

**"Les cours de Sorbonne"**

**PROBLÈMES de  
THÉORIE DES FONCTIONS  
et TOPOLOGIE**

par

**M. CHOQUET**

Professeur  
à la Faculté des Sciences  
de Paris

**RASSEMBLÉS AVEC L'AIDE DE C. MAYER**



**CENTRE DE DOCUMENTATION UNIVERSITAIRE**

**5 PLACE DE LA SORBONNE . PARIS-V**

QA611 . C43

NUNC COGNOSCO EX PARTE



TRENT UNIVERSITY  
LIBRARY

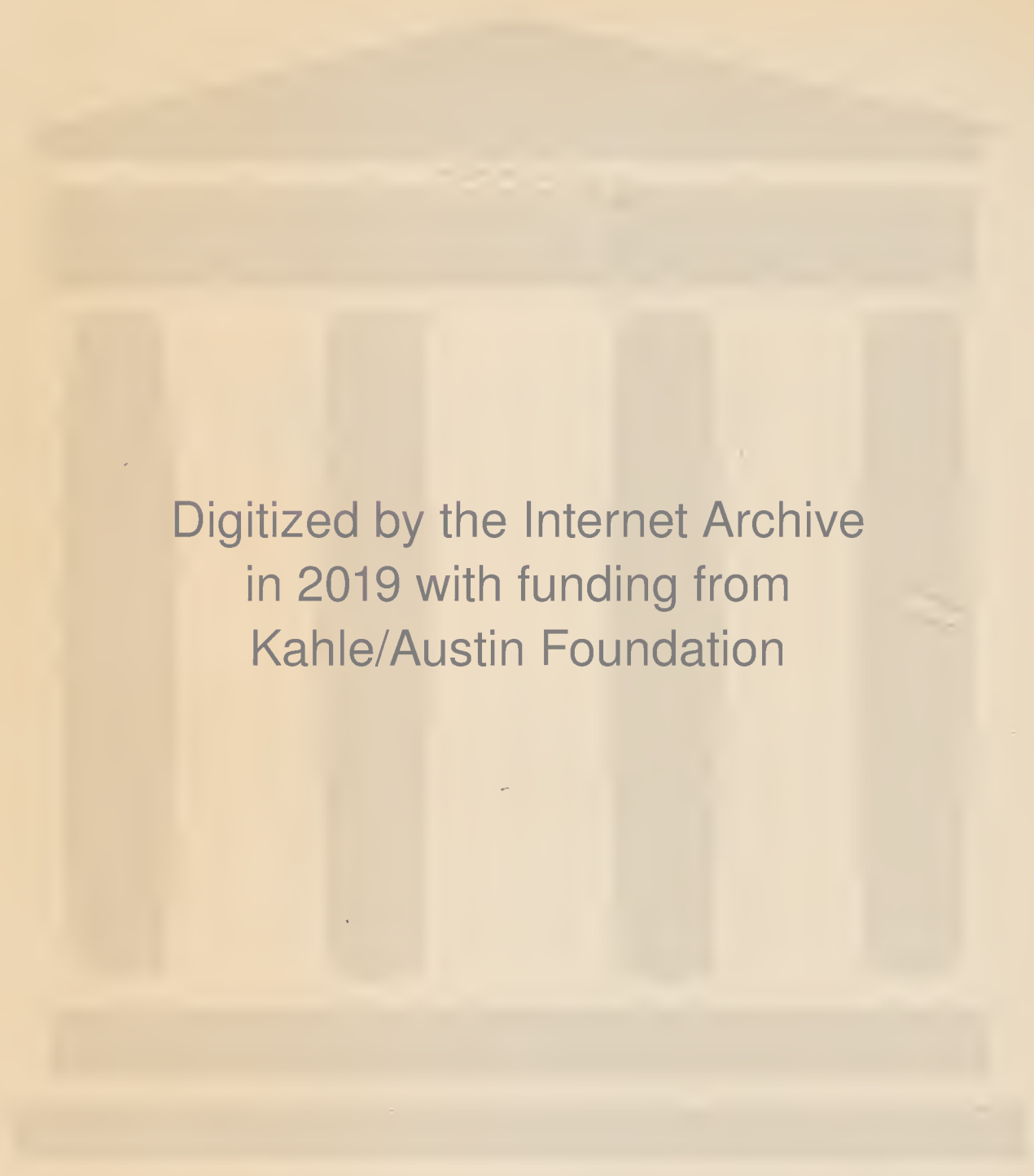
NOTATIONS

Soient  $E$  un ensemble,  $A$  et  $B$  des parties de  $E$  ; et soit  $x \in E$ .  
On notera  $A \setminus B$  l'ensemble  $A \cap \bar{B}$  ; et  $A \setminus x$  l'ensemble  $A \cap \{\bar{x}\}$

Si  $E$  est un espace topologique, on rappelle qu'un  $G_\delta$  est une intersection dénombrable d'ouverts ; un  $F_\sigma$  (resp.  $K_\sigma$ ) est une réunion dénombrable de fermés (resp. compacts); un  $F_{\sigma\delta}$  est une intersection dénombrable de  $F_\sigma$ , etc....

D'autre part, un ensemble non-dense est un ensemble rare, un ensemble de première catégorie est un ensemble maigre, et un résiduel est le complémentaire d'un ensemble de première catégorie. (cf. Bourbaki, Topologie Générale, chap. IX, Espaces de Baire).

---



Digitized by the Internet Archive  
in 2019 with funding from  
Kahle/Austin Foundation

<https://archive.org/details/problemesdetheor0000choq>

I

TOPOLOGIE GENERALE

120263

1

CONNEXION

[Les parties III et IV sont indépendantes l'une de l'autre]

Pour un espace topologique  $E$ , on notera :

- CO la propriété de connexion
- LCO la propriété de locale connexion définie pour l'une des conditions suivantes, dont on montrera l'équivalence
  - a)  $\forall x \in E$ ,  $\exists$  un système fondamental de voisinages connexes;
  - b) les composantes connexes de tout ouvert  $O \subset E$  sont ouvertes.
- CA propriété de connexion par arcs : c'est-à-dire que  $\forall a, b \in E$ , il existe une application continue du segment  $[0, 1]$  dans  $E$ , telle que  $f(0) = a$  et  $f(1) = b$ .
- LCA locale connexion par arcs, définie par l'une des propriétés suivantes, dont on montrera l'équivalence :
  - a)  $\forall x \in E$ ,  $\exists$  un système fondamental de voisinages connexes par arcs.
  - b)  $\forall a$ ,  $\forall V(a)$  un voisinage de  $a$ ,  $\exists$  un voisinage  $W(a) \subset V(a)$  tel que tout point de  $W$  puisse être joint à  $a$  par un arc  $\subset W(a)$ .
  - c) les composantes connexes par arcs de tout ouvert  $O \subset E$  sont ouvertes.

(N.B. : On appelle composante connexe par arcs d'un point  $a$ , le plus grand ensemble connexe par arcs contenant ce point).

I - Montrer :

- qu'une image continue d'un espace CA est CA.
- qu'un produit d'espace CA est CA.
- qu'un produit de L.C.A. est L.C.A.
- qu'un espace CA est CO.
- qu'un espace LCA est LCO.

II - Montrer, en s'aidant du graphe de la fonction  $y = \sin \frac{1}{x}$   $x > 0$  par exemple,

1°) que les composantes CA d'un espace E ne sont, en général, ni ouvertes, ni fermées.

2°) qu'un espace peut être CO sans être CA.

- Trouver un compact de  $\mathbb{R}^2$  qui soit CA sans être LCO.

- Montrer qu'un espace CO et LCA est CA.

- Montrer qu'un ouvert d'un LCO (resp. LCA) est LCO (resp. LCA).

- Montrer que dans un espace LCA les composantes CA sont ouvertes et fermées, et coïncident avec les composantes CO.

- Donner des exemples simples d'espaces LCA.

III - a) Soient E topologique compact et B une base de filtre sur E formée d'ensembles connexes. Montrer que l'adhérence du filtre  $\Phi$  engendré par B est connexe.

(On pourra utiliser les théorèmes suivants :

1°) un espace compact est normal.

2°) théorème sur l'adhérence d'un filtre dans un espace compact).

N.B.- Les étudiants pourront, à leur plaisir, raisonner sur une suite décroissante d'ensembles connexes.

b) Dédire de a) que, si E est topologique et si B est une base de filtre sur E formée d'ensembles compacts et connexes, alors l'adhérence A du filtre engendré par B est compacte connexe.

- Donner un contre-exemple à ce théorème si on considère une suite décroissante d'ouverts connexes de  $\mathbb{R}^2$ .

- En s'aidant du graphe de  $y = \sin \frac{1}{x}$ , montrer que les ensembles de B peuvent être CA et LCA sans que A soit CA et LCO.

IV - a) On considère E topologique. Soient A et B deux parties de E non vides, disjointes. On dit que  $F \subset E$  joint A et B s'il n'existe pas de partie G ouverte et fermée de F telle que

$$A \subset G \quad \text{et} \quad B \cap G = \emptyset$$

- Montrer la symétrie de A et B dans cette définition.
- Montrer que si F joint A et B, si  $A_1 \supset A$  et  $B_1 \supset B$ , alors F joint  $A_1$  et  $B_1$ .
- Montrer qu'un espace connexe joint deux quelconques de ses parties.
- Montrer que si E est connexe, A fermé et  $x \in A$ , alors A joint x et la frontière de A, notée  $Fr(A)$ .

b) Soit B un ensemble fermé dans E topologique.

- Montrer que dans les cas suivants, toute composante connexe de B rencontre  $\bar{B}$

1°) E connexe par arcs.

2°) E connexe compact.

3°) E connexe et localement connexe.

c) Dédurre de b,2) que si E est compact connexe, il n'existe pas de partition dénombrable  $E = \bigcup_1^{\infty} F_n$ ,  $F_n$  fermés.

(on montrera pour cela que si  $F_n$  en est une,  $\exists B$  compact connexe tel que

$$B \cap A_1 = \emptyset$$

$$B \cap A_j \neq \emptyset \quad \text{pour une infinité de } j,$$

puis raisonner par récurrence).

Le théorème s'étend-il à  $E = \mathbb{R}$  ? ( $\mathbb{R}$  ensemble des réels).

---

2

PROPRIETE DE L'IMAGE CONTINUE D'UN ARC.

Définitions.

a) Soit E un ensemble totalement ordonné muni de la topologie de l'ordre.

On dit que  $E$  est un arc s'il est compact et connexe pour la topologie de l'ordre.

b) Soient  $F$  un espace topologique séparé, et  $A$  un sous-ensemble de  $F$ . On dira que  $A$  est un arc de  $F$  s'il existe une relation d'ordre total sur  $A$  pour laquelle  $A$  soit un arc et telle que la topologie de l'ordre sur  $A$  soit identique à la topologie du sous-espace  $A$  de  $F$ .

Le but de ce problème est de démontrer la proposition suivante:

PROPOSITION.- Soient  $E$  un arc,  $F$  un espace topologique séparé,  $f$  une application continue de  $E$  dans  $F$ .

Pour tout couple  $(a, b)$  de points de  $f(E)$ , il existe un arc de  $f(E)$  contenant  $a$  et  $b$ .

### I - Etude d'un arc $E$ .

1°) Montrer que tout sous-ensemble  $M$  de  $E$  admet une borne inférieure et une borne supérieure et que

$$\inf M \in \bar{M}, \quad \sup M \in \bar{M}.$$

2°) Montrer que, pour qu'un sous-ensemble  $M$  non vide de  $E$  soit connexe, il faut et il suffit qu'il soit un intervalle (fermé, ouvert ou semi-ouvert).

3°) Montrer qu'un arc est localement connexe et que tout ouvert non vide de  $E$  est réunion d'une famille d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

4°) On dit qu'une relation d'équivalence  $R$  sur  $E$  est compatible avec la structure d'arc de  $E$  si toute classe d'équivalence suivant  $R$  est un intervalle fermé de  $E$ .

Soient  $R$  une relation d'équivalence compatible avec la structure d'arc de  $E$  et  $\varphi$  l'application canonique de  $E$  sur  $E/R$ .

Montrer que :

a)  $E/R$  est compact et connexe.

b) Il existe une relation d'ordre total sur  $E/R$  telle que  $\varphi$  soit croissante, et pour laquelle la topologie de l'ordre soit identique à la topologie quotient sur  $E/R$ . (On pourra montrer successivement que le saturé pour  $R$  d'un intervalle est un intervalle et que tout ouvert saturé est réunion d'une famille d'intervalles ouverts saturés deux à deux disjoints.)

## II - Etude de l'image continue d'un arc.

Définition.- Soient  $E$  un ensemble abstrait,  $R_1$  et  $R_2$  deux relations d'équivalences sur  $E$ .

On dit que  $R_1$  est plus fine que  $R_2$  si pour  $x, y \in E$ ,

$$(x R_1 y) \implies (x R_2 y) .$$

On définit ainsi une relation d'ordre sur l'ensemble des relations d'équivalence sur  $E$ . Soient toujours  $E$  un arc,  $F$  un espace topologique séparé,  $f$  une application continue de  $E$  dans  $F$ .

On considère l'ensemble  $\mathcal{R}_f$  des relations d'équivalence  $R$  sur  $E$  qui vérifient les conditions suivantes :

a)  $R$  est compatible avec la structure d'arc de  $E$ .

b) Pour toute classe d'équivalence  $C$  suivant  $R$ , on a

$$f(\inf C) = f(\sup C) .$$

1°) Soit  $R \in \mathcal{R}_f$ . On définit une application  $f_R$  de  $E/R$  dans  $f(E)$  en posant

$$f_R(\dot{x}) = f(\inf \dot{x}) = f(\sup \dot{x})$$

où  $\dot{x}$  est la classe d'un élément  $x$  de  $E$ .

Montrer que  $f_R$  est une application continue de l'arc  $E/R$  dans  $F$ .

2°) Montrer que toute famille totalement ordonnée d'éléments de  $\mathcal{R}_f$  admet un élément minorant. En déduire que tout élément de  $\mathcal{R}_f$  est minoré par un élément minimal.

3°) Soit  $R$  un élément de  $\mathcal{R}_f$ . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

a)  $R$  est minimal,

b) l'application  $f_R$  de  $E/R$  dans  $f(E)$  est injective.

4°) En utilisant l'ensemble des résultats précédents à un sous-arc convenable  $[x_0, x_1]$  de  $E$ , démontrer la proposition cherchée.

5°) (Question difficile)

On suppose seulement que  $E$ , totalement ordonné, est connexe pour la topologie de l'ordre. La proposition reste-t-elle toujours vraie ?

-----

2

Soit  $E$  un espace séparé connexe,  $a$  et  $b$  deux points de  $E$ .

1°) On suppose qu'il n'existe aucune partie connexe de  $E$  distincte de  $E$  et contenant  $a$  et  $b$  ; montrer que pour tout  $x \in E$  distinct de  $a$  et  $b$ ,  $\{x\}$  est la réunion des deux ouverts connexes disjoints  $A(x)$  et  $B(x)$  tels que  $a \in A(x)$ ,  $b \in B(x)$ . (Montrer que  $\{x\}$  est réunion de deux ouverts disjoints  $A$  et  $B$  ; puis si  $K$  est une partie ouverte et fermée relativement à  $A$ , montrer que son adhérence relativement à  $E$  est  $K \cup \{x\}$  et est connexe :  $A$  et  $B$  sont alors connexes et  $a$  et  $b$  n'appartiennent pas tous deux à  $A$ , ni tous deux à  $B$ ).

2°) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) Il n'existe aucune partie connexe de  $E$  distincte de  $E$  et contenant  $a$  et  $b$ .

b) Pour tout point  $x$  de  $E$  il existe deux fermés  $A$  et  $B$  tels que:

$$E = A \cup B \quad a \in A \quad b \in B \quad A \cap B = \{x\}.$$

Lorsque ces conditions sont réalisées, montrer que la relation  $y \in \overline{A(x)}$  est une relation d'ordre total sur  $E$ , et que la topologie associée à cet ordre est moins fine que la topologie initiale.

3°) Si  $E$  possède les propriétés (a) et (b), et possède de plus une base dénombrable d'ouverts, montrer qu'il existe une application  $\varphi$  biunivoque et continue de  $E$  sur  $[0, 1]$ . On pourra d'abord définir cette application sur une partie dénombrable partout dense de  $E$ ,  $d_0, d_1, \dots, d_n, \dots$  :  $\varphi(a) = 0$ ,  $\varphi(b) = 1$ , et si  $d_k$  et  $d_l$  sont les éléments voisins de  $d_n$  ( $k$  et  $l \leq n - 1$ ),  $\varphi(d_n) = \frac{1}{2} (\varphi(d_k) + \varphi(d_l))$ .

4°) Montrer que  $E$  est un arc (homéomorphe au segment  $[0, 1]$ ) dans chacun des cas suivants :

- $E$  est compact,
  - $E$  est localement connexe.
- 

4

Soit  $E$  un espace métrique complet localement connexe.

1°) Si  $x$  et  $y$  sont deux points d'un ouvert connexe  $\Omega$  de  $E$ , montrer qu'on peut joindre  $x$  à  $y$  par une chaîne d'ouverts connexes  $\Omega_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) possédant les propriétés suivantes :

- diamètre  $(\Omega_i) < \varepsilon$
- $x \in \Omega_1$        $y \in \Omega_n$        $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset \iff |i - j| \leq 1$
- $\bar{\Omega}_i \subset \Omega$

Appelons  $C = \bigcup \Omega_i$  une  $\varepsilon$ -chaîne irréductible joignant  $x$  et  $y$  dans  $\Omega$ .

2°) Soit  $\varepsilon, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots$  une suite de nombres réels tendant vers 0. On définit par récurrence une suite  $C_n$  de  $\varepsilon_n$ -chaînes irréductibles telles que  $C_n$  joigne  $x$  et  $y$  dans  $C_{n-1}$  et que chaque ouvert  $\Omega_i$  de  $C_n$  ait son adhérence dans un ouvert de  $C_{n-1}$ .

Montrer que l'intersection des chaînes  $C_n$  est compacte et connexe. (On peut montrer que  $\bigcap C_n$  est fermé et précompact).

Montrer que  $\bigcap C_n$  possède la propriété (b) et en déduire que E est localement connexe par arcs.

3°) On suppose de plus que E est compact et connexe. Montrer à l'aide de I qu'il existe une application continue de  $[0, 1]$  sur E. (Pour chaque  $\varepsilon$  montrer qu'il existe un nombre  $\delta > 0$  tel que si  $d(x, y) < \delta$ , on peut joindre x et y par un arc de diamètre inférieur à  $\varepsilon$ ).

-----

5

ENSEMBLE TRIADIQUE DE CANTOR

[ Nous adopterons les notations de BOURBAKI cf. Topologie générale, 2e édition, chap. IV, Paragr. 2, n° 5, Exemple, et Paragr. 8 ] .

1°- Rappeler la définition de l'ensemble de Cantor K.

2°- Montrer que l'ensemble K est identique à l'ensemble des nombres x de la forme

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n} ,$$

où  $u_n = 0$  ou  $u_n = 2$  pour tout n ; les nombres x qui sont origine (resp. extrémité) d'un intervalle contigu à K étant ceux pour lesquels il existe p tel que

$$u_n = 2 \quad (\text{resp. } u_n = 0) \quad \text{pour tout } n \geq p .$$

Si on pose

$$v_n = u_n/2 \quad \text{pour tout } n ,$$

et

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{v_n}{2^n} ,$$

montrer que f est une application continue de K sur  $[0, 1]$  . En déduire que K a la puissance du continu. [BOURBAKI. - Topologie Générale, 2e édition, chap. IV, Paragr. 8, Exercice 9.]

3°- L'ensemble de Cantor considéré comme limite projective.- Pour chaque entier  $n \geq 1$ , soit  $A_n = \{0, 2\}^{\{1, 2, \dots, n\}}$  l'ensemble des suites de  $n$  termes égaux à 0 ou 2 ; et  $\varphi_n$  l'application de  $A_{n+1}$  sur  $A_n$  définie par

$$\varphi_n(u_1 u_2 \dots u_{n+1}) = (u_1 u_2 \dots u_n) .$$

Pour chaque  $m \leq n$ , soient  $f_{m,n}$  l'application de  $A_n$  sur  $A_m$  définie par

$$f_{m,n} = \varphi_m \cdot \varphi_{m+1} \cdot \dots \cdot \varphi_{n-1} ,$$

et  $A \subset \prod_n A_n$  la limite projective  $\varprojlim(A_n, f_{m,n})$ .

a) Montrer que  $A$  est identique à l'ensemble des  $(s_n)_{n \geq 1}$  telles que  $\varphi_n(s_{n+1}) = s_n$ , et que  $A$  peut être identifié à l'ensemble  $\{0, 2\}^{\mathbb{N}}$  des suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  dont les termes sont égaux à 0 ou 2. En déduire une bijection  $\Phi$  de  $A$  sur  $K$  [cf. question(2)].

b) Montrer que, lorsque pour chaque  $n$ ,  $A_n$  est muni de la topologie discrète, et  $A$  de la topologie induite par la topologie produit des  $A_n$ ,  $\Phi$  est un homéomorphisme.

En déduire que  $K$  est homéomorphe à l'espace produit  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , (où  $\{0, 1\}$  est muni de la topologie discrète).

[cf. pages 35-38 de : CHOQUET (Gustave).- Cours de Topologie et théorie des fonctions.- Paris, Centre de Documentation Universitaire, 1960, ainsi que BOURBAKI.- Topologie Générale, 3e édition, chap. I, Paragr. 4, n° 4.]

4°- Soit  $E$  un espace topologique régulier. On suppose qu'il existe une application  $s \rightarrow A_s$  de l'ensemble  $\{0, 1\}^{(\mathbb{N})}$  des suites finies dont les termes sont égaux à 0 ou 1, dans l'ensemble des parties non vides de  $E$  telle que :

$$A) - A_{(0)} \cup A_{(1)} = E ; \text{ et, si } s = (u_0 u_1 \dots u_n) ,$$

$$A_s = A_{(u_0 u_1 \dots u_n, 0)} \cup A_{(u_0 u_1 \dots u_n, 1)} .$$

B) - Si  $(u_n)$  est un élément de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , et si, pour tout  $n$ ,  $s_n = (u_0 u_1 \dots u_n)$ , la base de filtre  $(A_{s_n})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un point de  $E$ .

Montrer que, dans ces conditions, il existe une application continue de l'ensemble triadique de Cantor  $K$  sur  $E$  [BOURBAKI (N.). - Topologie Générale, chap. IV, Paragr. 8, Exercice 11].

5° - Dédurre de (4) que si  $A$  est une partie compacte de  $R$ , il existe une application continue de  $K$  sur  $A$ .

6° - On considère l'espace produit  $[0, 1]^{\mathbb{N}} = E$ . Montrer qu'il existe une application continue de  $K$  sur  $E$  [utiliser encore (4)].

7° - Soit  $X$  un espace métrique compact.

a) Montrer que  $X$  est homéomorphe à un fermé de  $E = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ .  
[Soit  $(a_n)$  une suite partout dense de points de  $X$ , et  $d$  une distance compatible avec la topologie de  $X$ ; considérer l'application  $\varphi$  de  $X$  dans  $E$  définie par

$$\varphi(x) = \left( \frac{1}{\delta(E)} d(x, a_n) \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{pour tout } x \in X,$$

où  $\delta(E)$  est le diamètre de  $E$ . [cf. aussi BOURBAKI : Topologie Générale, 2e édition, chapitre IX, Paragr. 2, proposition 12.]

b) Dédurre de (7,a), de (6) et de (5) qu'il existe une application continue de  $K$  sur  $X$ .

8°) Montrer que  $K$  est un espace compact totalement discontinu et sans points isolés.

9°) Inversement, montrer que tout espace  $X$ , compact totalement discontinu et sans points isolés, est homéomorphe à  $K$ .

On pourra procéder comme suit :

a) Montrer d'abord la propriété dans le cas où  $X$  est un sous-espace de  $[0, 1]$ . On pourra utiliser (4) en construisant une application  $s \rightarrow A_s$  vérifiant (A) et (B) et telle que, si  $s_1$  et  $s_2$  sont deux suites ayant le même nombre de termes,

$$s_1 \neq s_2 \implies A_{s_1} \cap A_{s_2} = \emptyset$$

b) Montrer que, si  $X$  est un espace métrique compact totalement discontinu, pour tout  $x \in X$ , l'intersection des voisinages de  $x$  ouverts et fermés est égale à  $\{x\}$  ; en déduire d'abord que tout voisinage de  $x$  contient un voisinage ouvert et fermé ; et ensuite que la topologie de  $X$  admet une base dénombrable formée d'ensembles ouverts et fermés. Soit

$\mathcal{D} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  une telle base.

c) Déduire de (b) que tout espace métrique compact  $X$ , totalement discontinu, est homéomorphe à un sous-espace de l'espace produit  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ . [On pourra montrer que la topologie de  $X$  est la moins fine des topologies rendant continues les fonctions caractéristiques  $1_{A_n}$  des ensembles  $A_n$  de  $\mathcal{D}$  ; et en déduire que l'application  $x \rightarrow (1_{A_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est un homéomorphisme  $\Phi$  de  $X$  sur un sous-espace de l'espace produit  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ .]

d) Conclure en se ramenant au cas (a).

---

6

ESPACES EXTREMEMENT DISCONTINUS

1 - Montrer que pour un espace topologique  $X$ , les conditions qui suivent sont équivalentes

a) l'adhérence d'un ensemble ouvert de  $X$  est ouverte

b) l'intérieur d'un ensemble fermé de  $X$  est fermé.

c) deux ensembles ouverts disjoints ont des adhérences disjointes.

Si  $X$  vérifie ces conditions, on dit alors qu'il est extrêmement discontinu.

2 - Montrer que tout sous-espace ouvert (resp. tout sous-espace partout dense) d'un espace topologique extrêmement discontinu est extrêmement discontinu.

3 - Soit  $X$  un espace topologique uniformisable, montrer l'équivalence des assertions qui suivent:

- a)  $X$  est extrêmement discontinu.
  - b) l'ensemble des fonctions continues qui majorent (resp. mineurent) une fonction bornée semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) possède un plus petit (resp. grand) élément.
  - c) l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur  $X$  est complètement réticulé (i.e. toute partie majorée non vide admet une borne supérieure ; ne pas la confondre avec la borne supérieure dans l'ensemble de toutes les fonctions sur  $X$ ).
- 4 - Dédurre de la question précédente que tout espace topologique uniformisable extrêmement discontinu se plonge dans un espace compact extrêmement discontinu ; en déduire également que l'espace  $\beta(X)$  des ultrafiltres sur un ensemble infini  $X$  est extrêmement discontinu.
- 

7

On désigne par  $X$  un espace compact.

- 1 - Montrer que toute composante connexe de  $X$  possède un système fondamental de voisinages ouverts et fermés.
  - 2 - Montrer que si  $X$  est connexe, pour tout compact  $K$  de  $X$  et toute composante connexe  $A$  de  $K$ ,  $A$  rencontre la frontière de  $K$ .
  - 3 - En déduire que  $X$ , toujours supposé connexe, ne peut être réunion d'une infinité dénombrable  $F_n$  d'ensembles fermés non vides deux à deux disjoints (On considèrera un voisinage compact  $K$  de  $F_1$  ne rencontrant pas  $F_1$  et une composante connexe  $A$  de  $K$  rencontrant  $F_2$  ; on montrera que  $A$  est un espace compact connexe ne rencontrant pas  $F_1$  mais rencontrant une infinité de  $F_n$ . On construira à partir de là une suite décroissante de compacts non vides ayant une intersection vide).
-

8

Soit  $E$  un ensemble totalement ordonné ; on dira que  $E$  est un continu linéaire si  $E$ , muni de la topologie de l'ordre (les ouverts étant définis comme réunions d'intervalles ouverts) est compact et connexe. Tout espace topologique homéomorphe à un continu linéaire s'appelle un arc.

On veut montrer que toute image continue d'un arc est "localement connexe par arcs".

1) Soit  $E$  un continu linéaire d'extrémités  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ), et soit  $f$  une application continue de  $E$  sur un espace séparé  $F$ .

Soit  $P$  un sous-ensemble fermé de  $E$  ; on dit que  $P$  est distingué si  $P$  contient  $\alpha$  et  $\beta$  et si, pour toute composante connexe  $] \lambda, \mu [$  de  $(E - P)$ , on a  $f(\lambda) = f(\mu)$ .

Montrer que si  $P$  est distingué,  $f(P)$  est connexe.

2) Soit  $\mathcal{P}$  l'ensemble ordonné (par inclusion) des sous-ensembles fermés distingués de  $E$ . Montrer que si  $\mathcal{F}$  est une partie totalement ordonnée de  $\mathcal{P}$ , elle possède une borne inférieure (l'intersection des éléments de  $\mathcal{F}$ ).

En déduire, en utilisant le théorème de Zorn, que  $\mathcal{P}$  possède des éléments minimaux.

3) Montrer que tout élément minimal  $P$  de  $\mathcal{P}$  est caractérisé par la propriété suivante :

"Si  $x \in P$  et  $y \in P$ , la relation  $f(x) = f(y)$  entraîne que  $x$  et  $y$  sont les extrémités d'une composante connexe de  $(E - P)$ ".

En déduire que si  $P$  est minimal,  $f(P)$  est un arc contenant  $f(\alpha)$  et  $f(\beta)$ .

Plus généralement, montrer que deux points quelconque de  $F$  appartiennent à un arc de  $F$ .

4) Soit  $F$  l'image continue et séparée d'un continu linéaire  $E$ .

Montrer que pour tout  $y_0 \in F$  et pour tout voisinage  $V$  de  $y_0$ , il existe un voisinage  $W$  de  $y_0$  tel que si  $y_1$  et  $y_2 \in W$ , il existe un arc contenu dans  $V$  et contenant  $y_1$  et  $y_2$ . (On pourra commencer par le cas particulier où  $y_2 = y_0$ ).

(Epreuve théorique, Juin 1956, 1ère Partie)

---

2

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces compacts métrisables; on désigne par  $\varphi$  la projection  $(x, y) \rightarrow x$  de  $E \times F$  sur  $E$ .

Soit  $K$  une partie compacte de la droite réelle  $R$  et soit  $f$  une application continue de  $K$  dans  $E \times F$  telle que si on pose  $h = \varphi \circ f$ , on ait  $h(K) = E$ .

1) Pour tout  $x \in E$ , on désigne par  $g(x)$  le plus petit élément de l'ensemble  $h^{-1}(x)$  dans l'ensemble ordonné  $R$ . Montrer que  $g$  est une fonction semi-continue inférieurement sur  $E$ .

2) En déduire que l'application  $f \circ g$  de  $E$  dans  $f(K)$  est de 1ère classe de Baire, c'est-à-dire que sa restriction à toute partie fermée de  $E$  possède au moins un point de continuité.

3) On admettra ici que tout espace compact métrisable est l'image continue de l'ensemble triadique de Cantor (sur  $[0,1]$ ).<sup>(1)</sup> En utilisant ce fait et les résultats qui précèdent, montrer que si  $A$  est un espace compact métrisable, il existe une application  $s$  de  $\mathcal{K}(A)$ <sup>(2)</sup> dans  $A$  telle que, pour tout compact  $X \in \mathcal{K}(A)$  on ait  $s(X) \in X$  et telle que  $s$  soit de 1ère classe de Baire.

Pour cela on montrera d'abord que dans  $\mathcal{K}(A) \times A$ , le sous-ensemble des points  $(X, x)$  tels que  $x \in X$  est compact.

(Epreuve théorique, Juin 1956, 2ème Partie)

---

(1) Voir problème N° 5.

(2)  $\mathcal{K}(A)$  est l'espace des parties fermées de  $A$ ; il est muni de la topologie classique, par exemple celle définie par l'écart mutuel  $d(K_1, K_2)$  entre les fermés  $K_1$  et  $K_2$  (cf. problème N° 15).

---

COMPACTS EXTREMEMENT DISCONTINUS.

On se propose de montrer que les objets projectifs de la catégorie des espaces compacts sont les compacts extrêmement discontinus. On dit qu'un espace compact  $P$  est projectif si chaque fois qu'on se donne une application continue surjective  $u$  d'un espace compact  $E$  sur un espace compact  $F$  et une application continue  $v$  de  $P$  dans  $F$ , il existe une application continue  $w$  de  $P$  dans  $E$  telle que  $v = u \circ w$ .

1°) Montrer que tout espace compact projectif  $P$  est extrêmement discontinu (Pour tout ouvert  $U$  de  $P$ , on pourra considérer l'application canonique  $u$  de la somme  $\bar{U} + \bar{U}$  sur  $P$  et prendre pour  $v$  l'application identique de  $P$ ).

2°) Soit  $u$  une application continue surjective d'un espace compact  $E$  sur un espace compact  $F$ ; on dit que  $u$  est inessentielle si pour tout compact  $G \subset E$  distinct de  $E$ ,  $u(G)$  est distinct de  $F$ .

a) Montrer qu'il existe un compact  $E_1 \subset E$  tel que  $u(E_1) = F$  et que la restriction de  $u$  à  $E_1$  soit inessentielle (par Zorn).

b) Montrer que si  $u$  est inessentielle, pour tout ouvert  $U$  de  $E$ , on a :  $u(U) \subset F \cap \overline{u(U)}$ .

c) Si  $u$  est inessentielle et si on suppose en outre que  $F$  est extrêmement discontinu, en déduire que  $u$  est un homéomorphisme.

3°) Prouver que tout espace compact extrêmement discontinu  $P$  est projectif (Conservons les notations de la définition; on pourra introduire le produit fibré  $E \times_P P$  sous-espace du produit  $E \times P$  formé des couples  $(x,y)$  tels que  $u(x) = v(y)$ , et un compact  $K \subset E \times_P P$  tel que la projection  $K \rightarrow P$  soit inessentielle.

4°) Montrer que tout espace compact est quotient d'un espace compact projectif. Si  $K$  est un espace compact, on considèrera par exemple l'ensemble  $\Delta(K)$  des familles maximales parmi les familles de fermés d'intérieur de  $K$  stables par intersection fine. On définit sur  $\Delta(K)$  une topologie en prenant comme système fondamental d'ouverts les ensembles  $V_A$  des  $\xi \in \Delta(K)$  tels que  $A \in \xi$  où  $A$  est un compact de  $K$ .

---

11

CONTINGENT D'UN CONTINU DE  $R^n$

Définitions

Soient  $x$  et  $y$  deux points distincts de  $R^n$  ; on désigne par  $D(x,y)$  la demi-droite d'origine  $x$  passant par  $y$  ; la demi-droite d'origine  $O$  et parallèle à  $D(x,y)$  coupe la sphère unité en un point  $\delta(x,y)$ .

Soient  $E$  une partie de  $R^n$ ,  $a \in R^n$ , et  $\mathcal{V}_a$  l'ensemble des voisinages de  $a$  dans  $R^n$ . Pour tout  $V \in \mathcal{V}_a$ , on désigne par  $A(V)$  l'ensemble  $\{ \delta(a,x) : x \in V \cap E \text{ et } x \neq a \}$  ; et par  $B(V)$  l'ensemble  $\{ \delta(x,y) : x,y \in V \cap E \text{ et } x \neq y \}$ .

On appelle contingent de  $E$  au point  $a$  l'ensemble :

$$\mathcal{C}(E,a) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_a} \overline{A(V)},$$

et paratingent de  $E$  au point  $a$  l'ensemble :

$$\mathcal{P}(E,a) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_a} \overline{B(V)}.$$

Il est évident d'après les définitions que  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{P}$  sont compacts, que  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}$ , et que  $\mathcal{P}$  est symétrique ( $\mathcal{P} = -\mathcal{P}$ ).

1) Soit  $E$  un continu (compact connexe) de  $R^n$  dont le contingent en tout point soit porté par une droite donnée  $\Delta$  passant par  $O$ . Montrer que  $E$  est un segment de droite parallèle à  $\Delta$ . On pourra utiliser les lemmes suivants, qu'on démontrera :

a) Si un continu  $E$  est tel que chacun de ses points ait un voisinage qui soit un segment parallèle à  $\Delta$ ,  $E$  est un segment parallèle à  $\Delta$ .

b) Si en un point  $x_0$  d'un ensemble fermé  $A$  de  $R^n$  le paratingent est porté par une droite,  $A$  est, au voisinage de ce point, porté par une courbe lipschitzienne; si  $A$  est connexe, le point  $x_0$  a un voisinage qui est un arc simple lipschitzien.

(au besoin, pour simplifier on se bornera au cas de  $R^2$ ).

2) Soit  $E$  un continu de  $\mathbb{R}^n$  dont le contingent en tout point soit porté par une droite.

a) Montrer qu'il existe un ouvert partout dense de  $E$  dont tout point a un voisinage qui est un arc ouvert simple.

b) Montrer que  $E$  est contenu dans une réunion dénombrable d'arcs rectifiables.

(Epreuve théorique, Octobre 1956, 2ème Partie)

---

12

Soit  $E$  un espace topologique séparé et connexe,  $\Delta$  la diagonale de  $E^2 = E \times E$ .

1) Déterminer les composantes connexes de  $E^2 \setminus \Delta$  dans les trois cas suivants :  $E = \mathbb{R}$  ;  $E =$  le tore  $T$  ;  $E =$  la réunion de trois segments  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  de  $\mathbb{R}^2$  ne se coupant deux à deux qu'en  $O$ .

2) Montrer que  $E^2 \setminus \Delta$  est connexe dans chacun des deux cas suivants:

a) Il existe au moins trois points  $x_1, x_2, x_3$  de  $E$  tels que chacun des  $E \setminus x_i$  soit connexe.

b) Il existe un  $x_0 \in E$  tel que  $E \setminus x_0$  ait au moins trois composantes connexes.

Pour démontrer b), on pourra utiliser le fait, qu'on démontrera, que si  $A$  est une partie relativement ouverte et fermée de  $E \setminus x$ , on a  $\bar{A} = A \cup \{x\}$ , et  $\bar{A}$  est connexe.

(Epreuve théorique, Mars 1958, 1ère Partie)

---

RECOUVREMENTS OUVERTS D'UN ESPACE METRIQUE.

1°) Soient  $E$  un espace métrique,  $\mathcal{R} = (A_\alpha)$  un recouvrement ouvert de  $E$ .

Montrer qu'il existe un voisinage ouvert  $W$  de la diagonale  $\Delta$  de  $E \times E$  tel que le recouvrement  $(W(x))_{x \in E}$  soit plus fin que  $\mathcal{R}$ .<sup>(1)</sup>

Pour cela on pourra considérer la fonction numérique  $\varphi$  sur  $E$  à valeurs dans  $\overline{\mathbb{R}^+}$ ,

$$\varphi(x) = \sup \{ \varepsilon \mid \exists A_\alpha \in \mathcal{R}, B_\varepsilon(x) \subset A_\alpha \}$$

dont on montrera qu'elle est s. c. i et  $> 0$ .

2°) Dédurre de ce qui précède que les voisinages ouverts de la diagonale définissent une base d'entourages d'une structure uniforme sur  $E$  compatible avec la topologie de  $E$ .

(On pourra considérer un recouvrement ouvert  $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$  de  $E$  tel que si

$$V_A = \bigcup_{\alpha \in A} (V_\alpha \times V_\alpha), \text{ on ait } V_A \subset W,$$

pour un voisinage  $W$  donné de  $\Delta$ .)

3°) Soient  $\mathcal{R} = (O_\alpha)$ ,  $\mathcal{R}' = (P_\beta)$  deux recouvrements ouverts de  $E$ . On dit que  $\mathcal{R}'$  est un  $\Delta$ -raffinement de  $\mathcal{R}$  si,  $\forall x \in E$ , il existe  $O_\alpha \in \mathcal{R}$  tel que

$$\left[ \bigcup_{x \in P_\beta} P_\beta \right] \subset O_\alpha.$$

On pose

$$V_{\mathcal{R}} = \bigcup_{\alpha} (O_\alpha \times O_\alpha)$$

$$V_{\mathcal{R}'} = \bigcup_{\beta} (P_\beta \times P_\beta).$$

(1) Pour tout  $A \subset E \times E$ , on pose  $A(x) = \{ y \mid y \in E \text{ ; } (x,y) \in A \}$ .

Montrer que

a) Si  $E$  est métrique, tout recouvrement ouvert  $\mathcal{A}$  de  $E$  admet un  $\Delta$ -raffinement  $\mathcal{A}'$ .

b) Si  $\mathcal{A}'$  est un  $\Delta$ -raffinement de  $\mathcal{A}$ , on a

$$V_{\mathcal{A}'}^2 \subset V_{\mathcal{A}}.$$

4°) On se donne maintenant une relation binaire transitive notée  $\leq$  sur l'ensemble  $\mathcal{O}$  des ouverts non vides de  $E$ .

On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites ( $W, V, R, S, \in \mathcal{O}$ ) :

a)  $(W \leq V) \implies W \subset V$ .

b)  $(W \subset V)$  et  $(V \leq R) \implies (W \leq R)$ .

c)  $(W \leq V)$  et  $(V \subset S) \implies (W \leq S)$ .

d)  $\forall x \in E$  et  $V$  voisinage ouvert de  $x$ , il existe  $W$  voisinage ouvert de  $x$  tel que  $W \leq V$  (la relation  $\leq$  n'est pas nécessairement réflexive).

Soit  $d$  la métrique de  $E$ .

Montrer qu'il existe une métrique  $\rho$  sur  $E$  compatible avec la topologie de  $E$ , définissant une structure uniforme plus fine que celle définie par  $d$ , et telle que

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \eta > 0) \text{ tels que } (\forall x \in E)$$

$$B_{\eta}^{\rho}(x) \leq B_{\varepsilon}^{\rho}(x) \quad (1).$$

On construira pour cela une suite  $\mathcal{A}_n$  de recouvrements ouverts de  $E$  telle que

a)  $\mathcal{A}_{n+1}$  est un  $\Delta$ -raffinement de  $\mathcal{A}_n$ .

b) Si  $O \in \mathcal{A}_{n+1}$ , il existe  $Q \in \mathcal{A}_n$  tel que  $O \leq Q$ .

c) Si  $O \in \mathcal{A}_n$ , le diamètre de  $O$ , pour la distance  $d$ , vérifie  $\delta(O) < 2^{-n}$ .

---

$$(1) B_{\alpha}^{\rho}(x) = \{ y ; y \in E ; \rho(x, y) < \alpha \}.$$

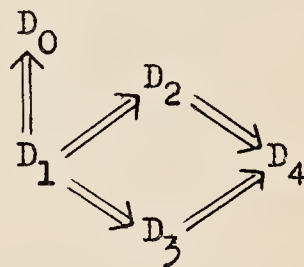
---

14

Désignons par  $E$  un espace topologique et par  $D_i$  ( $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ) les propriétés suivantes :

- $D_0$  : Tout point de  $E$  admet une base dénombrable de voisinages (1er axiome de dénombrabilité).
- $D_1$  : La topologie de  $E$  possède une base dénombrable.
- $D_2$  : Il existe dans  $E$  une partie dénombrable partout dense (séparabilité).
- $D_3$  : Toute partie de  $E$ , dans tous les points sont isolés, est dénombrable.
- $D_4$  : Tout ensemble de parties ouvertes non vides de  $E$  deux à deux sans points communs est dénombrable.

1) Démontrer les implications du schéma suivant :



2) Démontrer que, si  $E$  est métrisable,  $D_0$  est vérifiée, et les propriétés  $D_1, D_2, D_3, D_4$  sont équivalentes. [Pour cela on pourra procéder comme suit :

a)  $d$  désignant une distance compatible avec la topologie de  $E$ , et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite partout dense de points de  $E$ , on montrera que l'application  $x \rightarrow (d(x, a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est un homéomorphisme de  $E$  sur un sous-espace du produit  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . On en déduira que  $D_2 \implies D_1$ .

b) On montrera que, pour tout entier  $\geq 0, n$ , il existe dans  $E$  une famille maximale de boules ouvertes de rayon  $\frac{1}{n}$  deux à deux disjointes ; et on en déduira que  $D_4 \implies D_2$  .]

3) Dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  munis de la distance  $d$  habituelle, on définit la fonction  $\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\rho(p, q) = \begin{cases} d(p, q) & \text{si la droite } pq \text{ passe par } 0. \\ 0 & \text{si } p = q \\ d(0, p) + d(0, q) & \text{si la droite } pq \text{ ne passe pas par } 0. \end{cases}$$

Montrer que  $\rho$  est une distance sur  $R^2$ , et que, muni de la topologie associée à cette métrique,  $R^2$  ne vérifie pas  $D_1$ . Donner d'autres exemples plus simples d'espaces métrisables dans lesquels  $D_1$  n'est pas vérifiée.

4) Sur la droite réelle  $R$ , pour chaque  $a \in R$ , soit  $B(a)$  l'ensemble des intervalles  $[a, b[$  semi-ouverts à droite ( $b > a$ ).

a) Montrer qu'il existe sur  $R$  une topologie (que nous désignerons par  $\mathcal{E}_+$ ) telle que pour tout  $a \in R$ ,  $B(a)$  est une base de voisinages de  $a$ .

b) Montrer que tout ouvert de  $\mathcal{E}_+$  est réunion dénombrables d'intervalles ouverts ou semi-ouverts à droite.

c) Montrer que  $R$  munis de la topologie  $\mathcal{E}_+$  vérifie  $D_0, D_2, D_3$ , mais non  $D_1$ .

5) Soient  $K$  l'espace discret  $\{0, 1\}$ ,  $A$  un ensemble infini,  $E$  l'espace produit  $K^A$ . Soit  $V = \prod_{\alpha \in A} V_\alpha$  un ensemble élémentaire dans  $E$ . Si  $h$  est le nombre d'indices  $\alpha \in A$  tels que  $V_\alpha \neq K$ , on pose  $\mu(V) = 2^{-h}$ .

a) Montrer que, si  $U_1, U_2, \dots, U_n$  sont des ensembles élémentaires deux à deux disjoints, on a  $\sum_{k=1}^n \mu(U_k) \leq 1$ . [On pourra mettre les  $U_k$  sous la forme  $W_k \times K^B$  où  $B$  (indépendant de  $K$ ) est le complémentaire d'une partie finie de  $A$ , et  $W_k$  un ensemble fini dont on évaluera le nombre de points. Cf. également L'Appendice.]

b) Dédurre de (a), que  $E$  satisfait la condition  $D_4$ .

c) Montrer que, si  $A$  n'est pas dénombrable,  $E$  ne satisfait pas la condition  $D_3$ .

6) Soit E un espace topologique séparé, et D une partie partout dense de E.

a) Montrer que  $\text{card}(E) \leq 2^{2^{\text{card}(D)}} = \text{card}(\varphi(\varphi(D)))$ .

b) Reprenant pour E l'espace  $K^A$  du n° 5, montrer que, si  $\text{card}(A) > 2^{\text{card}(N)}$  (N ensemble des entiers naturels) E ne satisfait pas la condition  $D_2$ .

7) Dédire des n° 3, 4, 5, 6 que aucune des relations démontrées dans le n° 1 n'admet de réciproque (dans le cas d'un espace topologique E quelconque).

NOTA.- Les questions 1, 2, 3, 4, 5 sont indépendantes.

APPENDICE concernant le n° 5 :

a) On pourra montrer que l'espace produit  $E = K^A$  considéré au n° 5 est compact, et que  $\mu$  se prolonge en une mesure  $\geq 0$  sur E de masse totale 1 et dont le support est égal à E.

b) On pourra alors déduire le (b) du n° 5 de la propriété plus générale suivante ; soit E un espace compact ; s'il existe sur E une mesure  $\geq 0$  dont le support est égal à E ; alors E, satisfait  $D_4$ .

-----

15

ESPACE DES FERMES DANS UN METRIQUE.

Soit E un espace métrique et  $F(E)$  l'ensemble des parties fermées non vides de E ; si A et B sont deux parties non vides de E on posera :

$$d(A,B) = \inf_{b \in B} d(a,b) \quad ,$$

et

$$\sigma(A,B) = \sup_{x \in A} [\sup_{x \in B} d(x,B) , \sup_{x \in A} d(x,A)] \quad .$$

1°) A quoi se réduit  $\sigma(A,B)$  si A et B sont réduits à un point ?  
Montrer que  $\sigma(A,B) = \sigma(B,A)$ .

Montrer que si  $A, B, C$  sont trois parties non vides de  $E$ , on a, pour tout  $a \in A$  et tout  $b \in B$  :  $d(a, C) \leq d(a, b) + \sigma(B, C)$ .

En déduire que  $\sigma$  vérifie l'inégalité triangulaire. Donner une condition suffisante pour que  $\sigma(A, B)$  soit fini. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont fermés,  $\sigma(A, B) = 0$  entraîne  $A = B$ .

En déduire les propriétés suivantes :

$\sigma$  est un écart sur  $F(E)$ , et  $F(E)$  est métrisable par une distance équivalente  $\delta$ .

Si  $E$  est borné,  $\sigma$  est une distance sur  $F(E)$ .

$E$  se plonge topologiquement dans  $F(E)$ .

2°) Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de fermés non vides de  $E$ ,  $\mathcal{F}$  un filtre sur  $I$ . Montrer que  $A = \lim_{\mathcal{F}} (A_i)$  entraîne

$$A = \lim_{\mathcal{F}} \sup(A_i) = \lim_{\mathcal{F}} \inf(A_i).$$

Donner une condition sur  $E$  qui entraîne la réciproque.

3°) Un espace métrique est précompact si pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a l'une des propriétés suivantes qu'on montrera équivalentes :

a) Il existe un recouvrement fini de  $E$  par des ensembles de diamètre inférieur à  $\varepsilon$ .

b) Il existe un ensemble fini  $F_\varepsilon$  d'éléments de  $E$  tel que, pour tout  $x$  de  $E$ , on ait  $d(x, F_\varepsilon) \leq \varepsilon$ .

Pour que  $E$  soit compact, il faut et il suffit que  $E$  soit précompact et complet.

On a alors :

$$\begin{aligned} E \text{ précompact} &\implies F(E) \text{ précompact} \\ E \text{ complet} &\implies F(E) \text{ complet} \end{aligned},$$

on pourra considérer un filtre de Cauchy  $\Phi$  (ou une suite) sur  $F(E)$  et lui associer la famille  $\left\{ \bigcup_{x \in F} X \right\}_{F \in \Phi}$ . Cette famille est une base de filtre sur  $E$  ayant une adhérence  $A$  non vide. On montrera que  $\Phi$  converge vers  $A$ .

$E$  compact  $\implies F(E)$  compact

$C(E)$  ensemble des continus (compacts connexes) de  $E$  est fermé dans  $F(E)$ .

$E$  connexe  $\implies F(E)$  et  $C(E)$  connexes.

$E$  localement connexe  $\implies F(E)$  localement connexe.

---

16

ULTRAMETRIQUES

Rappels. - On dit qu'un espace  $X$  est métrique, si on s'est donné une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  vérifiant les propriétés :

(1)  $\forall x, y : d(x,y) = d(y,x) ;$

(2)  $d(x,y) = 0$  équivaut à  $x = y ;$

(3)  $\forall x, y, z : d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$  (inégalité triangulaire)

On associe à une distance  $d$  une topologie  $\mathcal{T}_d$ , où un ensemble est ouvert s'il est réunion de boules ouvertes. (Une "boule ouverte" de centre  $x$  et rayon  $r$  est

$$B(x,r) = \{ y \mid d(x,y) < r \} .$$

- La "boule fermée" correspondante est

$$B^* = \{ y \mid d(x,y) \leq r \} .$$

On n'a pas en général  $B^* = \bar{B}$  ).

Définition. - On dit que la distance  $d$  définit une ultramétrie, si elle vérifie

$$(3') \quad \forall x, y, z, \quad d(x,z) \leq \sup [d(x,y), d(y,z)] .$$

1 - Propriétés des ultramétries.

1°) Montrer que si  $d(x,y) \neq d(y,z)$ , alors

$$d(x,z) = \sup [d(x,y), d(y,z)] .$$

En déduire :

(α) que tout "triangle" est isocèle, que la "base" est plus petite que les autres côtés ;

(β) que tout point de la boule  $B(a,r)$  en est le centre.

2°) Montrer successivement que :

(a) Toute "boule ouverte" est fermée ;

(b) Toute "boule fermée" est ouverte ;

(c) La distance de deux "boules ouvertes" distinctes de rayon  $r$ , incluses dans une "boule fermée" de rayon  $r$ , est égale à  $r$  (si  $A, B \subset X$ , on pose "distance de  $A$  et  $B$ " =  $d(A,B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x,y)$ ).

3°) Montrer que, dans une ultramétrie, la composante connexe d'un point est réduite à ce point.

## 2 - Ultramétrie sur un groupe filtré.

Définition.- Soit  $G$  un groupe abélien. Nous dirons qu'il est filtré s'il existe une suite de sous-groupes  $G_n$  de  $G$  telle que

(1)  $G_0 = G$  ;

(2)  $G_n \subset G_{n-1}$  ,  $G_n \neq G_{n-1}$  ;

(3)  $\bigcap_{n \geq 0} G_n = \{0\}$  .

1° (a)  $\forall x \in G$  ,  $x \neq 0$  , on pose

$$V(x) = \sup_{x \in G_n} n .$$

Montrer que  $V(x)$  est fini,  $\forall x \neq 0$  . On posera  $V(0) = +\infty$  .

(b)  $\forall x \in G$  , soit  $\|x\| = 2^{-V(x)}$  . Définissons  $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}_+$

par

$$d(x,y) = \|x - y\| .$$

Montrer que  $d$  définit sur  $G$  une ultramétrie.

2°) Montrer que, pour la topologie définie par cette ultramétrie,  $G_n$  est à la fois une "boule ouverte" et une "boule fermée".

3°) Démontrer le

Théorème. - Si  $G$  est un groupe filtré par les  $(G_n)_{n \geq 0}$ , il existe sur  $G$  une topologie qui rend continues les applications  $\bar{x} \rightsquigarrow x$  et  $(x,y) \rightsquigarrow x + y$ , et telle que les  $G_n$  forment un système fondamental dénombrable de voisinage de 0. ( $G$  est alors un groupe topologique).

### 3 - Topologie sur l'anneau des séries entières formelles.

Rappels. - Soit  $K$  un corps commutatif. On note  $K[X]$  l'anneau des polynômes à une indéterminée sur  $K$ , et  $K[[X]]$  l'anneau des séries formelles à une indéterminée sur  $K$ .

On appelle ordre d'une série  $S = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$  :  $\omega(S) = \inf_{a_n \neq 0} n$ , si  $S \neq 0$ , et on pose  $\omega(0) = +\infty$ .

1°) Soit  $G_n = \{ S \in K[[X]] ; \omega(S) \geq n \}$ . Montrer que le groupe  $K[[X]]$  est filtré par les  $G_n$ .

D'après le Paragr. 2, on peut donc définir sur  $K[[X]]$  une ultramétrie.

2°) (a) Montrer que l'application  $\omega : K[[X]] \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\} : S \rightarrow \omega(S)$  est continue pour cette métrique ( $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  est muni de la topologie induite par celle de  $\bar{\mathbb{R}}$ ).

(b) Montrer que l'application  $(S,T) \rightarrow S \times T$  (produit des deux séries) est continue.

$K[[X]]$  est donc un anneau topologique.

3°) Montrer que l'anneau  $K[X]$  est partout dense dans  $K[[X]]$ .

4°) Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série d'éléments de  $K[[X]]$  converge est que son terme général tende vers 0.

En déduire que  $K[[X]]$  est un espace ultramétrique complet.

---

17

I.- Soit  $X$ , un espace métrique complet et  $T$  un homéomorphisme de  $X$  sur  $X$ .

On suppose qu'il existe un ensemble  $\mathcal{F}$  de fermés non vides de  $X$  possédant les propriétés suivantes :

1°) Pour tout  $F \in \mathcal{F}$ , tout ouvert de  $F$  contient un fermé de  $\mathcal{F}$ .

2°) Si  $F \in \mathcal{F}$ , alors  $T(F)$  et  $T^{-1}(F) \in \mathcal{F}$

3°) Pour tout  $F \in \mathcal{F}$ , il existe un entier  $N(F)$  tel que l'intersection d'au moins deux parmi  $N(F)$  transformés successifs de  $F$  contienne un ensemble de  $\mathcal{F}$ .

Soit  $\mathcal{D}(F)$  l'ensemble des points  $x \in F$  tels qu'il existe une suite  $T^{n_i} x$  ( $0 \leq n_1 \leq n_2 \dots$ ) de transformés de  $x$  situés sur  $F$  et tendant vers  $x$ .

Montrer que, pour tout  $F$ ,  $\mathcal{D}(F)$  est partout dense sur  $F$  (soit  $F_1$  un fermé de  $\mathcal{F}$ ; définir un fermé  $F_2$  de  $\mathcal{F}$  tel que  $F_2 \subset F_1$ ,  $\text{diam } F_2 \leq \frac{1}{2} \text{diam } F_1$ ,  $T^i(F_1) \cap F_1 = \emptyset$  pour  $0 < i < n_1$ ,  $T^{n_1}(F_2) \subset F_1$ ; etc.).

II.- On remplace l'hypothèse (3°) par (3') :

3' Pour tout  $F \in \mathcal{F}$ , l'intérieur de  $F$  n'est pas vide et il existe un entier  $N(F)$  tel que l'intersection des intérieurs de deux parmi  $N(F)$  transformés successifs de  $F$  soit non vide.

Soit  $\Omega_m$  l'ensemble des points  $x$  de  $F$  possédant la propriété suivante : il existe un ouvert  $\omega_x$  ( $x \in \omega_x \subset F$ ) tel que, pour tout  $y \in \omega_x$ , il existe un entier  $n_y > m$  et qu'on ait :

$$T^{n_y} y \in F \quad d(y, T^{n_y} y) < \frac{1}{2^m}$$

Montrer que  $\Omega_m$  est un ouvert partout dense de  $F$ . Montrer alors que  $\mathcal{D}(F)$  est un résiduel de  $F$ .

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $R^n$  relativement compact. On considère le système d'équations différentielles :

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad i = 1, \dots, n$$

où les  $X_i$  sont définies dans  $\Omega$  et continuellement dérivables. On suppose :

1°) Que les solutions  $x(t) = (x_i(t))$  sont définies pour  $-\infty < t < +\infty$ ;

2°) Qu'il existe une fonction  $f$  continue sur  $\bar{\Omega}$  strictement positive telle que si  $\omega_0$  est un compact de  $\Omega$  et  $\omega_t$  son transformé par l'application  $x(t) \rightarrow x(t + \tau)$ , on ait :

$$\int_{\omega_0} f \, dv = \int_{\omega_\tau} f \, dv$$

Montrer que tout ouvert de  $\Omega$  rencontre une trajectoire  $t \rightarrow x(t)$  stable au sens suivant : il existe deux suites  $t_1 < t_2 < \dots$  et  $t_{-1} > t_{-2} > \dots$ , et un point  $x_0$  de l'intersection tels que :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x(t_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} x(t_{-i}) = x_0$$

### ENSEMBLES COMPACTS DANS UNE LIMITE INDUCTIVE

1) On considère un système inductif  $(X_\alpha, \varphi_{\alpha\beta})$  d'espaces topologiques indexé par un ensemble préordonné filtrant  $A$  ; on désigne par  $X$  la limite inductive du système et par  $\varphi_\alpha$  l'application canonique de  $X_\alpha$  dans  $X$ .

On suppose d'abord que pour tout couple d'indice  $\alpha \leq \beta$ ,  $\varphi_{\alpha\beta}$  est un homéomorphisme de  $X_\alpha$  sur un sous-espace fermé de  $X_\beta$ . Prouver que si  $A$  est l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers,  $\varphi_\alpha$  est un homéomorphisme de  $X_\alpha$  sur un sous-espace fermé de  $X$ . On suppose en outre que les  $X_\alpha$  sont accessibles (i.e. l'intersection des voisinages de tout point  $x \in X_\alpha$  est réduite à  $\{x\}$ ) ; montrer alors que  $X$  est accessible et que pour tout compact  $K$  de  $X$ , il existe  $\alpha \in \mathbb{N}$  et un compact  $K_\alpha$  de  $X_\alpha$  tel que  $\varphi_\alpha(K_\alpha) = K$ . Cette dernière propriété reste-t-elle vraie lorsque  $A$  est un ensemble préordonné filtrant quelconque ?

2)  $A$  et les  $\varphi_{\alpha\beta}$  sont de nouveau quelconques, mais on suppose que les  $X_\alpha$  sont des espaces métriques complets, que  $X$  est séparé et les applications  $\varphi_\alpha$  sont ouvertes. Montrer que pour tout compact  $K$  de  $X$ , il existe  $\alpha \in A$  et un compact  $K_\alpha$  de  $X_\alpha$  tel que  $\varphi_\alpha(K_\alpha) = K$ .

(On pourra considérer la limite inductive comme quotient d'une somme directe et prouver au préalable le lemme suivant : On considère un espace topologique métrique complet  $E$  et une relation d'équivalence séparée et ouverte  $R$  dans  $E$ . Montrer que pour tout espace métrique compact totalement discontinu  $K$  et toute application continue de  $K$  dans  $E/R$ , il existe une application continue  $v$  de  $K$  dans  $E$  telle que  $u = \varphi \circ v$ , où  $\varphi$  est l'application canonique de  $E$  sur  $E/R$ ).

---

19

Soit  $E$  un espace localement compact dénombrable à l'infini.

Montrer que tout quotient séparé de  $E$  est paracompact.

(On pourra s'inspirer des exercices de BOURBAKI, Topologie générale, chap. I, 3e éd., Paragr. 10, Nos 16 et 19, et Chap. IX, 2e éd., Paragr. 4, N° 15b).

Donner un exemple de quotient de  $E$  séparé non localement compact.

---

20

(Cet exercice reprend les exercices de BOURBAKI, Topologie Générale, chapitre I, Paragr. 2, n°5 et Paragr. 9, n°2 et n°12).

Soit  $X$  un ensemble bien ordonné. On considère sur  $X$  la topologie dont une base est constitué par les intervalles semi-ouverts à gauche, c'est-à-dire de la forme  $]x, y]$ .

1) Montrer que  $X$  est localement compact ; pour que  $X$  soit compact, il faut et il suffit qu'il possède un plus grand élément ; le compactifié d'Alexandroff de  $X$  peut s'obtenir en adjoignant à  $X$  un plus grand élément.

2) Prouver l'existence d'un ensemble bien ordonné  $Y$  n'ayant pas de plus grand élément et dans lequel toute partie dénombrable soit majorée. (Partant d'un ensemble bien ordonné non dénombrable ayant un plus grand élément  $X$ , on désigne par  $\alpha$  le plus petit élément  $x \in X$  tel que l'intervalle  $] \leftarrow, x [$  soit non dénombrable et on prend  $Y = ] \leftarrow, \alpha [$ ). Montrer que toute suite de  $Y$  admet une valeur d'adhérence.

3) Prouver que  $Y$  n'est pas paracompact (On pourra considérer un recouvrement ouvert localement fini  $\mathcal{R}$  de  $Y$  par des ouverts relativement compacts et choisir pour tout  $x \in Y$ , un élément  $f(x) < x$  tel que  $x$  et  $f(x)$  appartiennent à un même ensemble de  $\mathcal{R}$  ; prouver alors que  $f$  est propre ; on construira ensuite une suite  $Z_n$  telle que  $Z_{n+1}$  soit le plus petit  $x \in Y$  tel que  $f(]x, \rightarrow [) \subset ]Z_n, \rightarrow [$  ; si  $z$  est la limite de cette suite, on montrera que  $f(z) \geq z$ ).

---

21

On considère sur un ensemble  $X$  la donnée d'un ensemble  $\mathcal{E}$  d'applications bornées de  $X$  dans la droite numérique  $\mathbb{R}$ . Une telle donnée définit une application  $\varphi$  de  $X$  dans  $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ , à savoir celle qui à  $x \in X$  associe la famille  $(f(x))_{f \in \mathcal{E}}$ . On considère sur  $X$  la topologie initiale pour les applications de  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire la topologie image réciproque pour l'application  $\varphi$ , et on appelle compactifié associé à  $\mathcal{E}$  le sous-espace  $\overline{\varphi(X)}$  de  $\mathbb{R}^{\mathcal{E}}$ .

1) Pour que  $X$  soit séparé, il faut et il suffit que pour tout couple  $x, y$  de points distincts de  $X$ , il existe une fonction  $f \in \mathcal{E}$  telle que  $f(x) \neq f(y)$ .

2) On suppose que  $X$  est le produit  $\mathbb{R}^n$  de  $n$  droites numériques; que peut-on dire des compactifiés associés aux ensembles de fonctions qui suivent :

a) l'ensemble  $K$  de toutes les fonctions continues à support compact.

b) l'ensemble des fonctions continues  $f$  telles qu'il existe  $a \in ]0, \infty[$  et une fonction  $g \in \mathcal{K}$  (resp. une fonction linéaire  $g$ ) de façon que pour tout  $x$  tel que  $\|x\| \geq a$ , on ait  $f(x) = \left| g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right|$

---

22

L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  des fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur  $\mathbb{R}$  est-il normal ? et son dual faible ?

(Cet exercice est relativement difficile).

---

23

Soit  $E$  un espace topologique quelconque, et soit  $\varphi$  une application de  $E$  dans un espace séparé  $F$ . Soit  $K$  un compact de  $E$ .

On fait les hypothèses suivantes :

- 1)  $\varphi$  est continue en tout point de  $K$ .
- 2) la restriction de  $\varphi$  à  $K$  est biunivoque.
- 3) tout point  $x$  de  $K$  admet dans  $E$  un voisinage  $V(x)$  tel que la restriction de  $\varphi$  à  $V(x)$  soit biunivoque.

On demande de montrer qu'il existe un voisinage  $U$  de  $K$  tel que la restriction de  $\varphi$  à  $U$  soit biunivoque.

On conseille, pour la recherche d'une démonstration, d'examiner d'abord le cas où  $E$  est un espace métrique.

Application: Soit  $f$  une fonction holomorphe dans un ouvert du plan complexe  $C$  contenant le segment  $[0,1]$  de l'axe réel, et telle que  $f'(z)$  soit réel et  $\neq 0$  pour tout  $z \in [0,1]$ . Qu'en déduire pour le comportement de  $f$  au voisinage de  $[0,1]$  ?

(Epreuve théorique, Octobre 1957, 1ère partie)

On rappelle qu'on définit une distance sur l'ensemble  $F(E)$  des fermés d'un espace métrique en posant :

$$d(X,Y) = \sup. \left[ \sup_{x \in X} d(x,Y), \sup_{y \in Y} d(y,X) \right]$$

On supposera désormais  $E$  compact, et on admettra qu'alors  $F(E)$  est compact.

1) Disons qu'un point  $x$  d'un ensemble  $X$  est  $\varepsilon$ -isolé ( $\varepsilon > 0$ ) si la boule ouverte  $B(x, \varepsilon)$  rencontre  $X$  seulement en  $x$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble des fermés de  $E$  qui contiennent au moins un point  $\varepsilon$ -isolé est fermé. En déduire que l'ensemble des fermés de  $E$  dont aucun point n'est isolé est un  $G_\delta$  de  $F(E)$ . Montrer que cet ensemble est un résiduel lorsque  $E$  lui-même n'a aucun point isolé.

2) Montrer par une méthode analogue, que l'ensemble des fermés de  $E$  qui sont totalement discontinus (toute composante connexe réduite à un point) est un  $G_\delta$  de  $F(E)$ , et aussi un résiduel.

3) On suppose ici  $E = [0,1]$ . Montrer que l'ensemble des fermés de  $E$ , dont la mesure de Lebesgue est nulle, est un  $G_\delta$  de  $E$ , et aussi un résiduel.

Peut-on étendre ce résultat à tout espace métrique compact  $E$ , et à toute mesure de Radon positive sur  $E$  ?

(Epreuve théorique, Octobre 1957, 2ème Partie)

---

Soit  $E$  un espace topologique dont tout ouvert soit un  $F_\sigma$ . Soient  $f$  et  $g$  deux applications semi-continues inférieurement de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ .

1°) Montrer que pour tout ouvert  $\omega$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f^{-1}(\omega)$  est un  $F_\sigma$ .

2°) Montrer, en utilisant une application auxiliaire de  $E$  dans  $\mathbb{R}^2$ , qu'il en est de même de  $h^{-1}(\omega)$ , où  $h = f - g$ .

3°) Etendre cette propriété à  $h = \varphi(f,g)$  ; où  $\varphi$  est une application continue de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ .

Que pourrait-on dire de  $h^{-1}(\omega)$  si  $\varphi$  était semi-continue inférieurement ?

(Epreuve théorique, Mars 1959, 1ère Partie)

---

26

Soit  $E$  un ensemble ; soit  $K$  un espace topologique compact, et soit  $N$  l'ensemble des entiers  $\geq 1$ .

Soit  $(x,n) \longrightarrow A(x,n)$  une application de  $K \times N$  dans  $\mathcal{D}(E)$  telle que :

1°) Pour tout  $x$ , la suite  $(A(x,n))$  soit décroissante.

2°) Pour tout  $n$ , l'application  $x \longrightarrow A(x,n)$  soit localement constante (c'est-à-dire constante dans un voisinage de  $x$ ).

On demande de démontrer l'égalité :

$$\bigcup_x \left( \bigcap_n A(x,n) \right) = \bigcap_n \left( \bigcup_x A(x,n) \right)$$

(On montrera pour cela que chacun de ces ensembles est contenu dans l'autre).

(Epreuve théorique, Mars 1959, 2ème Partie)

---

27

Soit  $E$  un espace topologique normal.

1°) Soit  $f$  une application croissante de  $\mathcal{D}(E)$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  ; et soient  $A_1$  et  $A_2$  deux ensembles fermés disjoints de  $E$ .

Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints  $\omega_1, \omega_2$  de  $E$ , contenant respectivement  $A_1$  et  $A_2$  et tels que :

a)  $f(\omega_i) = f(\bar{\omega}_i)$  (i = 1, 2)

b)  $\omega_1$  et  $\omega_2$  aient même frontière.

2°) On suppose de plus maintenant que tout ouvert de E soit un  $F_\sigma$

a) Montrer que tout ouvert de E est un sous-espace normal.

b) Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux fermés quelconques de E ; montrer qu'il existe deux ouverts disjoints  $\omega_1$  et  $\omega_2$  de E contenant respectivement  $A_1 \cap \left[ A_2 \right.$  et  $\left. A_2 \cap \left[ A_1 \right.$ .

c) Soit  $\Omega$  un ouvert de E et soit B une partie de  $\Omega$  .  
Montrer qu'il existe un ouvert  $\omega$  de E tel que

$$B \subset \omega \subset \Omega \quad \text{et} \quad \bar{\omega} \cap \Omega^* = \bar{B} \cap \Omega^*$$

(où  $\Omega^*$  est la frontière de  $\Omega$  )

On conseille de traiter toutes les questions de 2° dans l'ordre indiqué.

(Epreuve théorique, Mars 1959, 3ème Partie)

---

DIMENSION D'UN ESPACE TOPOLOGIQUE.

1°) Soit E un espace topologique séparé non vide à base dénombrable d'ouverts. E est dit de dimension 0 en p si p possède un système fondamental de voisinages dont les frontières sont vides. E est dit de dimension 0 s'il est de dimension 0 en chacun de ses points.

Montrer que cette définition est équivalente à l'une des suivantes :

a) Pour tout point p et tout fermé F, il existe un recouvrement de E par deux ouverts disjoints contenant respectivement p et F.

b) Pour tout couple de fermés  $F_1$  et  $F_2$  , il existe un recouvrement de E par deux ouverts disjoints contenant respectivement  $F_1$  et  $F_2$  .

2°) Montrer que pour un espace topologique séparé quelconque  $X$  les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- a) Tout sous-espace de  $X$  est normal,
- b) Tout ouvert de  $X$  est normal,
- c) Pour tout couple de parties  $A$  et  $B$  telles que

$$A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset ,$$

il existe deux ouverts  $U$  et  $V$  disjoints contenant respectivement  $A$  et  $B$ .

Elles sont réalisées par exemple si tout ouvert est un  $F_\sigma$

Tous les espaces considérés seront séparés à base dénombrable d'ouverts et tels que tout ouvert soit un  $F_\sigma$

Soit  $E$  un sous-espace de dimension 0 d'un espace  $X$ . On suppose qu'il existe  $n$  ouverts  $A_1, \dots, A_n$  de  $X$  dont la réunion contient  $E$ . Montrer qu'on peut trouver  $n$  ouverts deux à deux disjoints  $B_1, \dots, B_n$  de  $X$  dont la réunion contient  $E$  et tels que :

$$B_i \subset A_i \quad 1 \leq i \leq n .$$

3°) Si un espace  $E$  est réunion dénombrable de fermés de dimension 0, montrer qu'il est de dimension 0. (On pourra considérer deux fermés disjoints de  $E$ ,  $A$  et  $B$ , puis leurs traces sur  $C_1, \dots$ ).

4°) Plus généralement, posons la définition suivante :  $n$  étant un entier positif ou nul ,

- $E$  est de dimension  $\leq n$  en  $p$  si  $p$  possède un système fondamental de voisinages dont les frontières sont de dimension  $\leq n - 1$  ;
- $E$  est de dimension  $\leq n$  s'il est de dimension  $\leq n$  en chacun de ses points.

On convient de dire que l'ensemble vide est de dimension  $-1$ .

Montrer qu'un sous-espace d'un espace de dimension  $\leq n$  est de dimension  $\leq n$ .

Soit  $E$  un sous-espace de  $X$ . Montrer que  $E$  est de dimension  $\leq n$  si tout point de  $E$  possède un système fondamental de voisinages dans  $X$  dont les frontières coupent  $E$  suivant des espaces de dimension  $\leq n - 1$ . Réciproque ?

Soient deux sous-espaces  $E_1$  et  $E_2$  de  $X$ . Si  $\dim E_1 \leq n_1$  et  $\dim E_2 \leq n_2$ , montrer qu'on a :

$$\dim(E_1 \cup E_2) \leq 1 + n_1 + n_2 .$$

5°) Montrer que si  $E$  est de dimension  $\leq n$ , il possède une base dénombrable d'ouverts dont les frontières sont de dimension  $\leq n - 1$ .

Faisant l'hypothèse  $(H_{n-1})$  qu'un espace réunion dénombrable de fermés de dimension  $\leq n - 1$  est aussi de dimension  $\leq n - 1$ , montrer que  $E$  est réunion d'un espace de dimension  $\leq n - 1$  et d'un espace de dimension  $\leq 0$ . Puis, supposant  $(H_{n-1})$  réalisée, démontrer  $(H_n)$  (on pourra d'abord considérer le cas où  $E$  est une réunion dénombrable de fermés disjoints de dimension  $\leq n$ ). En déduire que  $H_n$  est réalisée pour tout  $n$ .

6°) Pour qu'un espace  $E$  soit de dimension  $\leq n$ , il faut et il suffit qu'il soit réunion de  $n + 1$  sous-espaces de dimension 0.

Si on a un recouvrement fini de  $E$ , montrer qu'on peut trouver un recouvrement ouvert fini plus fin et d'ordre  $\leq n$  ( $n + 2$  ouverts du recouvrement ont une intersection vide).

7°) Soit  $E$  un espace métrique compact de dimension  $\leq n$ . On considère les espaces suivants :

$\mathcal{F}$  est l'espace des applications continues de  $E$  dans  $[0, 1]^{2n+1}$  (muni de la distance :  $d(f, g) = \sup d(f(x), g(x))$ ).

$\mathcal{G}_\varepsilon$  est le sous-espace de  $\mathcal{F}$  constitué par les applications  $g$  telles que  $\text{diamètre } g^{-1}(x) < \varepsilon$  pour tout  $x$  de  $[0, 1]^{2n+1}$ .

Montrer que  $\mathcal{G}_\varepsilon$  est ouvert dans  $\mathcal{F}$ .

Montrer que  $\mathcal{G}_\varepsilon$  est dense dans  $\mathcal{F}$ .

(Soit  $f$  un élément de  $\mathcal{F}$ . Pour l'approcher par un élément de  $\mathcal{G}_\varepsilon$ , on pourra prendre un recouvrement fini d'ordre  $\leq n$  de  $E$  par des ouverts  $U_i$  de diamètres assez petits, puis choisir dans  $[0, 1]^{2n+1}$ , pour chaque  $i$ , un point  $a_i$  suffisamment voisin de  $f(U_i)$ , de manière que  $k + 2$  d'entre ces points ne soient jamais dans un sous-espace affine à  $k$  dimensions).

Montrer que  $E$  est homéomorphe à un sous-espace de  $[0, 1]^{2n+1}$ .

---

ENSEMBLES MAIGRES

Soit  $X$  une partie d'un espace topologique  $E$ . On dit que  $X$  est maigre en  $x \in E$  si  $x$  possède un voisinage  $V$  tel que  $V \cap X$  soit maigre. Soit  $D(X)$  l'ensemble des points de  $E$  où  $X$  n'est pas maigre.

1°) On a  $D(X) \subset \bar{X}$ .

Si  $Y$  est un ensemble tel que  $D(Y) = \emptyset$ , on a pour toute partie  $X$  de  $E$  :  $D(X \cup Y) = D(X)$ .

2°) Pour que  $D(X) = \emptyset$ , il faut et il suffit que  $X$  soit un ensemble maigre : on montrera que si  $(A_i)$  est une famille d'ouverts disjoints dans  $E$  et si pour chaque  $i$ ,  $B_i$  est un ensemble rare relativement à  $E$  contenu dans  $A_i$ , l'ensemble  $\bigcup_i B_i$  est rare. (Par exemple, grâce à la formule

$$\overline{\text{Int}(\bigcup_i B_i)} = \bigcup_i \overline{\text{Int } B_i} .$$

Puis, on considèrera un ensemble maximal  $\mathcal{M}$  d'ouverts disjoints de  $E$  tels que pour tout ensemble  $A \in \mathcal{M}$ ,  $X \cap A$  soit maigre ; l'existence d'un tel ensemble maximal s'établira à l'aide du théorème de Zorn. Enfin on montrera que la relation  $D(X) = \emptyset$  entraîne que si  $G$  est la réunion des ensembles de  $\mathcal{M}$ ,  $X \cap G$  est rare.

3°) Montrer que  $D(X)$  est fermé et que  $X \cap [D(X)$  est maigre : on montrera que  $X \cap [D(X)$  est maigre relativement à  $[D(X)$ .

Montrer que  $D(X)$  est identique à l'adhérence de son intérieur. (Si  $D'(X)$  désigne cette adhérence, montrer que  $X \cap [D'(X)$  est maigre, en observant que c'est la réunion de  $X \cap [D(X)$  et de  $X \cap D(X) \cap [D'(X)$ ).

4°) On dit que  $X$  possède la propriété de Baire, si on a :

$$X = (G \setminus P) \cup Q$$

où  $G$  est ouvert et  $P$  et  $Q$  maigres.

Montrer qu'on peut remplacer dans cette définition l'ouvert  $G$  par un fermé. Montrer que les ensembles boréliens possèdent la propriété de Baire.

Montrer que les conditions suivantes sont nécessaires et suffisantes pour que  $X$  possède la propriété de Baire :

- a)  $D(X) \cap D'(\lceil X)$  est non-dense ;
- b) L'ensemble  $D(X) \setminus X$  est maigre.

Si  $X$  possède la propriété de Baire et n'est maigre en aucun point, alors  $\lceil X$  est maigre.

Si  $X$  possède la propriété de Baire et n'est maigre en aucun de ses points, il contient un point où  $\lceil X$  est maigre.

5°) Soit  $\mathcal{F}$  une famille d'homéomorphismes de  $E$  sur  $E$  telle que, pour tout couple de points  $x$  et  $y$  de  $E$ , il existe un élément  $f \in \mathcal{F}$  vérifiant :  $f(x) = y$ . Soit  $A$  une partie de  $E$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{F}$  on ait :

$$A = f(A) \quad \text{ou} \quad A \cap f(A) = \emptyset .$$

Si  $A$  possède la propriété de Baire, montrer que  $A$  est ou maigre ou ouvert et fermé.

On montrera d'abord que si  $A$  n'est pas maigre, il n'est maigre en aucun de ses points, et on en déduira l'existence d'un ouvert  $G$  tel que  $G \setminus A$  soit maigre. Enfin on montrera que  $G = A$ .

---

### PROPRIETE DE BAIRE

1) Soient  $X$  un espace topologique,  $Y$  un espace uniforme,  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$ . Prouver l'équivalence des conditions qui suivent :

a) Pour tout entourage  $V$  de  $Y$ , il existe une partie maigre  $M$  de  $X$  telle que pour tout  $x \in X \setminus M$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x$  dans  $X \setminus M$  tel que si  $y \in U$ ,  $(f(x), f(y)) \in V$ .

b) Pour toute application uniformément continue  $g$  de  $Y$  dans un espace métrique  $Z$ , il existe une partie maigre  $M$  de  $X$  telle que la restriction de  $g \circ f$  à  $X \setminus M$  soit continue.

Si  $f$  vérifie ces conditions on dira que  $f$  vérifie la propriété de Baire.

2) Montrer que si  $X$  est de Baire, toute limite simple  $f$  d'une suite  $f_n$  d'application de  $X$  dans  $Y$  vérifiant la propriété de Baire, vérifie encore cette propriété. (En utilisant b) on pourra se ramener au cas où les  $f_n$  sont continues ; si  $W$  désigne alors un entourage fermé de  $Y$  et  $p$  un entier, on montrera que l'ensemble  $A_p$  des  $x \in X$  tels que pour tout  $q \geq p$ , on ait  $(f_p(x), f_q(x)) \in W$  a un point intérieur, puisque  $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p$  est partout dense ; on pourra prendre  $M = X \cap \left[ \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{A}_p \right]$ .

3) Montrer que la propriété précédente est encore vraie lorsqu'on ne suppose plus  $X$  de Baire, mais en revanche que  $Y$  satisfait à la condition:

(S) Pour tout entourage  $V$ , il existe une partie dénombrable  $D$  telle que  $Y = V(D)$ .

(On pourra encore se ramener au cas où les  $f_n$  sont continues et cette fois-ci où  $Y$  est métrique de type dénombrable, on vérifiera d'abord que l'image réciproque par  $f$  d'un ensemble fermé est un  $G_\delta$ ).

On suppose maintenant que  $Y$  est un groupe topologique,  $X$  un groupe topologique métrisable complet,  $f$  un homomorphisme (algébrique) de  $X$  dans  $Y$ . Montrer que si  $f$  vérifie la propriété de Baire,  $f$  est continu (Il suffit de montrer que  $f$  est continu à l'origine ; si  $x_n$  est une suite tendant vers zéro dans  $X$ ,  $d$  un écart continu invariant à gauche sur  $Y$ , on montrera qu'il existe un  $x \in X$  tel que  $d(f(x), f(x x_n))$  tende vers zéro d'où aussi  $d(e, f(x_n))$ ). On pourra, pour simplifier, regarder d'abord le cas où  $X$  est un espace vectoriel topologique et  $Y$  un espace de Banach).

Soit  $X$  un espace topologique, on dit qu'une partie  $A$  de  $X$  vérifie la propriété de Baire s'il existe une partie maigre  $M$  de  $X$  telle que  $A \setminus M$  soit ouvert et fermé dans  $\overline{M}$ . Montrer que l'ensemble des parties de  $X$  vérifiant la propriété de Baire est stable par passage au complémentaire et par réunion dénombrable.

Prouver les assertions qui suivent :

a) Pour qu'une partie  $A$  d'un espace topologique  $X$  vérifie la propriété de Baire il faut et il suffit que sa fonction caractéristique la vérifie.

b) Si  $X$  est un espace topologique,  $Y$  un espace uniforme,  $f$  une application de  $X$  dans  $Y$  vérifiant la propriété de Baire, montrer que pour tout fermé  $F$  de  $Y$  qui est l'ensemble des points où s'annule une fonction caractéristique uniformément continue,  $f^{-1}(F)$  vérifie la propriété de Baire. Réciproque lorsque  $Y$  vérifie la condition (S).

---

31

EQUIVALENCES DANS UN LOCALEMENT COMPACT.

Soit  $E$  un espace localement compact,  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence dans  $E$ ,  $C$  l'ensemble défini par  $R$  dans  $E \times E$ .

1°) Montrer que, pour que  $C$  soit fermé dans  $E \times E$ , il faut et il suffit que pour toute partie compacte  $K$  de  $E$ , le saturé de  $K$  pour la relation  $\mathcal{R}$ , soit fermé.

2°) Si  $C$  est fermé dans  $E \times E$  et si la relation  $\mathcal{R}$  est ouverte, montrer que  $E/\mathcal{R}$  est localement compact.

3°) On considère dans  $R$  la relation d'équivalence fermée  $S$  obtenue en identifiant entre eux tous les points de  $Z$ .

Montrer que l'espace quotient  $R/S$  est séparé mais non localement compact.

4°) Soit  $E$  un espace localement compact dénombrable à l'infini, c'est-à-dire réunion dénombrable d'ensembles compacts. Montrer qu'il existe une suite  $U_n$  d'ensembles ouverts relativement compacts formant un recouvrement de  $E$  et tels que  $U_n \subset U_{n+1}$  pour tout  $n$ .

Si  $R$  est une relation d'équivalence dans  $E$  telle que l'ensemble  $C$  soit fermé, montrer que  $E/\mathcal{R}$  est séparé ; si  $A$  et  $B$  sont deux ensembles fermés sans points communs et saturés pour  $\mathcal{R}$ , on pourra définir par récurrence deux suites croissantes  $(V_n)$  et  $(W_n)$  de fermés saturés pour  $\mathcal{R}$  tels que  $V_n \cap W_n = \emptyset$  et que  $V_n \cap U_n$  (resp.  $W_n \cap U_n$ ) soit un voisinage de  $A \cap U_n$  (resp.  $B \cap U_n$ ) relativement à  $U_n$ , en utilisant le numéro 1 et les résultats analogues connus pour les espaces compacts.

---

32

Soit  $f$  une application d'un ensemble  $E$  dans un ensemble  $F$  ; pour tout  $x \in E$ , on désigne par  $A(x)$  l'ensemble des points  $y$  de  $E$  tels que  $f(x) = f(y)$ , et on désigne par  $B_n$  l'ensemble des  $x$  tels que  $A(x)$  contienne au moins  $n$  points.

1) Exprimer l'ensemble  $B_n$  en utilisant l'application  $f_n = (f, f, \dots, f)$  de  $E^n$  dans  $F^n$ , et l'ensemble  $\Delta_n$  des points de  $F^n$  ayant au moins deux coordonnées égales.

2) Si  $E$  est un espace compact métrisable,  $F$  un espace séparé, et  $f$  continue, montrer que chaque  $B_n$  est un  $F_\sigma$  de  $E$ . Quelle est la nature de l'ensemble des  $x$  tels que  $A(x)$  soit infini ?

(Epreuve pratique, Octobre 1961, 1ère Partie)

---

33

GERMES D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Soit  $E$  un espace topologique séparé non vide. Considérons l'ensemble  $L(x)$  des couples  $(f, V_f)$  formés d'un voisinage  $V_f$  de  $x$  et d'une fonction numérique définie et continue sur  $V_f(x)$ . On met sur cet ensemble la relation d'équivalence suivante :

$(f, V_f)$  est équivalent à  $(g, V_g)$  s'il existe un voisinage  $U$  de  $x$  contenu dans  $V_f \cap V_g$  sur lequel  $f$  et  $g$  coïncident.

On appelle germe de  $f$  en  $x$  la classe d'équivalence de  $(f, V_f)$  pour cette relation, et on la note  $J(x, f)$ .

Soit  $J(x)$  l'ensemble des germes en  $x$ , et  $J = \bigcup_{x \in E} J(x)$  :

1°) Soit un élément  $a = J(x, f) \in J$ . Pour tout représentant  $(f, V_f)$  de  $a$  ( $(f, V_f) \in a$ ) on définit  $U(a, (f, V_f))$  comme l'ensemble des germes  $J(y, f)$  où  $y \in V_f$ . Lorsque  $a$  est fixé et que  $(f, V_f)$  parcourt l'en-

semble des représentants de  $\mathfrak{a}$ , démontrer que les  $U$  constituent une base de filtre sur  $J$ .

2°) Démontrer que les ensembles  $U(\mathfrak{a}, (f, V_f))$  ( $\mathfrak{a} \in J$ ,  $(f, V_f) \in \mathfrak{a}$ ) sont les voisinages d'une topologie  $\mathcal{T}$  sur  $J$ .

3°) Donner un exemple où cette topologie n'est pas séparée (on pourra prendre  $E = \mathbb{R}$ ).

4°) Appelons  $\pi$  la projection de  $J$  sur  $E$  :  $J(x, f) \rightarrow x$ . Démontrer que  $\pi$  est continue.

Démontrer que tout point  $\mathfrak{a}$  de  $J$  possède un voisinage sur lequel la restriction de  $\pi$  est un homéomorphisme.

---

MINORATION D'UNE FAMILLE DE FONCTIONS

Soit  $E$  un espace topologique à base dénombrable d'ouverts. Soit  $(f_i)_{i \in I}$  une famille d'applications de  $E$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  (c'est-à-dire  $[-\infty, +\infty]$ ). Pour tout  $J \subset I$ , on pose

$$f_J = \inf_{i \in J} f_i$$

Montrer qu'il existe une partie dénombrable  $I_0$  de  $I$  telle que, pour toute application semi-continue inférieurement  $g$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ , la relation  $g \leq f_{I_0}$  entraîne  $g \leq f_I$ .

On conseille de se ramener d'abord à des applications de  $E$  dans  $[0, 1]$ ; puis d'utiliser une suite  $(\omega_n)$  d'ouverts de  $E$  constituant une base et telle que tout point de  $E$  appartienne à une infinité de ces  $\omega_n$ .

(Epreuve théorique, Octobre 1959, 1ère Partie)

---

CONVEXES COMPACTS DU PLAN.

Soit  $\mathcal{A}$  l'ensemble des parties convexes et compactes de  $\mathbb{R}^2$ .

1) On demande de définir sur  $\mathcal{A}$  une topologie naturelle. Montrer que pour cette topologie,  $\mathcal{A}$  est localement compact.

2) Soit  $S$  la relation d'équivalence sur  $\mathcal{A}$ , ainsi définie : "On dit que  $A_1 \sim A_2$  s'il existe une transformation affine du plan qui transforme  $A_1$  en  $A_2$ ".

Montrer que  $\mathcal{A}/S$  n'est pas séparé.

3) On appelle  $\mathcal{A}'$  la partie de  $\mathcal{A}$  constituée par les convexes non réduits à un point ou à un segment.

Montrer que  $\mathcal{A}'/S$  est compact ; et utiliser cette compacité pour résoudre quelques problèmes d'extremum concernant les aires des ensembles convexes.

(Epreuve théorique, Octobre 1959, 2ème Partie)

---

ESPACE  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

Soit  $\mathbb{N}$  l'espace discret des entiers  $1, 2, \dots$  ; soit  $S$  l'espace topologique  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  ; et soit  $I$  l'ensemble des nombres irrationnels de  $[0, 1]$ .

On appelle  $\varphi$  l'application canonique de  $S$  dans  $I$  définie par :  
 $(a_1, a_2, \dots) \longrightarrow 1/a_1 + 1/a_2 + \dots$  (fraction continue d'éléments  $a_1, a_2, \dots$ )

1) Montrer que  $\varphi$  est une homéomorphie ; pour cela on commencera par déterminer quel est l'ensemble des éléments de  $I$  dont le développement en fraction continue commence par une suite donnée  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

2) On ordonne  $S$  lexicographiquement ; montrer que pour cet ordre tout sous-ensemble fermé de  $S$  possède un plus petit élément.

Quelle est la forme des sections commençantes de  $S$  ?

3) Soient  $E$  et  $F$  deux espaces topologiques, le premier étant séparé ; on désigne par  $p$  la projection  $(x,y) \rightarrow x$  de  $E \times F$  sur  $E$ .

Soit  $f$  une application continue de  $S$  dans  $E \times F$  ; on pose  $g = p \circ f$  et  $G = g(S)$ . Puis on définit une application  $h$  de  $G$  dans  $S$  en posant, pour tout  $x \in G$  :

$h(x) =$  le plus petit élément de  $g^{-1}(x)$  dans l'ensemble ordonné  $S$ .

a) Montrer que pour toute section commençante  $X$  de  $S$ , on a

$$g(X) = h^{-1}(X)$$

b) Appelons analytique toute partie de  $E$  qui est l'image continue d'un ouvert de  $S$ .

Montrer que, pour tout ouvert  $\omega$  de  $S$ ,  $h^{-1}(\omega)$  appartient au corps borélien engendré par les analytiques de  $E$  (se ramener aux sections commençantes de  $E$ ).

(Epreuve théorique, Octobre 1959, 3ème Partie)

---

### SUITES ADAPTEES D'OUVERTS

Soit  $E$  un espace topologique à base dénombrable d'ouverts.

1°) Montrer qu'il existe une application  $\varphi$  de l'ensemble  $F(E)$  des fermés de  $E$ , dans  $[0, 1]$  telle que pour tous  $X_1, X_2$  fermés tels que  $X \in X_2$  et  $X_1 \neq X_2$ , on ait  $\varphi(X_1) < \varphi(X_2)$ .

2°) On dit qu'une suite  $(\omega_n)$  d'ouverts de  $E$  est adaptée si pour tout  $x \in E$  et pour tout voisinage  $V$  de  $x$ , l'ensemble des  $\omega_n$  contenant  $x$  est infini, et si tous les  $\omega_n$  contenant  $x$  sont contenus dans  $V$ , à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

Montrer que si  $E$  est métrisable et à base dénombrable, il existe une suite adaptée d'ouverts de  $E$ .

3°) Soit  $\mathcal{A}$  un ensemble d'ouverts de  $E$  ; on note  $r(\mathcal{A})$  l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $x$  ait une base de voisinages constitués par des éléments de  $\mathcal{A}$ .

Montrer que, lorsque  $E$  admet une suite adaptée,  $r(\mathcal{A})$  est un  $G_\delta$ .

4°) Montrer que cette propriété est vraie aussi pour tout espace uniforme  $E$  à base dénombrable d'entourages.

(Epreuve pratique, Juin 1960, 1ère Partie)

---

38

1°) Soit  $P$  l'ensemble des plans de  $\mathbb{R}^3$  qui passent par  $O$  ; définir de façon naturelle une topologie sur  $P$  et montrer que  $P$  muni de cette topologie est compact.

Peut-on étendre ce procédé à l'ensemble des hyperplans fermés d'un espace de Banach ?

2°) Dédire de ce qui précède une topologie sur l'ensemble  $D$  des droites de  $\mathbb{R}^2$  ; montrer que l'espace topologique obtenu est localement compact ; existe-t-il sur  $D$  une distance invariante par les translations de  $\mathbb{R}^2$  et compatible avec cette topologie ?

Etendre ce procédé à l'ensemble des hyperplans affines d'un espace de Banach.

(Epreuve pratique, Octobre 1960, 2ème Partie)

---

1°) Soit  $A$  un espace métrique,  $X$  une partie de  $A$ , et  $B$  un espace métrique complet.

Soit  $f$  une application continue de  $X$  dans  $B$ , et soit  $X'$  l'ensemble des points  $a$  de  $\bar{X}$  tels que  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in X}} f(x)$  existe.

Montrer que  $X'$  est un  $G_\delta$  de  $A$  et que  $f$  se prolonge d'une façon et d'une seule en une application de  $X'$  dans  $B$ .

2°) Soient  $A, B$  deux espaces métriques complets, soient  $X \subset A, Y \subset B$  et soit  $f$  une homéomorphie de  $X$  sur  $Y$ .

Montrer en utilisant ce qui précède, que  $f$  peut se prolonger en une homéomorphie d'un  $G_\delta$  contenant  $X$  sur un  $G_\delta$  contenant  $Y$ .

Déduire en particulier de là que toute partie  $Y$  d'un espace métrique  $B$  (complet ou non) homéomorphe à un espace métrique complet est un  $G_\delta$  de  $B$ .

(Epreuve pratique, Octobre 1960, 3ème Partie)

---

NOUVELLE TOPOLOGIE SUR  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\mathcal{O}$  l'ensemble des parties de la droite réelle  $\mathbb{R}$  de la forme  $A \setminus B$ , où  $A$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ , et  $B$  un ensemble de mesure de Lebesgue nulle.

1°) Montrer que les éléments de  $\mathcal{O}$  constituent les ouverts d'une topologie sur l'ensemble  $\mathbb{R}$ .

On désignera par  $\mathbb{R}'$  l'espace topologique défini par ces ouverts. Quels sont les fermés de  $\mathbb{R}'$  ?

2°) Quels sont les compacts de  $R'$  ? Quels sont les  $X \subset R'$  dont tout point soit un point isolé de  $X$  ?

3°) L'espace  $R'$  est-il connexe ? Est-il localement connexe ?

4°) Montrer que les fonctions numériques continues sur  $R'$  sont les mêmes que sur  $R$ .

En déduire que l'espace  $R'$  n'est pas uniformisable.

5°) Déterminer les sous-ensembles partout denses de  $R'$ .

(Epreuve théorique, Février 1961, 1ère Partie)

---

41

Soit  $E$  un espace compact infini ; on désigne par  $\Delta$  la diagonale de  $E \times E$ .

1°) Montrer qu'il existe une partie dénombrable  $A = a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  de  $E \times E$  telle que

$$A \cap \Delta = \emptyset \quad \text{et} \quad \bar{A} \cap \Delta \neq \emptyset .$$

2°) En déduire que si l'espace uniforme  $E$  admet une base totalement ordonnée (par inclusion) d'entourages,  $E$  admet aussi une base dénombrable d'entourages.

Qu'en résulte-t-il alors pour  $E$  ?

(Epreuve pratique, Février 1961, 1ère Partie)

---

42

1) Soit  $(\mathcal{U}_i)_{i \in I}$  une famille de structures uniformes sur un ensemble  $E$ , et soit  $\mathcal{U}$  la borne supérieure de cette famille. Si  $\mathcal{U}$  a une base dénombrable d'entourages, montrer que  $\mathcal{U}$  est aussi la borne supérieure d'une sous-famille finie ou dénombrable de la famille  $(\mathcal{U}_i)$ .

2) Soit  $E$  un produit d'espaces uniformes  $(E_i)_{i \in I}$ . Soit  $A$  un sous-ensemble métrisable de  $E$ . Montrer qu'il existe  $J \subset I$  avec  $J$  au plus dénombrable, tel que la projection canonique de  $A$  dans  $E_J$  (où  $E_J = \prod_{i \in J} E_i$ ) soit un isomorphisme.

(Epreuve théorique, Octobre 1956, 1ère Partie)

---

43

1°) Soit  $E$  un espace topologique régulier ; montrer que si tout point de  $E$  possède un voisinage uniformisable,  $E$  est aussi uniformisable.

2°) Soit  $E$  un espace compact dont tout point admet un voisinage métrisable ; montrer que  $E$  lui-même est métrisable. Etendre ce résultat aux espaces localement compacts dénombrables à l'infini.

3°) Soit  $E$  un ensemble bien ordonné non dénombrable, tel que, pour tout  $a \in E$ , l'ensemble des  $x \leq a$  soit fini ou dénombrable.

Montrer que  $E$ , muni de la topologie de l'ordre, est un espace localement compact et non métrisable (bien que localement métrisable).

Montrer que toute fonction numérique continue sur  $E$  est constante sur une section finissante de  $E$  ; énoncer un résultat analogue pour les fonctions continues sur  $E^2$ , et en déduire l'unicité des structures uniformes sur  $E$ .

(Epreuve théorique, Octobre 1961, 1ère Partie)

---

44

#### TOPOLOGIE SUR L'ENSEMBLE DES FERMES D'UN COMPACT

Soient  $E$  un espace topologique compact ;  $\hat{E}$  l'ensemble des parties fermées non vides de  $E$  ;  $C(E)$  l'ensemble des fonctions réelles continues sur  $E$ .

A toute  $f \in C(E)$  on associe l'application  $\hat{f}$  de  $\hat{E}$  dans  $R$  définie par :  $\hat{f}(X) =$  borne supérieure de  $f$  sur  $X$ , et on désigne par  $T$  la moins fine des topologies sur  $\hat{E}$  qui rende continue chacune des applications  $\hat{f}$ .

1) Montrer que la topologie  $T$  est séparée, et que l'injection  $x \longrightarrow \{x\}$  de  $E$  dans  $\hat{E}$  est une homéomorphie.

2) Soit  $U$  un ultrafiltre sur  $\hat{E}$ .

a) Montrer que pour toute  $f \in C(E)$ ,  $\hat{f}$  converge suivant  $U$  vers une limite, qu'on désignera par  $\hat{f}_U$ .

b) Pour tout  $u \in U$ , posons

$$A_u = \overline{\bigcup_{X \in u} X} \quad \text{et} \quad A = \bigcap_{u \in U} A_u$$

Montrer que la famille  $(A_u)$  de fermées de  $E$  est filtrante décroissante, et que pour toute  $f \in C(X)$ , on a :

$$\lim_{u \in U} \hat{f}(A_u) = \inf_{u \in U} \hat{f}(A_u) = \hat{f}(A) = \hat{f}_U$$

c) En déduire que  $\hat{E}$  muni de la topologie  $T$  est compact.

3) Soit  $I$  une partie de  $C(E)$  et désignons par  $T_I$  la moins fine des topologies sur  $\hat{E}$  qui rende continue chacune des applications  $\hat{f}$  (où  $f \in I$ ).

Est-ce que si  $I$  sépare les points de  $E$ , la topologie  $T_I$  est nécessairement séparée ?

Est-ce que lorsque  $T_I$  est séparée, on a  $T_I = T$  ?

Montrer que lorsque  $E$  est métrisable,  $\hat{E}$  l'est aussi.

4) Soit  $\varphi$  une application d'un espace topologique  $F$  dans  $\hat{E}$ , et soit  $x \in F$ . On dira que  $\varphi$  est semi-continue supérieurement au point  $x$  si, pour toute  $f \in C(E)$ , l'application  $\hat{f} \circ \varphi$  de  $F$  dans  $R$  est semi-continue supérieurement au point  $x$  :

Montrer l'équivalence de cette condition et de la suivante :

Pour tout voisinage  $V$  du fermé  $\varphi(x)$  de  $E$  (dans  $E$ ), il existe un voisinage  $v$  de  $x$  dans  $F$  tel que

$$(y \in v) \implies (\varphi(y) \in V)$$

(Epreuve théorique, Octobre 1962, 1ère Partie)

ORDRE SUR L'ENSEMBLE DES FERMES D'UN COMPACT.

Soient  $E, F$ , 2 espaces compacts, et soit  $f$  une application continue de  $E$  dans  $F$ .

On ordonne l'ensemble  $F(E)$  des parties fermées de  $E$  par la condition :

$$(X \prec Y) \quad \text{si} \quad X \subset Y \quad \text{et} \quad f(X) = f(Y) .$$

1) Montrer que  $F(E)$  muni de cet ordre est inductif.

2) On suppose maintenant  $E$  et  $F$  métrisables avec  $f(E) = F$ .

Montrer que si  $E$  est minimal dans  $F(E)$  (au sens de l'ordre précédent),  $f^{-1}(y)$  est réduit à un point, pour tout  $y$  en lequel l'application  $f^{-1}$  de  $F$  dans  $F(E)$  (muni de la topologie classique) est continue.

3) En déduire que si  $E$  est minimal, l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $f^{-1}(f(x)) = \{x\}$  est partout dense dans  $E$ .

La réciproque est-elle exacte ?

(Epreuve théorique, Octobre 1963, 4ème Partie)

---

Soit  $E$  un espace uniforme, et soit  $A$  un ensemble d'ouverts non vides de  $E$  ; on dira que  $A$  possède la propriété  $P$  si pour tout ouvert  $O \in A$ , et pour tout entourage  $V$  de  $E$ , il existe un ouvert  $O' \in A$  qui soit petit d'ordre  $V$  et tel que  $O' \subset O$ .

1) Montrer que si  $E$  est complet et a une base dénombrable d'entourages, et si  $A$  possède la propriété  $P$ , il existe un point de  $E$  ayant une base de voisinages constituée d'éléments de  $A$ .

2) Soit  $I$  l'intervalle  $[0,1]$  et, pour tout  $i \in I$  soit  $E_i$  un espace compact contenant plus d'un point.

On désigne par  $E$  l'espace compact  $I \times \prod_i E_i$ , et par  $A$  l'ensemble des ouverts non vides de  $E$  de la forme  $O \times \prod_i O_i$ , où  $O_i$  est un ouvert de  $E_i$ , avec  $O_i = E_i$  sauf pour un nombre fini d'indices  $i$ , et où  $O$  est un ouvert de  $I$  ne contenant pas les points  $i$  pour lesquels  $O_i \neq E_i$ .

a) Montrer que  $A$  possède la propriété  $P$ .

b) Montrer qu'il n'existe aucun point de  $E$  ayant une base de voisinages constituée d'éléments de  $A$ .

(Epreuve théorique, Février 1963, 1ère Partie)

---

47

Soit  $E$  un espace topologique.

$(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties de  $E$  :  $A_i \in P(E)$ .

$F$  un filtre sur  $I$  :  $F$  définit un filtre sur  $P(E)$  noté  $\tilde{F}$

- on dira que  $x \in \lim_F \sup (A_i)$  si pour tout voisinage  $V(x)$  et pour tout  $J \in F$ , il existe  $i \in J$  tel que  $V(x) \cap A_i \neq \emptyset$ .

- on dira que  $x \in \lim_F \inf (A_i)$  si pour tout voisinage  $V(x)$ , il existe  $J \in F$  telle que, pour tout  $I \in J$  on ait  $V(x) \cap A_i \neq \emptyset$

- enfin, si  $\lim_F \sup (A_i) = \lim_F \inf (A_i) = A$  on dira que  $F$  pseudo-converge vers  $A$  et on notera  $A = p.\lim_{\tilde{F}} (A_i)$

1) interpréter ces trois définitions lorsque

- $A_i$  est réduite à un point :  $\{a_i\} = A_i$
- $I$  est l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels et  $F$  le filtre de Fréchet sur  $\mathbb{N}$ .

2) Démontrer les propriétés suivantes :

-  $\lim_F \sup (A_i)$  et  $\lim_F \inf (A_i)$  sont des fermés de E

-  $\lim_F \inf (\overline{A_i}) = \lim_F \inf (A_i)$

$\lim_F \sup (\overline{A_i}) = \lim_F \sup (A_i)$

- si  $F'$  est un filtre plus fin que  $F$  on a :

$$\lim_F \inf (A_i) \subset \lim_{F'} \inf (A_i) \subset \lim_{F'} \sup (\sup(A_i)) \subset \lim_F \sup (A_i)$$

- pour tout ultrafiltre  $F$ ,  $\tilde{F}$  est un ultrafiltre et on a

$$\lim_{\tilde{F}} \sup (A_i) = \lim_F \inf (A_i)$$

3) si  $(F_\varphi)_{\varphi \in \Phi}$  est une famille de filtres sur I

et si  $F = \bigcap_{\varphi \in \Phi} F_\varphi$  démontrer que

$$\lim_F \inf (A_i) = \bigcap_{\varphi \in \Phi} \lim_{F_\varphi} \inf (A_i)$$

$$\lim_F \sup (A_i) \supset \left( \bigcup_{\varphi \in \Phi} \lim_{F_\varphi} \sup (A_i) \right)$$

montrer qu'on a égalité si E est localement compact.

ESPACE DES ULTRAFILTRES SUR UN ENSEMBLE

Soit A un ensemble non vide quelconque, et soit U l'ensemble des ultrafiltres sur A. On appelle mesure sur A toute application f de l'ensemble  $\mathcal{G}^+(A)$  des parties de A dans  $\mathbb{R}_+$  telle que

$$f(X \cup Y) = f(X) + f(Y) \text{ lorsque } X \cap Y = \emptyset ;$$

une telle mesure est dite extrémale si, pour tout  $X \in \mathcal{G}^+(A)$ , on a  $f(X) = 0$  ou 1, et si  $f(A) = 1$ .

1°) Montrer que, si f est extrémale, l'ensemble des X tels que  $f(X) = 1$  est un ultrafiltre qu'on désignera par  $u(f)$ ; montrer qu'inversement, tout ultrafiltre sur A est l'image d'une f extrémale et d'une seule

2°) Soit  $E$  l'ensemble des mesures extrémales ; montrer que  $E$  est compact quand on le munit de la topologie de la convergence simple (la moins fine des topologies rendant continues les applications  $f \rightarrow f(X)$ ). Désormais,  $U$  sera muni de la topologie image réciproque de celle de  $E$  par la bijection  $u^{-1}$ .

3°) Pour tout  $X \subset A$  ( $X \neq \emptyset$ ), soit  $\omega(X)$  l'ensemble des ultrafiltres  $\mathcal{U}$  sur  $A$  tels que  $X \in \mathcal{U}$  ; et  $\omega(\emptyset) = \emptyset$ . Montrer que les  $\omega(X)$  sont ouverts et fermés, et constituent une base d'ouverts de  $U$ .

Caractériser tous les sous-ensembles de  $U$  à la fois ouverts et fermés. Quels sont les points isolés de  $U$  ?

4°) On appelle fonction étagée sur  $U$ , toute application  $\varphi$  de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  de la forme

$$\varphi = \sum_{k=1}^n \alpha_k I_{\omega(X_k)} ,$$

où  $\alpha_k \in \mathbb{R}$ , où  $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$  est une partition (finie) de  $A$ , et où  $I_M$  désigne la fonction caractéristique du sous-ensemble  $M$  de  $U$ .

a) Montrer que toute fonction étagée est continue.

b) Montrer que l'ensemble  $\mathfrak{E}$  des fonctions étagées sur  $U$  est une sous-algèbre de l'algèbre  $C(U)$  des fonctions continues sur  $U$ .

c) Montrer que  $\mathfrak{E}$  est dense dans  $C(U)$  munie de la topologie associée à la norme uniforme.

5°) On appelle mesure de Radon positive sur  $U$  toute forme linéaire  $\mu$  sur l'espace  $C(U)$  telle que

$$\varphi \in C(U) \text{ et } \varphi(\mathcal{U}) \geq 0 \text{ pour tout } \mathcal{U} \in U \implies \mu(\varphi) \geq 0 .$$

a) Si  $\mu$  est une mesure de Radon positive sur  $U$ , montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathcal{P}(A)$  par :

$$f(X) = \mu(I_{\omega(X)}) \text{ pour tout } X \subset A ,$$

est une mesure (au sens du (1)) sur  $A$ .

b) Inversement, montrer que, pour toute mesure  $f$  sur  $A$ , il existe une mesure de Radon positive  $\mu$ , et une seule, sur  $U$  telle que

$$f(X) = \mu(I_{\omega}(X)) \text{ pour tout } X \subset A.$$

On pourra d'abord définir  $\mu$  pour les fonctions étagées, puis utiliser 4 (c), ainsi que le théorème de prolongement d'une forme linéaire continue définie sur un sous-espace dense d'un espace vectoriel normé, théorème que l'on énoncera (cf. BOURBAKI (N.). - Topologie générale, chapitre II, 3e édition, Paragr. 3, théorème 2).

6°) On appelle pré-mesure de Radon sur  $U$ , toute application  $\lambda$  de l'ensemble  $\mathcal{F}$  des fermés de  $U$  dans  $\mathbb{R}_+$ , telle que les propriétés  $(R_1)(R_2)(R_3)(R_4)$  ci-dessous soient vérifiées :

$$(R_1) \quad \lambda(\emptyset) = 0$$

$$(R'_2) \quad K \subset H \implies \lambda(K) \leq \lambda(H)$$

$$(R_3) \quad K \cap H = \emptyset \implies \lambda(K \cup H) = \lambda(K) + \lambda(H).$$

$(R_4)$  Pour tout  $K \in \mathcal{F}$ , et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ouvert  $G$  de  $U$  tel que :

$$H \in \mathcal{F} \text{ et } \bar{K} \subset H \subset G \implies \lambda(H) - \lambda(K) \leq \varepsilon.$$

a) Montrer que, si  $\mu$  est une mesure de Radon sur  $U$ , et si, pour tout  $K \in \mathcal{F}$ , on pose :

$$\lambda(K) = \inf \{ \mu(\varphi) \mid \varphi \in C(U) \text{ et } I_K \leq \varphi \},$$

$\lambda$  est une pré-mesure de Radon sur  $U$ .

b) Inversement, montrer que, si  $\lambda$  est une pré-mesure de Radon sur  $U$ , il existe une mesure de Radon  $\mu$  sur  $U$  et une seule telle que, pour tout  $K \in \mathcal{F}$ ,

$$\lambda(K) = \inf \{ \mu(\varphi) \mid \varphi \in C(U) \text{ et } I_K \leq \varphi \}$$

[on pourra utiliser 5 (b)].

(les parties 1°, 2°, 3° et 5° forment l'épreuve pratique d'Octobre 1957).

---

ENSEMBLES MODERES

I - On dira qu'un ensemble A est modéré si tout ultrafiltre non trivial sur A est plus fin qu'un filtre à base dénombrable dont les éléments ont une intersection vide.

1) Montrer que si la puissance de A est au plus celle du continu, A est modéré.

2) Soit U un ultrafiltre non trivial sur un ensemble A modéré ; montrer qu'il existe une application f de A dans R telle que le filtre image de U par f converge vers +∞ .

Cette propriété caractérise-t-elle les ensembles modérés ?

II - Soit E un espace vectoriel sur R, muni de la plus fine des topologies faibles sur E ; soit A une base algébrique de E, et soit C le cône convexe engendré par A. Pour tout  $x \in E$  et tout  $y \in A$ , on notera  $\langle x, y \rangle$  la coordonnée de x d'indice y dans la base A.

1) Montrer que C est fermé dans E ; que si A est infini C n'est pas un espace de Baire ; et que C est réunion de ses chapeaux.

2) Montrer que tout ultrafiltre U sur A qui est stable par intersection dénombrable est un filtre de Cauchy dans E.

En déduire que si A n'est pas modéré, le cône C n'est pas complet dans E.

3) Si f désigne une application de A dans  $R_+$ , on pose pour tout  $X \subset A$  et tout  $x \in C$  :

$$f_X(x) = \sum_{Y \in X} \langle x, y \rangle f(y)$$

On se donne alors un ultrafiltre U sur A . Montrer que, pour tout  $X \subset A$ , la fonction  $f_X$  converge suivant le filtre U vers une limite qu'on notera  $g(X)$ , et que si  $X_1, X_2$  sont disjoints,  $g(X_1 \cup X_2) = g(X_1) + g(X_2)$ .

4) Montrer que si  $g(A)$  est fini et non nul, ou bien il existe une partition dénombrable de  $A$  en ensembles  $A_n$  tels que  $g(A_n) > 0$ , ou bien il existe une partition finie  $(A_i)_{i=1,2,\dots,p}$  de  $A$  telle que  $g(A_i) > 0$  pour tout  $i$ , et telle que chaque  $A_i$  soit irréductible en ce sens que pour tout  $X_i \subset A_i$ , on ait  $g(X_i) = 0$  ou  $g(X_i) = g(A_i)$ .

On montrera que, dans ce dernier cas, les parties  $X_i$  de  $A_i$  telles que  $g(X_i) = g(A_i)$  constituent un ultrafiltre sur  $A_i$ .

5) Dédire de là que si  $A$  est modéré,  $C$  est complet dans  $E$ .

(Epreuve pratique, Février 1963)

---

1) Prouver que le filtre image directe d'un ultrafiltre est un ultrafiltre ; en déduire que toute limite inductive d'ultrafiltres est un ultrafiltre.

Le filtre produit d'une famille finie d'ultrafiltres est-il un ultrafiltre ?

2) Si  $Z$  désigne le groupe additif des entiers rationnels et  $R$  le corps des nombres réels, on note  $\mathcal{B}_R(Z)$  le  $R$ -espace vectoriel des applications bornées de  $Z$  dans  $R$ .  $Z$  opère dans  $\mathcal{B}_R(Z)$  par les translations : si  $n \in Z$  et  $f \in \mathcal{B}_R(Z)$  la translatée de  $f$  par  $n$  est l'application  $p \rightarrow f(p+n)$ . On appelle moyenne sur  $Z$  une application linéaire  $m$  sur  $\mathcal{B}_R(Z)$  telle que :

a)  $m(1) = 1$

b)  $m$  est invariante par l'action de  $Z$ , autrement dit,  $m(f) = m(g)$  si  $g$  est une translatée de  $f$ .

Montrer que toute moyenne est nulle sur les fonctions de  $\mathcal{B}_R(Z)$  de support fini. Prouver l'existence d'une moyenne et d'une application linéaire  $m$  sur  $\mathcal{B}_R(Z)$  telle que  $m(1) = 1$  et nulle sur les fonctions de support fini qui ne soit pas une moyenne.

(Pour la première partie, on pourra définir  $m(f)$  comme limite suivant un ultrafiltre convenable de  $\frac{1}{2n+1} \sum_{p=-n}^n f(p)$  ).

3) Existe-t-il sur  $\mathbb{N}$  des filtres n'ayant pas de base dénombrable ?

4) Soit  $X$  un ensemble infini ; on désigne par  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble des ultrafiltres sur  $X$  muni de la topologie pour laquelle un système fondamental de voisinages de  $\mathcal{U} \in \mathcal{P}(X)$  est constitué par les ensembles  $V_A(\mathcal{U})$  ou  $A \in \mathcal{U}$  et  $V_A(\mathcal{U})$  désigne l'ensemble des ultrafiltres  $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{P}(X)$  tels que  $A \in \mathcal{U}_1$ . Montrer que l'on définit bien une topologie, que  $\mathcal{P}(X)$  est compact, que  $X$  se plonge comme sous-espace discret dans  $\mathcal{P}(X)$  et que tout fermé non vide disjoint de  $X$  qui est intersection dénombrable d'ouverts est infini (et même de puissance  $\geq 2^{2^{|X|}}$  ).

---

51

Soit  $C$  l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur  $\mathbb{R}$ . Rappeler ce qu'est dans  $C$  la topologie de la convergence uniforme sur tout compact ; montrer que  $C$  est complet pour cette topologie.

Définir dans  $C$  une distance compatible avec la topologie de  $C$ , et invariante par les translations de  $C$  ; montrer qu'aucune telle distance ne peut être définies par une norme sur  $C$ .

(Epreuve pratique, Octobre 1960, 1ère Partie)

---

52

Soit  $\mathcal{C}$  l'espace des fonctions numériques continues sur  $[0,1]$ , muni de la norme de la convergence uniforme.

1) Montrer que tout compact de  $\mathcal{C}$  est non-dense dans  $\mathcal{C}$ .

2) Montrer que l'ensemble  $\mathcal{L}$  des fonctions lipschitziennes est un  $K$

3) Montrer que l'ensemble des fonctions à dérivée continue est un sous-ensemble analytique de  $\mathcal{C}$ .

Peut-on même montrer que c'est un borélien ?

(Epreuve théorique, Mars 1958, 2ème Partie)

---

53

Soit  $E$  un espace métrique et soit  $C$  l'espace des applications continues  $\varphi$  de l'intervalle  $[0,1]$  dans  $E$ , muni de la métrique de la convergence uniforme. Soit  $A$  une partie fermée de  $E$ .

Pour tout  $t \in [0,1]$ , soit  $\Phi(A,t)$  l'ensemble des  $\varphi$  telles que  $A \cap \varphi([0,t]) = \emptyset$ .

a) Montrer que  $\Phi(A,t)$  est ouvert.

b) Soit  $B$  l'ensemble des  $\varphi$  telles que  $\varphi(t) \notin A$  pour  $t \neq 1$  et  $\varphi(1) \in A$ . Montrer que  $B$  est un  $G_\delta$ .

c) Caractériser géométriquement l'ensemble  $A_a$  des points  $x$  de  $A$  de la forme  $x = \varphi(1)$ , où  $\varphi \in B$ . Quelle est la nature topologique de cet ensemble lorsque  $E$  est complet et à base dénombrable ?

(Epreuve pratique, Juin 1957, 2ème Partie)

---

54

Soit  $B$  l'espace vectoriel des fonctions numériques bornées définies sur  $[0,1]$ , muni de la topologie de la convergence uniforme.

1°)  $B$  est-il un espace de Baire ? A-t-il une base dénombrable d'ouverts ?

2°) Montrer que l'ensemble des  $f \in B$  dont l'ensemble des points de discontinuité est de mesure de Lebesgue nulle, est fermé dans  $B$ .

3°) Montrer que l'ensemble des  $f$  lipschitziennes de  $B$  est un  $F$  .

4°) L'ensemble des  $f$  indéfiniment dérivables est-il un ensemble borélien de  $B$  ?

(Epreuve pratique, Février 1961, 2ème Partie)

---

55

POLYNOMES

Soit  $f$  une fonction indéfiniment dérivable à valeurs réelles définie sur un intervalle ouvert  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

On dira que  $f$  est un polynôme sur  $X$  (où  $X \subset I$ ) s'il existe un polynôme  $g$  tel que les restrictions de  $f$  et  $g$  à  $X$  soient identiques; on dira que  $f$  est un polynôme au voisinage d'un point  $x$  de  $I$  si  $f$  est un polynôme sur au moins un voisinage de  $x$ .

1) Soit  $J$  un sous-intervalle ouvert de  $I$  ; montrer que si  $f$  est un polynôme au voisinage de chaque point de  $J$ ,  $f$  est un polynôme sur  $\bar{J}$  .

2) Montrer que si  $f$  est nulle sur un sous-ensemble parfait (formé et sans point isolé)  $X$  de  $I$ , et est un polynôme au voisinage de chaque point de  $I \setminus X$ ,  $f$  est partout nulle (étudier les dérivées successives de  $f$  sur  $X$ , et la restriction de  $f$  aux composantes connexes de  $I \setminus X$ ).

3) Montrer que l'ensemble  $P$  des points de  $I$  au voisinage desquels  $f$  n'est pas un polynôme est un ensemble parfait.

4) On suppose maintenant  $f$  telle que, pour tout  $x \in I$ , il existe un entier  $n \geq 0$  tel que la dérivée  $f^{(n)}(x)$  soit nulle.

a) Montrer que si  $P$  n'est pas vide, il existe un entier  $n$  et un intervalle ouvert  $J$  de  $I$  tels que  $J \cap P \neq \emptyset$  et  $f^{(n)} = 0$  sur  $(J \cap P)$ . On conseille d'utiliser pour cela le fait que  $P$  est un espace de Baire.

b) Dédire des résultats précédents que  $f$  est un polynôme sur  $I$ .

(Epreuve pratique, Octobre 1962, 1ère Partie)

---

IDEAUX DE  $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$

1°) Dans l'anneau  $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$  (muni de la norme de la convergence uniforme) des fonctions numériques continues dans un espace compact  $E$ , soit  $\mathcal{U}$  un idéal fermé quelconque. Soit  $A$  la partie fermée de  $E$  formée des points où s'annulent toutes les fonctions  $u \in \mathcal{U}$ ; montrer que, si  $x$  et  $y$  sont deux points distincts de  $A$ , il existe  $u \in \mathcal{U}$  telle que  $u(x) \neq u(y)$ .

2°) Montrer qu'on peut approcher uniformément toute fonction de  $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$  par des polynômes sans terme constant par rapport aux fonctions de  $A$ . En déduire que  $\mathcal{U}$  est identique à l'ensemble des fonctions qui s'annulent dans  $A$ . En particulier, tout idéal maximal de  $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$  est fermé et identique à l'ensemble des fonctions continues qui s'annulent en un point de  $E$ .

Montrer que tout idéal premier dans  $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$  est contenu dans un seul idéal maximal qui est son adhérence. ( $\mathcal{U}$  est dit premier si l'anneau quotient  $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})/\mathcal{U}$  n'a pas de diviseurs de zéro).

Soient  $E, E'$  deux espaces compacts. On suppose qu'il existe un isomorphisme  $u \rightarrow u'$  de la structure d'algèbre (non topologique) sur  $\mathbb{R}$  de  $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$  sur celle de  $\mathcal{C}(E', \mathbb{R})$ .

Montrer qu'il définit une application biunivoque de l'ensemble des idéaux maximaux de  $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$  sur l'ensemble des idéaux maximaux de  $\mathcal{C}(E', \mathbb{R})$  et en déduire une application biunivoque de  $E$  sur  $E'$ .

Montrer que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , elle transforme l'ensemble des  $x \in E$  tels que  $u(x) = \alpha$  en l'ensemble des  $x' \in E'$  tels que  $u'(x') = \alpha$ . En déduire que  $E$  et  $E'$  sont homéomorphes.

---

ALGÈBRES DE FONCTIONS

Notations.

Si  $S$  est un ensemble, on désignera par  $B(S)$  l'ensemble des applications bornées de  $S$  dans le corps  $C$  des nombres complexes. Si  $E$  est un espace topologique, on désignera par  $\mathcal{C}(E)$  l'ensemble des applications continues de  $E$  dans  $C$ .  $B(S)$  et  $\mathcal{C}(E)$  sont des algèbres commutatives sur le corps  $C$  pour les opérations usuelles  $\alpha f$ ,  $f + g$ ,  $fg$ .

Muni de la norme uniforme définie par

$$\forall f, \|f\| = \sup_{x \in S} |f(x)|$$

$B(S)$  est une algèbre de Banach<sup>(1)</sup>. Si  $E$  est un espace compact,  $\mathcal{C}(E)$  est une sous-algèbre de Banach de  $B(E)$ .

Si  $A$  est une sous-algèbre de l'algèbre normée  $B(S)$ , on désignera par  $\Delta_A$  l'ensemble des représentations continues de  $A$  sur le corps des complexes [si  $\alpha \in \Delta_A$ , on a

$$\alpha(\lambda f) = \lambda \alpha(f), \quad \alpha(f+g) = \alpha(f) + \alpha(g), \quad \alpha(fg) = \alpha(f) \alpha(g)$$

pour  $\lambda \in C$  et  $f, g \in A$ ]. Pour tout  $f \in A$ , on désignera par  $\hat{f}$  l'application  $\alpha \rightarrow \alpha(f)$  de  $\Delta_A$  dans  $C$ , et par  $\hat{A}$  l'ensemble des  $\hat{f}$  où  $f \in A$ .

Enfin, on désignera par  $\mathcal{T}_A$  la topologie sur  $\Delta_A$  la moins fine rendant continues les fonctions  $\hat{f}$  ( $f \in A$ ).

1°) On suppose que  $S$  est un ensemble quelconque et  $A$  une sous-algèbre  $B(S)$  contenant la fonction  $1$  ( $1(x) = 1, \forall x \in S$ ).

a) Montrer que  $\Delta_A$  est un sous-espace fermé de la boule unité du dual (topologique)  $A^*$  de l'espace normé  $A$ ; et que la topologie  $\mathcal{T}_A$  est identique à la topologie induite sur  $\Delta_A$  par la topologie faible sur  $A^*$ . En déduire que  $\mathcal{T}_A$  est compacte<sup>(2)</sup>, et que  $\hat{A} \subset C(\Delta_A)$ .

(1) La seule topologie sur  $B(S)$ , ou des sous-algèbres de  $B(S)$ , considérée dans la suite, sera celle associée à la norme uniforme.  
(2) On utilise le fait que la boule unité de  $A^*$  est faiblement compacte. (Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques).

b) Montrer que l'application  $f \rightarrow \hat{f}$  est un isomorphisme pour les structures d'algèbre non topologique de  $A$  dans  $C(\Delta_A)$ , et que  $\|\hat{f}\| \leq \|f\|$  pour tout  $f \in A$ .

c) Pour tout  $x \in S$ , soit  $\delta_x$  l'application de  $A$  dans  $\underline{C}$  définie par  $\delta_x(f) = f(x)$  pour tout  $f \in A$ .

Montrer que, pour tout  $x \in S$ ,  $\delta_x \in \Delta_A$ , et, que

$$A_x = \delta_x^{-1}(0) = \{f \mid f \in A \text{ et } f(x) = 0\}$$

est un élément maximal de l'ensemble  $J_A$  ordonné par inclusion, des idéaux de  $A$  distincts de  $A$  [tout élément maximal de  $J_A$  sera appelé idéal maximal de  $A$ ].

2°) On suppose que  $E$  est un espace compact, et que

$$A = \mathcal{C}(E) \subset B(E)$$

a) Montrer que pour tout  $I \in J_A$ , il existe  $x \in E$  tel que  $I \subset A_x$  [on pourra montrer que, si pour tout  $x \in E$ ,  $I \not\subset A_x$ , alors  $I = A$ ].

b) Montrer que  $x \neq y \implies A_x \neq A_y$ .

c) Dédurre de (a) et (b) que  $x \rightarrow A_x$  est une application biunivoque de  $E$  sur l'ensemble des idéaux maximaux de  $A$ , et que  $x \rightarrow \delta_x$  est un homéomorphisme de  $E$  sur  $\Delta_A$  (muni de la topologie  $\mathcal{C}_A$ ).

3°) Donner un exemple d'espace compact  $E$ , et de sous-algèbre  $A$  de  $C(E)$  contenant la fonction 1, et tels que  $\Delta_A$  n'est pas identique à l'ensemble des  $\delta_x$  ( $x \in E$ ).

4°) a) Montrer que les conclusions (a), (b), (c) du n° 2 subsistent si on suppose seulement que la sous-algèbre  $A$  de  $\mathcal{C}(E)$  a les propriétés suivantes :

i. Si  $x \neq y$ , il existe  $f \in A$  tel que  $f(x) \neq f(y)$  (on dit alors que  $A$  sépare les points de  $E$ ).

ii.  $f \in A \implies \bar{f} \in A$ .

iii.  $f \in A$  et  $\inf_x |f(x)| > 0 \implies \frac{1}{f} \in A$ .

iv. La fonction 1 appartient à  $A$ .

b) En déduire que, si  $S$  est un ensemble quelconque, et si  $A$  est une sous-algèbre de  $B(S)$  ayant les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) ci-dessus, alors, l'image de  $S$  par l'application  $x \rightarrow \delta_x$  est dense dans  $\Delta_A$  (pour la topologie  $\mathcal{T}_A$ ) [en appelant  $\bar{S}$  l'adhérence de cette image dans  $\Delta_A$ , on pourra montrer d'abord, que, pour chaque  $f \in A$ , il existe  $\bar{f} \in C(\bar{S})$  telle que  $\bar{f}(\delta_x) = f(x)$ ,  $\forall x \in S$ ; puis appliquer (a); on évitera avec soin les identifications hâtives, et on précisera chaque fois les isomorphismes correspondants].

5°) On dit qu'un espace topologique  $(S, \mathcal{C})$  est complètement régulier, s'il est séparé, et si  $\mathcal{C}$  est la moins fine des topologies rendant continues toutes les fonctions  $f \in \mathcal{C}(S) \cap B(S)$ .

a) Pour que  $(S, \mathcal{C})$  soit complètement régulier, il faut et il suffit que pour tout fermé  $F$  et tout  $x \notin F$ , il existe  $f \in C(S)$  tel que  $f(y) = 0$  pour  $y \in F$ , et  $f(x) = 1$ .

b) En utilisant 4° (b), montrer que tout espace topologique complètement régulier est homéomorphe à un sous-espace partout dense d'un espace compact.

c) Montrer que tout espace localement compact est complètement régulier, et que le procédé de compactification étudié en (b) permet de retrouver celui d'Alexandrov.

6°) Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces compacts tels qu'il existe un isomorphisme  $\varphi$  de  $\mathcal{C}(E)$  sur  $\mathcal{C}(E')$  pour les structures d'algèbre (non topologique). Montrer que  $E$  et  $E'$  sont alors homéomorphes [on construira explicitement un tel homéomorphisme de  $E$  sur  $E'$ , à partir de  $\varphi$  et des propriétés montrées au n°2].

---

### FONCTIONS PRESQUE PERIODIQUES

Soit  $f$  une fonction numérique continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on désigne par  $f_a$  la fonction définie par  $f_a(x+a) = f(x)$ ; et pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , on pose  $d(a, b) = \sup |f_a(x) - f_b(x)|$ .

1) Montrer que  $d$  est un écart fini sur  $R$ , invariant par les translations, et qu'il définit sur  $R$  une topologie  $\mathcal{T}_f$  compatible avec sa structure de groupe. Dans quels cas  $\mathcal{T}_f$  est-elle séparée ? Dans quels cas est-elle moins fine que la topologie classique de  $R$  ?

2) On dira qu'un nombre  $a$  est une  $\varepsilon$ -période de  $f$  si  $d(0, a) \leq \varepsilon$ , autrement dit si pour tout  $x$  on a  $|f(x+a) - f(x)| \leq \varepsilon$ .

Montrer que si  $\mathcal{T}_f$  est séparée, il n'est pas possible qu'un compact ne contenant pas  $0$  contienne des  $\varepsilon$ -périodes pour tout  $\varepsilon > 0$ .

Montrer que la topologie  $\mathcal{T}_f$  est strictement moins fine que celle de  $R$  seulement dans le cas où  $f$  est uniformément continue et où il existe un voisinage  $V$  de  $0$  dans  $R$  tel que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des  $\varepsilon$ -périodes hors de  $V$ .

3) Soit  $\varphi$  une représentation continue de  $R$  dans un groupe abélien compact  $G$ , et soit  $g$  une fonction numérique continue sur  $G$ .

Montrer que la fonction  $f = g \circ \varphi$  est presque-périodique sur  $R$ , c'est-à-dire que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K$  de  $R$  tel que tout translaté de  $K$  contienne une  $\varepsilon$ -période de  $f$ .

Pour cela on montrera d'abord que, pour tout voisinage ouvert  $U$  de l'élément neutre dans  $G$ , il existe un compact  $K$  de  $R$  tel que, pour tout  $x \in R$ ,  $U + \varphi(x)$  rencontre  $\varphi(K)$  (ce qui revient à dire que  $U$  rencontre tout  $\varphi(K-x)$ ).

En prenant pour  $G$  un groupe  $T^n$  ou  $T^N$ , on construira quelques exemples de fonctions presque périodiques.

4) Inversement, soit  $f$  une fonction numérique continue presque-périodique (mais non périodique) sur  $R$ . Montrer que  $R$  muni de la métrique  $d$  associée à  $f$  est précompact, c'est-à-dire que, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $R$  est réunion d'une famille finie de sous-ensembles de  $d$ -diamètre  $\leq \varepsilon$ .

On désigne par  $\hat{R}_f$  le groupe compact obtenu par la complétion de  $R$  muni de la topologie  $\mathcal{T}_f$ . Montrer que  $f$  se prolonge continuellement à  $\hat{R}_f$  tout entier.

Lorsque  $f$  est périodique, que peut-on désigner par  $\hat{R}_f$  ?

5) Dédurre de là qu'il existe un groupe abélien compact  $\mathcal{R}$  (plongea-  
ble dans  $\prod_f \hat{R}_f$ ) et une représentation biunivoque et continue  $\phi$  de  $R$   
dans  $\mathcal{R}$ , tels que  $\mathcal{R} = \overline{\phi(R)}$  et tels que les fonctions presque-pé-  
riodiques sur  $R$  ne soient autres que les composées  $g \circ \phi$ , où  $g$  est une  
fonction numérique continue quelconque sur  $\mathcal{R}$ .

6) Pour tout nombre  $a > 0$ , désignons par  $\lambda_a$  la restriction à l'in-  
tervalle  $[-a, a]$  de  $R$  de la mesure de Lebesgue de  $R$ ; et désignons par  
 $\mu_a$  l'image par  $\phi$  de la mesure  $\frac{\lambda_a}{2a}$ .

Montrer que si  $\mu$  désigne une valeur d'adhérence quelconque des  
 $\mu_a$  (pour  $a \rightarrow \infty$ ),  $\mu$  est invariante par toute translation  $\tau \in \phi(R)$ .  
En déduire que  $\mu_a$  converge vers la mesure invariante de  $\mathcal{R}$  (quand  
 $a \rightarrow \infty$ ).

(Epreuve théorique, Février 1962)

---

59

Soit  $E$  un espace compact à base dénombrable. Montrer que l'en-  
semble des parties de  $E$  qui sont à la fois ouvertes et fermées est au plus  
dénombrable.

Ce résultat s'étend-il à tout espace métrisable à base dénombra-  
ble ?

(Epreuve théorique, Juin 1964, 1ère Partie)

---

60

Soit  $E$  un espace topologique séparé.

1) Soit  $(A_i)$  une famille de parties de  $E$  dont chacune est homéomorphe  
à un espace uniforme complet. Montrer que l'intersection des  $A_i$  a la même  
propriété (on pourra utiliser un plongement de cette intersection dans le  
produit des  $A_i$ ).

2) On dira que  $E$  est stable si  $E$  et toute partie de  $E$  de complémentaire réduit à un point sont homéomorphes à un espace uniforme complet.

Montrer que tout espace métrique complet est stable.

Montrer que toute partie d'un espace stable est stable.

3) Est-ce que tout espace compact est stable ? (Cette question est assez difficile).

Montrer que ce problème revient à étudier si, dans un tore  $T^I$ , le complémentaire de l'origine est homéomorphe à un espace complet.

(Epreuve théorique, Juin 1964, 2ème Partie)

---

61

Soit  $(f_i)$  une famille d'applications continues d'un espace topologique  $E$  dans un espace métrique complet  $F$  ; et soit  $\mathcal{F}$  un filtre à base dénombrable sur l'ensemble des indices  $i$ .

Pour tout  $X \in \mathcal{F}$ , on pose

$$\varphi_X(x) = \sup_{i, j \in X} d(f_i(x), f_j(x))$$

Puis, pour tout  $\varepsilon > 0$ , on pose :

$E_\varepsilon =$  (ensemble des  $x$  tels qu'il existe un  $X \in \mathcal{F}$  pour lequel on ait  $\varphi_X(x) \leq \varepsilon$ ).

1) En utilisant les  $E_\varepsilon$ , montrer que l'ensemble  $C$  des  $x \in E$  tels que les  $f_i(x)$  convergent suivant  $\mathcal{F}$  est un  $F_{\sigma-\delta}$  de  $E$ .

2) On prend pour  $E$  et  $F$  l'espace des fonctions numériques continues sur  $\mathbb{R}$ , de période 1, muni de la norme de la convergence uniforme.

Pour tout  $x \in E$ , et tout nombre  $a \neq 0$ , on désigne par  $f_a(x)$  l'élément de  $F$  défini par :

$$f_a(x)(t) = \frac{1}{a} [x(t+a) - x(t)] .$$

Identifier l'ensemble  $C$  des  $x$  pour lesquels  $\lim_{a \rightarrow 0} f_a(x)$  existe ; montrer que cet ensemble est un  $K_{G_\delta}$  de  $E$ .

Montrer que  $C$  est de première catégorie dans  $E$  ; en déduire que  $C$  n'est pas un  $G_\delta$ . Est-il possible que  $C$  soit un  $F_\sigma$  ?

(Epreuve théorique, Juin 1964, 3ème Partie)

---

62

Soit  $E$  un espace métrique compact ; soit  $A$  une partie de  $E$  ; soit  $K(E)$  l'espace topologique des sous-compacts de  $E$ , et soit  $K(A)$  le sous-ensemble de  $K(E)$  constitué par les sous-compacts de  $A$ .

- 1°) Rappeler la définition de la topologie de  $K(E)$ .
- 2°) Montrer que si  $A$  est un  $G_\delta$  de  $E$ ,  $K(A)$  est aussi un  $G_\delta$  de  $K(E)$ .
- 3°) Montrer que dans le produit  $E \times K(E)$ , l'ensemble  $C$  des points  $(x, X)$  tels que  $x \in X$  est fermé.
- 4°) En déduire que si  $A$  est borélien dans  $E$ , le complémentaire de  $K(A)$  dans  $K(E)$  est analytique.

(Epreuve théorique, Octobre 1964, 1ère Partie)

---

63

Soient  $A$  un espace métrique,  $B$  un espace topologique dont tout point admet une base dénombrable de voisinages.

Soit  $f$  une surjection continue et fermée<sup>(1)</sup> de  $A$  sur  $B$  ; montrer que :

- 1°) Pour tout  $y \in B$ , la frontière  $K_y$  de  $f^{-1}(y)$  dans  $A$  est, ou bien vide, ou bien compacte.

- 2°) Pour tout ouvert  $\omega$  de  $A$  contenant  $K_y$ , il existe un voisinage  $V$  de  $y$  dans  $B$  tel que  $f^{-1}(z) \in \omega$  pour tout  $z \in V$  tel que  $z \neq y$ .
- 3°) La réunion  $A'$  des compacts  $K_y$  est un fermé de  $A$ .
- 4°)  $f(A')$  est l'ensemble des points d'accumulation de  $B$ .
- 5°) Il existe une partie fermée  $X$  de  $A$  telle que la restriction de  $f$  à  $X$  soit une surjection propre<sup>(1)</sup> de  $X$  sur  $B$ .

---

(1) Une application continue  $g$  d'un espace séparé  $E$  dans un autre  $F$  est dite fermée si pour tout fermé  $X$  de  $E$ ,  $g(X)$  est fermé dans  $F$  ; elle est dite propre si en outre  $g^{-1}(y)$  est compact pour tout  $y \in F$ .

(Epreuve théorique, Octobre 1964, 2ème Partie)

---



II

ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

POINTS EXTREMAUX

1) On appelle point extrémal d'un ensemble convexe A tout  $x \in A$  qui n'appartient à aucun segment ouvert  $]y, z[$  de A.

Soit alors A un ensemble convexe et compact d'un espace vectoriel normé. Pour tout  $\epsilon > 0$ , soit  $A_\epsilon$  l'ensemble des points x de A qui sont milieu d'un segment fermé  $[y, z]$  de longueur  $\geq \epsilon$  appartenant à A; montrer que  $A_\epsilon$  est fermé, et que l'ensemble B des points extrémaux de A est un  $G_\delta$ .

Soit f une fonction numérique définie dans A et semi-continue inférieurement; déduire de ce qui précède que si  $\bar{B} = A$ , il existe des points extrémaux de A en lesquels f est continue.

2) Soit E un espace compact et soit A l'ensemble convexe des mesures  $\mu \geq 0$  sur E, de masse totale 1.

Quel est l'ensemble B des points extrémaux de E; si l'on munit A de la topologie faible, à quel espace B est-il homéomorphe?

(Epreuve pratique, Juin 1957, 1ère Partie)

CHAPEAUX DES CONES CONVEXES

Définitions.

- (1) Soit X un cône convexe d'un espace vectoriel topologique sur R séparé, E. Un sous-ensemble K de X est dit "chapeau" de X si K est non vide, compact, convexe, et si le complémentaire de K dans X est convexe.
- (2) X est dit "bien coiffé" si X est réunion de ses chapeaux.
- (3) Un chapeau K de X sera "universel" si

$$X = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda K .$$

Démontrer.

1°- (a) Si  $0 \in X$ ,  $0$  appartient à tout chapeau de  $X$ .

(b) Si  $0 \notin X$ ,  $X$  ne possède pas de chapeaux.

(c) Si  $X$  possède un chapeau,  $X$  est saillant.

(d) Si  $K$  est un chapeau de  $X$ ,  $\forall \lambda > 0$ ,  $K$  est un chapeau.

(e) La trace sur un sous-cône convexe  $X'$  de  $X$ , fermé dans  $X$ , d'un chapeau  $K$  de  $X$  est un chapeau de  $X'$ .

2°- Etudier, dans le cas  $E = \mathbb{R}^2$ , les chapeaux d'un angle saillant.

3°- Soit  $K$  un chapeau de  $X$ ; soit  $x \in K$ ,  $x = y + z$ , avec  $y, z \in X$  alors  $y$  et  $z$  appartiennent à  $K$ .

4°- Supposons  $X$  pointé, saillant; il définit un ordre noté  $\leq$  sur  $E$ . Si  $x \in K$ , chapeau de  $X$ , l'intervalle  $[0, x]$  est inclus dans  $K$ .

5°- Soit  $X$  un cône convexe fermé saillant, définissant l'ordre  $\leq$  sur  $E$ . Si  $X$  est bien coiffé, tout intervalle  $[a, b]$  est convexe compact.

6°- Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace séparé,  $E$ , soit de dimension finie, est qu'il existe dans  $E$  un cône convexe fermé bien coiffé d'intérieur non vide.

7°- Soit  $X$  un cône convexe fermé de  $E$ . Si  $X$  possède un chapeau universel  $K$ , et si  $X$  est un espace de Baire,  $X$  est localement compact.

[ On pourra démontrer le lemme suivant :

Si  $A$  est un convexe fermé de  $E$  séparé, et si  $A$  contient un compact  $K$  d'intérieur non vide (par rapport à  $A$ ),  $A$  est localement compact.

8°- Si  $X$  est convexe et possède une base  $\mathcal{B}$  compacte,  $X$  est bien coiffé.

9°- Soit un cône convexe saillant de  $\mathbb{R}^n$ .  $X$  bien coiffé  $\iff X$  fermé.

10°- (a) Tout point  $x \neq 0$  extrémal d'un chapeau  $K$  de  $X$  appartient à une génératrice extrême de  $X$ .

- (b) Si E est localement convexe séparé, tout chapeau K de X est inclus dans l'enveloppe convexe fermée  $\Delta$  des génératrices extrémales de X (appliquer le théorème de Krein et Milman).
- (c) Dans un espace localement convexe séparé E, tout cône convexe fermé bien coiffé X est l'enveloppe convexe fermée  $\Delta$  de ses génératrices extrémales.

11°- On appellera "col" d'un chapeau K, le sous-ensemble  $L(K)$  de K des points  $x \neq 0$  tels que la génératrice de x coupe K suivant le segment  $[0, x]$ .

- (a) Montrer que  $L(K)$  est convexe, et que les points extrémaux  $\mathcal{E}(K)$  de K sont la réunion des points extrémaux  $\mathcal{E}(L)$  de  $L(K)$  et de  $\{0\}$ .

Si 0 appartient à l'adhérence de  $L(K)$ , cette adhérence est K.

Si E est localement convexe séparé, K est l'enveloppe convexe fermée de  $\mathcal{E}(K) \cup \{0\}$ .

- (b) Si X possède un chapeau universel K tel que  $0 \notin \overline{L(K)}$ , X a une base compacte.

(\*) 12°- Soit X un cône convexe fermé bien coiffé de E séparé, définissant un ordre  $\leq$  sur E.

- (a) E n'est pas réticulé en général pour cet ordre.
- (b) Si E est réticulé, il est complètement réticulé.

---

(\*) les questions munies d'un astérisque sont assez difficiles.

---

ESPACE DE FONCTIONS LIPSCHITZIENNES

On appelle  $D$  l'ensemble des fonctions numériques  $f$  sur  $[a, b]$  lipschitziennes et munies d'une dérivée à droite  $f'(x)$  pour tout  $x \in [a, b[$ .

1°) Montrer que  $D$  est un espace vectoriel, réticulé pour l'ordre ordinaire<sup>(1)</sup>.

2°) Montrer que pour toute  $f \in D$ ,  $f'$  est limite simple d'une suite bornée de fonctions continues.

En déduire que, pour tout  $p \geq 0$ , l'intégrale  $\int_a^b |f'(x)|^p dx$  existe, et est égale à :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^p} \int_a^{b-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \quad (\text{où } h > 0)$$

3°) Soit  $K$  un fermé de  $[a, b]$ . Montrer que si  $f$  et  $g \in D$  et si  $f = g$  sur  $K$ , on a  $f' = g'$  sur  $K$ , sauf peut-être sur un sous-ensemble dénombrable.

4°) On pose 
$$I(f) = \int_a^b f'^2(x) dx$$

Montrer, en utilisant le résultat précédent, que

$$(1) \quad I(f \cup g) + I(f \cap g) = I(f) + I(g)$$

(Pour cela on examinera ce qui se passe sur l'ensemble où  $f = g$ , puis hors de cet ensemble).

5°) Pour toute fonction numérique  $\varphi \geq 0$  sur  $[a, b]$ , bornée et à support dans  $]a, b[$ , on pose

$$F(\varphi) = \inf. I(f) \quad \text{pour les } f \geq \varphi \text{ et telles que } f(a) = f(b) = 0$$

Montrer, en utilisant la relation (1), que :

$$F(\varphi_1 \cup \varphi_2) + F(\varphi_1 \cap \varphi_2) \leq F(\varphi_1) + F(\varphi_2)$$

---

(1) Autrement dit, si  $f$  et  $g$  sont dans  $D$ , leurs enveloppes supérieure et inférieure,  $f \cup g$  et  $f \cap g$ , sont aussi dans  $D$ .

6°) Soit  $D_0$  le sous-espace de  $D$  constitué par les  $f$  qui s'annulent en  $a$  et  $b$ .

Montrer que  $I(f)$  définit une structure préhilbertienne sur  $D_0$ , et que la topologie associée est plus fine que la topologie de la convergence uniforme.

En déduire que le sous-ensemble  $D'_0$  de  $D_0$  constitué par les fonctions concaves est un cône convexe complet.

Déduire de là que pour toute  $\varphi$  (définie plus haut) il existe un  $f$  et un seul dans  $D_0$  tel que :

$$f \geq \varphi \quad \text{et} \quad F(\varphi) = I(f),$$

et que cet  $f$  appartient à  $D'_0$ .

(On conseille pour cette dernière question d'utiliser à plusieurs reprises l'inégalité de Schwarz).

(Epreuve pratique, Mars 1959)

EXTENSIONS DU THEOREME DU GRAPHE FERME

On se propose d'étendre les théorèmes d'homomorphisme et du graphe fermé à des catégories d'espaces vectoriels topologiques plus générales que celles des espaces de Fréchet, c'est-à-dire des espaces vectoriels topologiques localement convexes métrisables complets.

- Dans une première partie,  $E$  désignera toujours un espace de Fréchet.

1) Soient  $F$  un espace vectoriel topologique séparé,  $(E_i)$  une suite d'espaces de Fréchet, pour tout  $i$ ,  $u_i$  une application linéaire continue de  $E_i$  dans  $E$ ,  $u$  une application linéaire continue de  $E$  dans  $F$ ; on introduit le produit fibré  $E \times_{F} E_i$  sous espace de  $E \times E_i$  formé des couples  $(x, y)$  tels que  $u(x) = u_i(y)$ , et on désigne par  $E_i'$  l'image de  $E \times_{F} E_i$  dans la projection  $E \times E_i \rightarrow E$ . Montrer que si  $u(E) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} u_i(E_i)$ ,

l'un des  $E_i$  est égal à  $E$ . En déduire que  $u(E) \subset u_i(E_i)$  pour cet indice.

2) On suppose en outre que l'application  $u_i$  qui précède est injective. Montrer qu'il existe alors une application linéaire continue  $v$  de  $E$  dans  $E_i$  telle que  $u = u_i \circ v$ , autrement dit, que  $u$  se factorise à travers  $E_i$ .

3) Les  $E_i, u_i, F$  sont les mêmes que précédemment et on suppose que  $F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} u_i(E_i)$ . Montrer que toute application linéaire continue bijective de  $F$  sur  $E$  est un isomorphisme. En déduire que toute application linéaire continue surjective de  $F$  sur  $E$  est un homomorphisme.

4) Avec les notations de la question précédente, montrer que pour qu'une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  soit continue il suffit que pour toute suite  $(x_i)$  dans  $E$  tendant vers zéro et telle que  $u(x_i)$  ait une limite dans  $F$ , cette limite soit zéro.

II - Etendre la conclusion de  $I_3)$  au cas où  $E$  a une topologie plus fine qu'une topologie localement convexe limite inductive d'espaces de Fréchet et la conclusion de  $I_4)$  au cas où  $E$  est limite inductive d'espaces de Fréchet.

-----

68

On désignera par  $K$  un corps valué complet non discret ultramétrique, c'est-à-dire tel que l'on ait :

$$|x + y| \leq \sup(|x|, |y|)$$

quels que soient les éléments  $x$  et  $y$  de  $K$ .

Si  $E$  est un espace vectoriel sur  $K$ , on imposera aux semi-normes  $p$  sur  $E$  de vérifier l'inégalité :

$$p(x+y) \leq \sup(p(x), p(y))$$

quels que soient les éléments  $x$  et  $y$  de  $E$ .

On se propose de démontrer le théorème de Hahn-Banach analytique pour des espaces vectoriels normés sur  $K$ . Soient donc  $E$  un espace vectoriel

semi-normé sur  $K$ ,  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $f$  une forme linéaire sur  $F$  telle que  $|f(x)| \leq \|x\|$  pour tout  $x$  dans  $F$ .

a) Si la dimension sur  $K$  de  $E/F$  est dénombrable, montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un prolongement de  $f$  à  $E$  en une forme linéaire  $g$  vérifiant  $|g(x)| \leq (1+\varepsilon) \|x\|$  pour tout vecteur  $x$  de  $E$ .

b) Si la valuation de  $K$  est discrète, i.e si l'ensemble des valeurs non nulles prises par  $|x|$  lorsque  $x$  parcourt  $K$  est un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}_+^*$  et si la semi-norme de  $E$  prend ses valeurs dans  $\Gamma \cup \{0\}$ , montrer alors, sans aucune hypothèse sur  $F$ , que  $f$  se prolonge en une forme linéaire sur  $E$  vérifiant toujours  $|f(x)| \leq \|x\|$ .

On pourra s'appuyer sur le lemme (que l'on démontrera) :  
Pour tout sous-espace fermé  $G$  de  $E$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on peut trouver un vecteur  $x$  de  $E$  tel que  $\|x\| = 1$  et  $\|x+y\| \geq 1 - \varepsilon$  pour tout  $y \in G$  ; dans le cas de la valuation discrète, on peut imposer  $\|x+y\| \geq 1$ .

c) Si la valuation de  $K$  est discrète et la semi-norme à valeurs dans  $\Gamma \cup \{0\}$ , montrer que si  $E$  est un espace de Banach, il est isomorphe à l'espace des familles sommables indexées par un ensemble  $I$  (Théorème de Monna-Fleischer).

---

Soient  $T$  un espace topologique métrisable et  $E$  un espace de Baire. Soit  $f$  une application de  $T \times E$  dans un groupe topologique  $G$ , telle que pour tout  $x \in E$  (resp. pour tout  $t \in T$ ) l'application de  $T$  dans  $F$  :  $t \rightarrow f(x,t)$  (resp. l'application de  $E$  dans  $F$  :  $x \rightarrow f(x,t)$ ) soit continue.

1° - Si  $t_0 \in T$ , montrer que l'ensemble des points  $x \in E$  tels que  $f$  soit continue en  $(x,t_0)$  est un résiduel (qui dépend de  $t_0$ ). On pourra considérer la borne supérieure  $d_x$  des rayons des boules ouvertes de centre  $t_0$  dans  $T$  telles que pour un point quelconque  $t$  d'une telle boule on ait  $f(x,t) - f(x,t_0) \in V$  où  $V$  est un voisinage de l'élément neutre de  $G$ , et montrer que l'application  $x \rightarrow d_x$  est semi-continue supérieurement.

2°- Supposons que E et F soient des espaces vectoriels topologiques. On considère un ensemble M d'applications de  $T \times E$  dans F telles que

a) pour tout  $x \in E$  l'ensemble des applications  $t \rightarrow f(x,t)$  où  $f \in M$  est équicontinu.

b) pour tout  $t \in T$  l'ensemble des applications  $x \rightarrow f(x,t)$  où  $f \in M$  est équicontinu, et ces applications sont linéaires.

Montrer que l'ensemble M est équicontinu.

3°- Soit X l'espace des suites  $x = (x_n)_{n \geq 0}$  de nombres réels telles que la série de terme général  $x_n$  soit convergente. On pose

$$x = \sup \left| \sum_0^n x_j \right| .$$

Soit Y le sous-espace des suites  $y = (y_n)_{n \geq 0}$  telles que la série de terme général  $y_n$  soit absolument convergente. On pose  $\|y\|_1 = \sum_0^\infty |y_n|$ .

Montrer que  $\|x\|$  (resp.  $\|y\|_1$ ) est une norme sur X (resp. Y) pour laquelle X (resp. Y) est complet.

Montrer que Y est partout dense dans X pour la topologie de X.

Montrer que la topologie définie par  $\|x\|_1$  sur Y est strictement plus fine que la topologie induite par celle de X.

On considère la série de terme général  $z_n = \sum_{i+j=n} x_i y_j$ . Pour que la série de terme général  $z_n$  soit convergente, montrer qu'il faut et suffit que la suite  $z_n$  soit bornée. Si  $\xi$  et  $\eta$  sont les sommes des séries de termes généraux  $x_n$  et  $y_n$ , montrer que la série de terme général  $z_n$  converge vers  $\xi \cdot \eta$ . On pourra utiliser le théorème de Banach-Steinhaus.

---

- Soient G un groupe topologique, H et K deux sous-groupes de G tels que  $G = H.K$  et  $H \cap K = \{e\}$ . Pour tout  $x \in G$ , on peut écrire d'une seule

manière  $x = f(x) g(x)$  où  $f(x) \in H$  et  $g(x) \in K$  :

a) Montrer que, pour que l'application  $(y, z) \rightarrow yz$  du groupe topologique produit  $H \times K$  sur  $G$  soit un homéomorphisme, il faut et il suffit que l'une des applications  $f, g$  soit continue.

b) Montrer que cette condition est toujours remplie si l'un des sous-groupes  $H, K$  est compact et fermé, et l'autre fermé [on pourra montrer que, si  $H$  et  $K$  sont fermés,  $f$  et  $g$  ne peuvent avoir de valeur d'adhérence distincte de  $e$  lorsque  $x$  tend vers  $\ell$  dans  $G$ ].

II - Soit  $E$  un espace de Hilbert sur le corps des réels. Si  $x \in E, y \in E$ , on désignera par  $\langle x, y \rangle$  le produit scalaire, et par  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  la norme associée sur  $E$ .

Si  $M \subset E$ , on désignera par  $M^\perp$  le sous-ensemble de  $E$  défini par la relation

$$x \in M^\perp \iff (\forall y) (y \in M \implies \langle x, y \rangle = 0) .$$

( $M^\perp$  est appelé le sous-espace orthogonal à  $M$ ).

a) Montrer que, pour tout  $M \subset E$ ,  $M^\perp$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ .

b) Montrer que dans  $E$ , tout sous-espace vectoriel  $F$ , de dimension finie, est fermé. [Si  $(l_i)_{1 \leq i \leq n}$  désigne une base orthonormée de  $F$ , et  $(x_K)_{K \in \mathbb{N}}$  une suite de points de  $F$  convergente dans  $E$ , on pourra utiliser le fait que, pour tout  $i$ , l'ensemble  $\{x_K, l_i \mid K \in \mathbb{N}\}$  est relativement compact dans  $\mathbb{R}$ .]

c) Si  $H$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $E$ , montrer que l'application  $(x, y) \rightarrow x + y$  de  $H \times H$  dans  $E$  est un homéomorphisme, si  $H \times H$  est muni de la topologie produit. On rappellera le théorème de projection d'un espace de Hilbert sur un sous-espace fermé, et on pourra l'utiliser ainsi que I (a).

d) Plus généralement, si  $H$  et  $K$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ , soit

$$c(H, K) = \sup_{\substack{\|x\| = \|y\| = 1 \\ x \in H, y \in K}} \langle x, y \rangle$$

et

$$S(H,K) = \sqrt{1 - [c(H,K)]^2} .$$

Montrer que, pour que l'application  $(x,y) \rightarrow x + y$  de  $H \times K$  sur  $H + K$  soit un homéomorphisme, il faut et il suffit que  $S(H,K) > 0$ .

II - On désignera dans ce numéro par  $E$  l'espace de Hilbert sur  $R$  des suites de nombres réels de carré sommable.  $R^N$  désignant l'ensemble des suites de nombres réels, on désignera par  $x(n)$  le  $n$ -ième terme de la suite  $x \in R^N$ .  $E$  est alors le sous-espace vectoriel de  $R^N$  définis par la relation :

$$x \in E \iff x \in R^N \text{ et } \sum_{n \in N} x(n)^2 < +\infty .$$

Si  $x \in E$ ,  $y \in E$ , la famille  $(x(n) y(n))_{n \in N}$  est sommable, et si on pose  $\langle x, y \rangle = \sum_{n \in N} x(n) y(n)$ ,  $\langle x, y \rangle$  est un produit scalaire qui définit sur  $E$  une structure d'espace de Hilbert sur  $R$ . Ces résultats sont supposés connus pour la suite.

a) Sur  $E$ , soit  $\mathcal{N}$  la topologie associée à la norme

$$\|x\| \text{ (} \|x\|^2 = \sum_{n \in N} x(n)^2 \text{)}, \text{ et soit } \mathcal{F} \text{ la topologie la moins fine rendant}$$

continues toutes les formes linéaires  $x \rightarrow \langle x, y \rangle$  (où  $y$  décrit  $E$ ) ( $\mathcal{F}$  est appelée topologie faible sur  $E$ ).

Montrer que  $\mathcal{F}$  est compatible avec la structure d'espace vectoriel de  $E$ , séparée, et qu'un système fondamental de voisinages de  $0$  pour  $\mathcal{F}$  est formé des ensembles  $\{x \mid |\langle x, y_i \rangle| \leq 1, 1 \leq i \leq n\}$  où  $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$  décrit l'ensemble des suites finies de la boule unité de  $E$ .

Montrer que  $\mathcal{F}$  est moins fine que  $\mathcal{N}$  ( $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$ ).

b) Pour chaque  $n \in N$ , soit  $\ell_n \in R^N$  définis par  $e_n(n) = 1$  et  $\ell_n(p) = 0$  si  $p \neq n$ .

Montrer que  $\ell_n \in E$  pour tout  $n$ , que la famille  $(\ell_n)_{n \in N}$  est orthonormée, et que, si  $x \in E$ ,  $\langle x, \ell_n \rangle = 0$  pour tout  $n \in N$  implique  $x = 0$ .

c) Pour chaque  $n \in N$ , soit  $L_n = \{\ell_1, \dots, \ell_{2n}\}^1$  (avec les notations du numéro II). Montrer qu'il existe pour chaque  $n$  deux vecteurs  $x_n$  et  $y_n$  de  $E$  ayant les propriétés suivantes :

- $x_n$  et  $y_n$  sont linéairement indépendants.
- $x_n \in L_n \cap L_{n+1}^1$ ,  $y_n \in L_n \cap L_{n+1}^1$ .
- $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$  et  $\|x_n - y_n\| \leq \frac{1}{n}$ .

d) Soit  $H$  (resp.  $K$ ) le sous-espace vectoriel fermé engendré par  $\{x_n | n \in \mathbb{N}\}$  (resp.  $\{y_n | n \in \mathbb{N}\}$ ).

Montrer que  $H \cap K = \{0\}$ , et que l'application  $(x,y) \rightarrow x + y$  est un isomorphisme algébrique de l'espace produit  $H \times K$  sur le sous-espace  $H + K$  de  $E$ , mais n'est pas un homéomorphisme si on munit  $H \times K$  de la topologie produit, et  $H, K, H + K$  de la topologie induite par la topologie  $\mathcal{T}$  de  $E$  [Pour établir que  $H \cap K = \{0\}$ , on pourra montrer, en utilisant III (b), II (b) et II (c) que les hypothèses  $x \in H \cap K$  et  $x \neq 0$  entraînent une contradiction].

---

71

Pour toute fonction  $f$  à valeurs complexes, définie sur  $[0, \infty[$ , et de carré sommable sur chaque intervalle  $[0, a]$ , on pose :

$$\|f\|_a^2 = \frac{1}{a} \int_0^a |f(t)|^2 dt, \text{ puis } \|f\|^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \sup \|f\|_a^2 ;$$

On désigne par  $A$  l'ensemble de ces fonctions  $f$  pour lesquelles  $\|f\|^2 < \infty$ .

1) Montrer que  $A$  est un espace vectoriel (sur  $\mathbb{C}$ ); que  $\|f\|$  est une semi-norme sur  $A$ ; et que  $A$  muni de cette semi-norme est complet.

2) Soit  $H$  le sous-espace de  $A$  constitué par les  $f$  de semi-norme nulle. Montrer que pour la relation d'équivalence sur  $A$  associée à  $H$ , toute  $f$  de  $A$  est équivalente à une fonction continue.

On désignera par  $B$  l'espace normé  $A/H$ .

3) Soit  $P$  les sous-ensemble de  $B$  constitué par les classes de fonctions  $f$  telles que  $\|f\|^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \|f\|_a^2$ .

Montrer par un exemple (utiliser  $f = 1$  et  $g(t) = \exp(i \log t)$ ) que  $P$  n'est pas stable par addition.

Montrer que  $P$  est fermé dans  $B$ .

En déduire que l'adhérence dans  $B$  de tout sous-espace vectoriel de  $P$  est un espace hilbertien ; donner des exemples de tels espaces vectoriels.

(Epreuve théorique, Octobre 1963, 1ère Partie)

---

72

Soit  $E$  un espace de Banach sur  $\mathbb{C}$ ,  $F$  son dual topologique, et  $B$  la boule unité fermée de  $F$ .

Soit  $X$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , et soit  $a$  un point de  $E \setminus X$  admettant une projection  $b$  sur  $X$  (autrement dit  $\inf_{x \in X} (\|a-x\|) = \|a-b\|$ ).

1) On désigne par  $Y$  l'ensemble des  $f \in F$  tels que

$$\|f\| = 1 \quad \text{et} \quad f(a-b) = \|a-b\|.$$

Montrer que  $Y$  est une partie convexe et fermée de  $B$  qui, avec tout point intérieur à un segment de  $B$  contient ce segment.

2) Soit  $\varphi$  l'application  $f \rightarrow f(b)$  de  $F$  dans  $\mathbb{C}$ .

Montrer que  $\varphi(Y)$  est un convexe compact de  $\mathbb{C}$ , et que  $\varphi(Y)$  contient  $0$ .

3) Montrer que tout demi-espace fermé du plan complexe  $\mathbb{C}$  contient au moins un point extrémal de  $\varphi(Y)$ .

En déduire qu'il existe un élément extrémal  $f$  de la boule  $B$  tel que

$$\operatorname{Re}(f(b)) \geq 0 \quad \text{et} \quad f(a-b) = \|a-b\|.$$

(Epreuve théorique, Octobre 1963, 2ème Partie)

---

73

Le présent problème concerne l'étude, dans un cas simple, de questions qui ont reçu des réponses très générales [théorie de la dualité dans les EVT, et plus spécialement de la dualité entre  $L^1(\mu)$  et  $L^\infty(\mu)$ , où  $\mu$  est une mesure de Radon  $\geq 0$ ]. Les étudiants sont conviés à raisonner dans le cas simple considéré, sans appliquer brutalement les résultats plus généraux.

Notations.-  $Z$  désignant l'ensemble des entiers relatifs, on désignera par  $C$  l'algèbre  $R^Z$  des applications de  $Z$  dans  $R$ , et par  $C_K$  la sous-algèbre de  $C$  formée des  $f \in C$ , tels que  $f(n) = 0$  sauf pour un nombre fini de valeurs de  $n$ . Si  $f \in C$ , on notera  $|f|$  l'application  $n \rightarrow |f(n)|$ .

$e$  désignera l'application  $n \rightarrow 1$  et, pour chaque  $n \in Z$ ,  $e_n$  l'application définie par  $e_n(n) = 1$ , et  $e_n(p) = 0$  si  $p \neq n$ .

Pour tout  $f \in C$ , telle que  $\sum_{p \in Z} |f(p)| < +\infty$ , on désignera par  $\mu(f)$  ou par  $\int f d\mu$  la somme  $\sum_{n \in Z} f(n)$  de la famille (absolument sommable)  $(f(n))_{n \in Z}$ .

Si  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $C$ , on désignera par  $E^*$  l'ensemble des  $g \in C$  tels que

$$\sum_{p \in Z} |f(p) g(p)| < +\infty .$$

1) Etablir les propriétés suivantes :

$E^*$  est un sous-espace vectoriel de  $C$ ,

$$E \subset F \implies F^* \subset E^* ,$$

$$E \subset E^{**} ,$$

$$E^* = E^{***} ,$$

$$E^* = C \implies E \subset C_K , C_K^* = C \text{ et } C^* = C_K ,$$

$$E = E^{**} \implies C_K \subset E .$$

Montrer par un exemple que la réciproque de la dernière propriété n'est pas exacte.

2) a) Si  $f \in E$  et  $g \in E^*$ , posons

$$\langle f, g \rangle = \int fg \, d\mu = \sum_n f(n) g(n).$$

Montrer que, si  $C_K \subset E$ ,  $\langle f, g \rangle$  est une forme bilinéaire qui met les espaces  $E$  et  $E^*$  en dualité.

Montrer par un exemple que cette propriété ne subsiste pas nécessairement si  $C_K \not\subset E$ .

b) On suppose que  $C_K \subset E$ . Montrer que toute forme linéaire sur  $E$ , continue pour la topologie  $\sigma(E, E^*)$ , peut s'écrire d'une seule manière  $f \rightarrow \int fg \, d\mu$  pour un  $g \in E^*$ .

Montrer que, si, pour la topologie  $\sigma(E, E^*)$  sur  $E$ , toute suite de Cauchy est convergente, alors  $E = E^{**}$ .

3) Soient  $L^1$  l'ensemble des  $f \in C$ , tels que

$$\int |f| \, d\mu = \sum_{p \in Z} |f(p)| < +\infty,$$

et  $L^\infty$  l'ensemble des  $f \in C$ , tels que

$$\|f\| = \sup_{n \in Z} |f(n)| < +\infty.$$

a) Montrer que  $L^1 = (R^e)^*$  et  $L^\infty = L^{1*}$ ; en déduire que  $L^1 = L^{1**}$ , et  $L^\infty = L^{\infty**}$ .

b) Pour tout  $f \in L^1$ , soit  $N_1(f) = \int |f| \, d\mu$ .

Montrer que  $L^1$  muni de la topologie  $\mathcal{T}$  associée à la norme  $N_1$  est un espace de Banach; montrer que le dual topologique de  $L^1$  pour la topologie  $\mathcal{Z}$  est le même que pour la topologie  $\sigma(L^1, L^\infty)$ .

c) Montrer que, pour tout  $f \in L^1$ ,

$$N_1(f) = \sup \left\{ \left| \int fg \, d\mu \right| \mid g \in L^\infty, \|g\| = 1 \right\}.$$

En déduire que, si, pour tout  $f \in L^1$ , on désigne par  $\theta_f$  la forme linéaire  $g \rightarrow \int fg \, d\mu$  sur  $L^\infty$ ,  $f \rightarrow \theta_f$  est une isométrie de  $L^1$  (muni de la distance associée à  $N_1$ ) dans le dual topologique fort de  $L^\infty$  (muni de la topologie associée à la norme  $\|g\|$ ).

d) Montrer que  $L^1$ , muni de la topologie  $\mathcal{T}$ , est de type dénombrable, et que  $L^\infty$  muni de la topologie associée à la norme  $\|g\|$  n'est pas de type dénombrable.

Montrer que, dans  $L^1$ , la boule unité (pour la norme  $N_1$ ) n'est pas compacte pour la topologie  $\sigma(L^1, L^\infty)$ .

e) En déduire qu'il existe dans le dual topologique de l'espace normé  $L^\infty$  des formes linéaires qui ne sont pas de la forme  $\theta_f$ , où  $f \in L^1$ . [Autrement dit, que  $L^1$  n'est pas réflexif.]

f) Montrer que, dans  $L^1$ , toute suite  $(f_n)$  qui converge vers 0 pour la topologie faible  $\sigma(L^1, L^\infty)$  converge aussi vers 0 pour la topologie  $\sigma(L^1, L^\infty)$ .

[On pourra montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une partie finie  $H$  de  $Z$  telle que

$$\sum_{p \notin H} |f_n(p)| \leq \varepsilon$$

pour tout entier  $n$ ; pour cela raisonner par l'absurde, en montrant que, si cette propriété n'était pas vraie, il existerait un nombre  $\delta > 0$ , une suite croissante  $(n_K)$  d'entiers  $\geq 0$  et une suite croissante  $(H_K)$  de parties finies de  $Z$  telles que, pour tout  $K$ ,

$$\sum_{p \in H_{K-1}} f_n(p) \leq \delta/8 \quad \text{pour } n \geq n_K,$$

$$\sum_{p \notin H_K} f_n(p) \leq \delta/8 \quad \text{pour } n \leq n_K,$$

et

$$\sum_{p \in H_K \setminus H_{K-1}} f_{n_K}(p) \geq \delta/2$$

("méthode de la base glissante").]

En déduire que dans  $L^1$ , toute suite de Cauchy pour la topologie  $\sigma(L^1, L^\infty)$  converge pour la topologie  $\mathcal{T}$ .

4) Déduire de 3, f, que si  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $C$ , tel que  $C_K \subset E$ , et si  $E = E^{**}$ , alors toute suite de Cauchy dans  $E$  pour la topologie  $\sigma(E, E^*)$  est convergente [réciproque de la propriété 2, b].

---

TOPOLOGIES FAIBLES

Soient  $E, F$  deux espaces vectoriels sur  $R$ , en dualité. On désigne par  $E^*$  le dual algébrique de  $E$ , muni de la topologie faible  $\sigma(E^*, E)$ .

1) Montrer que la topologie faible  $\sigma(F, E)$  est identique à la trace de  $\sigma(E^*, E)$  sur  $F$  (considéré comme partie de  $E^*$ ); montrer que  $F$  est partout dense dans  $E^*$ , et que  $E^*$  est complet.

2) En déduire que si,  $E, F$  sont tous deux complets pour les topologies  $\sigma(E, F)$  et  $\sigma(F, E)$  respectivement, ils sont tous deux de dimension finie (on pourra par exemple, après avoir identifié  $F$  à un espace  $R^I$ , montrer que si  $I$  est infini, il existe sur  $E$  des formes linéaires non continues).

(Epreuve théorique, Octobre 1962, 2ème Partie).

---

1) Soit  $C$  un sous-cône convexe fermé de l'espace vectoriel topologique  $R^N$ , contenu dans  $R_+^N$ .

Soit  $a$  un point de  $C$ , de coordonnées toutes  $> 0$ . On associe à ce point l'application  $f$  de  $R_+^N$  dans  $[0, \infty]$  ainsi définie :

$$f(x) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{x_n}{a_n}$$

Vérifier que  $f$  est positivement linéaire (en un sens qu'on précisera), strictement positive sauf en 0, semi-continue inférieurement, et que  $f(a) = 1$ .

Montrer que l'ensemble  $B_a$  des  $x$  de  $R_+^N$  tels que  $f(x) \leq 1$  est convexe et compact ; étudier l'intersection de  $B_a$  par les sous-espaces vectoriels de dimension 2 de  $R^N$ .

Montrer que tout point extrémal de  $C \cap B_a$  autre que 0 appartient à une génératrice extrémale de C. En déduire que C est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses génératrices extrémales.

2) Soit  $\mathcal{L}^1$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  constitué par les suites  $(x_n)$  sommables de nombres réels.

Montrer que dans  $\mathcal{L}^1$  muni de la norme  $\|x\| = \sum |x_n|$ , le cône  $\mathcal{L}_+^1$  des suites  $(x_n) \geq 0$  n'est localement compact, ni pour la topologie forte associée à la norme, ni pour la topologie affaiblie ; on pourra même montrer qu'il n'est pas complet pour cette topologie affaiblie.

Montrer que  $\mathcal{L}_+^1$  n'est pas complet non plus pour la topologie de  $\mathbb{R}$  ; montrez cependant, en utilisant la question précédente, que toute partie convexe relativement fermée de  $\mathcal{L}_+^1$  (pour la topologie induite sur  $\mathcal{L}_+^1$  par  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ) a des points extrémaux.

3) Montrer que dans l'espace  $L^1$  des classes de fonctions numériques sommables par rapport à la mesure de Lebesgue de  $[0, 1]$ , le sous-cône convexe  $L_+^1$  n'a aucune génératrice extrémale.

(Epreuve pratique, Février 1962, 2ème Partie)

---

76

Appelons intégrant sur  $\mathbb{R}^n$  toute application continue  $(x,u) \rightarrow f(x,u)$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  telle que, pour tout scalaire  $\lambda \geq 0$ , on ait  $f(x,\lambda u) = \lambda f(x,u)$ . On appelle support de f le plus petit fermé X de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $(x \notin X) \implies (f(x,u) = 0 \text{ pour tout } u)$ ; et on désigne par E l'espace vectoriel des intégrants à support compact, ordonné par le cône  $E_+$  des intégrants  $\geq 0$ .

On appelle courbe généralisée de  $\mathbb{R}^n$  toute forme linéaire positive T sur l'espace ordonné E.

1) Définir la notion de support d'une courbe généralisée. Donner divers exemples de courbe généralisée.

2) Mettre une structure de cône convexe et une topologie faible sur l'ensemble  $C$  des courbes généralisées.

3) Montrer que tout élément extrémal du cône  $C$  a un support réduit à un point, et déterminer ces éléments extrémaux.

(Epreuve pratique, Octobre 1962, 2ème Partie)

---

77

On se donne un espace compact  $E$  et une partie fermée  $A$  de  $E$ , et on désigne par  $D(A)$  l'espace vectoriel ordonné, quotient de  $C(E)$  par la relation d'équivalence :  $(f \sim g)$  s'il existe un ouvert de  $E$  contenant  $A$  dans lequel  $f=g$ .

On notera  $\varphi$  l'application canonique de  $D(A)$  sur  $C(A)$ .

1) Montrer que si  $T$  est une forme linéaire positive sur  $D(A)$ , la relation  $(\varphi(u) = \varphi(v))$  entraîne  $T(u) = T(v)$ .

2) En déduire une expression simple des formes linéaires positives sur  $D(A)$ .

3) On désigne par  $O(A)$  le sous-espace vectoriel de  $D(A)$  constitué par les éléments  $u$  tels que  $\varphi(u) = 0$ .

Montrer que pour toute  $v \in O^+(A)$ , il existe  $w \in O^+(A)$  telle que pour tout entier  $n$  on ait  $nv \leq w$ .

En déduire que toute forme linéaire positive sur  $O(A)$  est nulle.

4) On désigne par  $S$  le quotient de l'espace des suites  $(a_n)$  de nombres réels par la relation  $((a_n) \sim (b_n))$  si  $a_n = b_n$  pour tout  $n$  assez grands; et par  $B$  l'espace défini de façon analogue à partir des suites bornées.

Montrer que toute forme linéaire positive sur  $S$  est nulle; puis montrer qu'il existe un espace compact  $A$  tel que le cône des formes linéaires positives sur  $B$  soit identifiable à l'ensemble des mesures de Radon positives sur  $A$ . Etablir en particulier un lien entre les éléments extrémaux de ce cône et les ultrafiltres non triviaux sur  $N$ .

(Epreuve théorique, Février 1963, 2ème Partie)

MINORATION D'UNE FORME AFFINE

Soit  $X$  une partie convexe d'un e.v.t.E., et soit  $f$  une fonction numérique affine sur  $X$ .

1) Montrer que si  $f$  est bornée inférieurement au voisinage d'un point de  $X$ , elle l'est aussi au voisinage de tout point.

2) En déduire que si  $X$  est compact et si  $f$  est de lère classe de Baire,  $f$  est bornée sur  $X$ .

(Epreuve pratique, Juin 1964, lère Partie)

---

POINTS EXPOSES

Soit  $X$  une partie compacte convexe métrisable d'un e.l.c. séparé  $E$ .

1) Montrer qu'il existe une injection affine continue de  $X$  dans un espace de Hilbert.

2) Disons qu'un point  $x$  de  $X$  est un point exposé s'il existe une forme affine continue sur  $X$  qui n'atteint son maximum qu'au seul point  $x$ .

Montrer qu'un tel point exposé est extrémal; puis, en utilisant la question précédente, montrer que l'ensemble des points exposés est partout dense dans l'ensemble des points extrémaux de  $X$ .

(Epreuve pratique, Juin 1964, 2ème Partie)

---

Soit  $K$  un espace compact ; on munit  $\mathcal{C}(K)$  de la norme de la convergence uniforme et on désigne par  $B_\varepsilon$  la boule ouverte de  $\mathcal{C}(K)$  de centre  $0$  et de rayon  $\varepsilon$ .

Pour tout  $x \in K$ , on désignera par  $N_x$  l'ensemble des  $u \in \mathcal{C}(K)$  telles que  $u \geq 0$  et  $u(x) = 0$ .

On dira qu'une partie  $X$  de  $\mathcal{C}(K)$  est semi-réticulée inférieurement si pour toutes  $u, v \in X$ , on a aussi :

$$(\text{enveloppe inf. de } u, v) \in X.$$

1) Soit  $X$  une partie fermée non vide de  $\mathcal{C}(K)$ , semi-réticulée inférieurement et soit  $f \in \mathcal{C}(K)$  avec  $f \notin X$ .

Montrer qu'il existe un  $x \in K$  et un  $\varepsilon > 0$  tels que l'ouvert convexe  $\{f\} + N_x + B_\varepsilon$  soit disjoint de  $X$ .

2) Lorsque de plus  $X$  est un cône convexe, montrer grâce à un théorème de séparation, qu'il existe une forme linéaire continue  $\mu$  sur  $\mathcal{C}(K)$  telle que :

$$\mu(f+g) < 0 \text{ pour toute } g \in N_x ; \quad \mu(u) \geq 0 \text{ pour toute } u \in X.$$

Peut-on préciser la forme de  $\mu$  ?

(Epreuve pratique, Juin 1964, 3ème Partie)

---

1°) Soit  $G$  un groupe topologique commutatif et soit  $X$  une partie de  $G$  telle que  $G = (X - X)$ .

a) Montrer que la trace sur  $X$  de la structure uniforme de  $G$  détermine celle de  $G$ .

b) Montrer que si cette trace est séparée (resp. métrisable), il en est de même de la structure uniforme de  $G$ .

2°) Soit  $E$  un e.v.t. (sur  $R$ ) et soit  $X$  une partie convexe de  $E$  telle que  $E$  soit l'espace affine engendré par  $X$ . Montrer que si  $X$  est séparé,  $E$  l'est aussi.

3°) Soit  $E$  un e.v.t. faible métrisable de dimension infinie, et soit  $X$  une partie convexe et complète de l'espace uniforme  $E$ , ne contenant pas  $0$  et ne contenant aucune droite.

Montrer qu'il existe une application linéaire  $\varphi$  de  $E$  dans  $R^N$  telle que

- a)  $\varphi$  est un isomorphisme de  $E$  sur  $\varphi(E)$
- b)  $\varphi(X) \subset R_+^N$
- c)  $\varphi(E)$  est partout dense dans  $R^N$

(Epreuve pratique, Octobre 1964, 1ère Partie)

---

82

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie (sur  $R$ ), et soit  $X$  une partie convexe compacte de  $E$ .

Un point  $x$  de  $X$  est dit exposé s'il existe une forme linéaire sur  $E$  qui sur  $X$  n'atteint son maximum qu'au point  $x$ .

On désigne par  $A$  l'ensemble des points exposés de  $X$ , et par  $B$  l'ensemble des points extrémaux de  $X$ .

1°) Montrer que  $A \subset B$ , que l'on n'a pas toujours  $A = B$ , et que  $A$  est partout dense dans  $B$ .

2°) On munit  $E$  d'une norme, et on désigne par  $Y$  l'ensemble des formes linéaires sur  $E$ , de norme  $\leq 1$ .

Soit  $K$  la partie de  $X \times Y$  constituée par les points  $(x,y)$  tels que la fonction  $y$  sur  $X$  soit maximum au moins en  $x$ .

Montrer que  $K$  est compact.

Pour tout  $x \in X$ , soit  $K_x$  l'ensemble des  $y \in Y$  tels que  $(x,y) \in K$  ; de même, pour tout  $y \in Y$ , soit  $K^y$  l'ensemble des  $x \in X$  tels que  $(x,y) \in K$ .

Vérifier que  $K_x$  est convexe, et que pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $W$  des  $y \in Y$  tels que  $\text{diamètre}(K^y) < \varepsilon$  est ouvert.

Utiliser ces remarques pour montrer que  $A$  est un  $F_{\sigma\delta}$ .

(Epreuve pratique, Octobre 1964, 2ème Partie)

---



III

THEORIE DE LA MESURE

Soit  $E$  un espace topologique localement compact. On désigne par  $\mathcal{K}(E)$  (resp.  $\mathcal{K}(E,A)$ ) l'ensemble des fonctions numériques continues définies sur  $E$  et nulles en dehors d'un sous-ensemble compact de  $E$  (resp. nulles en dehors du sous-ensemble  $A$  de  $E$ ).

I - Montrer que, pour tout compact  $K$  et tout ouvert  $\Omega$  de  $E$  tels que  $K \subset \Omega$  il existe une fonction  $f \in \mathcal{K}(E)$  telle que  $I_K \leq f \leq I_\Omega$  ( $I_A$  désignant la fonction caractéristique de  $A \subset E$ ). On pourra envisager d'abord le cas où  $E$  est métrisable.

II - Supposons que  $E$  est non-compact.  $\mathcal{K}(E)$  est muni de la structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  induite par celle de  $\mathbb{R}^E$ ; et, pour tout compact  $K \subset E$ ,  $\mathcal{K}(E,K)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{K}(E)$ . Soit  $\mathcal{T}_u$  la topologie sur  $\mathcal{K}(E)$  induite par la topologie de la convergence uniforme dans  $E$ ; et soit  $u$  l'ensemble des parties convexes symétriques de  $\mathcal{K}(E)$  dont la trace sur chacun des sous-espaces  $\mathcal{K}(E,K)$  (où  $K$  est une partie compacte de  $E$ ) est un voisinage de  $0$  dans ce sous-espace pour la topologie induite par  $\mathcal{T}_u$ .

a) Montrer que  $u$  est un système fondamental de voisinages de  $0$  pour une topologie localement convexe séparée  $\mathcal{T}$  compatible avec la structure d'espace vectoriel de  $\mathcal{K}(E)$ .

Montrer que  $\mathcal{T}_u \subset \mathcal{T}$  et que  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}_u$  induisent la même topologie sur chacun des sous-espaces  $\mathcal{K}(E,K)$ .

Montrer que chacun des sous-espaces  $\mathcal{K}(E,K)$  est fermé dans  $E$  pour la topologie  $\mathcal{T}$ .

b) On munit  $\mathcal{K}(E)$  de la topologie  $\mathcal{T}$ .

Montrer que pour qu'une application linéaire de  $\mathcal{K}(E)$  dans un espace localement convexe  $F$  soit continue, il faut et il suffit que sa restriction à chacun des sous-espaces  $\mathcal{K}(E,K)$  soit continue pour la topologie induite par  $\mathcal{T}_u$ .

Montrer de même que pour qu'un ensemble  $H$  d'applications linéaires de  $\mathcal{K}(E)$  dans  $F$  soit équicontinu, il faut et il suffit que, pour toute partie compacte  $K$  de  $E$ , l'ensemble des restrictions à  $\mathcal{K}(E, K)$  des applications de  $H$  soit équicontinu pour la topologie induite par  $\mathcal{E}_u$  sur  $\mathcal{K}(E, K)$ .

c) Soit  $\mathcal{M}(E)$  le dual topologique de l'espace  $\mathcal{K}(E)$  muni de la topologie  $\mathcal{E}$ . Les éléments de  $\mathcal{M}(E)$  [formes linéaires sur  $\mathcal{K}(E)$  continues pour  $\mathcal{E}$ ], sont appelés mesures de Radon sur  $E$ .

Montrer que, pour qu'une forme linéaire  $\mu$  sur  $\mathcal{K}(E)$  soit une mesure de Radon, il faut et il suffit que pour toute partie compacte  $K$  de  $E$ , il existe un nombre  $M_K \geq 0$  tel que  $\mu(f) \leq M_K \|f\|$  pour tout  $f \in \mathcal{K}(E, K)$

$$\left[ \text{où } \|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)| \right]$$

Montrer que toute forme linéaire positive  $\mu$  sur  $\mathcal{K}(E)$  (c'est-à-dire telle que  $f \geq 0 \implies \mu(f) \geq 0$ ) est une mesure de Radon.

Soit  $H \subset \mathcal{M}(E)$ , tel que  $\{\mu(f) \mid \mu \in H\}$  est bornée dans  $\mathbb{R}$  pour tout  $f \in \mathcal{K}(E)$ . Montrer que  $H$  est équicontinu (utiliser la partie I).

d) Caractériser l'ensemble  $B$  des mesures de Radon qui sont continues pour la topologie  $\mathcal{E}_u$ .

Soit  $C_0(E)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $E$  qui tendent vers zéro à l'infini. Montrer que pour qu'une mesure de Radon  $\mu$  appartienne à  $B$ , il faut et il suffit que  $\mu$  se prolonge en une forme linéaire continue sur  $C_0(E)$  munis de la topologie de la convergence uniforme; et que le prolongement est alors unique.

I - On supposera dans cette partie que  $E$  est dénombrable à l'infini et non compact.

a) Pour toute fonction numérique  $h$  continue dans  $E$ , telle que  $h(x) > 0$ , pour tout  $x \in E$ , on désigne par  $V(h)$  l'ensemble des fonctions  $f \in \mathcal{K}(E)$  telles que  $|f| \leq h$ . Montrer que les  $V(h)$  forment un système fondamental de voisinages de  $0$  pour la topologie  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{K}(E)$  [on utilisera la partie I].

En déduire que  $\mathcal{E}_u \neq \mathcal{E}$ .

b) Montrer que l'espace  $\mathcal{K}(E)$  est complet pour la topologie  
[Remarquer, par exemple, qu'un filtre de Cauchy pour  $\mathcal{K}$  converge uniformément vers une fonction  $f$ , continue sur  $E$  ; et montrer que  $f \in \mathcal{K}(E)$  en raisonnant par l'absurde.]

---

NOYAUX CONTINUS D'UN ESPACE LOCALEMENT COMPACT.

Soient  $E$  un espace topologique localement compact ;  $C(E)$  (resp.,  $\mathcal{K}(E)$ ), l'espace des fonctions numériques définies sur  $E$  et continues (resp., à support compact) ;  $M(F)$  (resp.  $M_R(F)$ ), l'espace des mesures de Radon sur  $E$  à support (resp. à support compact) continu dans le sous-ensemble fermé  $F$  de  $E$  ;  $T^+(F)$  le sous-ensemble de  $M(F)$  formé de des mesures positives  $\mu$  telles que  $\mu(E) = 1$ .

On appelle topologie vague sur  $M(E)$ , la moins fine des topologies rendant continues toutes les formes linéaires

$$\mu \longrightarrow \langle \mu, f \rangle = \mu(f) \quad (f \in \mathcal{K}(E)) .$$

I - On suppose  $M(E)$  muni de la topologie vague.

a) Montrer que pour tout fermé  $F$  de  $E$ ,  $M(F)$  et  $M^+(F)$  sont fermés dans  $M(E)$ .

b) Montrer que  $T^+(F)$  est un ensemble convexe compact, ne contenant pas l'origine.

c) Si  $F$  est compact, montrer que  $M^+(F)$  est le cône convexe engendré par  $T^+(F)$ .

d) Montrer que, si  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  sont deux sous-ensembles fermés de  $M^+(E)$ ,  $\Delta_1 + \Delta_2$  est fermé.

e) Montrer que toute forme linéaire continue sur  $M(E)$  se met d'une manière et d'une seule sous la forme

$$\mu \longrightarrow \mu(f) = \int f d\mu$$

où  $f \in \mathcal{K}(E)$ .

f) Montrer que pour tout  $\varphi \in C(E)$  et  $\mu \in M_R^+(E)$ ,  $\varphi \in \mathcal{H}_b^1(\mu)$ .

On posera encore

$$\langle \mu, \varphi \rangle = \int \varphi d\mu$$

pour

$$\mu \in M_R^+(E) \quad \text{et} \quad \varphi \in C(E)$$

Montrer que  $\langle \mu, \varphi \rangle$  peut se prolonger en une forme bilinéaire définie sur  $M_R(E) \times C(E)$  qui met  $M_R(E)$  et  $C(E)$  en dualité.

g) Montrer que, si  $F$  est un compact de  $E$ ,  $T^+(F)$  est compact lorsqu'on munit  $M_R(E)$  de la topologie la moins fine rendant continues les formes linéaires

$$\mu \longrightarrow \langle \mu, \varphi \rangle, \quad \varphi \in C(E).$$

[topologie faible sur  $M_R(E)$  associée à la dualité avec  $C(E)$ ].

II - On suppose dans ce numéro, et le suivant, que  $E$  possède une base dénombrable d'ouverts.

On appelle noyau continu sur  $E$  toute application linéaire positive

$$V : f \longrightarrow Vf,$$

de  $\mathcal{K}(E)$  dans  $C(E)$  (1). Pour tout  $x \in E$ , soit  $V_x$  l'application

$$f \longrightarrow Vf(x)$$

de  $\mathcal{K}(E)$  dans  $R$ .

a) Montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $V_x$  est une mesure de Radon positive sur  $E$ .

b) Si  $x \in E$ , et  $A \in \mathcal{B}_E$  ( $\mathcal{B}_E$ , tribu borélienne de  $E$ ), soit

$$V(x, A) = V_x(A).$$

Montrer que pour tout  $A \in \mathcal{B}_E$ ,

$$x \longrightarrow V(x, A)$$

est une fonction borélienne (à valeurs dans  $\bar{R}_+$ ).

---

(1) La fonction  $Vf$  est appelée potentiel de la fonction  $f$ .

Montrer que si  $\bar{A}$  est compact, la fonction

$$x \rightarrow V(x, A)$$

est bornée sur tout compact de  $E$ .

c) Montrer qu'il existe une application linéaire positive et une seule  $V^*$  de  $M_R(E)$  dans  $M(E)$  telle que :

$$\langle \mu, Vf \rangle = \langle V^*(\mu), f \rangle ,$$

pour tout  $f \in \mathcal{K}(E)$ , et pour tout  $\mu \in M_R(E)$  [Utiliser I f]. On notera également  $\mu V$  la mesure.

$$V^*(\mu) \quad (\mu \in M_R(E)) \quad (1)$$

Montrer que pour tout

$$\mu \in M_R^+(E) \quad \text{et} \quad A \in \mathcal{B}_E ,$$

on a :

$$\mu V(A) = \int V(x, A) d\mu(x) .$$

Montrer que  $V^*$  est continue quand on munit  $M_R(E)$  de topologie définie en I. g.

III - On dit qu'un noyau continu  $V$  sur  $E$  est strictement positif, si  $V_x \neq 0$  pour tout  $x \in E$  .

On dit qu'un noyau satisfait au principe de domination, si, pour tout couple  $f, g$  de fonctions de  $\mathcal{K}^+(E)$ , la relation

$$Vf(x) \leq Vg(x)$$

pour tout  $x$  tel que  $f(x) \neq 0$  entraîne

$$Vf(x) \leq Vg(x)$$

pour tout  $x \in E$  .

On dit qu'un noyau satisfait au principe du balayage si, quel que soit l'ouvert relativement compact  $\omega$  de  $E$ , et quelle que soit la

---

(1) La mesure  $V^*(\mu) = \mu V$  est appelée potentiel de la mesure .

mesure  $\mu \in M_R^+(E)$ , il existe une mesure  $\mu' \in M^+(E)$  dont le support est contenu dans  $\bar{\omega}$ , et telle que  $\mu'V \leq V$  et

$$\langle \mu'V, f \rangle = \langle \mu V, f \rangle$$

pour tout  $f$  à support dans  $\omega$ .

Montren que, si  $V$  est un noyau continu strictement positif, pour que  $V$  satisfasse au principe du balayage, il faut et il suffit qu'il satisfasse au principe de domination.

On pourra utiliser I et montrer successivement les propriétés suivantes :

a) Pour que  $V$  satisfasse au principe du balayage, il faut et il suffit que

$$V^*(M_R^+(E)) \subset V^*(M^+(\bar{\omega})) + M^+(\omega)$$

pour tout ouvert relativement compact  $\omega$  de  $E$ .

b) Si  $V$  est strictement positif, la restriction de  $V^*$  à  $M_R^+(E)$  est biunivoque.

c) Si  $V$  satisfait au principe de domination, et si  $h \in \mathcal{K}^+(E)$ , les relations :

$$\langle \mu, h \rangle \geq 0 \quad \forall \mu \in M^+(\omega),$$

et :

$$\langle \nu, h \rangle \geq 0 \quad \forall \nu \in V^*(M^+(\bar{\omega}))$$

entraînent

$$\langle \lambda, h \rangle \geq 0, \quad \forall \lambda \in V^*(M_R^+(E)).$$

---

85

Soit  $X$  une partie de  $\mathbb{R}$  telle que, pour toute suite  $(r_n)$  de nombres  $> 0$ , il existe une suite  $(a_n)$  d'intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  telle que

$$X \subset \bigcup_n a_n \quad \text{et} \quad (\text{longueur de } a_n) \leq r_n \quad \text{pour tout } n.$$

1°) Montrer que pour toute mesure de Radon  $\mu \geq 0$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $\mu(\{x\}) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a aussi  $\mu(X) = 0$ .

2°) Montrer que si  $X$  est un ensemble analytique,  $X$  est nécessairement dénombrable.

(Epreuve pratique, Février 1961, 3ème Partie)

---

86

Soit  $E$  un espace localement compact. On désigne par  $\mathcal{M}^+$  le cône convexe des mesures  $\geq 0$  sur  $E$ , muni de la topologie faible. Soit  $G$  une application semi-continue inférieurement de  $E \times E$  dans  $[0, +\infty]$ .

Pour toute mesure  $\mu \geq 0$  sur  $E$ , on désigne par  $G\mu$  l'application de  $E$  dans  $[0, +\infty]$  définie par

$$G\mu(x) = \int G(x,y) d\mu(y)$$

1) Montrer que  $G$  est l'enveloppe supérieure d'applications continues de  $E \times E$  dans  $[0, +\infty[$ , nulles hors d'un compact.

2) Montrer que si l'application  $G$  est finie, continue, et nulle hors d'un compact de  $E \times E$ , l'application  $(x, \mu) \rightarrow G\mu(x)$  de  $E \times \mathcal{M}^+$  dans  $\mathbb{R}$  est continue.

3) a) Lorsque  $G$  est quelconque, montrer que l'application  $(x, \mu) \rightarrow G(x)$  est semi-continue inférieurement.

b) En déduire que si  $\mu_n$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{M}^+$  qui converge faiblement vers  $\mu$ , et si pour tout  $x \in E$  la suite  $G\mu_n(x)$  est convergente, on a  $\liminf. G\mu_n \geq G$ .

4) Soit  $\mu \geq 0$  à support compact ; soit  $\Delta$  la diagonale de  $E \times E$ .  
Montrer que lorsque la restriction de  $G$  au complémentaire de  $\Delta$  est finie  
et continue, l'application  $x \rightarrow G(x)$  est continue hors du support de

5) Soit  $\check{G}$  l'application symétrique de  $G$ , définie par  $\check{G}(x,y) = G(y,x)$ .

a) Montrer que pour toutes  $\mu, \nu \geq 0$ , on a

$$\int (G\mu) d\nu_0 = \int (\check{G}\nu_0) d\mu$$

b) On suppose  $E$  compact ; soit  $\nu_0$  une mesure  $\geq 0$  telle que  $G\nu_0$   
soit finie et continue. Montrer que pour toute  $\mu \geq 0$ ,  $G\mu$  est intégrable  
pour la mesure  $\nu_0$  et que l'application  $\mu \rightarrow (G\mu) d\nu_0$  est continue.

Comment peut-on étendre cet énoncé lorsque  $E$  est localement compact ?

(Epreuve théorique, Juin 1957)

-----  
87

Notations. - Toutes les mesures considérées sont sur la droite réelle  $\mathbb{R}$ .  
La convergence faible se notera  $\mu_n \rightarrow \mu$ . La masse + 1 en 0 sera notée  $\delta$ .

1) Soient  $(\lambda_n)$  et  $(\mu_n)$  deux suites de mesures  $\geq 0$  telles que  
 $\lambda_n(\mathbb{R}) \leq k$  et  $\mu_n(\mathbb{R}) \leq k$ .

a) Montrer que si  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  et  $\mu_n \rightarrow \mu$ , avec  $\lambda_n(\mathbb{R}) \rightarrow \lambda(\mathbb{R})$ ,  
on a  $\lambda_n * \mu_n \rightarrow \lambda * \mu$ .

b) Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures  $\geq 0$  telles que l'équation  
 $\lambda * \mu = \nu$  ait une seule solution  $\lambda \geq 0$ .

Montrer que  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  si  $\lambda_n * \mu_n \rightarrow \nu$ , si  $\mu_n \rightarrow \mu$ ,  
et si en outre, ou bien  $\lambda_n(\mathbb{R}) \rightarrow \lambda(\mathbb{R})$ , ou bien  $\mu_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mu(\mathbb{R})$ .

Appliquer ce résultat au cas  $\mu = \delta$  et au cas  $\mu = \nu$ ; que  
vaut alors  $\lambda$  ?

2) Soit  $(\pi_n)$  une suite de mesures  $\geq 0$  avec  $\pi_n(\mathbb{R}) = 1$ .

On pose  $\mu_n = \pi_1 * \pi_2 * \dots * \pi_n$

et  $\mu_{p,q} = \pi_p * \pi_{p+1} * \dots * \pi_q$

a) Montrer que si  $(\mu_n)$  converge,  $\pi_n \rightarrow \delta$ , mais que la réciproque est fautive (donner un contre-exemple simple).

b) Montrer que pour que  $(\mu_n)$  converge, il faut et il suffit que

$$\lim_{p \rightarrow \infty} (\mu_{p,q}) = \delta$$

c) Énoncer un critère suffisant de convergence des  $\mu_n$  exprimant que les supports des  $\pi_n$  sont compacts et assez rapidement convergents vers le point 0.

Utiliser aussi la transformation de Fourier pour chercher d'autres critères de convergence.

(Epreuve théorique, Mars 1958, 3ème Partie)

---

IMAGE D'UNE MESURE DISCRETE POSITIVE

1) Soient  $E, F$  deux espaces compacts ; soit  $f$  une application continue de  $E$  sur  $F$ .

Montrer que toute mesure discrète positive sur  $F$  est l'image par  $f$  d'une mesure discrète positive sur  $E$ .

En déduire l'énoncé analogue pour toute mesure positive sur  $F$ .

2) Examiner si cet énoncé s'étend au cas où  $E$  et  $F$  sont localement compacts (et non compacts) et où, pour tout compact  $K$  de  $F$ ,  $f^{-1}(K)$  est compact.

Montrer par un exemple simple que cet énoncé peut être en défaut pour un  $E$  localement compact, et un  $F$  compact.

(Epreuve pratique, Octobre 1959, 1ère Partie)

MESURES DIFFUSES

On dira qu'une mesure de Radon est diffuse si elle ne charge aucun point.

1) Montrer que sur tout espace compact  $E$ , parfait (sans point isolé), il existe des mesures positives diffuses non nulles.

On pourra par exemple construire une telle mesure comme limite d'une suite convenable de mesures discrètes  $\mu_n$  telles que  $\mu_n$  consiste en  $2^n$  masses ponctuelles égales.

2) Soit  $\mu$  une mesure diffuse non nulle sur  $E$  compact.

a) Montrer que le support de  $\mu$  est parfait.

b) Lorsque de plus  $E$  est métrisable, montrer qu'il existe toujours une partie fermée, parfaite et non vide de  $E$ , de  $\mu$ -mesure nulle.

(Utiliser le fait que tout point de  $E$  a une mesure nulle, donc qu'il y a des ouverts de petite mesure).

3) Montrer que si  $E$  est un espace compact métrisable parfait, il existe pour toute mesure  $\mu$  sur  $E$ , une mesure diffuse  $\nu$  étrangère à  $\mu$ .

4) Soit  $G$  un groupe localement compact ; soit  $\mu$  une mesure positive diffuse sur  $G$ . Montrer que pour toute mesure  $\nu$  sur  $G$ , la mesure  $\mu * \nu$  est diffuse.

(Epreuve pratique, Octobre 1959, 2ème Partie)

---

CONTINUITÉ DE LA CONVOLUTION

1) Soient  $\mu_0, \nu_0$  deux mesures  $\geq 0$  sur  $R$ .

Montrer que l'application  $(\mu, \nu) \longrightarrow \mu * \nu$  est faiblement continue sur l'ensemble des couples  $\mu, \nu$  tels que  $0 \leq \mu \leq \mu_0$ ,

$$0 \leq \nu \leq \nu_0.$$

2) Soit  $(\mu_i)$  une famille de mesures positives sur  $R$ , uniformément bornées en ce sens qu'il existe une  $\varphi \in \mathcal{K}^+(R)$  telle que  $\mu * \varphi \leq 1$ .

Montrer que, pour toute mesure positive de masse totale finie, l'application  $\mu_i \longrightarrow \mu_i * \nu$  est faiblement continue sur l'ensemble des  $\mu_i$ .

3) Soient  $\lambda_n, \lambda, \mu_n, \mu$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) des mesures  $> 0$  telles que :

$$\lambda_n \longrightarrow \lambda \quad \text{et} \quad \mu_n \longrightarrow \mu.$$

Montrer que l'on n'a pas toujours  $\lambda_n * \mu_n \longrightarrow \lambda * \mu$ , même si  $\mu_n = \mu$  pour tout  $n$ .

Si en outre  $\lambda_n(R)$  tend vers  $\lambda(R)$  supposé fini, cette convergence a-t-elle lieu nécessairement ?

(Epreuve pratique, Juin 1960, 2ème Partie)

---

91

Soit  $E$  un espace compact, et  $\mu$  une mesure  $\geq 0$  sur  $E$ .

On désigne par  $M$  l'espace vectoriel des classes de fonctions numériques  $\mu$ -mesurables définies et finies presque-partout sur  $E$ .

On définit sur  $M$  une topologie d'espace vectoriel en définissant ainsi une base de voisinages  $V(a,b)$  de l'origine :  $V(a,b)$  est l'ensemble des  $f$  telles que  $|f| \leq \varepsilon$  sauf sur un ouvert de  $\mu$ -mesure  $< b$ .

1) Montrer que, lorsque  $\mu$  ne charge aucun point de  $E$ , l'enveloppe convexe de tout  $V(a,b)$  est  $M$  tout entier.

Montrer que la structure uniforme de  $M$  peut être définie par une distance ; donner un exemple d'une telle distance.

Montrer que la structure uniforme de  $M$  ne peut pas être définie par une norme.

2) Montrer que le sous-espace  $C(E)$  des fonctions continues dans  $E$  est partout dense dans  $M$ .

Est-ce que  $M$  est complet ?

3) Si la suite  $f_n$  converge simplement, presque partout dans  $E$  vers  $f$ , montrer que dans  $M$ ,  $f_n$  converge vers  $f$ .

4) Soit  $\phi$  une application continue de  $R$  dans  $R$ .

Montrer que l'application  $f \longrightarrow \phi(f)$  de  $M$  dans  $M$  est continue.

Pour quelles  $\phi$  cette application est-elle une homéomorphie ?

(Epreuve théorique, Juin 1960, 1ère Partie)

---

MESURES REPRESENTABLES

Soient  $E, F$  deux espaces localement compacts et  $\varphi$  une application continue de  $E$  sur  $F$  ; on dit qu'une mesure  $\nu$  sur  $F$  est représentable si elle est de la forme  $\varphi(\mu)$ , où  $\mu$  est une mesure sur  $E$ .

1) On suppose  $E$  et  $F$  compacts ; montrer que toute mesure discrète sur  $F$  est représentable ; en déduire, en se ramenant au cas des mesures positives de masse totale 1, que toute mesure sur  $F$  est représentable.

2) Montrer que si  $E$  est une réunion dénombrable de compacts, toute mesure sur  $F$  est représentable.

3) On dit qu'une mesure  $\nu$  sur  $F$  est localement représentable si tout point de  $F$  est contenu dans un ouvert  $\omega$  de  $F$  tel que la mesure  $\nu_\omega$  (restriction de  $\nu$  à  $\omega$ ) soit représentable.

Montrer en utilisant le lemme de Zorn, que toute mesure localement représentable, est représentable.

4) En déduire que si  $\varphi$  est propre (c'est-à-dire que  $\varphi^{-1}(K)$  est compact pour tout  $K$  compact de  $F$ ), toute mesure sur  $F$  est représentable.

(Epreuve théorique, Juin 1960, 2ème Partie)

---

93

1) Soit  $G$  un groupe abélien localement compact. Rappeler brièvement la définition du produit  $\mu * \nu$  de deux mesures positives sur  $G$ . Montrer que ce produit est toujours défini lorsque  $\mu$  a un support compact.

2) On suppose  $\nu$  fixe; est-ce que lorsque  $(\mu_n)$  converge faiblement vers 0,  $(\mu_n * \nu)$  converge aussi nécessairement vers 0 ?

3) Soit  $(\mu_n)$  une suite de mesures positives dont les supports convergent (en un sens qu'on précisera) vers un point  $a$  de  $G$ ; à quelle condition les mesures  $\mu_n * \nu$  convergent-elles (envisager d'abord le cas où la masse totale des  $\mu_n$  est 1); quelle est alors leur limite ?

(Epreuve théorique, Octobre 1960, 1ère Partie)

---

94

On désigne par  $\mathcal{M}$  l'espace vectoriel des mesures de Radon sur  $R$ , muni de la topologie faible, et par  $\mathcal{M}^+$  la partie de  $\mathcal{M}$  constituée par les mesures positives.

On se donne un élément  $\alpha$  de  $\mathcal{M}^+$  et on appelle  $\mathcal{C}$  le cône convexe des éléments  $\mu$  de  $\mathcal{M}^+$  tels que  $\mu * \alpha = \mu$ .

1) Montrer que pour toute  $\mu \in \mathcal{C}$  et toute  $\nu \in \mathcal{M}_0^+$  telle que  $\mu * \nu$  ait un sens, on a  $\mu * \nu \in \mathcal{C}$ .

2) Si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux éléments de  $\mathcal{C}$ , on dira que  $\mu_1 < \mu_2$  si  $\mu_2 = \mu_1 + \mu_3$ , où  $\mu_3 \in \mathcal{C}$ ; on dira qu'une  $\mu$  de  $\mathcal{C}$  est extrémale dans  $\mathcal{C}$  si  $(\mu' < \mu) \implies (\mu' = k\mu)$ , où  $k$  est un scalaire.

Montrer que pour toute  $\mu \in \mathcal{C}$  et pour toute  $\sigma \in \mathcal{M}^+$  telle que  $\sigma \leq \alpha$ , on a  $\mu * \sigma < \mu$ .

En déduire que si  $\mu$  est extrémale on a  $\mu * \sigma = k\mu$ , où  $0 \leq k \leq 1$ .

3) Par la suite on désignera par  $\mu$  une mesure extrémale et par  $S_\alpha$  le support de  $\alpha$ .

Montrer que pour tout point  $a$  de  $S_\alpha$ , et pour tout voisinage  $V$  de  $a$ , il existe une mesure positive  $\beta$  de masse totale 1 et portée par  $V$  telle que  $\mu * \beta = k\mu$ , où  $k \geq 0$ ; en déduire que pour tout  $a \in S_\alpha$ , on a :

$$\mu * \varepsilon_a = k(a)\mu$$

4) Soit  $H$  le plus petit sous-groupe fermé de  $R$  contenant  $S_\alpha$ . Montrer que l'application  $a \rightarrow k(a)$  est continue sur  $S_\alpha$  et se prolonge de façon unique sur  $H$  en une exponentielle continue que l'on notera encore  $k$ .

5) On suppose que  $H = R$  et on désigne par  $\lambda$  la mesure de Lebesgue de  $R$ . Montrer que  $\mu$  est, à un facteur près, le produit de  $\lambda$  par l'exponentielle  $k^{-1}$ .

Si  $k$  est l'exponentielle  $x \rightarrow e^{tx}$ , déterminer  $t$  pour que  $k^{-1}\lambda$  soit effectivement un élément de  $\mathcal{C}$ .

Montrer qu'il existe au plus deux solutions; construire des mesures  $\alpha$  pour lesquelles il y ait 0, 1, 2 solutions.

6) Déterminer les mesures  $\mu$  lorsque  $H \neq R$ .

7) Peut-on étendre ces résultats lorsqu'on remplace  $R$  par  $R^n$  ou par un groupe abélien localement compact ?

Dans le cas où ce groupe est le tore  $T$ , déterminer entièrement  $\mathcal{C}$ .

(Epreuve théorique, Octobre 1960, 2ème Partie)

---

On désigne par  $E$  l'ensemble des couples  $(x, i)$  où  $x \in [0, 1]$  et  $i \in \{-1, 0, 1\}$ ; on ordonne lexicographiquement <sup>(1)</sup>  $E$  et on le munit de la topologie associée à cet ordre.

---

(1) c'est-à-dire que  $(x, i) \leq (x', i')$  si  $x < x'$  ou si  $x = x'$ ,  $i \leq i'$ .

Pour simplifier, on notera par  $x_-$ ,  $x_0$ ,  $x_+$  les couples  $(x, -1)$ ,  $(x, 0)$ ,  $(x, 1)$  et par  $E_-$ ,  $E_0$ ,  $E_+$ , l'ensemble des  $x_-$ ,  $x_0$ ,  $x_+$  respectivement.

1) Montrer que l'application  $\varphi : (x, i) \longrightarrow x$  de  $E$  dans  $[0, 1]$  est continue et croissante.

2) Montrer que tout compact de  $E_-$  est bien ordonné ; en déduire qu'il est fini ou dénombrable.

3) On pose  $E' = E - \{0_-, 1_+\}$ .

Etablir une isomorphie canonique entre l'espace vectoriel des fonctions numériques continues sur  $E'$ , et l'espace vectoriel des fonctions numériques sur  $[0, 1]$  admettant en tout point de  $[0, 1]$  une limite à droite et une limite à gauche.

4) Montrer que  $E$  est compact.

5) En utilisant l'isomorphie ci-dessus, définir sur  $E$  une mesure de Radon positive  $\mu$  dont l'image par  $\varphi$  soit la mesure de Lebesgue de  $[0, 1]$  ; une telle mesure est-elle unique ?

6) Montrer que pour la mesure  $\mu$ ,  $E_0$  est mesurable et de mesure nulle. Est-ce que  $E_-$  et  $E_+$  sont mesurables ?

(Epreuve théorique, Octobre 1958, 1ère Partie)

---

Soit  $T$  un espace localement compact ; soit  $X$  un espace topologique ; et soit  $f$  une fonction numérique  $\geq 0$ , continue et bornée sur  $T \times X$ .

1) Soit  $m$  une mesure  $\geq 0$  sur  $T$ .

On pose  $g_m(x) = \int f(t, x) dm(t)$ , quantité finie ou  $+\infty$ .

Montrer que si  $m(T) < \infty$ ,  $g_m$  est continue ; et que dans le cas général  $g_m$  est semi-continue inférieurement.

2) Si la suite  $m_n$  converge faiblement vers  $m$ , avec  $m_n(T) \rightarrow m(T) < \infty$ , montrer que  $g_{m_n}$  converge uniformément vers  $g_m$  sur tout compact de  $X$ .

3) On suppose que pour tout compact  $K \subset X$ ,  $f(t,x) \rightarrow 0$  uniformément sur  $K$  lorsque  $t \rightarrow \omega$ , point à l'infini de  $T$ .

Montrer que l'application  $m \rightarrow g_m$  de l'ensemble des  $m \geq 0$  de masse totale  $\leq 1$  dans l'espace des  $g_m$  muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, est continue.

Lorsque l'application  $m \rightarrow g_m$  est bijective, que peut-on en déduire pour l'application réciproque ?

(Epreuve théorique, Octobre 1958, 2ème Partie)

---

97

On pose  $E = [0,1]$  et on désigne par  $F$  l'ensemble  $E \times \{-1, 1\}$  totalement ordonné par la condition :

$$(x, \varepsilon) \leq (x', \varepsilon') \quad \text{si} \quad x < x' \\ \text{ou si} \quad x = x' \quad \text{et} \quad \varepsilon \leq \varepsilon' .$$

On désigne par  $g$  l'application  $(x, \varepsilon) \rightarrow x$  de  $F$  sur  $E$ , et on appelle relèvement de  $g$  toute application  $f$  de  $E$  dans  $F$  telle que  $g \circ f = \text{identité}$ .

1) On vérifiera que  $F$  muni de la topologie associée à son ordre est compact, et que tout fermé  $X$  de  $F$  qui rencontre chaque ensemble  $\{x\} \times \{-1, 1\}$  en au plus un point, est fini ou dénombrable.

2) On désigne par  $\mu$  une mesure de Radon  $\geq 0$  sur  $E$ , qui ne charge aucun point. Montrer qu'aucun relèvement de  $g$  n'est  $\mu$ -mesurable.

3) On posera pour simplifier:  $(x, 1) = x_+$ , et  $(x, -1) = x_-$ ; montrer que pour toute  $\varphi \in \mathcal{C}(F)$ , on a  $\varphi(x_-) = \varphi(x_+)$  sauf au plus pour un ensemble dénombrable de valeurs de  $x$ .

En déduire que tout relèvement de  $g$  est scalairement  $\mu$ -mesurable, en ce sens que pour toute  $\varphi \in \mathcal{C}(F)$ ,  $\varphi \circ f$  est  $\mu$ -mesurable.

4) A tout relèvement  $f$  de  $g$  on associe la forme linéaire sur  $\mathcal{C}(F)$  définie par :

$$\varphi \longrightarrow \mu(\varphi \circ f)$$

Montrer que cette forme linéaire définit sur  $F$  une mesure de Radon positive qui ne dépend pas de  $f$  ; on la notera  $\nu$ .

Montrer qu'il existe une application  $h$  de  $F$  dans  $\mathcal{M}^1(F)$  telle que pour tout  $y \in F$ , le support de  $h_y$  ne contienne pas  $y$ , et telle que cependant, pour toute  $\varphi \in \mathcal{C}(F)$  on ait

$$\int \varphi(y) d\nu(y) = \int h_y(\varphi) d\nu(y).$$

(Epreuve théorique, Octobre 1963, 3ème Partie)

---

98

Soit  $E$  un espace localement compact,  $\mathcal{M}^+$  l'espace des mesures de Radon positives sur  $E$ , muni de la topologie vague, et soient  $A, B$  deux parties fermées de  $\mathcal{M}^+$ .

Montrer que la somme vectorielle  $(A+B)$  est fermée (On conseille d'utiliser un ultrafiltre convergent porté par  $A+B$ ).

(Epreuve pratique, Octobre 1961, 2ème Partie)

---

99

Soit  $\mathcal{D}$  l'espace vectoriel des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $E$  l'espace vectoriel des fonctions numériques sur  $\mathbb{R}^2$ , muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. On désigne

par  $\bar{D}$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les fonctions de la forme  $(x,y) \longrightarrow f(ax + by)$ , où  $f \in \mathcal{D}$ .

1) Montrer, en utilisant les quotients de la forme  $[f(x+hy)-f(x)]/h$ , que  $\bar{D}$  contient tous les polynômes en  $x,y$ , et déterminer entièrement  $\bar{D}$ .

2) En déduire que si  $\mu$  est une mesure de Radon à support compact sur  $\mathbb{R}^2$  telle que sa projection orthogonale sur toute droite soit la mesure nulle,  $\mu$  est nulle.

Etendre cette conclusion au cas où la projection de  $\mu$  sur toute droite d'une famille infinie de droites (de directions distinctes) est nulle.

3) Etendre ces résultats à  $\mathbb{R}^n$ .

(Epreuve pratique, Octobre 1961, 3ème Partie)

---

100

REPRESENTATION INTEGRALE D'UN CONVEXE COMPACT

Soit  $E$  un espace vectoriel localement convexe séparé et soit  $X$  une partie convexe compacte métrisable de  $E$ .

Soit  $A$  (resp.  $C$ ) l'ensemble des fonctions numériques continues affines (resp. concaves) sur  $E$ .

Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des mesures de Radon positives de masse totale 1 sur  $X$ ; et, pour toute  $\mu \in \mathcal{M}$ , soit  $\varphi(\mu)$  le barycentre de  $\mu$ .

1°) Montrer qu'il existe sur  $X$  une fonction numérique continue strictement convexe de la forme  $f = \sum a_n^2$ , où  $a_n \in A$ .

2°) Montrer que, dans  $E \times \mathbb{R}$ , l'ensemble des points  $(\varphi(\mu), \int f d\mu)$ , où  $\mu$  parcourt  $\mathcal{M}$ , est l'enveloppe convexe fermée  $F$  du graphe de  $f$ .

3°) Pour tout  $x \in X$ , on désigne par  $(x, g(x))$  le point de  $F$ , dont la première coordonnée est  $x$ , et dont la seconde coordonnée est maximum.

Montrer, en utilisant la stricte convexité de  $f$ , que la relation  $f(x) = g(x)$  équivaut à dire que  $x$  est un point extrémal de  $X$ . Montrer que

$$g = \inf_{\substack{a \in A \\ a \geq f}} a = \inf_{\substack{c \in C \\ c \geq f}} c.$$

4°) Soit  $x$  un point donné de  $X$ , et soit  $\lambda$  un des éléments de  $\mathcal{M}$  tels que  $x = \varphi(\lambda)$  et  $g(x) = \int f d\lambda$ .

Démontrer les relations :

$$\int f d\lambda = g(x) = \inf_{\substack{a \in A \\ a \geq f}} \int a d\lambda \geq \inf_{\substack{c \in C \\ c \geq f}} \int c d\lambda = \int (\inf c) d\lambda = \int g d\lambda.$$

5°) Dédire de ces relations et de  $f \leq g$ , que  $f(x) = g(x)$  sauf sur un ensemble  $\lambda$ -négligeable.

En déduire que  $\lambda$  est portée par l'ensemble des points extrémaux de  $X$ .

(Epreuve théorique, Octobre 1961, 2ème Partie)

---

101

1) Soit  $X$  un compact d'un espace vectoriel topologique séparé  $E$ . Montrer que son enveloppe convexe  $c(X)$  est une réunion dénombrable de compacts.

2) On prend désormais pour  $E$  l'espace des mesures de Radon sur l'intervalle  $[0,1]$ , muni de la topologie faible, et pour  $X$  l'ensemble des mesures ponctuelles  $\varepsilon_x$ .

Montrer que toute partie convexe compacte de  $c(X)$  est de dimension finie. En déduire que pour toute suite  $(K_n)$  de convexes compacts de  $c(X)$ , il existe une partie dénombrable de  $[0, 1]$  qui contient le support de toute  $\mu \in \bigcup K_n$ .

Déduire de là que  $c(X)$ , bien qu'étant convexe et réunion dénombrable de compacts, n'est pas réunion dénombrable de convexes compacts.

3) On désigne par  $A$  la partie de  $E$  constituée par les mesures positives de masse 1.

a) Montrer que pour tout voisinage  $V$  de  $X$  dans  $A$ , on a  $c(V) = A$ .

b) Est-il vrai que si  $K_n$  désigne une suite décroissante de compacts de  $A$ , on ait toujours :

$$c\left(\bigcap_n K_n\right) = \bigcap_n c(K_n)$$

(Epreuve pratique, Février 1962, 1ère Partie)

---

102

FRONTIERE FINE D'UN COMPACT

Soit  $X$  un espace compact ; soit  $C$  l'espace vectoriel des fonctions numériques réelles continues sur  $X$ , muni de la topologie de la convergence uniforme ; et soit  $\mathcal{M}$  le dual de  $C$ , muni de la topologie faible ; on désignera par  $\mathcal{M}^+$  (resp.  $\mathcal{M}^1$ ) l'ensemble des mesures  $\geq 0$  (resp.  $\leq 0$  et de norme 1) sur  $X$ .

Soit  $B$  un sous-espace vectoriel de  $C$  qui sépare les points de  $X$  et contient les constantes ; et soit  $B^*$  le dual de  $B$ , muni de la topologie faible.

Soit enfin  $\varphi$  l'application canonique de  $\mathcal{M}$  dans  $B^*$ .

1°) Montrer que  $B^* = \varphi(\mathcal{M})$  (utiliser Hahn-Banach).

Montrer qu'on peut identifier  $B^*$  au quotient de  $\mathcal{M}$  par la relation d'équivalence suivante :

$$(\mu_1 \sim \mu_2) \text{ si pour toute } g \in B \text{ on a } \mu_1(g) = \mu_2(g).$$

2°) On pose  $(B^*)^+ = \varphi(\mathcal{M}^+)$  et  $(B^*)^1 = \varphi(\mathcal{M}^1)$ .

Montrer que  $(B)^1$  engendre  $B$  et que c'est une base compacte du cône convexe  $(B)^+$ .

Soit  $f$  l'application  $x \rightarrow \varepsilon_x$  de  $X$  dans  $\mathcal{M}$ ; montrer que l'application  $\varphi \circ f$  de  $X$  dans  $(B^*)^1$  est une homéomorphie.

3°) On dira qu'un point  $x$  de  $X$  est frontière si pour toute  $\mu \in \mathcal{M}^+$  telle que  $\mu \sim \varepsilon_x$ , on a  $\mu = \varepsilon_x$ .

Soit  $F$  l'ensemble des points-frontière de  $X$  et soit  $E$  l'ensemble des points extrémaux de  $(B^*)^1$ .

Montrer que

$$f(F) = \mathcal{M}^+ \cap \varphi^{-1}(E) .$$

Pour cela, on montrera d'abord que

$$(\mu \in \mathcal{M}^+ \text{ et } \varphi(\mu) \in E) \implies (\mu = \varepsilon_x, \text{ où } x \in F) ,$$

puis on montrera que si  $x$  est frontière, on a.

$$\varphi(\varepsilon_x) \in E .$$

En déduire que l'homéomorphie  $\varphi \circ f$  transforme  $F$  en  $E$ .

4°) Montrer que si tout point de  $(B^*)^1$  est barycentre d'une mesure positive portée par  $E$ , il existe pour toute  $\mu \in \mathcal{M}^+$  une autre  $\nu \in \mathcal{M}^+$  telle que  $\mu \sim \nu$  et telle que  $\nu$  soit portée par  $F$ .

(Epreuve théorique, Février 1961, 2ème Partie)

---

EXAMENS DE LICENCE

	1ère session		2ème session	
	Epreuve théorique	Epreuve pratique	Epreuve théorique	Epreuve pratique
1956	8,9		11,42	
1957	86	53,64	23,24	48
1958	12,52,87		95,96	
1959	25,26,27	66	34,35,36	88,89
1960	91,92	37,90	93,94	38,39,51
1961	40,102	41,54,85	43,100	32,98,99
1962	58	74,101	44,75	55,76
1963	46,77	49	45,71,72,97	
1964	59,60,61	78,79,80	62,63	81,82



TABLE DES MATIERES

Note: Les problèmes n'ayant pas de titre portent sur des sujets particuliers ou difficilement classifiables.

---

<u>TOPOLOGIE GENERALE</u> .....	1 à 63
---------------------------------	--------

---

<u>CONNEXION</u> .....	1 à 12
Propriété de l'image continue d'un arc .....	2
Ensemble triadique de CANTOR .....	5
Espaces extrêmement discontinus .....	6
Compacts extrêmement discontinus .....	10
Contingent d'un continu de $\mathbb{R}^n$ .....	11

---

<u>ESPACES METRIQUES</u> .....	13 à 17
Recouvrements ouverts d'un espace métrique .....	13
Espace des fermés dans un métrique .....	15
Ultramétriques .....	16

---

Ensembles compacts dans une limite inductive .....	18
Dimension d'un espace topologique .....	28
Ensembles maigres .....	29
Propriété de Baire .....	30
Equivalences dans un localement compact .....	31
Germes d'une fonction numérique .....	33
Minoration d'une famille de fonctions .....	34
Convexes compacts du plan .....	35
Espace $N^N$ .....	36
Suites adaptés d'ouverts .....	37
Nouvelle topologie sur $\mathbb{R}$ .....	40

---

<u>ESPACES UNIFORMES</u> .....	42,43
--------------------------------	-------

---

Topologie sur l'ensemble des fermés d'un compact .....	44
Ordre sur l'ensemble des fermés d'un compact .....	45

---

<u>FILTRES</u> .....	47 à 50
Espace des ultrafiltres sur un ensemble .....	48
Ensemble modérés .....	49

---

<u>ESPACES DE FONCTIONS ET FONCTIONS PARTICULIERES</u> .....	51 à 58
Polynomes .....	55
Idéaux de $\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ .....	56
Algèbres de fonctions .....	57

Fonctions presque périodiques .....	58
Ensemble des fermés d'un espace topologique .....	15, 24 44, 45

---

<u>ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES</u> .....	64 à 82
Points extrémaux .....	64
Chapeaux des cônes convexes .....	65
Espaces de fonctions lipschitziennes .....	66
Extensions du théorème du graphe fermé .....	67
Espaces de Hilbert .....	70
Topologies faibles .....	74
Minoration d'une forme affine .....	78
Points exposés .....	79

---

<u>THEORIE DE LA MESURE</u> .....	83 à 102
Noyaux continus d'un espace localement compact .....	84
Convergence de mesures .....	87
Image d'une mesure discrète positive .....	88
Mesures diffuses .....	89
Continuité de la convolution .....	99
Mesures représentables .....	92
Représentation intégrale d'un convexe compact .....	100
Frontière fine d'un compact .....	102

---





QA 611 .C43  
Choquet, Gustave.  
Problemes de theorie des fonct

010101 000



0 1163 0127646 9  
TRENT UNIVERSITY

QA611 .C43

Choquet, M  
Problemes de theorie des

fonctions et topologie

DATE	ISSUED TO
	120263

120263

