisant la fonction f_{12} : on obtient

$$\int \ln(x^2) dx \simeq \begin{cases} 2x \ln(x) - 2x, & x \in]0, +\infty[\\ 2x \ln(-x) - 2x, & x \in]-\infty, 0[. \end{cases}$$

La fonction f_{15}

La fonction $f_{15} : x \mapsto x^3/(x^2+1)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle y est donc primitivable. C'est une fraction rationnelle pour laquelle le degré du numérateur est plus grand que celui du dénominateur ; afin de la primitiver, effectuons tout d'abord la « division ». On peut bien sûr utiliser la division euclidienne mais vu la forme de la fonction, on a directement

$$\frac{x^3}{x^2+1} = \frac{x(x^2+1-1)}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La fraction rationnelle du membre de droite dans l'expression précédente est une fraction simple et la primitivation est aisée : on a

$$\int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int x dx - \frac{1}{2} \int D \ln(x^2+1) dx \simeq \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(x^2+1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f_{16}

La fonction $f_{16} : x \mapsto x^3/(x^2-1)$ est continue en dehors des zéros du dénominateur, c'est-à-dire sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Elle est donc primitivable sur $] -\infty, -1[$, sur $] -1, 1[$ et sur $]1, +\infty[$. La fonction est une fraction rationnelle pour laquelle le degré du numérateur est plus grand que celui du dénominateur ; afin de la primitiver, effectuons tout d'abord la « division ». Ici encore, on peut bien sûr utiliser la division euclidienne mais vu la forme de la fonction, on a directement

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{x(x^2-1+1)}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Cela étant, une primitive de la fraction rationnelle du membre de droite s'obtient de la façon suivante

$$\int \frac{x}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{D(x^2-1)}{x^2-1} dx \simeq \frac{1}{2} \ln(|x^2-1|), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Finalement, des primitivations directes donnent

$$\int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx \simeq \begin{cases} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1), & x \in]-\infty, -1[\text{ ou } x \in]1, +\infty[\\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln(1 - x^2), & x \in]-1, 1[. \end{cases}$$

La fonction f_{17}

La fonction $x \mapsto \sqrt[3]{(1-x)^4}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle y est donc primitivable. Cela étant, la forme de la fonction permet de conclure tout de suite par une primitivation immédiate : on a en effet

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{(1-x)^4} dx &= \int \sqrt[3]{(x-1)^4} dx \\ &= \int (x-1)^{4/3} dx \\ &\simeq \frac{3}{7}(x-1)^{7/3} \\ &\simeq \frac{3(x-1)^2}{7} \sqrt[3]{x-1}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La fonction f_{18}

La fonction $f_{18} : x \mapsto \cos^3(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle y est donc primitivable. La trigonométrie permet de se ramener à des primitivations directes. De fait, comme on a

$$\cos^3(x) = \cos(x) (1 - \sin^2(x)) = D \sin(x) (1 - \sin^2(x)), \quad x \in \mathbb{R},$$

on obtient directement

$$\int \cos^3(x) dx \simeq \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

6.2 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Primitiver les fonctions suivantes données explicitement. Dans chaque cas, spécifier l'intervalle sur lequel on travaille.

$$f_1(x) = \ln(x)/x$$

$$f_2(x) = x^3 + x \sin(2x)$$

$$f_3(x) = x^3 \sin(3x^4)$$

$$f_4(x) = \cos^2(3x)$$

$$f_5(x) = x \ln(2x + 1)$$

$$f_6(x) = \arccos(x)$$

$$f_7(x) = (3x - 4)e^{-x}$$

$$f_8(x) = \sqrt{x} \ln(x)$$

$$f_9(x) = \frac{\sin^3(x) - 1}{\sin^2(x)}$$

$$f_{10}(x) = x \sqrt{1 + 3x^2}$$

$$f_{11}(x) = x \arctan(x)$$

$$f_{12}(x) = \pi^x$$

$$\begin{array}{lll}
 f_{13}(x) = x^\pi & f_{14}(x) = \frac{2x^2 + 6x - 1}{(x^2 + 1)(x + 2)} & f_{15}(x) = \frac{1}{1 - 2x + x^2} \\
 f_{16}(x) = \frac{1 + 3x}{2x + 1} & f_{17}(x) = \frac{4x + 3}{x^3 + 3x^2} & f_{18}(x) = \frac{2x}{1 + x^4}
 \end{array}$$

Exercice 2

1. Quelle est la primitive de $x \mapsto 3x^3 + x$ qui prend la valeur 5 en -2 ?
2. Quelle est la primitive de $y \mapsto \sin(3y)$ qui prend la valeur 2 en 0 ?

Exercice 3

Sans effectuer la primitivation, montrer que l'égalité suivante est correcte et préciser les intervalles sur lesquels on travaille.

$$\int \frac{x + 4}{(2 - x)(x + 1)} dx \simeq \ln \left(\frac{|x + 1|}{(2 - x)^2} \right)$$

Solution 1

Dans ce qui suit, on rappelle la forme explicite de la fonction et les deux données suivantes sont d'une part l'intervalle de primitivation et d'autre part l'expression explicite d'une primitive.

La fonction f_1 donnée par $f_1(x) = \ln(x)/x$;
 $]0, +\infty[; \ln^2(x)/2$

La fonction f_2 donnée par $f_2(x) = x^3 + x \sin(2x)$;
 $\mathbb{R} ; \frac{x^4}{4} - \frac{x}{2} \cos(2x) + \frac{1}{4} \sin(2x)$

La fonction f_3 donnée par $f_3(x) = x^3 \sin(3x^4)$;
 $\mathbb{R} ; -\frac{1}{12} \cos(3x^4)$

La fonction f_4 donnée par $f_4(x) = \cos^2(3x)$;
 $\mathbb{R} ; \frac{x}{2} + \frac{\sin(6x)}{12}$

La fonction f_5 donnée par $f_5(x) = x \ln(2x + 1)$;
 $]-\frac{1}{2}, +\infty[; \frac{4x^2 - 1}{8} \ln(2x + 1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}$

La fonction f_6 donnée par $f_6(x) = \arccos(x)$;
 $] -1, 1[; x \arccos(x) - \sqrt{1 - x^2}$

La fonction f_7 donnée par $f_7(x) = (3x - 4)e^{-x}$;
 $\mathbb{R} ; (-3x + 1)e^{-x}$

La fonction f_8 donnée par $f_8(x) = \sqrt{x} \ln(x)$;
 $]0, +\infty[; \frac{2x\sqrt{x}}{3} \ln(x) - \frac{4x\sqrt{x}}{9}$

La fonction f_9 donnée par $f_9(x) = (\sin^3(x) - 1)/\sin^2(x)$;
 $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k\pi, (k+1)\pi[; -\cos(x) + \cotan(x)$

La fonction f_{10} donnée par $f_{10}(x) = x\sqrt{1+3x^2}$;
 $\mathbb{R} ; \frac{1}{9}\sqrt{(1+3x^2)^3}$

La fonction f_{11} donnée par $f_{11}(x) = x \arctan(x)$;
 $\mathbb{R} ; \frac{x^2+1}{2} \arctan(x) - \frac{x}{2}$

La fonction f_{12} donnée par $f_{12}(x) = \pi^x$;
 $\mathbb{R} ; \pi^x / \ln(\pi)$

La fonction f_{13} donnée par $f_{13}(x) = x^\pi$;
 $]0, +\infty[; x^{\pi+1}/(\pi+1)$

La fonction f_{14} donnée par $f_{14}(x) = \frac{2x^2+6x-1}{(x^2+1)(x+2)}$;
 $] -\infty, -2[\cup] -2, +\infty[; \ln \left(\sqrt{(x^2+1)^3}/|x+2| \right)$

La fonction f_{15} donnée par $f_{15}(x) = 1/(1-2x+x^2)$;
 $] -\infty, 1[\cup]1, +\infty[; -1/(x-1)$

La fonction f_{16} donnée par $f_{16}(x) = (1+3x)/(2x+1)$;
 $] -\infty, -1/2[\cup] -1/2, +\infty[; \frac{3x}{2} - \frac{1}{4} \ln(|2x+1|)$

La fonction f_{17} donnée par $f_{17}(x) = (4x+3)/(x^3+3x^2)$;
 $] -\infty, -3[\cup] -3, 0[\cup]0, +\infty[; \ln \left(|x|/|x+3| \right) - (1/x)$

La fonction f_{18} donnée par $f_{18}(x) = 2x/(1+x^4)$;
 $\mathbb{R} ; \arctan(x^2)$

Solution 2

1. La primitive de $x \mapsto 3x^3 + x$ qui prend la valeur 5 en -2 est la fonction $x \mapsto (3x^4/4) + (x^2/2) - 9$.
2. La primitive de $y \mapsto \sin(3y)$ qui prend la valeur 2 en 0 est la fonction $y \mapsto -\cos(3y)/3 + 7/3$.

Solution 3

Pour le prouver, il suffit de montrer que la dérivée du membre de droite possède $(x+4)/((2-x)(x+1))$ comme expression explicite ; on travaille sur $] -\infty, -1[$, sur $] -1, 2[$ ou sur $]2, +\infty[$.

6.3 Exercices plus élaborés

Exercice 1¹

On considère un projectile P se déplaçant librement dans le champ de la pesanteur. On néglige la résistance de l'air de telle sorte que le projectile n'est soumis qu'à la pesanteur, supposée constante. Dans ce cas, la loi de mouvement de Newton² affirme que le « vecteur position » $\vec{r}$ du projectile vérifie l'égalité

$$D^2\vec{r}(t) = \vec{g}$$

où t représente le temps et où $\vec{g}$ représente la pesanteur. Si on désigne par (x, y, z) les composantes de $\vec{r}$ dans un repère orthonormé dans lequel l'axe Z est orienté parallèlement à la pesanteur, mais dans le sens opposé, on obtient

$$\begin{cases} D^2x(t) = 0 \\ D^2y(t) = 0 \\ D^2z(t) = -g \end{cases}$$

où g est la norme³ de $\vec{g}$. À partir de l'origine des axes, on lance le projectile vers le haut avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ et on suppose avoir choisi les axes horizontaux de telle sorte que la première composante de cette vitesse initiale soit positive et que la seconde composante soit nulle.

1. Déterminer les coordonnées de P à chaque instant et en déduire l'équation cartésienne de sa trajectoire. De quel type de courbe s'agit-il ? En donner une représentation.
2. On suppose que le sol est horizontal. Déterminer alors la portée du tir⁴. En supposant ensuite que la norme de la vitesse initiale est constante, déterminer l'angle de tir qui donnera la portée maximale.
3. Déterminer l'altitude maximale atteinte par le projectile. En supposant ensuite que la norme de la vitesse initiale est constante, déterminer l'angle de tir qui donnera l'altitude maximale.

1. Cet énoncé est inspiré d'un document de 2011 de l'Université de Savoie, contact : Richard Taillet, Richard.Taillet@univ-savoie.fr

2. Voir l'annexe.

3. $g \simeq 9,81 \text{ m/s}^2$

4. La portée du tir est la distance entre l'origine et le point où le projectile retombe sur le sol.

4. En supposant que la norme de la vitesse initiale est constante, déterminer l'équation cartésienne de la courbe séparant les points qui peuvent être atteints par le projectile de ceux qui ne le peuvent pas.



Solution

1. Il s'agit d'un problème de deux primitivations directes successives : il existe des constantes réelles $x_0, x_1, y_0, y_1, z_0, z_1$ telles que

$$\begin{cases} x(t) = x_1 t + x_0 \\ y(t) = y_1 t + y_0 \\ z(t) = -\frac{gt^2}{2} + z_1 t + z_0 \end{cases}$$

mais on peut préciser davantage car on dispose d'informations sur les conditions initiales. En effet, dans ce qui précède on a

$$x(0) = 0 = x_0, \quad y(0) = 0 = y_0, \quad z(0) = 0 = z_0$$

car au départ le projectile est à l'origine des axes et de même

$$Dy(0) = 0 = y_1$$

car le repère est placé de telle sorte que la seconde composante de la vitesse initiale soit nulle. En fonction du temps $t \geq 0$, le projectile se meut donc dans le plan formé par les axes X et Z selon les relations

$$\begin{cases} x(t) = x_1 t \\ z(t) = -\frac{gt^2}{2} + z_1 t. \end{cases}$$

Notons que l'on peut aussi écrire

$$Dx(0) = x_1 = v_0 \cos(\theta) \quad \text{et} \quad Dz(0) = z_1 = v_0 \sin(\theta)$$

où v_0 est la norme de la vitesse initiale et $\theta \in [0, \pi/2]$ la mesure de l'angle entre la vitesse initiale et le sol.

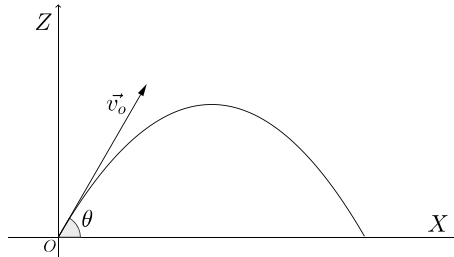
Cela étant, l'équation cartésienne de la trajectoire du projectile P s'obtient par élimination du paramètre t : un point de coordonnées cartésiennes (x, z) appartient à la trajectoire du projectile si et seulement s'il existe $t \geq 0$ tel que

$$\begin{cases} x = x_1 t \\ z = -\frac{gt^2}{2} + z_1 t, \end{cases}$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$z = \frac{z_1}{x_1} x - \frac{g}{2x_1^2} x^2 \quad \text{et} \quad x \geq 0$$

pour autant que $x_1 \neq 0$. Il s'agit d'une partie de parabole concave.



Dans le cas $x_1 = 0$ (ce qui correspond à un tir vertical, c'est-à-dire $\theta = \pi/2$), le projectile se déplace uniquement verticalement et sa trajectoire est un segment de l'axe Z , celui compris entre l'origine et le point de coordonnées $(0, 0, z_1^2/(2g)) = (0, 0, v_0^2/(2g))$.

- La portée étant déterminée par le fait que le projectile retombe sur le sol, elle est donnée par $x(t_0)$ où t_0 est la solution non nulle de l'équation

$$0 = z(t) = -\frac{gt^2}{2} + z_1 t,$$

à savoir

$$t_0 = \frac{2z_1}{g} = \frac{2v_0 \sin(\theta)}{g}.$$

La portée est donc égale à

$$x(t_0) = x \left(\frac{2z_1}{g} \right) = \frac{2x_1 z_1}{g} = \frac{2v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}.$$

Si v_0 est constant, elle est maximale lorsque l'angle de tir donne la valeur 1 pour $\sin(2\theta)$, c'est-à-dire $\theta = \pi/4$.

On aurait bien sûr aussi pu procéder en utilisant la trajectoire : la portée est déterminée par la solution non nulle de l'équation (en x)

$$0 = \frac{z_1}{x_1}x - \frac{g}{2x_1^2}x^2.$$

3. En fonction du temps, l'altitude (par rapport à un plan horizontal passant par l'origine) est donnée par la fonction

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + z_1t, \quad t \geq 0.$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $Dz(t) = -gt + z_1$; la dérivée s'annule donc en $t = z_1/g$, elle est positive sur l'intervalle $]-\infty, z_1/g]$ et négative sur $[z_1/g, +\infty[$. La valeur z_1/g donne donc bien lieu au maximum de l'altitude, lequel est égal à

$$\frac{z_1}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g}.$$

Comme on pouvait s'y attendre, l'angle de tir donnant l'altitude maximale est $\pi/2$ (tir vertical).

On aurait bien sûr aussi pu procéder en utilisant la trajectoire : l'altitude maximale est atteinte au sommet de la parabole.

4. Notons tout d'abord que, vu la réponse à la première question, ne sont concernés que des points dont l'abscisse est positive.

Cela étant, si $x_1 = 0$, c'est-à-dire si $\theta = \pi/2$ (tir vertical), alors (vu la première question) le projectile se déplace uniquement verticalement et sa trajectoire est un segment de l'axe Z , celui compris entre l'origine et le point de coordonnées $(0, 0, z_1^2/(2g)) = (0, 0, v_0^2/(2g))$.

Supposons maintenant que $x_1 \neq 0$, c'est-à-dire $\theta \neq \pi/2$. Un point de coordonnées (x, z) ($x \geq 0$) peut alors être atteint avec une vitesse initiale de module égal à v_0 si et seulement s'il existe $\theta \in [0, \pi/2[$ tel que

$$\begin{aligned} z &= \frac{z_1}{x_1}x - \frac{g}{2x_1^2}x^2 \\ &= \frac{v_0 \sin(\theta)}{v_0 \cos(\theta)}x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)}x^2 \\ &= \tan(\theta)x - \frac{g}{2v_0^2}(\tan^2(\theta) + 1)x^2 \\ &= -\frac{gx^2}{2v_0^2}\tan^2(\theta) + x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \end{aligned}$$

Pour $x \neq 0$, on obtient donc une équation du second degré en l'inconnue $\tan(\theta)$; celle-ci possède des solutions réelles si et seulement si

$$x^2 - 4 \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(\frac{g}{2v_0^2} x^2 + z \right) = x^2 \left(1 - \frac{g^2}{v_0^4} x^2 - \frac{2g}{v_0^2} z \right) \geq 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Il faut alors encore examiner si l'équation du second degré a des solutions positives car on doit chercher $\theta \in [0, \pi/2[$. Comme le coefficient de $\tan^2(\theta)$ et le terme indépendant ont le même signe, les deux solutions ont le même signe et comme les coefficients de $\tan(\theta)$ et de $\tan^2(\theta)$ sont de signes opposés, elles sont positives.

Enfin, un point de coordonnées $(0, z)$ peut être atteint avec une vitesse initiale de module égal à v_0 si et seulement s'il existe $\theta \in [0, \pi/2[$ tel que

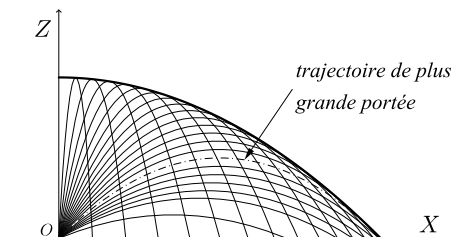
$$z = -\frac{gx^2}{2v_0^2} \tan^2(\theta) + x \tan(\theta) - \frac{gx^2}{2v_0^2} = 0;$$

on trouve donc seulement l'origine des axes. En conclusion, la courbe qui sépare les points qui peuvent être atteints par le projectile de ceux qui ne le peuvent pas est la parabole d'équation cartésienne

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Les points situés « au-dessus » de cette courbe ne peuvent pas être atteints et ceux qui sont « en dessous » le peuvent, pour autant que leur abscisse soit strictement positive.

Ci-dessous on trouve la représentation de quelques trajectoires dont celle (en pointillé) qui correspond à la portée la plus grande. La courbe de séparation des deux régions (atteintes ou non) est clairement visible aussi.



Exercice 2

Primitiver les fonctions continues suivantes.

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R} \quad f_2(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x \in]1, +\infty[$$

$$f_3(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}}, x \in]0, +\infty[\quad f_4(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [0, 1]$$

$$f_5(x) = \frac{1}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R} \quad f_6(x) = \frac{1}{e^{2x} - 3e^x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln(3)\}$$

$$f_7(x) = \frac{xe^x}{(1+x)^2}, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad f_8(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)(1+\cos^2(x))}, x \in]-\pi/2, \pi/2[$$

Solution

La fonction f_1

La fonction $g(t) = \tan(t)$, $t \in I =]-\pi/2, \pi/2[$ établit un changement de variable entre I et $\mathbb{R}$ et on a

$$Dg(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}, \quad \forall t \in I.$$

Ainsi on obtient, pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \right)_{x=g(t)} &= \int \frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{1+\tan^2(t)}} dt \\ &= \int \frac{\sqrt{\cos^2(t)}}{\cos^2(t)} dt \\ &= \int \frac{1}{\cos(t)} dt \\ &= \int \frac{\cos(t)}{1-\sin^2(t)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{D \sin(t)}{1-\sin(t)} + \frac{D \sin(t)}{1+\sin(t)} \right) dt \\ &\simeq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)} \right). \end{aligned}$$

Cela étant, on a aussi, pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)} = \frac{(1+\sin(t))^2}{\cos^2(t)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{1}{\cos(t)} + \tan(t) \right)^2 \\
 &= \left(\sqrt{1 + \tan^2(t)} + \tan(t) \right)^2.
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \simeq \ln \left(x + \sqrt{1+x^2} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Un autre changement de variable s'obtient en posant $\sqrt{x^2+1} = -x+t$. En élevant les deux membres de cette égalité au carré, on a l'égalité équivalente $x^2+1 = x^2+t^2-2tx$ avec $t > x$ et donc aussi

$$x = \frac{t^2 - 1}{2t}.$$

Dès lors, la fonction $g(t) = (t^2 - 1)/(2t)$, $t \in I =]0, +\infty[$ établit un changement de variable entre I et $\mathbb{R}$ et on a

$$Dg(t) = \frac{4t^2 - 2t^2 + 2}{4t^2} = \frac{t^2 + 1}{2t^2}, \quad \forall t \in I.$$

Ainsi on obtient, pour $t \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
 \left(\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \right)_{x=g(t)} &= \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{2t} + t} \times \frac{t^2+1}{2t^2} dt \\
 &= \int \frac{2t}{1+t^2} \times \frac{t^2+1}{2t^2} dt \\
 &= \int \frac{1}{t} dt \\
 &\simeq \ln(t).
 \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \simeq \ln \left(x + \sqrt{x^2+1} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f_2

La fonction $g(t) = 1/\cos(t)$, $t \in I =]0, \pi/2[$ établit un changement de variable entre I et $]1, +\infty[$ et on a

$$Dg(t) = \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)}, \quad \forall t \in I.$$

Ainsi on obtient, pour $t \in]0, \pi/2[$,

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \right)_{x=g(t)} &= \int \frac{\cos(t)}{\sqrt{1 - \cos^2(t)}} \times \frac{\sin(t)}{\cos^2(t)} dt \\ &\simeq \int \frac{1}{\cos(t)} dt. \end{aligned}$$

L'exercice précédent a fourni, pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\int \frac{1}{\cos(t)} dt \simeq \ln \left(\frac{1}{\cos(t)} + \tan(t) \right).$$

Dès lors, il reste à écrire cette égalité en fonction de x , moyennant la relation

$$x = \frac{1}{\cos(t)}.$$

On obtient immédiatement

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \simeq \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad x \in]1, +\infty[.$$

De façon analogue au cas précédent, un autre changement de variable s'obtient en posant $\sqrt{x^2 - 1} = -x + t$. En élevant les deux membres de cette égalité au carré, on a l'égalité équivalente $x^2 - 1 = x^2 + t^2 - 2tx$ avec $t > x$ et donc aussi

$$x = \frac{t^2 + 1}{2t}.$$

Dès lors, la fonction $g(t) = (t^2 + 1)/(2t)$, $t \in I =]1, +\infty[$ établit un changement de variable entre I et $]1, +\infty[$ et on a

$$Dg(t) = \frac{4t^2 - 2t^2 - 2}{4t^2} = \frac{t^2 - 1}{2t^2}, \quad \forall t \in I.$$

Ainsi on obtient, pour $t \in]1, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \right)_{x=g(t)} &= \int \frac{1}{-\frac{t^2+1}{2t} + t} \times \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt \\ &= \int \frac{2t}{t^2 - 1} \times \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt \\ &= \int \frac{1}{t} dt \\ &\simeq \ln(t). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx \simeq \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right), \quad x \in]1, +\infty[.$$

La fonction f_3

La fonction $g(t) = \sqrt[3]{t^4}$, $t \in I =]0, +\infty[$ établit un changement de variable entre I et $]0, +\infty[$ et on a

$$Dg(t) = Dt^{4/3} = \frac{4}{3} t^{1/3}, \quad \forall t \in I.$$

Ainsi on obtient, pour $t \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx \right)_{x=g(t)} &= \frac{4}{3} \int \frac{t^{2/3}}{t+1} t^{1/3} dt \\ &= \frac{4}{3} \int \frac{t+1-1}{t+1} dt \\ &\simeq \frac{4}{3} (t - \ln(t+1)). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3} + 1} dx \simeq \frac{4}{3} \left(\sqrt[4]{x^3} - \ln \left(1 + \sqrt[4]{x^3} \right) \right), \quad x \geq 0.$$

La fonction f_4

La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[0, 1]$. Elle est donc primitivable sur $]0, 1[$.

La fonction $g(t) = \sin(t)$ avec $t \in I =]0, \pi/2[$ établit un changement de variable entre I et $]0, 1[$ et on a

$$Dg(t) = \cos(t), \quad \forall t \in I.$$

Ainsi, on obtient, pour $t \in]0, \pi/2[$,

$$\begin{aligned} \left(\int \sqrt{1-x^2} dx \right)_{x=g(t)} &= \int \sqrt{1-\sin^2(t)} \cos(t) dt \\ &= \int \cos^2(t) dt \\ &= \int \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\ &\simeq \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \\ &\simeq \frac{t}{2} + \frac{\sin(t)\cos(t)}{2}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \simeq \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}, \quad x \in]0, 1[.$$

On peut aussi procéder comme suit. Pour $x \in [0, 1]$, on a

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = D \arcsin(x) + x D \sqrt{1-x^2}.$$

Notons F une primitive de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. On obtient dès lors

$$F(x) \simeq \arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2} - F(x),$$

donc la fonction

$$x \mapsto \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}$$

est une primitive de $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ sur l'intervalle $]0, 1[$.

La fonction f_5

La fonction $g(t) = \tan(t)$, $t \in I =]-\pi/2, \pi/2[$ établit un changement de variable entre I et $\mathbb{R}$ et on a

$$Dg(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}, \quad \forall t \in I.$$

Ainsi on obtient, pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\begin{aligned} \left(\int \frac{1}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}} dx \right)_{x=g(t)} &= \int \frac{1}{(1+2\tan^2(t)) \sqrt{1+\tan^2(t)} \cos^2(t)} dt \\ &= \int \frac{\cos^2(t) \sqrt{\cos^2(t)}}{(\cos^2(t) + 2\sin^2(t)) \cos^2(t)} dt \\ &= \int \frac{\cos(t)}{1+\sin^2(t)} dt \\ &\simeq \arctan(\sin(t)). \end{aligned}$$

Cela étant, on a aussi, pour $t \in]-\pi/2, \pi/2[$,

$$\sin(t) = \cos(t) \tan(t) = \frac{\tan(t)}{\sqrt{1+\tan^2(t)}}.$$

Il s'ensuit que

$$\int \frac{1}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}} dx \simeq \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f_6

Pour tout $x \neq \ln(3)$, on a successivement

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^{2x} - 3e^x} &= \frac{1}{e^x(e^x - 3)} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{e^x - 3} - \frac{1}{e^x} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-x}}{1 - 3e^{-x}} - e^{-x} \right) \\ &= \frac{1}{9} D \ln(|1 - 3e^{-x}|) + \frac{1}{3} De^{-x}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, sur les intervalles $] -\infty, \ln(3)[$ et $] \ln(3), +\infty[$, on a

$$\int \frac{1}{e^{2x} - 3e^x} dx \simeq \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{1}{9} \ln(|1 - 3e^{-x}|).$$

La fonction f_7

Une primitivation par parties permet de conclure rapidement. En effet, sur les intervalles $] -\infty, -1[$ et $] -1, +\infty[$, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx &= - \int xe^x D \frac{1}{1+x} dx \\ &= - \frac{xe^x}{1+x} + \int \frac{e^x + xe^x}{1+x} dx \\ &= - \frac{xe^x}{1+x} + \int e^x dx \\ &\simeq - \frac{xe^x}{1+x} + e^x \\ &\simeq \frac{e^x}{1+x}. \end{aligned}$$

La fonction f_8

Sur l'intervalle considéré, on a

$$\frac{1}{\cos(x)(1+\cos^2(x))} = \frac{1}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{1+\cos^2(x)}.$$

À partir de là, la primitivation est immédiate :

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)(1+\cos^2(x))} dx &= \int \left(-\frac{D \cos(x)}{\cos(x)} + \frac{D \cos^2(x)}{2(1+\cos^2(x))} \right) dx \\ &\simeq -\ln(\cos(x)) + \ln\left(\sqrt{1+\cos^2(x)}\right). \end{aligned}$$

1 Rappels théoriques

1.1 Notations et définitions dans le cas d'un intervalle fermé borné

Afin de ne pas alourdir la théorie, on se place dans le cadre des fonctions *continues* d'une variable réelle.

Si $[a, b]$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, on appelle « découpage à la Riemann¹ » de cet intervalle la donnée

- d'un naturel strictement positif M ,
 - de $M - 1$ points $x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1}$ de $]a, b[$
 - de M points $r_1 \in [a, x_1], r_2 \in [x_1, x_2] \dots, r_M \in [x_{M-1}, b]$
- et on pose $a = x_0, b = x_M$. Si ce découpage est noté σ , sa largeur est le nombre

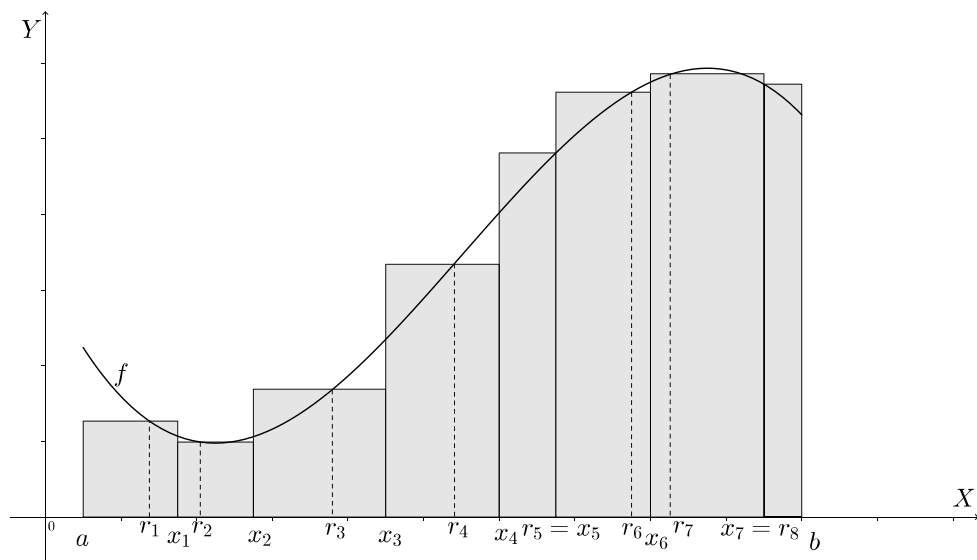
$$L(\sigma) = \sup_{1 \leq m \leq M} (x_m - x_{m-1}).$$

On considère alors l'expression suivante

$$S(\sigma, f) = \sum_{m=1}^M f(r_m)(x_m - x_{m-1}).$$

Cette somme dépend du choix des x_m , des r_m et de f . Si f est à valeurs réelles, elle représente la somme des aires des rectangles (avec leur signe, car $f(r_m)$ peut être négatif) de côtés $x_m - x_{m-1}$ et $f(r_m)$ ($m = 1, \dots, M$).

1. Voir l'annexe.



L'idée est de regarder ce qui se passe lorsqu'on prend des découpages dont la largeur tend vers 0, pour « coller » au mieux à la représentation graphique. Dans le contexte actuel (fonction continue sur $[a, b]$), on démontre que la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^{M(n)} (x_m - x_{m-1}) f(r_m)$$

existe et est finie quelle que soit la suite de découpages σ_n ($n \in \mathbb{N}_0$) dont les largeurs $L(\sigma_n)$ sont telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} L(\sigma_n) = 0$. On dit dans ce cas que « la fonction est intégrable » sur $[a, b]$. Ces limites sont toutes égales et on appelle intégrale de f sur $[a, b]$ leur valeur commune. La notation employée pour cette intégrale est

$$\int_a^b f(x) dx.$$

D'après la construction géométrique, si f est à valeurs positives, l'aire de la surface délimitée par le graphique de f , l'axe X et les droites verticales d'équation cartésienne $x = a$, $x = b$ sera définie comme étant l'intégrale de f sur $[a, b]$.

Il faut tout de suite remarquer que l'on pose

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

lorsque $b < a$ et que le x qui intervient dans la notation est une « variable muette ». Par ailleurs, quand $a = b$, on pose que l'intégrale est nulle.

1.2 Notations et définitions dans le cas d'un intervalle non fermé borné

On considère toujours le cas des fonctions continues. Pour simplifier, on considère le cas $I = [a, b[$; les définitions et propriétés se généralisent de façon naturelle aux autres cas. Soit f une fonction continue sur $I = [a, b[$. Par définition, on dit qu'elle y est intégrable lorsque la limite

$$\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t |f(x)| dx$$

est finie. Dans ce cas, on montre que la limite $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$ est également finie et sa valeur, notée

$$\int_a^b f(x) dx$$

est appelée *intégrale de f sur I* .

1.2.1 Vocabulaire

Pour $b \in \mathbb{R}$, on utilise l'expression « f est intégrable en b^- » lorsque f est intégrable sur un intervalle du type $[a, b[$ ($b > a$) et on utilise l'expression « f est intégrable en $+\infty$ » lorsque f est intégrable sur un intervalle du type $[a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$). Bien sûr on a des expressions analogues pour a^+ et $-\infty$ si on travaille sur un intervalle $]a, b]$ ($b > a$).

1.3 Propriétés

On considère le cas d'un intervalle I en toute généralité, dont les extrémités (finies ou non) sont notées a, b . Les propriétés les plus classiques de l'intégrale sont les suivantes. Elles permettent notamment les calculs explicites dans certains cas.

1.3.1 Propriétés de base

On a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

quels que soient $c \in [a, b]$ et f intégrable.

On a aussi (linéarité de l'intégrale)

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx$$

quels que soient les complexes c_1, c_2 et les fonctions intégrables f_1, f_2 .

Vis-à-vis des inégalités, on a aussi

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

si f et g sont des fonctions à valeurs réelles, intégrables et telles que $f \leq g$ sur $[a, b]$.

Il est aussi bien utile de noter que la définition de l'intégrabilité permet de dire tout de suite qu'une fonction est intégrable si et seulement si ses parties réelle et imaginaire le sont et qu'on a

$$\begin{aligned} \Re \left(\int_a^b f(x) dx \right) &= \int_a^b \Re(f(x)) dx = \int_a^b (\Re f)(x) dx, \\ \Im \left(\int_a^b f(x) dx \right) &= \int_a^b \Im(f(x)) dx = \int_a^b (\Im f)(x) dx. \end{aligned}$$

Notons enfin que si une fonction est continue sur un intervalle $]a, b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et admet un prolongement continu aux bords de l'intervalle, alors elle est intégrable sur $]a, b[$ et son intégrale coïncide avec celle du prolongement continu sur $[a, b]$.

1.3.2 Techniques d'intégration

En ce qui concerne les propriétés appelées « techniques d'intégration », les plus courantes sont les suivantes.

Intégration par variation de primitive

Si f est intégrable sur $]a, b[$, alors¹

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$$

où F est une primitive de f sur $]a, b[$. Une notation usuelle pour cette valeur est $[F]_a^b$.

Intégration par parties

Si f, g sont des fonctions dérivables sur un intervalle ouvert contenant $]a, b[$ et si deux des expressions intervenant dans l'égalité suivante existent (pour les limites, on demande que chacune soit finie), alors

$$\int_a^b f(x) Dg(x) dx = \left(\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)g(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)g(x) \right) - \int_a^b Df(x)g(x) dx.$$

Intégration par changement de variable

Si f est intégrable sur $]a, b[$ et si g est une bijection continûment dérivable de $]c, d[$ sur $]a, b[$ dont l'inverse est aussi continûment dérivable, alors

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(x)) |Dg(x)| dx.$$

1. Rappelons que dans le présent contexte on ne considère que des fonctions continues.

1.3.3 « Critères pratiques » d'intégrabilité

Dans divers cas, il est très intéressant de pouvoir étudier l'intégrabilité d'une fonction continue sans passer par la définition. Nous faisons ici quelques rappels. Un seul type d'intervalle est considéré ; les résultats concernant les limites à gauche sont bien sûr analogues avec les changements naturels adéquats.

Critère de comparaison

Si F est à valeurs positives et est intégrable sur I et si f est continu sur I , f y est intégrable lorsque $|f| \leq F$ sur I .

Cas de base

Si $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), alors la fonction $f_s : x \mapsto 1/(x-a)^s$ est intégrable sur $]a, b]$ si et seulement si $s < 1$ et est intégrable sur $[b, +\infty[$ si et seulement si $s > 1$.

Critères pratiques

Des deux résultats précédents, on déduit ce que l'on appelle des « critères pratiques » pour étudier l'intégrabilité ou la non-intégrabilité d'une fonction.

Une fonction f est intégrable

- en a^+ s'il existe $s < 1$ tel que la limite $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a)^s |f(x)|$ existe et est finie
- en $+\infty$ lorsqu'il existe $S > 1$ tel que la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^S |f(x)|$ existe et est finie.

Une fonction f n'est pas intégrable

- en a^+ lorsque la limite $\lim_{x \rightarrow a^+} (x-a) |f(x)|$ existe et diffère de 0
- en $+\infty$ lorsque la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x |f(x)|$ existe et diffère de 0.

Notons un cas particulier du dernier point précédent : si une fonction admet une limite non nulle en $+\infty$, alors elle n'est pas intégrable en $+\infty$.

2 Exercices de base résolus

Exercice 1

On donne un réel strictement positif a et une fonction f continue sur $[-a, a]$. Démontrer que si f est impair sur $[-a, a]$ alors son intégrale y est nulle et que si f est pair sur $[-a, a]$ alors son intégrale vaut deux fois celle sur l'intervalle $[0, a]$.

Solution

La fonction f étant continue sur le fermé borné $[-a, a]$, elle est intégrable sur cet intervalle. Cela étant, le changement de variable $x = g(t) = -t$ entre l'intervalle $] -a, 0[$ et $]0, a[$ fournit directement

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x) dx &= \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx \\
 &= \begin{cases} -\int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0 & \text{si } f \text{ est impair} \\ \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx & \text{si } f \text{ est pair.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2. On pose

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx.$$

En fonction de α , exprimer l'intégrale

$$\int_{1789}^{2018} f(x) dx$$

en supposant que f est une fonction impaire.

Solution

La fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est intégrable sur tout ensemble borné fermé. La fonction étant impaire, on est incité à utiliser ce fait et à ramener l'intégrale (ou du moins une partie) sur un intervalle symétrique par rapport à l'origine. La moyenne arithmétique des bornes de l'intégrale étant égale à $3807/2 = 1903,5$ et f étant périodique de période 2, on a $f(x) = f(x - 1904)$ quel que soit x et on obtient

$$\begin{aligned}
 I = \int_{1789}^{2018} f(x) dx &= \int_{1789}^{2018} f(x - 1904) dx \\
 &= \int_{-115}^{114} f(t) dt \\
 &= \int_{-115}^{115} f(t) dt - \int_{114}^{115} f(t) dt \\
 &= - \int_{114}^{115} f(t) dt.
 \end{aligned}$$

En effectuant un nouveau changement de variable et en utilisant à nouveau la périodicité de f , on obtient finalement

$$I = - \int_{114}^{115} f(t) dt = - \int_{114}^{115} f(t - 114) dt = - \int_0^1 f(u) du = -\alpha.$$

Exercice 3

On donne explicitement les fonctions et intervalles suivants. La fonction est chaque fois continue sur l'intervalle fermé borné donné ; elle y est donc intégrable. On demande alors de déterminer la valeur de son intégrale sur celui-ci.

$$f_1(x) = x^3 + 3x, [-2, 1]$$

$$f_2(x) = 3x e^{-x^2}, [-1, 0]$$

$$f_3(x) = x e^{2x}, [0, 1]$$

$$f_4(x) = \sqrt{3 + 2x}, \left[\frac{1}{2}, 3\right]$$

$$f_5(x) = \sin^2(x), \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$f_6(x) = \tan^2(x), \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$f_7(x) = x \cos^2(x), [0, \pi]$$

$$f_8(x) = \sin(x) \cos^2(x), \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$f_9(x) = \frac{x-1}{x-2}, [3, 5]$$

$$f_{10}(x) = \arcsin(x), [-1, 1]$$

$$f_{11}(x) = \frac{1}{9+x^2}, [-3\sqrt{3}, \sqrt{3}]$$

$$f_{12}(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, [-1, \sqrt{3}]$$

$$f_{13}(x) = \frac{1}{x+i}, [0, 1]$$

$$f_{14}(x) = \ln(x), [1, e^2]$$

$$f_{15}(x) = \frac{\ln(x)}{x}, [e^{-1}, e]$$

$$f_{16}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}, \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$$

$$f_{17}(x) = |x-1|, [-1, 2]$$

$$f_{18}(x) = |x-1| \ln(|x+1|), [0, 2]$$

Solution

La fonction f_1

Une primitive a pour expression explicite

$$\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2}.$$

L'intégrale de f_1 s'obtient donc directement par variation de primitive ; on a

$$\int_{-2}^1 (x^3 + 3x) dx = -\frac{33}{4}.$$

La fonction f_2

Une primitive a pour expression explicite

$$-\frac{3}{2}e^{-x^2}.$$

L'intégrale de f_2 s'obtient donc directement par variation de primitive ; on a

$$\int_{-1}^0 3x e^{-x^2} dx = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{e} - 1 \right).$$

La fonction f_3

On intègre par parties et on obtient

$$\int_0^1 x e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x D e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2 + 1}{4},$$

la dernière intégrale s'obtenant directement par variation de primitive.

La fonction f_4

Une primitive a pour expression explicite

$$\frac{1}{3} (3 + 2x)^{3/2}.$$

L'intégrale de f_4 s'obtient donc directement par variation de primitive ; on a

$$\int_{1/2}^3 \sqrt{3 + 2x} dx = \frac{19}{3}.$$

La fonction f_5

Comme

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)),$$

une primitive a pour expression explicite

$$\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}.$$

L'intégrale de f_5 s'obtient donc directement par variation de primitive ; on a

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin^2(x) dx = \frac{\pi - 3\sqrt{3} + 6}{24}.$$

La fonction f_6

Comme

$$\tan^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1,$$

une primitive a pour expression explicite

$$\tan(x) - x.$$

L'intégrale de f_6 s'obtient donc directement par variation de primitive ; on a

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan^2(x) dx = \sqrt{3} - 1 - \frac{\pi}{12}.$$

La fonction f_7

On utilise l'égalité

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)) = D \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right)$$

et on intègre par parties. L'intégrale de f_7 est ainsi égale à

$$\int_0^{\pi} x \cos^2(x) dx = \frac{\pi^2}{2} - \int_0^{\pi} \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right) dx = \frac{\pi^2}{4},$$

la dernière intégrale s'obtenant directement par variation de primitive.

La fonction f_8

Une primitive a pour expression explicite

$$-\frac{1}{3} \cos^3(x).$$

L'intégrale de f_8 s'obtient donc directement par variation de primitive ; on a

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^2(x) dx = \frac{1}{3}.$$

La fonction f_9

On a

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-2+1}{x-2} = 1 + \frac{1}{x-2}.$$

Ainsi une primitive sur l'intervalle considéré a pour expression explicite

$$x + \ln(x-2).$$

L'intégrale de f_9 s'obtient par variation de primitive ; on a

$$\int_3^5 \frac{x-1}{x-2} dx = 2 + \ln(3).$$

La fonction f_{10}

La fonction arcsin étant une fonction impaire sur $[-1, 1]$, son intégrale sur cet intervalle est nulle.

La fonction f_{11}

Une primitive a pour expression explicite

$$\frac{1}{3} \arctan\left(\frac{x}{3}\right).$$

L'intégrale de f_{11} s'obtient par variation de primitive ; on a

$$\int_{-3\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{9+x^2} dx = \frac{\pi}{6}.$$

La fonction f_{12}

Sur l'intervalle considéré, une primitive a pour expression explicite

$$\arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

L'intégrale de f_{12} s'obtient donc directement par variation de primitive ; on a

$$\int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction f_{13}

On a

$$\frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{x^2+1} = \frac{1}{2} D \ln(x^2+1) - i D \arctan(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

L'intégrale de f_{13} s'obtient par variation de primitive ; on a

$$\int_0^1 \frac{1}{x+i} dx = \frac{\ln(2)}{2} - i \frac{\pi}{4}.$$

La fonction f_{14}

Une primitive de la fonction $\ln$ a pour expression explicite

$$x \ln(x) - x.$$

L'intégrale de f_{14} s'obtient par variation de primitive ; on a

$$\int_1^{e^2} \ln(x) dx = e^2 \ln(e^2) - e^2 + 1 = 2e^2 - e^2 + 1 = e^2 + 1.$$

La fonction f_{15}

Pour tout $x > 0$, on a

$$\frac{\ln(x)}{x} = \ln(x) D \ln(x) = \frac{1}{2} D \ln^2(x).$$

L'intégrale de f_{15} s'obtient par variation de primitive ; on a

$$\int_{e^{-1}}^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\ln^2(e) - \ln^2\left(\frac{1}{e}\right) \right) = \frac{1}{2} (1 - 1) = 0.$$

La fonction f_{16}

Pour tout réel x qui n'annule pas le dénominateur, on a

$$\frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} = \tan(x) D \tan(x) = \frac{1}{2} D \tan^2(x).$$

L'intégrale de f_{16} s'obtient par variation de primitive ; on a

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)} dx = \frac{1}{2} \left(\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{1}{2} (3 - 1) = 1.$$

La fonction f_{17}

Pour tout réel x , on a

$$|x-1| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

L'intégrale de f_{17} s'obtient par variation de primitive ; on a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 |x-1| dx &= \int_{-1}^1 (1-x) dx + \int_1^2 (x-1) dx \\ &= 2 + \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) - 1 \\ &= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

La fonction f_{18}

Pour tout réel $x \in [0, 2]$, on a

$$|x-1| \ln(|x+1|) = \begin{cases} (1-x) \ln(x+1) & \text{si } x \leq 1 \\ (x-1) \ln(x+1) & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Primitivons par parties la fonction

$$x \mapsto (x-1) \ln(x+1), \quad x \geq 1.$$

On a

$$\begin{aligned}\int (x-1) \ln(x+1) dx &= \frac{1}{2} \int D(x^2 - 2x) \ln(x+1) dx \\ &= \frac{x^2 - 2x}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 2x}{x+1} dx \\ &= \frac{x^2 - 2x}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \int \left(x - 3 + \frac{3}{x+1}\right) dx \\ &\simeq \frac{x^2 - 2x}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2} - \frac{3}{2} \ln(x+1) \\ &\simeq \frac{x^2 - 2x - 3}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}\end{aligned}$$

par décomposition en fractions simples.

L'intégrale de f_{18} s'obtient par variation de primitive ; on a

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x-1| \ln(|x+1|) dx &= -\int_0^1 (x-1) \ln(x+1) dx + \int_1^2 (x-1) \ln(x+1) dx \\ &= -\left[\frac{x^2 - 2x - 3}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}\right]_0^1 \\ &\quad + \left[\frac{x^2 - 2x - 3}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{3x}{2}\right]_1^2 \\ &= 4 \ln(2) - \frac{3}{2} \ln(3) - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exercice 4

Sur les intervalles correspondants, étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes données explicitement.

(a) e^x , $\mathbb{R}$

(b) $\ln(x)$, $]0, +\infty[$

(c) $\frac{\sin(x)}{x}$, $]0, 1]$

(d) $\frac{1}{\sin(x)}$, $]0, \frac{\pi}{2}]$

(e) $\frac{\sin(x)}{x^2}$, $]0, +\infty[$

(f) $\frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$, $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

(g) $\frac{\cos(x)}{x}$, $]0, 1]$

(h) $\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$, $]0, +\infty[$

Solution

(a) La fonction donnée est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives.

Traisons la question de son intégrabilité en passant par la définition. On a

$$\int_0^t e^x dx = e^t - 1, t > 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^x dx = +\infty$$

et

$$\int_t^0 e^x dx = 1 - e^t, t < 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 e^x dx = 1;$$

dès lors, la fonction est intégrable en $-\infty$ et ne l'est pas en $+\infty$.

On peut aussi recourir aux critères pratiques : on a

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty;$$

dès lors la fonction donnée est intégrable en $-\infty$ et ne l'est pas en $+\infty$.

(b) La fonction donnée est continue sur $]0, +\infty[$, à valeurs positives sur $[1, +\infty[$ et négatives sur $]0, 1]$.

Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty,$$

la fonction $\ln$ n'est pas intégrable en $+\infty$.

Par intégration directe, on a

$$\int_t^1 |\ln(x)| dx = - \int_t^1 \ln(x) dx = 1 + t \ln(t) - t, \quad \forall t \in]0, 1],$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 |\ln(x)| dx = 1$$

et la fonction $\ln$ est donc intégrable en 0^+ .

On peut aussi procéder en utilisant un critère pratique : on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} |\ln(x)| \right) = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} \ln(x) \right) = 0 ;$$

la fonction $\ln$ est donc intégrable en 0^+ .

(c) La fonction donnée est continue et à valeurs positives sur l'intervalle $]0, 1]$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

La fonction donnée admet donc un prolongement continu en 0 ; elle est donc intégrable sur l'intervalle considéré, à savoir $]0, 1]$.

(d) La fonction donnée est continue et à valeurs positives sur l'intervalle $]0, \pi/2]$ et

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x \frac{1}{\sin(x)} \right) = 1.$$

La fonction n'est donc pas intégrable en 0.

(e) La fonction donnée est continue sur l'intervalle considéré, à savoir $]0, +\infty[$.

Son intégrabilité en $+\infty$ est directe en utilisant le critère de comparaison car on a

$$\left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x > 0,$$

la fonction $x \mapsto 1/x^2$ étant intégrable en $+\infty$.

Étudions l'intégrabilité en 0^+ en utilisant la définition. Par une intégration par parties, on a

$$\int_t^1 \left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| dx = \int_t^1 \frac{\sin(x)}{x^2} dx = -\sin(1) + \frac{\sin(t)}{t} + \int_t^1 \frac{\cos(x)}{x} dx, \quad \forall t \in]0, 1].$$

Cela étant, on a $\lim_{x \rightarrow 0} x (\cos(x)/x) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$; il s'ensuit que la fonction $x \mapsto \cos(x)/x$ n'est pas intégrable en 0 (critère de non-intégrabilité). Par conséquent, on a

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| dx = -\sin(1) + 1 + \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{\cos(x)}{x} dx = +\infty$$

et la fonction donnée n'est donc pas intégrable en 0^+ .

(f) La fonction donnée est continue et à valeurs positives sur l'union des intervalles considérés.

L'intégrabilité en 0^+ s'obtient directement par le critère de comparaison (par exemple) car on a

$$\left| \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} \right| \leq 2|\ln(x)|, \quad \forall x \in \left] 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

et l'on sait (d'après l'exercice (b) précédent) que la fonction $\ln$ est intégrable en 0^+ . Bien sûr, on peut aussi procéder en utilisant un critère pratique.

L'intégrabilité en $+\infty$ s'obtient rapidement en utilisant un critère pratique car on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{3/2} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2 - 1} \times \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \\ &= 1 \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme¹

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(x) - \ln(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right) = (D \ln)(1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

la fonction admet un prolongement continu en 1.

Finalement, on obtient que la fonction donnée est intégrable sur l'union des intervalles considérés.

- (g) La fonction donnée est continue et à valeurs positives sur l'intervalle considéré et, vu la décroissance de la fonction cosinus sur $[0, \pi]$, on a

$$\frac{\cos(x)}{x} \geq \frac{\cos(\pi/4)}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2x}, \quad \forall x \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right].$$

Comme la fonction $x \mapsto 1/x$ n'est pas intégrable en 0, on conclut aussi à la non-intégrabilité en 0 de la fonction donnée.

- (h) La fonction donnée est continue et positive sur l'intervalle considéré. De plus, on a

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq e^{-x}, \quad \forall x \geq 1$$

et

$$\frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x > 0.$$

L'intégrabilité de $x \mapsto e^{-x}$ en $+\infty$ et celle de $x \mapsto 1/\sqrt{x}$ en 0^+ permettent alors de conclure à l'intégrabilité de la fonction donnée sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

1. Pour trouver la limite, on peut aussi faire appel au théorème de l'Hospital.

Exercice 5

Si les intégrales suivantes existent, en déterminer la valeur.

$$(a) \int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$$

$$(b) \int_{-1}^0 \frac{\ln(|x|)}{|x|} dx$$

$$(c) \int_0^e x \ln(x) dx$$

$$(d) \int_{-\infty}^0 \frac{1}{4x^2+9} dx$$

$$(e) \int_2^{+\infty} \frac{1}{4x^2-9} dx$$

$$(f) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+1} dx$$

$$(g) \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+10} dx$$

$$(h) \int_{-\infty}^{\pi/3} \sin(2x) e^x dx$$

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$$

$$(j) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx$$

$$(k) \int_0^{+\infty} \frac{4}{x^4+x^2+1} dx$$

$$(l) \int_{-\infty}^{-1} \frac{\ln(x^2)}{x^2} dx$$

Solution

- (a) La fonction $f_1 : x \mapsto (x-1)/\sqrt{x}$ est continue sur l'intervalle $]0, 4]$, on a $|x-1| = x-1 \leq 3$ si $x \in [1, 4]$ et $|x-1| = 1-x \leq 1$ si $x \in]0, 1]$; dès lors on a

$$\left| \frac{x-1}{\sqrt{x}} \right| \leq \frac{3}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in]0, 4]$$

et la fonction f_1 est donc intégrable sur l'intervalle $]0, 4]$.

Cela étant, une intégration directe par variation de primitive fournit

$$\int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx = \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx = \frac{4}{3}.$$

- (b) La fonction $f_2 : x \mapsto \ln(|x|)/|x|$ est continue sur l'intervalle $[-1, 0[$, et sur celui-ci, on a

$$\frac{\ln(|x|)}{|x|} = -\frac{\ln(-x)}{x} = -\frac{1}{2} D(\ln(-x))^2.$$

Comme

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \int_{-1}^t \frac{\ln(|x|)}{|x|} dx = -\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0^-} (\ln(-t))^2 = -\infty,$$

la fonction f_2 n'est pas intégrable sur l'intervalle considéré et l'intégrale n'existe donc pas.

(c) La fonction $f_3 : x \mapsto x \ln(x)$ est continue sur $]0, e]$ et une primitive est

$$F_3 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2.$$

Comme f_3 a un signe constant sur $]0, 1]$ et sur $[1, e]$ et que l'on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^e x \ln(x) dx &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 x \ln(x) dx + \int_1^e x \ln(x) dx \\ &= F_3(1) - \lim_{t \rightarrow 0^+} F_3(t) + F_3(e) - F_3(1) \\ &= \frac{e^2}{4} - 0, \end{aligned}$$

la fonction f_3 est intégrable sur l'intervalle considéré et son intégrale est égale à $e^2/4$.

(d) La fonction $f_4 : x \mapsto 1/(4x^2 + 9)$ est continue sur $\mathbb{R}$, y est à valeurs positives et une primitive est donnée par

$$F_4 : x \mapsto \frac{1}{6} \arctan\left(\frac{2x}{3}\right).$$

Dès lors, l'application directe de la définition conduit à affirmer l'intégrabilité de f_4 et à trouver la valeur de l'intégrale qui est

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^0 \frac{1}{4x^2 + 9} dx = \frac{1}{6} \left(0 - \lim_{t \rightarrow -\infty} \arctan\left(\frac{2t}{3}\right) \right) = \frac{\pi}{12}.$$

(e) La fonction $f_5 : x \mapsto 1/(4x^2 - 9)$ est continue sur $[2, +\infty[$, à valeurs positives et on a

$$\frac{1}{4x^2 - 9} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2x - 3} - \frac{1}{2x + 3} \right) = \frac{1}{12} D \ln\left(\frac{2x - 3}{2x + 3}\right).$$

Dès lors, l'application directe de la définition conduit à affirmer l'intégrabilité de f_5 et à trouver la valeur de l'intégrale qui est

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{4x^2 - 9} dx &= \frac{1}{12} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{2t - 3}{2t + 3}\right) - \ln\left(\frac{1}{7}\right) \right) \\ &= \frac{1}{12} \left(\ln(1) - \ln\left(\frac{1}{7}\right) \right) \\ &= \frac{1}{12} \ln(7). \end{aligned}$$

(f) La fonction $f_6 : x \mapsto 1/(x^2 + 2x + 1)$ est continue sur $[2, +\infty[$, y est à valeurs positives et on a

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{1}{(x + 1)^2} = -D \frac{1}{x + 1}.$$

Dès lors, l'application directe de la définition conduit à affirmer l'intégrabilité de f_6 et à trouver la valeur de l'intégrale qui est

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2 + 2x + 1} dx = - \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t + 1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

- (g) La fonction $f_7 : x \mapsto 1/(x^2 + 2x + 10)$ est continue sur $[2, +\infty[$, y est à valeurs positives et on a

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 10} = \frac{1}{(x+1)^2 + 9} = \frac{1}{3} D \arctan\left(\frac{x+1}{3}\right).$$

Dès lors, l'application directe de la définition conduit à affirmer l'intégrabilité de f_7 et à trouver la valeur de l'intégrale qui est

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_2^t \frac{1}{x^2 + 2x + 10} dx &= \frac{1}{3} \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{t+1}{3}\right) - \arctan(1) \right) \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

- (h) La fonction $f_8 : x \mapsto \sin(2x) e^x$ est continue sur $] -\infty, \pi/3]$ et on a

$$|\sin(2x)| e^x \leq e^x.$$

La fonction $x \mapsto e^x$ est à valeurs positives, continue sur $\mathbb{R}$ et est intégrable sur $] -\infty, \pi/3]$ comme on le voit en appliquant directement la définition par exemple. Ainsi l'inégalité précédente permet d'affirmer que la fonction f_8 est intégrable sur l'intervalle considéré.

Cela étant, on peut calculer l'intégrale en intégrant par parties (deux fois) :

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\pi/3} \sin(2x) e^x dx \\ &= \int_{-\infty}^{\pi/3} \sin(2x) D e^x dx \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) e^{\pi/3} - 2 \int_{-\infty}^{\pi/3} \cos(2x) e^x dx \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) e^{\pi/3} - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) e^{\pi/3} - 4 \int_{-\infty}^{\pi/3} \sin(2x) e^x dx \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) e^{\pi/3} - 4 \int_{-\infty}^{\pi/3} \sin(2x) e^x dx, \end{aligned}$$

donc

$$\int_{-\infty}^{\pi/3} \sin(2x) e^x dx = \left(\frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{1}{5}\right) e^{\pi/3}.$$

Cela étant, si on connaît les nombres complexes et la fonction exponentielle complexe, cet exercice peut aussi être résolu comme suit. On a

$$\sin(2x) e^x = \Im(e^{(2i+1)x})$$

et la fonction $x \mapsto e^{(2i+1)x}$ est aussi intégrable sur l'intervalle considéré par la même justification que précédemment. Ainsi, par variation de primitive, on obtient directement

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\pi/3} \sin(2x) e^x dx &= \Im \left(\int_{-\infty}^{\pi/3} e^{(2i+1)x} dx \right) \\
 &= \Im \left(\frac{e^{2i\pi/3} e^{\pi/3}}{2i+1} \right) \\
 &= \Im \left(\frac{\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)}{5} (1-2i) \right) e^{\pi/3} \\
 &= \frac{1}{5} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) e^{\pi/3} \\
 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{10} + \frac{1}{5} \right) e^{\pi/3}.
 \end{aligned}$$

(i) La fonction $f_9 : x \mapsto 1/(1+x^2)^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ et on a

$$0 \leq \frac{1}{(1+x^2)^2} \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \neq 0.$$

Le critère de comparaison permet donc d'affirmer l'intégrabilité de f_9 sur $[0, +\infty[$.

Cela étant, pour tout réel x on a

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{(1+x^2)^2} &= \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \\
 &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{2} D \frac{1}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

Puisque les deux fonctions qui interviennent dans la somme précédente sont également intégrables sur l'intervalle considéré, on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^{+\infty} \frac{x}{2} D \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

Cette intégrale peut aussi être calculée par le changement de variable $x = \tan(t)$, $t \in]0, \pi/2[$ qui établit une bijection entre $]0, +\infty[$ et $]0, \pi/2[$. Dès lors, on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx &= \int_0^{\pi/2} \cos^4(t) \frac{1}{\cos^2(t)} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\cos(2t) + 1) dt \\
 &= \frac{1}{4} \sin(\pi) + \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

- (j) La fonction $f_{10} : x \mapsto \arctan(x)/(x^2 + 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs positives sur $[0, +\infty[$; on en trouve tout de suite une primitive car

$$\frac{\arctan(x)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} D \arctan^2(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dès lors, on obtient directement l'intégrabilité de f_{10} et la valeur de l'intégrale en appliquant la définition ; on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\arctan(x)}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t D \arctan^2(x) dx = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \arctan^2(t) = \frac{\pi^2}{8}.$$

- (k) La fonction $f_{11} : x \mapsto 4/(x^4 + x^2 + 1)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, positive et majorée par la fonction $x \mapsto 1/x^4$ en tout réel non nul, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Cela étant, on a la factorisation

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),$$

donc, dans le cadre réel, la décomposition des fractions rationnelles propres en fractions rationnelles simples fournit l'existence de réels A, B, C, D tels que

$$\frac{4}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Après calculs, on obtient ainsi

$$\frac{4}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{2x + 2}{x^2 + x + 1} - \frac{2x - 2}{x^2 - x + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Afin de procéder à l'intégration par variation de primitive, transformons cette expression comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{4}{x^4 + x^2 + 1} &= \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{x^2 + x + 1} - \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{(x + 1/2)^2 + 3/4} - \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{(x - 1/2)^2 + 3/4} \\ &= D \ln(x^2 + x + 1) + \frac{4/3}{((2x + 1)/\sqrt{3})^2 + 1} \\ &\quad - D \ln(x^2 - x + 1) + \frac{4/3}{((2x - 1)/\sqrt{3})^2 + 1} \\ &= D \ln\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right) \\ &\quad + \frac{2}{\sqrt{3}} D \arctan\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{\sqrt{3}} D \arctan\left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'intégrale de la fonction f_{11} vaut

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{4}{x^4 + x^2 + 1} dx \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + \arctan \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \right) \right) \\ & \quad - \left(\ln(1) + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan(\sqrt{3}/3) + \arctan(-\sqrt{3}/3) \right) \right) \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

- (I) La fonction $f_{12} : x \mapsto \ln(x^2)/x^2$ est continue sur $\mathbb{R}_0$, à valeurs positives sur $] -\infty, -1]$.

On obtient l'intégrabilité et la valeur de l'intégrale de f_{12} en appliquant la définition et en utilisant une intégration par parties ; on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} \frac{\ln(x^2)}{x^2} dx &= -2 \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} \frac{\ln(-x)}{x^2} dx \\ &= -2 \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} \ln(-x) D \frac{1}{x} dx \\ &= -2 \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(0 - \frac{\ln(-t)}{t} \right) + 2 \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} \frac{1}{x^2} dx \\ &= -2 \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^{-1} D \frac{1}{x} dx \\ &= -2 \left(-1 - \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \right) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Exercice 6

Calculer l'aire des parties du plan dont une description analytique est donnée ci-dessous. Donner aussi une représentation graphique des ensembles dans un repère orthonormé.

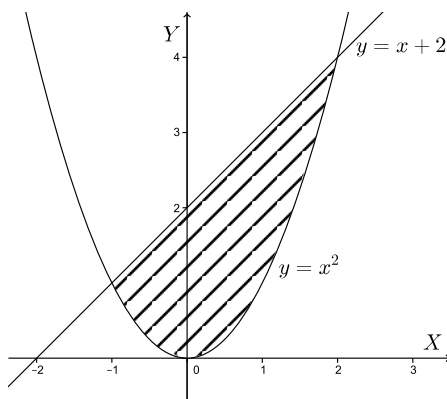
- (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1, 2], y \in [x^2, x + 2]\}$
- (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right], \cos^2(x) \leq y \leq \sin^2(x)\}$
- (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq e^{-|y|}\}$
- (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, 2\pi], |x| \leq \sin(y)\}$

Solution

(a) On se place dans un repère orthonormé. Tout d'abord, remarquons que l'on a

$$x^2 \leq x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 2].$$

Cela étant, les bords de l'ensemble sont formés des points de la partie du graphique de la parabole d'équation cartésienne $y = x^2$ et du segment de la droite d'équation $y = x + 2$ dont les abscisses sont comprises dans l'intervalle $[-1, 2]$. L'ensemble est représenté ci-dessous en hachuré.



Par ailleurs, la fonction $x \mapsto x + 2 - x^2$ étant continue sur $\mathbb{R}$ est intégrable sur $[-1, 2]$; une intégration directe par variation de primitive fournit

$$\int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \frac{9}{2},$$

ce qui est la valeur de l'aire demandée.

(b) On se place encore dans un repère orthonormé. Remarquons d'abord que pour $x \in [\pi/3, \pi]$ on a

$$\begin{aligned} \cos^2(x) \leq \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) &\Leftrightarrow \cos^2(x) \leq \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}\right]. \end{aligned}$$

Cela étant, on représente les fonctions $x \mapsto \cos^2(x)$ et $x \mapsto \sin^2(x)$ en partant des fonctions sin et cos. Comme on a

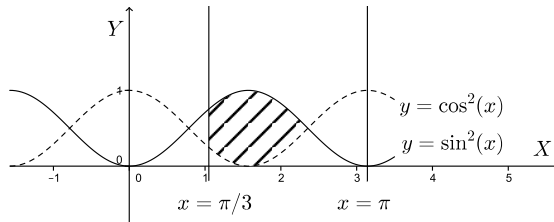
$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2},$$

la représentation de $x \mapsto \cos^2(x)$ s'obtient en représentant la fonction $x \mapsto \cos(2x)$, puis en translatant celle-ci d'une unité dans le sens des ordonnées croissantes, et enfin en prenant la moitié des ordonnées obtenues. Ensuite, comme on a

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x),$$

la représentation de $x \mapsto \sin^2(x)$ s'obtient à partir de celle de $x \mapsto \cos^2(x)$ en appliquant une symétrie orthogonale par rapport à l'axe X puis en appliquant une translation d'une unité dans le sens des ordonnées croissantes.

Ainsi, on obtient la représentation suivante pour l'ensemble donné (les points du bord sont compris dans l'ensemble).



Par ailleurs, la fonction $x \mapsto \sin^2(x) - \cos^2(x)$ étant continue sur $\mathbb{R}$ est intégrable sur $[\pi/3, 3\pi/4]$; on a

$$\begin{aligned} \int_{\pi/3}^{3\pi/4} (\sin^2(x) - \cos^2(x)) \, dx &= - \int_{\pi/3}^{3\pi/4} \cos(2x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{3} + 2}{4}. \end{aligned}$$

L'aire hachurée vaut donc

$$\frac{\sqrt{3} + 2}{4}.$$

- (c) On se place dans un repère orthonormé. Remarquons que l'ensemble peut aussi être décrit de la façon suivante

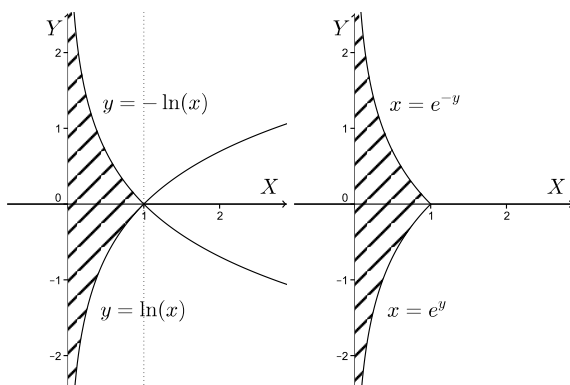
$$\begin{aligned} &\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ et } \ln(x) \leq -|y|\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, 1] \text{ et } |y| \leq -\ln(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in]0, 1] \text{ et } \ln(x) \leq y \leq -\ln(x)\}. \end{aligned}$$

L'aire à calculer (si elle existe) est donc celle de la partie du plan située entre la représentation graphique de la fonction logarithme et de son opposé, lorsque la variable appartient à l'intervalle $]0, 1]$. Comme la fonction logarithme est effectivement intégrable sur cet ensemble, l'aire existe et vaut

$$- \int_0^1 \ln(x) \, dx - \int_0^1 \ln(x) \, dx = -2 \int_0^1 \ln(x) \, dx = 2.$$

Remarquons qu'étant donné la définition de l'aire d'une partie du plan et l'énoncé initial, on peut bien sûr aussi calculer cette aire de la façon suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|} dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = 2.$$



(d) On se place dans un repère orthonormé. Remarquons que l'ensemble peut aussi être décrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [0, \pi], x \in [-1, 1] \text{ et } -\sin(y) \leq x \leq \sin(y)\} \\ &= \{(x, y) : y \in [0, \pi/2], x \in [-1, 1] \text{ et } -y \leq \arcsin(x) \leq y\} \\ & \cup \{(x, y) : y \in [\pi/2, \pi], x \in [-1, 1] \text{ et } y - \pi \leq \arcsin(x) \leq \pi - y\} \\ &= \{(x, y) : y \in [0, \pi/2], x \in [-1, 1] \text{ et } |\arcsin(x)| \leq y\} \\ & \cup \{(x, y) : y \in [\pi/2, \pi], x \in [-1, 1] \text{ et } |\arcsin(x)| \leq \pi - y\} \\ &= \{(x, y) : y \in [0, \pi], x \in [-1, 1] \text{ et } |\arcsin(x)| \leq y \leq \pi - |\arcsin(x)|\}. \end{aligned}$$

Comme la fonction arcsin est continue sur l'intervalle borné fermé $[-1, 1]$, sa valeur absolue l'est aussi et est donc intégrable sur cet intervalle ; l'aire existe donc et vaut

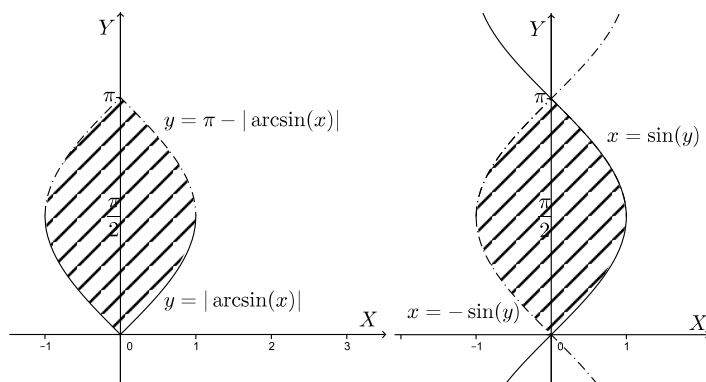
$$\int_{-1}^1 \left(\pi - 2|\arcsin(x)| \right) dx = 2 \int_0^1 (\pi - 2\arcsin(x)) dx,$$

puisque la fonction est paire. Une primitive de la fonction arcsin étant la fonction $x \mapsto x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$, on obtient

$$2 \int_0^1 (\pi - 2\arcsin(x)) dx = 2\pi - 4 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 4.$$

Remarquons qu'étant donné la définition de l'aire d'une partie du plan et l'énoncé initial, on peut bien sûr aussi calculer cette aire de la façon suivante

$$\int_0^\pi (\sin(y) + \sin(y)) dy = -2(\cos(\pi) - \cos(0)) = 4.$$



Exercice 7

Si les intégrales suivantes existent, en déterminer la valeur.

(a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$ (b) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \, dx$ (c) $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2+\sin(t)} \, dt$

Solution

(a) La fonction à intégrer est continue sur $[0, 1]$. Elle est donc intégrable sur cet intervalle.

Cela étant, la fonction $g(t) = \sin(t)$, $t \in I =]0, \pi/2[$ établit un changement de variable entre les intervalles I et $]0, 1[$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(t)} |\cos(t)| \, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) \, dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos(2t)}{2} \, dt \\ &= \frac{\pi}{4} + \left[\frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

ce qui représente l'aire d'un quart de disque de rayon 1.

Remarque. Cet exercice aurait pu être résolu sans changement de variable. De fait, pour $x \in [0, 1]$, on a

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = D \arcsin(x) + x D \sqrt{1-x^2}.$$

Ainsi, une primitivation par parties donne

$$\int \sqrt{1-x^2} \, dx \simeq \frac{\arcsin(x) + x\sqrt{1-x^2}}{2},$$

donc

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\arcsin(1)}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

(b) La fonction à intégrer est continue sur l'intervalle $]0, 3]$ et on a

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in]0, 3].$$

Le critère de comparaison permet de conclure à l'intégrabilité de la fonction à intégrer.

Cela étant, la fonction $g(t) = t^2$, $t \in I =]0, \sqrt{3}[$ établit un changement de variable entre les intervalles I et $]0, 3]$. On obtient ainsi

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2t}{t(1+t^2)} dt = 2 \arctan(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3}.$$

(c) La fonction à intégrer est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, \pi/2]$; elle y est donc intégrable.

Comme pour tout $t \in]0, \pi/2[$ on a

$$\sin(t) = \frac{2 \tan(t/2)}{1 + \tan^2(t/2)}.$$

Cela étant, la fonction $g(x) = 2 \arctan(x)$, $x \in I =]0, 1[$ établit un changement de variable entre les intervalles I et $]0, \pi/2[$. On obtient successivement

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2 + \sin(t)} dt &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \tan^2(t/2)}{1 + \tan^2(t/2) + \tan(t/2)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^2+x} \times \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\left(x^2 + 2(x/2) + (1/4)\right) + (3/4)} dx \\ &= \frac{4}{3} \int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{x+(1/2)}{\sqrt{3/2}}\right)^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\arctan(\sqrt{3}) - \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{3} \pi}{9}. \end{aligned}$$

Exercice 8

Pour tout naturel n , on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{3n+2}}{x^3 + 1} dx.$$

1. En fonction de n , calculer

$$I_n + I_{n+1}.$$

2. Quelle est la valeur de I_0 , I_1 , I_2 ?

Solution

Remarquons tout d'abord que les fonctions à intégrer sont continues sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$ donc qu'elles y sont intégrables.

1. On a successivement

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{x^{3n+2} + x^{3n+5}}{x^3 + 1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^{3n+2}}{x^3 + 1} (1 + x^3) dx \\ &= \int_0^1 x^{3n+2} dx \\ &= \frac{1}{3(n+1)}. \end{aligned}$$

2. On a directement

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x^2}{x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 D \ln(x^3 + 1) dx = \frac{\ln(2)}{3}.$$

D'après la partie (1), on obtient

$$I_1 = \frac{1}{3} - I_0 = \frac{1 - \ln(2)}{3} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{6} - I_1 = \frac{2 \ln(2) - 1}{6}.$$

Exercice 9

Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x \cos(3) + 1} dx.$$

Solution

La fonction $f : x \mapsto 1/(x^2 - 2x \cos(3) + 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas puisque $\Delta = 4 \cos^2(3) - 4 < 0$. On a

en outre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 |f(x)|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 f(x)) = 1.$$

La fonction f est donc intégrable sur $[1, +\infty[$.

Cela étant, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x^2 - 2x \cos(3) + 1} = \frac{1}{x^2 - 2x \cos(3) + \cos^2(3) + \sin^2(3)} \\ &= \frac{1}{(x - \cos(3))^2 + \sin^2(3)} \\ &= \frac{1}{\sin(3)} D \arctan \left(\frac{x - \cos(3)}{\sin(3)} \right), \end{aligned}$$

donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x \cos(3) + 1} dx = \frac{1}{\sin(3)} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{1 - \cos(3)}{\sin(3)} \right) \right).$$

Cette dernière expression peut être simplifiée comme suit. On a

$$\frac{1 - \cos(3)}{\sin(3)} = \frac{2 \sin^2(3/2)}{2 \sin(3/2) \cos(3/2)} = \tan \left(\frac{3}{2} \right).$$

Comme $3/2$ appartient à l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 - 2x \cos(3) + 1} dx = \frac{\pi - 3}{2 \sin(3)}.$$

Exercice 10

Montrer que, quel que soit le naturel strictement positif n , on a

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x) - \sin((2n-1)x)}{\sin(x)} dx = 0.$$

En déduire que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx = \frac{\pi}{2}$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$.

Solution

Tout d'abord, notons que quel que soit le naturel strictement positif m , la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(mx)}{\sin(x)}$$

est intégrable sur l'intervalle $]0, \pi/2[$ car elle y est continue et admet un prolongement continu en 0. Les intégrales à évaluer existent donc.

Cela étant, en utilisant les propriétés des fonctions trigonométriques, on a

$$\sin((2n+1)x) - \sin((2n-1)x) = 2 \cos(2nx) \sin(x),$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x) - \sin((2n-1)x)}{\sin(x)} dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos(2nx) dx \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{D \sin(2nx)}{2n} dx \\ &= \frac{1}{n} (\sin(n\pi) - \sin(0)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

quel que soit le naturel strictement positif n . Dès lors

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n-1)x)}{\sin(x)} dx, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

En itérant cette égalité, on obtient finalement

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{\sin(x)} dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}.$$

Remarque. Les fonctions D_n ($n \in \mathbb{N}$) données par

$$D_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)}$$

portent le nom de « noyau de Dirichlet » et sont très célèbres en analyse du signal, plus précisément dans la théorie des séries trigonométriques de Fourier.

Exercice 11

..... Déterminer la valeur des limites suivantes en utilisant la définition de l'intégrale.

(a) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k}$

(b) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 \times 2^2 \times 3^3 \dots \times m^m}{m^{m(m+1)/2}} \right)^{1/m^2}$

Solution

(a) Pour chaque m , la somme peut s'écrire

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{1}{1 + (k/m)}.$$

Considérons alors la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{1+x}.$$

Celle-ci est continue sur $[0, 1]$ et on a

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} f\left(\frac{k}{m}\right) = \sum_{k=1}^m \left(\frac{k}{m} - \frac{k-1}{m}\right) f\left(\frac{k}{m}\right).$$

Comme

$$\frac{k}{m} \in \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right], \quad 0 < \frac{1}{m} < \dots < \frac{m-1}{m} < 1, \quad \forall m, k \in \mathbb{N}_0, k \leq m$$

et comme

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sup_{1 \leq k \leq m} \left(\frac{k}{m} - \frac{k-1}{m}\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} = 0,$$

on a, par définition de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k} &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \left(\frac{k}{m} - \frac{k-1}{m}\right) f\left(\frac{k}{m}\right) \\ &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln(2). \end{aligned}$$

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}_0$, posons

$$r_m = \left(\frac{1 \times 2^2 \times 3^3 \dots \times m^m}{m^{m(m+1)/2}} \right)^{1/m^2}.$$

On a

$$\begin{aligned} \ln(r_m) &= \frac{1}{m^2} \left(\sum_{k=1}^m \ln(k^k) - \frac{m(m+1)}{2} \ln(m) \right) \\ &= \frac{1}{m^2} \left(\sum_{k=1}^m k \ln(k) - \ln(m) \left(\sum_{k=1}^m k \right) \right) \\ &= \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^m k \ln\left(\frac{k}{m}\right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{k}{m} \ln\left(\frac{k}{m}\right), \quad \forall m \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Considérons alors la fonction

$$g : x \mapsto x \ln(x).$$

Celle-ci est continue sur l'intervalle $]0, 1]$ et, comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0$, elle admet un prolongement continu sur $[0, 1]$. En procédant comme pour l'item précédent, on obtient alors

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow +\infty} \ln(r_m) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{k}{m} \ln\left(\frac{k}{m}\right) \\
 &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^m \frac{1}{m} g\left(\frac{k}{m}\right) \\
 &= \int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x \ln(x) dx = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

puisque une primitive de g est donnée par

$$x \mapsto \frac{x^2 \ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}.$$

Finalement, on a

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} r_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} e^{\ln(r_m)} = e^{\lim_{m \rightarrow +\infty} \ln(r_m)} = e^{-1/4}.$$

Exercice 12

Un point matériel se déplace à la vitesse $v(t) = 2t + 4$ m/s. On demande de calculer la distance parcourue après les dix premières secondes et d'en donner une interprétation graphique.

EXERCICE NUMÉRO 12 SUR LA VITESSE, À VOS GRAPHIQUES PARTEZ !!!



Solution

La physique nous dit que la fonction vitesse est la dérivée de la fonction déplacement (ou « distance parcourue »)¹. Ainsi, la distance parcourue exprimée en mètres après les dix premières secondes est la valeur en 10 de la primitive de la fonction vitesse qui s'annule en 0, à savoir

$$\int_0^{10} (2t + 4) dt = 140.$$

Cette valeur est représentée graphiquement par l'aire comprise entre l'axe des abscisses et le graphique de la fonction $v(t) = 2t + 4$, $t \in [0, 10]$, qui est un segment de droite.

Exercice 13². La projection (cylindrique conforme) de Mercator³

Tout système de projection cartographique introduit des altérations de longueurs, dites altérations linéaires, vis-à-vis des mesures réelles effectuées à la surface de la terre (supposée sphérique en première approximation). Ces altérations provoquent à leur tour des altérations d'angles ou de superficies dans le plan de projection. En maîtrisant correctement les altérations linéaires, il est possible de conserver soit les angles (projections dites conformes), soit les superficies (projections dites équivalentes). Le problème posé à Mercator consistait à conserver les angles ; une projection conforme s'imposait donc.

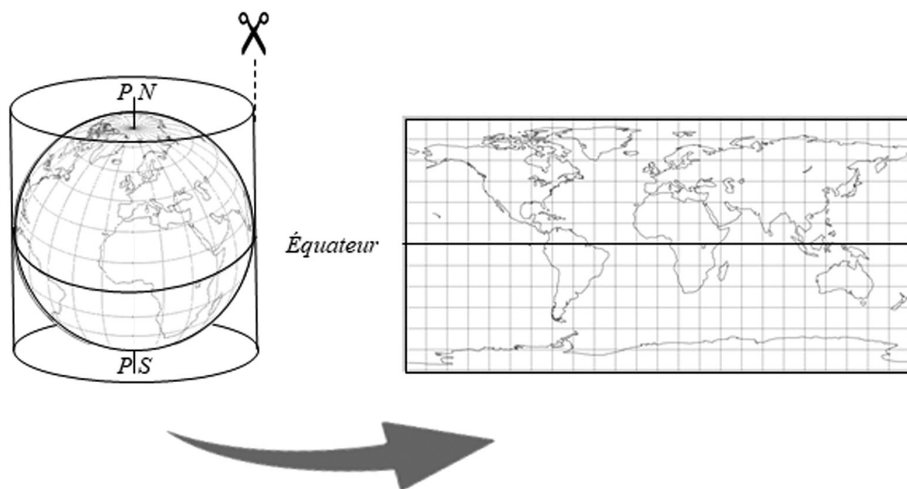
La façon la plus simple de reporter des coordonnées sur un plan consiste à faire figurer les images des méridiens comme des verticales et celles des parallèles comme des horizontales. On obtient ainsi un canevas cartésien dans lequel les longitudes apparaissent selon les abscisses et les latitudes selon les ordonnées. Cette disposition est obtenue en projetant les points de la surface terrestre sur un cylindre tangent à l'équateur⁴. Une fois le cylindre coupé selon une verticale et déployé, l'équateur apparaît comme une droite horizontale le long de laquelle les images des méridiens sont des droites orthogonales à l'équateur espacées régulièrement ; l'espacement entre les images des parallèles dépend quant à lui du type de projection. Mercator avait donc comme objectif de déterminer comment espacer les images des parallèles pour conserver la propriété de conformité.

1. Pour mémoire, l'accélération est la dérivée seconde de la fonction déplacement.

2. Cet exemple est tiré du cours de cartographie mathématique du Professeur J.-P. Donnay (Université de Liège) ; le texte suivant s'inspire largement des notes qu'il nous a fournies mais n'engage que les auteurs du présent recueil. Nous tenons à remercier le Professeur J.-P. Donnay pour sa collaboration efficace et constructive.

3. Voir l'annexe.

4. Il est possible d'utiliser d'autres surfaces et d'obtenir aussi des projections conformes mais seule celle de Mercator permet de conserver les loxodromies comme des droites. Une loxodromie, c'est-à-dire une route à cap constant, est une route qui coupe tous les méridiens avec le même angle.



Si on considère un point de la sphère qui a λ, φ respectivement pour longitude et latitude, le point de la carte obtenu par la projection de Mercator possède l'ordonnée

$$y = R \ln \left(\tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

où R est le rayon de la terre. L'abscisse, quant à elle, est égale à $R\lambda$ à l'équateur. La recherche rigoureuse de cette forme explicite et la preuve que cette projection est conforme sort du cadre de cet ouvrage (elle peut se faire en utilisant la projection stéréographique). Notons cependant qu'en procédant comme suit, on peut avoir une idée de l'origine de cette expression.

L'étude des transformations conformes montre que lorsqu'on effectue une telle transformation, les altérations linéaires sont identiques dans toutes les directions (mais changent selon les points). Partons donc de là.

Soient deux points A, B de la sphère situés sur le même méridien ayant respectivement $(\lambda, \varphi), (\lambda, \varphi + \delta)$ pour longitude et latitude et A', B' ayant respectivement $(x, y), (x, y')$ pour coordonnées cartésiennes sur la carte. L'altération le long d'un méridien, notée h , est alors égale à

$$h = \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{y' - y}{R\delta}.$$

Si on considère maintenant deux points A, D sur le même parallèle et qu'on note respectivement $(\lambda, \varphi), (\lambda + \eta, \varphi)$ leurs longitude et latitude et A', D' ayant respectivement $(x, y), (x', y)$ pour coordonnées cartésiennes, l'altération le long du parallèle, notée k , est égale à

$$k = \frac{|A'D'|}{|AD|} = \frac{x' - x}{R \cos(\varphi)\eta}$$

puisque la mesure du rayon d'un parallèle est égale à $R \cos(\varphi)$.

À proximité de l'équateur, on a ainsi

$$k \approx \frac{1}{\cos(\varphi)}$$

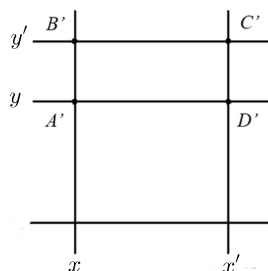
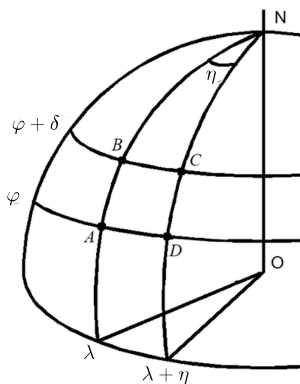
puisque $x' - x \approx R\eta$. Si les altérations sont les mêmes, on obtient ainsi

$$h = \frac{y' - y}{R\delta} = k = \frac{1}{\cos(\varphi)}$$

quel que soit $\delta > 0$. Un passage à la limite donne alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{y' - y}{\delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{y(\varphi + \delta) - y(\varphi)}{\delta} = Dy(\varphi) = \frac{R}{\cos(\varphi)}$$

où y est la notation utilisée pour la fonction qui, à tout point de latitude φ , associe son ordonnée sur la carte.



L'ordonnée d'un point proche de l'équateur et dont la latitude est φ est donc donnée par une primitive de $\varphi \mapsto R/\cos(\varphi)$. L'ordonnée étant nulle pour $\varphi = 0$, on obtient donc

$$y(\varphi) = R \int_0^\varphi \frac{1}{\cos(u)} du.$$

Que vaut $y(\varphi)$?

Solution

Comme

$$\cos(u) = \frac{1 - \tan^2(u/2)}{1 + \tan^2(u/2)},$$

le calcul de cette intégrale peut s'effectuer par le changement de variable

$$g(t) = 2 \arctan(t), \quad t \in I =]0, \tan(\varphi/2)[$$

entre les intervalles I et $]0, \varphi[$.

On obtient dès lors

$$\begin{aligned}
 y(\varphi) &= R \int_0^{\tan(\varphi/2)} \frac{1+t^2}{1-t^2} 2 \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= R \int_0^{\tan(\varphi/2)} \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\
 &= R \ln \left(\left| \frac{1+\tan(\varphi/2)}{1-\tan(\varphi/2)} \right| \right) \\
 &= R \ln \left(\left| \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| \right)
 \end{aligned}$$

puisque

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

On a $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$ puisqu'il s'agit d'une latitude (d'un point qui n'est pas le pôle).
Dès lors

$$\tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) > 0$$

et on obtient finalement

$$y(\varphi) = R \ln \left(\tan \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

Exercice 14

• Montrer que, quel que soit le naturel n , on a

$$\int_0^1 (\ln(x))^n dx = (-1)^n n!.$$

Solution

Remarquons tout d'abord que l'intégrale existe car les puissances de la fonction logarithme sont intégrables sur $]0, 1]$. En effet, ces fonctions sont continues et de signe constant sur $]0, 1]$ et on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} (\ln(x))^n = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{1/(2n)} \ln(x))^n = 0.$$

Cela étant, la relation s'obtient par récurrence. Pour $n = 0$, les deux membres sont égaux à 1 puisque, par convention, $0! = 1$.

Pour $n = 1$, on a

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \ln(1) - 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln(x) - x) = -1$$

et, si la relation est vraie pour n , on a

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 (\ln(x))^{n+1} dx &= \int_0^1 D_x (\ln(x))^{n+1} dx \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 0^+} (x (\ln(x))^{n+1}) - (n+1) \int_0^1 x \frac{(\ln(x))^n}{x} dx \\
 &= -(n+1) \int_0^1 (\ln(x))^n dx \\
 &= -(n+1) (-1)^n n! = (-1)^{n+1} (n+1)!.
 \end{aligned}$$

3 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2. On pose

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx.$$

En fonction de α , exprimer l'intégrale

$$\int_{1789}^{2018} f(x) dx$$

en supposant que f est une fonction paire.

Exercice 2

Si les intégrales suivantes existent, en déterminer la valeur.

(a) $\int_1^2 \sqrt{2x-1} dx$

(b) $\int_{-2}^4 \frac{x+4}{x+3} dx$

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx$

(d) $\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$

(e) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2} dx$

(f) $\int_0^{2\pi} \sin^2(y) dy$

(g) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2(x)} dx$

(h) $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt$

(i) $\int_0^{+\infty} e^{-|x-1|} dx$

(j) $\int_0^1 \ln(x^2) dx$

(k) $\int_0^1 (\ln(x))^2 dx$

(l) $\int_2^3 \frac{x+1}{(x-1)^5} dx$

$$(m) \int_0^2 \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$$

$$(n) \int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3(x)}{2 + \sin^2(x)} dx$$

$$(o) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x - 2} dx$$

$$(p) \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3 - \cos(x)} dx$$

$$(q) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2(x) dx$$

$$(r) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 |\sin(x)| dx$$

$$(s) \int_{-1}^e x \ln(x^2) dx$$

$$(t) \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2 - 2x - 3} dx$$

$$(u) \int_{-\infty}^0 x e^{-x} dx$$

$$(v) \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \tan^3(x) dx$$

Exercice 3

1. Calculer l'aire de la partie du plan dont une description analytique est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 2\pi], \cos(x) \leq y \leq \sin(x)\}$$

et en donner une représentation graphique dans un repère orthonormé.

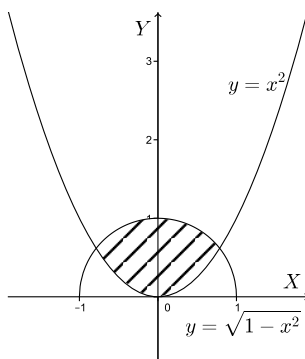
De même, calculer l'aire des parties du plan dont une description analytique est

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [1, e^2], -\ln(x) \leq y \leq \ln(x)\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\pi/4, 0], \tan(x) \leq y \leq \sin(x)\}$$

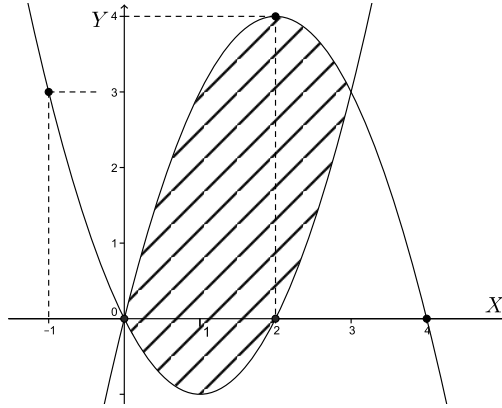
et en donner une représentation graphique dans un repère orthonormé.

2. Calculer l'aire de la partie du plan hachurée suivante et donner une représentation analytique de cette partie.

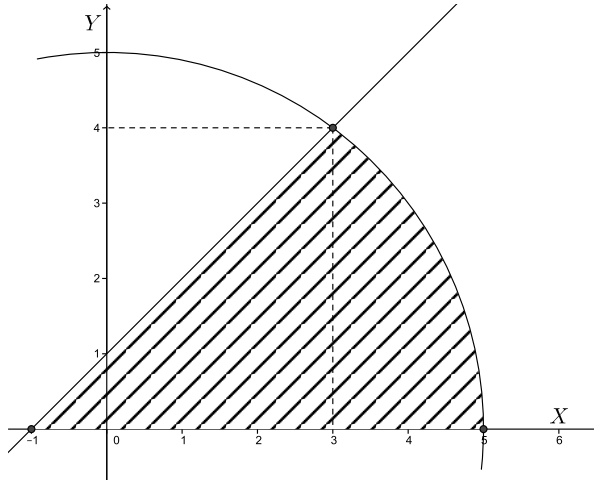


De même, calculer l'aire des parties du plan hachurées suivantes et en donner une représentation analytique.

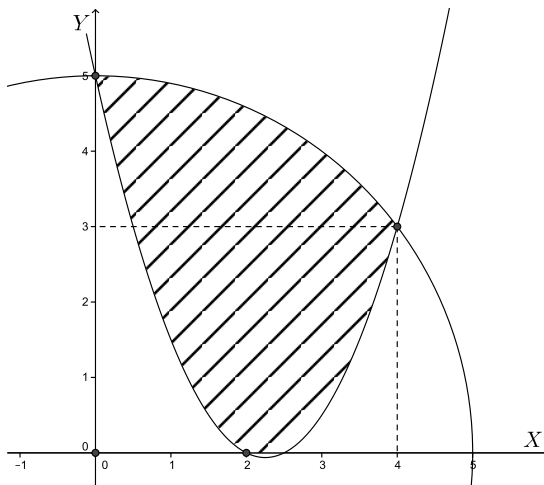
(a) Les courbes représentées sont des paraboles.



(b) Les courbes représentées sont un cercle et une droite.



(c) Les courbes représentées sont un cercle et une parabole.



3. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par les graphiques des fonctions f, g, h données explicitement par

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x, \quad h(x) = 2x$$

et donner une représentation graphique de cette partie du plan.

4. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par les graphiques des fonctions f, g données explicitement par

$$f(x) = 4 - x^2, \quad g(x) = x - |x|$$

et donner une représentation graphique de cette partie du plan.

5. Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par les graphiques des fonctions f, g données explicitement par

$$(a) f(x) = \arctan(x), \quad g(x) = \operatorname{arccot}(x), \quad x \in [-1, 1]$$

$$(b) f(x) = xe^{-x}, \quad g(x) = 0, \quad x \geq 0$$

et donner une représentation graphique de ces parties du plan.

Exercice 4

1. Dans un repère orthonormé, calculer le volume du cône de révolution de rayon R et hauteur h engendré par la rotation d'un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit pris comme axe de rotation.
2. Dans un repère orthonormé, calculer le volume de la sphère de rayon R .
3. Dans un repère orthonormé, calculer le volume du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la surface plane dont une description analytique est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, 1], y \in [x^2/2 + x - 3, 0]\}.$$

Représenter cette surface.

Exercice 5

Déterminer si les fonctions suivantes données explicitement sont intégrables sur les intervalles considérés.

$$(a) f_1(x) = \ln\left(1 + \frac{4}{x^2}\right), \quad]0, +\infty[\quad (b) f_2(x) = \tan(x), \quad]0, \pi/2[$$

$$(c) f_3(x) = \frac{1}{x \ln(x)}, \quad]0, 1[\quad (d) f_4(x) = \frac{x}{e^x - 1}, \quad]0, +\infty[$$

$$(e) f_5(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}, \quad [0, 1[\quad (f) f_6(x) = \frac{1}{2 \cos^2(x) + \sin^2(x)}, \quad [0, \pi]$$

$$(g) f_7(x) = \tan(x), \quad [\pi, 3\pi/2[\quad (h) f_8(x) = \frac{e^{-x}}{1 + e^{-2x}}, \quad [0, +\infty[$$

$$(i) f_9(x) = xe^{-x} \cos(x), \quad [0, +\infty[\quad (j) f_{10}(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad]-\infty, -2]$$

Exercice 6

Déterminer les limites suivantes en utilisant la définition de l'intégrale.

- (a) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(m \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2 + m^2} \right)$
 (b) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(m^{-3} \sum_{k=1}^m k^2 \right)$
 (c) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+3} + \dots + \frac{1}{4m-1} \right)$
 (d) $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\prod_{k=1}^m \left(1 + \frac{k}{m} \right) \right)^{3/m}$

Solution 1

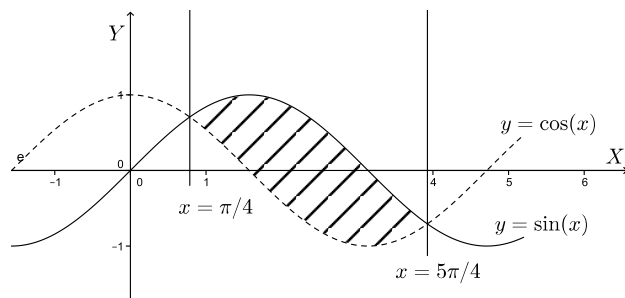
Si f est une fonction paire, l'intégrale vaut 229α .

Solution 2

- (a) $\frac{1}{3} (3\sqrt{3} - 1)$ (b) $6 + \ln(7)$
 (c) $2 \frac{\sqrt{3} \pi}{9}$ (d) $\frac{1}{2} (7 + \ln(4))$
 (e) $\frac{2}{3} \ln(2)$ (f) π
 (g) 1 (h) 2
 (i) $2 - \frac{1}{e}$ (j) -2
 (k) 2 (l) $\frac{73}{96}$
 (m) $2 \ln(e^2 + 1) - 2 - 2 \ln(2)$ (n) $\frac{3\sqrt{2}}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}$
 (o) non intégrable en 1 (p) $\frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(\sqrt{2})$
 (q) $\frac{\pi + 3\sqrt{3} - 6}{24}$ (r) $2(\pi - 2)$
 (s) $\frac{e^2 + 1}{2}$ (t) $\frac{1}{4} \ln(5)$
 (u) non intégrable en $-\infty$ (v) 0

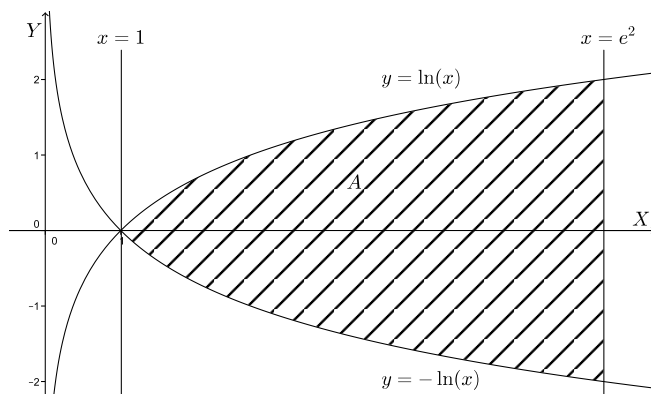
Solution 3

1. Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de l'ensemble donné est la suivante.



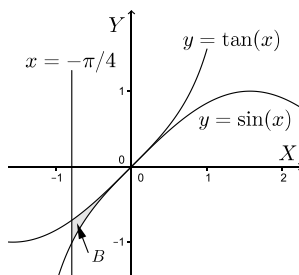
L'aire est égale à $2\sqrt{2}$.

Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de l'ensemble A donné est la suivante.



L'aire est égale à $2(e^2 + 1)$.

Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de l'ensemble B donné est la suivante.



L'aire est égale à $(\ln(2) + \sqrt{2} - 2)/2$.

2. La description analytique de l'ensemble est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}.$$

L'intersection des courbes d'équation cartésienne $y = \sqrt{1 - x^2}$ et $y = x^2$ est formée de deux points dont les abscisses sont $-r_0$ et r_0 , où¹

$$r_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}},$$

et l'aire est égale à

$$\arcsin(r_0) + r_0 \sqrt{1 - r_0^2} - \frac{2}{3} r_0^3.$$

(a) La description analytique de l'ensemble est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x \leq y \leq -x^2 + 4\}.$$

L'aire est égale à 9.

(b) La description analytique de l'ensemble est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x + 1, x^2 + y^2 \leq 25\}.$$

L'aire est égale à

$$2 + \frac{25\pi}{4} - \frac{25}{2} \arcsin\left(\frac{3}{5}\right).$$

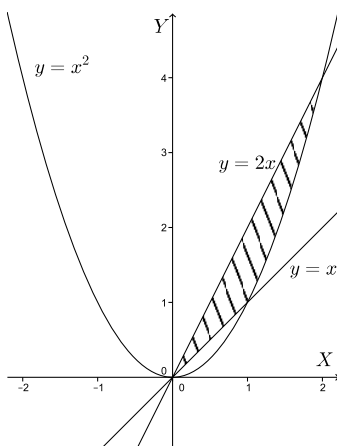
(c) La description analytique de l'ensemble est

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - (9/2)x + 5 \leq y \leq \sqrt{25 - x^2}\}.$$

L'aire est égale à

$$22 - \frac{64}{3} + \frac{25}{2} \arcsin\left(\frac{4}{5}\right).$$

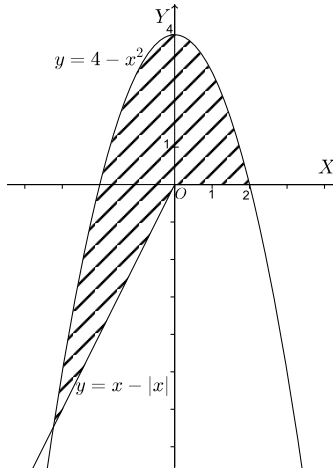
3. Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de l'ensemble délimité par les fonctions données est la suivante.



L'aire est égale à $7/6$.

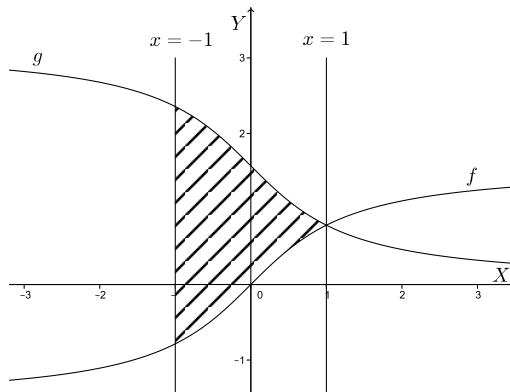
1. Un calcul direct permet d'obtenir que $r_0 = \frac{1}{\sqrt{\Phi}}$ où Φ est le nombre d'or.

4. Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de l'ensemble délimité par les fonctions données est la suivante.



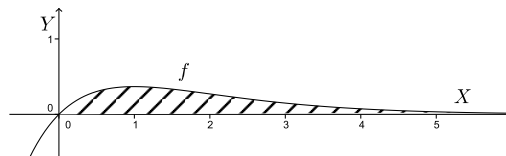
L'aire est égale à $10 \left(1 + \sqrt{5/3} \right)$.

5. (a) Dans un repère orthonormé, la représentation graphique de l'ensemble délimité par les fonctions données en (a) est la suivante.



L'aire est égale à π .

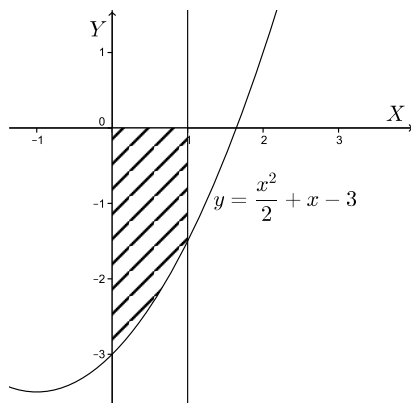
- (b) La représentation graphique de l'ensemble délimité par les fonctions données en (b) est la suivante.



L'aire est égale à 1.

Solution 4

1. Le volume de ce cône est $\pi R^2 h/3$.
2. Le volume de cette sphère est $4\pi R^3/3$.
3. Le volume du solide engendré par la surface hachurée ci-dessous est égal à $169\pi/30$.



Solution 5

- (a) La fonction f_1 est intégrable sur l'intervalle donné.
- (b) La fonction f_2 est intégrable en 0 mais pas en $\pi/2$.
- (c) La fonction f_3 n'est intégrable ni en 0^+ ni en 1.
- (d) La fonction f_4 est intégrable sur l'intervalle donné.
- (e) La fonction f_5 est intégrable sur l'intervalle donné.
- (f) La fonction f_6 est intégrable sur l'intervalle donné.
- (g) La fonction f_7 est intégrable en π^+ mais pas en $3\pi/2$.
- (h) La fonction f_8 est intégrable sur l'intervalle donné.
- (i) La fonction f_9 est intégrable sur l'intervalle donné.
- (j) La fonction f_{10} est intégrable sur l'intervalle donné.

Solution 6

- (a) $\pi/4$
- (b) $1/3$
- (c) $\ln(2)/2$
- (d) $(4/e)^3$

4 Exercices plus élaborés

Exercice 1

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période 2. On pose

$$\alpha = \int_0^1 f(x) dx.$$

Si m, n sont des naturels strictement positifs, si m est impair, n pair et si $n - m > 2$, exprimer l'intégrale

$$\int_m^n f(x) dx$$

en fonction de α , en supposant que f est une fonction impaire.

Faire de même lorsque f est pair.

Solution

La fonction étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est intégrable sur tout ensemble borné fermé et les intégrales qui apparaissent dans l'énoncé sont donc des réels (ou complexes).

Cela étant, notons que la valeur de l'intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de longueur égale à la période est indépendante de l'intervalle. De fait, si f , continu sur $\mathbb{R}$, est de période $T > 0$ on a, quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^{b+T} f(x) dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^{b+T} f(x) dx - \int_{a+T}^{b+T} f(x) dx \\ &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^{b+T} f(x) dx - \int_a^b f(x) dx \\ &= \int_b^{b+T} f(x) dx. \end{aligned}$$

Cela étant, en utilisant d'abord la périodicité et ensuite le fait que f soit impaire, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \int_m^n f(x) dx &= \sum_{j=0}^{(n-m-3)/2} \int_{m+2j}^{m+2(j+1)} f(x) dx + \int_{n-1}^n f(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^{(n-m-3)/2} \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{n-1}^n f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{n-1}^n f(x) dx \\
&= \int_{-1}^0 f(x) dx \\
&= - \int_0^1 f(x) dx \\
&= -\alpha.
\end{aligned}$$

Lorsque la fonction est paire, on a

$$\begin{aligned}
\int_m^n f(x) dx &= \sum_{j=0}^{(n-m-3)/2} \int_{m+2j}^{m+2(j+1)} f(x) dx + \int_{n-1}^n f(x) dx \\
&= \sum_{j=0}^{(n-m-3)/2} \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{n-1}^n f(x) dx \\
&= 2 \sum_{j=0}^{(n-m-3)/2} \alpha + \int_{n-1}^n f(x) dx \\
&= (n-m-1)\alpha + \int_{-1}^0 f(x) dx \\
&= (n-m)\alpha.
\end{aligned}$$

Exercice 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$.
Montrer que si l'intégrale de $|f|$ sur l'intervalle est nulle, alors f est identiquement nul sur celui-ci.

Solution

Si x_0 est un point de l'intervalle où f ne s'annule pas, alors la continuité de f implique l'existence de $\delta > 0$ tel que $f(x) \neq 0$ quel que soit $x \in [a, b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Il s'ensuit que l'on a

$$0 < \int_{\sup\{a, x_0 - \delta\}}^{\inf\{b, x_0 + \delta\}} |f(x)| dx \leq \int_a^b |f(x)| dx = 0,$$

ce qui est impossible. La conclusion s'ensuit.

Exercice 3

Si f et g sont deux fonctions de carré intégrable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$, alors on a

$$\left| \int_I f(x) \overline{g(x)} dx \right|^2 \leq \left(\int_I |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_I |g(x)|^2 dx \right).$$

Solution

Remarquons tout d'abord que si f et g sont de carré intégrable sur I alors $f\bar{g}$ l'est aussi car $|f\bar{g}| \leq |f|^2 + |g|^2$.

Cela étant, quel que soit $c \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_I |f(x) + cg(x)|^2 dx \\ &= \int_I \left(f(x) + cg(x) \right) \left(\overline{f(x) + cg(x)} \right) dx \\ &= \int_I f(x) \overline{f(x)} dx + \bar{c} \int_I f(x) \overline{g(x)} dx + c \int_I \overline{f(x)} g(x) dx + |c|^2 \int_I g(x) \overline{g(x)} dx \\ &= \int_I |f(x)|^2 dx + 2\Re \left(\bar{c} \int_I f(x) \overline{g(x)} dx \right) + |c|^2 \int_I |g(x)|^2 dx \\ &\leq \int_I |f(x)|^2 dx + 2 \left| \bar{c} \int_I f(x) \overline{g(x)} dx \right| + |c|^2 \int_I |g(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Si c est réel, on a dès lors

$$0 \leq \int_I |f(x)|^2 dx + 2c \left| \int_I f(x) \overline{g(x)} dx \right| + c^2 \int_I |g(x)|^2 dx.$$

Lorsque $\int_I |g(x)|^2 dx \neq 0$, il s'agit donc de l'expression d'un polynôme du second degré en c à coefficients réels qui garde toujours le même signe. Dès lors son discriminant est négatif, c'est-à-dire

$$4 \left| \int_I f(x) \overline{g(x)} dx \right|^2 - 4 \left(\int_I |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_I |g(x)|^2 dx \right) \leq 0,$$

ce qui donne bien sûr

$$\left| \int_I f(x) \overline{g(x)} dx \right|^2 \leq \left(\int_I |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_I |g(x)|^2 dx \right)$$

et on conclut.

Lorsque $\int_I |g(x)|^2 dx = 0$, on a $g = 0$, donc l'intégrale du membre de gauche est nulle également et on conclut aussi.

1. Cette inégalité est connue sous le nom d'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir l'annexe) et est due au fait que la loi $(f, g) \mapsto \int_I f(x) \overline{g(x)} dx$ est un produit scalaire dans l'espace des fonctions de carré intégrable sur I ; l'inégalité est en fait valable pour tout produit scalaire.

Exercice 4

Pour tout naturel n , on pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx.$$

Montrer que¹

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{x^{n-1}}{1-x}} dx,$$

$$W_{2n+1} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx,$$

$$W_{2n-2} = \int_0^{+\infty} (1+x^2)^{-n} dx.$$

Solution

Les premières égalités s'obtiennent par les changements de variable

$$g_1(t) = \frac{\pi}{2} - t :]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[,$$

$$g_2(t) = \arcsin(t) :]0, 1[\rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[,$$

$$g_3(y) = \sqrt{y} :]0, 1[\rightarrow]0, 1[.$$

De fait, comme

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$$

on a

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt, \\ &= \int_0^1 \frac{\sin^n(\arcsin(t))}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{aligned}$$

1. Les premières égalités établissent un lien entre l'intégrale de Wallis W_n et l'intégrale eulérienne $B(r, s) = \int_0^1 (1-x)^{r-1} x^{s-1} dx$ ($r, s > 0$) car elle s'écrit $W_n = (1/2)B(1/2, (n+1)/2)$.

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^1 \frac{y^{n/2}}{\sqrt{1-y}} \frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{\frac{y^{n-1}}{1-y}} dy.
 \end{aligned}$$

Les secondes égalités s'obtiennent par les changements de variable

$$g_1(t) = \arccos(t) :]0, 1[\rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[,$$

$$g_2(y) = \frac{y}{\sqrt{n}} :]0, \sqrt{n}[\rightarrow]0, 1[.$$

De fait, on a

$$\begin{aligned}
 W_{2n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x) dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - \cos^2(x)} \right)^{2n+1} dx \\
 &= \int_0^1 \left(\sqrt{1 - t^2} \right)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt \\
 &= \int_0^1 (1 - t^2)^n dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{y^2}{n} \right)^n dy.
 \end{aligned}$$

La troisième égalité s'obtient par le changement de variable

$$g_1(t) = \operatorname{arccot}(t) :]0, +\infty[\rightarrow]0, \frac{\pi}{2}[.$$

De fait, on a

$$\begin{aligned}
 W_{2n-2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2}(x) dx \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(1 + \cot^2(x))^{n-1}} dx \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^{n-1}} \frac{1}{1 + t^2} dt \\
 &= \int_0^{+\infty} (1 + t^2)^{-n} dt.
 \end{aligned}$$

Exercice 5

Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x) \ln(\tan(x)) \, dx.$$

Solution

La fonction $f : x \mapsto \cos(2x) \ln(\tan(x))$ est continue sur $]0, \pi/2[$. Notons qu'elle s'écrit aussi

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(2x) (\ln(\sin(x)) - \ln(\cos(x))) \\ &= \cos(2x) \ln(\sin(x)) - \cos(2x) \ln(\cos(x)), \quad x \in]0, \pi/2[. \end{aligned}$$

Vérifions l'intégrabilité de f en 0^+ . Comme la fonction $x \mapsto \cos(2x) \ln(\cos(x))$ est continue sur l'intervalle $[0, \pi/2[$, il suffit de vérifier l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto \cos(2x) \ln(\sin(x))$ qui, au voisinage de 0, est à valeurs négatives. On a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} |\ln(\sin(x))| &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(\sin(x)) \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(x))}{x^{-1/2}} = \ll \frac{\infty}{\infty} \gg \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) x \sqrt{x}}{\sin(x)} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} \cos(x) \right) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin(x)} \\ &= 2 \times 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

si on lève l'indétermination en utilisant le théorème de l'Hospital.

Ainsi on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} |\cos(2x) \ln(\sin(x))| \right) = 0,$$

donc l'intégrabilité de f en 0^+ .

Vérifions l'intégrabilité de f en $(\pi/2)^-$. Comme la fonction $x \mapsto \cos(2x) \ln(\sin(x))$ est continue sur l'intervalle $]0, \pi/2[$, il suffit de vérifier l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto \cos(2x) \ln(\cos(x))$. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sqrt{\frac{\pi}{2} - x} |\ln(\cos(x))| &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \sqrt{\frac{\pi}{2} - x} \left| \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right) \right| \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{y} |\ln(\sin(y))| = 0, \end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} - x} |\cos(2x) \ln(\cos(x))| \right) = 0.$$

Ainsi, f est aussi intégrable en $(\pi/2)^-$.

Cela étant, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\pi/2} \cos(2x) \ln(\tan(x)) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} D \sin(2x) \ln(\tan(x)) \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sin(2x) \ln(\tan(x))) - \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(2x) \ln(\tan(x))) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x)}{\tan(x) \cos^2(x)} \, dx \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{\sin(x) \cos(x)} \, dx \\
 &= -\frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

car on a

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(2x) \ln(\tan(x))) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin(2x) \ln(\sin(x)) - \sin(2x) \ln(\cos(x))) \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x) \sin(x) \ln(\sin(x))) - 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x) \sin(x) \ln(\cos(x))) \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos(x) \sin(x) \ln(\sin(x))) \\
 &= 2 \lim_{y \rightarrow 0^+} (y \ln(y)) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\sin(2x) \ln(\tan(x))) \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\cos(x) \sin(x) \ln(\sin(x))) - 2 \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\cos(x) \sin(x) \ln(\cos(x))) \\
 &= -2 \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\cos(x) \sin(x) \ln(\cos(x))) \\
 &= -2 \lim_{y \rightarrow 0^+} (\sin(y) \cos(y) \ln(\sin(y))) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

La valeur de l'intégrale est donc $-\pi/2$.

Exercice 6

Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)) \, dx = -\frac{\pi \ln(2)}{2}.$$

Solution

La fonction $x \mapsto \ln(\cos(x))$ est continue sur $[0, \pi/2[$, à valeurs négatives au voisinage de $\pi/2$ et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \left(\sqrt{\frac{\pi}{2} - x} |\ln(\cos(x))| \right) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} (\sqrt{y} |\ln(\sin(y))|) \\ &= - \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sin(y))}{y^{-1/2}} = \ll \frac{\infty}{\infty} \gg \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y \sqrt{y} \cos(y)}{\sin(y)} \\ &= 2 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\sin(y)} \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt{y} \cos(y) \\ &= 2 \times 1 \times 0 = 0, \end{aligned}$$

ce qui établit son intégrabilité en $(\pi/2)^-$.

Cela étant, posons

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(x)) \, dx.$$

Comme $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$, la fonction $g(t) = \pi/2 - t$, $t \in I =]0, \pi/2[$ établit un changement de variable entre I et $]0, \pi/2[$; on obtient

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) \, dt,$$

donc

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) \, dx - \frac{\pi}{2} \ln(2). \end{aligned}$$

Cela étant, comme $\sin(y) = \cos(\pi/2 - y)$, on a aussi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln(\sin(y)) \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(y)) \, dy + \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(y)) \, dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(y)) \, dy + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) \, dt \\ &= I. \end{aligned}$$

Dès lors

$$2I = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right) \, dx = I - \frac{\pi \ln(2)}{2},$$

donc

$$I = -\frac{\pi \ln(2)}{2}.$$

Exercice 7

Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = 0.$$

En déduire que pour tous $a, b > 0$ on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi \ln(ab)}{2b}.$$

Solution

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)/(1+x^2)$ est continue sur $]0, +\infty[$ et vérifie

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} |f(x)| \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} |\ln(x)|}{1+x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{x} \ln(x) \right) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{3/2} |f(x)| \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{x} \ln(x)}{1+x^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1/y)}{y \sqrt{y} (1 + (1/y^2))} \\ &= -\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{y} \ln(y)}{y^2 + 1} \\ &= -\lim_{y \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{y} \ln(y) \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Elle est donc intégrable sur l'intervalle considéré.

Cela étant, la fonction $g_1(t) = 1/t$, $t \in I =]0, +\infty[$ établit un changement de variable entre I et $]0, +\infty[$; on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1/t)}{1+(1/t^2)} \frac{1}{t^2} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2+1} dt,$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = 0.$$

Enfin, la fonction $g_2(t) = bt$, $t \in I =]0, +\infty[$ établit un changement de variable entre I et $]0, +\infty[$; on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ax)}{x^2 + b^2} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(abt)}{b^2 + b^2 t^2} b dt \\ &= \frac{1}{b} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(ab) + \ln(t)}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{\ln(ab)}{b} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt + \frac{1}{b} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{\ln(ab)}{b} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} dt \\ &= \frac{\pi \ln(ab)}{2b}. \end{aligned}$$

Exercice 8

Montrer que

$$\int_{3/2}^2 \ln(x) dx \leq \frac{\ln(2)}{2} \leq \int_1^2 \ln(x) dx$$

et que, quel que soit le naturel n plus grand ou égal à 3, on a

$$\int_{3/2}^n \ln(x) dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \frac{\ln(n)}{2} \leq \int_1^n \ln(x) dx.$$

En déduire une estimation des valeurs des éléments de la suite¹

$$S_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Solution

Les premières inégalités s'obtiennent de façon immédiate en utilisant la croissance et la concavité de la fonction logarithme :

$$\int_{3/2}^2 \ln(x) dx \leq \ln(2) \int_{3/2}^2 1 dx = \frac{\ln(2)}{2} = \ln(2) \int_1^2 (x-1) dx \leq \int_1^2 \ln(x) dx.$$

Considérons alors le cas $n \geq 3$. D'une part, puisque la fonction logarithme est concave, on a

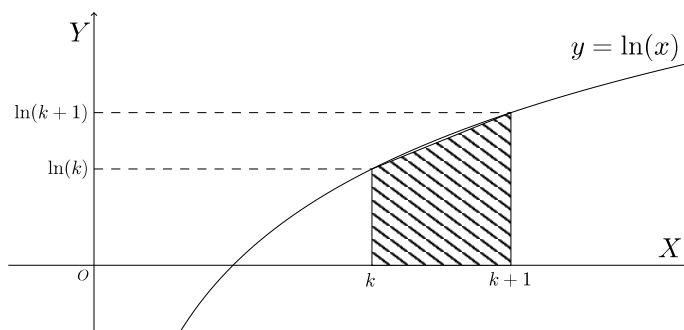
$$\ln(x) \geq \ln(k) + (x-k)(\ln(k+1) - \ln(k)), \quad \forall x \in [k, k+1],$$

1. On démontre en fait également par un procédé standard que cette suite converge vers une limite finie. Cependant, pour en déterminer la valeur, qui est $\sqrt{2\pi}$, on a recours à un outil supplémentaire, à savoir des propriétés des intégrales de Wallis. Ceci sera développé dans l'exercice 9 de la section 4 de ce chapitre.

donc

$$\int_k^{k+1} \ln(x) dx \geq \int_k^{k+1} \left(\ln(k) + (x-k) \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \right) dx = \frac{1}{2} (\ln(k) + \ln(k+1))$$

quel que soit le naturel strictement positif k (cette inégalité exprime en fait que, sur $[k, k+1]$, « l'aire de la surface sous le graphique de la fonction logarithme » est plus grande que celle du trapèze représenté dans le graphique suivant).



Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_1^n \ln(x) dx &= \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \ln(x) dx \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n (\ln(k-1) + \ln(k)) \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \frac{1}{2} \ln(n), \end{aligned}$$

ce qui démontre l'inégalité de droite.

D'autre part, la concavité du logarithme donne aussi

$$\ln(x) \leq \ln(k) + (x-k)(D \ln)(k) = \ln(k) + \frac{x}{k} - 1, \quad \forall x, k > 0$$

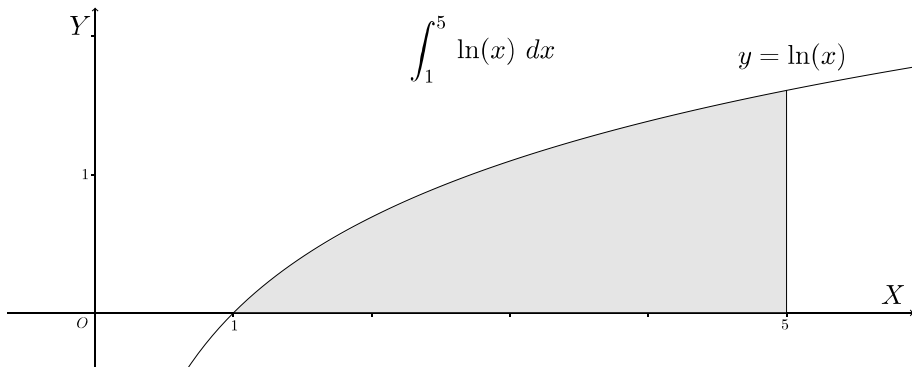
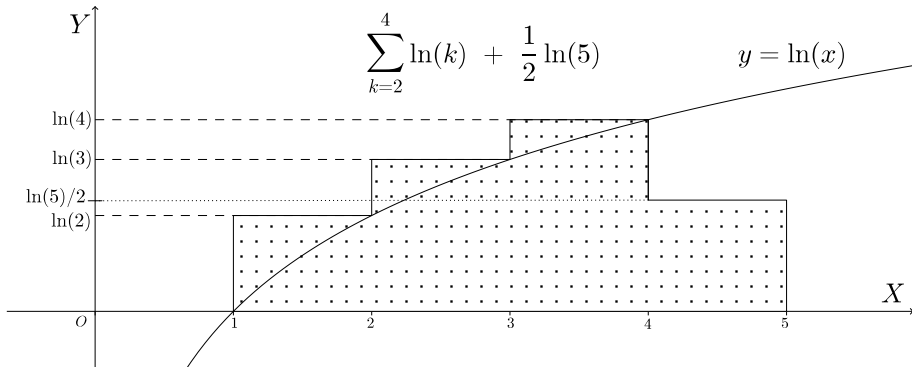
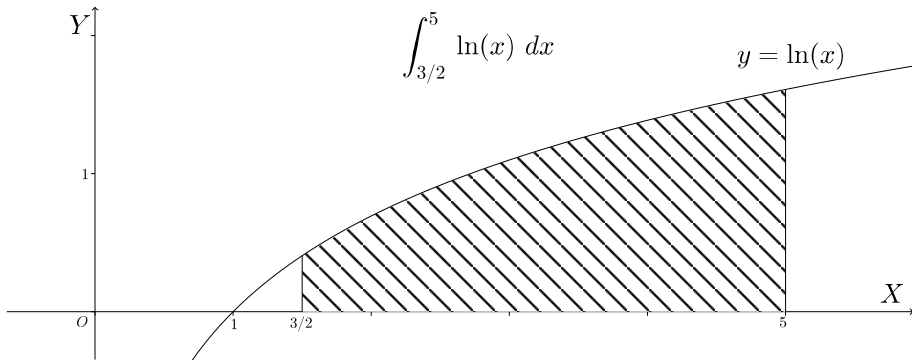
(cette inégalité exprime en fait que le graphique de la fonction logarithme est « toujours en dessous » de toutes les tangentes), donc

$$\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx \leq \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \left(\ln(k) + \frac{x}{k} - 1 \right) dx = \ln(k)$$

quel que soit $k > 0$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{3/2}^n \ln(x) dx &= \sum_{k=2}^{n-1} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln(x) dx + \int_{n-\frac{1}{2}}^n \ln(x) dx \\ &\leq \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \int_{n-\frac{1}{2}}^n \ln(x) dx \\ &\leq \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \frac{1}{2} \ln(n), \end{aligned}$$

la dernière majoration venant du fait que la fonction logarithme est croissante.



Cela étant, établissons des inégalités permettant d'encadrer les valeurs des éléments de la suite S_n ($n \in \mathbb{N}_0$).

D'une part on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n-1} \ln(k) + \frac{\ln(n)}{2} &= \ln((n-1)!) + \frac{\ln(n)}{2} \\ &= \ln(n!) - \frac{\ln(n)}{2} \\ &= \ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

D'autre part, par intégration par variation de primitive, on obtient

$$\int_{3/2}^n \ln(x) dx = n \ln(n) - n - \frac{3}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = \ln(n^n e^{-n} e^k)$$

avec

$$k = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

et

$$\int_1^n \ln(x) dx = n \ln(n) - n + 1 = \ln(en^n e^{-n}).$$

Dès lors, on a

$$\ln(n^n e^{-n} e^k) \leq \ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}}\right) \leq \ln(en^n e^{-n})$$

ou encore

$$e^k \leq \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} \leq e$$

quel que soit le naturel $n \geq 3$.¹

Exercice 9. Intégrales de Wallis²

1. Déterminer une relation de récurrence entre les intégrales de Wallis

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En déduire que l'on a

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

$$W_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

1. Des valeurs approximatives de e^k , $\sqrt{2\pi}$ et e sont respectivement 2,43 – 2,50 – 2,718.
2. Voir l'annexe.

et

$$W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

2. Montrer que les limites suivantes sont finies et en déterminer la valeur en utilisant les propriétés de la suite W_n ($n \in \mathbb{N}$).

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1 \quad (b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2 - 1} = \frac{\pi}{2} \quad (d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi}$$

Remarque. La limite (d) est appelée formule de Stirling¹ et permet de lever bien des indéterminations de limites lorsque le théorème de l'Hospital est inopérant. En fait, elle est vraiment importante car elle donne le comportement asymptotique de $n!$ en utilisant des puissances.

Les intégrales de Wallis ont été introduites notamment pour obtenir une façon d'approcher π par des produits de nombres rationnels (cf (c)).

Solution

1. Remarquons que les intégrales de Wallis W_n existent car il s'agit d'intégrales de fonctions continues sur un intervalle fermé borné. On a

$$W_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \, dx = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx = 1$$

et, pour tout naturel strictement positif n ,

$$\begin{aligned} W_{n+1} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}(x) \, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) \sin(x) \, dx \\ &= - \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) D \cos(x) \, dx \\ &= n \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x) \cos^2(x) \, dx \\ &= n \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1}(x) (1 - \sin^2(x)) \, dx \\ &= nW_{n-1} - nW_{n+1}, \end{aligned}$$

donc

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}.$$

Cette relation et les valeurs $W_0 = \pi/2$ et $W_1 = 1$ permettent donc de trouver W_n à partir des W_j d'indices inférieurs à n .

1. Voir l'annexe.

Cela étant, à partir de la relation de récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} W_{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2(n-1)} W_{2(n-2)} = \dots \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} W_0 = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k}, \end{aligned}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned} W_{2n} &= \frac{\pi}{2} \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{\prod_{k=1}^n (2k)} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1) \prod_{k=1}^n (2k)}{\left(\prod_{k=1}^n (2k) \right)^2} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}. \end{aligned}$$

De même, on a

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \times \frac{2n-2}{2n-1} W_{2n-3} = \dots \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} W_1 = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}, \end{aligned}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k+1)} \\ &= \frac{\left(\prod_{k=1}^n (2k) \right)^2}{\prod_{k=1}^n (2k+1) \prod_{k=1}^n (2k)} \\ &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Passons à la dernière égalité à démontrer. Pour tout naturel strictement positif n , on a

$$\begin{aligned}
 W_n W_{n-1} &= \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} W_{n-2} W_{n-3} \\
 &= \frac{n-2}{n} W_{n-2} W_{n-3} \\
 &= \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-2} \times \frac{n-4}{n-3} W_{n-4} W_{n-5} \\
 &= \frac{n-4}{n} W_{n-4} W_{n-5} \\
 &= \dots \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{n} W_0 W_1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{2}{n} W_1 W_2 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \\ \frac{2}{n} W_1 \frac{1}{2} W_0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \\
 &= \frac{\pi}{2n}.
 \end{aligned}$$

2. (a) Puisque la suite W_n ($n \in \mathbb{N}$) est décroissante ($\sin^{n+1}(x) \leq \sin^n(x)$) et à éléments positifs, on a

$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donc aussi, vu la relation de récurrence,

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dès lors, le théorème de l'étau donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1.$$

- (b) D'après le point (1) précédent, on a $W_n W_{n-1} = \pi/2n$. Dès lors, quel que soit n , on a

$$nW_n^2 = n W_n W_{n-1} \frac{W_n}{W_{n-1}} = \frac{\pi}{2} \frac{W_n}{W_{n-1}},$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{W_{n-1}}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

- (c) D'après la formule de récurrence, on obtient

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \quad \text{et} \quad W_{2n+1} = \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$$

quel que soit le naturel strictement positif n ; il s'ensuit que

$$\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1} \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} = \frac{2}{\pi} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \frac{4k^2}{4k^2-1} = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} = \frac{\pi}{2}.$$

(d) Pour tout naturel strictement positif n , posons

$$S_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}.$$

Cherchons une relation entre cette expression et celle des W_n . On a

$$S_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n} n^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}} \quad \text{et} \quad (S_n)^2 = \frac{(n!)^2}{n^{2n} e^{-2n} n},$$

donc

$$\frac{S_{2n}}{(S_n)^2} = \frac{(2n)! \sqrt{n}}{(n!)^2 2^{2n} \sqrt{2}} = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{2}{\pi} W_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{\pi} W_{2n}.$$

Ainsi on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{2n}}{(S_n)^2} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

puisque, d'après (b), $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\pi/2}$. Si on montre que la suite S_n ($n \in \mathbb{N}$) converge vers une limite finie r , on aura alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_{2n}}{(S_n)^2} = \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r},$$

donc

$$r = \sqrt{2\pi}$$

ce qui permet de conclure.

Montrons donc que la suite S_n ($n \in \mathbb{N}_0$) converge vers une limite finie. Cette suite étant minorée (par 0), sa convergence est assurée si on montre qu'elle est décroissante. Cela est fait dans ce qui suit.

Pour tout naturel strictement positif n , on a successivement

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} \geq S_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1} e^{-n-1} \sqrt{n+1}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{n^n \sqrt{n}} \geq \frac{1}{(n+1)^n e^{-1} \sqrt{n+1}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{(n+1)^n \sqrt{n+1}}{n^n \sqrt{n}} \geq e \\
 &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \geq e \\
 &\Leftrightarrow \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geq 1.
 \end{aligned}$$

Dès lors, si on montre que la fonction

$$f : n \mapsto \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

est décroissante sur $[2, +\infty[$, on pourra conclure car alors

$$\begin{aligned}
 f(n) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &\geq \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\left(t + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right) \\
 &\geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right) \\
 &\geq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \\
 &\geq 1
 \end{aligned}$$

quel que soit $n \geq 2$ et la suite étudiée est donc décroissante.

Montrons donc la décroissance de f . Cette fonction f est continûment dérivable sur $] -1, +\infty[$ et on y a

$$\begin{aligned}
 Df(n) &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{n + \frac{1}{2}}{n^2(1 + \frac{1}{n})} = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{n + \frac{1}{2}}{n(1+n)} \\
 &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}.
 \end{aligned}$$

Comme on a aussi¹

$$\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \forall x \geq 0,$$

1. Cela peut se prouver en montrant que la fonction $x \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x)$ est croissante sur $[0, +\infty[$ ou encore en utilisant le développement limité de Taylor : quel que soit $x > -1$ il existe u compris entre x et 0 tel que

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4(u+1)^4}.$$

on obtient

$$\begin{aligned}
 Df(n) &\leq \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \\
 &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{2(n+1)} \\
 &= \frac{3n^2(n+1) - 3n(n+1) + 2(n+1) - 3n^3}{6n^3(n+1)} \\
 &= \frac{3n^3 + 3n^2 - 3n^2 - 3n + 2n + 2 - 3n^3}{6n^3(n+1)} \\
 &= \frac{2-n}{6n^3(n+1)} \leq 0, \quad \forall n \geq 2.
 \end{aligned}$$

La fonction f est donc bien décroissante sur $[2, +\infty[$ et on peut conclure.

Exercice 10

Montrer que, pour tout réel strictement positif n et tout $x \in]-n, n[$, on a

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

En déduire que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx, \quad \forall n > 0$$

et

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Suggestion : utiliser les propriétés des intégrales de Wallis.

Solution

Démontrons que les inégalités données au départ sont correctes. Remarquons tout de suite que comme on a

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n} = e^{-n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right)}$$

et que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont croissantes et inverses l'une de l'autre, les inégalités sont vérifiées si et seulement si

$$n \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) \leq x \leq -n \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right), \quad \forall |x| < n$$

ou encore

$$\ln(1+y) \leq y \leq -\ln(1-y), \quad \forall |y| < 1. \quad (*)$$

Considérons alors la fonction

$$f : y \mapsto y - \ln(1 + y);$$

elle est indéfiniment continûment dérivable sur $] -1, +\infty[$ et sa dérivée première est

$$Df(y) = 1 - \frac{1}{1+y} = \frac{y}{1+y}, \quad y > -1.$$

Vu l'étude du signe de cette dérivée, la fonction admet un minimum absolu en 0 et dès lors

$$f(y) = y - \ln(1 + y) \geq f(0) = 0, \quad \forall y > -1.$$

La première inégalité de (*) est donc obtenue. La seconde en découle puisque si $|y| < 1$, alors $|-y| < 1$, donc

$$\ln(1 - y) \leq -y,$$

ou encore

$$y \leq -\ln(1 - y).$$

En exprimant les inégalités pour $x = -t^2$ ($t \in [0, \sqrt{n}]$), on obtient

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt.$$

Cela étant, d'après l'exercice 4 de cette section 4, on a

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} W_{2n+1}$$

et

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt \leq \sqrt{n} \int_0^{+\infty} (1 + x^2)^{-n} dx = \sqrt{n} W_{2n-2},$$

donc

$$\begin{aligned} \sqrt{n} W_{2n+1} &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \\ &\leq \sqrt{n} \int_0^{+\infty} (1 + x^2)^{-n} dx = \sqrt{n} W_{2n-2}. \end{aligned}$$

Comme on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{n}{2n+1}} \sqrt{2n+1} W_{2n+1} \right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} W_{2n-2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{n}{2n-2}} \sqrt{2n-2} W_{2n-2} \right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Ainsi, puisque $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 11

Soit une fonction f deux fois continûment dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout réel x de cet intervalle et tout réel h tel que $x + h \in I$, on a

$$f(x+h) = f(x) + hDf(x) + h^2 \int_0^1 (1-t) (D^2 f)(x+th) dt$$

et

$$f(x) \geq (\text{resp. } \leq) f(x_0) + (x - x_0)Df(x_0)$$

quels que soient $x, x_0 \in I$ lorsque la dérivée seconde est à valeurs positives (resp. à valeurs négatives) sur I .

Solution

Notons tout d'abord qu'étant donné $x \in I$ et tout réel h tel que $x + h \in I$, la fonction $t \mapsto (1-t)(D^2 f)(x+th)$ est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$ et y est donc intégrable.

Cela étant, l'égalité s'obtient directement par deux intégrations par parties. On a en effet, avec $F(t) = (Df)(x+th)$ et $G(t) = f(x+th)$,

$$\begin{aligned} h^2 \int_0^1 (1-t) (D^2 f)(x+th) dt &= h \int_0^1 (1-t) (DF)(t) dt \\ &= -h(Df)(x) + h \int_0^1 F(t) dt \\ &= -h(Df)(x) + \int_0^1 (DG)(t) dt \\ &= -hDf(x) + G(1) - G(0) \\ &= -hDf(x) + f(x+h) - f(x), \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Les inégalités s'ensuivent immédiatement puisque le terme contenant l'intégrale est de signe constant sous l'hypothèse supplémentaire du signe de la dérivée seconde.

Exercice 12

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs positives. Montrer que, quel que soit le naturel $n > 1$, on a

$$\left(\int_0^1 f(t) dt \right)^n \leq \int_0^1 f^n(t) dt$$

et

$$\left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^{n+1} \leq \left(\int_0^1 f^{n+1}(t) dt \right)^n$$

avec la convention $0^n = 1$.

Solution

Si f est la fonction nulle, les inégalités sont bien sûr exactes.

Supposons donc que la fonction f ne soit pas identiquement nulle. Dans un premier temps, supposons que

$$\int_0^1 f^n(t) dt = 1.$$

D'après l'exercice 9 de la sous-section 5.3 du chapitre 3, on sait que

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

quels que soient les réels positifs x, y et les réels strictement positifs p, q vérifiant $(1/p) + (1/q) = 1$. Il s'ensuit que

$$f(t) = f(t) \times 1 \leq \frac{f^n(t)}{n} + 1 - \frac{1}{n}, \quad \forall t \in [0, 1],$$

donc

$$\int_0^1 f(t) dt \leq \frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n} = 1.$$

Dans un second temps, supposons que $\int_0^1 f^n(t) dt \neq 1$. On définit alors la fonction g par

$$g(t) = \frac{f(t)}{\left(\int_0^1 f^n(s) ds \right)^{1/n}}, \quad t \in [0, 1].$$

Comme on a

$$\int_0^1 g^n(t) dt = 1,$$

ce qui vient d'être fait donne

$$\int_0^1 g(t) dt \leq 1,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^1 f(t) dt \leq \left(\int_0^1 f^n(s) ds \right)^{1/n}$$

et la première inégalité est donc démontrée.

La seconde s'en déduit. De fait, étant donné $n > 1$, en posant

$$p = \frac{n+1}{n}$$

et en utilisant la première inégalité (avec f^n et p), on obtient

$$\left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^p \leq \int_0^1 f^{np}(t) dt \Leftrightarrow \left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^{\frac{n+1}{n}} \leq \left(\int_0^1 f^{n+1}(t) dt \right)^{\frac{n}{n+1}}$$

ou encore

$$\left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^{n+1} \leq \left(\int_0^1 f^{n+1}(t) dt \right)^n$$

et on obtient ainsi la seconde inégalité annoncée.

Exercice 13

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$, à valeurs positives et non identiquement nulle. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^1 f^{n+1}(t) dt}{\int_0^1 f^n(t) dt} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^{1/n} = \sup_{t \in [0,1]} f(t).$$

Solution

Posons

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} f(t);$$

il s'agit d'un réel non nul car la fonction est continue sur $[0, 1]$ et non identiquement nulle.

Notons ensuite que les deux limites existent et sont finies car les suites qui interviennent sont croissantes et majorées. De fait, on a d'une part $0 \leq f(t) \leq \|f\|_\infty$ pour tout $t \in [0, 1]$, donc

$$\left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^{1/n} \leq \|f\|_\infty \quad \text{et} \quad \int_0^1 f^{n+1}(t) dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 f^n(t) dt$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$. D'autre part, la croissance de la suite

$$\left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^{1/n} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

est assurée par la seconde inégalité de l'exercice 12 de la section 4 de ce chapitre ; celle de l'autre suite, à savoir

$$\frac{\int_0^1 f^{n+1}(t) dt}{\int_0^1 f^n(t) dt} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

résulte d'une application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir l'exercice 3 de la section 4 de ce chapitre). De fait, on a

$$\left(\int_0^1 f^{n+1}(t) dt \right)^2 = \left(\int_0^1 f^{(n/2)+1}(t) f^{n/2}(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 f^{n+2}(t) dt \int_0^1 f^n(t) dt.$$

Par conséquent, on obtient

$$\frac{\int_0^1 f^{n+1}(t) dt}{\int_0^1 f^n(t) dt} \leq \frac{\int_0^1 f^{n+2}(t) dt}{\int_0^1 f^{n+1}(t) dt}$$

ce qui permet de conclure.

Cela étant, dans un premier temps, supposons que

$$\sup_{t \in [0,1]} f(t) = 1.$$

D'après l'exercice 12 de la section 4 de ce chapitre, quel que soit le naturel $n > 1$, on a

$$\left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^{1/n} \leq \frac{\int_0^1 f^{n+1}(t) dt}{\int_0^1 f^n(t) dt} \leq 1.$$

Montrons que

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^{1/n}$$

et on pourra alors conclure dans ce cas.

Quel que soit $\varepsilon \in]0, 1[$, l'ensemble $\{t \in [0, 1] : f(t) \geq \varepsilon\}$ contient un intervalle I_ε non réduit à un point car la fonction est continue sur $[0, 1]$ et prend la valeur 1 en

au moins un point (vu le théorème des bornes atteintes) ; soit r_ε la longueur d'un tel intervalle. Comme on a

$$\varepsilon r_\varepsilon^{1/n} \leq \left(\int_{I_\varepsilon} f^n(t) dt \right)^{1/n} \leq \left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^{1/n},$$

en passant aux limites, on obtient

$$\varepsilon \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^{1/n}.$$

Comme cette inégalité est valable quel que soit $\varepsilon \in]0, 1[$, on obtient

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 f^n(t) dt \right)^{1/n}$$

et on conclut dans ce cas.

Pour obtenir le cas général, il suffit de considérer la fonction

$$g(t) = \frac{f(t)}{\sup_{x \in [0,1]} f(x)}, \quad t \in [0, 1]$$

et de lui appliquer le résultat obtenu pour les fonctions dont la borne supérieure sur l'intervalle est égale à 1.

Exercice 14. Intégrale de Dirichlet

1. On considère la fonction « sinus cardinal » définie par

$$x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}.$$

Montrer que cette fonction n'est pas intégrable en $+\infty$ mais que la limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx$$

existe et est finie¹. Elle est notée

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

2. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

3. Montrer que, quel que soit le réel strictement positif r , on a

$$\left| \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_r^t \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq \frac{2}{r}.$$

1. La limite porte le nom d'intégrale de Dirichlet (voir l'annexe) et ces fonction et limite apparaissent notamment dans des problèmes de physique ondulatoire.

Solution

1. La fonction donnée est continue sur $]0, +\infty[$ et admet une limite finie en 0 (à savoir 1). Elle est donc intégrable sur tout intervalle $]0, t]$ pour $t > 0$.

Cela étant, pour $t > 1$, on a

$$\int_1^t \frac{\sin(x)}{x} dx = - \int_1^t \frac{D \cos(x)}{x} dx = -\frac{\cos(t)}{t} + \cos(1) - \int_1^t \frac{\cos(x)}{x^2} dx.$$

Comme la fonction

$$x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$ (elle y est continue et majorée par la fonction $x \mapsto 1/x^2$) et comme

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\cos(t)}{t} = 0,$$

on conclut que la limite étudiée existe et est finie.

Pour montrer que la fonction $x \mapsto \sin(x)/x$ n'est pas intégrable en $+\infty$, on peut par exemple procéder comme suit. Quel que soit le réel strictement positif x , on a

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \geq \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x} = \left| \frac{1 - \cos(2x)}{2x} \right|.$$

Ainsi, si on montre que la fonction

$$x \mapsto \frac{1 - \cos(2x)}{2x}$$

n'est pas intégrable en $+\infty$, on pourra conclure.

On a

$$\begin{aligned} \int_1^t \frac{1 - \cos(2x)}{x} dx &= \ln(t) - \int_1^t \frac{D \sin(2x)}{2x} dx \\ &= \ln(t) - \frac{\sin(2t)}{2t} + \frac{\sin(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_1^t \frac{\sin(2x)}{x^2} dx. \end{aligned}$$

Comme la fonction

$$x \mapsto \frac{\sin(2x)}{x^2}$$

est intégrable sur $[1, +\infty[$, la limite du dernier terme est finie quand t tend vers l'infini. Dès lors, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{1 - \cos(2x)}{x} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\ln(t) - \frac{\sin(2t)}{2t} + \frac{\sin(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_1^t \frac{\sin(2x)}{x^2} dx \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(t) + \frac{\sin(2)}{2} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{x^2} dx \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto (1 - \cos(2x))/(2x)$ n'est donc pas intégrable en $+\infty$ et ainsi $x \mapsto \sin(x)/x$ ne l'est pas non plus.

2. La fonction $x \mapsto \sin^2(x)/x^2$ est continue sur $]0, +\infty[$ et admet une limite finie en 0 ; elle est intégrable en $+\infty$ car son module est majoré par la fonction $x \mapsto 1/x^2$. Cela étant, pour tout $t > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx &= - \int_0^t \sin^2(x) D \frac{1}{x} dx \\ &= - \frac{\sin^2(t)}{t} + \int_0^t \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{x} dx \\ &= - \frac{\sin^2(t)}{t} + \int_0^t \frac{\sin(2x)}{x} dx \\ &= - \frac{\sin^2(t)}{t} + \int_0^{2t} \frac{\sin(x)}{x} dx, \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{\sin(x)}{x} dx.$$

3. Quels que soient les réels t, r tels que $t > r > 0$, on a

$$\begin{aligned} \int_r^t \frac{\sin(x)}{x} dx &= - \int_r^t \frac{D \cos(x)}{x} dx \\ &= - \frac{\cos(t)}{t} + \frac{\cos(r)}{r} - \int_r^t \frac{\cos(x)}{x^2} dx, \end{aligned}$$

donc

$$\left| \int_r^t \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq \frac{1}{t} + \frac{1}{r} + \int_r^t \frac{1}{x^2} dx = \frac{2}{r},$$

d'où la conclusion en passant à la limite sur t .

Exercice 15. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

1. Soit f une fonction continûment dérivable sur un intervalle ouvert contenant $[0, \pi/2]$. Montrer que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin(nx) f(x) dx = 0.$$

2. Rappelons que l'on a (voir l'exercice 10 de la section 2 de ce chapitre)

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx = \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

À partir de ces égalités, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

En déduire la valeur de l'intégrale de Dirichlet, à savoir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Solution

1. Quel que soit le réel non nul n , une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi/2} \sin(nx) f(x) dx \\ &= -\frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} D \cos(nx) f(x) dx \\ &= -\frac{\cos(n\pi/2)}{n} f\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{f(0)}{n} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi/2} \cos(nx) Df(x) dx, \end{aligned}$$

donc

$$0 \leq \left| \int_0^{\pi/2} \sin(nx) f(x) dx \right| \leq \frac{2}{n} \sup_{x \in [0, \pi/2]} |f(x)| + \frac{\pi}{2n} \sup_{x \in [0, \pi/2]} |Df(x)|.$$

Le théorème de l'étau permet de conclure.

2. Considérons tout d'abord la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}.$$

Cette fonction est définie et continûment dérivable sur $] -\pi, 0[\cup]0, \pi[$. Montrons qu'elle se prolonge en une fonction continûment dérivable sur $] -\pi, \pi[$. Tout d'abord, comme on a

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

(voir l'exercice 7 de la sous section 5.1 du chapitre 3), elle se prolonge en une fonction continue sur $] -\pi, \pi[$. Ensuite on obtient que la fonction prolongée est dérivable en 0 car

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin(x)} - \frac{1}{x^2} \right) = \frac{1}{6}$$

(voir l'exercice 7 de la sous section 5.1 du chapitre 3). Enfin, la dérivée est continue sur $] -\pi, \pi[$ car on a explicitement

$$Df(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } x = 0 \\ -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} + \frac{1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \right) = \frac{1}{6}$$

(voir l'exercice 7 de la sous section 5.1 du chapitre 3).

Cela étant, puisque la limite qui définit l'intégrale de Dirichlet existe, on applique le résultat obtenu dans la première partie de cet exercice avec f et en considérant n naturel (pour utiliser le rappel) ; on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)x) \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} dx - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)x)}{x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} du \\ &= \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \end{aligned}$$

et on peut donc conclure.

Exercice 16. Intégrales de Fresnel¹

Selon la théorie de Fresnel, la modélisation du phénomène de diffraction conduit à étudier des intégrales du type (ici simplifié)

$$\int_0^n e^{-ix^2} dx, \quad n > 0$$

ou plutôt à évaluer leur comportement lorsque n tend vers l'infini. En fait, ce type d'intégrale représente l'amplitude des ondes perçues en un point après diffraction.

En considérant les parties réelle et imaginaire, on est amené à étudier les limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \cos(x^2) dx \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \sin(x^2) dx.$$

1. Montrer que ces limites existent et sont finies mais que les fonctions $x \mapsto \cos(x^2)$ et $x \mapsto \sin(x^2)$ ne sont pas intégrables en $+\infty$.
2. Relier les limites précédentes et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{x}} dx,$$

λ étant un réel non nul.

1. Voir l'annexe.

3. En utilisant le fait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \cos(x^2) dx - i \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \sin(x^2) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + i} dx,$$

montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \cos(x^2) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \sin(x^2) dx$$

et déterminer la valeur de ces limites.

Solution

Remarquons tout d'abord que comme les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$, elles sont intégrables sur tout intervalle du type $[0, n]$, où n est un réel strictement positif.

1. Cela étant, quel que soit $n > 1$, on a

$$\int_1^n \cos(x^2) dx = \int_1^n \frac{D \sin(x^2)}{2x} dx = \frac{\sin(n^2)}{2n} - \frac{\sin(1)}{2} + \int_1^n \frac{\sin(x^2)}{2x^2} dx.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n^2)/2n = 0$ et comme la fonction $x \mapsto \sin(x^2)/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (elle y est continue et de module majoré par la fonction $x \mapsto 1/x^2$), la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \cos(x^2) dx$$

existe et est finie. On procède de même pour la seconde : on a

$$\int_1^n \sin(x^2) dx = - \int_1^n \frac{D \cos(x^2)}{2x} dx = - \frac{\cos(n^2)}{2n} + \frac{\cos(1)}{2} - \int_1^n \frac{\cos(x^2)}{2x^2} dx.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n^2)/2n = 0$ et comme la fonction $x \mapsto \cos(x^2)/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ (elle y est continue et de module majoré par la fonction $x \mapsto 1/x^2$), la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \sin(x^2) dx$$

existe et est finie.

Montrons à présent que les fonctions $x \mapsto \cos(x^2)$ et $x \mapsto \sin(x^2)$ ne sont pas intégrables en $+\infty$. On a

$$0 \leq \frac{1 + \cos(2x^2)}{2} = \cos^2(x^2) \leq |\cos(x^2)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

et

$$0 \leq \frac{1 - \cos(2x^2)}{2} = \sin^2(x^2) \leq |\sin(x^2)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Vu ce qui vient d'être fait, la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \cos(2x^2) dx$$

existe et est finie ; il s'ensuit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1 + \cos(2x^2)}{2} dx = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{1 - \cos(2x^2)}{2} dx = +\infty,$$

donc que les fonctions étudiées ici ne sont pas intégrables en $+\infty$.

2. Comme la fonction cosinus est paire, on a $\cos(\lambda x) = \cos(|\lambda|x)$ quel que soit le réel x ; on considère alors d'abord $\lambda > 0$.

Cela étant, la fonction $x \mapsto \cos(\lambda x)/\sqrt{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et y est de module majoré par la fonction $x \mapsto 1/\sqrt{x}$. Il s'ensuit qu'elle est intégrable sur tout intervalle du type $]0, n]$, où n est un réel strictement positif. La fonction $g(t) = t^2/\lambda$, $t \in I =]0, \sqrt{\lambda n}[$ établit un changement de variable entre I et $]0, n[$; on a

$$\int_0^n \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{x}} dx = \int_0^{\sqrt{\lambda n}} \frac{\cos(t^2)}{t/\sqrt{\lambda}} \frac{2t}{\lambda} dt = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\sqrt{\lambda n}} \cos(t^2) dt.$$

Il s'ensuit que, quel que soit le réel λ non nul, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \frac{\cos(\lambda x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{|\lambda|}} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \cos(x^2) dx.$$

3. La fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + i}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\left| \frac{1}{x^2 + i} \right| = \frac{1}{\sqrt{x^4 + 1}} \leq \frac{1}{x^2}, \quad \forall x \neq 0 ;$$

l'intégrabilité de f sur $\mathbb{R}$ s'ensuit.

Cela étant, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + i} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2 - i}{x^4 + 1} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx - i \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx. \end{aligned}$$

En définissant I et J par

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4 + 1} dx,$$

on a donc

$$I = \sqrt{\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \cos(x^2) dx \quad \text{et} \quad J = \sqrt{\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \sin(x^2) dx.$$

De plus, la fonction $g(t) = 1/t$, $t \in]0, +\infty[$ établit un changement de variable entre $]0, +\infty[$ et $]0, +\infty[$; on obtient

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} \frac{1}{((1/t^4) + 1)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt = I,$$

donc les deux limites sont égales.

Cela étant, pour obtenir la valeur de I et J , on utilise alors la technique classique de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. On a

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)$$

et

$$\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} = 2 \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1}.$$

Dès lors, on a

$$\begin{aligned} 2(I + J) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1} + \frac{2}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} \right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\sqrt{2}x - 1) + \frac{\pi}{4} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(\sqrt{2}x + 1) - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$I = J = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

et par suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \cos(x^2) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 17. Paradoxe de la trompette de Gabriel



Une « trompette de Gabriel¹ » (ou solide hyperbolique aigu) est un ensemble de l'espace construit par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe plane d'équation cartésienne

$$y = \frac{1}{(x+1)^\alpha}, \quad x > 0$$

où α est une constante strictement positive.

Si les fonctions qui figurent dans les intégrales suivantes sont intégrables, le volume de cet ensemble est égal à

$$V_\alpha = \pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^{2\alpha}} dx$$

et l'aire de la surface latérale est égale à

$$A_\alpha = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2}{(x+1)^{2\alpha+2}} + 1} dx.$$

1. Les représentations page suivante ont été trouvées sur Internet (<https://philosophicalmath.wordpress.com/2017/07/02/gabriels-horn/> et <https://www.pinterest.fr/pin/416442296785167935/>).

1. Déterminer toutes les valeurs de $\alpha > 0$ pour lesquelles la trompette possède une aire latérale finie.
2. Il existe des valeurs de $\alpha > 0$ pour lesquelles la trompette possède un volume fini mais une aire latérale infinie. On arrive ainsi au paradoxe selon lequel il est possible de remplir l'intérieur de la trompette avec un volume de peinture fini, mais qu'il est impossible d'en peindre la surface latérale avec une quantité finie de peinture ! Déterminer toutes les valeurs de α qui conduisent à ce paradoxe.



Solution

1. L'aire latérale A_α est finie si et seulement si la fonction

$$f_\alpha : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2}{(x+1)^{2\alpha+2}} + 1}$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$. Comme cette fonction est continue sur $[0, +\infty[$, seule l'intégrabilité en $+\infty$ doit être examinée. Si on utilise le « critère pratique », la fonction est intégrable en $+\infty$ s'il existe $\theta > 1$ tel que la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\theta |f_\alpha(x)|) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\theta f_\alpha(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^\theta}{(x+1)^\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2}{(x+1)^{2\alpha+2}} + 1} \right)$$

existe et soit finie.

Cela étant, comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{\alpha^2}{(x+1)^{2\alpha+2}} + 1} \right) = 1$$

et comme la limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\theta}{(x+1)^\alpha}$$

existe, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\theta f_\alpha(x)) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^\theta}{(x+1)^\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2}{(x+1)^{2\alpha+2}} + 1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\theta}{(x+1)^\alpha} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\alpha^2}{(x+1)^{2\alpha+2}} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\theta}{(x+1)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-\theta}}. \end{aligned}$$

Cette limite est finie si et seulement si $\alpha - \theta \geq 0$. Il s'ensuit qu'il existe $\theta > 1$ tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^\theta f_\alpha(x))$ existe et est fini si et seulement si $\alpha > 1$.

Il reste donc à étudier le cas $0 < \alpha \leq 1$. Comme on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1, \end{cases}$$

on obtient directement que f_α n'est pas intégrable en $+\infty$ lorsque $\alpha \leq 1$.

Par conséquent, l'aire A_α est finie si et seulement si $\alpha > 1$.

2. La fonction

$$g_\alpha : x \mapsto \frac{1}{(x+1)^{2\alpha}}$$

est continue sur $[0, +\infty[$ quel que soit α et intégrable en $+\infty$ si et seulement si $2\alpha > 1$.

Ainsi, le volume V_α est fini si et seulement si $\alpha > 1/2$.

D'après le point 1, le paradoxe se produit donc lorsque

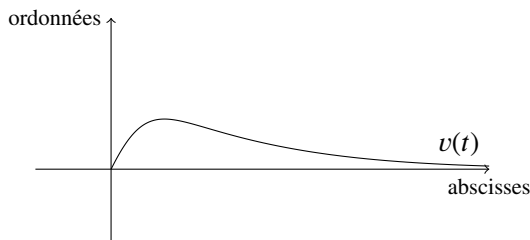
$$\alpha \in]0, 1] \cap]1/2, +\infty[= \left] \frac{1}{2}, 1 \right].$$

Exercice 18. Profondeur de pénétration dans un milieu résistif

On considère une particule initialement déposée sans vitesse initiale à la surface d'un milieu résistif et qui pénètre dans celui-ci sous l'action de la pesanteur. La loi de variation de la vitesse en fonction du temps t est donnée par

$$v(t) = te^{-t} + \frac{t}{(t^2 + 1)^2}, \quad t \geq 0$$

et est esquissée sur la figure suivante.



1. Calculer la profondeur de pénétration

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

de la particule en fonction du temps t .

2. Montrer que la profondeur de pénétration de la particule dans le milieu résistif reste finie lors d'un passage à la limite en $+\infty$. Que vaut la profondeur maximale de pénétration ?

Solution

1. La fonction v est continue sur $[0, +\infty[$; elle est donc intégrable sur tout intervalle fermé borné inclus dans $[0, +\infty[$. La profondeur de pénétration x est donc bien définie sur $[0, +\infty[$.

Cela étant, puisque chaque terme est intégrable sur le borné fermé $[0, t]$, l'intégrale de la somme est égale à la somme des intégrales et on a successivement

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^t \left(\tau e^{-\tau} + \frac{\tau}{(\tau^2 + 1)^2} \right) d\tau \\
 &= \int_0^t \tau e^{-\tau} d\tau + \int_0^t \frac{\tau}{(\tau^2 + 1)^2} d\tau \\
 &= [-\tau e^{-\tau}]_0^t + \int_0^t e^{-\tau} d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{D(\tau^2 + 1)}{(\tau^2 + 1)^2} d\tau \\
 &= -t e^{-t} - [e^{-\tau}]_0^t - \frac{1}{2} \int_0^t D \left(\frac{1}{\tau^2 + 1} \right) d\tau \\
 &= -(t + 1)e^{-t} + 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\tau^2 + 1} \right]_0^t \\
 &= -(t + 1)e^{-t} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2(t^2 + 1)}
 \end{aligned}$$

quel que soit $t \geq 0$.

2. D'une part on doit vérifier que la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ est finie, ce qui est le cas puisque

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-(t+1)e^{-t} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2(t^2+1)} \right) = \frac{3}{2}.$$

D'autre part, comme $Dx(t) = v(t) \geq 0$ pour tout $t \geq 0$, la fonction x est croissante et la borne supérieure de ses valeurs est donc

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \frac{3}{2}$$

(maximum non atteint).

Exercice 19

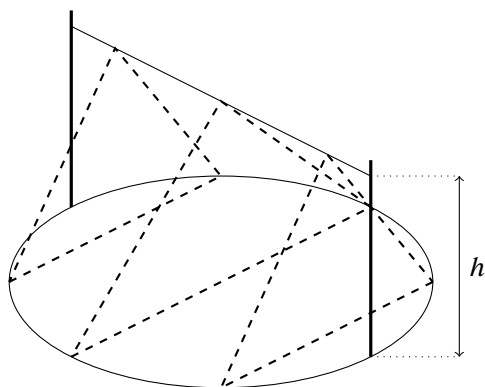
Soit S un solide compris entre les plans d'équations cartésiennes $x = a$ et $x = b$ dans un repère orthonormé.

Si A est une fonction continue sur $]a, b[$ qui, à chaque $x \in]a, b[$, associe l'aire de la coupe transversale de S par un plan orthogonal à l'axe des abscisses en x , alors le volume de S est donné par

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

Un chapiteau dont l'emprise au sol est un disque de rayon R est dressé comme suit. Deux poteaux sont plantés en des points diamétralement opposés de la base circulaire et reliés entre eux par un câble horizontal tendu à une hauteur h . La toile du chapiteau est ensuite déposée sur ce câble et fixée tout le long du cercle de base. La toile ainsi tendue définit un espace intérieur dont les sections par des plans verticaux orthogonaux au câble horizontal sont des triangles isocèles de base variable et de hauteur h .

Calculer le volume intérieur du chapiteau.



Solution

En choisissant le repère orthonormé de manière telle que

- l'origine O soit au centre de la base circulaire,
- l'axe des abscisses soit parallèle au câble horizontal de fixation,
- l'axe des ordonnées soit orthogonal à l'axe des abscisses dans le plan de la base,
- l'axe des cotes soit parallèle aux poteaux et dirigé vers le haut,

la circonférence de la base circulaire a pour équation cartésienne $x^2 + y^2 = R^2$. Dès lors, pour tout $x \in [-R, R]$, la section du chapiteau par un plan orthogonal à l'axe des abscisses en x est un triangle de hauteur h dont la base a pour extrémités les points $(x, -\sqrt{R^2 - x^2})$ et $(x, \sqrt{R^2 - x^2})$. L'aire d'un tel triangle étant donnée par

$$A(x) = \frac{1}{2} \left(2\sqrt{R^2 - x^2} \right) h = \sqrt{R^2 - x^2} h,$$

la fonction A est une fonction continue sur l'intervalle borné fermé $[-R, R]$. Elle y est donc intégrable et le volume du chapiteau est égal à

$$V = \int_{-R}^R A(x) dx = h \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

La fonction $g(t) = R \sin(t)$, $t \in I =]-\pi/2, \pi/2[$ établit un changement de variable entre I et $]-R, R[$; on obtient

$$V = h \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2(t)} R \cos(t) dt = hR^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(t) dt$$

puisque

$$\sqrt{R^2 - R^2 \sin^2(t)} = \sqrt{R^2 \cos^2(t)} = R|\cos(t)| = R \cos(t), \quad \forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

Comme l'intégrand est une fonction paire, on obtient finalement

$$V = hR^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos(2t)) dt = hR^2 \left[t + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} hR^2.$$

Remarquons que cet exercice peut être résolu directement à l'aide de la géométrie. En effet, l'aire de chaque section triangulaire est égale à la moitié de celle de la section rectangulaire du cylindre. Comme le volume s'obtient par intégration de l'aire des sections, le volume du chapiteau est égal à la moitié de celui du cylindre.

JE SUIS
DOCTEUR EN
MATHÉMATIQUE !

... J'AI UN CIRQUE QUI
CHERCHE QUELQU'UN
POUR MONTER LEUR
NOUVEAU CHAPITEAU !



Exercice 20

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives et soit F une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty,$$

où G désigne une primitive de la fonction $x \mapsto f(x)/F(x)$ sur $]x_0, +\infty[$ si F s'annule en x_0 et sur $\mathbb{R}$ si F ne s'annule pas.

Solution

Notons tout d'abord qu'au vu des hypothèses, la fonction F s'annule au plus en un point puisqu'elle est strictement croissante. Prenons aussi comme convention que si F ne s'annule pas, la notation x_0 sera assimilée à « $-\infty$ » chaque fois que nécessaire. Il s'ensuit que F est strictement positif sur $]x_0, +\infty[$, donc que la fonction G est strictement croissante sur cet intervalle et admet par conséquent une limite en $+\infty$.

D'une part, remarquons que, quels que soient $a, b > x_0$, on a

$$G(b) - G(a) = \int_a^b \frac{f(x)}{F(x)} dx \geq \frac{1}{F(b)} \int_a^b f(x) dx = \frac{F(b) - F(a)}{F(b)} = 1 - \frac{F(a)}{F(b)}.$$

D'autre part, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ et que G est croissant, quel que soit $a > x_0$ il existe $R > a$ tel que

$$G(b) - G(a) \geq \frac{1}{2}, \quad \forall b \geq R.$$

Cette inégalité implique que la limite de G en $+\infty$ qui existe, est nécessairement égale à $+\infty$.

Équations différentielles

1 Rappels théoriques

Une équation différentielle est une équation qui fait intervenir des fonctions données et les dérivées d'une fonction inconnue. Une telle équation sera dite *linéaire* si toute combinaison linéaire de solutions est encore solution de l'équation.

1.1 Définitions

Une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 (resp. 2) est une équation différentielle du type

$$aDf + bf = g \quad (\text{resp. } aD^2f + bDf + cf = g)$$

où g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, où a, b, c sont des complexes (a non nul) et où f désigne l'inconnue (fonction dérivable (resp. deux fois dérivable)) sur I . L'équation homogène associée est l'équation considérée avec $g = 0$; cette équation est linéaire. Le polynôme caractéristique associé est le polynôme

$$z \mapsto az + b \quad (\text{resp. } z \mapsto az^2 + bz + c)$$

et l'équation caractéristique associée est l'équation polynomiale

$$az + b = 0 \quad (\text{resp. } az^2 + bz + c = 0).$$

1.2 Propriétés

Structure générale de l'ensemble des solutions

Si f_P désigne une solution particulière de l'équation différentielle, alors l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions

$$\{f_H + f_P : f_H \text{ solution de l'équation homogène}\}.$$

Structure de l'ensemble des solutions des équations homogènes

Une fonction f_H est solution de l'équation homogène d'ordre 1 si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$c_0 e^{z_0 x}, \quad x \in I$$

où $z_0 = -b/a$ est la solution de l'équation caractéristique et où c_0 est une constante complexe arbitraire.

Notons z_1, z_2 les solutions de l'équation caractéristique dans le cas de l'ordre 2. Lorsque $z_1 \neq z_2$, une fonction f_H est solution de l'équation homogène d'ordre 2 si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$c_1 e^{z_1 x} + c_2 e^{z_2 x}, \quad x \in I$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Lorsque $z_1 = z_2$, une fonction f_H est solution de l'équation homogène d'ordre 2 si et seulement si elle s'écrit sous la forme

$$(c_1 x + c_2) e^{z_1 x}, \quad x \in I$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Les fonctions $x \mapsto e^{z_1 x}$ et $x \mapsto e^{z_2 x}$ (resp. $x \mapsto x e^{z_1 x}$ et $x \mapsto e^{z_1 x}$) sont appelées *solutions fondamentales* ; dans la suite nous les désignerons par u_1 et u_2 .

Remarque. Dans le cas des équations homogènes d'ordre 2, lorsque les coefficients a, b, c sont réels et que le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ du polynôme caractéristique est strictement négatif, on sait que les zéros de ce polynôme sont des complexes conjugués ; il s'agit des complexes

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Dans ce cas, les solutions de l'équation homogène peuvent aussi s'écrire

$$f(x) = e^{-\frac{b}{2a}x} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}x\right) \right), \quad x \in I$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Recherche d'une solution particulière

Étant donné une fonction g , une solution particulière de l'équation d'ordre 1 est

$$G_0(x) e^{-\frac{b}{a}x}, \quad x \in I$$

où G_0 est une primitive de la fonction $a^{-1}g(x) e^{(b/a)x}$, $x \in I$. La fonction G_0 est donc en fait une primitive de la fonction C qui vérifie l'équation

$$C e^{-\frac{b}{a}x} = \frac{1}{a}g(x), \quad x \in I.$$

Étant donné une fonction g , une solution particulière de l'équation d'ordre 2 est

$$G_1(x) u_1(x) + G_2(x) u_2(x), \quad x \in I$$

où G_1, G_2 sont des primitives des fonctions C_1, C_2 respectivement, lesquelles sont solutions du système

$$\begin{cases} C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x) = 0 \\ C_1(x)Du_1(x) + C_2(x)Du_2(x) = a^{-1}g(x). \end{cases}$$

Vu la façon dont sont obtenues ces solutions particulières, cette méthode est appelée « méthode de variation des constantes ».

Le cas des « exponentielles-polynômes »

Dans le cas où le second membre (c'est-à-dire la fonction g dans la définition des équations différentielles ci-dessus) est une fonction dite « exponentielle-polynôme », c'est-à-dire une fonction du type

$$g(x) = P(x) e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$ et où P est un polynôme, on déduit du résultat précédent qu'une solution particulière de l'équation est de la forme

$$Q(x) e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad Q \text{ étant un polynôme de même degré que celui de } P$$

lorsque α n'est pas zéro du polynôme caractéristique,

$$Q(x) x e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad Q \text{ étant un polynôme de même degré que celui de } P$$

lorsque α est zéro simple du polynôme caractéristique,

$$Q(x) x^2 e^{\alpha x}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad Q \text{ étant un polynôme de même degré que celui de } P$$

lorsque α est zéro double du polynôme caractéristique.

Autres équations

Les équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre plus élevé se traitent de manière tout à fait analogue. Par ailleurs, il existe une multitude d'autres types d'équations différentielles ! Le but de cet ouvrage n'est pas d'en présenter une théorie complète ; nous donnerons cependant quelques exemples par la suite.

2 Exercices de base résolus

Exercice 1

1. L'équation différentielle

$$(D_t y)^2 = 2y$$

est-elle linéaire ?

2. Montrer que la fonction $g(t) = 3t^2 - 6t + 2$, $t \in \mathbb{R}$, vérifie le système

$$\begin{cases} (D_t y)^2 = 12(y + 1) \\ y(0) = 2 \\ y(2) = 2. \end{cases}$$

3. Montrer que¹ la fonction

$$g(t) = \cotan(t) - \frac{1}{\sin(t)}, \quad t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

vérifie l'équation

$$2 \frac{dy}{dt} + y^2 = -1.$$

4. Montrer que la fonction $u : x \mapsto c_1 e^{c_2 x}$, $x \in \mathbb{R}$, ($c_1, c_2 \in \mathbb{C}$) vérifie l'équation différentielle

$$v(x)D^2v(x) - (Dv(x))^2 = 0.$$

Solution

1. Cette équation n'est pas linéaire car une combinaison linéaire de solutions de cette équation n'est pas solution de l'équation. Par exemple, la fonction $t \mapsto t^2/2$ est solution alors que la fonction $t \mapsto t^2$ ne l'est pas.

2. On a $g(0) = 2$ et $g(2) = 2$ ainsi que $Dg(t) = 6t - 6$ ($t \in \mathbb{R}$), la fonction g étant dérivable sur $\mathbb{R}$. En remplaçant Dy et y respectivement par Dg et g dans le système, les trois équations sont vérifiées.

3. La fonction donnée est dérivable sur $]0, \pi/2[$ et pour tout réel t de cet intervalle, on a

$$Dg(t) = \frac{-1 + \cos(t)}{\sin^2(t)}.$$

En remplaçant $\frac{dy}{dt}$ et y respectivement par $Dg(t)$ et g dans l'équation donnée, celle-ci est vérifiée.

4. La fonction u est indéfiniment continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$Du(x) = c_1 c_2 e^{c_2 x}, \quad D^2u(x) = c_1 (c_2)^2 e^{c_2 x}.$$

En remplaçant dans l'équation donnée, on constate que cette dernière est vérifiée.

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant l'intervalle sur lequel on travaille.

(a) $4Df(x) + 2if(x) = 0$

(b) $D^2f(t) = 2f(t)$

(c) $D^2f(u) = 0$

(d) $D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = 0$

(e) $4D^2f(x) - f(x) = 0$

(f) $D^2f(x) + f(x) = 0$

1. Les dérivées première et seconde de $f(x)$, $x \in I$ s'écrivent parfois $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$, $x \in I$.

Solution

Les solutions des équations précédentes s'obtiennent directement en cherchant les zéros des polynômes caractéristiques correspondants et en reprenant la forme des solutions données dans le rappel théorique.

- (a) L'équation caractéristique est $4z + 2i = 0$ et sa solution est le complexe $-i/2$. Les solutions sont donc les fonctions

$$f(x) = ce^{-ix/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire.

- (b) L'équation caractéristique est $z^2 - 2 = 0$ et ses solutions sont $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. Les solutions sont donc les fonctions

$$f(t) = c_1 e^{-\sqrt{2}t} + c_2 e^{\sqrt{2}t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

- (c) L'équation caractéristique est $z^2 = 0$ et sa solution, double, est 0. Les solutions sont donc les fonctions

$$f(u) = c_1 u + c_2, \quad u \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

- (d) L'équation caractéristique est $z^2 + z - 2 = 0$ et ses solutions sont -2 et 1 . Les solutions sont donc les fonctions

$$f(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

- (e) L'équation caractéristique est $4z^2 - 1 = 0$ et ses solutions sont $-1/2$ et $1/2$. Les solutions sont donc les fonctions

$$f(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{x/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

- (f) L'équation caractéristique est $z^2 + 1 = 0$ et ses solutions sont $-i$ et i . Les solutions sont donc les fonctions

$$f(x) = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires. Comme les coefficients sont réels, on peut également écrire les solutions sous la forme

$$f(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant l'intervalle sur lequel on travaille (donner également les solutions réelles de l'équation (g)).

$$(a) iDf(x) - 3f(x) = 1 + x + x^2$$

$$(b) Df(x) + if(x) = \sin(x)$$

$$(c) Df(x) + 3f(x) = e^x + \cos(x)$$

$$(d) D^2f(x) = e^x$$

$$(e) D^2f(x) + Df(x) - 2f(x) = e^x + 4x^2e^{2x} + 1$$

$$(f) 4D^2f(x) - f(x) = \cos^2(x) - 1/2$$

$$(g) D^2f(x) + f(x) = xe^{2x}$$

$$(h) D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = (2 + \cos(x))e^{-x}$$

Solution

Les solutions des équations précédentes s'obtiennent en cherchant les solutions des équations homogènes associées et des solutions particulières.

(a) L'équation homogène associée est

$$iDf - 3f = 0;$$

l'équation caractéristique est donc $iz - 3 = 0$ et sa solution est $-3i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f_H(x) = ce^{-3ix}, x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire.

Cherchons une solution particulière. Le second membre est un polynôme, donc une fonction « exponentielle-polynôme » et 0 n'est pas solution de l'équation caractéristique. Il s'ensuit qu'une solution particulière a la forme

$$f_P(x) = Ax^2 + Bx + C, x \in \mathbb{R}$$

où A, B, C sont des constantes à déterminer.

On a

$$Df_P(x) = 2Ax + B,$$

donc

$$\begin{aligned}
 iDf_P - 3f_P(x) &= 1 + x + x^2 \\
 \Leftrightarrow 2iAx + iB - 3Ax^2 - 3Bx - 3C &= 1 + x + x^2 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} -3A = 1 \\ 2iA - 3B = 1 \\ iB - 3C = 1 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/3 \\ B = -(3 + 2i)/9 \\ C = -(7 + 3i)/27. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation de départ est donc donnée par la fonction

$$-\frac{1}{3}x^2 - \frac{3+2i}{9}x - \frac{7+3i}{27}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = c e^{-3ix} - \frac{1}{3}x^2 - \frac{3+2i}{9}x - \frac{7+3i}{27}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire.

(b) L'équation homogène associée est

$$Df + if = 0;$$

l'équation caractéristique est donc $z + i = 0$ et sa solution est $-i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f_H(x) = c e^{-ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$f_H(x) = c(\cos(x) - i \sin(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire. Les coefficients de l'équation homogène ne sont pas réels, mais le second membre peut s'écrire sous la forme

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Cherchons successivement une solution particulière des équations dont le second membre est

$$\frac{e^{ix}}{2i}, \quad \frac{-e^{-ix}}{2i}.$$

Pour le second membre « $e^{ix}/(2i)$ », fonction du type « exponentielle-polynôme », comme i n'est pas solution de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est de la forme

$$f_{P_1}(x) = A e^{ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où A est une constante à déterminer. On a

$$Df_{P_1}(x) = iAe^{ix},$$

donc

$$Df_{P_1}(x) + if_{P_1}(x) = \frac{e^{ix}}{2i} \Leftrightarrow iAe^{ix} + iAe^{ix} = \frac{e^{ix}}{2i} \Leftrightarrow A = \frac{-1}{4}.$$

Dans ce cas, une solution particulière est donc donnée par la fonction

$$-\frac{e^{ix}}{4}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$-\frac{\cos(x) + i \sin(x)}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour le second membre « $-e^{-ix}/(2i)$ », encore du type « exponentielle-polynôme », comme $-i$ est solution de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est de la forme

$$f_{P_2}(x) = Bxe^{-ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où B est une constante à déterminer. On a

$$Df_{P_2}(x) = (-iBx + B)e^{-ix},$$

donc

$$Df_{P_2}(x) + if_{P_2}(x) = -\frac{e^{-ix}}{2i} \Leftrightarrow (-iBx + B)e^{-ix} + iBxe^{-ix} = -\frac{e^{-ix}}{2i} \Leftrightarrow B = \frac{i}{2}.$$

Dans ce cas, une solution particulière est donc donnée par la fonction

$$\frac{ix}{2}e^{-ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$\frac{ix}{2}(\cos(x) - i \sin(x)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Finalement, les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = c(\cos(x) - i \sin(x)) - \frac{\cos(x) + i \sin(x)}{4} + \frac{ix}{2}(\cos(x) - i \sin(x)), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire, ou encore

$$f(x) = \left(c' + \frac{ix}{2}\right) \cos(x) + \left(-i\left(c' + \frac{1}{2}\right) + \frac{x}{2}\right) \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c' est une constante complexe arbitraire.

(c) L'équation homogène associée est

$$Df + 3f = 0;$$

l'équation caractéristique est donc $z + 3 = 0$ et sa solution est -3 . Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f_H(x) = ce^{-3x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire.

Cherchons successivement une solution particulière des équations dont le second membre est

$$e^x, \quad \cos(x).$$

Pour le second membre « e^x », fonction du type « exponentielle-polynôme », comme 1 n'est pas solution de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est de la forme

$$f_{P_1}(x) = Ae^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

où A est une constante à déterminer. On a

$$Df_{P_1}(x) = Ae^x,$$

donc

$$Df_{P_1}(x) + 3f_{P_1}(x) = e^x \Leftrightarrow 4Ae^x = e^x \Leftrightarrow A = \frac{1}{4}.$$

Dans ce cas, une solution particulière est donc donnée par la fonction

$$\frac{e^x}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour le second membre « $\cos(x)$ », comme il s'écrit aussi « $\Re e^{ix}$ » et que les coefficients de l'équation homogène sont réels, une solution particulière est donnée par la partie réelle d'une solution particulière de l'équation

$$Df(x) + 3f(x) = e^{ix}.$$

Comme le second membre est une fonction du type « exponentielle-polynôme » et que i n'est pas solution de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est de la forme

$$f_{P_2}(x) = Be^{ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où B est une constante à déterminer. On a

$$Df_{P_2}(x) = iBe^{ix},$$

donc

$$Df_{P_2}(x) + 3f_{P_2}(x) = e^{ix} \Leftrightarrow iBe^{ix} + 3Be^{ix} = e^{ix} \Leftrightarrow B = \frac{3-i}{10}.$$

Une solution particulière de l'équation de second membre « $\cos(x)$ » est donc donnée par la fonction

$$\Re \left(\frac{3-i}{10} e^{ix} \right) = \frac{3}{10} \cos(x) + \frac{1}{10} \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Finalement, les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = c e^{-3x} + \frac{e^x}{4} + \frac{3}{10} \cos(x) + \frac{1}{10} \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire.

(d) L'équation homogène associée est

$$D^2 f = 0 ;$$

l'équation caractéristique est donc $z^2 = 0$ et sa solution, double, est 0. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f_H(x) = c_1 x + c_2, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

La fonction e^x , $x \in \mathbb{R}$ est une solution particulière évidente.

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = c_1 x + c_2 + e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

(e) L'équation homogène associée est

$$D^2 f + Df - 2f = 0 ;$$

l'équation caractéristique est donc $z^2 + z - 2 = 0$ et ses solutions sont -2 et 1 . Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons successivement une solution particulière des équations dont le second membre est

$$e^x, \quad 4x^2 e^{2x}, \quad 1.$$

Pour le second membre « e^x », fonction du type « exponentielle-polynôme », comme 1 est solution de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est de la forme

$$f_{P_1}(x) = A x e^x, \quad x \in \mathbb{R}$$

où A est une constante à déterminer. On a

$$Df_{P_1}(x) = A(x+1)e^x, \quad D^2 f_{P_1}(x) = A(x+2)e^x,$$

donc

$$D^2 f_{P_1}(x) + Df_{P_1}(x) - 2f_{P_1}(x) = e^x \Leftrightarrow 3Ae^x = e^x \Leftrightarrow A = \frac{1}{3}.$$

Dans ce cas, une solution particulière est donc donnée par la fonction

$$\frac{x}{3} e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour le second membre « $4x^2e^{2x}$ », encore du type « exponentielle-polynôme », comme 2 n'est pas solution de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est de la forme

$$f_{P_2}(x) = (Bx^2 + Cx + E)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où B, C, E sont des constantes à déterminer. On a

$$\begin{aligned} Df_{P_2}(x) &= (2Bx + C + 2Bx^2 + 2Cx + 2E)e^{2x} \\ &= (2Bx^2 + 2(B + C)x + C + 2E)e^{2x} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} D^2f_{P_2}(x) &= (4Bx + 2(B + C) + 4Bx^2 + 4(B + C)x + 2C + 4E)e^{2x} \\ &= (4Bx^2 + 4(2B + C)x + 2B + 4C + 4E)e^{2x}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} D^2f_{P_2}(x) + Df_{P_2} - 2f_{P_2}(x) &= 4x^2e^{2x} \\ \Leftrightarrow (4Bx^2 + (10B + 4C)x + 2B + 5C + 4E)e^{2x} &= 4x^2e^{2x} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 4B = 4 \\ 10B + 4C = 0 \\ 2B + 5C + 4E = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = -5/2 \\ 4E = -2 + 25/2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1 \\ C = -5/2 \\ E = 21/8. \end{cases} \end{aligned}$$

Dans ce cas, une solution particulière est donc donnée par la fonction

$$\left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{21}{8}\right)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour le second membre « 1 », c'est immédiat : la fonction constante

$$x \mapsto -1/2$$

convient.

Finalement, les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = c_1 e^{-2x} + \left(c_2 + \frac{x}{3}\right)e^x + \left(x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{21}{8}\right)e^{2x} - \frac{1}{2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

(f) L'équation homogène associée est

$$4D^2f - 1 = 0;$$

l'équation caractéristique est donc $4z^2 - 1 = 0$ et ses solutions sont $-1/2$ et $1/2$.
Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{x/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre s'écrit aussi

$$\frac{\cos(2x) + 1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\cos(2x)}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Cherchons donc une solution particulière de l'équation dont le second membre est

$$\frac{\cos(2x)}{2} = \Re \left(\frac{e^{2ix}}{2} \right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Comme les coefficients de l'équation homogène sont réels, une solution particulière est donnée par la partie réelle d'une solution particulière de l'équation

$$4D^2 f(x) - f(x) = \frac{e^{2ix}}{2}.$$

Comme le second membre est une fonction du type « exponentielle-polynôme » et que $2i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est de la forme

$$f_P(x) = Ae^{2ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où A est une constante à déterminer. On a successivement

$$Df_P(x) = 2iAe^{2ix} \quad \text{et} \quad D^2 f_P(x) = -4Ae^{2ix},$$

donc

$$\begin{aligned} 4D^2 f_P(x) - f_P(x) &= \frac{e^{2ix}}{2} \Leftrightarrow -16Ae^{2ix} - Ae^{2ix} = \frac{e^{2ix}}{2} \\ &\Leftrightarrow -17Ae^{2ix} = \frac{e^{2ix}}{2} \\ &\Leftrightarrow A = -\frac{1}{34}. \end{aligned}$$

Une solution particulière de l'équation de départ est donc donnée par la fonction

$$-\frac{1}{34} \Re e^{2ix} = -\frac{1}{34} \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{x/2} - \frac{1}{34} \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

(g) L'équation homogène associée est

$$D^2 f + f = 0 ;$$

l'équation caractéristique est donc $z^2 + 1 = 0$ et ses solutions sont $-i$ et i . Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f_H(x) = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Le second membre « xe^{2x} » est une fonction de type « exponentielle-polynôme » et 2 n'est pas solution de l'équation caractéristique ; on sait donc qu'une solution particulière est de la forme

$$f_P(x) = (Ax + B)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où A et B sont des constantes à déterminer. On a

$$Df_P(x) = (2Ax + A + 2B)e^{2x} \quad \text{et} \quad D^2f_P(x) = (4Ax + 4(A + B))e^{2x},$$

donc

$$D^2f_P(x) + f_P(x) = xe^{2x} \Leftrightarrow (5Ax + (4A + 5B))e^{2x} = xe^{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 5A = 1 \\ 4A + 5B = 0 \end{cases}$$

ce qui fournit immédiatement

$$A = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad B = -\frac{4}{5}A = -\frac{4}{25}.$$

Une solution particulière est donc la fonction

$$\left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = c_1 e^{-ix} + c_2 e^{ix} + \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires. Les solutions réelles sont données par

$$f(x) = c'_1 \cos(x) + c'_2 \sin(x) + \left(\frac{x}{5} - \frac{4}{25}\right)e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c'_1 et c'_2 sont des constantes réelles arbitraires.

(h) L'équation homogène associée est

$$D^2f + 2Df + f = 0;$$

l'équation caractéristique est donc $z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2 = 0$ et son unique solution est -1 . Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f_H(x) = (c_1 x + c_2)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons successivement une solution particulière des équations dont le second membre est

$$2e^{-x}, \quad \cos(x)e^{-x}.$$

Pour le second membre « $2e^{-x}$ », fonction de type « exponentielle-polynôme », comme -1 est zéro double de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est de la forme

$$f_{P_1}(x) = Ax^2e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où A est une constante à déterminer. On a

$$Df_{P_1}(x) = (2Ax - Ax^2)e^{-x} \quad \text{et} \quad D^2f_{P_1}(x) = (2A - 4Ax + Ax^2)e^{-x},$$

donc

$$\begin{aligned} D^2f_{P_1}(x) + 2Df_{P_1}(x) + f_{P_1}(x) \\ &= (2A - 4Ax + Ax^2 + 4Ax - 2Ax^2 + Ax^2)e^{-x} \\ &= 2Ae^{-x}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$D^2f_{P_1}(x) + 2Df_{P_1}(x) + f_{P_1}(x) = 2e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad A = 1.$$

Dans ce cas, une solution particulière est donc donnée par la fonction

$$x^2e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Pour le second membre « $\cos(x)e^{-x} = \Re(e^{(-1+i)x})$ », comme les coefficients de l'équation sont réels, une solution particulière sera fournie par la partie réelle d'une solution particulière lorsque le second membre est donné par $e^{(-1+i)x}$. Cette fonction est de type « exponentielle-polynôme » et, comme $-1 + i$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on sait qu'une solution particulière est fournie par une fonction du type

$$f_{P_2}(x) = Be^{(-1+i)x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où B est une constante à déterminer. On a

$$Df_{P_2}(x) = (-1+i)Be^{(-1+i)x} \quad \text{et} \quad D^2f_{P_2}(x) = (-1+i)^2Be^{(-1+i)x} = -2iBe^{(-1+i)x},$$

donc

$$D^2f_{P_2}(x) + 2Df_{P_2}(x) + f_{P_2}(x) = e^{(-1+i)x} \Leftrightarrow -Be^{(-1+i)x} = e^{(-1+i)x} \Leftrightarrow B = -1.$$

La partie réelle de cette fonction particulière f_{P_2} est donc

$$-\Re(e^{(-1+i)x}) = -\cos(x)e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Finalement, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = (c_1x + c_2 + x^2 - \cos(x))e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant l'intervalle sur lequel on travaille.

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} \quad Df(x) - f(x) = \frac{1}{1 - e^x} & \text{(b)} \quad Df(x) - 2f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} \\
 \text{(c)} \quad Df(t) + f(t) = \frac{1}{1 + e^{2t}} & \text{(d)} \quad Df(x) - f(x) = \frac{e^x}{\sin(x)} \\
 \text{(e)} \quad D^2 f(x) + f(x) = \frac{1}{\cos x} & \text{(f)} \quad D^2 f(x) - 6Df(x) + 9f(x) = \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3}
 \end{array}$$

Solution

Dans ces exercices, le second membre n'étant pas une fonction du type « exponentielle-polynôme », on utilise la méthode de « variation des constantes » pour trouver une solution particulière.

Par ailleurs, il ne faut pas oublier que les constantes peuvent différer d'un intervalle à l'autre.

- (a) L'équation homogène est $Df - f = 0$ et le polynôme caractéristique $z \mapsto z - 1$ a pour zéro le réel 1 ; les solutions de l'équation homogène sont donc les multiples de la fonction exponentielle.

Recherchons une solution particulière. La fonction $x \mapsto e^{-x}/(1 - e^x)$ est continue sur $\mathbb{R}_0$; elle est donc primitivable sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Sur chacun de ceux-ci, on a

$$\begin{aligned}
 \int \frac{e^{-x}}{1 - e^x} dx &= \int \frac{1}{e^x(1 - e^x)} dx = \int \left(\frac{1}{e^x} + \frac{1}{1 - e^x} \right) dx \\
 &= \int e^{-x} dx - \int \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx \\
 &\simeq -e^{-x} - \ln(|1 - e^{-x}|).
 \end{aligned}$$

Une solution particulière est donc donnée par

$$-e^x(e^{-x} + \ln(|1 - e^{-x}|)) = -1 - e^x \ln(|1 - e^{-x}|), \quad x \in \mathbb{R}_0.$$

Dès lors, les solutions de l'équation de départ sont les fonctions

$$f(x) = (c - \ln(|e^{-x} - 1|))e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}_0$$

où c est une constante complexe arbitraire.

- (b) L'équation homogène est $Df - 2f = 0$ et le polynôme caractéristique $z \mapsto z - 2$ a pour zéro le réel 2 ; les solutions de l'équation homogène sont donc les multiples de la fonction e^{2x} , $x \in \mathbb{R}$.

Recherchons une solution particulière. La fonction $x \mapsto e^{-2x}/(1 - e^{-x})$ est continue sur $\mathbb{R}_0$; elle est donc primitivable sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. Sur chacun de ceux-ci, on a

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-2x}}{1 - e^{-x}} dx &= \int \frac{1}{e^x(e^x - 1)} dx = \int \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{e^x} \right) dx \\ &= \int \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx - \int e^{-x} dx \\ &\simeq \ln(|1 - e^{-x}|) + e^{-x}. \end{aligned}$$

Une solution particulière est donc donnée par

$$e^{2x}(e^{-x} + \ln(|1 - e^{-x}|)) = e^x + e^{2x} \ln(|1 - e^{-x}|), \quad x \in \mathbb{R}_0.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = (c + \ln(|e^{-x} - 1|))e^{2x} + e^x, \quad x \in \mathbb{R}_0$$

où c est une constante complexe arbitraire.

- (c) L'équation homogène est $Df + f = 0$ et le polynôme caractéristique $z \mapsto z + 1$ a pour zéro le réel -1 ; les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f_H(t) = c e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^t/(1 + e^{2t})$ étant continue sur $\mathbb{R}$, elle y est donc primitivable. Sur $\mathbb{R}$, en travaillant par substitution, on a

$$\int \frac{e^t}{1 + e^{2t}} dt = \left[\int \frac{1}{1 + u^2} du \right]_{u=e^t} \simeq [\arctan(u)]_{u=e^t} \simeq \arctan(e^t)$$

et, ainsi, une solution particulière f_P est donnée par

$$f_P(x) = \arctan(e^t) e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En conclusion, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(t) = (c + \arctan(e^t)) e^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire.

- (d) L'équation homogène est $Df - f = 0$ et le polynôme caractéristique $z \mapsto z - 1$ a pour zéro le réel 1 ; les solutions de l'équation homogène sont donc les multiples de la fonction exponentielle.

Recherchons une solution particulière. La fonction $x \mapsto 1/\sin(x)$ est continue sur les intervalles du type $I_k =]k\pi, \pi + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$). Sur chacun de ceux-ci, en travaillant par substitution, on a

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} dx = \int \frac{\sin(x)}{1 - \cos^2(x)} dx = - \left[\int \frac{1}{1 - t^2} dt \right]_{t=\cos(x)}.$$

La décomposition en fractions simples permet d'écrire

$$\int \frac{1}{1-t^2} dt = \int \left(\frac{1}{2(1-t)} + \frac{1}{2(1+t)} \right) dt \simeq \frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right).$$

On a donc, sur chacun des intervalles I_k ,

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx \simeq -\frac{1}{2} \ln \left(\left| \frac{1+\cos(x)}{1-\cos(x)} \right| \right) \simeq \ln \left(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} \right).$$

Ainsi, sur l'union des I_k , une solution particulière est la fonction donnée explicitement par

$$\ln \left(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} \right) e^x.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = \left[c + \ln \left(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}} \right) \right] e^x, \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$$

où c est une constante complexe arbitraire.

- (e) L'équation homogène est $D^2 f + f = 0$ et le polynôme caractéristique $z \mapsto z^2 + 1$ a pour zéros les complexes $-i$ et i ; les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$c_1 e^{ix} + c_2 e^{-ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

ou encore

$$c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Recherchons une solution particulière. La fonction $x \mapsto 1/\cos(x)$ est continue sur les intervalles du type $I_k =]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$); cherchons une solution particulière sur ces intervalles. Commençons par résoudre le système

$$\begin{cases} C_1(x) \cos(x) + C_2(x) \sin(x) &= 0 \\ -C_1(x) \sin(x) + C_2(x) \cos(x) &= 1/\cos(x) \end{cases}$$

en tout $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$. On a successivement

$$\begin{aligned} & \begin{cases} C_1(x) \cos(x) + C_2(x) \sin(x) = 0 \\ -C_1(x) \sin(x) + C_2(x) \cos(x) = 1/\cos(x) \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) \cos(x) + C_2(x) \sin(x) = 0 \\ -C_1(x) \cos(x) \sin(x) + C_2(x) \cos^2(x) = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) \cos(x) + C_2(x) \sin(x) = 0 \\ C_2(x) (\sin^2(x) + \cos^2(x)) = 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -\tan(x) \\ C_2(x) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, sur chacun des intervalles I_k , une primitive de C_1 est la fonction $x \mapsto \ln(|\cos(x)|)$ et une primitive de C_2 est la fonction $x \mapsto x$. Sur l'union des I_k , une solution particulière est la fonction donnée explicitement par

$$\ln(|\cos(x)|) \cos(x) + x \sin(x).$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$\begin{aligned} & c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + \ln(|\cos(x)|) \cos(x) + x \sin(x) \\ & = (c_1 + \ln(|\cos(x)|)) \cos(x) + (c_2 + x) \sin(x), \quad x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k \end{aligned}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

- (f) L'équation homogène est $D^2 - 6Df + 9f = 0$ et le polynôme caractéristique $z \mapsto z^2 - 6z + 9 = (z - 3)^2$ a 3 pour zéro double ; les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$(c_1 x + c_2) e^{3x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Recherchons une solution particulière. La fonction $x \mapsto (9x^2 + 6x + 2)/x^3$ est continue sur $\mathbb{R}_0$; cherchons sur cet ensemble une solution particulière. Commençons par résoudre le système

$$\begin{cases} C_1(x) x e^{3x} + C_2(x) e^{3x} = 0 \\ C_1(x) (1 + 3x) e^{3x} + 3C_2(x) e^{3x} = (9x^2 + 6x + 2)/x^3 \end{cases}$$

en tout $x \neq 0$. On a successivement

$$\begin{aligned} & \begin{cases} C_1(x)xe^{3x} + C_2(x)e^{3x} = 0 \\ C_1(x)(1 + 3x)e^{3x} + 3C_2(x)e^{3x} = (9x^2 + 6x + 2)/x^3 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} C_2(x) = -xC_1(x) \\ C_1(x)(1 + 3x)e^{3x} - 3xC_1(x)e^{3x} = (9x^2 + 6x + 2)/x^3 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} C_2(x) = -xC_1(x) \\ C_1(x) = e^{-3x}(9x^2 + 6x + 2)/x^3. \end{cases} \end{aligned}$$

Sur $\mathbb{R}_0$, primitivons à présent chacun des termes formant la fonction C_1 . On a

$$\int \frac{e^{-3x}}{x^2} dx = - \int e^{-3x} D \frac{1}{x} dx = -\frac{e^{-3x}}{x} - 3 \int \frac{e^{-3x}}{x} dx$$

et

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{-3x}}{x^3} dx &= -\frac{1}{2} \int e^{-3x} D \frac{1}{x^2} dx \\ &= -\frac{e^{-3x}}{2x^2} - \frac{3}{2} \int \frac{e^{-3x}}{x^2} dx \\ &= -\frac{e^{-3x}}{2x^2} - \frac{3}{2} \left(-\frac{e^{-3x}}{x} - 3 \int \frac{e^{-3x}}{x} dx \right) \\ &= -\frac{e^{-3x}}{2x^2} + \frac{3e^{-3x}}{2x} + \frac{9}{2} \int \frac{e^{-3x}}{x} dx. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int C_1(x) dx &= \int \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^3} e^{-3x} dx \\ &= 9 \int \frac{e^{-3x}}{x} dx + 6 \int \frac{e^{-3x}}{x^2} dx + 2 \int \frac{e^{-3x}}{x^3} dx \\ &= 9 \int \frac{e^{-3x}}{x} dx - 6 \left(\frac{e^{-3x}}{x} + 3 \int \frac{e^{-3x}}{x} dx \right) \\ &\quad + 2 \left(-\frac{e^{-3x}}{2x^2} + \frac{3e^{-3x}}{2x} + \frac{9}{2} \int \frac{e^{-3x}}{x} dx \right) \\ &\simeq -\frac{e^{-3x}}{x^2} - \frac{3e^{-3x}}{x} \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}
 \int C_2(x) dx &= - \int x C_1(x) dx = - \int \frac{9x^2 + 6x + 2}{x^2} e^{-3x} dx \\
 &= -9 \int e^{-3x} dx - 6 \int \frac{e^{-3x}}{x} dx - 2 \int \frac{e^{-3x}}{x^2} dx \\
 &= 3e^{-3x} - 6 \int \frac{e^{-3x}}{x} dx - 2 \left(-\frac{e^{-3x}}{x} - 3 \int \frac{e^{-3x}}{x} dx \right) \\
 &\simeq 3e^{-3x} + \frac{2e^{-3x}}{x}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, sur $\mathbb{R}_0$, une solution particulière est donnée explicitement par

$$xe^{3x} \int C_1(x) dx + e^{3x} \int C_2(x) dx = -\frac{1}{x} - 3 + 3 + \frac{2}{x} = \frac{1}{x}.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$(c_1x + c_2)e^{3x} + \frac{1}{x}, \quad x \in \mathbb{R}_0,$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Exercice 5

1. Résoudre l'équation différentielle

$$iDf(x) + 3f(x) = 2x + i$$

en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.

Déterminer ensuite la solution qui s'annule en 1.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$2D^2f(x) + Df(x) = 2x$$

en précisant l'intervalle sur lequel on travaille.

Déterminer ensuite la solution qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1.

Solution

1. L'équation homogène associée est

$$iDf + 3f = 0 ;$$

l'équation caractéristique est $iz + 3 = 0$ et son zéro est $3i$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f_H(x) = c e^{3ix}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto 2x + i$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Comme on peut écrire $g(x)$ sous la forme $(2x + i)e^{0x}$, produit d'un polynôme du premier degré et d'une exponentielle dont le coefficient 0 de l'argument n'est pas solution de l'équation caractéristique, il existe une solution de la forme

$$f_P(x) = Ax + B, \quad x \in \mathbb{R}$$

où A et B sont des constantes à déterminer. Puisque $Df_P(x) = A$, on a

$$iDf_P(x) + 3f_P(x) = 2x + i \Leftrightarrow iA + 3Ax + 3B = 2x + i \Leftrightarrow \begin{cases} 3A = 2 \\ iA + 3B = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2/3 \\ B = i/9. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = \frac{2x}{3} + \frac{i}{9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = c e^{3ix} + \frac{2x}{3} + \frac{i}{9}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire.

Déterminons la solution f qui s'annule en 1, c'est-à-dire telle que $f(1) = 0$. On a

$$c e^{3i} + \frac{2}{3} + \frac{i}{9} = 0 \Leftrightarrow c e^{3i} + \frac{6+i}{9} = 0 \Leftrightarrow c = \frac{-6-i}{9} e^{-3i}.$$

La solution cherchée est donc la fonction

$$f(x) = -\frac{6+i}{9} e^{3i(x-1)} + \frac{2x}{3} + \frac{i}{9}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. L'équation homogène associée est

$$2D^2f + Df = 0;$$

l'équation caractéristique est $2z^2 + z = 0$ et ses solutions sont $-1/2$ et 0. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$f_H(x) = c_1 + c_2 e^{-x/2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto 2x$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Celui-ci est une « exponentielle-polynôme » et 0 est une solution de l'équation caractéristique. Il s'ensuit qu'une solution particulière est de la forme

$$f_P(x) = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx, \quad x \in \mathbb{R}$$

où A et B sont des constantes à déterminer. On a

$$Df_P(x) = 2Ax + B \quad \text{et} \quad D^2f_P(x) = 2A,$$

donc

$$\begin{aligned}
 2D^2 f_P(x) + Df_P(x) &= 2x \Leftrightarrow 2(2A) + 2Ax + B = 2x \\
 &\Leftrightarrow 2(A-1)x + 4A + B = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 4A + B = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -4. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière est donnée par la fonction

$$f_P(x) = x^2 - 4x, \quad x \in \mathbb{R}$$

et les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$f(x) = c_1 + c_2 e^{-x/2} + x^2 - 4x, \quad x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Déterminons la solution f qui vaut 1 en 1 et dont la dérivée première vaut 0 en 1. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} f(1) = 1 \\ Df(1) = 0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} f(1) = 1 \\ Df(1) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 e^{-1/2} + 1 - 4 = 1 \\ (-c_2/2) e^{-1/2} + 2 - 4 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2/\sqrt{e} = 4 \\ -c_2/(2\sqrt{e}) = 2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -4\sqrt{e} \\ c_1 = 4 - (-4) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -4\sqrt{e} \\ c_1 = 8. \end{cases}
 \end{aligned}$$

La solution recherchée est donc

$$f(x) = 8 - 4\sqrt{e} e^{-x/2} + x^2 - 4x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 6. Distribution verticale du phytoplancton

De façon très simplifiée, on peut décrire la distribution verticale P du phytoplancton dans l'océan au moyen du modèle

$$\begin{cases} \kappa D^2 P(z) - \gamma P(z) + \mu e^{-\alpha z} = 0 \\ DP(0) = 0 \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} P(z) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où z désigne la profondeur ($z = 0$ à la surface), κ est le coefficient de diffusion turbulente, γ le taux de mortalité (brouillage par le zooplancton) du phytoplancton, μ le taux de croissance maximum et α le coefficient d'extinction de la lumière dans la colonne d'eau. Les paramètres κ , γ , μ et α sont des constantes strictement positives.

1. Déterminer P dans le cas général où $\gamma \neq \alpha^2 \kappa$.
2. Déterminer P dans le cas particulier où $\gamma = \alpha^2 \kappa$.

Solution

1. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2. L'équation homogène associée est $\kappa D^2 P(z) - \gamma P(z) = 0$ et le polynôme caractéristique $z \mapsto \kappa z^2 - \gamma$ a pour zéros $-\sqrt{\gamma/\kappa}$ et $\sqrt{\gamma/\kappa}$. Les solutions de l'équation homogène sont donc les fonctions

$$P_H(z) = c_1 e^{-(\sqrt{\gamma/\kappa})z} + c_2 e^{(\sqrt{\gamma/\kappa})z}, \quad z \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cela étant, cherchons une solution particulière. Comme le second membre $g : z \mapsto -\mu e^{-\alpha z}$ est une « exponentielle-polynôme », produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient $-\alpha$ de l'argument n'est pas zéro du polynôme caractéristique puisque $\gamma \neq \kappa \alpha^2$, une solution particulière est de la forme

$$P_P(z) = A e^{-\alpha z}, \quad z \in \mathbb{R}$$

où A est une constante à déterminer. En substituant cette expression dans l'équation donnée, on a successivement

$$\kappa A \alpha^2 e^{-\alpha z} - \gamma A e^{-\alpha z} = -\mu e^{-\alpha z} \Leftrightarrow (\kappa \alpha^2 - \gamma) A = -\mu \Leftrightarrow A = \frac{\mu}{\gamma - \kappa \alpha^2}.$$

Les solutions de l'équation de départ sont donc les fonctions (adaptées au contexte, à savoir $z \geq 0$ et fonction à valeurs réelles)

$$P(z) = c_1 e^{-(\sqrt{\gamma/\kappa})z} + c_2 e^{(\sqrt{\gamma/\kappa})z} + \frac{\mu}{\gamma - \kappa \alpha^2} e^{-\alpha z}, \quad z \in [0, +\infty[$$

où les constantes c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires. Déterminons les valeurs des constantes en utilisant les données supplémentaires. De fait, d'une part on a

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} P(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} c_2 e^{(\sqrt{\gamma/\kappa})z} = 0 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = 0.$$

D'autre part, on a successivement

$$\begin{aligned} DP(0) = 0 &\Leftrightarrow \left(-c_1 \sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}} e^{-(\sqrt{\gamma/\kappa})z} - \frac{\alpha\mu}{\gamma - \kappa\alpha^2} e^{-\alpha z} \right)_{z=0} = 0 \\ &\Leftrightarrow -c_1 \sqrt{\frac{\gamma}{\kappa}} - \frac{\alpha\mu}{\gamma - \kappa\alpha^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow c_1 = -\sqrt{\frac{\kappa}{\gamma}} \frac{\alpha\mu}{\gamma - \kappa\alpha^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $\gamma \neq \kappa\alpha^2$, la solution du problème est donnée par la fonction

$$P(z) = \frac{\mu}{\gamma - \kappa\alpha^2} \left(e^{-\alpha z} - \alpha \sqrt{\frac{\kappa}{\gamma}} e^{-\sqrt{\gamma/\kappa} z} \right), \quad z \in [0, +\infty[.$$

2. Lorsque $\gamma = \kappa\alpha^2$, l'équation donnée au départ s'écrit

$$\kappa D^2 P(z) - \kappa\alpha^2 P(z) = -\mu e^{-\alpha z}$$

et les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions

$$P_H(z) = c_1 e^{-\alpha z} + c_2 e^{\alpha z}, \quad z \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cela étant, cherchons une solution particulière. Cette fois, le coefficient de l'exponentielle du second membre $g : z \mapsto -\mu e^{-\alpha z}$ est un zéro simple du polynôme caractéristique. Dès lors, une solution particulière est de la forme

$$P_P(z) = A z e^{-\alpha z}, \quad z \in \mathbb{R}$$

où A est une constante à déterminer. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a

$$DP_P(z) = A e^{-\alpha z} (1 - \alpha z) \quad \text{et} \quad D^2 P_P(z) = A e^{-\alpha z} (-2\alpha + \alpha^2 z);$$

dès lors on obtient successivement

$$\begin{aligned} \kappa A e^{-\alpha z} (-2\alpha + \alpha^2 z) - \kappa\alpha^2 A z e^{-\alpha z} &= -\mu e^{-\alpha z} \\ \Leftrightarrow \kappa A (-2\alpha + \alpha^2 z) - \kappa\alpha^2 A z &= -\mu \\ \Leftrightarrow A &= \frac{\mu}{2\alpha\kappa}. \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de l'équation de départ sont donc les fonctions (adaptées au contexte, à savoir $z \geq 0$ et fonction à valeurs réelles)

$$P(z) = c_1 e^{-\alpha z} + c_2 e^{\alpha z} + \frac{\mu}{2\alpha\kappa} z e^{-\alpha z}, \quad z \in [0, +\infty[$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires. Déterminons les valeurs des constantes en utilisant les données supplémentaires. De fait, d'une part on a encore

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} P(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} c_2 e^{\alpha z} = 0 \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad c_2 = 0.$$

D'autre part, on a successivement

$$\begin{aligned} DP(0) = 0 &\Leftrightarrow \left(\left(-\alpha c_1 + \frac{\mu}{2\alpha\kappa} (1 - \alpha z) \right) e^{-\alpha z} \right)_{z=0} = 0 \\ &\Leftrightarrow -\alpha c_1 + \frac{\mu}{2\alpha\kappa} = 0 \\ &\Leftrightarrow c_1 = \frac{\mu}{2\alpha^2\kappa}. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $\gamma = \kappa\alpha^2$, la solution du problème est donnée par la fonction

$$P(z) = \frac{\mu}{2\alpha^2\kappa} e^{-\alpha z} + \frac{\mu}{2\alpha\kappa} z e^{-\alpha z} = \frac{\mu}{2\alpha^2\kappa} (1 + \alpha z) e^{-\alpha z}, \quad z \in [0, +\infty[.$$

3 Exercices pour s'entraîner

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant l'intervalle sur lequel on travaille.

- | | |
|---|--|
| (a) $Df(x) = \cos(x) + 2f(x)$ | (b) $2Df(x) + 4f(x) = e^{-2x}$ |
| (c) $D^2f(x) - f(x) = 1 + x^2$ | (d) $9D^2f(x) - Df(x) = 1$ |
| (e) $D^2f(x) - 4f(x) = 1 + e^{2x}$ | (f) $D^2f(x) + 4f(x) = \sin(4x)$ |
| (g) $D^2f(x) + Df(x) = xe^x$ | (h) $D^2f(x) + 2Df(x) + f(x) = 1 + \sin x$ |
| (i) $9D^2f(x) + 6Df(x) + f(x) = e^{-\frac{x}{3}}$ | (j) $iD^2f(x) - f(x) = e^x$ |

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes, en spécifiant l'intervalle sur lequel on travaille.

- | | |
|--|---|
| (a) $D^2f(x) + f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$ | (b) $D^2f(x) - f(x) = \frac{1}{e^x + e^{-x}}$ |
|--|---|

Exercice 3

Résoudre les systèmes suivants, en spécifiant l'intervalle sur lequel on travaille.

$$\begin{aligned} \text{(a)} & \begin{cases} 4D^2 f(x) + f(x) = x^2 + x + 2 \\ f(0) = 0 \\ Df(0) = 2 \end{cases} \\ \text{(b)} & \begin{cases} 4D^2 f(x) + Df(x) = x \\ f(1) = 1 \\ Df(1) = 0 \end{cases} \\ \text{(c)} & \begin{cases} iDf(x) + 2f(x) = 3i \\ f(1) = i \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 4

1. Soit $r > 0$ et la fonction $y(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$. Montrer qu'elle vérifie l'équation différentielle

$$yD_x y + x = 0, \quad x \in]-r, r[.$$

2. Dans certaines conditions, la température de surface y d'un objet change au cours du temps selon un « taux » proportionnel à la différence entre la température de l'objet et celle du milieu ambiant, que l'on suppose constante et que l'on note y_0 . On obtient ainsi l'équation différentielle

$$Dy(t) = k(y_0 - y(t))$$

où k est une constante strictement positive. Cette équation est appelée « loi du refroidissement de Newton » et elle est utilisée notamment pour déterminer le temps écoulé entre la mort d'un individu et la découverte de son corps.

Résoudre cette équation et montrer alors que la température de l'objet se rapproche de la température ambiante au fur et à mesure que le temps passe.

Solution 1

Les solutions sont les fonctions suivantes.

- (a) $f(x) = c e^{2x} - (2/5) \cos(x) + (1/5) \sin(x)$, $x \in \mathbb{R}$ où c est une constante complexe arbitraire.
- (b) $f(x) = (c + x/2) e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$ où c est une constante complexe arbitraire.
- (c) $f(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x - x^2 - 3$, $x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
- (d) $f(x) = c_1 + c_2 e^{x/9} - x$, $x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

- (e) $f(x) = c_1 e^{-2x} + (c_2 + x/4) e^{2x} - 1/4$, $x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
- (f) $f(x) = c_1 e^{-2ix} + c_2 e^{2ix} - (1/12) \sin(4x)$, $x \in \mathbb{R}$ où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires (ou encore $c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) - (1/12) \sin(4x)$, $x \in \mathbb{R}$).
- (g) $f(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + (x/2 - 3/4) e^x$, $x \in \mathbb{R}$ où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
- (h) $f(x) = (c_1 x + c_2) e^{-x} + 1 - (1/2) \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$ où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
- (i) $f(x) = (c_1 x + c_2 + (x^2/18)) e^{-x/3}$, $x \in \mathbb{R}$ où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
- (j) $f(x) = c_1 e^{(\sqrt{2}/2)(-1+i)x} + c_2 e^{(\sqrt{2}/2)(1-i)x} - ((1+i)/2) e^x$, $x \in \mathbb{R}$ où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Solution 2

Les solutions sont les fonctions suivantes.

- (a) $f(x) = (c_1 + x) \cos(x) - (c_2 + \ln(|\cos(x)|)) \sin(x)$, $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires qui peuvent varier en fonction de l'intervalle.
- (b) $f(x) = (c_1 - (1/4) \ln(1 + e^{-2x})) e^x + (c_2 - (1/4) \ln(1 + e^{2x})) e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Solution 3

Les solutions des systèmes sont les fonctions suivantes.

- (a) $f(x) = 6 \cos(x/2) + 2 \sin(x/2) + x^2 + x - 6$, $x \in \mathbb{R}$.
- (b) $f(x) = x^2/2 - 4x + 33/2 - 12 e^{(1-x)/4}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (c) $f(x) = (-i/2) e^{2i(x-1)} + 3i/2$, $x \in \mathbb{R}$.

Solution 4

1. La fonction y est dérivable sur $] -r, r[$ et, sur cet intervalle, on a

$$y D_x y + x = \sqrt{r^2 - x^2} \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + x = 0.$$

2. Les solutions de cette équation sont les fonctions $y(t) = c e^{-kt} + y_0$, $t \in \mathbb{R}$ où c est une constante réelle arbitraire d'après le contexte. Comme $k > 0$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0$.

4 Exercices plus élaborés

Exercice 1

Depuis un recensement de la population d'un pays, on constate que la vitesse d'accroissement de la population est, à tout instant, proportionnelle au nombre d'habitants à cet instant. Après combien de temps depuis ce recensement cette population aura-t-elle triplé sachant qu'elle a doublé en 50 ans ?

J'AI UN GROS
PROBLÈME AVEC
LES RECENSEMENTS
ET COMME VOUS ÊTES
BON EN MATHS...

... VOUS
VOUS ÊTES DIT,
JE VAIS POUVOIR
COMPTER
SUR LUI !!!



Solution

Si $P(t)$ désigne la population au temps t , l'équation différentielle qui traduit l'énoncé est

$$DP(t) = kP(t)$$

où k est une constante réelle. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 homogène. Ses solutions sont les fonctions

$$P(t) = ce^{kt}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où c est une constante réelle arbitraire non nulle vu le contexte. Cela étant, l'expression du fait que la population a doublé en 50 ans est

$$P(50) = 2P(0) \Leftrightarrow ce^{k50} = 2c,$$

ce qui permet d'obtenir la valeur de k , à savoir

$$k = \frac{\ln(2)}{50}.$$

La traduction de la question posée est la suivante : on cherche t tel que

$$P(t) = 3P(0)$$

et on obtient alors successivement

$$P(t) = 3P(0) \Leftrightarrow ce^{kt} = 3c \Leftrightarrow kt = \ln(3) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(3)}{k}.$$

Puisque la valeur de k est connue, on conclut que, depuis le recensement, la population aura triplé après $50 \ln(3)/\ln(2) \approx 79,248$ ans, donc environ 79 ans.



Exercice 2

La vitesse initiale d'une balle roulant sur un sol horizontal est égale à 10 m/s. Vu les frottements, la vitesse décroît avec un taux constant de 2 m/s^2 . Quand la balle sera arrêtée, quelle distance aura-t-elle parcourue depuis son point de départ ?

Solution

Notons $v(t)$ la vitesse de la balle en m/s au temps t en secondes. Puisque la vitesse initiale est égale à 10 m/s, on a

$$v(0) = 10$$

et comme elle décroît avec un taux constant de 2 m/s^2 , on a

$$Dv(t) = -2.$$

On obtient ainsi qu'il existe une constante c telle que $v(t) = -2t + c$, $t \in \mathbb{R}$ et puisque $v(0) = 10$, on obtient $c = 10$. Ainsi

$$v(t) = -2t + 10, \quad t \in \mathbb{R}.$$

La balle sera à l'arrêt lorsque sa vitesse sera nulle, c'est-à-dire au temps $t_0 = 5$. Cela étant, si on désigne par $e(t)$ la distance parcourue au temps t , on a

$$De(t) = v(t) = -2t + 10, \quad t \in \mathbb{R},$$

donc

$$e(t) = -t^2 + 10t + e(0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Quand la balle sera arrêtée, comme $e(0) = 0$, elle aura donc parcouru une distance de

$$e(t_0) - e(0) = -5^2 + 10 \times 5 = 25 \text{ m}.$$

Exercice 3

Reprenons l'exercice du chapitre 3 traitant de l'évolution des populations en présence de « facteurs limitants » (voir l'exercice 8 de la sous-section 5.3 du chapitre 3).

Compte tenu du problème posé, on doit donc résoudre l'équation différentielle

$$DN(t) = r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t)$$

où r est une constante strictement positive dépendant du type de population concerné, où $K > 0$ est l'effectif maximal de la population et où N est la fonction inconnue (population), définie et continue sur $[0, +\infty[$, dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que

$$K > N(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Établir que les solutions sont les fonctions

$$N(t) = \frac{K}{1 + c_0 e^{-rt}}, \quad t \geq 0$$

où

$$c_0 = \frac{K - N(0)}{N(0)}.$$

Solution

La preuve du fait que les fonctions données sont effectivement solutions de l'équation figure au chapitre 3 (voir l'exercice 8 de la sous-section 5.3 du chapitre 3).

Montrons à présent que si une fonction N (avec les propriétés imposées) vérifie l'équation, alors elle s'écrit nécessairement comme indiqué. On a, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned}
 DN(t) &= r \left(1 - \frac{N(t)}{K} \right) N(t) \\
 \Leftrightarrow DN(t) &= \frac{r}{K} (K - N(t)) N(t) \\
 \Leftrightarrow \frac{K DN(t)}{N(t) (K - N(t))} &= r \\
 \Leftrightarrow DN(t) \left(\frac{1}{N(t)} + \frac{1}{K - N(t)} \right) &= r \\
 \Leftrightarrow D \ln(N(t)) - D \ln(K - N(t)) &= r \\
 \Leftrightarrow D \ln \left(\frac{N(t)}{K - N(t)} \right) &= r \\
 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} : \ln \left(\frac{N(t)}{K - N(t)} \right) &= rt + c \\
 \Leftrightarrow \exists c' > 0 : \frac{N(t)}{K - N(t)} &= c' e^{rt} \\
 \Leftrightarrow \exists c' > 0 : N(t) = c' e^{rt} (K - N(t)) \\
 \Leftrightarrow \exists c' > 0 : N(t) = \frac{K c' e^{rt}}{1 + c' e^{rt}} \\
 \Leftrightarrow \exists c' > 0 : N(t) = \frac{K}{1 + (1/c') e^{-rt}}.
 \end{aligned}$$

En passant à la limite pour $t \rightarrow 0^+$, on obtient

$$N(0) = \frac{K}{1 + (1/c')},$$

donc

$$\frac{1}{c'} = \frac{K - N(0)}{N(0)}$$

et on a bien la forme de N indiquée dans l'énoncé.

Exercice 4

..... Soit une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue et bornée. Montrer que l'équation différentielle

$$Df + f = g$$

..... admet une unique solution bornée.

Solution

L'équation différentielle donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1 dont l'équation homogène est $Df + f = 0$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des fonctions qui s'écrivent

$$e^{-x} \left(c + \int_0^x e^t g(t) dt \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

où c est une constante complexe arbitraire.

Dès lors, si $c \in \mathbb{C}$ est tel que

$$f(x) = e^{-x} \left(c + \int_0^x e^t g(t) dt \right), \quad x \in \mathbb{R}$$

est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x f(x)) = 0 = c + \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_0^x e^t g(t) dt,$$

donc

$$c = \int_{-\infty}^0 e^t g(t) dt$$

puisque la fonction $t \mapsto e^t g(t)$ est intégrable en $-\infty$. On obtient donc l'unicité.

Pour terminer, montrons que la fonction

$$f(x) = e^{-x} \int_{-\infty}^x e^t g(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

est bornée. C'est immédiat car si $M \geq 0$ est tel que $|g(x)| \leq M$ pour tout x , alors

$$|f(x)| \leq e^{-x} M \int_{-\infty}^x e^t dt = M.$$

Exercice 5

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continûment dérivable. Montrer que si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + Df(x)) = 0$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} Df(x) = 0.$$

Solution

Posons

$$g(x) = f(x) + Df(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1

$$DF + F = g.$$

Vu la forme des solutions d'une telle équation, il existe donc $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$f(x) = e^{-x} \left(c + \int_0^x e^t g(t) dt \right).$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0,$$

il reste à vérifier que si

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt = 0.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la limite de g en $+\infty$ est nulle, il existe $A > 0$ tel que $|g(t)| \leq \varepsilon$ si $t \geq A$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \left| e^{-x} \int_0^x e^t g(t) dt \right| &\leq e^{-x} \int_0^A e^t |g(t)| dt + \varepsilon e^{-x} \int_A^x e^t dt \\ &= e^{-x} \int_0^A e^t |g(t)| dt + \varepsilon e^{-x} (e^x - e^A) \\ &\leq e^{-x} \int_0^A e^t |g(t)| dt + \varepsilon \end{aligned}$$

pour tout $x \geq A$. Il existe ensuite $N \geq A$ tel que

$$e^{-x} \int_0^A e^t |g(t)| dt \leq \varepsilon, \quad \forall x \geq N.$$

La conclusion s'ensuit.

Exercice 6. Application de la loi du refroidissement de Newton

Un médecin arrivant sur le lieu d'un crime constate que la température du cadavre est de 32°C et que la température de l'air ambiant est de 18°C . Deux heures plus tard, la température du cadavre est descendue à 26°C . En utilisant la « loi du refroidissement de Newton » (voir l'exercice 4 de la section 3 de ce chapitre) et en supposant que la température du corps au moment du décès était de 36°C , déterminer le temps écoulé depuis la mort de la victime jusqu'à l'arrivée du médecin.

JE PRENDS
SA TEMPÉRATURE
POUR SAVOIR
À QUELLE HEURE
IL A ÉTÉ
REFROIDI !



Solution

En notant $T(t)$ la température (en degrés Celsius) du corps à l'instant t (en minutes), le taux de refroidissement du corps DT vérifie la loi de Newton

$$DT(t) = k \left(T_{\text{air}} - T(t) \right)$$

où $T_{\text{air}} = 18$ et où k est une constante de proportionnalité.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 1. Le polynôme caractéristique associé est $z \mapsto z + k$ et s'annule uniquement en $-k$; ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est l'ensemble des fonctions

$$T_H(t) = ce^{-kt}, \quad t \in \mathbb{R}$$

où c est une constante réelle arbitraire. Comme le terme indépendant est la fonction constante $g : t \mapsto 18k$ qui est continue sur $\mathbb{R}$, on peut chercher une solution particulière de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$. On constate directement que la fonction $t \mapsto T_p(t) = T_{\text{air}} = 18$ en est une. Ainsi, la température du corps est donnée par

$$T(t) = T_H(t) + T_p(t) = ce^{-kt} + 18, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Considérons à présent que le cadavre est décédé au temps $t = 0$ et notons t_a le temps (en minutes) écoulé entre le décès et l'arrivée du médecin. Vu les données du problème, on obtient alors successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} T(0) = 36 \\ T(t_a) = 32 \\ T(t_a + 120) = 26 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c + 18 = 36 \\ ce^{-kt_a} + 18 = 32 \\ ce^{-k(t_a+120)} + 18 = 26 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 18 \\ 18e^{-kt_a} = 14 \\ 18e^{-kt_a}e^{-120k} = 8 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 18 \\ e^{120k} = 14/8 \\ e^{-kt_a} = 14/18 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c = 18 \\ k = \ln(7/4)/120 \\ t_a = 120 \times (\ln(9/7)/\ln(7/4)). \end{cases} \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $t_a \approx 53,89$. Par conséquent, le temps écoulé depuis la mort de la victime jusqu'à l'arrivée du médecin est 54 minutes.

Exercice 7. Mouvement d'une corde à sauter

La forme prise par une corde à sauter mise en rotation par deux enfants placés aux extrémités de la corde et synchronisant leurs mouvements est la représentation de la fonction $x \mapsto y(x)$ vérifiant

$$D\left(T(x)Dy(x)\right) + \rho(x)\omega^2 y(x) = 0, \quad x \in]0, l[\quad \text{et} \quad y(0) = y(l) = 0$$

où l désigne la distance entre les deux enfants, ω la vitesse de rotation de la corde, $x \in [0, l] \mapsto T(x)$ la tension dans la corde et $x \mapsto \rho(x)$ la masse de la corde par unité de longueur. On suppose que T est dérivable sur $]0, l[$.

Déterminer les vitesses ω et les formes de la corde associées pour lesquelles il y a effectivement une rotation

1. lorsque la tension dans la corde et la masse par unité de longueur sont des constantes strictement positives.
2. lorsque la tension dans la corde est donnée par $x \mapsto T(x) = e^{2x}$ et que la masse unitaire de la corde varie selon la loi $x \mapsto \rho(x) = \rho_0 e^{2x}$ où ρ_0 est une constante strictement positive.

Solution

1. Dans le cas où la tension dans la corde est constante, c'est-à-dire $T(x) = T$ pour tout $x \in [0, l]$, l'équation donnée est l'équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène

$$TD^2y(x) + \rho\omega^2 y(x) = 0, \quad x \in]0, l[.$$

Le polynôme caractéristique $z \mapsto Tz^2 + \rho\omega^2$ a pour zéros les complexes $-i\omega\sqrt{\rho/T}$ et $i\omega\sqrt{\rho/T}$; les solutions sont donc les fonctions

$$y(x) = c_1 e^{-i\omega\sqrt{\rho/T} x} + c_2 e^{i\omega\sqrt{\rho/T} x}, \quad x \in]0, l[$$

ou encore

$$y(x) = c_1 \cos\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{T}} x\right) + c_2 \sin\left(\omega\sqrt{\frac{\rho}{T}} x\right), \quad x \in]0, l[$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires, vu le contexte.

Déterminons les fonctions qui satisfont aux conditions données. On a successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin\left(\omega l \sqrt{\rho/T}\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ \sin\left(\omega l \sqrt{\rho/T}\right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \omega l \sqrt{\rho/T} = k\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

La fonction identiquement nulle est évidemment solution : elle correspond au cas où la corde est parfaitement tendue entre ses extrémités, ce qui ne permet pas une rotation de la corde à proprement parler. Les vitesses critiques permettant une rotation de la corde sont donc celles correspondant aux autres solutions, à savoir les vitesses

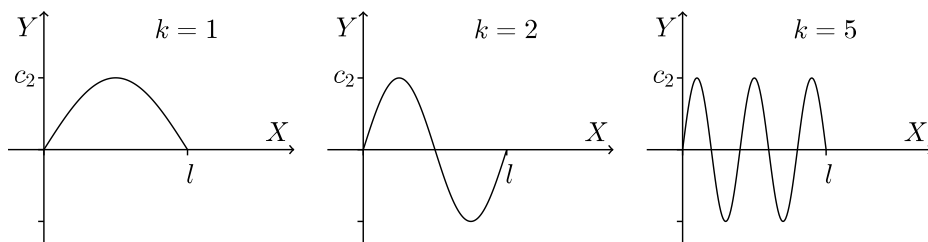
$$\omega_k = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{k\pi}{l}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

qui correspondent aux formes données par

$$y_k(x) = c_2 \sin\left(\omega_k \sqrt{\frac{\rho}{T}} x\right) = c_2 \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad x \in]0, l[,$$

où k est un entier.

En pratique, de manière naturelle, c'est le premier mode, c'est-à-dire $k = 1$, qui apparaît ; il s'agit du cas où la corde forme « un seul pont » entre ses extrémités.



2. Dans ce cas-ci, on a

$$\begin{aligned} D(e^{2x} Dy(x)) + \rho_0 e^{2x} \omega^2 y(x) &= 0 \Leftrightarrow e^{2x} D^2 y(x) + 2e^{2x} Dy(x) + \rho_0 e^{2x} \omega^2 y(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow D^2 y(x) + 2Dy(x) + \rho_0 \omega^2 y(x) = 0. \end{aligned}$$

On doit donc encore traiter une équation différentielle linéaire à coefficients constants homogène d'ordre 2. Le polynôme caractéristique est $z \mapsto z^2 + 2z + \rho_0 \omega^2$ et, selon le signe de son discriminant $\Delta = 4 - 4\rho_0 \omega^2 = 4(1 - \rho_0 \omega^2)$, les solutions prennent des formes différentes.

Cas où $\Delta > 0$, c'est-à-dire $\rho_0 \omega^2 < 1$

Dans ce cas, le polynôme caractéristique a pour zéros les réels

$$-1 - \sqrt{1 - \rho_0 \omega^2} \quad \text{et} \quad -1 + \sqrt{1 - \rho_0 \omega^2};$$

les solutions sont donc les fonctions

$$y(x) = c_1 e^{(-1 - \sqrt{1 - \rho_0 \omega^2})x} + c_2 e^{(-1 + \sqrt{1 - \rho_0 \omega^2})x}, \quad x \in]0, l[,$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires que l'on prendra réelles étant donné le contexte.

En tenant compte des conditions données au départ, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{(-1 - \sqrt{1 - \rho_0 \omega^2})l} + c_2 e^{(-1 + \sqrt{1 - \rho_0 \omega^2})l} = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 \\ c_1 \left[e^{(-1 - \sqrt{1 - \rho_0 \omega^2})l} - e^{(-1 + \sqrt{1 - \rho_0 \omega^2})l} \right] = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, l'unique solution est la fonction identiquement nulle (corde tendue).

Cas où $\Delta = 0$, c'est-à-dire $\rho_0\omega^2 = 1$

Ici, le polynôme caractéristique a le zéro double -1 ; les solutions sont donc les fonctions

$$y(x) = (c_1 x + c_2)e^{-x}, \quad x \in]0, l[$$

où c_1, c_2 sont des constantes réelles arbitraires, vu le contexte.

En tenant compte des conditions données au départ, on obtient successivement

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_1 l e^{-l} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0. \end{cases}$$

Ainsi, l'unique solution est encore la fonction identiquement nulle.

Cas où $\Delta < 0$, c'est-à-dire $\rho_0\omega^2 > 1$

Le polynôme caractéristique a pour zéros les complexes conjugués

$$-1 - i\sqrt{\rho_0\omega^2 - 1} \quad \text{et} \quad -1 + i\sqrt{\rho_0\omega^2 - 1} ;$$

les solutions sont donc les fonctions

$$y(x) = c_1 e^{(-1-i\sqrt{\rho_0\omega^2-1})x} + c_2 e^{(-1+i\sqrt{\rho_0\omega^2-1})x}, \quad x \in]0, l[$$

ou encore

$$y(x) = e^{-x} \left(c_1 \cos \left(\sqrt{\rho_0\omega^2 - 1} x \right) + c_2 \sin \left(\sqrt{\rho_0\omega^2 - 1} x \right) \right), \quad x \in]0, l[$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires, que l'on prendra réelles avec la seconde expression étant donné le contexte.

En tenant compte des conditions données au départ, on obtient successivement

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ e^{-l} c_2 \sin \left(\sqrt{\rho_0\omega^2 - 1} l \right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ \sin \left(\sqrt{\rho_0\omega^2 - 1} l \right) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ \exists k \in \mathbb{Z} : \sqrt{\rho_0\omega^2 - 1} l = k\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

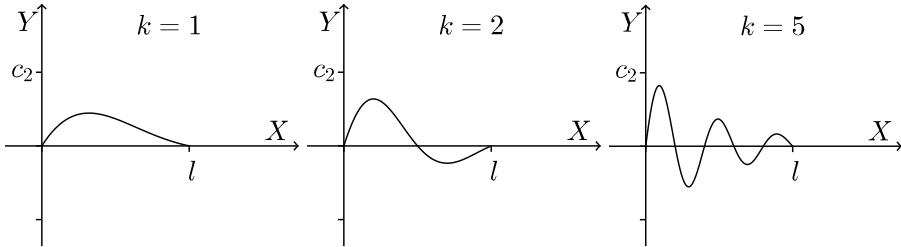
Ainsi, on retrouve la solution identiquement nulle, mais également des solutions non nulles correspondant aux vitesses

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k^2\pi^2 + l^2}{\rho_0 l^2}}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Les formes correspondantes de la corde sont donc modélisées par les représentations graphiques des fonctions

$$y_k(x) = c_2 e^{-x} \sin \left(\sqrt{\rho_0 \omega_k^2 - 1} x \right) = c_2 e^{-x} \sin \left(\frac{k\pi x}{l} \right), \quad x \in]0, l[,$$

où k est un entier.



Annexe

1 Notations et appellations

1. L'ensemble des naturels est noté $\mathbb{N}$; si on enlève 0, l'ensemble est alors noté $\mathbb{N}_0$. De même pour les entiers, à savoir $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}_0$. Pour l'ensemble des nombres réels et complexes, ce sont les notations $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ qui sont utilisées.
2. Notations pour le produit scalaire, le produit vectoriel et la norme : si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs, leurs produits scalaire et vectoriel sont respectivement notés

$$\vec{x} \cdot \vec{y}, \quad \vec{x} \wedge \vec{y}$$

et la norme est notée

$$\|\vec{x}\|.$$

3. Si f désigne une fonction, il ne faut pas confondre $f \circ f$ (composition) et f^2 qui est la notation utilisée pour $x \mapsto (f(x))^2$. Ainsi, par exemple, nous utiliserons aussi la notation $\sin^2(x)$ et $\cos^2(x)$ pour désigner le carré de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$.
4. Soit $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme du second degré ; le nombre

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

est appelé discriminant ou réalisant du polynôme.

5. La notation $\overline{AB}$ désigne la longueur du segment d'extrémités A, B . Ce segment est, quant à lui, noté $[AB]$.
6. Pour alléger le texte, nous avons régulièrement écrit *resp.* à la place de *respectivement*.
7. Une fonction d'une variable réelle qui est dérivable est aussi continue. Ainsi, si une fonction est dérivable à tous les ordres, toutes ses dérivées sont continues. Dès lors, les fonctions indéfiniment dérivables sont donc exactement les mêmes que les fonctions indéfiniment continûment dérivables.

2 Informations bibliographiques et historiques

La plupart des informations bibliographiques sont extraites de Wikipedia.

2.1 Cardan et Dal Ferro

Dal Ferro est né à Bologne en 1465 et y décédé en 1526 ; il a été professeur d'arithmétique et de géométrie à l'université de Bologne.

Jérôme Cardan est un mathématicien, astrologue, joueur, inventeur et médecin italien né en 1501 et mort en 1576 à l'issue d'une vie tumultueuse. On lui doit par exemple l'invention des joints de transmission, et les « cardans » des automobiles portent donc son nom. C'est dans son célèbre ouvrage *Ars Magna* qu'a été publiée la méthode de résolution des équations cubiques, découverte indépendamment par Dal Ferro puis Tartaglia, et celle des équations de degré 4 due à son disciple Lodovico Ferrari. Grâce à Abel et Galois, nous savons depuis le début du XIX^e siècle qu'il n'existe pas de formule de résolution de l'équation générale de degré 5.

L'équation du deuxième degré $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de racines réelles précisément quand le discriminant $b^2 - 4ac$ est négatif, donc quand les formules de résolution n'ont pas de sens dans l'ensemble des réels. Mais le troisième degré nous confronte à un phénomène radicalement différent. C'est lorsque le discriminant $4p^3 + 27q^2$ est négatif, donc lorsque la formule de Dal Ferro trouvée vers 1500 et souvent appelée formule de Cardan n'a « plus de sens », que l'équation a trois racines réelles. Ceci est démontré dans le chapitre 3. Ainsi, Bombelli considère en 1579 l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ et ose écrire

$$4 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Il faudra environ deux siècles de plus pour que les nombres complexes soient pleinement acceptés. Notons encore que chaque nombre complexe a trois racines cubiques, et qu'il faut donc préciser comment ces racines cubiques se combinent pour que la formule de Dal Ferro donne bien trois racines (et non neuf). Ce travail sera fait par Euler, avant d'être approfondi par Lagrange puis Galois.

2.2 Cauchy

Augustin Louis Cauchy est un mathématicien français, membre de l'Académie des sciences et professeur à l'École polytechnique ; il est né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux le 23 mai 1857. Né un mois après la prise de la Bastille et décédé sous le Second Empire, il connaîtra bien des régimes politiques. Royaliste, il s'exilera pourtant de 1830 à 1838 pour ne pas prêter serment à Louis-Philippe dont il ne reconnaît pas la légitimité. Cauchy a été l'un des mathématiciens les plus prolifiques de tous les temps, avec près de 800 parutions et 7 ouvrages. Ses recherches couvrent l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations ont été précurseurs de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

2.3 Cesàro

Ernesto Cesàro est un mathématicien italien, né le 12 mars 1859 à Naples et mort tragiquement à Torre Annunziata, le 12 septembre 1906, en essayant de sauver son plus jeune fils de la noyade. Il est connu pour ses contributions à la géométrie différentielle

et à la théorie des séries. Les moyennes de Cesàro ont été conçues pour donner un sens à la somme de certaines séries divergentes.

2.4 Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet est un mathématicien allemand, né le 13 février 1805 à Düren (Allemagne) et mort le 5 mai 1859 à Göttingen (Allemagne). Etudiant à Paris de 1822 à 1826, il y croisa Abel qui le qualifia de “mathématicien très subtil”. Il a apporté de profondes contributions à la théorie des nombres, en créant le domaine de la théorie analytique des nombres, et à la théorie des séries de Fourier et d’autres sujets en analyse mathématique ; il est crédité d’être l’un des premiers mathématiciens à donner la définition formelle moderne d’une fonction.

Pour la petite histoire : son grand-père paternel avait émigré à Düren après avoir quitté Richelette, village voisin de Liège en Belgique. C’est de là que vient son patronyme Lejeune Dirichlet : « le jeune de Richelette ».

2.5 Euler

Leonhard Euler est un mathématicien et physicien suisse, né le 15 avril 1707 à Bâle (Suisse) et mort le 18 septembre 1783 à Saint-Petersbourg (Empire russe). Euler a fait d’importantes découvertes dans des domaines aussi variés que le calcul infinitésimal et la théorie des graphes. Il a également introduit une grande partie de la terminologie et de la notation des mathématiques modernes, en particulier pour l’analyse mathématique, comme la notion de fonction mathématique. Il est aussi connu pour ses travaux en mécanique, en dynamique des fluides, en optique et en astronomie. Ses oeuvres complètes constituent plus de 80 volumes.

2.6 Fermat

Pierre de Fermat est un magistrat, physicien et mathématicien français né dans la première décennie du XVII^e siècle à Beaumont-de-Lomagne (France) et mort à Castres (France) en janvier 1665. Il a très peu publié et c’est par sa correspondance que nous connaissons ses travaux en théorie des nombres, en analyse et en optique. On lui attribue en particulier le résultat concernant la décomposition des nombres premiers du type $4k + 1$ en somme de carrés de naturels.

2.7 Fibonacci

Leonardo Fibonacci est un mathématicien italien né vers 1175 à Pise et y décédé en 1250. Il avait, à l’époque, pour nom d’usage « Leonardo Pisano ». Il est encore actuellement connu en français sous l’équivalent « Léonard de Pise » et se surnommait parfois lui-même « Leonardo Bigollo » (*bigollo* signifiant « voyageur » en italien). Dès

son plus jeune âge, il a accompagné son père à Bejaia (Bougie) en Algérie, où il a appris la numération de position et découvert son efficacité. S'il est bien connu pour la suite de Fibonacci, il a surtout joué un rôle d'une importance considérable en introduisant le savoir mathématique des musulmans, et en particulier les chiffres indo-arabes, en Europe.

2.8 Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier est un mathématicien et physicien français né le 21 mars 1768 à Auxerre et mort le 16 mai 1830 à Paris. Egyptologue et Préfet du département de l'Isère sous le Premier Empire, il est également mathématicien. Il est connu pour avoir formalisé la diffusion de la chaleur en utilisant la décomposition d'une fonction quelconque en une série trigonométrique convergente. Ces décompositions sont appelées séries de Fourier ; la méthode de calcul permettant de passer de façon réversible d'une fonction à la série trigonométrique correspondante est une transformation de Fourier. Cette méthode très féconde est devenue incontournable en théorie du signal, imagerie numérique, compression de données, dans l'exploitation des systèmes 3G, 4G.

2.9 Fresnel

Augustin Fresnel est un ingénieur et physicien français, né en 1788 à Broglie (France) et mort en 1827 en France également, à Ville-d'Avray. Il est célèbre pour sa théorie ondulatoire de la lumière, laquelle s'oppose à la théorie corpusculaire d'Isaac Newton. La mécanique quantique moderne réconciliera ces deux points de vue.

2.10 de L'Hospital

Guillaume François Antoine de L'Hôpital, parfois orthographié de L'Hospital, marquis, est un mathématicien français né en 1661 à Paris et y décédé en 1704. Il est connu pour la règle qui porte son nom : la règle de L'Hôpital, qui permet de calculer la valeur d'une limite pour une fraction où le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers zéro. Il est aussi l'auteur du premier livre en français sur le calcul différentiel *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*.

2.11 Leibniz

Gottfried Wilhelm Leibniz est un philosophe, scientifique, mathématicien, logicien, diplomate, juriste, bibliothécaire et philologue allemand né à Leipzig le 1^{er} juillet 1646 et mort à Hanovre le 14 novembre 1716. Esprit polymathe, il occupe une place primordiale dans l'histoire de la philosophie et l'histoire des sciences (notamment des mathématiques) et est souvent considéré comme le dernier « génie universel ». Leibniz est également un précurseur de la logique moderne.

2.12 Mercator

Gérard Mercator est un mathématicien, géographe et cartographe, né en Belgique en 1512 et mort en Allemagne en 1594. Il est connu pour la projection de Mercator qui représente le globe terrestre de façon conforme, c'est-à-dire en respectant les angles, mais qui augmente fortement les surfaces lorsqu'on s'approche des pôles.

2.13 Newton

Isaac Newton est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Il est né en janvier 1643 à Woolsthorpe Manor (Royaume-Uni) et décédé le 31 mars 1727 à Londres. C'est une figure emblématique des sciences. Il est surtout reconnu pour sa théorie de la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle et la création, en concurrence avec Gottfried Wilhelm Leibniz, du calcul infinitésimal. Mais il a produit de nombreux autres travaux.

2.14 Pythagore

Pythagore est un réformateur religieux et philosophe grec qui serait né aux environs de 580 av. J.-C. à Samos, une île de la mer Égée au sud-est de la ville d'Athènes ; on établit sa mort vers 495 av. J.-C., à l'âge de 85 ans. Il aurait été également mathématicien et scientifique selon une tradition tardive. La vie énigmatique de Pythagore permet difficilement d'éclaircir l'histoire de ce réformateur religieux, mathématicien, philosophe et thaumaturge. Il n'a jamais rien écrit ; l'authenticité des quelques lignes qu'on lui attribue n'est pas établie.

2.15 Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann est un mathématicien allemand, né le 17 septembre 1826 à Breselenz, État de Hanovre, et mort de tuberculose le 20 juillet 1866 à Selasca, hameau de la commune de Verbania (Italie). Influent sur le plan théorique, il a apporté de nombreuses contributions importantes à l'analyse et à la géométrie différentielle, dont certaines ont permis par la suite le développement de la relativité générale. La conjecture qu'il a formulée en 1859 - appelée maintenant Hypothèse de Riemann - est considérée comme le problème ouvert le plus important des mathématiques.

2.16 Rolle

Michel Rolle est un mathématicien français né à Ambert (France) le 21 avril 1652 et mort à Paris le 8 novembre 1719. Il est principalement connu pour avoir établi, en 1691, dans le cas particulier des polynômes réels à une variable, une première version du théorème

qui porte maintenant son nom. Il inventa aussi, pour désigner la racine n -ième d'un réel x , la notation normalisée : $\sqrt[n]{x}$.

2.17 Schwarz

Hermann Amandus Schwarz est un mathématicien allemand né le 25 janvier 1843 à Hermsdorf, en Silésie, et mort le 30 novembre 1921 à Berlin. Ses travaux sont marqués par une forte interaction entre l'analyse et la géométrie.

2.18 Stirling

James Stirling est un mathématicien écossais né en mai 1692 à Garden près de Stirling et mort le 5 décembre 1770 à Édimbourg. A Londres en 1730, Stirling publie ses principaux travaux, précurseurs de l'analyse numérique, sous le titre *Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*. Ils concernent les séries, avec l'addition, la somme, l'interpolation et les puissances carrées. L'équivalent asymptotique de $n!$, pour lequel Stirling est le plus connu, apparaît dans cet ouvrage et fournit un lien profond entre les nombres entiers, le nombre e et le nombre π .

2.19 Taylor

Brook Taylor est un homme de science anglais, né à Edmonton, aujourd'hui un quartier de Londres, le 18 août 1685, et mort à Londres le 29 décembre 1731. Principalement connu comme mathématicien, il s'est aussi intéressé à la musique, à la peinture et à la religion. Il a ajouté aux mathématiques une nouvelle branche appelée « calcul de différences finies », a inventé l'intégration par parties et découvert les séries appelées « développements de Taylor ».

2.20 Thalès

Thalès de Milet, appelé communément Thalès, est un philosophe et savant grec né à Milet vers 625 av. J.C. et mort vers 547 av. J. C. dans cette même ville. Philosophe de la nature, il passe pour avoir effectué un séjour en Égypte, où il aurait été initié aux sciences égyptienne et babylonienne. On lui attribue de nombreux exploits arithmétiques, comme le calcul de la hauteur de la grande pyramide ou la prédiction d'une éclipse, ainsi que le théorème de Thalès. Il fut l'auteur de nombreuses recherches mathématiques, notamment en géométrie. Thalès est un personnage semi-légendaire dont ne subsiste aucun écrit. On estime cependant qu'il a pu s'écarter des discours explicatifs délivrés par la mythologie pour privilégier une approche naturaliste caractérisée par l'observation et la démonstration.

2.21 Verhulst

Pierre-François Verhulst est un mathématicien belge né à Bruxelles le 28 octobre 1804 et y décédé le 15 février 1849. En 1838, il propose « le modèle de Verhulst » qui décrit l'évolution des populations animales grâce à un modèle non exponentiel. C'est dans la publication de 1845 qu'il nomme la courbe obtenue « courbe logistique », sans donner l'explication de ce terme.

2.22 Wallis

John Wallis est un mathématicien anglais, né le 23 novembre 1616 à Ashford et mort le 28 octobre 1703 à Oxford. Ses travaux sont précurseurs de ceux de Newton. Ils concernent principalement le calcul différentiel et intégral ; on lui doit également l'introduction du symbole ∞ . Notons qu'il est également précurseur de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie.

2.23 Young

William Henry Young est un mathématicien anglais né à Londres le 20 octobre 1863 et mort à Lausanne le 7 juillet 1942. Ses études ont principalement porté sur la théorie de la mesure, les intégrales de Lebesgue, les séries de Fourier et le calcul différentiel. Il a apporté de brillantes contributions à l'analyse complexe.

2.24 Miroirs ardents

La preuve de cette propriété est attribuée à un contemporain et correspondant d'Archimède nommé Dositheos, habitant Alexandrie et probablement Juif car son nom est la traduction grecque du prénom Matthieu. Le problème était important pour la construction de « miroirs ardents », un grand problème de l'époque : les miroirs sphériques étaient plus faciles à construire, mais moins efficaces que les miroirs paraboliques.

Quant aux « miroirs ardents », notons qu'on désigne ainsi deux miroirs métalliques concaves aux foyers desquels on peut placer des corbeilles, l'une contenant des charbons ardents, l'autre de l'amadou (le plus souvent). Ils permettent d'enflammer des matériaux à distance.

Bibliographie

- Jacques Bair et Geneviève Hamende, *Mathématiques générales, Problèmes résolus*, De Boeck Université 1992
- Françoise Bastin, *Cours de mathématiques (ULg) pour étudiants en sciences (première année), Syllabus de théorie, année académique 2016-2017*
- Marvin L. Bittinger, Neal Brand, John Quintanilla, *Calculus for the life sciences*, Pearson 2006
- Sous la direction de Frédéric Bertrand et Myriam Maumy-Bertrand, Sandie Ferri-gno, Didier Marx, Aurélie Muller-Gueudin, *Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur*, éditions Dunod 2013
- Fernando Corbalan, *Le Nombre d'or. Le Langage mathématique de la beauté*, RBA Coleccionables Barcelone 2011
- Jacqueline Crasborn, *Cours de mathématiques (ULg) pour étudiants en sciences (première année), Syllabus d'exercices, année académique 2016-2017*
- Éric Delhez, *Analyse Mathématique, tome 1*, 2016-2017, Université de Liège, syllabus du cours et questions d'examens
- Jean-Paul Donnay, *Cartographie mathématique*, collection surfaces, 2, Université de Liège 1997
- Jean-Paul Donnay, *Projections cartographiques (GEOG2037)*, support de cours en ligne (accès restreint eCampus), Université de Liège 2018
- André Garcet, *Exercices d'analyse mathématique*, à l'usage des premières candidatures en sciences mathématiques et physiques, Éditions Derouaux 1990
- André Garcet, *Exercices de calcul intégral*, à l'usage des premières candidatures en sciences mathématiques et physiques, Éditions Derouaux 1990
- Jean Schmets, *Analyse mathématique*, à l'usage des premières candidatures en sciences mathématiques et physiques, Éditions Derouaux 1990
- Jean Schmets, *Analyse mathématique, Introduction au calcul intégral*, à l'usage des premières candidatures en sciences mathématiques et physiques, Éditions Derouaux 1988
- James Stewart, *Analyse, Concepts et Contextes, volume 1. Fonctions d'une variable*, De Boeck 1998 (traduction de *Calculus, Concepts and Contexts*)
- Exercices de l'examen d'entrée aux études d'ingénieur civil, Université de Liège (multiples années)*
- Document pdf* <http://jpgonet.free.fr/conseils/10commandement.pdf>
- Site Internet* à l'adresse <http://exo7.emath.fr>
- Site Internet* à l'adresse <http://www.letudiant.fr/premium/texas-instruments/article/les-10-commandements-pour-reussir-en-maths-au-lycee.html>

Index

A

asymptote, 18

C

Cauchy, 452

Cauchy-Schwarz, 374, 395

Cesàro, 226, 301, 452

complexes, 15, 21, 165

composantes dans une base, 20

conique, 16, 19, 81

conjugué d'un complexe, 21

« Critères pratiques » d'intégrabilité, 333

D

dérivée, 189, 190, 227

de L'Hospital, 189, 454

directrice, 16–19

Dirichlet, 128, 173, 356, 396, 398, 453

discriminant, 15

E

ellipse, 16

équation différentielle, 411

Euler, 139, 375, 453

excentricité, 16–19

F

Fermat, 31, 453

Fibonacci, 158, 179, 182, 184, 222, 453

fonction exponentielle, 189

fonctions cosinus et sinus, 19, 190

Fourier, 128, 356, 454

foyer, 16–19

fraction rationnelle propre, 16

Fresnel, 400, 454

H

hyperbole, 17

I

intégrale, 330

Intégration par changement de variable,
332

Intégration par parties, 332

Intégration par variation de primitive, 332

L

Leibniz, 288, 454

M

Mercator, 359, 455

Miroirs, 95, 457

module d'un complexe, 21

N

Newton, 28, 318, 436, 443, 455

nombre d'or, 48, 75–77, 116, 151, 154,
179, 222, 225, 369

norme, 20

P

parabole, 18

partie imaginaire, 21

partie réelle, 21

pentagone régulier convexe, 126

polygone convexe, 121, 125, 135

primitive, 189, 308

produit scalaire, 20

produit vectoriel, 20

Pythagore, 11, 19, 455

R

réalisant, 15

Recherche d'une solution particulière, 412

Riemann, 329, 455

Rolle, 189, 307, 455

S

Schwarz, 374, 395, 456

Stirling, 385, 456

Structure générale de l'ensemble des
solutions, 411

suite numérique, 21, 190

T

tangente et cotangente, 20

Taylor, 189, 253, 308, 389, 456

Index

Techniques d'intégration, 332
Thalès, 138, 456

V

Verhulst, 293, 385, 457

W

Wallis, 375, 381, 384, 385, 390, 457

Y

Young, 296, 457