

Recueil d'exercices proposés aux oraux des
Écoles Normales Supérieures et de l'École Polytechnique
Session 2025, Filière MP



Avant-propos

Ce recueil propose une sélection d'exercices proposés aux épreuves orales des Écoles Normales Supérieures et de l'École Polytechnique lors de la session 2025 en filière MP. Les exercices sont organisés par concours et par discipline (mathématiques et physique), afin d'offrir aux étudiants et aux enseignants de classes préparatoires un support de préparation aussi proche que possible des sujets réellement proposés cette année.

Les épreuves orales des concours X-ENS visent à évaluer non seulement la maîtrise technique des candidats, mais aussi leur capacité à raisonner de manière autonome, à structurer une démonstration, et à réagir face à des problèmes ouverts ou inattendus. À ce titre, les exercices présentés ici peuvent ne pas être complets, car ils dépendent fortement de l'interaction avec l'examineur. En effet, les oraux, en particulier à l'ENS, peuvent se présenter comme une conversation avec l'examineur. Certains examinateurs peuvent dicter l'énoncé en une seule fois, tandis que d'autres le construisent progressivement, en guidant le candidat étape par étape, chaque oral est donc une expérience propre à chaque candidat.

Il est tout à fait normal de ne pas pouvoir traiter immédiatement ou seul un exercice de ce recueil : leur résolution est pensée pour un cadre interactif, où le dialogue avec l'examineur permet de progresser. Les oraux X-ENS, à l'exception du français, des langues et de l'ADS, se déroulent sans temps de préparation.

Ce document est perfectible : les énoncés, rapportés par des élèves ayant passé ces épreuves, peuvent être incomplets, comporter des imprécisions, des erreurs ou des incohérences. Par ailleurs, lire les rapports de jury et les anciens sujets peut être très utile pour mieux appréhender les attentes des examinateurs et les thèmes récurrents. Des indications rédigées par les étudiants ayant passé ces épreuves sont disponibles à la fin du document. Nous vous encourageons vivement à nous signaler toute correction ou suggestion d'amélioration à l'adresse suivante : nicolasm.marote@gmail.com.

Nous remercions tous les étudiants qui ont participé à la confection de ce petit recueil et nous espérons qu'il vous sera utile dans votre préparation. Bon courage à tous !

Coefficients et durées des oraux des ENS (filière MP)

Épreuve	U	L	S	R	Durée
Maths U	30	–	–	–	55–60 min
Maths L	–	6	–	–	45 min
Maths SR	–	–	12	12	45 min
Maths ULSR	15	4	8	4	45 min
Physique U	25	–	–	–	60 min
Physique LSR	–	4	6	6	45 min
TIPE	8	2	2	2	40 min
LV	3	1.5	2	2	30 min ; 20 min

Coefficients et durées des oraux de l'X (filière MP)

Épreuve	Coefficient	Durée
Mathématiques 1	16	55 min
Mathématiques 2	16	55 min
Physique	20	55 min
ADS	15	2 h ; 40 min
Chimie	9	40 min
Français	8	45 min ; 20 min
LVA	8	30 min ; 20 min
LVB (facultative, points au-dessus de 10)	4	30 min ; 20 min
Sport	5	Une matinée

Table des matières

1	Oraux ENS	4
1.1	Mathématiques U	4
1.2	Mathématiques L	4
1.3	Mathématiques ULSR	5
1.4	Mathématiques SR	7
1.5	Physique U	8
1.6	Physique LSR	9
2	Oraux X	11
2.1	Mathématiques	11
2.2	Physique X	14
3	Indications	16
3.1	Oraux ENS	16
3.1.1	Mathématiques U	16
3.1.2	Mathématiques L	16
3.1.3	Mathématiques ULSR	16
3.1.4	Mathématiques SR	16
3.1.5	Physique U	17
3.1.6	Physique LSR	17
3.2	Oraux X	17
3.2.1	Mathématiques	17
3.2.2	Physique X	17

1 Oraux ENS

1.1 Mathématiques U

Énoncé 1:

Exercice 1.

Soit $n \geq 1$ entier, $A : \mathbb{R}_+ \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ continue, $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^1$ solution de l'équation

$$x' = A(t)x$$

Vérifier si la condition suivante suffit pour que $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$:

1. Il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D : \mathbb{R}_+ \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ continue à valeurs dans les matrices diagonales à coefficients diagonaux dans $] -\infty, -1]$ et $A(t) = PD(t)P^{-1}$.
2. Il existe $P : \mathbb{R}_+ \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ continue et D diagonale à coefficients diagonaux dans $] -\infty, -1]$ et $A(t) = P(t)DP(t)^{-1}$.

Exercice 2.

Soit $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$ croissante et $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tel que

$$y'' + \psi(x)y = 0.$$

Montrer que les extrema de $|y|$ forment une suite décroissante.

Énoncé 2:

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \mathcal{O}(x), \quad \text{quand } x \rightarrow 0,$$

et que pour toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\sum a_n \text{ converge, on ait } \sum f(a_n) \text{ converge.}$$

Montrer que

$$f : x \mapsto Cx,$$

où C est une constante, dans un voisinage de 0.

1.2 Mathématiques L

Énoncé 3:

On note

$$\mathcal{L}^1 = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \sum |u_n| < +\infty \right\}.$$

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on suppose qu'il existe $(u_k) \in (\mathcal{L}^1)^{\mathbb{N}}$ tel que pour toute suite $(\psi_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée, on ait

$$\sum_{n \geq 1} \psi_n u_{k,n} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} \sum_{n \geq 1} \psi_n u_n \in \mathbb{R}.$$

Montrer que

$$u_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} u \quad \text{dans } \mathcal{L}^1.$$

Énoncé 4:

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que leur commutateur

$$[A, B] = AB - BA$$

est de rang 1.

Montrer que A et B sont *co-trigonalisables*, c'est-à-dire qu'il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle A et B sont simultanément triangulaires supérieurs.

Énoncé 5:

Soit G un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$. On note

$$L = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tA) \in G\}.$$

1. Montrer que L est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que si $A, B \in L$, alors $AB - BA \in L$.

1.3 Mathématiques ULSR**Énoncé 6:**

Soit S_n^{++} l'ensemble des matrices symétriques définies positives réelles de taille $n \times n$, O_n le groupe orthogonal de dimension n , et $GL_n(\mathbb{R})$ le groupe général linéaire des matrices inversibles de taille n .

1. Montrer que si deux matrices sont toutes deux diagonalisables et commutent alors elles sont co-diagonalisables.
2. On définit l'application

$$\varphi : S_n^{++} \times O_n \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$$

par

$$\varphi(H, Q) = HQ.$$

Montrer que l'application φ est bijective.

3. Montrer que l'application

$$\varphi^{-1} : GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow S_n^{++} \times O_n$$

est continue.

Énoncé 7:

Soit $n \geq 1$ entier, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On dit que A est de Bourdeaud si ses coefficients diagonaux sont exactement ses valeurs propres comptées avec multiplicité.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que A est semblable à une matrice de Bourdeaud si et seulement si elle est trigonalisable.
2. Vérifier la véracité de l'énoncé suivant : Si $A \in S_n(\mathbb{C})$ et A de Bourdeaud, alors elle est diagonalisable.
3. Déterminer les $A \in S_n(\mathbb{R})$ de Bourdeaud.

Énoncé 8:

Soit

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

une série entière de rayon de convergence infini. On suppose que pour tout $w \in \mathbb{C}$ il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $f(z) = w$ et $f'(z) \neq 0$.

On définit

$$\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad A \mapsto f(A).$$

Montrer que φ est surjective.

1. Définition et continuité de φ .
2. Surjectivité pour $n = 2$.
3. Cas général.

Énoncé 9:

Soit A une $\mathbb{C}$ -algèbre unitaire, munie d'une norme $\|\cdot\|$, telle que la multiplication

$$\times : A \times A \rightarrow A$$

est continue. Soit $a \in A$, on pose

$$U = \{z \in \mathbb{C} \mid zI_A - a \text{ est inversible}\}.$$

1. Montrer que U est ouvert, non vide, et que l'application

$$z \mapsto (zI_A - a)^{-1}$$

est continue.

2. On pose l linéaire de A dans $\mathbb{C}$ tel que $l(I_A) = I$ (on admet son existence). On suppose par l'absurde que $U = \mathbb{C}$. On pose

$$f : r \mapsto \int_0^{2\pi} l((re^{i\theta}I - a)^{-1})re^{i\theta} d\theta.$$

Montrer l'absurdité en étudiant f .

1.4 Mathématiques SR

Énoncé 10:

On pose $E = \{A \in S_n(\mathbb{R}), \text{rg}(A) = 1\}$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $A \in E$ si et seulement s'il existe $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $A = UU^T$.
2. Soit $a \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, E)$, montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
 - (a) $\exists u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \quad a = uu^T$.
 - (b) $\exists z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad z(x)^T a(x) z(x) > 0$.
3. Soit $0 \leq b < c$, on suppose qu'il existe $(i, j) \in [1, n]^2$ tels que $\forall x \in [a, b], \quad a_{i,i}(x) > 0, \quad a_{j,j}(x) > 0$. Montrer qu'il existe $z \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in [a, b], \quad z(x)^T a(x) z(x) > 0, \\ z(b) = E_i, \quad z(c) = \pm E_j. \end{cases}$$

En considérant :

$$\{c \in \mathbb{R}_+ \mid \exists z \in \mathcal{C}^0([0, c], \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \forall x \in [0, c], \quad z(x)^T a(x) z(x) > 0 \text{ et } z(c) \in \{\pm E_i\}\},$$

conclure que la propriété (a) est toujours vraie.

4. On suppose que u donné tel qu'il vérifie (a) est $\mathcal{L}^2$. Montrer que a est $\mathcal{L}^1$.

Énoncé 11:

- 1) — Montrer que si X et Y commutent alors $e^{X+Y} = e^X e^Y$
— $e^{PXP^{-1}} = P e^X P^{-1}$.
- 2) On définit $\ln A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (A - I_n)^k$:
 - a) Déterminer le domaine de définition de $\ln A$.
 - b) Montrer que $\exp(\ln A) = A$.
 - c) Montrer que $\ln(\exp A) = A$.
- 3) Montrer que si X et Y ne commutent pas, alors $(e^{X/n} e^{Y/n})^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{X+Y}$.

À l'oral :

- Pourquoi le rayon de convergence (RCV) de la série de $\exp$ est-il infini ?
- Donner un contre-exemple de la non-injectivité de $\exp$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Énoncé 12:

1. Soit A une matrice réelle symétrique. Que peut-on dire de ses valeurs propres et de ses vecteurs propres ?
2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A , $\mu \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. On pose

$$r = Ax - \mu x,$$

et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique. Montrer que

$$\min_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\mu - \lambda_i| \leq \frac{\|r\|}{\|x\|}.$$

3. Majorer la distance d'un vecteur quelconque aux m premiers vecteurs propres de A (pris comme base de $\mathbb{R}^n$), pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
4. En notant $A = PDP^{-1}$ et en prenant E quelconque, majorer la distance entre une valeur propre de A et une valeur propre de $A + E$ en fonction de $\|E\|$, P et P^{-1} , pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. On définit

$$r = Ax - \mu x.$$

Si $\|r\| \leq C\|x\|$, montrer que

$$\min_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\mu - \lambda_i| \leq \|P\| \|P^{-1}\| \|r\|,$$

où P est la matrice des vecteurs propres de A .

1.5 Physique U**Énoncé 13:**

On considère deux étoiles et on souhaite mesurer l'angle α qui les sépare : proposer une méthode à l'aide d'un interféromètre pour le mesurer.

Réaliser l'application numérique avec Alpha du Centaure où :

$$b = 7 \text{ mm}, \quad \lambda = 533 \text{ nm}, \quad D_{\text{Terre-AdC}} = 10 \text{ u.a.}$$

Proposer une méthode si l'on suppose que l'une des étoiles a un rayon largement supérieur à l'autre.

Énoncé 14:

On envoie un faisceau d'une lampe à vapeur de sodium sur une lame d'air.

Quelles caractéristiques doit avoir la lame pour mesurer les deux longueurs d'onde du sodium ?

1.6 Physique LSR

Énoncé 15:

On définit une colloïde comme une particule à faible rayon et de charge négative. Un long texte nous dit que la floculation représente le phénomène correspondant à l'accumulation de colloïdes dans une solution où ils stagnent, cela leur accordant quelques propriétés supplémentaires.

On modélise donc une particule de centre O et de rayon R faible dans une solution d'ions du sel de sorte que :

$$N_+(r) = N_0 \exp\left(-\frac{zeV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{pour les cations de charge } +ze,$$

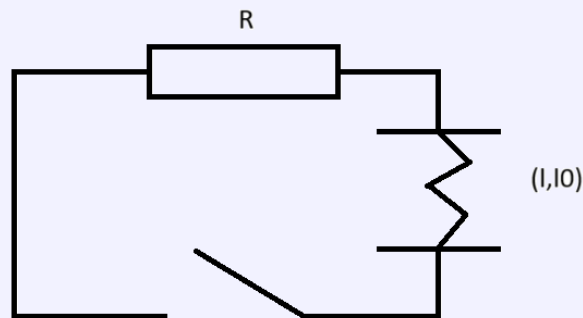
$$N_-(r) = N_0 \exp\left(\frac{zeV(r)}{k_B T}\right) \quad \text{pour les anions de charge } -ze,$$

(où $z \in \{1, 2\}$, $|zeV(r)| \ll k_B T$).

Question : Expliquer la floculation.

Énoncé 16:

On considère le circuit suivant :



On ferme circuit à $t=0$, que se passe-t-il ?

Énoncé 17:

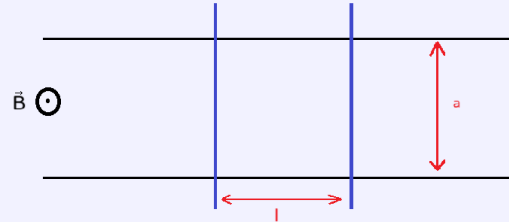
On cherche à déterminer la raie d'absorption d'un gaz.

Questions orales :

- Établir un modèle.
- Comment déterminer expérimentalement cette raie d'absorption ?
- Quelle est la puissance dissipée par un dipôle électromagnétique ?

Énoncé 18:

On considère le circuit suivant, en bleu des barres conductrices et en noir des fils :



Le champ $\vec{B}$ est initialement nul et augmente rapidement jusqu'à $\vec{B}_0$. Déterminer l_{eq} l'écartement final des deux barres.

Énoncé 19:**Exercice 1.**

On nous donne les caractéristiques d'un processeur et d'un système de refroidissement. Modéliser et étudier le refroidissement.

Questions orales :

- Expliquer précisément le lien entre conduction électrique et thermique.
- Existerait-il une différence si l'on faisait onduler le métal entre des petits creux et de gros creux ? Si oui, laquelle ?
- Comment optimiser le refroidissement ?

Exercice 2.

Donner des exemples de phénomènes qui se justifient par le caractère non galiléen du référentiel terrestre. Expliquer.

2 Oraux X

2.1 Mathématiques

Énoncé 20:

Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{Z}[X]$ tel que :

$$T_n(2 \cos x) = 2 \cos(nx), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Puis, en admettant ce résultat, montrer que pour tous $x, y \in [-2, 2[$, on a :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(x)T_n(y)}{n} = -\ln(2|x-y|).$$

Indication : On admettra que l'exponentielle d'une série entière est une série entière de même rayon de convergence.

Énoncé 21:

Soit, $d \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$, $D \in \mathbb{N}$.

Soit $p_0, \dots, p_m \in \mathbb{R}^d$, on prend $p_0 = 0$.

On dit que $\{p_0, \dots, p_m\}$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^D$ s'il existe $q_0, \dots, q_m \in \mathbb{R}^D$ tel que

$$\forall i, j \in \llbracket 1, m \rrbracket, \quad \|p_i - p_j\| = \|q_i - q_j\|.$$

1. On suppose que $p_0, \dots, p_m$ se plongent isométriquement dans $\mathbb{Q}^D$. Soit p une combinaison linéaire à coefficients rationnels des p_i . Montrer que $\{p, p_0, \dots, p_m\}$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{R}^D$.
2. On suppose $\|p_i - p_j\| \in \mathbb{Q}$. Montrer que $\{p_0, \dots, p_m\}$ se plonge isométriquement dans $\mathbb{Q}^{4D}$.

On admet que $\forall k \in \mathbb{N}, \exists a, b, c, d \in \mathbb{N};$

$$k = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Énoncé 22:

Exercice 1. Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_4 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3 < \varphi_4 \quad \text{sur }]0, 1[,$$

et

$$\varphi_2 < \varphi_4 < \varphi_1 < \varphi_3 \quad \text{sur }]-1, 0[.$$

1. Est-ce possible ?
2. On suppose que ces fonctions sont polynomiales : si on note $v_{1,2}$ la valuation du polynôme $\varphi_1 - \varphi_2$ (plus petit degré non nul), donner la parité de chaque valuation.
3. Montrer que $v_{1,3} < v_{1,2}$.
4. Trouver une absurdité.

Exercice 2. On note

$$R_k = \inf\{r > 0 \mid \exists \text{ une boule de rayon } r \text{ contenant } k \text{ points de } \mathbb{Z}^2\}.$$

1. Calculer R_2, R_3, R_4 .
2. Montrer que R_k est un minimum.
3. Montrer que R_k^2 est rationnel.

Énoncé 23:

Exercice 1. Même que l'exercice précédent

Exercice 2.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $a < b$ tels que $\forall t \in [a, b], \exists (k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, tels que $tu_n - k_n \rightarrow 0$
Montrer que $u_n \rightarrow 0$

Énoncé 24:

On dit que deux séries entières

$$A(z) = \sum \frac{a_n}{n!} z^n \quad \text{et} \quad B(z) = \sum \frac{b_n}{n!} z^n$$

sont congrues modulo m si et seulement si

$$\forall n, \quad a_n \equiv b_n \pmod{m}.$$

1. Montrer que si p est premier,

$$(e^z - 1)^{p-1} \equiv \sum \frac{-z^{k(p-1)}}{(k(p-1))!} \pmod{p}.$$

2. Si $m > 4$ est non premier, alors $m \mid (m-1)!$ et

$$(e^z - 1)^{m-1} \equiv 0 \pmod{m}.$$

Énoncé 25:

1. Soit $X_1, \dots, X_n$ une famille de variables aléatoires indépendantes, avec :

$$P(X_k = k) = \frac{1}{k}, \quad P(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{k}.$$

Soit

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Déterminer la limite de :

$$\mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda S_n}{n}}\right).$$

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que :

$$f(x) = 1 \quad \text{pour } x \in [0, 1],$$

$$\forall x > 1, \quad xf'(x) + f(x-1) = 0.$$

Montrer que f est bien définie, strictement positive et tend vers 0.

3. On pose

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

Montrer qu'il existe une constante universelle $K > 0$ telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left(e^{-\frac{\lambda S_n}{n}}\right) = e^{-K} \varphi(\lambda), \quad \forall \lambda > 0.$$

Énoncé 26:

- 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\text{rg}(A) = 1 \iff \exists X, Y \text{ non nuls tels que } A = X^t Y,$$

$$\text{rg}(A) = 2 \iff \exists X_1, X_2, Y_1, Y_2 \text{ libres tels que } A = X_1^t Y_1 + X_2^t Y_2.$$

2)

1. Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application linéaire qui conserve le rang. Peut-on écrire de plusieurs façons $f(X^t Y)$?

2. On suppose l'existence de X_1, Y_1 non nuls tels que

$$f(X^t Y) = P_1 Q_1,$$

et de X_2, Y_2 non nuls tels que

$$f(X^t Y) = P_2 Q_2,$$

avec (P_1, P_2) libres.

Montrer que

$$\forall X, \quad f(X^t Y) = A X^t Z$$

où $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $Z \in \mathbb{R}^n$, sont uniques.

Énoncé 27:

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\alpha f(x)f(y) \leq f(x+y) \leq \beta f(x)f(y),$$

et telle que $\frac{f'}{f}$ soit bornée.

1. Montrer qu'il existe $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que h et $1/h$ soient bornées, et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = h(x) \exp(\gamma x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2. Montrer qu'il existe une unique fonction g telle que

$$g(x+y) = g(x)g(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

et

$$0 < m \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2.

1. Soit R_n le maximum du nombre de matrices 2×2 non semblables involutives. Déterminer R_n .
2. On considère A diagonalisable avec n valeurs propres distinctes. Déterminer le nombre de matrices M telles que $M^2 = A$, que l'on note R_A .
3. Le cardinal de R_A est-il toujours strictement positif?
4. On note $U_n = \{I_n + N \mid N \text{ nilpotente}\}$. Montrer que chaque élément de U_n possède une unique racine carrée dans U_n .

2.2 Physique X**Énoncé 28:**

On considère un cylindre de section S et de longueur $2l$, que l'on fait tourner à la vitesse ω . On place une paroi coulissante de masse m et dans chaque compartiment on introduit 0.1 mol de He.

Étudier les positions d'équilibre en fonction de la température T .

Énoncé 29:

On considère une piscine dans laquelle un homme s'introduit. Étudier l'évolution de la température dans la piscine ainsi que la sensation de chaleur pour l'homme. On cherchera à proposer un modèle adapté.

Énoncé 30:

On envoie un faisceau laser sur un cristal, et on observe une tâche lumineuse à la sortie. On constate que si l'on envoie en plus une onde acoustique, avec un angle θ_i par rapport au laser, alors une seconde tâche se forme, faisant un angle $2\theta_b$ avec la première.

Question : Calculer θ_i et θ_b .

Énoncé 31:

Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil de longueur L , inextensible et de masse négligeable, attaché en un point fixe O de l'axe Oz et en rotation autour de cet axe.

1. Étudier les positions d'équilibre.
2. Étudier la situation autour des positions d'équilibre.

3 Indications

3.1 Oraux ENS

3.1.1 Mathématiques U

Énoncé 1 :

— **Exercice 1 :**

- 2) Trouver un contre exemple.
- 1) Poser une nouvelle fonction bien choisie

Énoncé 2 :

- Montrer que f est impaire
- 0 est-il un point d'accumulation des 0 ?

3.1.2 Mathématiques L

Énoncé 3 :

- Montrer que $u \in \mathcal{L}^1$;
- Se ramener au cas $u = 0$;
- Montrer que pour tout n , $u_{k,n} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$;
- Raisonner par l'absurde (On peut par exemple supposer qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n \geq 1} |u_{k,n}| > a$.)
- Extraction des ψ_n sur des intervalles de $\mathbb{N}$ pour contrôler le poids des u_k .

Énoncé 4 :

- Montrer que $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$ sont stables par B

Énoncé 5 :

- Montrer que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right) \exp\left(\frac{B}{n}\right) \right)^n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \exp(A + B)$.

3.1.3 Mathématiques ULSR

Énoncé 6 :

- 1) Raisonner sur les sous-espaces propres.
- 2) Utiliser le lemme de la racine carrée.
- 3) Passer par la caractérisation séquentielle. Exploiter la compacité d'un des espaces.

Énoncé 7 :

- 1) Passer par la norme subordonnée
- 2) Que peut-on dire des matrices de $M_n(\mathbb{C})$
- 3) Inspirez vous du cas précédent

Énoncé 9 :

- 1) Utiliser la caractérisation des applications multilinéaires C^0 . Ecrire l'inverse comme une série.
- 2) Montrer que f est constante, $f(0) = 0$ et $f(r) \xrightarrow[r \rightarrow +\infty]{} 2\pi$

3.1.4 Mathématiques SR

Énoncé 11 :

- 2)b) Commencer par les matrices diagonales puis diagonalisables et utiliser la densité de ces dernières ainsi que la continuité de $\ln$ et de l'exponentielle.
- 2)c) De même
- 3) Faire un développement limité de $\left(\exp\left(\frac{X}{n}\right) \exp\left(\frac{Y}{n}\right) \right)^n$ puis justifier l'interversion somme/intégrale dans $\exp(X + Y) - \left(\exp\left(\frac{X}{n}\right) \exp\left(\frac{Y}{n}\right) \right)^n$

3.1.5 Physique U

Énoncé 13 :

- Commencer par considérer les ondes reçues par les deux étoiles séparément.

Énoncé 14 :

- Considérer des lames de verre infiniment fines.
- Penser à l'interféromètre de Fabry-Pérot.

3.1.6 Physique LSR

Énoncé 15 :

- Calculer la densité de charge puis utiliser Maxwell-Gauss

Énoncé 16 :

- S'intéresser à un condensateur plan.

Énoncé 17 :

- Modèle de l'électron élastiquement lié

Énoncé 18 :

- Déterminer l'équation électrique et mécanique.

Énoncé 19 :

- Considérer une propagation unidirectionnelle.

3.2 Oraux X

3.2.1 Mathématiques

Énoncé 20 :

- Montrer que : $\forall z \in \mathbb{C}, (|z| \leq 1 ; z \neq 1), -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ est bien définie ;
- Montrer que $\exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\right) = 1 - z$.

Énoncé 21 :

- 1) Peut on prendre un espace euclidien ? Peut on se ramener à $q_0 = 0$ en translatant ?
- Prendre $n = 1$ dans un premier temps. Comment faire la récurrence ? Montrer que $\|p_1\|^2 = \frac{pq}{p^2}$ avec $qp = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Énoncé 23 :

- 1) 1)b) $v_{1,2} \neq v_{1,3}$.
- 2) Montrer que c'est en fait vrai pour tout t de $\mathbb{R}$.

Énoncé 24 :

- 1) Utiliser les propriétés de l'exponentielle.
- 2) Montrer que $\left(\frac{(e^z-1)^m}{(m-1)!}\right)$ est de la forme $\sum_n \frac{a_n}{n!} z^n$ (où $a_n \in \mathbb{Z}$).

Énoncé 25 :

- Une fois les manipulations nécessaires effectuées, justifier un développement limité en n .
- S'intéresser à la fonction $x \mapsto xf(x)$.

Énoncé 26 :

- 1) Regarder dans le plan
- 2)b) Commencer par montrer que (Q_1, Q_2) est liée

3.2.2 Physique X

Énoncé 28 :

- Ecrire toutes les forces s'appliquant au cylindre.
- Passer par la thermo-statistique.

Énoncé 29 :

- Ne pas considérer le régime stationnaire puis utiliser la séparation des variables.

Énoncé 30 :

- Utiliser le modèle corpusculaire de du son et de la lumière.
- Considérer que le photon est entièrement absorbé.