

TOPOLOGIE *et* ANALYSE FONCTIONNELLE

Cours de licence

avec 240 exercices
et 30 problèmes corrigés

Yves SONNTAG

Maître de Conférences à l'Université de Provence



AVANT-PROPOS

L'ensemble « cours + exercices corrigés » qui forme la trame de ce livre représente *grosso modo* un cours d'*analyse générale* qui est envoyé aux étudiants inscrits à la Licence de Mathématiques Télé-Enseignement (T.E.) de l'Université de Provence.

Analyse générale signifie : *topologie et analyse fonctionnelle élémentaires*.

De manière plus précise, le programme qui est traité est le suivant :

- espaces métriques et introduction à la topologie générale,
- espaces vectoriels normés et espaces de Banach (sans les « grands théorèmes »),
- espaces de Hilbert (théorie élémentaire, sans théorie spectrale).

La finalité de cette *analyse générale* est d'une part de fournir un cadre adéquat aux notions d'analyse introduites en D.E.U.G. et, d'autre part, d'introduire toutes les notions de base nécessaires aux autres modules d'analyse de la Licence : espaces de Banach et espaces de Hilbert pour la théorie de la mesure et les probabilités, connexité pour l'analyse complexe, et . . . **tout** pour le calcul différentiel.

Inutile d'insister sur le caractère fondamental de cet enseignement.

Par rapport au « cours + exercices » effectivement envoyé aux étudiants du T.E. le livre est infiniment plus riche : j'ai ajouté une centaine d'exercices, les lectures, les problèmes, les lectures-problèmes. Ce matériel provient pour l'essentiel de sujets de devoirs, de partiels, et d'examens donnés dans cet enseignement au fil des années.

J'ai ajouté aussi le chapitre XV, et le chapitre XXI qui est un avatar de divers problèmes donnés en devoir.

Bref, tout le contenu de ce livre a été testé sous une forme ou sous une autre auprès d'étudiants travaillant seuls.

J'ai aussi ajouté un petit dictionnaire des mathématiciens cités dans le cours, car je suis choqué de constater que les futurs mathématiciens ignorent souvent tout de l'histoire de leur science, et sont incapables de dater — même approximativement — les résultats importants.

Un index était indispensable pour s'y retrouver dans un vocabulaire assez abondant (mais, heureusement, tous ces mots n'ont pas le même intérêt, et certains pourront être oubliés sans inconvénient).

J'ai enfin ajouté deux annexes : l'une concernant l'algèbre linéaire (chap. X), l'autre les nombres réels (chap. XV).

Le cours s'est beaucoup amélioré au cours de quelques quinze ans d'utilisation, en particulier grâce à des échanges épistolaires assidus avec les étudiants.

Pendant longtemps, ce cours était calligraphié (et mon écriture laisse à désirer quant à sa lisibilité . . .). Comme il a été accueilli très favorablement, parfois même avec enthousiasme (mais oui !), par ses nombreux utilisateurs (de 120 à 200 chaque année), il m'a semblé intéressant de le taper, puis de le compléter, et enfin de le rendre disponible à tous les étudiants en le proposant à un éditeur.

Avec ses **239 exercices** (dont certains sont de petits problèmes) et ses **30 problèmes**, tous pourvus d'une solution très détaillée, ce livre présente un matériel considérable pour assimiler le cours et s'entraîner à l'examen (ou à un concours).

Un tel matériel était introuvable jusqu'à présent en librairie, ce qui me semble une excellente raison pour l'éditer.

Quelques mots sur le télé-enseignement sont indispensables pour comprendre la structure de ce cours.

Il s'agit d'un enseignement par correspondance destiné à tous ceux qui, pour une raison sérieuse, ne peuvent pas suivre des cours classiques dans une université : activité salariée, service national, handicap physique, éloignement de toute université en France, étudiants à l'étranger, maternité, prison, etc.

Lorsque la Licence T.E. fut créée, il fut convenu qu'elle ne devait en aucun cas être une « licence au rabais ». Mais il fallait tenir compte des réelles difficultés qu'il y a à travailler seul, surtout si l'on a par ailleurs une activité salariée (ce qui est le cas d'une grande majorité du public T.E.), et tenir compte des étudiants qui reprennent leurs études après avoir abandonné toute activité mathématique depuis de nombreuses années (10 ans est courant, 20 ans n'est pas exceptionnel).

D'autre part, il fallait également que l'étudiant sorti récemment du D.E.U.G., celui qui dispose de tout son temps, celui qui « pige » vite — bref, le « fanatique » — trouve matière à satisfaire sa légitime envie de connaissances et de culture.

Conséquence de ces *desiderata* divergents, le cours se présente de la manière suivante : chaque chapitre contient une *partie cours* qui en principe est le cours *stricto sensu*, celui qu'il est nécessaire de connaître pour réussir à l'examen, et des exercices dits « indispensables ».

Le contenu exact du cours est précisé dans l'introduction propre à chaque chapitre, car il arrive que certaines parties de ce cours soient plus ou moins facultatives (par exemple, des parties des chapitres XII, XIV, XVI, XVII peuvent être ignorées). L'introduction propre à chaque chapitre donne également une liste des exercices « indispensables » (on reviendra là-dessus).

A côté de ces activités *nécessaires* (partie « cours + exercices indispensables »), l'étudiant peut, s'il le désire, si son temps libre le lui permet, et s'il n'éprouve pas de difficulté particulière, approfondir ses connaissances en étudiant les parties facultatives du cours et en résolvant les exercices dits « complémentaires ».

L'aspect « enseignement à plusieurs vitesses » est accentué dans le livre, puisque le lecteur peut « aller plus loin » en étudiant les lectures, en résolvant les lectures-problèmes et les problèmes.

Sous le nom de lecture-problème le lecteur trouvera les théorèmes d'analyse un peu *limités* dans le cadre de la Licence : le théorème de Stone-Weierstrass, celui de Tietze-Urysohn, l'existence de partitions de l'unité, le groupe fondamental ... ou bien des résultats importants qui ne sont pas encore assez enseignés : le principe d'Ekeland par exemple.

Il va de soi que le lecteur qui ne suit pas le T.E. et qui utilise ce livre comme complément à un cours pris dans une université doit adapter le présent cours à celui qui lui est dispensé ... Ce qui ne sera pas bien difficile.

A présent qu'est précisé l'usage de ce livre, je voudrais apporter quelques informations concernant le cours et sa rédaction d'une part, les exercices d'autre part, et il doit être clair que *j'attache autant, sinon plus, d'importance aux exercices qu'au cours.*

LE COURS

Le cours proprement dit représente une tentative peut-être un peu folle : celle de **tout écrire**, de façon à ce que les étudiants aient l'impression de suivre *at home* un vrai cours oral avec ses caractéristiques : redites plutôt que références numérotées (celles-ci existent aussi, mais elles sont réduites), retours en arrière, résultats importants bien mis en évidence, démonstrations détaillées avec minutie, remarques et commentaires, mises en garde, garde-fous, recettes, moyens mnémotechniques, etc.

Ce cours se caractérise aussi par la multiplicité des exemples qui suivent chaque définition d'objet mathématique nouveau : l'expérience m'a prouvé que les étudiants

aiment beaucoup — et ils ont bien raison — être immédiatement convaincus de l'utilité d'un nouveau venu dans le cours.

De même, les exercices corrigés voudraient ressembler à de vraies séances de T.D. (avec des tentatives de réponse à la fameuse question : « pourquoi procède-t-on ainsi et pas autrement ? »), et les problèmes corrigés à de vraies séances de correction de devoirs (vues comme des compléments culturels).

Le cours se veut le plus simple possible. Pour cela, j'ai écarté les résultats qu'on peut considérer comme limites en Licence : le théorème de Stone-Weierstraß, le théorème de Tietze-Urysohn. Je les ai donnés en lecture-problème, et j'espère bien sûr qu'un grand nombre d'étudiants les regarderont.

Le théorème de Stone-Weierstraß n'est vraiment indispensable que si l'on veut étudier les algèbres de fonctions ; un cours de Maîtrise consacré à ce sujet pourra commencer par ce résultat. Sinon, tous ses corollaires usuels peuvent être obtenus à partir du théorème de Weierstraß, ou en modifiant légèrement la démonstration de ce théorème. Quant au théorème de Tietze-Urysohn, il en existe des démonstrations très courtes qui peuvent être données au moment où l'on en a réellement besoin (distributions, topologie algébrique, par exemple). J'ai écarté les familles sommables parce que je préfère que les étudiants sachent peu de choses, mais des choses justes, sur les séries.

L'existence des bases hilbertiennes n'est donc prouvée que pour les espaces de Hilbert séparables, ce qui n'est pas une catastrophe.

En fait, il ne subsiste dans le cours qu'un nombre très restreint de résultats difficiles : le théorème de Weierstraß (c'est surtout la forme trigonométrique qui est difficile, d'ailleurs), le théorème « compact (= précompact + complet) \iff propriété de Lebesgue \iff propriété de Weierstraß », et le théorème de Ascoli-Arzelà.

Une mauvaise nouvelle : **le cours doit être appris** ! Lors des examens de la Licence T.E. les documents ne sont pas autorisés.

Que le cours doive être d'une certaine manière **appris par cœur** est une vérité en général mal comprise des étudiants. Beaucoup pensent que dans la vie courante, *i.e.* en dehors de la situation artificielle créée par les examens, on dispose d'une documentation, et que ce n'est donc pas la peine de surcharger sa mémoire. Mais contrairement à ce qu'on pourrait penser, les mathématiciens professionnels ne font pas appel en permanence à des références écrites : la plupart d'entre eux préfèrent retrouver un résultat qu'ils pensent connu plutôt que d'aller chercher dans les livres si le résultat en question s'y trouve ; c'est le bon réflexe.

D'autre part la mémoire ne fonctionne correctement que si elle est sollicitée en permanence. Les gérontologues donnent des exercices de mémorisation à leurs patients pour leur éviter un vieillissement prématuré . . .

En fait, le travail n'est pas aussi considérable qu'on pourrait le craindre. La plupart des démonstrations qui auront pu sembler délicates en cours d'année paraîtront « triviales » à la fin de l'année. Quelques démonstrations (indiquées dans le texte) doivent être connues par cœur parce qu'il n'est pas évident de retrouver l'astuce et/ou parce que celle-ci se retrouve fréquemment dans les exercices et problèmes.

Il faut donc connaître par cœur les définitions et les résultats (au moins ceux indiqués « importants » !), ainsi que les exemples fondamentaux (d'espaces de Banach, d'espaces de Hilbert, . . .).

Au sujet des exemples, des mises en garde, commentaires, qui suivent les définitions : il ne faut pas les apprendre, ils sont destinés à vous aider momentanément et ils vous paraîtront évidents quelques chapitres après ; vous serez alors capables d'en créer vous-mêmes d'aussi convaincants, peut-être même plus convaincants.

Par contre, les exemples classiques d'espaces de Banach, par exemple, doivent bien sûr être connus.

Dans la version manuscrite de ce cours, le vocabulaire mathématique était économisé à l'extrême. Dans cette version destinée à un public plus étendu, toute notion qui apparaît, aussi fugitivement que ce soit, fusse une seule fois dans un exercice, reçoit son nom, d'où l'intérêt de l'index. Le lecteur décidera lui-même du sort à réserver à tous ces mots . . .

Bien entendu, les notions à connaître impérativement sont clairement (je l'espère !) indiquées. Par ailleurs, le cours n'est pas « ciblé » Mathématiques Pures ou Mathématiques Appliquées : j'ai essayé de faire en sorte qu'il soit suffisant quelle que soit la suite des études envisagées.

Une autre particularité de ce cours est qu'on a évité de cumuler les difficultés, par exemple en faisant appel le moins possible à la théorie de la mesure : j'ai généralement préféré parler de ℓ^p plutôt que de L^p . Le lecteur qui a bien compris l'intégrale de Lebesgue n'aura aucune difficulté à intégrer ses connaissances à ce sujet dans le présent cours, et vice-versa.

Un autre exemple de simplification : je n'envisage pratiquement que les espaces préhilbertiens réels ; le lecteur n'éprouvera pas de difficulté majeure à ajouter des barres de conjugaison, des Ré et des Im lorsque le besoin s'en fera sentir (théorie spectrale par exemple, ou mécanique quantique).

Le fait d'éviter les espaces de Lebesgue introduit toutefois une difficulté : l'étudiant ne dispose que d'un nombre très limité d'exemples d'espaces de Hilbert. De ce fait, le chapitre XIX sur les bases hilbertiennes se complique puisqu'il faut distinguer soigneusement ce qui est vrai dans tout préhilbertien de ce qui n'est vrai que dans un Hilbert. Il n'y a pas d'inconvénient à ce que les étudiants ne retiennent de XIX que ce qui a trait aux espaces complets, à condition qu'ils le disent clairement (à un examinateur ou dans leur copie).

Ce cours n'est nullement un *traité* d'Analyse, et il ne prétend pas prendre les mathématiques à leur début : je suppose que le lecteur connaît le cours de D.E.U.G, qu'il connaît la signification de \in , \subset , \forall , \implies , . . . , qu'il connaît l'algèbre linéaire, qu'il sait développer une fonction en série entière, calculer un déterminant, etc.

Toutefois, pour certaines notions fondamentales du cours, comme celle de suite, je reprend les choses à zéro, mais je passe alors rapidement sur les résultats niveau D.E.U.G. pour insister sur les notions notoirement mal assimilées en D.E.U.G (suites extraites et points d'accumulation), et pour élever le niveau du débat (travail dans les e.v.n. de dimension infinie, introduction de \limsup , par exemple).

En ce qui concerne la notion de cardinal d'un ensemble, je ne suppose pas la connaissance d'un cours de D.E.U.G, et je ne fait pas non plus de cours : je suppose connue intuitivement la notion d'ensemble fini, j'appelle *dénombrable* tout ensemble en bijection avec \mathbb{N} , et je suppose qu'il existe des ensembles qui ne sont ni finis ni dénombrables. Le seul résultat qui sera utile, à savoir que toute union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable, sera admis.

Je laisse pour la Maîtrise les résultats utilisant l'axiome du choix (mais j'admet que tout espace vectoriel admet une base algébrique !), et les résultats supposant une connaissance intime des espaces métriques complets (théorèmes de Baire). Je ne pense pas qu'il soit bon de déflorer certains sujets, cela risque de donner par la suite aux étudiants une fallacieuse et dangereuse impression de « déjà vu ». Par contre, je donne en exercice un théorème de Hahn-Banach dans les espaces de Hilbert, car c'est une excellente occasion d'utiliser le théorème de projection sur les convexes fermés.

Conformément à la tradition dans un cours classique, je ne donne pas la provenance des résultats et de leur démonstration, ni des exercices et problèmes ; disons que 80% du contenu du cours et des exercices provient, avec les retouches voulues, des références données dans la bibliographie (plus quelques ouvrages en anglais dont j'ai jugé inutile de donner la liste), le reste est personnel ou tiré de livres ou d'articles dont je n'ai

plus le souvenir. La part d'originalité de ce livre réside surtout dans la présentation des choses, peu dans le contenu.

Enfin, j'ai essayé de *faire un peu moderne (sic)* en introduisant du vocabulaire, des notions, qui correspondent aux mathématiques de notre époque ; par exemple, j'ai introduit le vocabulaire de base de l'optimisation, prouvé quelques résultats d'analyse convexe, parlé d'applications à valeurs ensemblistes, donné en problème-lecture le principe de Ekeland, etc. Quelques indications sur ce qu'est la recherche mathématique contemporaine (exemples de *problèmes ouverts*) sont données. J'ai donné aussi des exemples de généralisations *bidon*, c'est-à-dire à éviter.

En gros, chaque chapitre représente une semaine de travail, à l'exception du chapitre XIV (trois semaines). A titre purement indicatif : on peut estimer que chaque chapitre demande une dizaine d'heures de (véritable ...) travail, exercices *indispensables* compris.

LES EXERCICES

Tout a été mis en œuvre ici pour que l'étudiant consacre le moins de temps possible à la compréhension du cours — activité assez passive — et s'attelle le plus vite possible à la recherche des exercices, activité véritablement *mathématicienne*, personnelle et créatrice. Les exercices doivent absolument occuper une place de choix dans le travail d'un chapitre. Mais il n'est nullement indispensable de faire tous les exercices !

Je donne une liste d'exercices *indispensables* au début de chaque chapitre, mais là aussi il s'agit d'une indication ; chaque lecteur fera ce qu'il voudra ... et surtout ce qu'il pourra ! "Indispensable" signifie : qui doit (ou devrait) être fait pour parvenir à une bonne compréhension du cours ; cela ne signifie pas du tout : exercice standard qu'on retrouvera sous une forme plus ou moins dissimulée à l'examen.

Ceux que vous choisissez de faire doivent être étudiés avec soin, et être complètement rédigés. Ne vous contentez pas de penser que vous « savez faire » ... La rédaction vous apportera souvent un démenti douloureux ! Ne vous laissez jamais aller à lire la solution d'un exercice avant de l'avoir cherché très longuement :

solution lue = exercice foutu.

Laissez plutôt tomber l'exercice récalcitrant en vous proposant d'y revenir ultérieurement ; il se peut que longtemps après tel exercice « infaisable » vous semble complètement évident. Il n'est pas mauvais de réfléchir à un exercice tout en faisant du footing, ou du vélo, ou en bricolant, essayez !

Conservez des exercices vierges pour les révisions : vous disposez d'une bonne réserve d'exercices corrigés, mais elle n'est pas inépuisable.

Pour chaque exercice, un degré de difficulté est indiqué. Bien entendu ce classement est très subjectif, et dépend du degré d'astuce, de l'imagination, du *passé* (connaissances) de chacun. Les résultats démontrés en exercice ne sont pas, bien sûr, à apprendre. Les exercices se partagent en exercices théoriques et en exercices pratiques : les premiers sont destinés à entraîner les étudiants à la réflexion, les seconds à développer leur technique. Il faut résoudre un peu de chaque type d'exercices. Il ne faut surtout pas mépriser la technique !

En ce qui concerne les problèmes, à titre indicatif, il y en a trois à faire en T.E. Rappelons que l'énoncé d'un problème doit toujours être lu en entier, et médité, avant d'écrire quoi que ce soit.

Tel qu'il est ce cours présente encore sans doute quelques défauts, et contient éventuellement des erreurs qui ne sont pas de simples fautes de frappe. Mais je pense

qu'il peut rendre bien des services, en particulier aux étudiants qui travaillent seuls (il a été écrit spécialement pour eux !), mais aussi à tous ceux qui aiment disposer d'un ouvrage de référence à côté du cours pris à l'université.

Les étudiants de Sup et Spéciales y trouveront des compléments qui peuvent les intéresser, et de nombreux exercices qui ne figurent pas dans les annales des concours. Les étudiants de Maîtrise seront heureux d'y retrouver les résultats malencontreusement oubliés. Ce cours peut être utile aussi aux étudiants qui préparent le C.A.P.E.S, et les Agrégatifs y trouveront des exemples et quelques idées pour agrémenter leurs leçons. Enfin, les ingénieurs qui ont reçu une formation trop utilitaire peuvent s'initier sans trop de douleurs à l'analyse moderne grâce à ce cours.

Certains lecteurs jugeront peut-être inquiétante l'épaisseur de ce cours : s'ils ont lu attentivement les lignes qui précèdent, ils auront compris que la longueur du texte résulte de la multiplicité des éléments d'information destinés à les aider dans leur travail.

L'épaisseur du cours ne doit pas être source d'angoisse . . .

Un dernier point : le cours est agrémenté d'une quarantaine de dessins. Bon nombre de ces dessins ne sont pas à leur place naturelle mais se trouvent au verso de l'introduction à chaque chapitre, cela pour éviter une page blanche.

Je pense qu'il faut faire des tas de dessins, et toute circonstance où il est utile d'en faire un est signalée, éventuellement avec des indications sur le dessin qu'il convient de faire ; le lecteur est prié de prendre son crayon et de dessiner, il ne regrettera pas ce petit effort. Il me reste l'agréable plaisir de remercier tous les étudiants et étudiantes qui m'ont signalé des erreurs ou des formulations ambiguës, suggéré des changements, ou qui m'ont simplement encouragé en me faisant part de leur satisfaction.

J'accueillerai avec plaisir toute remarque ou suggestion concernant cet ouvrage.

Le lecteur peut écrire au C.M.I. 39, rue Joliot-Curie 13453 Marseille cedex 13, ou envoyer un e-mail à sonntag@gyptis-univ-mrs.fr.

Le manuscrit original était tapé avec un logiciel assez pauvre : il a été transposé en \TeX et mis en forme par Christian Lebœuf ; c'est grâce à lui si ce livre est d'aspect aussi agréable. Je tiens également à remercier Christian pour les nombreuses corrections d'erreurs et les améliorations du texte qu'il m'a suggérées.

Les éditions Ellipses ont apporté tous leurs soins à ce livre : qu'elles soient ici remerciées.

Il ne me reste plus qu'à vous souhaiter une lecture agréable et fructueuse.

Yves Sonntag

(Les Pennes Mirabeau, juillet 1997)

Harmonie . . .

La valeur d'une discipline mathématique est déterminée par ses applications aux sciences expérimentales

C. Runge, Dissertation doctorale, Berlin 23-4-1880.

La valeur d'une discipline mathématique ne peut pas être mesurée par ses applications aux sciences expérimentales

F. Rudio, Dissertation doctorale, Berlin 23-4-1880.

CHAPITRE I

DISTANCES ET ESPACES MÉTRIQUES

Introduction

Ce premier chapitre est consacré aux notions – fondamentales dans ce cours – de *distance* et d'*espace métrique*, ainsi qu'à quelques notions qui s'y rattachent directement (boules, distance d'un point à un ensemble, ...). En principe la notion de distance et celle d'espace métrique ne devraient pas être étrangères à un étudiant titulaire du D.E.U.G ... *Mais nous partons de zéro.*

Toutefois, au niveau des exemples et des exercices, nous utilisons pas mal de résultats de D.E.U.G. qu'il est important de revoir si nécessaire.

Dans toute la suite du cours nous partirons toujours d'un (ou plusieurs) espace(s) métrique(s) qui servira (ont) de *cadre* à notre étude : c'est dire l'importance de la notion.

De nombreux exemples sont là pour vous persuader que nous n'étudions pas des notions qui ne s'appliqueraient qu'à un nombre restreint d'objets mathématiques ; la pénurie d'exemples est génératrice de doutes déprimants (est-ce que cela sert à quelque chose ? au moins de temps en temps ?).

Toutes les notions introduites ici sont indispensables pour la suite, à part les définitions (3.2.1) et le vocabulaire de l'*optimisation* qui peut attendre.

La Lecture peut être ignorée, en première ... lecture !

Il n'y a pas de difficulté dans ce chapitre qui ne contient presque pas de démonstrations, simplement quelques vérifications simplistes. Il suffit d'apprendre ...

☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.2, 1.4, **1.6**, 1.7, 2.2, 2.4, 3.1, 3.4, 3.6.

☞ Exercices de compléments particulièrement intéressants : 1.3, 1.8, 2.1, **2.3, 2.6** (joli).

Les autres exercices ne sont pas inintéressants ... Sinon nous ne les aurions pas donnés !

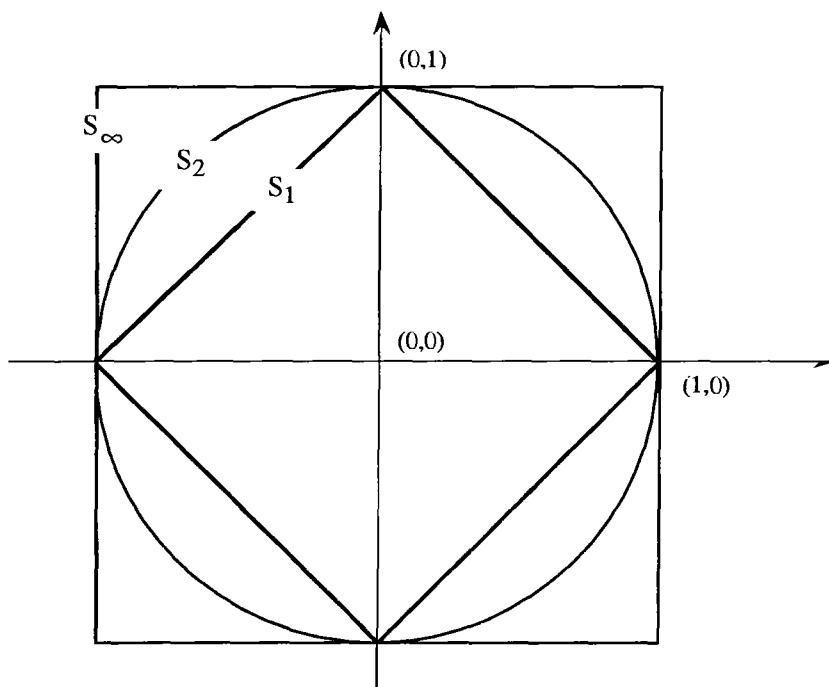
Nous proposons une Lecture sur le plongement isométrique de tout espace métrique (E, d) dans $\mathcal{B}_\infty(E, \mathbb{R})$, et un problème sur la "régularisée de Hausdorff" d'une fonction.

Un dernier conseil : les démonstrations "à ε près", c'est-à-dire invoquant un argument du type :

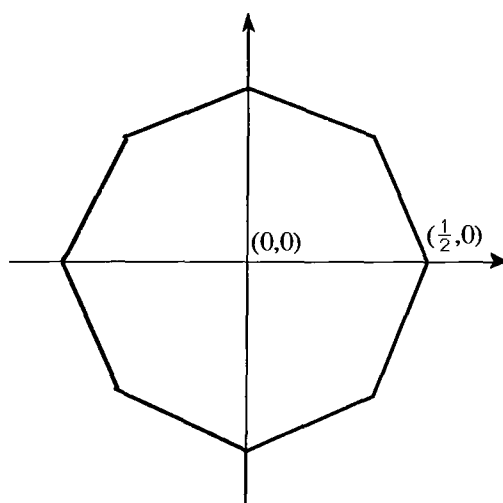
« pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $a = a(\varepsilon) \in A$ tel que $d(u, A) \leq d(u, a) < d(u, A) + \varepsilon$ » sont I.N.D.I.S.P.E.N.S.A.B.L.E.S, il faut les assimiler au plus vite, et les rechercher plutôt que les fuir (elles vous rattraperaient de toute façon !).

Ne croyez pas que « tout est fini », que c'est la Catastrophe, sous prétexte que vous ne savez pas par quel bout prendre un des exercices ! Cet ouvrage a justement pour but, à travers les diverses activités proposées, de vous amener au niveau de compréhension/connaissances nécessaires.

BON COURAGE ET BON TRAVAIL !



(Exemple 3.3)

Sphère unité de $d := d_1 + d_\infty$ dans \mathbb{R}^2

CHAPITRE I

DISTANCES ET ESPACES MÉTRIQUES

1. DISTANCES

Définition 1.1.

Soit E un ensemble non vide quelconque.

Une *distance sur E* est une fonction $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur le produit cartésien $E \times E$, à valeurs dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, vérifiant les cinq propriétés suivantes :

- | | | |
|-------|--|-----------------------------|
| (1.1) | $\forall u \in E, \forall v \in E : d(u, v) \geq 0$ | [positivité] |
| (1.2) | $\forall u \in E : d(u, u) = 0$ | [nullité sur la diagonale] |
| (1.3) | $d(u, v) = 0$ implique $u = v$ | [séparation] |
| (1.4) | $\forall u \in E, \forall v \in E : d(u, v) = d(v, u)$ | [symétrie] |
| (1.5) | $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall w \in E : d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ | [inégalité
triangulaire] |

Pour $u \in E$ et $v \in E$ donnés, le nombre réel positif ou nul $d(u, v)$ est appelé *distance de u à v* .

Nota : On dit parfois *métrique* à la place de distance.

Commentaire :

En général seule la propriété (1.5) pose des difficultés (parfois grandes) de vérification. Il arrive toutefois que (1.3) ne soit pas complètement évidente : il convient de *faire très attention* à cette propriété *essentielle*.

Terminologie :

Si l'on n'impose pas (1.3), on dit que d est une *semi-distance* sur E ; si l'on autorise une semi-distance d à prendre la valeur $+\infty$, on dit que d est un *écart* sur E . Il existe d'autres généralisations de la notion de distance, dont nous ne parlerons pas ici.

Si une distance d vérifie la propriété (1.5-bis) suivante :

- (1.5-bis) $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall w \in E : d(u, v) \leq \max\{d(u, w), d(w, v)\}$,
propriété plus contraignante que (1.5), on dit que d est *ultramétrique*.

☞ **Exercice 1.1.** (très facile) Supposons que d vérifie (1.1,2,3,5), mais pas (1.4). Démontrez que les fonctions d' et d'' définies par :

$d'(u, v) = \frac{1}{2}[d(u, v) + d(v, u)]$ et $d''(u, v) = \max\{d(u, v), d(v, u)\}$
sont des distances sur E .

☞ **Exercice 1.2.** (très facile) Supposons que d vérifie (1.1,2,3) et

(1.5') : $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall w \in E : d(u, v) \leq d(w, u) + d(w, v)$.
Démontrez que d est une distance sur E .

☞ **Exercice 1.3.** (facile) Soit d une semi-distance sur E . Démontrez que la relation suivante sur E :

$$u \approx v \text{ si et seulement si } d(u, v) = 0$$

est une relation d'équivalence sur E . Notons F l'ensemble quotient E/\approx . Pour $a \in F$ et $b \in F$, posons : $\delta(a, b) = d(u, v)$, où u est un représentant quelconque de la classe a , et où v est un représentant de b . Démontrez que δ est bien définie, c'est-à-dire que $\delta(a, b)$ ne dépend pas du choix des représentants, et que δ est une distance sur F .

Propriétés fondamentales d'une distance d sur un ensemble E

$$(1.6) \quad \forall u \in E, \forall v \in E, \forall w \in E : \boxed{d(u, v) \geq |d(u, w) - d(v, w)|}$$

[seconde inégalité triangulaire]

$$(1.7) \quad \forall u_1 \in E, \forall u_2 \in E, \dots, \forall u_p \in E : \boxed{d(u_1, u_p) \leq \sum_{1 \leq k \leq p-1} d(u_k, u_{k+1})}$$

[inégalité triangulaire généralisée]

Démonstrations :

(1.6) : $\forall u, v, w \in E : d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$, d'après (1.5), d'où :
 $d(u, v) \geq d(u, w) - d(v, w)$; $d(v, w) \leq d(v, u) + d(u, w) = d(u, v) + d(u, w)$,
d'après (1.5) et (1.4), d'où : $d(u, v) \geq d(v, w) - d(u, w) = -[d(u, w) - d(v, w)]$ et,
finalement : $d(u, v) \geq |d(u, w) - d(v, w)|$. ♦

(1.7) : La démonstration se fait par récurrence. Le résultat est vrai pour trois points u_1, u_2, u_3 , d'après (1.5). Supposons-le vrai pour $(p-1)$ points, et démontrons-le pour p points : $d(u_1, u_p) \leq d(u_1, u_{p-1}) + d(u_{p-1}, u_p)$, d'après (1.5) ;
d'après l'hypothèse de récurrence : $d(u_1, u_{p-1}) \leq \sum_{1 \leq k \leq p-2} d(u_k, u_{k+1})$ et, donc :
 $d(u_1, u_p) \leq \sum_{1 \leq k \leq p-2} d(u_k, u_{k+1}) + d(u_{p-1}, u_p) = \sum_{1 \leq k \leq p-1} d(u_k, u_{k+1})$. ♦

Exemples de distances

Exemple 1.1. On prend pour E le plan, ou bien l'espace à trois dimensions de la géométrie élémentaire ; on suppose choisie une unité de longueur. La "distance" au sens usuel du terme est effectivement une distance au sens du présent cours.

Soient A, B, C trois points :

$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$, $d(A, B) \geq |d(A, C) - d(C, B)|$, et les autres inégalités obtenues par permutation circulaire de A, B, C , sont des inégalités bien connues entre les longueurs des côtés d'un triangle.

Exemple 1.2. $E = \mathbb{R}^n$, n entier ≥ 1 .

Soient $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ et $y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ dans \mathbb{R}^n :

$$(1.8) \quad d(x, y) := \sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2 + \dots + (\xi_n - \eta_n)^2} = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} (\xi_i - \eta_i)^2}$$

définit la tout à fait classique *distance euclidienne* sur \mathbb{R}^n .

En particulier, pour $n = 1$:

(1.9) $d(\xi, \eta) := |\xi - \eta| =$ valeur absolue de $(\xi - \eta) = \max\{\xi - \eta, \eta - \xi\}$ est la *distance usuelle* sur \mathbb{R} .

La distance euclidienne est la distance du plan ($n = 2$) et de l'espace ($n = 3$) quand on identifie le plan à \mathbb{R}^2 et l'espace à \mathbb{R}^3 , en choisissant des axes de coordonnées et une unité de longueur.

Exemple 1.3. Sur $E = \mathbb{C}$, on considèrera la distance :

(1.10) $d(z, z') := |z - z'|$, où $|\cdot|$ désigne le *module*.

Si $z = \alpha + i\beta = (\alpha, \beta)$ et $z' = \alpha' + i\beta' = (\alpha', \beta')$, $d(z, z') = \sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (\beta - \beta')^2}$ n'est autre que la distance euclidienne, dans \mathbb{R}^2 , de (α, β) à (α', β') .

Exemple 1.4. Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble arbitraire. Posons :

$$(1.11) \quad \delta(u, v) := 1 \text{ si } u \neq v, \delta(u, v) := 0 \text{ si } u = v.$$

Cette distance est appelée la **distance discrète** sur E .

☞ **Exercice 1.4.** (très facile) Vérifiez que la distance δ discrète est une distance ultramétrique.

Commentaire :

Cette distance n'a pas un grand intérêt pratique puisqu'elle se contente de dire si deux points sont distincts ou pas ! Son intérêt est d'ordre théorique d'une part, pédagogique d'autre part. Elle sert à fabriquer des exemples, des mises en garde, des garde-fous.

☞ **Un bon réflexe :** testez-la sur toute définition nouvelle faisant intervenir une distance.

☞ **Exercice 1.5.** (très facile) Soit E l'ensemble des polynômes réels de degré ≤ 2 . Pour $P(x) = ax^2 + bx + c$ et $Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$ dans E , on pose : $d(P, Q) = 3$ si $a \neq a'$, $d(P, Q) = 2$ si $a = a'$ et $b \neq b'$, $d(P, Q) = 1$ si $a = a'$, $b = b'$ et $c \neq c'$, $d(P, Q) = 0$ si $P = Q$. Démontrez que d est une distance ultramétrique sur E .

Exercice supplémentaire (sans solution) : sur $E = \mathbb{R}^n$ étudiez la fonction d définie pour $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ par $d(a, b) =$ nombre de couples (α_i, β_i) tels que $\alpha_i \neq \beta_i$.

Exemple 1.5. Soient E et F deux ensembles, et soit $f : E \rightarrow F$ une application injective. On suppose donnée une distance d sur F . La formule :

$$(1.12) \quad \delta(u, v) := d[f(u), f(v)]$$

définit une distance δ sur E , appelée **distance transportée par f** (de F sur E). Par exemple, toute fonction **strictement monotone** $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définit une distance d_φ sur \mathbb{R} par : $d_\varphi(\xi, \eta) = |\varphi(\xi) - \varphi(\eta)|$.

☞ **Exercice 1.6.** (très facile) Vérifiez les affirmations de l'Exemple 1.5.

Exemple 1.6. Adjoignons à \mathbb{R} les deux symboles $-\infty$ et $+\infty$ (avec, pour tout ξ réel : $-\infty < \xi < +\infty$) pour obtenir la droite étendue $E = \overline{\mathbb{R}}$ (notation classique).

On munit souvent E de la distance : $d(\xi, \eta) = |\varphi(\xi) - \varphi(\eta)|$, où $\varphi(\xi) = \frac{\xi}{1 + |\xi|}$ prolongée à $\overline{\mathbb{R}}$ par $\varphi(-\infty) = -1$ et $\varphi(+\infty) = +1$. On peut tout aussi bien utiliser la fonction $\psi(\xi) = \text{Arc tan}(\xi)$ prolongée par $\psi(-\infty) = -\pi/2$ et par $\psi(+\infty) = +\pi/2$.

☞ **Exercice 1.7.** (très facile) Vérifiez ce qui doit l'être dans l'exemple ci-dessus.

Exemple 1.7. On pose $E = \mathbb{R} \cup \{\omega\} = \mathbb{R}^\#$ (compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}), où ω (qui ne désignera jamais un réel), vérifie $\forall \xi \in \mathbb{R} : |\xi| < \omega$. Une distance sur E est donnée par : $d(\xi, \eta) = \frac{|\xi - \eta|}{\sqrt{1 + \xi^2} \cdot \sqrt{1 + \eta^2}}$, $d(\xi, \omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}}$, $d(\omega, \omega) = 0$, pour tous ξ, η dans \mathbb{R} .

☞ **Exercice 1.8.** (assez facile, calculatoire) Vérifiez l'exemple 1.7. Aidez-vous de la figure constituée par le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 1$ (ce sera E) et par la droite d'équation $y = 0$ (ce sera \mathbb{R}) ; considérez $P = (0, 1)$ et construisez une fonction $f : \mathbb{R}^\# \rightarrow C$ [voir Exercice 1.6].

2. ESPACES MÉTRIQUES

Définition 2.1.

Un **espace métrique** est un couple constitué par un ensemble *non vide* E et par une distance d sur E .

On dit souvent que E est *muni* de la distance d .

Un espace métrique sera en général noté (E, d) ou bien E_d . On pourra le noter simplement E si la distance d ne fait aucun doute. On abrégera parfois espace métrique en e.m. (pas em, ne pas oublier les points s.v.p.).

Commentaire :

Sur un même ensemble E on peut définir une infinité de distances (même si E est fini, car si d est une distance sur E , $\lambda \cdot d$ en est une aussi, pour tout $\lambda > 0$). Par exemple, on peut envisager $E = \mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne mais aussi $E = \mathbb{R}^n$ muni de la distance discrète : les propriétés des deux espaces métriques (\mathbb{R}^n , dist. eucl.) et (\mathbb{R}^n , dist. discrète) seront bien différentes !

Il convient donc de *distinguer soigneusement* les divers e.m. (E, d) , (E, d_1) , (E, d_2) , (E, δ) ... qu'on peut être amené à envisager à partir d'un même ensemble E .

Par contre, si la distance d ne fait aucun doute, on peut se dispenser de la noter. Par exemple — sauf mention contraire explicite — l'e.m. \mathbb{R} sans plus de précision sera (\mathbb{R}, d) avec $d(\xi, \eta) = |\xi - \eta|$, la distance dite *usuelle* ; de même l'e.m. \mathbb{R}^n sera (\mathbb{R}^n, d) où d est la distance euclidienne ; de même l'e.m. \mathbb{C} sera (\mathbb{C}, d) où $d(z, z') = |z - z'|$ (distance définie par le module).

☞ *Le lecteur s'habituera petit à petit aux nécessités de précision ou, au contraire, aux habitudes/usages d'imprécision et d'abus de langage sans lesquels tout texte mathématique serait pédant et/ou illisible.*

Il est à noter que l'espace métrique (E, δ) , où E est arbitraire et où δ est la distance discrète, est dit *discret* (adjectif), mais on ne dit pas qu'il s'agit de "l'espace discret", cette notion relève de la topologie générale [voir le Chap. VI].

Terminologie :

Soit (E, d) un espace métrique et soit $F \neq \emptyset$ une partie de l'ensemble E . L'espace métrique (F, δ) où δ désigne la restriction $d|_{F \times F}$ de d à $F \times F \subset E \times E$ est appelé *sous-espace métrique* de (E, d) .

On dit que F est muni de la distance *induite* par celle de E . On note simplement d la distance induite.

Remarque :

Avec le vocabulaire de l'Exemple 1.5 la distance induite est la distance transportée sur F par l'injection naturelle $j : F \rightarrow E, u \mapsto u$.

On notera qu'on n'a pas *défini* la notion de sous-espace métrique, celle-ci relevant de la topologie générale. C'est la notion de *sous-espace topologique* qui est intéressante ; mais il se trouve qu'un sous-espace topologique d'un espace métrique peut être décrit par une distance : la distance induite. D'où la terminologie (commode) introduite.

Exemple 2.1. Soit $E = \mathbb{R}^n$ "usuel", c'est-à-dire muni de la distance euclidienne. Soit (pour fixer les idées) le sous-ensemble F de \mathbb{R}^n suivant :

$$F = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n / \forall i = 1, 2, \dots, n : \xi_i \geq 0\}.$$

(F, d) où d est la distance euclidienne restreinte aux points de F est un sous-espace métrique de \mathbb{R}^n ; par contre (F, δ) où δ est la distance discrète sur F n'est pas un sous-espace métrique de \mathbb{R}^n .

Distances équivalentes

Parfois deux distances différentes d et δ sur un même ensemble E sont assez "ressemblantes" pour que les espaces métriques (E, d) et (E, δ) possèdent les mêmes propriétés pour certains objets mathématiques définis par d d'une part, par δ d'autre part. Il existe *plusieurs* notions de "ressemblance", voici la première [cf. Chap. VIII pour deux autres notions] :

Définition 2.2.

Soient d et δ deux distances sur un même ensemble E . d et δ sont dites *équivalentes* s'il existe deux constantes réelles $c > 0$ et $C > 0$ telles que :

$$(2.1) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : \boxed{c \cdot d(u, v) \leq \delta(u, v) \leq C \cdot d(u, v)} \text{ soit :}$$

$$(2.2) \quad \forall u \in E, \forall v \in E, \text{ avec } u \neq v : \boxed{c \leq \frac{\delta(u, v)}{d(u, v)} \leq C}.$$

Commentaire :

Sur l'ensemble de toutes les distances possibles qu'on peut définir sur E , la relation "d équivalente à δ " est effectivement une relation d'équivalence (vérifiez).

Exemple 2.2. Sur $E = \mathbb{R}$, la distance *usuelle* d et la distance *discrète* δ ne sont pas équivalentes. En effet, supposons qu'il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que pour tous ξ, η dans \mathbb{R} on a $c \cdot \delta(\xi, \eta) \leq |\xi - \eta| \leq C \cdot \delta(\xi, \eta)$. Faisons $\xi = 0$ et $\eta = 1/n$ (n entier ≥ 1) ; l'inégalité de gauche $c \cdot \delta(0, 1/n) = c \leq 1/n$ pour tout n est impossible car $c > 0$. De même pour l'inégalité de droite, en faisant $\xi = 0$ et $\eta = n : n \leq C \cdot \delta(0, n) = C$ pour tout n est impossible.

Exemple 2.3. Prenons à présent un cercle E de centre O de rayon $r > 0$. Pour u et v deux points de ce cercle, posons : $d(u, v)$ = longueur (euclidienne) de la corde joignant u à v , et : $\delta(u, v)$ = longueur (euclidienne) du plus petit arc joignant u à v . Il est facile de vérifier que d et δ sont deux distances sur E . d et δ sont équivalentes en raison de l'inégalité bien connue :

$$1 \leq \frac{\text{longueur de l'arc}^{(1)}}{\text{longueur de la corde}} \leq \frac{\pi}{2}$$

☞ **Exercice 2.1.** (facile) Faites un peu de trigonométrie pour prouver tout cela.

☞ **Exercice 2.2.** (assez facile, petite difficulté pour a) Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble, et soit δ une distance sur E . Soit, d'autre part, $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante, telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) \neq 0$ pour tout $t > 0$, et vérifiant pour tous $s, t \geq 0$: $\varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$.

Démontrez que la fonction composée $d = \varphi \circ \delta$ est une distance sur E .

Démontrez que les fonctions suivantes possèdent les propriétés exigées pour φ :

- a) $t \mapsto t^\alpha$, avec $0 < \alpha \leq 1$, b) $t \mapsto \frac{t}{1+t}$,
c) $t \mapsto \ln(1+t)$, d) $t \mapsto \min\{1, t\}$.

Distances « naturelles » sur un produit cartésien fini

Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_n, d_n)$ un nombre *fini* d'espaces métriques. On se propose de déterminer des distances « raisonnables » sur le produit cartésien $E := E_1 \times \dots \times E_n$.

Nota : On ne définit pas une notion d'*espace métrique produit*, on n'a pas non plus défini un *sous-espace métrique*. La raison de cette attitude apparaîtra dans le cours de topologie générale où seront définies en toute généralité les notions de sous-espace d'un espace topologique et de topologie produit.

Pour $u = (u_1, \dots, u_n) \in E$ et $v = (v_1, \dots, v_n) \in E$, posons :

$$(2.3) \quad \boxed{d_1(u, v) := d_1(u_1, v_1) + \dots + d_n(u_n, v_n),}$$

$$(2.4) \quad \boxed{d_2(u, v) := \sqrt{[d_1(u_1, v_1)]^2 + \dots + [d_n(u_n, v_n)]^2},}$$

$$(2.5) \quad \boxed{d_\infty(u, v) := \max\{d_1(u_1, v_1), \dots, d_n(u_n, v_n)\}.}$$

(1) Il s'agit du plus petit arc, bien sûr.

Vous pouvez vérifier tout de suite les axiomes d'une distance pour les trois fonctions proposées, et vérifier qu'elles sont équivalentes deux à deux. Mais vous pouvez aussi attendre l'exercice 2.3.

Explication des indices 1, 2, ∞ :

Soit p un nombre réel ≥ 1 , δ_p définie par :

$$(2.6) \quad \delta_p(u, v) := \left(\sum_{i=1}^n [d_i(u_i, v_i)]^p \right)^{1/p}$$

est une distance sur $E = E_1 \times \dots \times E_n$, qu'on appelle parfois *distance de Hölder* (ou : *höldérienne*) d'ordre p . Voilà pour les indices 1 et 2.

Admettant provisoirement ce résultat non évident [cf. Exerc. 2.3], nous allons démontrer que toutes les distances de Hölder sont équivalentes entre-elles. Pour cela, il suffit de démontrer qu'elles sont toutes équivalente à δ_∞ , et nous prouverons au passage que :

$$(2.7) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : \lim_{p \rightarrow \infty} \delta_p(u, v) = \delta_\infty(u, v)$$

d'où l'explication de l'indice ∞ .

On a en effet : $\max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(u_i, v_i)\}^p \leq \sum_{i=1}^n [d_i(u_i, v_i)]^p \leq n \cdot \max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(u_i, v_i)\}^p$, c'est évident, d'où en prenant la puissance $1/p$ (la fonction $t \mapsto t^\alpha$, $\alpha > 0$, est croissante sur $[0, +\infty[$) :

$$(2.8) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : \delta_\infty(u, v) \leq \delta_p(u, v) \leq n^{1/p} \cdot \delta_\infty(u, v)$$

$\lim_{p \rightarrow \infty} (n^{1/p}) = 1$ fournit immédiatement $\lim_{p \rightarrow \infty} \delta_p(u, v) = \delta_\infty(u, v)$.

Nota : On a admis que $\max_{1 \leq i \leq n} \{ (d_i(u_i, v_i))^p \} = [\max_{1 \leq i \leq n} \{d_i(u_i, v_i)\}]^p$: c'est à justifier (très facile, faites-le).

☞ Toutes les fois qu'on aura affaire à un produit fini d'espaces métriques, on pourra le munir d'une des distances δ_p , au choix. C'est souvent δ_∞ qui est choisie (*box metric* des anglo-saxons), mais ce choix est *arbitraire*.

☞ **Exercice 2.3.** (pas facile, mais important) Soient a, b réels ≥ 0 , et soit p réel tel que $p > 1$; on définit q réel > 1 par : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (q est appelé le *conjugué* de p).

Démontrez que :

$$(2.9) \quad a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Soient a_1, \dots, a_n et b_1, \dots, b_n des réels ≥ 0 . Démontrez les deux inégalités :

$$(2.10) \quad \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n (b_i)^q \right)^{1/q} \quad \text{[inégalité de Hölder]}$$

$$(2.11) \quad \left(\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^n (a_i)^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n (b_i)^p \right)^{1/p} \quad \text{[inégalité de Minkowski]}$$

Application : Les fonctions δ_p , $1 < p < \infty$ définies ci-dessus sont bien des distances.

☞ **Exercice 2.4.** (assez facile) Soit (E_i, d_i) , $i = 1, 2, \dots$ une famille *infinie dénombrable* d'espaces métriques. On pose $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ (produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_n \times \dots$). Démontrez

que la fonction $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$\forall u, v = (u_1, \dots, u_i, \dots) \in E, \forall v = (v_1, \dots, v_i, \dots) \in E,$

$$(2.12) \quad d(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)}$$

est une distance sur E .

Indication : Pour l'inégalité triangulaire, on utilisera le fait que si α, β, γ sont des réels ≥ 0 tels que $\alpha \leq \beta + \gamma$ on a : $\frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{\gamma}{1+\gamma}$ (à vérifier).

Applications d'un espace métrique dans un autre

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Définitions 2.3.

1. On dit que f est une *isométrie* si :

$$(2.13) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : \delta[f(u), f(v)] = d(u, v)$$

2. On dit que deux espaces métriques sont *isométriques* s'il existe une isométrie *surjective* de l'un *sur* l'autre.

3. f est dite *lipschitzienne de constante* (ou : de *rapport*) λ s'il existe λ réel ≥ 0 tel que :

$$(2.14) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : \delta(f(u), f(v)) \leq \lambda \cdot d(u, v)$$

Nota : On précise ou non "de constante λ ", selon les besoins de précision.

Si $\lambda = 1$, on dit que f est *contractante* (ou : est une *contraction*), et si $\lambda < 1$, on dit que f est *strictement contractante*.

Commentaires :

1. Une isométrie est toujours *injective* car :

$$f(u) = f(v) \implies \delta[f(u), f(v)] = 0 = d(u, v) \implies u = v ;$$

mais elle n'est *pas* en général *surjective*.

[prendre $A \subset E_d, A \neq E$ et $j : (A, d|_{A \times A}) \rightarrow E_d, u \mapsto j(u) = u$.]

2. Si (E, d) et (F, δ) sont isométriques, du point de vue de la théorie des espaces métriques ils sont *indiscernables*, puisque toutes leurs propriétés sont les mêmes, mais leurs éléments peuvent être de nature très différente (suites dans l'un et fonctions dans l'autre, par exemple). Voir **Lecture** après la partie cours ; on reviendra sur cette question.

3. **Exemple d'application contractante** : Soit (E, d) un e.m. et soit $x \in E$ fixé. La fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(u) = d(u, x)$ est une contraction à valeurs dans \mathbb{R} usuel, cela d'après la seconde inégalité triangulaire (1.6).

4. Dire que les distances d et δ sont équivalentes sur E , revient à dire que l'application $Id_E : E_d \rightarrow E_\delta, u \mapsto Id_E(u) = u$, est lipschitzienne de constante C , et que l'application $Id_E^{-1} : E_\delta \rightarrow E_d, v \mapsto Id_E^{-1}(v) = v$, est lipschitzienne de constante $1/c$.

[c et C de (2.1), (2.2)].

☞ **Exercice 2.5.** (très facile) Démontrez que la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = \frac{t}{1+|t|}$ est contractante, et que sa restriction à $[0, +\infty[$ est *sous-additive*, i.e. vérifie pour tous $s, t \geq 0$: $f(s+t) \leq f(s) + f(t)$.

☞ **Exercice 2.6.** (plutôt difficile) Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \neq \emptyset$ une partie de E . Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne sur A :

$$\exists \lambda \text{ réel } > 0, \forall a \in A, \forall b \in A : |f(a) - f(b)| \leq \lambda \cdot d(a, b).$$

Pour tout $a \in A$ et pour tout $u \in E$, on pose : $f_a(u) := f(a) + \lambda d(a, u)$, puis : $g(u) := \inf\{f_a(u) / a \in A\}$. Démontrez que g est une fonction de E dans \mathbb{R} (à valeurs finies), dont la restriction à A est égale à f , et qui vérifie :

$$\forall u \in E, \forall v \in E : |g(u) - g(v)| \leq \lambda d(u, v).$$

Autrement dit : toute fonction lipschitzienne sur une partie quelconque ($\neq \emptyset$) de E peut être prolongée en une fonction lipschitzienne sur E , avec la même constante (alors qu'on aurait pu penser que la constante de g serait nécessairement plus grande que celle de la fonction f).

3. QUELQUES NOTIONS QU'ON PEUT DÉFINIR À L'AIDE D'UNE DISTANCE

Soit (E, d) un espace métrique. On peut définir immédiatement, en s'inspirant de la géométrie du plan et de l'espace ordinaires, un certain nombre de notions mathématiques. Par exemple celles qui font l'objet du présent paragraphe, mais il y en a bien d'autres : voir les exercices, et la suite du cours.

Définition 3.1.

Soit E un espace métrique. Etant donné un point $u \in E$ et un nombre réel ρ strictement positif, les sous-ensembles de E notés :

$$(3.1) \quad B(u, \rho[:= \{v \in E / d(u, v) < \rho\},$$

$$(3.2) \quad B(u, \rho] := \{v \in E / d(u, v) \leq \rho\},$$

$$(3.3) \quad S(u, \rho) := \{v \in E / d(u, v) = \rho\},$$

sont appelés, respectivement :

boule ouverte de centre u et de rayon ρ ,

boule fermée de centre u et de rayon ρ ,

sphère de centre u et de rayon ρ .

Nota : “ouverte” et “fermée” sont des adjectifs qui trouveront ultérieurement [Chap. V et VI] une explication.

Remarque :

Puisque, par définition, $\rho > 0$, les boules ouvertes ou fermées ne sont pas vides car elles contiennent au moins leur centre. Par contre, une sphère peut être vide.

Exemple 3.1. Soit $E = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle $d(s, t) = |s - t|$. On a :

$$(3.4) \quad B(s, \rho[=]s - \rho, s + \rho[, B(s, \rho] = [s - \rho, s + \rho], S(s, \rho) = \{s - \rho, s + \rho\}$$

Exemple 3.2. Soit $E \neq \emptyset$ arbitraire, muni de la distance discrète. Vérifiez, c'est facile, que :

$$(3.5) \quad \begin{aligned} B(u, \rho[&= \{u\} \text{ si } \rho \leq 1, B(u, \rho[= E \text{ si } \rho > 1; \\ B(u, \rho] &= \{u\} \text{ si } \rho < 1, B(u, \rho] = E \text{ si } \rho \geq 1; \\ S(u, \rho) &= \emptyset \text{ si } \rho < 1, S(u, \rho) = E \setminus \{u\} \text{ si } \rho = 1, S(u, \rho) = \emptyset \text{ si } \rho > 1. \end{aligned}$$

Exemple 3.3. Soit $E = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, et on munit chaque exemplaire de \mathbb{R} de la distance usuelle. On peut considérer sur E les distances de Hölder définies dans le § 2

Pour tout p réel ≥ 1 :

$$\forall x = (\xi, \eta), \forall y = (\sigma, \tau) : \delta_p(x, y) = (|\xi - \sigma|^p + |\eta - \tau|^p)^{1/p} \text{ et :} \\ \delta_\infty(x, y) = \max\{|\xi - \sigma|, |\eta - \tau|\}.$$

Pour une raison très simple, qui sera donnée dans le prochain chapitre, on peut se contenter ici d'étudier les boules et les sphères de centre l'origine $O = (0, 0)$ et de rayon 1.

Les sphères sont des courbes fermées simples (*i.e.* sans point double) d'équation :

$$S_p(O, 1) = \{(s, t) / |s|^p + |t|^p = 1\} \text{ pour } 1 \leq p < \infty,$$

$$S_\infty(O, 1) = \{(s, t) / \max\{|s|, |t|\} = 1\}.$$

Les boules ouvertes [resp. fermées] sont constituées par l'ensemble des points enfermés par les sphères, sphère non comprise [resp. comprise]. Les sphères sont faciles à dessiner (tenir compte des symétries pour enlever les valeurs absolues) :

S_1 est le carré de sommets $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(0, -1)$, S_2 est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1, S_∞ est le carré de sommets $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$.

Pour $1 < p < 2$, S_p est une courbe « anguleuse » située entre le carré S_1 et le cercle S_2 . Pour $2 < p < \infty$, S_p est une courbe de type « ovale patateïde » comprise entre le cercle S_2 et le carré S_∞ . Le lecteur est convié à dessiner soigneusement toutes ces courbes sur un même graphique.

☞ **Exercice 3.1.** (facile) Etudiez les boules et sphères dans les exercices 1.5, 1.7, 1.8.

☞ **Exercice 3.2.** (très facile) Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble muni de deux distances d et δ . Notons B^d et B^δ les boules correspondantes aux deux distances. Démontrez que si d et δ sont équivalentes on a :

$$\forall u \in E, \forall \rho > 0, \exists \sigma > 0 : B^\delta(u, \sigma) \subset B^d(u, \rho), \text{ et :}$$

$$\forall u \in E, \forall \rho > 0, \exists \sigma > 0 : B^d(u, \sigma) \subset B^\delta(u, \rho).$$

Définition 3.2.

Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie non vide de E . Pour tout $u \in E$ on note $d(u, A)$ et on appelle **distance de u à A** le nombre réel ≥ 0 :

$$(3.6) \quad d(u, A) := \inf_{a \in A} d(u, a) = \inf \{ d(u, a) / a \in A \}$$

(3.7) On prolonge la notion en posant : $d(u, \emptyset) = +\infty$ pour tout $u \in E$.

☞ **Attention !** En général il n'existe pas un $a \in A$ tel que $d(u, A) = d(u, a)$. Erreur très fréquente ...

Ce qui « remplace » cette propriété « manquante », c'est que – par définition de inf – on a, pour $A \neq \emptyset$:

$$(3.8) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha = \alpha(\varepsilon) \in A : d(u, A) \leq d(u, \alpha) < d(u, A) + \varepsilon.$$

De plus, si un tel a existe, il n'est pas en général unique.

Propriété :

$$(3.9) \quad \text{Pour tout } A \neq \emptyset, \forall u \in E, \forall v \in E : |d(u, A) - d(v, A)| \leq d(u, v)$$

Démonstration :

C'est une généralisation de la seconde inégalité triangulaire qu'on retrouve en faisant $A = \{w\}$, $w \in E$.

$\forall u \in E, \forall v \in E, \forall a \in A : d(u, a) \leq d(u, v) + d(v, a)$, d'où :

$$d(u, A) = \inf_{b \in A} d(u, b) \leq d(u, a) \leq d(u, v) + d(v, a) \text{ et } d(v, a) \geq d(v, A) - d(u, v).$$

Donc $d(u, A) - d(u, v)$ minore l'ensemble $\{d(v, a) / a \in A\}$ et comme la borne inférieure de cet ensemble – i.e. $d(v, A)$ – est le plus grand des minorants :

$$d(v, A) \geq d(u, A) - d(u, v). \text{ D'où : } d(u, A) - d(v, A) \leq d(u, v).$$

On peut refaire la démonstration en intervertissant les rôles de u et v pour obtenir $d(v, A) - d(u, A) \leq d(u, v)$, d'où, finalement, $|d(u, A) - d(v, A)| \leq d(u, v)$. ♦

En d'autres termes, la fonction $f_A : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_A(u) = d(u, A)$, $A \neq \emptyset$, est contractante.

☞ **Exercice 3.3.** (facile) Soit $A_i, i \in I$, quelconque, une famille de parties non vides de E . On pose $A = \bigcup_{i \in I} A_i$. Démontrez que pour tout $u \in E$ on a : $d(u, A) = \inf_{i \in I} d(u, A_i)$. En déduire que si B est une partie non vide de E on a [cf. (3.17)] : $d(A, B) = \inf_{i \in I} d(A_i, B)$.

Évidemment, si $u \in A : d(u, A) \leq d(u, u) = 0$ d'où $d(u, A) = 0$; mais on n'a pas en général $d(u, A) = 0 \implies u \in A$!

Définitions 3.3.

Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie de E . On appelle **adhérence** de A et on note $\text{adh}(A)$ le sous-ensemble de E défini par :

$$(3.10) \quad \text{adh}(A) := \{u \in E / d(u, A) = 0\}$$

En particulier, puisque $d(u, \emptyset) = +\infty$ pour tout u , on a : $\text{adh}(\emptyset) = \emptyset$, et puisque $d(u, E) = 0$ pour tout $u \in E$ on a : $\text{adh}(E) = E$.

Tout point de $\text{adh}(A)$ est dit **point adhérent** à A .

(3.11) On dit qu'une partie A de E est **fermée** si elle est égale à son adhérence.

(3.12) On dit qu'une partie A de E est **ouverte** si son complémentaire par rapport à E , $\complement_E A = E \setminus A$, est fermée.

Commentaire :

Les notions d'**ouvert** et de **fermé** sont tellement importantes qu'elles feront l'objet de deux chapitres entiers : les chap. V et VI. Notons que \emptyset et E sont à la fois fermés et ouverts ; d'autres parties peuvent avoir cette propriété : si un ensemble est muni de la distance discrète toute partie est à la fois fermée et ouverte. Par contre, une partie quelconque n'est en général ni fermée ni ouverte : par exemple dans \mathbb{R} usuel l'intervalle $]0, 1[$ n'est ni fermé ni ouvert (cf. Prop. 3.1 pour s'en convaincre).

Nous allons donner des caractérisations importantes de l'adhérence et des parties ouvertes :

Proposition 3.1. Soit E un espace métrique, et soit $A \neq \emptyset$ une partie de E .

1. $u \in \text{adh}(A) \iff [\forall \rho > 0 : B(u, \rho] \cap A \neq \emptyset]$,
2. A est ouverte $\iff [\forall u \in A, \exists \rho > 0 : B(u, \rho[\subset A]$.

Démonstrations :

1. Soit $u \in \text{adh}(A) : d(u, A) = 0$; donc – par définition de inf – pour tout $\rho > 0$ il existe $a \in A$ tel que $d(u, a) < \rho$, d'où : $a \in A \cap B(u, \rho[$.

Réciproquement, pour tout entier $n \geq 1$, soit $a_n \in A \cap B(u, 1/n[\neq \emptyset$, on a donc : $d(u, A) \leq d(u, a_n) < 1/n$, d'où en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, $0 \leq d(u, A) \leq 0$, soit : $d(u, A) = 0$. ♦

2. A est ouverte ssi $E \setminus A$ est fermée, ssi $E \setminus A = \text{adh}(E \setminus A)$, ssi pour tout $u \in A$ on a : $d(u, E \setminus A) > 0$. Soit $u \in A$ et soit $\rho := \frac{1}{2}d(u, E \setminus A)$; montrons que $B(u, \rho[\subset A$.

Soit $v \in B(u, \rho)$:

$d(u, E \setminus A) - d(v, E \setminus A) \leq d(u, v) < \rho \implies d(v, E \setminus A) > 2\rho - \rho = \rho > 0$, d'où $v \notin \text{adh}(E \setminus A) = E \setminus A$ et $v \in A$.

• Réciproquement, si pour tout $u \in A$ il existe $\rho > 0$ tel que $B(u, \rho[\subset A$, montrons que A est ouverte, i.e. que $E \setminus A$ est fermée, i.e. que $E \setminus A = \text{adh}(E \setminus A)$, i.e. que tout $u \in A = E \setminus (E \setminus A)$ vérifie $d(u, E \setminus A) > 0$.

Soit $u \in A$ et soit $B(u, \rho[\subset A$; pour tout $v \in E \setminus A$ on a $v \notin B(u, \rho[$, d'où $d(u, v) > \rho$, et $d(u, E \setminus A) = \inf\{d(u, v) / v \in E \setminus A\} \geq \rho > 0$. ♦

Propriétés :

(3.13) Si $A \subset E$ et $B \subset E$ vérifient $A \subset B$ on a : $\forall u \in E : d(u, B) \leq d(u, A)$.

(3.14) Pour tout $A \subset E$, tout $u \in E : d(u, A) = d(u, \text{adh}(A))$.

(3.15) Si pour tout $u \in E$ on a $d(u, A) = d(u, B)$, A et B non vides, on a :
 $\text{adh}(A) = \text{adh}(B)$.

Démonstrations :

(3.13) est évident. Quant à (3.14), $A \subset \text{adh}(A)$ implique – par (3.13) – que $d(u, \text{adh}(A)) \leq d(u, A)$. Ensuite, pour tout $v \in \text{adh}(A)$ on a $d(v, A) = 0$ et $d(u, A) = d(u, A) - d(v, A) \leq d(u, v)$, d'où en prenant l'inf sur $v \in \text{adh}(A)$: $d(u, A) \leq d(u, \text{adh}(A))$.

(3.15) : si $u \in \text{adh}(A)$, $d(u, \text{adh}(A)) = 0 = d(u, A) = d(u, B) = d(u, \text{adh}(B))$, d'où : $u \in \text{adh}(B)$ et $\text{adh}(A) \subset \text{adh}(B)$. De même $\text{adh}(B) \subset \text{adh}(A)$, d'où le résultat. ♦

Boules généralisées (ou : *élargissements*, ou ... saucisses de Minkowski)

La notion de distance d'un point à un ensemble permet de généraliser les notions de boule et de sphère.

Soit $A \neq \emptyset$ et soit un $\rho > 0$. On appelle *boule ouverte* [resp. *boule fermée*, resp. *sphère*] (*généralisée*) de centre A et de rayon ρ l'ensemble suivant :

$$(3.16) \quad B(A, \rho[:= \{u \in E / d(u, A) < \rho\},$$

$$\text{[resp. } B(A, \rho] := \{u \in E / d(u, A) \leq \rho\}, \text{ resp. } S(A, \rho) := \{u \in E / d(u, A) = \rho\}]$$

Définition 3.4.

Soit (E, d) un espace métrique et soient A, B deux parties non vides de E . On note $d(A, B)$ et on appelle *distance* de A à B le nombre réel ≥ 0 :

$$(3.17) \quad d(A, B) := \inf_{a \in A} d(a, B) = \inf_{b \in B} d(b, A) = \inf_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b) \\ = \inf_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) = \inf \{d(a, b) / (a, b) \in A \times B\}.$$

Commentaire :

Cette terminologie (classique) est *très regrettable* car $d(A, B)$ ne définit pas du tout une distance sur $2^E \setminus \{\emptyset\}$. Les américains disent "gap", qu'on peut traduire par "écartement" ou "espacement", et c'est mieux ainsi.

☞ **Exercice 3.4.** (facile) Trouvez des exemples simples (dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 usuels) où $d(A, B) = 0$ malgré que $A \cap B = \emptyset$.

Montrez que la propriété $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ est grossièrement fautive [de même pour $|d(u, A) - d(u, B)| \leq d(A, B)$!].

Démontrez que $d(A, B) = \inf \{d(u, A) + d(u, B) / u \in E\}$.

☞ **Exercice 3.5.** (assez facile) Soit (E, d) un espace métrique et soient A, B des parties non vides fermées de E vérifiant $d(A, B) \neq 0$.

Pour tout $u \in E$ on pose : $f(u) := \frac{d(u, A)}{d(u, A) + d(u, B)}$. Démontrez que f est une fonction $E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $f_A = 0, f_B = 1, \forall u \in E : 0 \leq f(u) \leq 1$.

(plus difficile) Démontrez qu'on a $\forall u, v \in E : |f(u) - f(v)| \leq \frac{d(u, v)}{d(A, B)}$.

Définition 3.5.

Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie non vide de E . On note $\text{diam}(A)$ et on appelle *diamètre* de A le nombre réel ≥ 0 :

$$(3.18) \quad \text{diam}(A) := \sup_{a \in A} \sup_{b \in A} d(a, b) = \sup \{d(a, b) / (a, b) \in A \times A\}$$

(3.19) Toute partie non vide A d'un e.m. vérifiant $\text{diam}(A) < \infty$ sera dite *bornée*.

On considère la partie vide \emptyset comme un borné de diamètre 0.

Si l'espace métrique (E, d) tout entier est borné, on dit souvent que la distance d est *bornée*. Par exemple la distance discrète est bornée, la distance usuelle sur \mathbb{R} : non.

Propriétés :

- (3.20) $\text{diam}(A) = 0 \iff A = \{a\}$ ou $A = \emptyset$:
en effet, s'il existe $a \neq b$ dans A on a $\text{diam}(A) \geq d(a, b) > 0$, la réciproque est claire.
- $A \subset B \implies \text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$.
- $\text{diam}(B(u, \rho]) \leq 2\rho$, $\text{diam}(B(u, \rho]) \leq 2\rho$, $\text{diam}(S(u, \rho)) \leq 2\rho$, mais il n'y a pas égalité en général entre ces trois quantités, ni égalité avec 2ρ (voir formules (3.5)).
- On a aussi : $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + d(A, B) + \text{diam}(B)$, et : A est borné ssi $\exists \rho > 0, \exists u \in E : A \subset B(u, \rho]$.

La notion de borné dépend de manière essentielle de la distance choisie : dans \mathbb{R} , pour la distance d usuelle, \mathbb{R} n'est pas borné (!), mais \mathbb{R} est borné dans \mathbb{R} muni de la distance (cf. Exercice 2.2,b)) $d/(1+d)$; mais si deux distances sont *équivalentes* leurs bornés sont les mêmes.

✎ **Exercice 3.6.** (très facile) Vérifiez les assertions ci-dessus.

Par analogie avec la formule donnant $d(A, B)$ il est tentant de remplacer un des inf par un sup, ou les deux inf par des sup... C'est ainsi qu'on introduira (uniquement pour des exercices ! Réservez pour une seconde lecture) :

(3.21) $e(A, B) := \sup\{d(a, B) / a \in A\}$ qu'on appelle *excès de Hausdorff* de A sur B . Évidemment on a en général $e(B, A) \neq e(A, B)$, et ces quantités peuvent ne pas être finies.

Pour $u \in E$, on pose :

$r(u, A) := \sup\{d(u, a) / a \in A\}$, puis $r(A, B) := \inf\{r(a, B) / a \in A\}$ qu'on appelle le *rayon de Chebyshev de A relatif à B* . Évidemment ces quantités peuvent être infinies, et $r(B, A) \neq r(A, B)$ en général.

Enfin on posera (notion non classique) : $\text{diam}(A, B) := \sup\{d(a, b) / (a, b) \in A \times B\}$ qu'on appellera "*diamètre commun à A et B* ".

✎ **Exercice 3.7.** (très facile) $\text{diam}(\cdot, \cdot)$ définit-il une distance sur les parties bornées non vides de E ?

Soit $A \neq \emptyset$ une partie bornée de E , démontrez que $r(\cdot, A)$ est une fonction contractante.

• ✎ **Exercice 3.8.** (plutôt difficile, à réserver éventuellement pour plus tard) Soit (E, d) un espace métrique dont la distance est bornée [cf. (3.19)], et soit \mathcal{F} l'ensemble de toutes les parties fermées non vides de E .

1) Démontrez que la fonction h définie sur $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$ par : $h(A, B) := \max\{e(A, B), e(B, A)\}$ est une distance sur \mathcal{F} . [$e(A, B)$ est défini dans (3.21)].

2) Démontrez que $h(A, B) = \sup_{u \in E} |d(u, A) - d(u, B)|$.

h est appelée la *distance de Hausdorff*. Remarquez qu'on peut renoncer à l'hypothèse que d est bornée si l'on restreint h à \mathcal{B} , ensemble des parties non vides fermées et bornées de E .

3) Démontrez que $e(A, B) = \inf\{\rho > 0 / A \subset B(B, \rho)\}$ (cf. (3.16) pour $B(B, \rho)$).

Vocabulaire de l'optimisation (réservez en seconde lecture)

Toutes ces notions prennent naturellement leur place dans une branche des mathématiques, appelée **optimisation**, qui s'occupe « en gros » du problème de calculer le *minimum* [resp. *maximum*] d'une fonction (s'il existe !), et à défaut de calculer l'inf [le sup], puis à déterminer – s'il en existe – les points où le min [max] est atteint.

De manière précise, soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, une fonction définie sur un ensemble E , et soit $A \neq \emptyset$ une partie de E . L'optimisation pose les deux problèmes fondamentaux suivants :

- [Inf] Calculer $\mu(f, A) := \inf\{f(a) / a \in A\}$,
 [Sup] Calculer $\nu(f, A) := \sup\{f(a) / a \in A\}$ et, éventuellement :
 [Inf] Déterminer l'ensemble $\text{Argmin}(f, A) := \{a \in A / f(a) = \mu(f, A)\}$,
 [Sup] Déterminer l'ensemble $\text{Argmax}(f, A) := \{a \in A / f(a) = \nu(f, A)\}$.

Ces deux ensembles sont souvent vides.

Ainsi, si (E, d) est un espace métrique, et si u est un point *fixé* de E , on a : $d(u, A) = \mu(f, A)$ où $f(v) := d(u, v)$. Les points de $\text{Argmin}(f, A) := \mathcal{P}_A(u)$ sont appelés les points de *meilleure approximation de u par rapport à A* , ou *projections de u sur A* .

Insistons sur le fait qu'ils peuvent ne pas exister [voir sur ce sujet le Chap. XVII].

Si A est une partie non vide bornée de E , et si $u \in E$ est *fixé*, on a : $r(u, A) = \nu(g, A)$ où $g(v) := d(u, v)$. Les points de $\text{Argmax}(g, A) := \mathcal{F}_A(u)$ sont appelés *les points de A les plus éloignés de u* .

On a aussi $d(A, B) = \mu(h, A)$, où $h(v) := d(v, B)$, et aussi $r(A, B) = \mu(k, A)$, où $k(v) := r(v, B)$; $\text{Argmin}(k, A)$ est appelé le *centre de Chebyshev de A* . Etc.

Un exemple très important d'espace métrique

Soit A un ensemble non vide quelconque, d'une part. Soit (E, d) un espace métrique, d'autre part. Nous noterons $\mathcal{B}(A, E)$ l'ensemble de *toutes* les applications $f : A \rightarrow E$ qui sont *bornées*, c'est-à-dire qui vérifient : $\text{diam}[f(A)] < \infty$.

On peut munir $\mathcal{B}(A, E)$ d'une distance « naturelle » appelée **distance uniforme**, définie ainsi :

$$(3.22) \forall f \in \mathcal{B}(A, E), \forall g \in \mathcal{B}(A, E) : \\ d_\infty(f, g) = \sup_{a \in A} d[f(a), g(a)] = \sup\{d[f(a), g(a)] / a \in A\}$$

L'intérêt de l'espace métrique $(\mathcal{B}(A, E), d_\infty)$, qu'on peut noter $\mathcal{B}_\infty(A, E)$, est de constituer un vaste *fourre-tout*, tel qu'un grand nombre d'espaces métriques *usuels* apparaissent comme cas particuliers ou comme sous-espaces métriques de cet espace.

Voir la Lecture après la partie cours pour un autre point de vue.

Vérification du fait que d_∞ est bien une distance

• En guise "d'axiome (1.0)" de la notion de distance, il faut vérifier que :

$\forall f \in \mathcal{B}(A, E), \forall g \in \mathcal{B}(A, E) : \sup_{a \in A} d[f(a), g(a)]$ est un réel (*i.e.* est $< \infty$).

Mais $\text{diam}[f(A)] = \alpha < \infty$ et $\text{diam}[g(A)] = \beta < \infty$; donc pour tout a dans A et pour un b_0 fixé dans A on a – propriété (1.7) de d :

$$d[f(a), g(a)] \leq d[f(a), f(b_0)] + d[f(b_0), g(b_0)] + d[g(b_0), g(a)] \\ \leq \alpha + d[f(b_0), g(b_0)] + \beta,$$

d'où : $\sup_{a \in A} d[f(a), g(a)] \leq \alpha + d[f(b_0), g(b_0)] + \beta < \infty$. ♦

• (1.1) $\forall a \in A : d[f(a), g(a)] \geq 0$ car d est une distance, et donc *a fortiori* :

$$\sup_{a \in A} d[f(a), g(a)] \geq 0. \blacklozenge$$

• (1.2) $\forall a \in A : d[f(a), f(a)] = 0$ car d est une distance et donc :

$$\sup_{a \in A} d[f(a), f(a)] = \sup_{a \in A} \{0\} = 0. \blacklozenge$$

• (1.3) $\sup_{a \in A} d[f(a), g(a)] = 0$ implique $d[f(a), g(a)] \leq 0$ pour tout $a \in A$, d'où – puisque d est une distance – $f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$, d'où $f = g$ par définition de l'égalité de deux applications. ♦

• (1.4) Puisque d est une distance, $d[f(a), g(a)] = d[g(a), f(a)]$ pour tout $a \in A$ et donc $\sup_{a \in A} d[f(a), g(a)] = \sup_{a \in A} d[g(a), f(a)]$. ♦

• (1.5) Soient f, g, h dans $\mathcal{B}(A, E)$. Pour tout $a \in A$ – puisque d est une distance :

$$\begin{aligned} d[f(a), g(a)] &\leq d[f(a), h(a)] + d[h(a), g(a)] \\ &\leq \sup_{a \in A} d[f(a), h(a)] + \sup_{a \in A} d[h(a), g(a)] := \gamma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Donc $\{d[f(a), g(a)] / a \in A\}$ est majoré par γ , et $\sup_{a \in A} d[f(a), g(a)]$ est le plus petit des majorants de cet ensemble, d'où : $\sup_{a \in A} d[f(a), g(a)] \leq \gamma$. ♦

En conclusion d_∞ est bien une distance sur $\mathcal{B}(A, E)$.

Remarque :

Nous avons développé cet exemple de manière presque ... indécente parce qu'il s'agit du premier chapitre, et surtout parce que nous voulions attirer votre attention sur le maniement de "sup".

Une rédaction « normale » doit être bien plus courte : quand une propriété est évidente, on écrit qu'elle est évidente, et c'est tout. N'en profitez pas pour esquiver de cette façon les démonstrations qui vous gênent !

Les correcteurs de copies savent d'après le reste de la copie ce qui est évident pour vous et ce qui ne l'est à coup sûr pas ...

Fin de la partie cours du chapitre I

LECTURE

Tout e.m. E est isométrique à un sous-e.m. de $\mathcal{B}_\infty(E, \mathbb{R})$

Nous allons démontrer, à titre d'exercice, et à titre culturel, que *tout* espace métrique (E, d) est isométrique à un sous-espace métrique d'un espace métrique de la forme $\mathcal{B}_\infty(A, F)$ où F est un certain espace métrique. En fait on peut prendre tout simplement $A := E$ et $F := \mathbb{R}$ usuel !

Pour réaliser cette identification, fixons une fois pour toutes un élément \hat{u} de E . Ensuite à tout $x \in E$ on fait correspondre une fonction $f_x : E \rightarrow \mathbb{R}$ en posant pour tout $v \in E$: $f_x(v) = d(v, x) - d(v, \hat{u})$.

f_x est bien définie sur E ; c'est même une fonction continue sur E , mais nous n'aurons pas besoin de cette notion non encore définie ici.

Prouvons qu'elle est bornée :

$$\begin{aligned} |f_x(v) - f_x(w)| &= |d(v, x) - d(v, \hat{u}) - d(w, x) + d(w, \hat{u})| \\ &\leq |d(v, x) - d(v, \hat{u})| + |d(w, x) - d(w, \hat{u})| \leq 2d(x, \hat{u}), \end{aligned}$$

d'après la seconde inégalité triangulaire appliquée deux fois.

Donc : $\text{diam } f_x(E) \leq 2d(x, \hat{u})$, et f_x est bornée. Par conséquent $f_x \in \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$, pour tout $x \in E$.

Considérons à présent l'application $\Phi : E_d \rightarrow \mathcal{B}_\infty(E, \mathbb{R}), x \mapsto \Phi(x) := f_x$.

Φ est une isométrie. En effet :

$$\begin{aligned} d_\infty[\Phi(x), \Phi(y)] &= \sup_{v \in E} |[\Phi(x)](v) - [\Phi(y)](v) | = \sup_{v \in E} | f_x(v) - f_y(v) | \\ &= \sup_{v \in E} | d(v, x) - d(v, \hat{u}) - d(v, y) + d(v, \hat{u}) | = \sup_{v \in E} | d(v, x) - d(v, y) | \leq d(x, y); \end{aligned}$$

mais, d'autre part : $\sup_{v \in E} | f_x(v) - f_y(v) | \geq | f_x(x) - f_y(x) | = d(x, y)$.

Donc $d_\infty[\Phi(x), \Phi(y)] = d(x, y)$ pour tout x , tout y . Q.E.D.

Considérons $G := \{f_x \mid x \in E\} \subset \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$, muni de la distance d_∞ induite par $\mathcal{B}_\infty(E, \mathbb{R})$. Φ établit une isométrie surjective de l'espace métrique (E, d) sur l'espace métrique (G, d_∞) , et le résultat est établi. ♦

Devinette : Une boule peut-elle contenir une autre boule de rayon strictement supérieur ?

Réponse : OUI. Soit \mathbb{N} muni de la distance induite par celle de \mathbb{R} usuel.

$$B(2, 2) = \{0, 1, 2, 3, 4\} \text{ et } B(0, 3] = \{0, 1, 2, 3\} \subset B(2, 2).$$

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ Exercice 1.1.

Seule l'inégalité triangulaire (1.5) pour d'' n'est pas tout à fait évidente. Pour la vérification détaillée des axiomes d'une distance, voir dans le cours "Un exemple important d'espace métrique", et la solution des exercices 1.3, 1.6, 2.2, 2.4.

On veut démontrer que : $\forall u, v, w \in E : d''(u, v) \leq d''(u, w) + d''(w, v)$
i.e. : $\max\{d(u, v), d(v, u)\} \leq \max\{d(u, w), d(w, u)\} + \max\{d(w, v), d(v, w)\}$.

(1.5) pour d implique : $d''(u, v) \leq \max\{d(u, w) + d(w, v), d(v, w) + d(w, u)\}$.

Posons $\alpha = d(u, w), \beta = d(w, v), \xi = d(v, w), \eta = d(w, u)$. Il ne nous reste qu'à vérifier que pour quatre réels ≥ 0 , α, β, ξ, η , on a l'inégalité :

$\max\{\alpha + \beta, \xi + \eta\} \leq \max\{\alpha, \eta\} + \max\{\beta, \xi\}$, ce qui est facile à voir :

$\alpha \leq \max\{\alpha, \eta\}, \beta \leq \max\{\beta, \xi\} \implies \alpha + \beta \leq \max\{\alpha, \eta\} + \max\{\beta, \xi\}$, et :

$\xi \leq \max\{\xi, \beta\}, \eta \leq \max\{\eta, \alpha\} \implies \xi + \eta \leq \max\{\alpha, \eta\} + \max\{\beta, \xi\}$, d'où :

$\max\{\alpha + \beta, \xi + \eta\} \leq \max\{\alpha, \eta\} + \max\{\beta, \xi\}$. ♦

☞ Exercice 1.2.

Si l'on prouve la symétrie (1.4), (1.5') donne (1.5) et d sera une distance. Faisons $w = v$ dans (1.5') : $d(u, v) \leq d(v, u) + d(v, v) = d(v, u)$, en utilisant (1.2). D'autre part, (1.5') étant vraie pour tous u, v, w , on a aussi : $d(v, u) \leq d(w, v) + d(w, u)$; faisons $w = u$: $d(v, u) \leq d(u, v) + d(u, u) = d(u, v)$. Donc $d(v, u) = d(u, v)$ et on a terminé. ♦

☞ Exercice 1.3.

\approx est une relation d'équivalence sur E , car :

- réflexivité : $u \approx u \iff d(u, u) = 0$, vérifié, car (1.2),
- symétrie : $u \approx v \iff d(u, v) = 0 \iff d(v, u) = 0 \iff v \approx u$, car (1.4),
- transitivité : $[u \approx v \text{ et } v \approx w] \implies [d(u, v) = 0 \text{ et } d(v, w) = 0] \implies d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) = 0$, car (1.5), $\implies d(u, w) = 0 \implies u \approx w$.

Soient a et b deux classes d'équivalence, *i.e.* deux éléments de $F = E/\approx$, l'ensemble quotient.

Si $u \in a$ et $v \in b$, on a posé $\delta(a, b) = d(u, v)$. Pour que δ soit bien définie ainsi, il faut vérifier que si $u' \in a$ et $v' \in b$ sont deux autres représentants on a $\delta(a, b) = d(u', v')$.

Soient donc $u, u' \in a$ et $v, v' \in b$, on a : $d(u, u') = 0$ et $d(v, v') = 0$. On a :

$$d(u, v) \leq d(u, u') + d(u', v') + d(v', v) = d(u', v'), \text{ et, de même :}$$

$$d(u', v') \leq d(u', u) + d(u, v) + d(v, v') = d(u, v),$$

d'où : $d(u, v) = d(u', v')$, et le résultat. ♦

Vérifions que δ est une distance sur F .

(1.1) $\delta(a, b) = d(u, v) \geq 0$, où $u \in a, v \in b$ sont des représentants arbitraires.

(1.2) $\delta(a, a) = d(u, u') = 0$, où $u, u' \in a$.

(1.3) $\delta(a, b) = 0 = d(u, v)$, pour tous $u \in a, v \in b$, implique $u \approx v$ pour tous u, v , et donc $a = b$.

(1.4) $\delta(a, b) = d(u, v) = d(v, u) = \delta(b, a)$, avec $u \in a, v \in b$.

(1.5) $\forall a, b, c \in F$ et $\forall u \in a, v \in b, w \in c$:

$$\delta(a, b) = d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v) = \delta(a, c) + \delta(c, b). \blacklozenge$$

Les seules difficultés de l'exercice consistaient à se souvenir de la notion d'ensemble quotient et à penser à vérifier que δ est bien définie, un point crucial.

Exercice 1.4.

On a posé $\delta(u, u) = 0$ pour tout $u \in E$ et $\delta(u, v) = 1$ si $u \neq v$. (1.1) à (1.4) sont clairs. Démontrons (1.5-bis) qui, rappelons-le, implique clairement (1.5).

L'inégalité $\delta(u, v) \leq \max\{\delta(u, w), \delta(w, v)\}$ se prouve aisément en examinant tous les cas possibles... qui sont peu nombreux : si $\delta(u, w)$ ou $\delta(w, v)$ vaut 1 l'inégalité est vérifiée puisque $\delta(u, v)$ vaut 0 ou 1 ; si $\delta(u, w) = \delta(w, v) = 0$ on a $u = v = w$, d'où $\delta(u, v) = 0$ et l'inégalité est encore vérifiée. Terminé. \blacklozenge

Exercice 1.5.

Le seul problème est l'inégalité ultramétrique (1.5-bis). Démontrons-la en discutant cas par cas. Soient P, Q et $R(x) = a''x^2 + b''x + c''$. Posons $\theta := \max\{d(P, R), d(R, Q)\}$.

• Si $\theta = 3$: de toute manière $d(P, Q) \leq 3$, et l'inégalité est vérifiée.

• Si $\theta = 2$: cinq situations sont possibles *a priori* pour le couple $(d(P, R), d(R, Q))$, à savoir : (2, 2), (2, 1), (2, 0), (0, 2) et (1, 2) ; en éliminant les situations symétriques (2, 2), (2, 1), (2, 0) seulement sont à étudier. Mais dans ces trois cas on a : $a = a''$ et $a'' = a'$, d'où : $a = a'$, et donc $d(P, Q) \leq 2 = \theta$.

• Si $\theta = 1$: trois situations sont possibles : (1, 1), (1, 0), (0, 1), mais (1, 0) et (0, 1) sont symétriques, et il reste (1, 1) et (1, 0). Dans ces deux cas on a : $a = a''$ et $b = b''$, $a'' = a'$ et $b'' = b'$. D'où $a = a'$ et $b = b'$ et donc $d(P, Q) \leq 1 = \theta$.

• Si $\theta = 0$: $d(P, R) = d(R, Q) = 0$, d'où $P = Q = R$ et $d(P, Q) = 0 = \theta$. \blacklozenge

Vous pouvez maintenant généraliser à l'ensemble des polynômes de degré $\leq n$, n quelconque, et même à l'ensemble de tous les polynômes.

Exercice 1.6.

$$\forall u \in E : \delta(u, u) = d[f(u), f(v)] \geq 0 ; \forall u \in E : \delta(u, u) = d[f(u), f(u)] = 0 ;$$

$$\delta(u, v) = 0 = d[f(u), f(v)] \implies f(u) = f(v) \implies u = v \text{ si } f \text{ est injective ;}$$

$$\forall u, v \in E : \delta(u, v) = d[f(u), f(v)] = d[f(v), f(u)] = \delta(v, u) ;$$

$$\forall u, v, w \in E : \delta(u, v) = d[f(u), f(v)] \leq d[f(u), f(w)] + d[f(w), f(v)] = \delta(u, w) + \delta(w, v). \blacklozenge$$

Remarque : si f n'est pas injective, d est une *semi-distance*.

Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement monotone, φ est injective. En effet si $\varphi(\xi) = \varphi(\eta)$ on a $\xi = \eta$ car $\xi < \eta \implies \varphi(\xi) < \varphi(\eta)$ et $\eta < \xi \implies \varphi(\eta) < \varphi(\xi)$ si φ est strictement croissante ; même raisonnement si φ est strictement décroissante.

D'après ce qui précède, $d_\varphi(\xi, \eta) = |\varphi(\xi) - \varphi(\eta)|$ définit pour toute fonction strictement croissante une distance sur \mathbb{R} .

Ainsi $\xi \mapsto \varphi(\xi) = \xi^3$, $\xi \mapsto \varphi(\xi) = \text{Arc tan}(\xi)$, $\xi \mapsto \varphi(\xi) = \text{sh}(\xi)$, etc. \blacklozenge

Exercice 1.7.

Il suffit, d'après l'exercice précédent, de vérifier que les fonctions φ et ψ sont des injections de $\overline{\mathbb{R}}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$, ce qui est évident. Il est à noter que φ est une bijection de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[-1, +1]$, d'inverse $\varphi^{-1}(\eta) = \frac{\eta}{1-|\eta|}$, si $\eta \in]-1, +1[$, $\varphi^{-1}(-1) = -\infty$, $\varphi^{-1}(+1) = +\infty$.

ψ est une bijection de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[-\pi/2, +\pi/2]$ dont vous n'aurez pas de peine à définir l'inverse ! \blacklozenge

Exercice 1.8.

On va utiliser l'exercice 1.6 en définissant une fonction injective $f : \mathbb{R}^\# \rightarrow C$, où C est le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Pour cela à $\xi \in \mathbb{R}$ on fait correspondre le point $m = (\xi, 0)$, puis le point $M = (X, Y)$ qui est l'intersection de C et de la droite joignant $P = (0, 1)$ à m . Faites une figure !

On pose alors $f(\xi) = M$ si $\xi \in \mathbb{R}$, et $f(\omega) = P$. Il est clair que f est une bijection.

Un petit calcul montre que $X = \frac{2\xi}{1+\xi^2}$, $Y = \frac{\xi^2-1}{1+\xi^2}$. Calculons la distance euclidienne entre deux points $f(\xi) = M$ et $f(\eta) = M'$:

$$d_e(M, M') = \sqrt{\left(\frac{2\xi}{1+\xi^2} - \frac{2\eta}{1+\eta^2}\right)^2 + \left(\frac{\xi^2-1}{1+\xi^2} - \frac{\eta^2-1}{1+\eta^2}\right)^2} = \text{(après quelques calculs sur les polynômes)} = \frac{2}{(1+\xi^2)(1+\eta^2)} \sqrt{(\xi-\eta)^2(1+\xi^2)(1+\eta^2)}$$

$d_e(M, M') = 2 \frac{|\xi-\eta|}{\sqrt{1+\xi^2}\sqrt{1+\eta^2}} = 2.d(\xi, \eta)$. Le calcul de $d(\omega, \xi)$ est laissé au lecteur. d est une distance car c'est, au coefficient $\frac{1}{2}$ près, la distance euclidienne d_e de \mathbb{R}^2 induite sur le cercle C . ♦

Le même exercice se pose pour \mathbb{R}^2 auquel on adjoint un "point à l'infini" ω , qu'on identifie à la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, \mathbb{R}^2 étant identifié au plan $z = 0$. L'application $f^{-1} : S \rightarrow \mathbb{R}^{2\#}$ s'appelle la *projection stéréographique à partir du pôle nord* $P = (0, 0, 1)$. On obtient ainsi une représentation plane du globe terrestre, au pôle nord près. Généralisation évidente à \mathbb{R}^n . Il ne vous est pas interdit de mettre tout cela en formules . . .

Exercice 2.1.

On prend comme paramètre l'angle θ que fait Ou avec Ov . Cet angle, exprimé en radians, est compris entre 0 et π . Par définition même du radian, on a : $\delta(u, v) = r\theta$. Il est facile de calculer $d(u, v) = d$ par la formule :

$$d^2 = r^2 + r^2 - 2r.r.\cos\theta = 2r^2(1 - \cos\theta) = 4r^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

$$\text{Donc : } \frac{\delta}{d} = \frac{r\theta}{2r \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} \text{ est compris entre 1 } (\theta = 0) \text{ et } \pi/2 (\theta = \pi).$$

Nota : le fait que d est effectivement une distance est évident. ♦

Exercice 2.2.

(1.1) $\forall u, v \in E : d(u, v) = \varphi[\delta(u, v)] \geq 0$, car $\varphi(0) = 0$ et φ est croissante, d'où $\varphi(\xi) \geq 0$ pour tout $\xi \in [0, +\infty[$.

(1.2) $\forall u \in E : d(u, u) = \varphi[\delta(u, u)] = \varphi(0) = 0$.

(1.3) $d(u, v) = 0 \implies \varphi[\delta(u, v)] = 0 \implies \delta(u, v) = 0 \implies u = v$, car δ est une distance et $[\varphi(\xi) = 0 \implies \xi = 0]$.

(1.4) $\forall u, v \in E : d(v, u) = \varphi[\delta(v, u)] = \varphi[\delta(u, v)] = d(u, v)$ car δ est une distance.

(1.5) $\forall u, v, w \in E :$

$$d(u, v) = \varphi[\delta(u, v)] \leq \varphi[\delta(u, w) + \delta(w, v)] \leq \varphi[\delta(u, w)] + \varphi[\delta(w, v)] \\ \leq d(u, w) + d(w, v) \text{ car } \delta \text{ est une distance, } \varphi \text{ est croissante, } \varphi \text{ est sous-additive.}$$

$d = \varphi \circ \delta$ est une distance sur E . ♦

a) C'est la seule difficulté réelle de cet exercice. Il faut prouver que pour tous ξ, η réels positifs et pour tout $\alpha \in]0, 1[$ on a : $(\xi + \eta)^\alpha \leq \xi^\alpha + \eta^\alpha$.

Si $\xi \neq 0$: $(\xi + \eta)^\alpha = [\xi(1 + \frac{\eta}{\xi})]^\alpha = \xi^\alpha(1 + \frac{\eta}{\xi})^\alpha$; mais $1 + \frac{\eta}{\xi} \geq 1$, d'où $(1 + \frac{\eta}{\xi})^\alpha \leq 1 + \frac{\eta}{\xi}$ [dessinez $t \mapsto t^\alpha$ pour $0 < \alpha < 1$] et $(\xi + \eta)^\alpha \leq \xi^\alpha(1 + \frac{\eta}{\xi})$.

Supposons que $\xi \geq \eta$ (ce qu'on peut toujours faire ; si $\xi < \eta$ on inverse les rôles de ξ et η) : $0 \leq \frac{\eta}{\xi} \leq 1 \implies \frac{\eta}{\xi} \leq (\frac{\eta}{\xi})^\alpha$ [encore $t \mapsto t^\alpha$, d'où :

$$(\xi + \eta)^\alpha \leq \xi^\alpha(1 + (\frac{\eta}{\xi})^\alpha) = \xi^\alpha + \eta^\alpha. \text{ C.Q.F.D.}$$

Une autre méthode consisterait à étudier la fonction de $\xi \geq 0, \eta$ étant un paramètre positif ou nul : $g(\xi) = (\xi + \eta)^\alpha - \xi^\alpha - \eta^\alpha, 0 < \alpha < 1$.

$$g'(\xi) = \alpha(\xi + \eta)^{\alpha-1} - \alpha\xi^{\alpha-1} = \alpha[(\xi + \eta)^{\alpha-1} - \xi^{\alpha-1}] \leq 0 \text{ car } \xi + \eta \geq \xi.$$

Donc g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et $g(\xi) \leq g(0) = \eta^\alpha - \eta^\alpha = 0$, d'où le résultat cherché. ♦

b) Il faut démontrer que pour tous ξ, η réels ≥ 0 : $\frac{\xi + \eta}{1 + \xi + \eta} \leq \frac{\xi}{1 + \xi} + \frac{\eta}{1 + \eta}$. On a :

$$\frac{\xi}{1 + \xi} \geq \frac{\xi}{1 + \xi + \eta} \text{ et } \frac{\eta}{1 + \eta} \geq \frac{\eta}{1 + \xi + \eta}, \text{ d'où le résultat en ajoutant membre à membre les deux inégalités. } \blacklozenge$$

c) L'inégalité $\ln(1 + \xi + \eta) \leq \ln(1 + \xi) + \ln(1 + \eta)$ avec $\xi \geq 0, \eta \geq 0$ est évidente car le second membre vaut $\ln((1 + \xi)(1 + \eta)) = \ln(1 + \xi + \eta + \xi\eta) \geq \ln(1 + \xi + \eta)$, puisque \ln est une fonction croissante. ♦

d) $\min\{1, \xi + \eta\} \geq \min\{1, \xi\} + \min\{1, \eta\}$ est évidente : il suffit d'envisager bêtement tous les cas possibles : $\xi \leq 1, \eta \leq 1$ et $\xi + \eta \leq 1$, etc. ♦

☞ **Exercice 2.3.**

Démontrons l'inégalité (2.9) : Soient $a \geq 0, b \geq 0$, et soient $p > 1, q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, soit si l'on veut : $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \implies q = \frac{p}{p-1}$.

Étudions pour $s \geq 0$ la fonction f dépendant du paramètre $t \geq 0$ suivante : $f(s) = \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} - st$ [même technique que dans l'exercice 2.2 a), il faut "intuire" la bonne fonction].

$f'(s) = \frac{1}{p} \cdot ps^{p-1} - t = s^{p-1} - t$ s'annule pour $s_0 = t^{\frac{1}{p-1}}$. Si $s \leq t^{\frac{1}{p-1}} : s^{p-1} \leq t$ et $f'(s) \leq 0$, tandis que si $s \geq t^{\frac{1}{p-1}} : s^{p-1} \geq t$ et on a $f'(s) \geq 0$. Donc la fonction f atteint un *minimum* en s_0 . Ce *minimum* vaut :

$$f(s_0) = \frac{1}{p} \cdot t^{\frac{p}{p-1}} + \frac{t^q}{q} - t^{\frac{1}{p-1}} \cdot t = t^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) - t^{\frac{1}{p-1}} + 1 = t^q - t^{\frac{1+p-1}{p-1}} = t^q - t^q = 0.$$

Par conséquent, pour tout $s \geq 0$ (et $t \geq 0$ quelconque) : $f(s) \geq f(s_0) = 0$, soit : $\frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q} \geq st$, d'où l'inégalité cherchée. ♦

Pour $p = q = 2$ on trouve l'inégalité bien connue et *souvent utile* : $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ qu'on obtient immédiatement en écrivant $(a - b)^2 \geq 0$. Une conséquence assez souvent utilisée est que pour tout $\varepsilon > 0$ on a : $ab \leq \frac{1}{2}a^2\varepsilon + \frac{b^2}{2\varepsilon}$ (vérifiez).

Démonstration de (2.10) : Soient n nombres réels $\geq 0 : a_1, \dots, a_n$ et n nombres réels $\geq 0 : b_1, \dots, b_n$.

Posons pour $1 \leq k \leq n : \alpha_k := a_k \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{-1/p}$ et $\beta_k := b_k \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{-1/q}$,

et appliquons (2.9) : $\alpha_k \beta_k \leq \frac{\alpha_k^p}{p} + \frac{\beta_k^q}{q}$ implique :

$$a_k b_k \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{-1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{-1/q} \leq \frac{1}{p} \cdot a_k^p \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{-1} + \frac{1}{q} \cdot b_k^q \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{-1}$$

On somme sur l'indice k :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{-1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{-1/q} \leq \frac{1}{p} \cdot \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{-1} + \frac{1}{q} \cdot \left(\sum_{k=1}^n b_k^q \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{-1} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

D'où l'inégalité (2.10), dite *de Hölder*. ♦

Passons à (2.11) :

$$\begin{aligned} \sum_k (a_k + b_k)^p &= \sum_k (a_k + b_k)(a_k + b_k)^{p-1} \\ &= \sum_k a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_k b_k (a_k + b_k)^{p-1} \\ &\leq \left(\sum_k a_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_k (a_k + b_k)^{(p-1)q} \right)^{1/q} + \left(\sum_k b_k^p \right)^{1/p} \left(\sum_k (a_k + b_k)^{(p-1)q} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

[on applique deux fois l'inégalité de Hölder].

Comme $(p-1)q = p$:

$$\begin{aligned} \sum (a_k + b_k)^p &\leq \left(\sum a_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} + \left(\sum b_k^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum (a_k + b_k)^p \right)^{1/q} \cdot \left[\left(\sum a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum b_k^p \right)^{1/p} \right] \end{aligned}$$

Soit : $\left(\sum (a_k + b_k)^p \right)^{1-1/q} \leq \left(\sum a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum b_k^p \right)^{1/p}$, et $1 - 1/q = 1/p$,

d'où l'inégalité (2.11), dite *de Minkowski*. ♦

Cette inégalité démontre, en particulier, que la fonction δ_p de (2.6) est bien une distance sur un produit fini d'espaces métriques.

Les inégalités (2.10) et (2.11) sont valides en remplaçant les sommes finies par des sommes infinies (séries) dans des espaces de suites convenables (cf. Chap.II) et aussi par des sommes continues, *i.e.* des intégrales. Par exemple pour des fonctions continues $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ on a :

$$\int_a^b |f(t) \cdot g(t)| dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{1/q} \text{ [Hölder]} \text{ et :}$$

$$\left(\int_a^b |f(t) + g(t)|^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{1/p} \text{ [Minkowski]}$$

cela pour p réel > 1 et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Toutes ces inégalités se démontrent de la manière exposée ci-dessus, et il est recommandé de retenir la méthode.

☞ **Exercice 2.4.**

L'exercice consiste à munir d'une distance « raisonnable » un produit infini (dénombrable) d'espaces métriques. « Raisonnable » veut dire que cette distance définit bien la topologie produit (voir cours de topologie générale). Il faut d'abord vérifier que $d(u, v)$ est bien définie, i.e. non infinie ! $\forall i = 1, 2, \dots, \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)} \leq 1$ et, donc, $d(u, v) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$. Les propriétés

(1.1)(1.2)(1.4) d'une distance sont trivialement vérifiées. Si $d(u, v) = 0$ on a $d_i(u_i, v_i) = 0$ pour tout i , d'où $u_i = v_i$ et $u = v$. Seule l'inégalité triangulaire (1.5) pose un (petit) problème : on va prouver que pour tout i , et pour tous u_i, v_i, w_i on a :

$$\frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)} \leq \frac{d_i(u_i, w_i)}{1 + d_i(u_i, w_i)} + \frac{d_i(w_i, v_i)}{1 + d_i(w_i, v_i)}$$

En appliquant l'inégalité triangulaire à d_i on a à montrer que pour a, b, c trois réels positifs ou nuls vérifiant $a \leq b + c$, on a : $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$. Une méthode peu élégante, mais efficace, consiste à réduire au même dénominateur et à ramener la vérification à : $a - (b + c) - (2bc + abc) \leq 0$ qui est évidemment assuré. Une méthode plus jolie consiste à considérer la fonction $f(t) = \frac{t}{1+t}$ pour $t \geq 0$: $f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ et donc f est (strictement) croissante ; on en déduit que :

$$f(a) \leq f(b + c) = \frac{b+c}{1+b+c} = \frac{b}{1+b+c} + \frac{c}{1+b+c} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \cdot \blacklozenge$$

☞ **Exercice 2.5.**

Pour $t > 0$: $f(t) = \frac{t}{1+t} \implies f'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} < 1$;

pour $t < 0$: $f(t) = \frac{1}{1-t} \implies f'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} < 1$;

pour $t = 0$: $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{1}{h} \times \left(\frac{h}{1+|h|} - 0\right) = 1$.

Donc pour tout $t \in \mathbb{R}$: $f'(t) = \frac{1}{(1+|t|)^2}$, et $|f'(t)| = f'(t) \leq 1$. On applique la formule des accroissements finis : $|f(s) - f(t)| \leq \sup_{r \in [s,t]} |f'(r)| \cdot |s - t| \implies |f(s) - f(t)| \leq |s - t|$ et f est contractante. \blacklozenge

Pour tous $s, t \geq 0$: $f(s+t) = \frac{s+t}{1+s+t} = \frac{s}{1+s+t} + \frac{t}{1+s+t} \leq \frac{s}{1+s} + \frac{t}{1+t}$ car $1+s+t \geq 1+s, 1+s+t \geq 1+t$. \blacklozenge

☞ **Exercice 2.6.**

$$g(u) = \inf\{f_a(u) / a \in A\} = \inf\{f(a) + \lambda d(u, a) / a \in A\}.$$

Commençons par démontrer que g est finie, i.e. $> -\infty$. Soit $u \in E$ fixé. Par définition de \inf : $\forall \varepsilon > 0, \exists \hat{a} \in A : g(u) \leq f_{\hat{a}}(u) \leq g(u) + \varepsilon$. Faisant $\varepsilon = 1$: $\exists a_1 \in A$ tel que $g(u) + 1 \geq f(a_1) + \lambda d(a_1, u) \implies g(u) \geq f(a_1) + \lambda d(a_1, u) - 1 > -\infty$. \blacklozenge

Vérifions que $u \mapsto f_a(u), E \rightarrow \mathbb{R}$, est λ -lipschitzienne pour tout $a \in A$:

$$\forall a \in A, \forall u \in E, \forall v \in E :$$

$$|f_a(u) - f_a(v)| = |f(a) + \lambda d(a, u) - f(a) - \lambda d(a, v)| = \lambda |d(a, u) - d(a, v)| \leq \lambda d(u, v) \text{ [seconde inégalité triangulaire].}$$

Donc : $\forall a \in A, \forall u \in E, \forall v \in E :$

$$f_a(u) \leq f_a(v) + \lambda d(u, v) \implies \inf_{a \in A} f_a(u) \leq \inf_{a \in A} f_a(v) + \lambda d(u, v) \implies g(u) \leq g(v) + \lambda d(u, v) \implies g(u) - g(v) \leq \lambda d(u, v).$$

Partant de $f_a(v) \leq f_a(u) + \lambda d(u, v)$, on obtient de même $g(v) \leq g(u) + \lambda d(u, v)$, et en définitive : $\forall u \in E, \forall v \in E : |g(u) - g(v)| \leq \lambda d(u, v)$. g est λ -lipschitzienne. \blacklozenge

Vérifions que g est un prolongement de f à E entier, i.e. que $g|_A = f$.

$g(u) = \inf_{a \in A} f_a(u) \leq f_a(u)$ pour tous $u \in E, a \in A \implies g(u) \leq f(a) + \lambda d(a, u)$; si $u \in A$ on peut faire $a = u$ et on a : $g(u) \leq f(u) + \lambda d(u, u) = f(u)$.

Ensuite, pour tous $u \in A, a \in A$:

$|f(u) - f(a)| \leq \lambda d(u, a) \implies f(u) - f(a) \leq \lambda d(u, a) \implies f(u) \leq f(a) + \lambda d(u, a)$

et en passant à l'inf : $f(u) \leq \inf_{a \in A} [f(a) + \lambda d(a, u)] = g(u)$.

Finalement $g(u) = f(u)$ pour tout $u \in A$. ♦

• Exercice 3.1.

Pour les boules et sphères de l'exercice 1.5, on raisonne comme pour celles de la distance discrète en raisonnant sur les rayons possibles. Par exemple, en prenant $P(x) = ax^2 + bx + c$ comme centre :

pour $0 < \rho < 1, B(P, \rho) = \{P\}$; $B(P, 1] = \{Q \in E / Q(x) = ax^2 + bx + c', c' \text{ quelconque}\}$;

pour $1 \leq \rho < 2, B(P, \rho] = B(P, 1]$;

$B(P, 2] = \{Q \in E / Q(x) = ax^2 + b'x + c', b' \text{ et } c' \text{ quelconques}\}$;

pour $2 \leq \rho < 3, B(P, \rho] = B(P, 2]$; $B(P, 3] = E$, etc. ♦

Dans les exercices 1.7 et 1.8, il n'y a pas d'autre difficulté que la longueur des calculs. On simplifiera un peu en se limitant à des rayons assez petits ; examinez particulièrement $B(+\infty, \rho]$ pour 1.7 (par exemple, pour $0 < \rho < \pi/2, B(+\infty, \rho] =]\frac{1}{\tan \rho}, +\infty[$) et $B(\omega, \rho]$ pour 1.8. ♦

• Exercice 3.2.

Par hypothèse : $\exists c, C$ réels $> 0, \forall u, v \in E : c.d(u, v) \leq \delta(u, v) \leq C.d(u, v)$.

$v \in B^d(u, \rho] \iff d(u, v) < \rho$ et $v \in B^\delta(u, \sigma] \iff \delta(u, v) < \sigma$.

Posons $\sigma := c.\rho$; pour $v \in B^\delta(u, c.\rho]$ on a : $d(u, v) \leq \frac{1}{c} \cdot \delta(u, v) < \frac{1}{c} \cdot c.\rho = \rho$, soit : $B^\delta(u, c.\rho] \subset B^d(u, \rho]$.

Posons $\sigma := \frac{\rho}{C}$, et soit $v \in B^d(u, \frac{\rho}{C}] : \delta(u, v) \leq C.d(u, v) < C.\frac{\rho}{C} = \rho$, et :

$B^d(u, \frac{\rho}{C}] \subset B^\delta(u, \rho]$. ♦

• Exercice 3.3.

$A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

$\forall j \in I : A_j \subset A \implies \forall j \in I : d(u, A_j) \geq d(u, A) \implies \inf_{j \in I} d(u, A_j) \geq d(u, A)$. Ensuite, par définition de $d(u, A) = \inf_{a \in A} d(u, a) : \forall \varepsilon > 0, \exists \hat{a} \in A : d(u, \hat{a}) < d(u, A) + \varepsilon$.

Par définition de $A : \exists k \in I$ tel que $\hat{a} \in A_k$, d'où :

$$\inf_{i \in I} d(u, A_i) \leq d(u, A_k) \leq d(u, \hat{a}) \leq d(u, A) + \varepsilon.$$

Comme l'inégalité a lieu pour tout $\varepsilon > 0$ il vient : $\inf_{i \in I} d(u, A_i) \leq d(u, A)$, et on a le résultat cherché. ♦

$$d(B, A) = \inf_{b \in B} d(b, A) = \inf_{b \in B} \inf_{i \in I} d(b, A_i) = \inf_{i \in I} \inf_{b \in B} d(b, A_i) = \inf_{i \in I} d(B, A_i). \quad \blacklozenge$$

• Exercice 3.4.

• Dans $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on prend $A = \{2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$ et $B = \{2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{3}, 4 + \frac{1}{4}, \dots, n + \frac{1}{n}, \dots\}$. Clairement $A \cap B = \emptyset$, mais pour $m \in A$:

$$d(m, B) = \inf_{p \geq 2} |p + \frac{1}{p} - m| = \frac{1}{m}, \text{ et } d(A, B) = \inf_{m \in A} d(m, B) = \inf_{m \in A} \{1/m\} = 0. \quad \blacklozenge$$

Un autre exemple ; dans \mathbb{R}^2 euclidien on prend :

$A = \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(x, y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y \geq e^{-x}\}$.

Dessinez ! $A \cap B = \emptyset$, mais :

$$d(A, B) = \inf_{x > 0} d_e[(x, 0), (x, e^{-x})] = \inf_{x > 0} [(x - x)^2 + (0 - e^{-x})^2]^{1/2} = \inf_{x > 0} e^{-x} = 0. \quad \blacklozenge$$

• L'inégalité triangulaire est manifestement fautive : il suffit de prendre dans \mathbb{R} usuel : $A = [0, 1], B = [2, 3], C = [1, 2]$, on a :

$$d(A, B) = 1 > d(A, C) + d(C, B) = 0 + 0 = 0. \quad \blacklozenge$$

• Pour $|d(u, A) - d(u, B)| \leq d(A, B)$, prendre $A = [1, 2], B = [0, 3], u = 4$. ♦

• Comme $d(a, A) = 0$ pour tout $a \in A$ [cf. (3.10)], on peut écrire :

$$d(A, B) = \inf\{d(a, A) + d(a, B) / a \in A\} \geq \inf\{d(u, A) + d(u, B) / u \in E\}.$$

Soit maintenant $u \in E$ fixé, et soit $\varepsilon > 0$ arbitraire ; d'après (3.4), il existe $a \in A$ tel que $d(u, a) \leq d(u, A) + \varepsilon$, et il existe $b \in B$ tel que $d(u, b) \leq d(u, B) + \varepsilon$. On a :

$$d(A, B) \leq d(a, b) \leq d(a, u) + d(u, b) \leq d(u, A) + \varepsilon + d(u, B) + \varepsilon \leq d(u, A) + d(u, B) + 2\varepsilon.$$

Comme cette inégalité a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, il vient : $d(A, B) \leq d(u, A) + d(u, B)$.

Comme cette dernière inégalité a lieu pour tout $u \in E$, on a bien :

$$d(A, B) \leq \inf\{d(u, A) + d(u, B) \mid u \in E\}. \spadesuit$$

Exercice 3.5.

Par hypothèse, $d(A, B) > 0$: cela implique que $A \cap B = \emptyset$. Comme A, B sont fermés : $d(u, A) = 0 \iff u \in A$ et $d(u, B) = 0 \iff u \in B$.

$d(u, A) + d(u, B) = 0 \iff u \in A \cap B$, ce qui est impossible ; donc f est définie sur E entier.

Il est clair que $f(u) = 0 \iff u \in A$, $f(u) = 1 \iff u \in B$, et que $0 \leq f(u) \leq 1$ pour tout $u \in E$. \spadesuit

$$f(u) - f(v) = \frac{d(u, A)}{d(u, A) + d(u, B)} - \frac{d(v, A)}{d(v, A) + d(v, B)} = \frac{N}{D}$$

où $N := d(u, A)d(v, A) + d(u, A)d(v, B) - d(u, A)d(v, A) - d(u, B)d(v, A)$
 $= d(u, A)d(v, B) - d(u, B)d(v, A)$,
 et $D := [d(u, A) + d(u, B)] \cdot [d(v, A) + d(v, B)]$.

Comme $|d(u, A) - d(v, A)| \leq d(u, v)$, cf. (3.9) :

$$N \leq [d(v, A) + d(u, v)]d(v, B) - d(u, B)d(v, A) \leq d(v, A)[d(v, B) - d(u, B)] + d(u, v)d(v, B) \text{ [et par (3.9) à nouveau]} \leq d(v, A)d(u, v) + d(u, v)d(v, B) = d(u, v)[d(v, A) + d(v, B)].$$

$$\text{Donc : } f(u) - f(v) \leq d(u, v) \frac{[d(v, A) + d(v, B)]}{[d(u, A) + d(u, B)] \cdot [d(v, A) + d(v, B)]} \leq \frac{d(u, v)}{d(u, A) + d(u, B)}$$

A présent : $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ [toujours (3.9)] implique :

$$\inf_{x \in B} [d(x, A) - d(y, A)] \leq \inf_{x \in B} d(x, y) = d(y, B) \implies d(A, B) - d(y, A) \leq d(y, B).$$

On a donc :

$$0 < d(A, B) \leq d(u, A) + d(u, B), \text{ d'où : } f(u) - f(v) \leq \frac{1}{d(A, B)} d(u, v), \text{ et par symétrie entre}$$

$$u \text{ et } v : |f(u) - f(v)| \leq \frac{d(u, v)}{d(A, B)} \text{ C.Q.F.D. } \spadesuit$$

Exercice 3.6.

Soient $a \in A$ et $b \in B$. Soient $u, v \in A \cup B$.

Si $u, v \in A$: $d(u, v) \leq \text{diam}(A) \leq \text{diam}(A) + d(A, B) + \text{diam}(B)$. De même si $u, v \in B$.

Si $u \in A$ et $v \in B$: $d(u, v) \leq d(u, a) + d(a, b) + d(b, v) \leq \text{diam}(A) + d(a, b) + \text{diam}(B)$; de même si $u \in B, v \in A$.

D'où : $\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + d(a, b) + \text{diam}(B)$, et cela est vrai dans tous les cas, pour tous $a \in A, b \in B$. Donc :

$$\text{diam}(A \cup B) \leq \text{diam}(A) + d(A, B) + \text{diam}(B). \spadesuit$$

Si A est contenu dans une boule $B(u, \rho), u \in E$: A est borné avec $\text{diam}(A) \leq 2\rho$, évidemment.

Réciproquement, si A est borné, supposons que A contienne deux points au moins (si $A = \{a\}$, $A \subset B(a, \rho)$ pour tout ρ), et soit $u \in E$ quelconque. D'après la formule ci-dessus : $\text{diam}(A \cup \{u\}) \leq \text{diam}(A) + \text{diam}(\{u\}) + d(A, \{u\}) = \text{diam}(A) + d(u, A)$. D'où pour tout $v \in A$: $d(u, v) \leq \text{diam}(A \cup \{u\}) \leq \text{diam}(A) + d(u, A) := \rho < +\infty$ par hypothèse, et $\rho > 0$ car $\text{diam}(A) > 0$. On peut donc écrire : $A \subset B(u, \text{diam}(A) + d(u, A))$. \spadesuit

Exercice 3.7.

Soit E un ensemble non vide et soit \mathcal{E} l'ensemble de toutes les parties bornées non vides de E .

Pour $A, B \in \mathcal{E}$, on a :

$$\text{diam}(A, B) = \sup_{(a,b) \in A \times B} d(a, b) \leq \text{diam}(A \cup B) = \sup_{u,v \in A \cup B} d(u, v) < +\infty$$

d'après l'inégalité de l'exercice 3.5.

Notons que l'inégalité $\text{diam}(A, B) \leq \text{diam}(A \cup B)$ peut être stricte : dans \mathbb{R}^2 (euclidien) prenons $A = \{(0, -1), (0, +1)\}$ et $B = \{(+1, 0)\}$; $\text{diam}(A, B) = \sqrt{2}$ et $\text{diam}(A \cup B) = 2$.

Evidemment $\text{diam}(A, B) \geq 0$, et $\text{diam}(B, A) = \text{diam}(A, B)$. Démontrons l'inégalité triangulaire. Pour tout $a \in A, b \in B, c \in C$:

$$d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) \leq \text{diam}(A, C) + \text{diam}(C, B) \\ \implies \text{diam}(A, B) \leq \text{diam}(A, C) + \text{diam}(C, B).$$

Enfin, $\text{diam}(A, B) = 0$ implique $A = B = \{x\}$.

« diam » est proche d'une distance . . . Mais ce n'en est pas une car on a :

$$\text{diam}(A, A) = \text{diam}(A) \neq 0, \text{ en général.}$$

La propriété (1.2) n'est pas vérifiée. ♦

La fonction $u \mapsto r(u, A) = \sup_{a \in A} d(u, a)$, où A est un borné, est contractante. En effet, soient u, v dans E et soit $a \in A$:

$$d(u, a) \leq d(u, v) + d(v, a) \leq d(u, v) + r(v, A) \implies r(u, A) \leq d(u, v) + r(v, A); \text{ il ne reste plus qu'à permuter les rôles de } u \text{ et } v \text{ pour obtenir le résultat :}$$

$$|r(u, A) - r(v, A)| \leq d(u, v). \quad \blacklozenge$$

Exercice 3.8.

1) $e(A, B) = \sup_{u \in A} d(u, B)$ est un nombre réel, évidemment ≥ 0 , puisqu'on suppose $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, d$ bornée.

$e(A, A) = 0$ car $\forall u \in A : d(u, A) = 0$ [cf. la Définition 3.2].

Si $e(A, B) = 0$, on a $\forall u \in A : d(u, B) = 0$, donc $\forall u \in A : u \in \text{adh}(B) = B$ [voir (3.10) et (3.11)], soit enfin : $A \subset B$.

Soit maintenant $h(A, B) : c'est un réel \geq 0, vérifiant :$

$$h(A, A) = 0, h(A, B) = h(B, A) \text{ pour tous } A, B \text{ de } \mathcal{F}.$$

Si $h(A, B) = 0$, on a $e(A, B) = 0 \implies A \subset B$ et $e(B, A) = 0 \implies B \subset A$, soit $A = B$.

Remarquons maintenant que si $e(\dots)$ vérifie l'inégalité triangulaire, il en est de même pour $h(\dots)$. Démontrons donc que $e(A, B) \leq e(A, C) + e(C, B)$ pour tous A, B, C dans \mathcal{F} et nous aurons prouvé que h est une distance sur \mathcal{F} .

Posons $\xi := e(A, C)$ et $\eta := e(C, B)$. Il nous suffit de prouver que :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall u \in A : d(u, A) \leq \xi + \eta + \varepsilon, \text{ et nous aurons gagné !}$$

D'après (3.9) :

$$\forall u \in A, \forall w \in C : |d(u, B) - d(w, B)| \leq d(u, w) \implies d(u, B) \leq d(u, w) + d(w, B); \text{ mais } \forall w \in C : h = e(C, B) = \sup_{x \in C} d(x, B) \geq d(w, B), \text{ d'où :}$$

$$(\) \quad \forall u \in A, \forall w \in C : d(u, B) \leq d(u, w) + \eta.$$

D'autre part : (*) $\forall u \in A : \xi = \sup_{x \in A} d(x, C) \geq d(u, C)$.

Enfin : $\forall u \in A, u$ fixé : $d(u, C) = \inf_{y \in C} d(u, y)$ implique

$$(\#) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \underline{w}(u, \varepsilon) \in C : d(u, C) \leq d(u, \underline{w}) \leq d(u, C) + \varepsilon \text{ [définition borne inférieure].}$$

On a donc, d'après (*) et (#) :

$$\forall u \in A, \forall \varepsilon > 0 : d(u, B) \leq d(u, \underline{w}) + \eta \leq d(u, C) + \varepsilon + \eta \leq \xi + \eta + \varepsilon \text{ [dernière inégalité d'après (*)]. La démonstration est terminée. } \blacklozenge$$

2) Si l'on prend directement comme définition

$$h(A, B) = \sup_{u \in E} |d(u, A) - d(u, B)|,$$

il est facile de démontrer que h est une distance sur \mathcal{F} , mais on perd alors l'interprétation géométrique de h [faites des dessins !]. Mais d'autre part la nouvelle écriture de h est intéressante . . . De toute façon nous sommes ensemble pour démontrer des inégalités !

Remarquons qu'il suffit de prouver que $e(B, A) = \sup_{u \in E} [d(u, A) - d(u, B)]$ (pas de valeur absolue !) car :

$$h(A, B) = \max\{e(A, B), e(B, A)\} \\ = \max\{\sup_{u \in E} [d(u, B) - d(u, A)], \sup_{u \in E} [d(u, A) - d(u, B)]\} \\ = \max\{\sup_{u \in E} [d(u, B) - d(u, A)], -\inf_{u \in E} [d(u, B) - d(u, A)]\} \\ = \sup_{u \in E} |d(u, A) - d(u, B)|.$$

$$(i) \quad e(B, A) = \sup_{v \in B} d(v, A) = \sup_{v \in B} [d(v, A) - d(v, B)], \text{ car } d(v, B) = 0 \text{ pour } v \in B, \\ e(B, A) \leq \sup_{v \in E} [d(v, A) - d(v, B)], \text{ car } B \subset E.$$

$$(ii) \quad \forall u \in E, \forall a \in A, \forall b \in B :$$

$$d(u, a) \leq d(u, b) + d(b, a) \implies d(u, A) \leq d(u, b) + d(b, A) \text{ [en prenant l'inf sur } a \in A], \text{ et :} \\ d(b, A) \leq \sup_{v \in B} d(v, A), \text{ d'où, } \forall u \in E, \forall b \in B :$$

$$d(u, A) \leq d(u, b) + \sup_{v \in B} d(v, A) \implies$$

$$d(u, A) \leq \inf_{b \in B} d(u, b) + \sup_{v \in B} d(v, A) = d(u, B) + \sup_{v \in B} d(v, A).$$

Enfinement $\forall u \in E : d(u, A) - d(u, B) \leq \sup_{v \in B} d(v, A) \implies$
 $\sup_{u \in E} [d(u, A) - d(u, B)] \leq \sup_{v \in B} d(v, A)$. C'est fini. \blacklozenge

3) Soient $\alpha := e(A, B) = \sup_{u \in A} d(u, B)$ et $\beta := \inf\{\rho > 0 / A \subset B(B, \rho)\}$; on veut prouver que $\alpha = \beta$. Il est facile de voir que $\alpha = 0 \iff \beta = 0$, car $\alpha = 0 \iff A \subset B$. Supposons donc $\alpha > 0$.

D'une part :

$$\forall u \in A : d(u, B) \leq \alpha \implies \forall u \in A : u \in B(B, \alpha] \implies A \subset B(B, \alpha] \implies \alpha \geq \beta.$$

D'autre part, $\forall \varepsilon > 0 : A \subset B(B, \beta + \varepsilon) \implies \forall \varepsilon > 0, \forall u \in A : d(u, B) \leq \beta + \varepsilon \implies$

$$\forall u \in A : d(u, B) \leq \beta \implies \alpha = \sup_{u \in A} d(u, B) \leq \beta. \blacklozenge$$

PROBLÈME

Régularisée de Hausdorff d'une fonction

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

(*) Il existe $u_0 \in E$ tel que : $f(u_0) < +\infty$,

(**) Pour tout $u \in E$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $f(u) > \lambda$, il existe $\rho > 0$ tel que :
 pour tout $v \in B(u, \rho] : f(v) > \lambda$,

(***) Il existe α réel ≥ 0 et $\beta \in \mathbb{R}$, il existe $u_1 \in E$ tels que :
 pour tout $u \in E : f(u) \geq -\alpha.d(u, u_1) + \beta$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit, pour tout $u \in E$:

$$f_n(u) := \inf\{f(z) + n.d(u, z) / z \in E\}.$$

1) Démontrez que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $u \in E$, on a : $f_n(u) < +\infty$.

2) Démontrez qu'il existe N entier ≥ 1 tel que : pour tout $n \geq N$ et pour tout $u \in E$:
 $f_n(u) > -\infty$.

Remarque : d'après 1) et 2), on aura donc pour tout $n \geq N : f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$. Dans tout ce qui suit, on supposera que $n \geq N$.

3) Démontrez que pour tout $n \geq N$ et pour tout $u \in E$, tout $v \in E$:

$$|f_n(u) - f_n(v)| \leq n.d(u, v),$$

autrement dit que f_n est lipschitzienne de rapport n .

Indication : soit $\varepsilon > 0$, écrivez que $f_n(u)$ est un inf et majorez $f_n(v) - f_n(u)$.

4) Démontrez que pour tout $n \geq m \geq N$ on a : $\forall u \in E : f_m(u) \leq f_n(u) \leq f(u)$.
 Soit $u \in E$ fixé. Que peut-on dire de la suite $(f_n(u))_n$?

5) Démontrez que, pour tout $u \in E$ fixé, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(u)) = f(u)$.

Indication : on pourra démontrer que pour tout λ réel $< f(u)$ on a $f_n(u) \geq \lambda$ pour tout n assez grand.

CORRIGÉ du PROBLÈME

1) D'après (*) et par définition de inf : $f_n(u) \leq f(u_0) + n.d(u, u_0) < +\infty$. \blacklozenge

2) Soit $u \in E$ arbitraire. $f_n(u) := \inf\{f(z) + n.d(u, z) / z \in E\}$. Grâce à (***) ,
 $\forall z \in E : f(z) \geq -\alpha.d(z, u_1) + \beta \implies f(z) + n.d(u, z) \geq -\alpha.d(z, u_1) + \beta + n.d(u, z)$.

Mais $d(z, u_1) \leq d(z, u) + d(u, u_1)$ [inégalité triangulaire]. Donc :

$$f(z) + n.d(u, z) \geq -\alpha.d(z, u) - \alpha.d(u, u_1) + \beta + n.d(u, z) \\ \geq (n - \alpha).d(u, z) + \beta - \alpha.d(u, u_1) \geq \beta - \alpha.d(u, u_1)$$

la dernière inégalité étant valide si $(n - \alpha).d(u, z) \geq 0$, soit $n \geq \alpha$.

Prenons $N = \lceil \text{partie entière de } \alpha \rceil + 1$. Pour tout $n \geq N$ et tout $u \in E$:

$$f_n(u) \geq \beta - \alpha.d(u, u_1) > -\infty. \spadesuit$$

3) Soient $u, v \in E$, et $n \geq N$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire.

$f_n(u) = \inf\{f(z) + n.d(u, z) \mid z \in E\}$ implique qu'il existe $z_\varepsilon \in E$ tel que :

$f(z_\varepsilon) + n.d(u, z_\varepsilon) < f_n(u) + \varepsilon$ [noter que $f(z_\varepsilon) \in \mathbb{R}$]. On peut donc écrire :

$$f_n(v) - f_n(u) \leq f(z_\varepsilon) + n.d(v, z_\varepsilon) - f(z_\varepsilon) - n.d(u, z_\varepsilon) + \varepsilon \\ \leq n[d(v, z_\varepsilon) - d(u, z_\varepsilon)] + \varepsilon \leq n.d(u, v) + \varepsilon,$$

en utilisant la seconde inégalité triangulaire.

Comme l'inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $f_n(v) - f_n(u) \leq n.d(u, v)$. En échangeant les rôles de u et v , on a aussi $f_n(u) - f_n(v) \leq n.d(u, v)$, d'où, finalement :

$$|f_n(u) - f_n(v)| \leq n.d(u, v). \spadesuit$$

4) Soit $u \in E$. $m \leq n \implies \forall z \in E : f(z) + m.d(u, z) \leq f(z) + n.d(u, z) \implies$

$$\inf_{z \in E}[f(z) + m.d(u, z)] \leq \inf_{z \in E}[f(z) + n.d(u, z)], \text{ soit : } f_m(u) \leq f_n(u).$$

$f_n(u) = \inf_{z \in E}[f(z) + n.d(u, z)] \leq f(u) + n.d(u, u) = f(u)$. Par conséquent la suite $(f_n(u))_n$, pour tout $u \in E$ fixé, est une suite croissante et majorée de nombres réels : elle est donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$, et on a :

$$g(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}, n \geq N} f_n(u) \leq f(u). \spadesuit$$

5) Le cas où $f(u) = -\infty$ est trivial. Assurons-nous que l'indication conduit bien au résultat voulu. Si $f(u) = +\infty$, on aura prouvé que pour tout entier p on a $f_n(u) \geq p$ pour tout n assez grand, et donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) = +\infty$. Si $f(u) \in \mathbb{R}$, on aura prouvé que pour tout $\varepsilon > 0$, en

prenant $\lambda = f(u) - \varepsilon$, on aura $f_n(u) \geq f(u) - \varepsilon$, pour tout n assez grand, soit ($\varepsilon > 0$ arbitraire) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) \geq f(u)$, et le résultat d'après 4).

Soit donc λ réel tel que $\lambda < f(u)$. Par (**) il existe $\rho > 0$ tel que : $\forall v \in B(u, \rho) : f(v) > \lambda$.

Ecrivons :

$$f_n(u) = \inf\{f(z) + n.d(u, z) \mid z \in E\} \\ = \min\{\inf\{f(z) + n.d(u, z) \mid z \in B(u, \rho)\}, \inf\{f(z) + n.d(u, z) \mid z \in E \setminus B(u, \rho)\}\}.$$

$\forall z \in B(u, \rho) : f(z) > \lambda \implies f(z) + n.d(u, z) > \lambda + n.d(u, z) \geq \lambda$ car $n.d(u, z) \geq 0$; donc : $\inf_{z \in B(u, \rho)}[f(z) + n.d(u, z)] \geq \lambda$.

Soit $z \in E \setminus B(u, \rho) : d(u, z) > \rho$.

$$f(z) + n.d(u, z) \geq -\alpha.d(z, u_1) + \beta + n.d(u, z) \text{ par (**)} \\ \geq -\alpha.d(z, u) - \alpha.d(u, u_1) + \beta + n.d(u, z) \\ \geq (n - \alpha).d(u, z) - \alpha.d(u, u_1) + \beta \\ > (n - \alpha).\rho - \alpha.d(u, u_1) + \beta \geq \lambda$$

La dernière inégalité étant valable si :

$$n\rho \geq \alpha\rho + \alpha.d(u, u_1) - \beta + \lambda \iff n \geq (1/\rho)[\alpha\rho + \alpha.d(u, u_1) - \beta + \lambda] = N_1.$$

Donc, pour tout $n \geq N_1 : \inf\{f(z) + n.d(u, z) \mid z \in E \setminus B(u, \rho)\} \geq \lambda$, et en définitive : $f_n(u) \geq \min\{\lambda, \lambda\} = \lambda$ pour tout $n \geq N_1$. \spadesuit

Remarques :

La fonction f_n s'appelle *régularisée de Hausdorff* de la fonction f . Il est intéressant de construire cette suite (f_n) de fonctions "régulières" (finies ; lipschitziennes donc "très" continues, cf. Chap. VII) qui converge simplement vers f . Si l'on remplace l'entier n par un réel $\nu \geq 0$, ce qui est loisible, on généralise l'exercice 2.6 (prolongez $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ par $+\infty$ sur $E \setminus A$).

Notons que les hypothèses faites sur f ne sont pas très restrictives : (*) dit que f n'est pas identique à $+\infty$; (**) dit que f est continue en un sens faible [elle est "semi-continue inférieurement"] ; enfin (***) affirme que f est un peu mieux que minorée (voir pour $E = \mathbb{R}$ ce que signifie la condition (dessin !)).

CHAPITRE II

NORMES et ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Introduction

Ce second chapitre, très important, est consacré à deux exemples particuliers mais tout à fait *fondamentaux* d'espaces métriques : les *espaces vectoriels normés* (en abrégé e.v.n.) et les *espaces préhilbertiens* qui sont des e.v.n. « spéciaux », très spéciaux même, mais aussi très importants.

Ne perdez jamais de vue qu'un e.v.n. est avant tout un *espace vectoriel* ! Alors qu'un espace métrique peut être un ensemble quelconque, sans aucune structure algébrique.

Les normes sont des objets plus agréables à manier que les distances, car ce sont des fonctions d'une seule variable, au lieu de deux pour les distances.

Comme pour le premier chapitre, il y a peu de démonstrations, et le cours est très facile à étudier. Les exemples classiques d'e.v.n. sont *à connaître* : si vous n'avez pas d'exemples précis à l'esprit, la suite du cours vous semblera abstraite, aride, sans grand intérêt . . .

Supporteriez-vous d'étudier en détail la classification de Linné sans connaître ni plante ni animal ?

Les notions introduites relatives à la convexité sont très importantes : elles reviendront constamment dans la suite du cours, et dans les cours de Maîtrise.

☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 2.1, 2.3, 2.4, **3.1** (première partie), 3.2, 5.2, 5.5, 6.2.

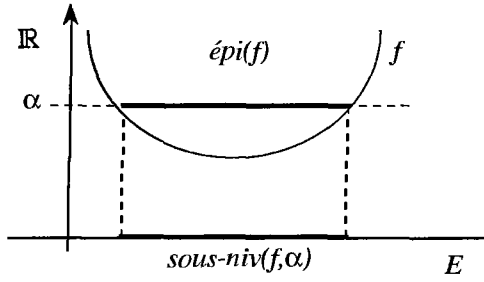
☞ Exercices complémentaires : 3.1 (seconde partie), 5.1, 5.3, 5.4, 5.6, 6.3.

La Lecture (caractérisation des espaces préhilbertiens parmi les e.v.n.) est particulièrement intéressante et instructive, mais elle n'est pas vraiment indispensable pour la suite.

Il y a un problème qui est consacré à la notion de *jauge de Minkowski* ou : « *comment fabrique-t-on les normes ?* ». Vous pouvez le commencer, quitte à attendre les chapitres V et VI pour le terminer.

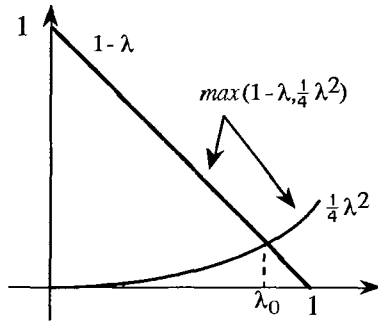
Rappelons que les étudiants qui ne disposent pas de beaucoup de temps, ainsi que les étudiants qui éprouvent de la difficulté à suivre, peuvent se limiter aux activités strictement indispensables : cela n'affecte en rien leurs chances à un examen de Licence.

BON COURAGE ET BON TRAVAIL !

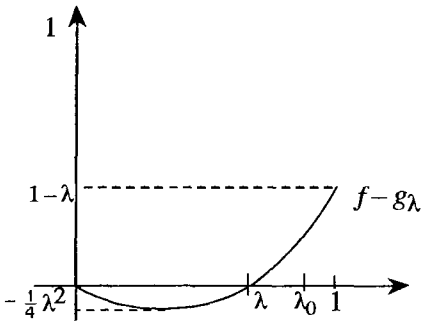


$$\text{sous-niv}(f, \alpha) = \text{proj}_E(\text{épi}(f) \cap (E \times \{\alpha\}))$$

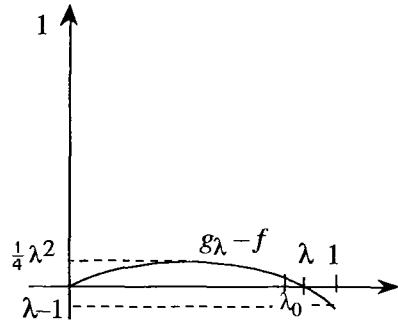
Exercice 6.1



Exercice 3.1



Cas $\lambda \leq \lambda_0$



Cas $\lambda \geq \lambda_0$

CHAPITRE II

NORMES ET ESPACES VECTORIELS NORMÉS

1. NORMES

Définition 1.1.

Soit E un *espace vectoriel* sur un corps \mathbb{K} qui sera soit le corps \mathbb{R} des nombres réels soit le corps \mathbb{C} des nombres complexes. Une **norme sur E** est une fonction $N : E \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur E à valeurs dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, vérifiant les cinq propriétés suivantes :

(1.1) $\forall u \in E : N(u) \geq 0$	[positivité]
(1.2) $N(0) = 0$	[nullité à l'origine de E]
(1.3) $N(u) = 0$ implique $u = 0$	[séparation]
(1.4) $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : N(\lambda u) = \lambda .N(u)$	[homogénéité]
(1.5) $\forall u \in E, \forall v \in E : N(u + v) \leq N(u) + N(v)$	[inégalité triangulaire ou inégalité de convexité]

Pour $u \in E$ donné, le nombre réel ≥ 0 , $N(u)$ est appelé **norme de u** .

(1.6) Notons que pour tout $u \in E$:

$$N(-u) = N[(-1).u] = |-1|.N(u) = 1.N(u) = N(u).$$

Commentaires :

1. Contrairement au chapitre I, E désigne ici un *espace vectoriel* (réel ou bien complexe), et non un ensemble quelconque !!! La notion de norme est beaucoup plus « spécialisée » que celle de distance.

2. La notion de norme généralise celle de *longueur* dans le plan et l'espace ordinaires érigés en espaces vectoriels par le choix d'axes de coordonnées.

3. Les seules difficultés de vérification des axiomes d'une norme sont (1.5), parfois très difficile à prouver, et (1.3) parfois non triviale. Ne pas oublier qu'une fonction $E \rightarrow \mathbb{R}$ candidate à être une norme doit en premier lieu être à valeurs réelles, en particulier ne pas prendre la « valeur » $+\infty$! Si l'on autorise N à ne pas vérifier (1.3), on obtient la notion plus générale, mais aussi plus difficile à manipuler, de *semi-norme*.

4. Dans (1.4), $|\lambda|$ désigne la valeur absolue de λ [$|\lambda| = \max\{-\lambda, +\lambda\}$] si le corps des scalaires de E est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et, si le corps des scalaires de E est $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $|\lambda|$ désigne le module de λ [si $\lambda = \alpha + i\beta$ avec α, β réels on a : $|\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$].

Question de notation :

Le plus souvent, on ne note pas une norme avec une lettre, ici N , mais plutôt avec un signe rappelant la valeur absolue et le module : en général $\|u\|$, parfois simplement $|u|$ dans certains livres. Nous utiliserons dorénavant $\|\cdot\|$. Si l'on en a besoin on introduira $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3, \dots, [(\cdot)], ((\cdot))$, etc.

Définition 1.2. : Distance associée à une norme

Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{K} , et soit $\|\cdot\|$ une norme sur E . On associe à cette norme, de manière naturelle, une distance d sur E par la formule :

$$(1.7) \quad \boxed{\forall u \in E, \forall v \in E : d(u, v) := \|u - v\|}$$

Cette distance est dite *associée à la norme* $\|\cdot\|$. Sauf indication contraire, lorsqu'on parle de distance pour un espace vectoriel muni d'une norme, c'est de cette distance dont il s'agit.

Vérification :

d est bien une fonction positive de $E \times E$ dans \mathbb{R} .

$d(u, u) = \|u - u\| = \|0\| = 0$, et $d(u, v) = 0 \Rightarrow \|u - v\| = 0 \Rightarrow u - v = 0$ (par (1.3)) $\Rightarrow u = v$.

$d(v, u) = \|v - u\| = \|u - v\| = d(u, v)$ par (1.6).

$$d(u, v) = \|u - v\| = \|u - w + w - v\| = \|(u - w) + (w - v)\| \\ \leq \|u - w\| + \|w - v\| = d(u, w) + d(w, v).$$

d est effectivement une distance sur E . ♦

Remarquons que la distance associée à une norme vérifie des propriétés particulières que n'a aucune raison de posséder une distance quelconque sur E (penser à la distance discrète !). En effet :

$$(1.8) \quad \forall u \in E, \forall v \in E, \forall w \in E : d(u + w, v + w) = \|u + w - (v + w)\| \\ = \|u - v\| = d(u, v) \text{ [invariance de } d \text{ par translation]}$$

$$(1.9) \quad \forall u \in E, \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : d(\lambda u, \lambda v) = \|\lambda u - \lambda v\| = |\lambda| \cdot \|u - v\| \\ = |\lambda| \cdot d(u, v) \text{ [homogénéité de } d]$$

☞ **Exercice 1.1.** (très facile) Démontrez, réciproquement, que si une distance d sur un espace vectoriel E (*a priori* sans norme) vérifie (1.8) et (1.9), il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que d est la distance associée [au sens de la définition 1.2] à cette norme.

Propriétés importantes d'une norme

$$(1.10) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : \boxed{\|u - v\| \geq \left| \|u\| - \|v\| \right|} \text{ [seconde inégalité triangulaire]}$$

$$(1.11) \quad \forall u_1 \in E, \dots, \forall u_n \in E, \forall \lambda_1 \in \mathbb{K}, \dots, \forall \lambda_n \in \mathbb{K} :$$

$$\boxed{\left\| \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\lambda_i| \cdot \|u_i\|} \text{ [inégalité triangulaire généralisée]}$$

Démonstrations :

(1.10) Remarquons que $\|u\| = d(0, u)$. La formule (1.6) du Chapitre I nous permet d'écrire, en faisant $w = 0$: $d(u, v) \geq |d(0, u) - d(0, v)|$, ce qui est le résultat voulu.

(1.11) On procède par récurrence en utilisant (1.4) et (1.5). ♦

☞ Grâce à la notion de distance associée, les normes nous fournissent autant d'exemples de distances, avec l'avantage d'une plus grande simplicité d'écriture : une seule variable au lieu de deux.

2. ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Définition 2.1.

Un **espace vectoriel normé** réel [resp. complexe] est un couple constitué par un espace vectoriel E réel [complexe] et par une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel E .

On abrégera souvent espace vectoriel normé en e.v.n. Un e.v.n. sera noté $(E, \|\cdot\|)$, ou $E_{\|\cdot\|}$.

Il ne faut pas qu'il y ait la moindre ambiguïté sur le corps des scalaires de E ; si l'on ne précise pas le corps, cela signifie que les résultats concernent aussi bien un e.v.n. réel qu'un e.v.n. complexe.

Terminologie :

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. et soit F un sous-espace vectoriel de E . La restriction $\|\cdot\|_F$ de la norme $\|\cdot\|$ à F est une norme sur F . Le couple $(F, \|\cdot\|_F)$ est appelé *sous-espace vectoriel normé* (en abrégé : sous-e.v.n.) de $(E, \|\cdot\|)$.

Remarquons que la distance associée à $\|\cdot\|_F$ est la restriction à F de la distance associée à $\|\cdot\|$, et donc qu'un sous-e.v.n. est en particulier un sous-espace métrique.

Définition 2.2.

Deux normes sur un même espace vectoriel E seront dites *équivalentes* si les distances associées sont équivalentes. Soit : $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes ssi il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que :

$$(2.1) \quad \boxed{\forall u \in E : c \cdot \|u\| \leq \|u\|' \leq C \cdot \|u\|}$$

Opérations sur les parties non vides d'un espace vectoriel

Notons ici que les boules et sphères dans les e.v.n. possèdent la propriété de se ramener simplement aux boules et sphères centrées à l'origine et de rayon 1. De manière précise, si A et B sont des parties non vides d'un e.v.n. E sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et si $\lambda \in \mathbb{K}$, on note :

$$(2.2) \quad \boxed{A + B = \{a + b / a \in A, b \in B\}} \text{ et : } \boxed{\lambda A = \{\lambda a / a \in A\}}$$

Si $A = \{a\}$, on note $a + B$ plutôt que $\{a\} + B$. Avec ces notations :

$$(2.3) \quad B(u, \rho[= u + \rho B(0, 1[.$$

De même pour $B(u, \rho]$ et pour $S(u, \rho)$.

Les opérations introduites (appelées parfois *opérations de Minkowski*) ne munissent pas l'ensemble des parties non vides de E d'une structure algébrique intéressante. En particulier $A + (-A) \neq \{0\}$ (Exemple ?).

☞ **Exercice 2.1.** (très facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel ou complexe, et soient u, v dans E vérifiant $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$. Démontrez que pour tous α, β réels ≥ 0 on a : $\|\alpha \cdot u + \beta \cdot v\| = \alpha \cdot \|u\| + \beta \cdot \|v\|$.

☞ **Exercice 2.2.** (très facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , soient u, v dans E , et soit $\rho \in \mathbb{R}$. Démontrez que : $\lim_{n \rightarrow \infty} [\|(n + \rho) \cdot u + v\| - \|n \cdot u + v\|] = \rho \|u\|$.

☞ **Exercice 2.3.** (difficile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. réel ou complexe. Démontrez que pour tous u, v non nuls de E on a les inégalités suivantes :

$$(1) \quad \|u - v\| \geq \frac{1}{2} \max\{\|u\|, \|v\|\} \cdot \left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\|,$$

$$(2) \quad \|u - v\| \geq \frac{1}{4} (\|u\| + \|v\|) \cdot \left\| \frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|} \right\|.$$

Démontrez que la constante $\frac{1}{2}$ dans (1) ne peut pas être remplacée par une plus grande constante. De même pour $\frac{1}{4}$ dans (2).

☞ **Exercice 2.4.** (assez facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Démontrez que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$(1) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : [u \neq v \text{ et } \|u\| = \|v\| = 1] \implies \|u + v\| < 2,$$

$$(2) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : [v \neq 0 \text{ et } \|u + v\| = \|u\| + \|v\|] \implies u = \lambda \cdot v \text{ avec } \lambda \text{ réel positif ou nul.}$$

Remarque : Un e.v.n. peut posséder les propriétés (1) \iff (2) ou bien ne pas les posséder ; dans le premier cas, on dit que E est *strictement convexe*.

3. EXEMPLES D'ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Exemple 3.1. $E = \mathbb{R}^n$. Dans le chapitre I, \mathbb{R}^n était considéré comme un simple ensemble : ici nous le considérerons comme un espace vectoriel réel.

• $n = 1$. Soit $\|\cdot\|$ une norme arbitraire sur \mathbb{R} : $\|\xi\| = \|\xi \cdot 1\| = |\xi| \cdot \|1\|$ (d'après (1.4)). Donc les seules normes possibles sur \mathbb{R} sont toutes de la forme $\xi \mapsto \alpha \cdot |\xi|$ où α est un réel > 0 quelconque. Toutes ces normes sont bien sûr équivalentes. La norme usuelle de \mathbb{R} sera la valeur absolue ($\alpha = 1$). De la même façon, toutes les normes sur \mathbb{C} considéré comme espace vectoriel sur \mathbb{C} (et non sur \mathbb{R} !) sont de la forme $z \mapsto \alpha \cdot |z|$, où α est un réel > 0 , et où $|\cdot|$ désigne le module. Celui-ci sera la norme usuelle de \mathbb{C} .

Nota :

La forme particulière des normes sur \mathbb{R} provient du fait qu'on a imposé à $|\cdot|$ de la définition (1.1) d'être la valeur absolue dans le cas d'un espace vectoriel réel. On pourrait généraliser en disant que $|\cdot|$ doit être simplement une norme sur \mathbb{R} vérifiant la propriété multiplicative $|\xi \cdot \eta| = |\xi| \cdot |\eta|$. Il existe effectivement sur \mathbb{R} des normes multiplicatives (on dit des *valuations*) autres que la valeur absolue. Nous ne considérerons pas ici une telle généralisation.

• $n \geq 2$. Soient maintenant n espaces vectoriels normés $(E_i, \|\cdot\|_i)$ sur le même corps \mathbb{K} . On peut considérer le produit cartésien $E = \prod_{1 \leq i \leq n} E_i$ comme un espace vectoriel

sur \mathbb{K} avec les opérations usuelles :

$$\forall u = (u_1, \dots, u_n) \in E, \forall v = (v_1, \dots, v_n) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} :$$

$$u + v = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n), \lambda u = (\lambda u_1, \dots, \lambda u_n).$$

Soit d_i la distance associée (Déf.1.2) à la norme $\|\cdot\|_i$ de E_i . Sur E on peut placer une des distances de Hölder δ_p , $1 \leq p \leq \infty$, introduites dans le Chapitre I [formules (2.3,4,5,6)]. Ces distances sont associées, voir Exercice 1.1, à des normes sur E que nous noterons naturellement $\|\cdot\|_p$.

Application : On considère $E = \mathbb{R}^n$ comme l'espace vectoriel produit :

$E = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, n fois, chaque exemplaire de \mathbb{R} étant muni de la norme usuelle, *i.e.* la valeur absolue. On obtient grâce à ce qui précède les normes höldériennes sur \mathbb{R}^n :

Pour tout $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(3.1) \quad \text{pour tout } p \text{ réel } \geq 1 : \boxed{\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^p \right)^{1/p}} \text{ et : } \boxed{\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|}$$

On sait, d'après les résultats du Chap. I que ces normes sont toutes *équivalentes*. Pour $E = \mathbb{C}^n$ espace vectoriel sur \mathbb{C} on a les mêmes normes en remplaçant les valeurs absolues par les modules.

☞ **Exercice** (très facile, sans solution) Dessinez les sphères unité correspondantes aux normes suivantes sur \mathbb{R}^2 :

$$u \mapsto \|u\|_1 + \|u\|_\infty, u \mapsto \|u\|_1 + \|u\|_2, u \mapsto \|u\|_2 + \|u\|_\infty.$$

Pendant que nous sommes dans les espaces de dimension finie, imaginons des normes possibles sur l'espace vectoriel réel E des matrices $a = (\alpha_{i,j})$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, réelles (par exemple). i est l'indice de ligne, j celui de colonne. Une idée consiste à considérer l'espace des matrices comme un produit $\mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m$ (n fois) ou bien $\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ (m fois), c'est-à-dire à considérer les colonnes ou bien les lignes comme des vecteurs. On norme ces vecteurs, obtenant ainsi une ligne ou une colonne de réels positifs ou nuls et on norme les vecteurs particuliers obtenus. Par exemple, on pourra prendre :

$$\|a\|_{\infty,1} = \|(\alpha_{i,j})\|_{\infty,1} = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{1 \leq i \leq m} |\alpha_{i,j}| \right), \text{ ou bien :}$$

$$\|a\|_{1,\infty} = \sum_{1 \leq j \leq n} \left[\max_{1 \leq i \leq m} |\alpha_{i,j}| \right], \text{ ou bien encore :}$$

$$\|a\|_{2,2} = \left[\sum_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} |\alpha_{i,j}|^2 \right) \right]^{1/2} = \sqrt{\text{tr}({}^t a \cdot a)}, \text{ où tr est la trace (somme des éléments diagonaux d'une matrice carrée) et } {}^t a \text{ est la transposée de } a \text{ (si } a = (\alpha_{i,j}), {}^t a = (\beta_{k,l}) \text{ avec } \beta_{k,l} = \alpha_{l,k}).$$

Remarque :

Il serait agréable d'avoir pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité : $\|a \cdot x\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|a\| \cdot \|x\|_{\mathbb{R}^n}$, ce qui ne peut pas résulter d'un choix au hasard de $\|a\| \dots$ Nous étudierons cette question dans le Chap. X.

Exemple 3.2. Soit $E = C([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel de toutes les fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[a, b]$ ($a < b$). Les fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \|f\|$ suivantes :

$$(3.2) \quad \|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt,$$

$$(3.3) \quad \|f\|_2 := \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt \right)^{1/2},$$

$$(3.4) \quad \|f\|_\infty := \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| = \max\{|f(t)| / t \in [a, b]\},$$

définissent trois normes usuelles sur E appelées respectivement : **norme de la moyenne**, **norme de la moyenne quadratique**, **norme uniforme**.

☞ **Exercice 3.1.** (assez facile) Démontrez qu'on a effectivement des normes. Attention à l'axiome (1.3) pour les deux premières : il demande une démonstration soignée.

On prend, $a = 0, b = 1$, et on considère les fonctions $f, g_\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto f(t) = t^2, t \mapsto g_\lambda(t) = \lambda t$, où $\lambda \in [0, 1]$. Déterminez λ de façon à ce que $\|f - g_\lambda\|_1$ (resp. $\|f - g_\lambda\|_2, \|f - g_\lambda\|_\infty$) soit *minimum* ; calculez ce *minimum*.

☞ **Exercice 3.2.** (assez facile) Démontrez qu'il existe c et C réels > 0 tels que :

$$\forall f \in E : \|f\|_1 \leq c \cdot \|f\|_2 \leq C \cdot \|f\|_\infty$$

mais qu'aucune de ces trois normes n'est équivalente à l'une des deux autres.

Remarque : On peut, pour tout réel $p \geq 1$, définir $\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p \right)^{1/p}$; c'est une norme sur E : la démonstration est à calquer, *mutatis mutandis*, sur l'exercice 2.3 du Chap.I. $\|\cdot\|_p$ n'est pas équivalente à $\|\cdot\|_q$ si $p \neq q$.

☞ **Exercice 3.3.** (assez facile) Démontrez que :

$$\forall f \in E : \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

4. EXEMPLES CLASSIQUES D'ESPACES VECTORIELS NORMÉS

(ou : e.v.n. dits "classiques")

Exemple 4.1. Soit A un ensemble et soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

On note $\mathcal{B}(A, E)$ l'espace vectoriel sur \mathbb{K} de toutes les applications $f : A \rightarrow E$ qui sont *bornées* (c'est-à-dire qui sont bornées pour la distance associée à $\|\cdot\|$) :

$$f : A \rightarrow E \text{ appartient à } \mathcal{B}(A, E) \iff \sup_{a \in A} \|f(a)\| < \infty.$$

$$(4.1) \quad \|f\|_\infty = \sup_{a \in A} \|f(a)\| \text{ définit une norme sur } \mathcal{B}(A, E) \text{ appelée } \textit{norme uniforme}.$$

La distance associée est la distance uniforme du Chap. I, voir I (3.22).

Vérifiez tout ce qui doit l'être.

Exemple 4.2. Si l'on prend, en particulier, $A = \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{K}$ (avec la norme usuelle, i.e. la valeur absolue ou le module), on obtient l'e.v.n., noté (classique) ℓ^∞ , des suites bornées. On note $\ell^\infty(\mathbb{K})$ ou $\ell_{\mathbb{K}}^\infty$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si l'on doit préciser.

$$(4.2) \quad \forall x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) : \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|.$$

Nota : Le sup ne peut pas être remplacé par un max !

Exemple 4.3. Un sous-espace vectoriel important de ℓ^∞ est celui des suites convergentes qu'on note (classique) $c = c(\mathbb{K})$ ou $c_{\mathbb{K}}$. $(c, \|\cdot\|_\infty)$ est un sous-espace vectoriel normé de ℓ^∞ . Le sup de la norme ne peut pas être remplacé par un max : pensez à la suite $(1 - \frac{1}{n})$.

Exemple 4.4. c contient à son tour un sous-espace vectoriel normé important, celui des suites convergentes de limite 0, on le note c_0 . Pour $x \in c_0$, on a : $\|x\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|$.

Pourquoi peut-on prendre max ici ?

Exemple 4.5. Enfin, on notera c_{00} le sous-espace vectoriel normé de c_0 constitué par les suites de terme général nul à partir d'un certain rang.

Remarque : Si e désigne la suite $e = (1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$, convergente de limite 1 bien sûr, on a :

$$(4.3) \quad \boxed{c = c_0 \oplus [e]}, \text{ somme directe algébrique, où } [e] \text{ est le sous-espace vectoriel engendré par } e.$$

Exemple 4.6. On notera $\ell^p(\mathbb{K})$, ou $\ell_{\mathbb{K}}^p$, ou ℓ^p , pour tout p réel ≥ 1 , l'ensemble des suites $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ d'éléments de \mathbb{K} vérifiant :

$$(4.4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty \quad (\text{puissance } p\text{-ième sommable}).$$

ℓ^p est un espace vectoriel sur \mathbb{K} , on le munit de la norme suivante :

$$(4.5) \quad \boxed{\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p}}.$$

La démonstration du fait que ℓ^p est bien un espace vectoriel et du fait que $\|\cdot\|_p$ est effectivement une norme sur ℓ^p se fait exactement, *mutatis mutandis*, comme dans le Chap. I, Exercice 2.3.

Jusqu'ici nous avons mis toutes les normes höldériennes sur un même espace : \mathbb{R}^n , $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Il faut prendre garde ! $\|\cdot\|_p$ est mise sur ℓ^p mais pas sur ℓ^q avec $p \neq q$!

On a, de manière précise, pour $1 \leq p < q \leq \infty$: ℓ^p est un sous-espace vrai (i.e. non égal) de ℓ^q , et pour tout $u \in \ell^p$ on a $\|u\|_q \leq \|u\|_p$.

En effet, soit s tel que $p < s < q$: la suite $u = (\xi_n)$ où $\xi_n = n^{-1/s}$ vérifie $u \in \ell^q$ et $u \notin \ell^p$ (contrôlez !).

A présent, si $u \in S_p(0, 1)$, i.e. si $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p = 1$, on a $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^q \leq 1$ pour $p < q < \infty$, et $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} |\xi_n| \leq 1$ pour $q = \infty$: soit $\|u\|_q \leq \|u\|_p$, et le résultat vaut pour tous les $u \in \ell^p$ par homogénéité.

5. PRODUITS SCALAIRES ET ESPACES PRÉHILBERTIENS

☞ Ici nous allons être contraints de distinguer le cas réel et le cas complexe : les deux cas présentent des particularités importantes.

1. CAS DES ESPACES VECTORIELS RÉELS

Définition 5.1.

Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

Un **produit scalaire** sur E est une fonction $f : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, définie sur le produit cartésien $E \times E$ à valeurs dans l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels, vérifiant les cinq propriétés suivantes :

- (5.1) $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall w \in E : f(u + v, w) = f(u, w) + f(v, w)$
[additivité par rapport à la première variable, la seconde étant fixée, quelconque],
- (5.2) $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda u, v) = \lambda \cdot f(u, v)$
[homogénéité par rapport à la première variable, la seconde étant fixée, quelconque],
- (5.3) $\forall u \in E, \forall v \in E : f(v, u) = f(u, v)$ [symétrie],
- (5.4) $\forall u \in E : f(u, u) \geq 0$ [positivité],
- (5.5) $f(u, u) = 0 \implies u = 0$
[séparation, mais on dit plutôt que f est définie].

Pour $u \in E, v \in E$ donnés le nombre réel ($> 0, < 0$, ou $= 0$) $f(u, v)$ s'appelle le **produit scalaire de u et v** (ou bien de u par v).

Commentaires :

$f(u, v + w) = f(v + w, u) = f(v, u) + f(w, u) = f(u, v) + f(u, w)$, en utilisant (5.3) puis (5.1) puis à nouveau (5.3).

De même, $f(u, \lambda v) = f(\lambda v, u) = \lambda \cdot f(v, u) = \lambda \cdot f(u, v)$, en utilisant (5.3) puis (5.2) puis (5.3). Donc f est *linéaire* par rapport à sa *première* [resp. à sa seconde] *variable* quand on fixe arbitrairement sa seconde [resp. sa première] variable.

Rappelons qu'une telle fonction de deux variables est dite *bilinéaire*. Une application bilinéaire à valeurs dans le corps des scalaires est appelée une *forme bilinéaire*.

Attention : f bilinéaire sur E n'implique pas que f est linéaire sur le produit $E \times E$! Et f linéaire sur $E \times E$ n'implique pas f bilinéaire ! Trouvez des contre-exemples.

En définitive, **un produit scalaire sur E réel est une forme bilinéaire symétrique et définie positive.**

Notation :

Plutôt que de noter un produit scalaire par une lettre (f jusqu'ici) on utilise en général la notation $(u|v)$. S'il y a plusieurs produits scalaires en jeu, on introduit $[u|v]$, ou $\langle u|v \rangle$, etc.

☞ « Simplifier » $(u|v)$ en $u|v$ est source d'erreurs, et en outre est très peu apprécié par les correcteurs ...

Définition 5.2.

Soit E un espace vectoriel réel et soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E . On associe au produit scalaire une norme (dite *associée*) en posant :

$$(5.6) \quad \forall u \in E : \|u\| = \sqrt{(u|u)} = [(u|u)]^{1/2}$$

La très importante inégalité de Cauchy-Schwarz ⁽¹⁾

Soit $g : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique positive, i.e. vérifiant (5.1,2,3,4), mais pas nécessairement (5.5). On a :

$$(5.7) \quad \boxed{\forall u \in E, \forall v \in E : |g(u, v)| \leq \sqrt{g(u, u)} \cdot \sqrt{g(v, v)}}.$$

Si g est un produit scalaire $(\cdot | \cdot)$, en termes de norme associée :

$$(5.8) \quad \boxed{\forall u \in E, \forall v \in E : |(u|v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \text{ ou } [(u|v)]^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2}.$$

☞ De plus (pour $u \neq 0$) on a, dans ce cas, l'égalité $|(u|v)| = \|u\| \cdot \|v\|$ si et seulement s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $v = \mu u$, et : $\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \iff v = \alpha u$ où α est un réel ≥ 0 (pour $u = 0$, le problème est banal).

Démonstrations :

$$\forall u \in E, \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : g(u + \lambda v, u + \lambda v) \geq 0 \text{ par (5.4).}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part : } g(u + \lambda v, u + \lambda v) &= g(u, u) + g(\lambda v, u) + g(u, \lambda v) + g(\lambda u, \lambda v) \\ &= g(u, u) + 2\lambda \cdot g(u, v) + \lambda^2 \cdot g(v, v), \end{aligned}$$

en utilisant (5.1) (5.2) et les Commentaires ci-dessus.

Si $g(v, v) = 0$, on a : $g(u, u) + 2\lambda \cdot g(u, v) \geq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, ce qui implique $g(u, v) = 0$ [faire tendre λ vers $\pm\infty$], et donc (5.7) est vérifiée.

Si $g(v, v) \neq 0$, faisons $\lambda = -\frac{g(u, v)}{g(v, v)} : g(u, u) - 2\frac{g(u, v)}{g(v, v)}g(u, v) + \left(\frac{g(u, v)}{g(v, v)}\right)^2 g(v, v) \geq 0$,
soit : $g(u, u) - 2\frac{[g(u, v)]^2}{g(v, v)} + \frac{[g(u, v)]^2}{g(v, v)} = g(u, u) - \frac{[g(u, v)]^2}{g(v, v)} \geq 0$, i.e. (5.7). ♦

Si g est un produit scalaire, par définition de la norme associée, (5.7) donne (5.8). ♦

Si g est un produit scalaire et si on a l'égalité dans (5.7), on a – en remontant les calculs ci-dessus : $g(u + \lambda v, u + \lambda v) = 0 = \|u + \lambda v\|^2 = 0$, d'où, par (5.5) : $u + \lambda v = 0$, et le résultat en prenant $\mu = -1/\lambda$ ($\lambda = 0$ donnerait le cas trivial $u = 0$ qui a été exclu).

Réciproquement, si $v = \mu u$, $\mu \in \mathbb{R}$, on a bien égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ♦

Nous pouvons maintenant prouver que la « norme associée » est effectivement une norme. $u \mapsto \|u\| = \sqrt{(u|u)}$ possède trivialement les propriétés d'une norme, mise à part l'inégalité triangulaire, mais :

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u|u) + 2(u|v) + (v|v) = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 \\ &\leq \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2 = [\|u\| + \|v\|]^2, \text{ où } \leq \text{ provient de l'inégalité} \\ &\text{de Cauchy-Schwarz.} \end{aligned}$$

D'où $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Notons que (5.5) n'est pas intervenu, et donc que :

$$\sqrt{g(u + v, u + v)} \leq \sqrt{g(u, u)} + \sqrt{g(v, v)}$$

pour toute forme bilinéaire symétrique positive. ♦

Il est intéressant de préciser le cas d'égalité dans cette inégalité :

$$\begin{aligned} \|u + v\| = \|u\| + \|v\| &\iff \|u + v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2 \\ &\iff \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2 = \|u\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| + \|v\|^2, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Ne pas confondre le mathématicien allemand Hermann Schwarz et le mathématicien français Laurent Schwartz. L'inégalité de C.-S. est appelée inégalité de Buniakowski par les russes.

d'où $(u|v) = \|u\| \cdot \|v\|$ qui est le cas d'égalité de l'inégalité de C.-S. Donc on doit avoir $v = \lambda u, \lambda \in \mathbb{R}$. On doit donc avoir : $\|u + \lambda u\| = \|u\| + \|\lambda u\|$, soit : $|1 + \lambda| \cdot \|u\| = (1 + |\lambda|) \cdot \|u\|$. Le cas trivial $u = 0$ ayant été écarté, on doit avoir $|1 + \lambda| = 1 + |\lambda|$, ce qui ne peut avoir lieu que si $\lambda \geq 0$ (vérifiez !). La réciproque est évidente. ♦

☞ **Exercice 5.1.** (facile) Montrez par un exemple que l'équivalence ci-dessus est fautive dans un e.v.n. dont la norme n'est pas associée à un produit scalaire.

Identités remarquables

Soit E un espace vectoriel réel et soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E . Soit $\|\cdot\|$ la norme associée. On a les trois formules suivantes, d'utilisation très fréquente :

$$\left\{ \begin{array}{l} (5.9.1) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2. \\ \hspace{15em} \text{[identité du parallélogramme]} \\ (5.9.2) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : (u|v) = \frac{1}{4} [\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2]. \\ \hspace{15em} \text{[identité de polarisation]} \\ (5.10) \quad \forall u, a, b \in E : 2\|u - a\|^2 + 2\|u - b\|^2 = 4\|u - \frac{1}{2}(a + b)\|^2 + \|a - b\|^2. \\ \hspace{15em} \text{[identité de la médiane]} \end{array} \right.$$

Démonstrations :

(5.9) $\|u \pm v\|^2 = \|u\|^2 \pm 2(u|v) + \|v\|^2$, et on ajoute (resp. soustrait) membre à membre. ♦

(5.10) Dans (5.9) on change $u + v$ en $u - a$ et $u - v$ en $u - b$. ♦

Justifiez en termes de géométrie élémentaire le nom de ces identités. Démontrez que dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ les formules (5.9.1) et (5.10) sont fausses.

Définition 5.3.

On appelle **espace préhilbertien réel** le couple constitué par un espace vectoriel réel E et par un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur E . On le notera $(E, (\cdot|\cdot))$.

Les espaces préhilbertiens de dimension finie sont, c'est de beaucoup préférable, appelés **espaces euclidiens**.

Remarque : Le terme « préhilbertien » a été forgé d'après le nom du très grand mathématicien allemand David Hilbert. Les anglo-saxons parlent « d'espace à produit scalaire », ce qui n'est pas plus mal ...

Exemples d'espaces préhilbertiens réels

Exemple 5.1. \mathbb{R}^n muni du produit scalaire : $x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n) : (x|y) = \xi_1 \cdot \eta_1 + \dots + \xi_n \cdot \eta_n$ est un espace préhilbertien, la norme associée est la norme euclidienne.

Exemple 5.2. Nous avons déjà introduit l'e.v.n. ℓ^2 des suites de réels de carré sommable, i.e. vérifiant : $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty$, que nous avons normé naturellement par :

$$\|x\|_2 = \|(\xi_n)\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 \right)^{1/2}$$

ℓ^2 est un espace préhilbertien pour le produit scalaire : $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot \eta_n$. La norme associée à ce produit scalaire est $\|\cdot\|_2$.

Exemple 5.3. Nous avons aussi déjà introduit l'e.v.n. $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme quadratique $\|f\|_2 = \left(\int_a^b [f(t)]^2 dt \right)^{1/2}$. On peut le noter $\mathcal{C}_2([a, b], \mathbb{R})$. C'est un espace préhilbertien pour le produit scalaire : $(f|g) = \int_a^b f(t).g(t) dt$ dont la norme associée est $\|\cdot\|_2$ [voir Exemple 3.2 et Exercice 3.1].

Exemple 5.4. Soit $E = \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[a, b]$ et dérivables à dérivée continue sur $[a, b]$ (en a et b on a une dérivée à droite et à gauche respectivement). E est un espace vectoriel réel ; c'est un espace préhilbertien pour le produit scalaire suivant :

$$(f|g) = \int_a^b f(t).g(t) dt + \int_a^b f'(t).g'(t) dt.$$

☞ **Exercice 5.2.** Vérifiez tout ce qui doit l'être dans les trois exemples ci-dessus.

✦ ☞ **Exercice 5.3.** On considère l'espace vectoriel réel $E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ des matrices à m lignes et à n colonnes, à coefficients réels.

Pour $a \in E, b \in E$, on pose $(a|b) = \text{tr}({}^t a.b)$. Voir Exemple 3.1 *in fine* pour les notations. Démontrez qu'on définit ainsi un produit scalaire sur E . On note $\|\cdot\|$ la norme associée ; vérifiez que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a l'inégalité : $\|a.x\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|a\|.\|x\|_{\mathbb{R}^n}$, \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n étant munis de la norme euclidienne.

2. CAS DES ESPACES VECTORIELS COMPLEXES

Définition 5.4.

Soit E un espace vectoriel *complexe*. On appelle **produit scalaire** sur E (on précise parfois : produit scalaire **hermitien**) une fonction $h : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ qui possède les propriétés suivantes :

(5.11) $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall w \in E : h(u+v, w) = h(u, w) + h(v, w)$	[additivité par rapport à la première variable],
(5.12) $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} : h(\lambda u, v) = \lambda.h(u, v)$	[homogénéité par rapport à la première variable],
(5.13) $\forall u \in E, \forall v \in E : h(v, u) = \text{conjugué complexe de } h(u, v) = \overline{h(u, v)}$	[symétrie hermitienne],
(5.14) $\forall u \in E : h(u, u) \geq 0$	[positivité],
(5.15) $h(u, u) = 0 \implies u = 0$	[non dégénérescence].

Commentaires :

$\forall u, v, w \in E : h(u, v+w) = \overline{h(v+w, u)}$ [par (5.13)] = $\overline{h(v, u) + h(w, u)}$ [par (5.11)] = $\overline{h(v, u)} + \overline{h(w, u)}$ [par additivité du conjugué] = $h(u, v) + h(u, w)$ [par (5.13)].

Donc h est additive par rapport à la seconde variable.

$\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C} :$

$$h(u, \lambda v) = \overline{h(\lambda v, u)} = \overline{\lambda.h(v, u)} = \overline{\lambda}.\overline{h(v, u)} = \overline{\lambda}.h(u, v).$$

Donc h n'est pas homogène par rapport à la seconde variable, elle est « anti-homogène ».

On dit que h est une forme *sesquilinéaire* (*sesqui* = un et demi).

Le couple constitué par un espace vectoriel complexe et par un produit scalaire hermitien s'appelle un **espace préhilbertien complexe**.

Remarque : si h était supposée homogène par rapport aux deux variables, pour $u \in E$, tel que $h(u, u) > 0$, on aurait : $h(i.u, i.u) = i.i.h(u, u) = -h(u, u) < 0$. Il serait difficile de faire de $v \mapsto \sqrt{h(v, v)}$ une norme !

Vous pourrez démontrer à titre d'exercice que l'inégalité de C.-S. est valide pour les espaces préhilbertiens complexes, ainsi que la notion de norme associée.

Pour une bonne part, la théorie des espaces préhilbertiens complexes se développe comme la théorie des espaces réels : il suffit de distribuer judicieusement des barres de conjugaison, des Ré, des Im, là où ils sont nécessaires. Mais il arrive que les deux théories divergent notablement. La théorie complexe est indispensable pour certaines questions : la théorie spectrale, par exemple, comme en dimension finie.

Ici nous ne traiterons que des espaces préhilbertiens réels, cela pour ne pas additionner les difficultés.

☞ Dans ce qui suit nous revenons donc aux espaces préhilbertiens réels.

Orthogonalité

Définition 5.5.

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. On dit que deux vecteurs u et v sont **orthogonaux** si $(u|v) = 0$, ce qu'on notera $u \perp v$.

Cette relation est bien sûr *symétrique*.

Le vecteur nul, 0, est orthogonal à tous les vecteurs de E , y compris à lui-même. C'est le seul vecteur qui possède cette propriété, car si $u \neq 0$ on a $(u|u) = \|u\|^2 \neq 0$.

La relation \perp n'est ni réflexive ni transitive.

On dit que deux parties $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$ de E sont **orthogonales** si :

$$(5.16) \quad \forall a \in A, \forall b \in B : a \perp b, \text{ i.e. } (a|b) = 0.$$

Attention :

Deux sous-espaces vectoriels orthogonaux n'ont que 0 en commun, car si u appartient à leur intersection on doit avoir $u \perp u$, d'où $u = 0$. Il ne faut pas confondre cette notion avec la notion de géométrie élémentaire de *plans perpendiculaires* dits aussi, malencontreusement, orthogonaux.

Théorème de Pythagore (« Pont aux ânes » généralisé)

$$(5.17) \quad \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \text{ si et seulement si : } u \text{ est orthogonal à } v.$$

En effet, $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2$.

Si u_1, \dots, u_n sont n vecteurs orthogonaux deux à deux, on a :

$$(5.18) \quad \left\| \sum_{i=1}^n u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|u_i\|^2 \quad (\text{par récurrence}).$$

☞ **Exercice 5.4.** (facile) Démontrez que $u \perp v \iff \forall \lambda \in \mathbb{R} : \|u\| \leq \|u + \lambda v\|$.

Nota : Cette équivalence peut permettre de définir $u \perp v$ dans tout e.v.n, mais cette relation \perp généralisée n'est pas symétrique, ce qui en limite l'intérêt.

☞ **Exercice 5.5.** (difficulté moyenne) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Démontrez que pour tous $u \in E, v \in E$ non nuls on a l'identité :

$$\left\| \frac{u}{\|u\|^2} - \frac{v}{\|v\|^2} \right\| = \frac{\|u - v\|}{\|u\|^2 \cdot \|v\|^2}.$$

Déduisez-en que, pour tous u, v, w de E , on a : $\|u\| \cdot \|v - w\| \leq \|v\| \cdot \|w - u\| + \|w\| \cdot \|u - v\|$, puis que, pour tous u, v, w, t de E , on a : $\|t - u\| \cdot \|w - v\| \leq \|t - v\| \cdot \|u - w\| + \|t - w\| \cdot \|v - u\|$ [*inégalité de Ptolémée*].

Interprétez cette inégalité en termes de géométrie élémentaire.

☞ **Exercice 5.6.** Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ et $(F, [\cdot|\cdot])$ des espaces préhilbertiens réels.

Soit $A : E \rightarrow F$ une application linéaire. Démontrez que A est isométrique si et seulement si pour tous $u, v \in E$ on a : $[A(u)|A(v)] = (u|v)$.

Soit $B : E \rightarrow F$ vérifiant pour tous $u, v \in E$: $[B(u)|B(v)] = (u|v)$. Démontrez que B est une application linéaire.

Définition 5.6.

Soit $A \neq \emptyset$ une partie quelconque de E . On note A^\perp l'ensemble des $v \in E$ tels que $v \perp a$ pour tout $a \in A$. On appelle cet ensemble l'*orthogonal de A* .

Commentaire : A et A^\perp sont des parties orthogonales au sens de la définition 5.5.

Propriétés de l'orthogonal

Pour tout $A \neq \emptyset$, A^\perp est un *sous-espace vectoriel*. En effet, si v et w sont dans A^\perp , on a $v \perp a$ et $w \perp a$ pour tout $a \in A$, et donc $(v + w) \perp a$; $(\lambda v) \perp a$ pour tout $a \in A$. ♦

On a : $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$ (évident) et donc, en notant $A^{\perp\perp} = (A^\perp)^\perp$: $A \subset B \implies A^{\perp\perp} \subset B^{\perp\perp}$.

Soit $u \in A$ et soit $v \in A^\perp$: $(u|v) = 0$ et, donc, $u \in A^{\perp\perp}$: $A \subset A^{\perp\perp}$.

Comme A est quelconque alors que $A^{\perp\perp}$ est un sous-espace vectoriel, on n'a pas de raison d'avoir l'égalité $A = A^{\perp\perp}$... On donnera plus tard [Chap. XVIII] des cas d'égalité.

Définition 5.7.

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite *orthonormale* si $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in I$ et si $u_i \perp u_j$, i.e. $(u_i|u_j) = 0$, pour tous i, j tels que $i \neq j$.

Exemple 5.4. Soit $E = \ell^2(\mathbb{R})$. Pour tout n entier ≥ 1 on pose :

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots), [1 \text{ à la } n\text{-ième place et } 0 \text{ partout ailleurs}].$$

La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est orthonormale.

Pour $u = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ dans E , posons $u_n = P_n(u) = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ et $E_n = [(e_1, \dots, e_n)]$. $u_n \in E_n$, et P_n est une application linéaire de E sur E_n appelée *projection orthogonale*.

$\|u - u_n\|^2 = \sum_{i \geq n+1} \xi_i^2$ est le reste d'une série convergente et donc tend vers zéro.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(u)) = u$ dans E [voir Chap. III]. On dit que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une *base hilbertienne* de E . Nous reviendrons plus tard [Chap. XIX] sur cette notion importante.

6. ENSEMBLES ET FONCTIONS CONVEXES

Une notion très intéressante dans un espace vectoriel est celle de *convexité*. C'est une notion purement *algébrique*.

Définition 6.1.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit $A \subset E$. On dit que A est *convexe* si :

$$(6.1) \quad \forall u \in A, \forall v \in A, \forall \lambda \in]0, 1[: \lambda u + (1 - \lambda)v \in A.$$

Autrement dit, si pour tout couple (u, v) de points de A , l'*intervalle ouvert* $]u, v[= \{\lambda u + (1 - \lambda)v / \lambda \in]0, 1[\}$ qui les joint est tout entier contenu dans A .

Nota : Comme u et v sont supposés dans A , on a en fait $\lambda u + (1 - \lambda)v \in A$ pour $\lambda \in [0, 1]$, et le *segment fermé* $[u, v] = \{\lambda u + (1 - \lambda)v / \lambda \in [0, 1]\}$ est tout entier contenu dans A . Mais très souvent on est contraint de raisonner pour $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1$ séparément, par exemple parce qu'on considère $1/\lambda$ ou $1/(1 - \lambda) \dots$ La définition 6.1 est bien adaptée à cette situation.

On considère le vide \emptyset comme un convexe.

- Le lecteur vérifiera que si A et B sont convexes, et si $\lambda \in \mathbb{K}$ on a : $A + B$ est convexe, en particulier $a + B$ est convexe, λA est convexe. Toute intersection de convexes est convexe. Tout sous-espace vectoriel de E est convexe.

- Si $(E, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes ; les sphères ne sont jamais convexes. Il suffit pour $B(u, \rho[$, par exemple, de prouver le résultat pour $u = 0$ et $\rho = 1$, d'après (3.3) ; soient donc u et v tels que $\|u\| < 1, \|v\| < 1$, et soit $0 < \lambda < 1 : \|\lambda u + (1 - \lambda)v\| \leq \lambda\|u\| + (1 - \lambda)\|v\| < \lambda + (1 - \lambda) = 1$. ♦

- Soit $\varphi \in E^*, \varphi \neq 0$, une *forme linéaire* sur E (i.e. une application linéaire de E dans \mathbb{K}) et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. L'ensemble $H(\varphi, \alpha) = \{u \in E / \varphi(u) = \alpha\}$ qui est un *hyperplan*, c'est-à-dire le translaté d'un sous-espace de codimension 1 [voir l'annexe du Chap. X], est un convexe (vérifiez).

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut considérer les sous-ensembles $D(\varphi, \alpha[= \{u \in E / \varphi(u) < \alpha\}$, $D(\varphi, \alpha] = \{u \in E / \varphi(u) \leq \alpha\}$, appelés respectivement *demi-espace ouvert*, *demi-espace fermé* : ce sont des convexes.

- Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} et soit $L : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si C est convexe dans E , $L(C)$ est convexe dans F ; si K est convexe dans F , $L^{-1}(K)$ est convexe dans E .

Démontrons le second résultat. Soient u, v dans $L^{-1}(K) : L(u) := x \in K$ et $L(v) := y \in K$. Soit $\lambda \in]0, 1[: \lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ puisque K est convexe, donc $\lambda L(u) + (1 - \lambda)L(v) = L(\lambda u + (1 - \lambda)v) \in K$ et $\lambda u + (1 - \lambda)v \in L^{-1}(K)$. ♦

Définition 6.2.

| Soit E un espace vectoriel réel. Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction.
 | On appelle *épigraphe* de f le sous-ensemble de $E \times \mathbb{R}$ noté et défini comme suit :
 (6.2) $\text{épi}(f) := \{(u, \alpha) \in E \times \mathbb{R} / f(u) \leq \alpha\}$.

| Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, on appelle *niveau* [resp. *sous-niveau*] de f en α le sous-ensemble de E suivant :
 (6.3) $\text{niv}(f, \alpha) := \{u \in E / f(u) = \alpha\}$
 | [resp. $\text{sous-niv}(f, \alpha) = \{u \in E / f(u) \leq \alpha\}$].

Nota : Bien remarquer que dans les définitions de épi et de niv c'est \mathbb{R} qui intervient et non $\overline{\mathbb{R}}$!

Définition 6.3.

| On dit que la fonction f est *convexe* si $\text{épi}(f)$ est une partie convexe de $E \times \mathbb{R}$.

☞ **Exercice 6.1.** (très facile) On note pr_1 l'application naturelle $\text{pr}_1 : E \times \mathbb{R} \rightarrow E$, $(u, \alpha) \mapsto \text{pr}_1(u, \alpha) = u$. Vérifiez que : $\text{sous-niv}(f, \alpha) = \text{pr}_1(\text{épi}(f) \cap (E \times \{\alpha\}))$ et que $\text{épi}(f) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} (\text{sous-niv}(f, \alpha) \times \{\alpha\})$.

Proposition 6.1.

| Soit $f : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$. f est convexe si et seulement si :

(6.4) $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall \lambda \in]0, 1[: f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda.f(u) + (1 - \lambda).f(v)$.

Démonstration :

Si f vérifie (6.4), soient (u, α) et (v, β) dans $\text{épi}(f)$, et soit $\lambda \in]0, 1[$:
 $\lambda(u, \alpha) + (1 - \lambda)(v, \beta) = (\lambda u + (1 - \lambda)v, \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta)$ et
 $f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v) \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta$, et donc $\text{épi}(f)$ est convexe, i.e. f est convexe. ♦

Si f est convexe, i.e. si $\text{épi}(f)$ est convexe, soient u, v dans E et soit $\lambda \in]0, 1[$: si $f(u)$ et $f(v)$ sont finis (i.e. sont des réels), posons $\alpha = f(u)$ et $\beta = f(v)$; $(u, \alpha) \in \text{épi}(f)$ et $(v, \beta) \in \text{épi}(f)$, donc $\lambda(u, \alpha) + (1 - \lambda)(v, \beta) \in \text{épi}(f)$, ce qui signifie que $f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta = \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$, d'où (6.4).

Si $f(u)$ ou $f(v)$ sont égaux à $+\infty$, (6.4) est automatiquement vérifiée. ♦

Nota : Si f est à valeurs dans $[-\infty, +\infty[$ on peut énoncer un résultat de même type que ci-dessus. Mais si f est à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ on a un problème car on peut tomber sur des $+\infty + (-\infty)$ qui sont dépourvus de sens. Cela n'a pas d'importance parce que la convexité de $\text{épi}(f)$ a – elle – toujours un sens, et parce que de toute façon les fonctions convexes prenant la valeur $-\infty$ n'ont pas grand intérêt.

Exemple 6.1. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. la fonction $E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \|u\|$ est convexe car pour tous u, v de E et tout $\lambda \in]0, 1[$ on a : $\|\lambda u + (1 - \lambda)v\| \leq \lambda\|u\| + (1 - \lambda)\|v\|$.

Soit $A \subset E$ une partie convexe et soit $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On dit que f est convexe sur A si la fonction $g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ définie par $g(u) = f(u)$ si $u \in A$ et $g(u) = +\infty$ si $u \in E \setminus A$ est convexe.

Proposition 6.2.

| Soit $A \subset E$ convexe. $f : A \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est convexe sur A ssi :

$$(6.5) \quad \boxed{\forall a \in A, \forall b \in A, \forall \lambda \in]0, 1[: f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b)}.$$

Démonstration :

Si f est convexe sur A , g définie ci-dessus est convexe et d'après la Prop. 6.1 on a (6.5). Si l'on a (6.5) il est facile de voir en examinant les différents cas que g est convexe, i.e. que f est convexe sur A . ♦

Exemple 6.2. Soit $A \subset E$ convexe. La fonction valant 0 sur A et $+\infty$ sur $E \setminus A$ est convexe. On la note I_A et on l'appelle *fonction indicatrice* de A .

Exemple 6.3. Soit A une partie convexe non vide d'un e.v.n. E . La fonction $E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto f(u) = d(u, A) = \inf\{\|u - a\| / a \in A\}$ est convexe.

Soient en effet u, v dans E et λ dans $]0, 1[$. Pour tout $\varepsilon > 0$, par définition d'une borne inférieure, il existe $a \in A$ et $b \in A$ tels que $d(u, A) \leq \|u - a\| \leq d(u, A) + \varepsilon$ et $d(v, A) \leq \|v - b\| \leq d(v, A) + \varepsilon$. Comme A est convexe : $\lambda a + (1 - \lambda)b \in A$ et donc :

$$\begin{aligned} d(\lambda u + (1 - \lambda)v, A) &\leq \|[\lambda u + (1 - \lambda)v] - [\lambda a + (1 - \lambda)b]\| = \|\lambda(u - a) + (1 - \lambda)(v - b)\| \\ &\leq \lambda\|u - a\| + (1 - \lambda)\|v - b\| \leq \lambda(d(u, A) + \varepsilon) + (1 - \lambda)(d(v, A) + \varepsilon) \\ &\leq \lambda d(u, A) + (1 - \lambda)d(v, A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme l'inégalité a lieu pour tout $\varepsilon > 0$ on a bien :

$$d(\lambda u + (1 - \lambda)v, A) \leq \lambda d(u, A) + (1 - \lambda)d(v, A), \text{ et } f \text{ est convexe. } \blacklozenge$$

☞ **Exercice 6.2.** (assez facile) Soit E un espace vectoriel réel. Soit $A \neq \emptyset$ une partie de E . On appelle *combinaison convexe d'éléments de A* toute somme de la forme $\sum_{i \in I} \lambda_i a_i$ dans laquelle :

I est un ensemble fini non vide (qui peut dépendre de la combinaison considérée), $a_i \in A$ pour tout $i \in I$, λ_i réel ≥ 0 pour tout $i \in I$, et $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.

On note \widehat{A} l'ensemble de toutes les combinaisons convexes d'éléments de A .

Si $E = \mathbb{R}^2$, déterminez \widehat{A} quand A est réduit à deux points distincts, puis quand A consiste en trois points non alignés.

1) Démontrez que si A est convexe on a : $A = \widehat{A}$.

Indication :

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{n+1} a_{n+1} = (1 - \lambda_{n+1}) \left[\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} a_1 + \dots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} a_n \right] + \lambda_{n+1} a_{n+1}.$$

2) Démontrez que \widehat{A} est le plus petit ensemble convexe contenant A .

On note $\widehat{A} = \text{conv}(A)$ et on l'appelle l'enveloppe convexe de A .

3) Soit $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction convexe. Démontrez que : $\sup_{a \in A} f(a) = \sup_{b \in \text{conv}(A)} f(b)$.

☞ **Exercice 6.3.** (facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n, soit $C \neq \emptyset$ une partie convexe de E , et soit $f : C \rightarrow]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe. On suppose que $\widehat{u} \in C$ vérifie : il existe une boule $B(\widehat{u}, \rho[$ telle que $f(\widehat{u}) \leq f(u)$ pour tout $u \in B(\widehat{u}, \rho[\cap C$ (i.e. que f atteigne un *minimum relatif* – ou *local* – en \widehat{u}). Démontrez que $f(\widehat{u}) \leq f(u)$ pour tout $u \in C$ (i.e. que f atteigne un *minimum absolu* – ou *global* – sur C).

Fin de la partie cours du Chapitre II

LECTURE

Le critère de «préhilbertisabilité» de Jordan-von Neumann

A titre d'exercice, examinons la question suivante : avec (1.8) (1.9) et l'exercice 1.1 on a un moyen commode pour vérifier si une distance d donnée sur un espace vectoriel E est, ou n'est pas, associée à une norme $\|\cdot\|$ (i.e. $d(u, v) = \|u - v\|$) ; a-t-on une condition de ce genre pour assurer qu'une norme $\|\cdot\|$ donnée sur E est associée à un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$?

La réponse est *positive*, et en fait on dispose de nombreux critères. Le plus commode est la *caractérisation de John von Neumann et Camille Jordan*.

Nous allons traiter le cas des espaces préhilbertiens réels, mais il existe une caractérisation similaire – un peu plus compliquée – dans le cas complexe. Le résultat s'énonce :

une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel réel E est associée à un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$, i.e. qu'il existe $(\cdot|\cdot)$ tel que pour tout $u \in E$ on a $\|u\|^2 = (u|u)$, si et seulement si la norme vérifie pour tous u, v dans E l'identité du parallélogramme (5.9).

Nous avons vu que la condition est nécessaire, démontrons qu'elle est suffisante.

Soit donc une norme $\|\cdot\|$ sur E réel vérifiant pour tous u, v de E :

$$(*) \quad \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Posons : $g(u, v) := \frac{1}{4} [\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2]$.

Nous allons vérifier que g est un produit scalaire vérifiant $\|u\|^2 = g(u, u)$.

$\forall u, v, w \in E :$

$$\begin{aligned} 4g(u+v, w) &= \|(u+v) + w\|^2 - \|(u+v) - w\|^2 = \|u + (v+w)\|^2 - \|u + (v-w)\|^2 \\ &\stackrel{(*)}{=} 2\|u\|^2 + 2\|v+w\|^2 - \|u - (v+w)\|^2 - (2\|u\|^2 + 2\|v-w\|^2 - \|u - (v-w)\|^2) \\ &= 2\|v+w\|^2 - 2\|v-w\|^2 - \|(u-w) - v\|^2 + \|(u+w) - v\|^2 \\ &\stackrel{(*)}{=} 2\|v+w\|^2 - 2\|v-w\|^2 - (2\|u-w\|^2 + 2\|v\|^2 - \|u-w+v\|^2) + (2\|u+w\|^2 \\ &\quad + 2\|v\|^2 - \|u+w+v\|^2) \\ &= 2\|v+w\|^2 - 2\|v-w\|^2 + 2\|u+w\|^2 - 2\|u-w\|^2 + \|u-w+v\|^2 - \|u+w+v\|^2 \\ &= 8g(v, w) + 8g(u, w) - 4g(u+v, w), \end{aligned}$$

d'où : $g(u+v, w) = g(u, w) + g(v, w)$, et g est additive par rapport à sa première variable.

$g(v, u) = g(u, v)$ est évident.

$g(u, u) = \frac{1}{4}\|2u\|^2 = \|u\|^2 \geq 0$, et $g(u, u) = 0 \implies \|u\| = 0 \implies u = 0$.

Si l'on prouve que g est homogène par rapport à la première variable, on aura démontré que g est un produit scalaire tel que la norme $\|\cdot\|$ est associée à ce produit scalaire.

Faisant $v = u$ dans l'égalité ci-dessus on a :

$$g(2u, w) = g(u, w) + g(u, w) = 2g(u, w).$$

Procédons par récurrence et supposons que $g(nu, w) = ng(u, w)$.

$$\begin{aligned} g((n+1)u, w) &= g(nu + u, w) = g(nu, w) + g(u, w) = ng(u, w) + g(u, w) \\ &= (n+1)g(u, w). \end{aligned}$$

Donc $g(nu, w) = ng(u, w)$ pour tout n entier ≥ 1 .

$g(0, u) = 0$ et $g((-1)u, w) = g(-u, w) = -g(u, w)$ (trivial).

Donc pour avoir l'homogénéité pour les rationnels (éléments de \mathbb{Q}) il nous suffit de l'étudier pour $r = p/q$, p et q entiers > 0 :

$$g\left(\frac{p}{q}u, w\right) = g(p \cdot \frac{1}{q}u, w) = p \cdot g\left(\frac{1}{q}u, w\right) \text{ d'une part, et}$$

$$g\left(\frac{p}{q}u, w\right) = g\left(q \cdot \frac{p}{q^2}u, w\right) = q \cdot g\left(\frac{p}{q^2}u, w\right) \text{ d'autre part, d'où :}$$

$$p \cdot g\left(\frac{1}{q}u, w\right) = q \cdot g\left(\frac{p}{q^2}u, w\right) \text{ et enfin : } g\left(\frac{p}{q}u, w\right) = \frac{p}{q}g(u, w).$$

Démontrons que si (λ_n) est une suite de réels convergente vers λ dans \mathbb{R} on a (propriété de continuité de g) : $\forall u \in E, \forall w \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} g(\lambda_n \cdot u, w) = g(\lambda \cdot u, w)$.

En effet :

$$\begin{aligned} 4|g(\lambda_n u, w) - g(\lambda u, w)| &= | \|\lambda_n u + w\|^2 - \|\lambda_n u - w\|^2 - \|\lambda u + w\|^2 + \|\lambda u - w\|^2 | \\ &\leq | \|\lambda_n u + w\|^2 - \|\lambda u + w\|^2 | + | \|\lambda_n u - w\|^2 - \|\lambda u - w\|^2 | \\ &\leq (\|\lambda_n u + w\| + \|\lambda u + w\|) \cdot | \|\lambda_n u + w\| - \|\lambda u + w\| | \\ &\quad + (\|\lambda_n u - w\| + \|\lambda u - w\|) \cdot | \|\lambda_n u - w\| - \|\lambda u - w\| | \\ &\leq 2(c + \|u\| + 2\|w\|) \cdot \|(\lambda_n - \lambda)u\|, \text{ où } c = \max\{|\lambda|, \sup_n |\lambda_n|\} < \infty \end{aligned}$$

(une suite de réels convergente est bornée, et on applique la seconde inégalité triangulaire – formule (1.6) du chap. I)

D'où : $|g(\lambda_n u, w) - g(\lambda u, w)| \leq \frac{1}{2}(c + \|u\| + 2\|w\|)\|u\| \cdot |\lambda_n - \lambda|$ et le résultat.

A présent, soit r un réel positif. On sait que r est limite d'une suite de nombres rationnels positifs : $r = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)$, $r_n \in \mathbb{Q}^+$ pour tout n , et on peut écrire :

$$g(r \cdot u, w) = g\left(\lim_{n \rightarrow \infty} r_n \cdot u, w\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (g(r_n \cdot u, w)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n) \cdot g(u, w) = r \cdot g(u, w).$$

La démonstration est terminée. ♦

Remarque : Supposons que pour toute sous-espace vectoriel M de dimension deux de E (réel) on puisse trouver un produit scalaire g_M (dépendant de M) sur M tel que

$g_M(u, u) = \|u\|^2$ pour tout $u \in M$. Dans ces conditions il existe un produit scalaire g sur E tel que $g(u, u) = \|u\|^2$.

En effet, pour tous $u, v \in E$ on se place dans un plan M contenant u et v : en utilisant g_M on a l'identité du parallélogramme pour $\|\cdot\|$. D'où le résultat grâce à la caractérisation démontrée ci-dessus.

Par conséquent, les critères de « préhilbertisabilité » (il en existe beaucoup) peuvent être étudiés dans les espaces vectoriels de dimension deux seulement : c'est plus simple ! Et on peut mettre en œuvre toute la machinerie de la géométrie élémentaire et de l'analyse fine dans \mathbb{R}^2 .

☞ **Exercice 6.4.** (très facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. réel vérifiant l'une des deux inégalités suivantes :

$$(i) \forall u \in E, \forall v \in E : \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \leq 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2, \text{ ou}$$

$$(ii) \forall u \in E, \forall v \in E : \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 \geq 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Démontrez qu'il existe un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ sur E dont la norme associée est $\|\cdot\|$.

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ Exercice 1.1.

Posons, pour tout $u \in E : \|u\| := d(u, 0)$, et démontrons que $\|\cdot\|$ ainsi définie possède les propriétés d'une norme.

$$(1.1) \forall u \in E : \|u\| = d(u, 0) \text{ est un réel } \geq 0 \text{ (propriété des distances).}$$

$$(1.2) \|0\| = d(0, 0) = 0 \text{ (propr. dist.)}$$

$$(1.3) \|u\| = 0 \implies d(u, 0) = 0 \implies u = 0 \text{ (propr. dist.)}$$

$$(1.4) \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda u\| = d(\lambda u, 0) = d(\lambda u, \lambda 0) = |\lambda| \cdot d(u, 0) \text{ [grâce à (1.9)]}$$

$$= |\lambda| \cdot \|u\|.$$

$$(1.5) \forall u \in E, \forall v \in E : \|u+v\| = d(u+v, 0) \leq d(u+v, u) + d(u, 0) \text{ [inégalité triangulaire pour } d]$$

$$= d(v+u, 0+u) + \|u\| \text{ [grâce à (1.8)]} = d(v, 0) + \|u\| = \|v\| + \|u\|, \text{ d'où } \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|,$$

et le résultat cherché. ♦

☞ Exercice 2.1.

$$\|\alpha \cdot u + \beta \cdot v\| \leq \|\alpha u\| + \|\beta v\| = |\alpha| \cdot \|u\| + |\beta| \cdot \|v\| = \alpha \|u\| + \beta \|v\|, \text{ car } \alpha \geq 0, \beta \geq 0.$$

On ne diminue pas la généralité en supposant $(0 \leq) \alpha \leq \beta$ (sinon on échange les rôles de α et β dans ce qui suit . . .).

$$\begin{aligned} \|\alpha u + \beta v\| &= \|\beta(u+v) - (\beta - \alpha)u\| \\ &\geq \|\beta(u+v)\| - \|(\beta - \alpha)u\| \text{ [inégalité triangulaire]} \\ &\geq |\beta| \cdot \|u+v\| - |\beta - \alpha| \cdot \|u\| = \beta \|u+v\| - (\beta - \alpha) \|u\| \\ &\geq \beta \|u\| + \beta \|v\| - \beta \|u\| + \alpha \|u\| = \alpha \|u\| + \beta \|v\|. \end{aligned}$$

D'où l'égalité. ♦

☞ Exercice 2.2.

Remarquons d'abord que ce qui nous intéresse, c'est n « grand ».

On peut donc supposer sans inconvénient que $n + \rho > 0$ pour tous les n considérés.

Remarquons aussi que (pour $n + \rho > 0$) : $1 = \frac{n+\rho}{n+\rho} = \frac{n}{n+\rho} + \frac{\rho}{n+\rho}$, d'où :

$$\begin{aligned} \|(n+\rho)u + v\| &= \frac{n}{n+\rho} \|(n+\rho)u + v\| + \frac{\rho}{n+\rho} \|(n+\rho)u + v\| \\ &= \|nu + \frac{n}{n+\rho}v\| + \rho \|u + \frac{1}{n+\rho}v\|. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \|(n+\rho)u + v\| - \|nu + v\| = \|nu + \frac{n}{n+\rho}v\| - \|nu + v\| + \rho \|u + \frac{1}{n+\rho}v\|.$$

Or : $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho \|u + \frac{1}{n+\rho}v\| = \rho \|u\|$ (*), et :

$$\begin{aligned} \left| \|nu + \frac{n}{n+\rho}v\| - \|nu + v\| \right| &\leq \left\| nu + \frac{n}{n+\rho}v - nu - v \right\| \text{ [inégalité triangulaire]} \\ &\leq \left| \frac{n}{n+\rho} - 1 \right| \cdot \|v\| = \frac{|\rho|}{n+\rho} \|v\| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Finalement : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|(n + \rho)u + v\| - \|nu + v\|) = \rho\|u\|$. ♦

(*) $\left\|u + \frac{1}{n+\rho}v\right\| - \|u\| \leq \|u + \frac{1}{n+\rho}v - u\| = \frac{1}{n+\rho}\|v\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 2.3.

Tout d'abord : $\|u\| + \|v\| \leq 2 \max\{\|u\|, \|v\|\}$, et donc : (1) \implies (2). Il suffit par conséquent de prouver (1).

Si $\|u\| \geq \|v\|$, (1) se réduit à prouver (1)' : $\|u - v\| \geq \frac{1}{2}\|u\| \cdot \left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\|$; et si

$\|u\| \leq \|v\|$, (1) se réduit à (1)'' : $\|u - v\| \geq \frac{1}{2}\|v\| \cdot \left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\|$ obtenue à partir de (1)' en changeant u en v .

On ne réduit donc pas la généralité en démontrant seulement (1)'. Supposons donc que $\|u\| \geq \|v\|$ et prouvons (1)'.

$$\begin{aligned} \|u - v\| &= \|(u - \frac{\|u\|}{\|v\|}v) - (v - \frac{\|u\|}{\|v\|}v)\| \geq \|u - \frac{\|u\|}{\|v\|}v\| - \|v - \frac{\|u\|}{\|v\|}v\| \\ \text{[seconde inégalité triangulaire]} \\ &\geq \|u - \frac{\|u\|}{\|v\|}v\| - \|v - \frac{\|u\|}{\|v\|}v\| = \|u\| \cdot \left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\| - \|v\| \cdot \left|1 - \frac{\|u\|}{\|v\|}\right| \\ &\geq \|u\| \cdot \left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\| - \|u\| - \|v\| \quad \text{[seconde inégalité triangulaire]} \\ &\geq \|u\| \cdot \left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\| - \|u - v\| \end{aligned}$$

Donc : $2\|u - v\| \geq \|u\| \cdot \left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\|$, i.e. (1)'. ♦

Supposons que pour un M on ait (1) avec M à la place de $\frac{1}{2}$. Soit $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$, et soit $v = -\frac{1}{n}u$ pour $n \geq 2$: $\|v\| = \frac{1}{n}\|u\| = \frac{1}{n}$.

On a : $\|u - v\| = \|u + \frac{1}{n}u\| = (1 + \frac{1}{n})\|u\| = 1 + \frac{1}{n}$, et :

$$\max\{\|u\|, \|v\|\} \cdot \left\|\frac{u}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\| = \max\{1, \frac{1}{n}\} \|u - (-u)\| = 1.2 \|u\| = 2,$$

d'où $\forall n \geq 2 : 1 + \frac{1}{n} \geq 2M \implies 2M \leq 1 \implies M \leq \frac{1}{2}$. Donc $\frac{1}{2}$ est la meilleure constante possible dans (1) [de même pour $\frac{1}{4}$ dans (2)]. ♦

Exercice 2.4.

(1) \implies (2) : Supposons qu'on a $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$ avec $v \neq 0$. Si $u = 0$, on a $u = 0.v$, et c'est terminé. On supposera donc que $u \neq 0$. D'autre part, on peut supposer que $\|v\| \geq \|u\|$: si l'on a le contraire, il suffit de permuter u et v dans les calculs qui suivent. On part donc de $u \neq 0, v \neq 0, \|v\| \geq \|u\|$.

Ecrivons :

$$\begin{aligned} \left\|\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}\right\| &\geq \left\|\frac{u}{\|u\|} + \frac{v}{\|v\|}\right\| - \left\|\frac{v}{\|u\|} - \frac{v}{\|v\|}\right\| \quad \text{[seconde inégalité triangulaire]} \\ &\geq \frac{1}{\|u\|} \|u + v\| - \|v\| \cdot \left|\frac{1}{\|u\|} - \frac{1}{\|v\|}\right| = \frac{1}{\|u\|} (\|u\| + \|v\|) - \|v\| \cdot \left(\frac{1}{\|u\|} - \frac{1}{\|v\|}\right) \end{aligned}$$

[hypothèse et $\|v\| \geq \|u\|$]
 ≥ 2 .

D'où, d'après (1) : $\frac{u}{\|u\|} = \frac{v}{\|v\|} \implies u = \lambda.v$ avec $\lambda = \frac{\|u\|}{\|v\|} \geq 0$. ♦

(2) \implies (1) : Soient $u, v \in E$ tels que $\|u\| = \|v\| = 1$ et $\frac{1}{2}\|u + v\| = 1$; on a donc : $\|u + v\| = 2 = \|u\| + \|v\|$;

d'après (2) : $u = \lambda v$ avec $\lambda \geq 0 \implies \|u\| = 1 = |\lambda| \cdot \|v\| = \lambda \implies u = v$.

Comme on a toujours $\frac{1}{2}\|u + v\| \leq \frac{1}{2}\|u\| + \frac{1}{2}\|v\| = 1$, si $u \neq v$ on a nécessairement $\frac{1}{2}\|u + v\| < 1$, i.e. (1). ♦

(1) signifie que sur la sphère $S(0, 1)$ il n'y a aucun segment autre que les singletons, et donc qu'il n'y a pas de parties plates. Par exemple, sur \mathbb{R}^n , les normes $\|\cdot\|_p$ où p réel > 1 vérifient (1), tandis que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifient pas (1). Ces considérations appartiennent à ce qu'on appelle la *géométrie des e.v.n.*

Remarquons que (1) peut s'écrire :

$$\forall \varepsilon \in]0, 2], \forall u, v \in S(0, 1), \exists \delta(\varepsilon, u, v) > 0 : \|u - v\| \geq \varepsilon \implies \frac{\|u+v\|}{2} \leq 1 - \delta,$$

ce qui permet d'envisager une notion plus restrictive que la convexité stricte, la *convexité uniforme* :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall u \in S(0, 1), \forall v \in S(0, 1) : \|u - v\| \geq \varepsilon \implies \frac{\|u+v\|}{2} \leq 1 - \delta.$$

Démontrez qu'un espace préhilbertien réel est uniformément convexe, et que la meilleure fonction δ possible est $\delta(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2}$ [utilisez (5.9)].

🔗 **Exercice 3.1.**

(3.2) • $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) : \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt \geq 0$, parce que l'intégrale d'une fonction positive est positive [notez l'importance ici de l'hypothèse $a < b$].

• $\|0\|_1 = 0$, propriété de l'intégrale.

• $\forall f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R} :$

$$\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda f(t)| dt = \int_a^b |\lambda| \cdot |f(t)| dt = |\lambda| \int_a^b |f(t)| dt = |\lambda| \cdot \|f\|_1,$$

propriété de $|\cdot|$ et homogénéité de l'intégrale.

• Démontrons l'inégalité triangulaire.

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) : \|f + g\|_1 = \int_a^b |(f + g)(t)| dt = \int_a^b |f(t) + g(t)| dt, \text{ et}$$

$$\forall t \in [a, b] : |f(t) + g(t)| \leq |f(t)| + |g(t)| \text{ [propriété de } |\cdot| \text{]} \implies$$

$$\|f + g\|_1 \leq \int_a^b [|f(t)| + |g(t)|] dt = \int_a^b |f(t)| dt + \int_a^b |g(t)| dt = \|f\|_1 + \|g\|_1 : \text{monotonie}$$

puis additivité de l'intégrale.

• Démontrons enfin que $\|f\|_1 = 0 \implies f = 0$, i.e. $\forall t \in [a, b] : f(t) = 0$. Cela n'est certainement pas trivial : en effet la fonction f nulle sur $[a, b]$ sauf en $\frac{1}{2}(a + b)$ où elle vaut 1

vérifie $\int_a^b |f(t)| dt = 0$, bien qu'elle ne soit pas nulle ; d'autre part $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0 \dots$

On va démontrer que :

☞ si g est une fonction continue et positive sur $[a, b]$ on a :

$$\int_a^b g(t) dt = 0 \implies g = 0 \text{ sur } [a, b].$$

(résultat à connaître par cœur, avec sa démonstration).

Cela démontrera ce qu'on veut en prenant $g(t) = |f(t)|$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $g(t_0) = \gamma > 0$. g étant continue : $\varepsilon = \gamma/2 > 0$ étant donné, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] : |g(t) - g(t_0)| \leq \gamma/2$ (nota : si $t_0 = a$ ou b , l'intervalle est modifié en $[a, a + \eta]$ ou $[b - \eta, b]$).

Soit : il existe $\eta > 0$ tel que $\forall t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] : \frac{\gamma}{2} = \gamma - \frac{\gamma}{2} \leq f(t) \leq \gamma + \frac{\gamma}{2} = \frac{3\gamma}{2}$. Donc :

$$\int_a^b g(t) dt = \int_I g(t) dt + \int_J g(t) dt + \int_K g(t) dt,$$

où $I = [a, t_0 - \eta]$, $J = [t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, $K = [t_0 + \eta, b]$,

$$\int_a^b g(t) dt \stackrel{(*)}{\geq} \int_J g(t) dt \geq \int_J \frac{\gamma}{2} dt = \frac{\gamma}{2} [(t_0 + \eta) - (t_0 - \eta)] = \gamma \cdot \eta > 0 \text{ (} (*) \text{ car } g \geq 0 \text{ sur } [a, b]) : \text{contradiction ! } \blacklozenge$$

(3.3) $\|f\|_2$ est la norme associée au produit scalaire $(f|g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$ [voir Exemple 5.3].

Pour prouver que $\|f\|_2 = 0 \implies f = 0$ on utilise le résultat démontré ci-dessus pour la norme (3.2) : f^2 est ≥ 0 et continue. \blacklozenge

(3.4) Aucune difficulté : voir (3.22). Rappelons qu'une fonction réelle définie sur un intervalle fermé borné est bornée et atteint ses bornes, ce qui explique le « max » au lieu de « sup » dans l'expression de $\|\cdot\|_\infty$. \blacklozenge

• Posons $\varphi_\lambda(t) = |f(t) - g_\lambda(t)| = |t^2 - \lambda t| = t|t - \lambda|$. Pour $t \geq \lambda : \varphi_\lambda(t) = t^2 - \lambda t$ et $\varphi'_\lambda(t) = 2t - \lambda$ est nulle en $t = \frac{1}{2}\lambda$, mais $t \geq \lambda \geq \frac{1}{2}\lambda$. Pour $t \leq \lambda : \varphi_\lambda(t) = \lambda t - t^2$ et $\varphi'_\lambda(t) = \lambda - 2t$ est nulle en $t = \frac{1}{2}\lambda$ avec $\varphi_\lambda(\frac{1}{2}\lambda) = \frac{1}{4}\lambda^2$. Il y a deux configurations possibles pour le graphe de φ_λ , suivant que $\frac{1}{4}\lambda^2$ est \geq ou \leq à $1 - \lambda = \varphi_\lambda(1)$. Dessinez trois figures : la première représentera la fonction $\lambda \mapsto \max\{1 - \lambda, \frac{1}{4}\lambda^2\}$; cette fonction atteint son *minimum*

en $\lambda_0 \in [0, 1]$ tel que $1 - \lambda_0 = \frac{1}{4}\lambda_0^2$, soit : $\lambda_0 = -2 + 2\sqrt{2}$ ($\lambda_0 \simeq 0,83$), les deux autres figures représenteront φ_λ suivant que $\lambda \leq \lambda_0$ ou bien $\lambda \geq \lambda_0$.

$\|f - g_\lambda\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} \varphi_\lambda(t) = \max\{1 - \lambda, \frac{1}{4}\lambda^2\}$, et le *minimum* de cette quantité est atteint en λ_0 ; ce *minimum* vaut $\frac{1}{4}\lambda_0^2 = 1 - \lambda_0 = 3 - 2\sqrt{2}$ ($\simeq 0,17$).

$$\|f - g_\lambda\|_1 = \int_0^1 \varphi_\lambda(t) dt = \int_0^\lambda t(\lambda - t) dt + \int_\lambda^1 t(t - \lambda) dt = \frac{1}{3}\lambda^3 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3} = G(\lambda);$$

$G'(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{2}$ s'annule en $\lambda_1 = 1/\sqrt{2}$ qui correspond à un *minimum* de $G(\lambda)$. Ce *minimum* vaut $G(\lambda_1) = \frac{1}{3}(-1/\sqrt{2} + 1)$ ($\simeq 0,098$).

$$\|f - g_\lambda\|_2^2 = \int_0^1 (t^2 - \lambda t)^2 dt = \frac{1}{5} - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{3}\lambda^2 = H(\lambda); H'(\lambda) = \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{2} \text{ s'annule en } \lambda_2 = \frac{3}{4}$$

et on a $\|f - g_\lambda\|_2^2 = \frac{1}{4\sqrt{5}}$ ($\simeq 0,11$).

On peut dire que c'est pour la norme $\|\cdot\|_1$ que la fonction $t \mapsto t^2$ est approchée de manière optimale par une fonction de la forme $t \mapsto \lambda t$ avec $\lambda \in [0, 1]$. ♦

Exercice 3.2.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz (5.7) (5.8) dans l'espace préhilbertien de l'exemple 5.3 :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt = \int_a^b |f(t)| \cdot 1 dt \leq \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt} \cdot \sqrt{\int_a^b 1^2 dt} = \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_2;$$

et :

$$\|f\|_2^2 = \int_a^b (f(t))^2 dt \leq \|f\|_\infty^2 \int_a^b dt = (b-a) \|f\|_\infty^2 \implies \|f\|_2 \leq \sqrt{b-a} \cdot \|f\|_\infty. \text{ Donc :}$$

$\forall f \in E, E = C([a, b], \mathbb{R}) : \|f\|_1 \leq c \cdot \|f\|_2 \leq C \cdot \|f\|_\infty$, où : $c = (b-a)^{1/2}$ et $C = b-a$. ♦

Pour prouver que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux, on va prouver qu'il n'existe pas de constante $k > 0$ telle que $\forall f \in E : \|f\|_\infty \leq k \|f\|_1$; de même pour $\|f\|_2 \leq k \|f\|_1$ et $\|f\|_\infty \leq k \|f\|_2$. Pour simplifier on prend $a = 0$ et $b = 1$.

1) Si $\forall f \in E : \|f\|_\infty \leq k \|f\|_1$, considérons la suite $(f_n), n \geq 2$, de fonctions définie ainsi : $f_n(t) = nt$ si $t \in [0, \frac{1}{n}]$, $f_n(t) = -nt + 2$ si $t \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$, $f_n(t) = 0$ si $t \in [\frac{2}{n}, 1]$ ($f_n \in E$, dessinez !). On aurait pour tout $n \geq 2$:

$$\|f_n\|_\infty = 1 \leq k \cdot \|f_n\|_1 = k \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n} \cdot 1 = k \cdot \frac{1}{n}, \text{ d'où à la limite : } 1 \leq 0. \text{ Contradiction ! } \spadesuit$$

2) Si $\forall f \in E : \|f\|_2 \leq k \|f\|_1$, considérons la suite $(g_n), n \geq 2$, définie par :

$$g_n(t) = -n^{3/2}t + n^{1/2} \text{ si } t \in [0, \frac{1}{n}] \text{ et } g_n(t) = 0 \text{ si } t \in [\frac{1}{n}, 1] \text{ (} g_n \in E, \text{ dessinez !)}.$$

$$\text{On aurait pour tout } n : \|g_n\|_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} \cdot \sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \cdot \|g_n\|_2^2 = \int_0^{1/n} (-n^{3/2}t + n^{1/2})^2 dt = \frac{1}{3},$$

$$\text{d'où } \frac{1}{\sqrt{3}} \leq k \cdot \frac{1}{2\sqrt{n}} \implies \frac{1}{\sqrt{3}} \leq 0. \text{ Contradiction ! } \spadesuit$$

3) Si $\forall f \in E : \|f\|_\infty \leq k \|f\|_2$, la suite (g_n) ci-dessus donne : $\sqrt{n} \leq k \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$. Contradiction ! ♦

Nota :

Vous avez peut-être trouvé des exemples différents ? C'est votre droit ! Pour ceux qui n'ont rien trouvé, rappelez-vous des fonctions « chapeau pointu », ça sert souvent dans ce genre de question : on détermine hauteur et largeur des chapeaux en fonction de la situation, par tâtonnement . . . Appliquez cette méthode, par exemple à la Remarque suivant l'énoncé de l'exercice 3.2.

Exercice 3.3.

On veut prouver que, pour tout $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, $a < b$, on a : $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$, où :

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p} \text{ et } \|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Pour $f = 0$ le résultat est trivial, soit donc $f \neq 0$. On se donne $\varepsilon > 0$ arbitraire.

$$(\|f\|_p)^p = \int_a^b |f(t)|^p dt \leq \left(\max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \right)^p \int_a^b dt = (\|f\|_\infty)^p (b-a), \text{ d'où :}$$

$$\|f\|_p \leq (b-a)^{1/p} \|f\|_\infty.$$

Comme $\lim_{p \rightarrow \infty} (b-a)^{1/p} = 1$, il existe p_1 , tel que pour tout $p \geq p_1$, on a :

$$(b-a)^{1/p} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}, \text{ d'où, pour } p \geq p_1 : \|f\|_p \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{\|f\|_\infty}\right) \|f\|_\infty = \|f\|_\infty + \varepsilon.$$

D'autre part : $\|f\|_\infty$ est effectivement atteinte en un point $t_0 \in [a, b]$ (un au moins). Prenons (ce qui est loisible) $\varepsilon < \|f\|_\infty$. Comme f est continue, il existe un intervalle $[t_0 - \eta, t_0 + \eta]$, $\eta > 0$, dans lequel $|f(t)| \geq \|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}$ (modification $[a, a + \eta]$ ou $[b - \eta, b]$ si $t_0 = a$ ou bien $t_0 = b$).

On a :

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(t)|^p dt \geq \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} |f(t)|^p dt \geq \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p \int_{t_0-\eta}^{t_0+\eta} dt, \text{ soit :}$$

$$\|f\|_p^p \geq 2\eta \cdot \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p, \text{ et : } \|f\|_p \geq (2\eta)^{1/p} \cdot \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Comme $\lim_{p \rightarrow \infty} (2\eta)^{1/p} = 1$, il existe p_2 tel que, pour tout $p \geq p_2$: $(2\eta)^{1/p} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}$. D'où, pour $p \geq p_2$:

$$\|f\|_p \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2\|f\|_\infty}\right) \left(\|f\|_\infty - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \|f\|_\infty - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4\|f\|_\infty} \geq \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Ainsi, en regroupant : pour tout $p \geq \max\{p_1, p_2\}$: $\|f\|_\infty - \varepsilon \leq \|f\|_p \leq \|f\|_\infty + \varepsilon$.

C'est dire que : $\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$. ♦

Exercice 5.1.

Prenons $E = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Considérons les deux vecteurs $u = (1, 0)$ et $v = (1, 1)$. $\|u\|_\infty = \max\{1, 0\} = 1$, $\|v\|_\infty = \max\{1, 1\} = 1$, $u + v = (2, 1)$ et donc : $\|u + v\|_\infty = \max\{2, 1\} = 2 = \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$. Pourtant ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires ! ♦

(5.9) et (5.10). (5.9) est appelée *identité du parallélogramme* car elle exprime que : la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés. (5.10) est appelée *identité de la médiane* car elle dit que : la somme des carrés des longueurs de deux côtés adjacents d'un triangle est égale à la somme de la moitié du carré de la longueur du troisième côté et du double du carré de la longueur de la diagonale relative à ce côté. ♦

Prenons dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$: $u = (2, 0)$, $v = (0, 1)$; $u + v = (2, 1)$, $u - v = (2, -1)$; $\|u + v\|_\infty = 2$, $\|u - v\|_\infty = 2$, $\|u\|_\infty = 2$, $\|v\|_\infty = 1$; si l'on avait l'identité du parallélogramme, on aurait : $2^2 + 2^2 = 2(2^2 + 1^2)$, soit $8 = 10$, impossible ! ♦

Exercice 5.2.

Il n'y a aucune difficulté. Pour les exemples 3.2 et 3.3 et la propriété (5.5) nous renvoyons au corrigé de l'exercice 3.1. ♦

Exercice 5.3.

$E = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ [m lignes, n colonnes], $(a|b) = \text{tr}({}^t a.b)$. Avant tout il convient de s'assurer que $(a|b)$ est bien défini pour tous a, b dans $\mathcal{M}_{m,n}$. Si a possède m lignes et n colonnes, la transposée ${}^t a$ possède n lignes et m colonnes ; par conséquent ${}^t a.b$ est défini et ce produit est une matrice carrée à n lignes et n colonnes [dessinez les rectangles !] : la trace de ce produit a donc un sens, et $(a|b) = \text{tr}({}^t a.b)$ est bien défini.

Les propriétés (5.1), (5.2) d'un produit scalaire découlent immédiatement de la linéarité de la transposition et de la trace : ${}^t(a + b) = {}^t a + {}^t b$ et $\text{tr}(a + b) = \text{tr}(a) + \text{tr}(b)$, ${}^t(\lambda a) = \lambda {}^t a$, $\text{tr}(\lambda a) = \lambda \text{tr}(a)$. La symétrie (5.3) résulte des propriétés suivantes de la transposition : ${}^t(a.b) = {}^t b.{}^t a$, ${}^t({}^t a) = {}^t t a = a$, et de la propriété suivante de la trace : $\text{tr}({}^t a) = \text{tr}(a)$:

$$(b|a) = \text{tr}({}^t b.a) = \text{tr}[{}^t({}^t b.a)] = \text{tr}({}^t a.{}^t b) = \text{tr}({}^t a.b) = (a|b).$$

On sait déjà – Exemple 3.1 – que $(a|a) = \text{tr}({}^t a.a) = \|a\|_{2,2}^2 =$ somme des carrés de tous les éléments de $a =$ carré de la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^{m \cdot n}$, et donc :

$$(a|a) \geq 0, (a|a) = 0 \implies a = 0, \text{ soit (5.4), (5.5).}$$

$(a, b) \mapsto (a|b)$ est donc bien un produit scalaire sur E . ♦

L'inégalité $\|a.x\| \leq \|a\| \cdot \|x\|$ peut se prouver directement :

utilisez l'inégalité $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$, pour α et β réels, mais cette inégalité sera étudiée en détail dans le Chap. X. ♦

☞ **Exercice 5.4.**

Si $u \perp v$, i.e. si $(u|v) = 0$, on a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\|u + \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + 2\lambda(u|v) + \lambda^2\|v\|^2 = \|u\|^2 + \lambda^2\|v\|^2 \geq \|u\|^2, \text{ soit :} \\ \|u\| \leq \|u + \lambda v\|. \spadesuit$$

Réciproquement, si $\|u\| \leq \|u + \lambda v\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\|u\|^2 \leq \|u + \lambda v\|^2 = \|u\|^2 + 2\lambda(u|v) + \lambda^2\|v\|^2 \implies 2(u|v) + \lambda\|v\|^2 \geq 0, \text{ pour tout } \lambda \neq 0. \\ \text{Pour tout entier } n \geq 1, \text{ on a donc : } 2(u|v) + \frac{1}{n}\|v\|^2 \geq 0, \text{ et donc à la limite, quand } n \rightarrow \infty : \\ 2(u|v) \geq 0 \implies (u|v) \geq 0 (*).$$

Si $v = 0$ on a $u \perp v$; supposons $v \neq 0$. Faisons $\lambda = -3\frac{(u|v)}{\|v\|^2}$; si $\lambda = 0$ on a le résultat voulu, sinon : $2(u|v) - 3(u|v) = -(u|v) \geq 0 \implies (u|v) \leq 0$ qui avec (*) donne $(u|v) = 0$. \spadesuit

☞ **Exercice 5.5.**

$\forall u \in E \setminus \{0\}, \forall v \in E \setminus \{0\}$:

$$\left\| \frac{u}{\|u\|^2} - \frac{v}{\|v\|^2} \right\|^2 = \left\| \frac{u}{\|u\|^2} \right\|^2 - 2\frac{(u|v)}{\|u\|^2\|v\|^2} + \left\| \frac{v}{\|v\|^2} \right\|^2 \\ = \frac{1}{\|u\|^2} - 2\frac{(u|v)}{\|u\|^2\|v\|^2} + \frac{1}{\|v\|^2} = \frac{\|v\|^2 - 2(u|v) + \|u\|^2}{\|u\|^2\|v\|^2}$$

d'où le résultat cherché : $\left\| \frac{u}{\|u\|^2} - \frac{v}{\|v\|^2} \right\| = \frac{\|u - v\|}{\|u\| \cdot \|v\|}$. \spadesuit

$\forall u, v, w \in E \setminus \{0\}$:

$$\frac{\|u - v\|}{\|u\| \cdot \|v\|} = \left\| \frac{u}{\|u\|^2} - \frac{v}{\|v\|^2} \right\| \leq \left\| \frac{u}{\|u\|^2} - \frac{w}{\|w\|^2} \right\| + \left\| \frac{w}{\|w\|^2} - \frac{v}{\|v\|^2} \right\| \\ \leq \frac{\|u - w\|}{\|u\| \cdot \|w\|} + \frac{\|w - v\|}{\|w\| \cdot \|v\|} \text{ [en utilisant deux fois le résultat ci-dessus] ;}$$

multiplions les deux membres de l'égalité par $\|u\| \cdot \|v\| \cdot \|w\|$, et le résultat cherché est prouvé : $\|u - v\| \cdot \|w\| \leq \|v - w\| \cdot \|u\| + \|w - u\| \cdot \|v\|$ [on retrouve l'énoncé exact demandé avec une permutation circulaire de u, v, w]. Le résultat reste valide si des termes sont nuls. \spadesuit

Pour arriver à l'inégalité de Ptolémée, il suffit de changer u en $u - t$, v en $v - t$, et w en $w - t$ dans l'inégalité précédente :

$$\|u - v\| \cdot \|w - t\| \leq \|v - w\| \cdot \|u - t\| + \|w - u\| \cdot \|v - t\|. \spadesuit$$

Comme on peut s'en douter, Ptolémée (Claudios) qui vécut vers 90-168 n'a pas donné son inégalité en termes d'e.v.n... Mais plutôt dans les termes suivants : dans un quadrilatère (convexe), le produit des longueurs de deux côtés opposés est inférieur ou égal à la somme du produit des longueurs des deux autres côtés et du produit des diagonales (dessin !).

☞ **Exercice 5.6.**

On note $\|\cdot\|$ (resp. $[[\cdot]]$) la norme associée au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ (resp. $[\cdot|\cdot]$). Pour abrégé on note $Au := A(u)$, $Bu := B(u)$.

Si $\forall u, v \in E : [Au|Av] = (u|v)$, en faisant $v = u : [[Au]]^2 = \|u\|^2$, soit $\forall u \in E : [[Au]] = \|u\|$, et A est une isométrie. En effet, A étant linéaire :

$[[A(u - v)]] = \|u - v\| = [[Au - Av]]$; si $d(u, v) = \|u - v\|$ et $\partial(x, y) = [[x - y]]$, on a bien : $\partial(Au, Av) = d(u, v)$. \spadesuit

Réciproquement, on utilise l'identité de polarisation (5.9.2) et la linéarité de A :

$$[Au|Av] = \frac{1}{4} \{ [[Au + Av]]^2 - [[Au - Av]]^2 \} = \frac{1}{4} \{ [[A(u + v)]]^2 - [[A(u - v)]]^2 \} \\ = \frac{1}{4} \{ \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 \} = (u|v). \spadesuit$$

Ensuite, $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$[[B(\lambda u + \mu v) - \lambda Bu - \mu Bv]]^2 = [B(\lambda u + \mu v) - \lambda Bu - \mu Bv | B(\lambda u + \mu v) - \lambda Bu - \mu Bv] \\ = [[B(\lambda u + \mu v)]]^2 - \lambda[B(\lambda u + \mu v)|Bu] - \mu[B(\lambda u + \mu v)|Bv] \\ - \lambda[Bu|B(\lambda u + \mu v)] + \lambda^2[[Bu]]^2 + \lambda\mu[Bu|Bv] - \mu[Bv|B(\lambda u + \mu v)] \\ + \lambda\mu[Bv|Bu] + \mu^2[[Bv]]^2 \\ = \|\lambda u + \mu v\|^2 - \lambda(\lambda u + \mu v|u) - \mu(\lambda u + \mu v|v) - \lambda(u|\lambda u + \mu v) + \lambda^2\|u\|^2 + \lambda\mu(u|v) \\ - \mu(v|\lambda u + \mu v) + \lambda\mu(u|v) + \mu^2\|v\|^2 \\ = \lambda^2\|u\|^2 + 2\lambda\mu(u|v) + \mu^2\|v\|^2 - \lambda^2\|u\|^2 - \lambda\mu(u|v) - \lambda\mu(u|v) - \mu^2\|v\|^2 - \lambda^2\|u\|^2 \\ - \lambda\mu(u|v) + \lambda^2\|u\|^2 + \lambda\mu(u|v) - \lambda\mu(u|v) - \mu^2\|v\|^2 + \lambda\mu(u|v) + \mu^2\|v\|^2 = 0.$$

D'où : $B(\lambda u + \mu v) - \lambda Bu - \mu Bv = 0 \iff B(\lambda u + \mu v) = \lambda Bu + \mu Bv$, et B est linéaire. ♦

Finalement, ce qu'on a prouvé, c'est que :

$$[A \text{ linéaire et isométrique}] \iff \forall u, v \in E : [[Au|Av]] = (u|v).$$

🔗 **Exercice 6.1.**

Démontrons que $\text{sous-niv}(f, \alpha) = \text{pr}_1(\text{épi}(f) \cap (E \times \{\alpha\}))$.

Soit $u \in \text{sous-niv}(f, \alpha) : u \in E$ et $f(u) \leq \alpha$; soit le couple $(u, \alpha) : (u, \alpha) \in \text{épi}(f)$ car $f(u) \leq \alpha$ et $(u, \alpha) \in E \times \{\alpha\} \implies (u, \alpha) \in \text{épi}(f) \cap (E \times \{\alpha\})$, et :

$$\text{pr}_1(u, \alpha) = u \implies u \in \text{pr}_1(\text{épi}(f) \cap (E \times \{\alpha\})).$$

Inversement, soit $u \in \text{pr}_1(\text{épi}(f) \cap (E \times \{\alpha\})) : u = \text{pr}_1(v, \beta)$ où $(v, \beta) \in \text{épi}(f) \cap (E \times \{\alpha\})$; donc $\beta = \alpha$ et $f(v) \leq \alpha \implies u = v \in \text{sous-niv}(f, \alpha)$. ♦

Démontrons que $\text{épi}(f) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{R}} \text{sous-niv}(f, \alpha) \times \{\alpha\} := A$.

Soit $(u, \alpha) \in \text{épi}(f) : f(u) \leq \alpha \implies u \in \text{sous-niv}(f, \alpha)$, et :

$$(u, \alpha) \in \text{sous-niv}(f, \alpha) \times \{\alpha\} \subset \bigcup \dots$$

Inversement, soit $(v, \beta) \in A : \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } (v, \beta) \in \text{sous-niv}(f, \alpha) \times \{\alpha\} \text{ donc } \beta = \alpha \text{ et } f(v) \leq \alpha = \beta \implies (v, \beta) \in \text{épi}(f)$. ♦

🔗 **Exercice 6.2.**

Exemples : $A = \{a, b\}$;

$$\widehat{A} = \{\lambda a + \mu b / \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1\} = \{\lambda a + (1 - \lambda)b / 0 \leq \lambda \leq 1\} = [a, b].$$

$A = \{a, b, c\}$, a, b, c non alignés ;

$\widehat{A} = \{\lambda a + \mu b + \nu c / \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \nu \geq 0, \lambda + \mu + \nu = 1\}$ est le triangle « plein » de sommets a, b, c . ♦

1) $A \subset \widehat{A}$, car $a \in A \implies a = 1a \in \widehat{A}$ ($1a$ est une combinaison convexe avec $I = \{1\}$).

Supposons A convexe et démontrons que $\widehat{A} \subset A$.

Les combinaisons convexes de deux éléments de A (= segment joignant deux éléments) sont dans A , par définition de la convexité de A . Procédons par récurrence.

Pour $n \geq 2$, supposons que $\sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i a_i \in A$, si $a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i = 1$.

Considérons $\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j b_j$, où $b_j \in A, \mu_j \geq 0$, et $\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j = 1$. Un au moins des μ_j est $\neq 1$, sinon

$\sum_{j=1}^{n+1} \mu_j = n + 1 \geq 3$. Supposons que ce soit μ_{n+1} (sinon on permute !).

$\mu_1 + \dots + \mu_n + \mu_{n+1} = 1$, avec $\mu_{n+1} \neq 1$, d'où : $\frac{\mu_1}{1 - \mu_{n+1}} + \dots + \frac{\mu_n}{1 - \mu_{n+1}} = 1$, et

$\frac{\mu_i}{1 - \mu_{n+1}} \geq 0$; donc, d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $c = \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\mu_j}{1 - \mu_{n+1}} b_j \in A$. Par

conséquent :

$$b = \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j b_j = \sum_{j=1}^n \mu_j b_j + \mu_{n+1} b_{n+1} = (1 - \mu_{n+1})c + \mu_{n+1} b_{n+1} \in A,$$

car $c \in A, b_{n+1} \in A$ et $\mu_{n+1} > 0, (1 - \mu_{n+1}) + \mu_{n+1} = 1$. ♦

2) \widehat{A} est convexe.

En effet, soient $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_r a_r \in \widehat{A}$ et $b = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_s b_s \in \widehat{A}$, où $a_i, b_j \in A$,

$\lambda_i, \mu_j \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ et $\sum_{j=1}^s \mu_j = 1$, et soit $\theta \in]0, 1[$;

$$\theta a + (1 - \theta)b = \theta \lambda_1 a_1 + \dots + \theta \lambda_r a_r + (1 - \theta)\mu_1 b_1 + \dots + (1 - \theta)\mu_s b_s,$$

$\theta \lambda_i \geq 0, (1 - \theta)\mu_j \geq 0$, et :

$$\sum_{i=1}^r \theta \lambda_i + \sum_{j=1}^s (1 - \theta)\mu_j = \theta \sum_{i=1}^r \lambda_i + (1 - \theta) \sum_{j=1}^s \mu_j = \theta + (1 - \theta) = 1;$$

d'où : $\theta a + (1 - \theta)b \in \widehat{A}$. ♦

\widehat{A} est donc un convexe qui contient A ; montrons que c'est le plus petit convexe contenant A ;

soit B un convexe tel que : $A \subset B \subset \widehat{A}$; l'opération $A \mapsto \widehat{A}$ étant (évident) monotone pour \subset ,

on a : $\widehat{A} \subset \widehat{B} \subset \widehat{\widehat{A}}$, d'où par 1) : $\widehat{A} \subset B \subset \widehat{A}$ et $B = \widehat{A}$. ♦

On déduit facilement de ce résultat que : $\widehat{A} = \bigcap \{C / C \text{ convexe et } A \subset C\}$.

3) On veut prouver que si $f : E \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est convexe, on a :

$$\alpha := \sup_{a \in A} f(a) = \sup_{b \in \text{conv}(A)} f(b) := \beta.$$

Comme $A \subset \text{conv}(A)$, évidemment : $\alpha \leq \beta$.

Soit à présent $b \in \text{conv}(A) : b = \sum_{i \in I} \lambda_i a_i$, où I est fini, $a_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$. On démontre

facilement par récurrence que : $f(b) = f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i f(a_i)$

[cette inégalité de convexité est appelée l'*inégalité de Jensen*],

et $\forall i \in I : f(a_i) \leq \alpha \implies f(b) \leq \sum_{i \in I} \lambda_i \alpha = \alpha$; comme $f(b) \leq \alpha$ pour tout $b \in \text{conv}(A)$, on a :

$\beta \leq \alpha$, d'où le résultat. ♦

🔗 Exercice 6.3.

Raisonnement par contradiction : si \widehat{u} n'est pas un *minimum* absolu de f sur C , il existe $w \in C$, $w \neq \widehat{u}$ tel que $f(w) < f(\widehat{u})$. Soit $\lambda \in]0, 1[$ arbitraire ; f étant convexe :

$$f(\lambda w + (1 - \lambda)\widehat{u}) \leq \lambda f(w) + (1 - \lambda)f(\widehat{u}) < \lambda f(\widehat{u}) + (1 - \lambda)f(\widehat{u}) = f(\widehat{u}) \quad (*).$$

Mais, d'autre part : $w \in C$, $\widehat{u} \in C$ et C convexe $\implies \lambda w + (1 - \lambda)\widehat{u} \in C$;

$$\|\lambda w + (1 - \lambda)\widehat{u} - \widehat{u}\| = \lambda \|w - \widehat{u}\| < \rho \text{ si } \lambda < \lambda_0 = \frac{\rho}{\|w - \widehat{u}\|}, \text{ et donc, en choisissant}$$

$\lambda_1 < \lambda_0$, on a : $\lambda_1 w + (1 - \lambda_1)\widehat{u} \in B(\widehat{u}, \rho) \cap C$, et l'inégalité (*) est impossible pour λ_1 , car $f(\widehat{u}) \leq f(\lambda_1 w + (1 - \lambda_1)\widehat{u})$. Par conséquent, f atteint un *minimum* absolu en \widehat{u} . ♦

Cette propriété explique pourquoi les fonctions convexes sont en grande faveur en optimisation : ce sont des fonctions simples du point de vue de leur minimisation (mais pas de leur maximisation ! Voir Exercice 1.7, Chap. VI).

🔗 Exercice 6.4.

Toute l'astuce consiste à se rendre compte que les deux inégalités sont équivalentes entre-elles et sont équivalentes à l'identité du parallélogramme, on conclut alors par la caractérisation de Jordan-von Neumann.

Si l'on a (i), posant $x := u + v$, $y := u - v$, d'où : $u = \frac{1}{2}(x + y)$ et $v = \frac{1}{2}(x - y)$, il vient :

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 \leq 2\|\frac{1}{2}(x + y)\|^2 + 2\|\frac{1}{2}(x - y)\|^2, \text{ soit :}$$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \text{ cela pour tous } x, y \in E.$$

$$\text{Donc : (i) } \implies \forall u \in E, \forall v \in E : \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

C'est pareil pour (ii). ♦

Moralité : ce serait une bien mauvaise idée d'écrire un article sur les e.v.n. réels vérifiant (i) qui ne sont pas des espaces préhilbertiens . . . Le folklore des mathématiciens affirme que ce genre de mésaventure est arrivé à des « thésards » qui auraient écrit des dizaines de pages sur des ensembles dont ils ne s'étaient pas aperçu qu'ils étaient vides, ou sur des e.v.n. réduits à $\{0\}$. . . Personnellement je ne crois pas à cette histoire . . . Il existe bien des thèses vides, mais pour d'autres causes.

PROBLÈME

Jauge de Minkowski

Soit E un espace vectoriel *réel* de dimension quelconque ≥ 1 .

Soit A une partie *convexe* de E contenant l'origine : $0 \in A$.

Pour tout $u \in E$ on pose : $I(u) := \{\lambda \in \mathbb{R} / \lambda > 0 \text{ et } \frac{1}{\lambda}u \in A\}$, et :

$q(u) := \inf I(u)$ si $I(u) \neq \emptyset$, $q(u) := +\infty$ si $I(u) = \emptyset$, ce qui définit une fonction
 $q : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

1) Déterminez $I(u)$ et $q(u)$ pour tout $u \in E$ dans les exemples suivants : $E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1]$; $E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1[$; $E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(s, t) / -1 \leq s \leq +1, t \in \mathbb{R}\}$; $E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(s, t) / s^2 + t^2 \leq 1\}$.

2) Démontrez que $I(u)$ est : soit le vide \emptyset , soit un intervalle de la forme $] \alpha, +\infty[$ ou bien $[\alpha, +\infty[$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. Ecrivez $I(0)$ et $q(0)$.

Si l'on suppose que E est normé par $\| \cdot \|$, que valent $I(u)$ et $q(u)$ pour $A = B(0, \rho]$, $\rho > 0$ fixé ?

On considère les ensembles suivants : $C(A) = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A$ et $R(A) = \bigcap_{\lambda > 0} \lambda A$, où $\lambda A = \{\lambda a / a \in A\}$. Déterminez $C(A)$ et $R(A)$ dans les exemples de 1).

Pour tout $\rho > 0$ on pose :

$$L(\rho) := \{u \in E / q(u) < \rho\} \text{ et } N(\rho) := \{u \in E / q(u) \leq \rho\}.$$

3) Vérifiez que : $C(A) = \{u \in E / q(u) < +\infty\}$, $R(A) = \{u \in E / q(u) = 0\}$, $L(1) \subset A \subset N(1)$.

4) Démontrez que : $\forall \mu > 0, \forall u \in E : q(\mu u) = \mu q(u)$, et que : $\forall u \in E, \forall v \in E : q(u + v) \leq q(u) + q(v)$.

Démontrez que, pour tout $\rho > 0$, $L(\rho)$ et $N(\rho)$ sont convexes. Vérifiez que si A est symétrique, i.e. vérifie $[\forall u : u \in A \implies -u \in A]$, on a : $q(-u) = q(u)$.

A quelles conditions portant sur A a-t-on : q est une norme sur E ?

☞ *Attention* : La suite demande quelques connaissances des Chap. V et VI.

On suppose à présent que E est un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$.

5) Démontrez que $\text{int}(A) \subset L(1)$ et que $N(1) \subset \text{adh}(A)$.

6) Dans $E = \mathbb{R}^2$ euclidien, on considère l'ensemble :

$$A = \{(s, t) / s \geq 0, 0 < t \leq 1\} \cup \{(s, 0) / 0 \leq s < 1\}.$$

Déterminez, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, $I(u)$ et $q(u)$, $C(A)$ et $R(A)$. Démontrez que les inclusions $\text{int}(A) \subset L(1) \subset A \subset N(1) \subset \text{adh}(A)$ sont toutes strictes (ne copiez pas les calculs, résultats seulement).

7) Démontrez que si A est fermé dans E , les ensembles $N(\rho)$, $\rho > 0$ sont aussi fermés dans E .

8) On suppose que A est symétrique et tel que $0 \in \text{int}(A)$. Démontrez qu'il existe une constante $m > 0$ telle que : $\forall u \in E, \forall v \in E : |q(u) - q(v)| \leq m \|u - v\|$.

CORRIGÉ du PROBLÈME

1) $E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1]$: $I(u) = \emptyset$ pour $u < 0$, $q(u) = +\infty$; $I(u) = [u, +\infty[$ pour $u \geq 0$, $q(u) = u$. ♦

$E = \mathbb{R}$ et $A = [0, 1[$: $I(u) = \emptyset$ pour $u < 0$, $q(u) = +\infty$; $I(u) =]u, +\infty[$ pour $u \geq 0$, $q(u) = u$. ♦

$E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(s, t) / -1 \leq s \leq +1, t \in \mathbb{R}\}$: posons $u = (s, t)$; $I(u) = [|s|, +\infty[$ et $q(u) = |s|$. ♦

$E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(s, t) / s^2 + t^2 \leq 1\}$: $I(u) = [\sqrt{s^2 + t^2}, +\infty[$, $q(u) = \sqrt{s^2 + t^2}$. ♦

2) $I(u) = \emptyset \Leftrightarrow \forall \lambda > 0 : \lambda u \notin A$. Supposons qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\frac{1}{\lambda} \in A$, et soit $\mu > 0$ tel que $\mu > \lambda$. On a : $0 < \frac{\lambda}{\mu} < 1$; écrivons : $\frac{u}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \times \frac{u}{\lambda} = \frac{\lambda}{\mu} \times \frac{u}{\lambda} + (1 - \frac{\lambda}{\mu})0$;

on a $\frac{u}{\lambda} \in A$, $0 \in A$ et A est convexe, donc $\frac{u}{\mu} \in A$, soit $\mu \in I(u)$. Par conséquent, $I(u)$ est un intervalle de la forme $]\alpha, +\infty[$ ou $[\alpha, +\infty[$ (cf. exemples dans 1)), avec $\alpha = \inf I(u) = q(u)$. ♦

Evidemment : $I(0) =]0, +\infty[$ et $q(0) = 0$. ♦

Si E est normé par $\|\cdot\|$, et si l'on prend $A = B(0, \rho[$, pour que $\frac{u}{\lambda} \in A$, $\lambda > 0$, soit dans A il faut et il suffit que $\|\frac{u}{\lambda}\| = \frac{1}{\lambda}\|u\| < \rho$, soit : $\lambda > \frac{1}{\rho}\|u\|$. Donc $I(u) =]\frac{1}{\rho}\|u\|, +\infty[$ et $q(u) = \frac{1}{\rho}\|u\|$. Ainsi q est une *norme* proportionnelle à $\|\cdot\|$.

Pour $A = B(0, 1[$, ou $A = B(0, 1]$, q n'est autre que la norme. ♦

3) Remarquons que $C(A)$ et $R(A)$ sont $\neq \emptyset$ puisque 0 leur appartient.

Ce sont des *cônes*, en ce sens que pour tout $\mu > 0 : u \in C(A) \implies \mu u \in C(A)$, et $u \in R(A) \implies \mu u \in R(A)$ (vérifiez !).

$u \in C(A) \iff \exists \lambda > 0 : u \in \lambda A \iff \exists \lambda > 0, \exists a \in A : u = \lambda a$
 $\iff \exists \lambda > 0, \exists a \in A : \frac{u}{\lambda} \in A \iff \exists \lambda > 0 : \frac{u}{\lambda} \in A \iff I(u) \neq \emptyset$
 $\iff q(u) < +\infty$. ♦

$u \in R(A) \iff \forall \lambda > 0 : u \in \lambda A \iff \forall \lambda > 0, \exists a_\lambda \in A : u = \lambda a_\lambda$
 $\iff \forall \lambda > 0 : \frac{u}{\lambda} \in A \iff I(u) =]0, +\infty[\iff q(u) = 0$. ♦

Exemples :

$E = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$: $C(A) = [0, +\infty[$, $R(A) = \{0\}$.

$E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(s, t) / -1 \leq s \leq 1, t \in \mathbb{R}\}$: $C(A) = \mathbb{R}^2$, $R(A) = \{(0, t) / t \in \mathbb{R}\}$.

$E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(s, t) / s^2 + t^2 \leq 1\}$: $C(A) = \mathbb{R}^2$, $R(A) = \{(0, 0)\}$.

$(E, \|\cdot\|)$, $A = B(0, 1]$: $C(A) = E$, $R(A) = \{0\}$.

En conclusion : $[\forall u \in E : q(u) < +\infty] \iff C(A) = E$, et :

$[q(u) = 0 \iff u = 0] \iff R(A) = \{0\}$. ♦

$u \in L(1) \iff q(u) = \inf I(u) < 1$, d'où : $I(u) = [\alpha, +\infty[$ avec $\alpha < 1$. On en déduit que $u = \frac{u}{1} \in A$. ♦

Si $u \in A$, on a : $u = \frac{u}{1} \in A$ et donc $I(u)$ est de la forme $(\alpha, +\infty[$ avec $\alpha \leq 1$, d'où $q(u) \leq 1$ et $u \in N(1)$. ♦

4) Soit $\mu > 0 : I(\mu u) = \{\lambda > 0 / \frac{\mu}{\lambda} u \in A\} = \mu \{\lambda > 0 / \frac{1}{\lambda} u \in A\} = \mu I(u)$, ou – plus simplement encore : si $I(u) = (\alpha, +\infty[$, on a $I(\mu u) = (\mu\alpha, +\infty[$. Donc : $q(\mu u) = \mu q(u)$. ♦

Nota : On peut prolonger à $\mu \geq 0$; si $q(u) < +\infty$, pas de problème, sinon on étend le résultat en posant $0 \times (+\infty) = 0$ (à manipuler avec précautions ...).

Démontrons que $q(u+v) \leq q(u) + q(v)$ pour tous $u, v \in E$. Si $q(u)$ ou $q(v) = +\infty$, la question est réglée.

Supposons donc que $q(u)$ et $q(v)$ sont des réels. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque, posons : $\alpha := q(u) + \frac{1}{2}\varepsilon$, et $\beta := q(v) + \frac{1}{2}\varepsilon$.

On a (définition des intervalles $I(u)$ et $I(v)$) : $\alpha \in I(u)$ et $\beta \in I(v)$, soit : $\frac{u}{\alpha} \in A$ et $\frac{v}{\beta} \in A$.

D'autre part, on a : $0 < \frac{\alpha}{\alpha + \beta} < 1$, $0 < \frac{\beta}{\alpha + \beta} < 1$ et $\frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{\beta}{\alpha + \beta} = 1$; d'où, puisque

A est convexe : $\frac{u+v}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \times \frac{u}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \times \frac{v}{\beta} \in A$, c'est-à-dire : $\alpha + \beta \in I(u+v)$.
 Donc : $q(u+v) \leq \alpha + \beta = q(u) + q(v) + \varepsilon$, et comme cela est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a :
 $q(u+v) \leq q(u) + q(v)$. ♦

Prouvons que $L(\rho)$ est convexe (même démonstration pour $N(\rho)$).

Soient u et v dans $L(\rho)$, i.e. tels que $q(u) < \rho$ et $q(v) < \rho$, et soit $\lambda \in]0, 1[$:
 $q[\lambda u + (1-\lambda)v] \leq q(\lambda u) + q[(1-\lambda)v] = \lambda q(u) + (1-\lambda)q(v)$
 $< \lambda \rho + (1-\lambda)\rho = \rho \implies \lambda u + (1-\lambda)v \in L(\rho)$. ♦

Soit $\lambda > 0$; $\lambda \in I(-u) \iff \frac{-u}{\lambda} \in A \iff -\frac{u}{\lambda} \in A \iff \frac{u}{\lambda} \in A$ par hypothèse
 $\iff \lambda \in I(u)$. Donc : $I(-u) = I(u)$ et $q(-u) = q(u)$ quand $-A = A$. ♦

Si $-A = A$, et si $\lambda < 0$, on a : $q(\lambda u) = q[(-\lambda)u] = -\lambda q(u)$. ♦

Par conséquent, pour tout $\lambda \neq 0$: $q(\lambda u) = |\lambda|q(u)$, relation valide pour $\lambda = 0$ si $q(u) < +\infty$
 (et même pour $q(u) = +\infty$ si l'on a fait la convention $0 \times +\infty = 0$).

Pour A convexe contenant 0, la fonction $q = q_A$ est appelée la **jauge de Minkowski** (ou simplement la **jauge**) de A . C'est une notion mathématique très intéressante. Il est clair que q_A ($0 \in A$ et A convexe) « ressemble » à une norme . . .

Ce qui précède nous permet d'énoncer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que q_A soit une norme sur E est que : $C(A) = E$, $R(A) = \{0\}$, A symétrique ($-A = A$).

Ainsi toutes les normes possibles sur un espace vectoriel E sont les jauges d'ensembles A possédant les propriétés suivantes : A convexe contenant 0, $C(A) = E$, $R(A) = \{0\}$, $-A = A$. ♦

5) Démontrons que $\text{int}(A) \subset L(1)$. Si $\text{int}(A) = \emptyset$ c'est terminé. Supposons donc que $\text{int}(A) \neq \emptyset$, et soit $u \in \text{int}(A)$. Il existe $\rho > 0$ tel que la boule $B(u, \rho]$ est contenue dans A .

Posons : $v := u + \rho \frac{u}{\|u\|}$; $\|v - u\| = \left\| \rho \frac{u}{\|u\|} \right\| = \rho \implies v \in B(u, \rho] \subset A$.

D'où : $(1 + \frac{\rho}{\|u\|})u \in A$, ce qui peut s'écrire : $\frac{1}{1 + \frac{\rho}{\|u\|}}u \in A$, soit : $\frac{1}{1 + \frac{\rho}{\|u\|}} \in I(u)$ et

$q(u) \leq \frac{1}{1 + \frac{\rho}{\|u\|}} < 1 \implies u \in L(1)$. ♦

Nota : Cette démonstration peut sembler « parachutée », elle ne l'est pas du tout : repartez à l'envers . . . ♦

Démontrons que $N(1) \subset \text{adh}(A)$. Soit $u \in N(1) \iff q(u) \leq 1$. On a donc : $I(u) = (\alpha, +\infty[$ avec $\alpha \leq 1$. Par conséquent, pour tout $\lambda > 1$, on a : $\lambda \in I(u) \iff \frac{u}{\lambda} \in A$.

En particulier, pour tout $n \geq 1$, on a : $(1 + \frac{1}{n})^{-1}u \in A$. Comme : $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{-1}u = u$, il vient :
 $u \in \text{adh}(A)$. ♦

6) Comme dans 1), $u = (s, t)$, et on calcule pour quelles valeurs de $\lambda > 0$ on a :
 $\frac{u}{\lambda} = (\frac{s}{\lambda}, \frac{t}{\lambda}) \in A$, d'où $I(u)$, puis $q(u)$.

a) $s < 0, t \in \mathbb{R} : I(u) = \emptyset, q(u) = +\infty$.

b) $s = 0, t \in \mathbb{R}$:

si $t < 0$, on a $I(u) = \emptyset, q(u) = +\infty$; si $t \geq 0$, on a : $I(u) = [t, +\infty[, q(u) = t$.

c) $s \geq 0, t > 0 : 0 < \frac{t}{\lambda} \leq 1 \iff \lambda \geq t$, d'où : $I(u) =]t, +\infty[, q(u) = t$.

d) $s \geq 0, t < 0 : I(u) = \emptyset, q(u) = +\infty$.

e) $s \geq 0, t = 0 : I(u) =]s, +\infty[, q(u) = s$.

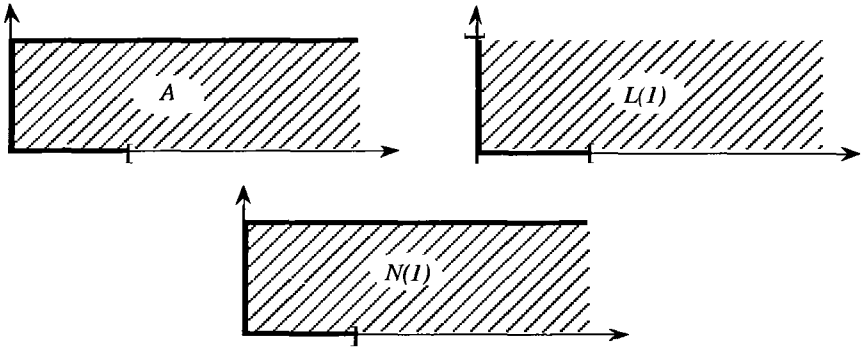
$C(A) = \{(s, t) / s \geq 0, t > 0\} \cup \{(0, t) / t \geq 0\} \cup \{(s, 0) / s \geq 0\}$
 $= \{(s, t) / s \geq 0, t \geq 0\} = \text{premier quadrant fermé}$.

$R(A) = \{(0, 0)\}$; $\text{int}(A) = \{(s, t) / s > 0, 0 < t < 1\}$.

$\text{adh}(A) = \{(s, t) / s \geq 0, 0 \leq t \leq 1\}$.

$L(1) = \{(0, t) / 0 \leq t < 1\} \cup \{(s, t) / s \geq 0, 0 < t < 1\} \cup \{(s, 0) / 0 \leq s < 1\}$.

$N(1) = \{(s, t) / s \geq 0, 0 < t \leq 1\} \cup \{(0, t) / t \leq 1\} \cup \{(s, 0) / 0 \leq s \leq 1\}$.



7) Si A est fermé, comme $A \subset N(1) \subset \text{adh}(A)$, on a : $\text{adh}(A) \subset N(1) \subset \text{adh}(A)$, soit : $N(1) = \text{adh}(A)$, qui est fermé.

$$\begin{aligned} \text{Ensuite : } N(\rho) &= \{u \in E / q(u) \leq \rho\} = \{u \in E / q(\frac{u}{\rho}) \leq 1\} \\ &= \rho \{ \frac{u}{\rho} \in E / q(\frac{u}{\rho}) \leq 1\} = \rho \{v \in E / q(v) \leq 1\} = \rho.N(1). \end{aligned}$$

$N(1)$ fermé et $\rho \geq 0 \implies \rho.N(1)$ fermé.

$\forall u \in E, \forall v \in E : q(u) = q(u - v + v) \leq q(u - v) + q(v)$ [par 4], et :

$$q(v) = q(v - u + u) \leq q(u - v) + q(v). \spadesuit$$

8) Comme A est symétrique : $q(u - v) = q(v - u)$, par 4), d'où : $|q(u) - q(v)| \leq q(u - v)$. Maintenant, comme $0 \in \text{int}(A)$, il existe une boule $B(0, \rho) \subset A$. Si $u = v$, l'inégalité cherchée est triviale ; supposons donc $u \neq v$. $\frac{\rho}{\|u - v\|}(u - v) \in B(0, \rho) \subset A$, d'où :

$$\frac{u - v}{\|u - v\|} \in A \implies q(u - v) \leq \frac{1}{\rho} \|u - v\| \implies |q(u) - q(v)| \leq \frac{1}{\rho} \|u - v\| ; \text{ on prend } m = \frac{1}{\rho}.$$

L'application q est donc lipschitzienne sur E , donc uniformément continue sur E . \spadesuit

Fin du chapitre II

CHAPITRE III

SUITES DE POINTS D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Introduction

Ce troisième chapitre est consacré à la notion fondamentale de *suite* (de points d'un espace métrique, d'un e.v.n.).

Bien entendu nous supposons que vous savez déjà ce qu'est une suite, une suite convergente de réels, de complexes, de vecteurs de \mathbb{R}^n , et – même – que vous n'ignorez pas tout des suites de fonctions et de leur convergence simple ou uniforme.

Nous supposons que vous avez acquis une certaine dextérité dans la manipulation des suites de réels. Si les expressions « suite croissante majorée », ou « théorème de Bolzano-Weierstrass », ou « suites adjacentes », n'évoquent strictement rien pour vous, *il faut* que vous relisiez avec soin un cours de D.E.U.G ! Séance tenante !

Toutefois, *comme dans les deux chapitres précédents, nous donnons toutes les définitions nécessaires et nous partons de zéro* afin de faciliter votre travail, quitte à ce que le chapitre soit un peu plus gros.

Nous ne parlerons pas ici de suite de Cauchy, car plusieurs chapitres leur sont consacrés (Chap. XI, XII, XV), et les chapitres XVI, XVII sont des chapitres d'applications de cette notion. Elles ne seront pas négligées !

Il est à remarquer que nous indexons ici les suites sur les parties infinies de \mathbb{N} , et non seulement sur \mathbb{N} entier, ou \mathbb{N}^* : en dépit des apparences, il ne s'agit *pas du tout* d'une généralisation ; c'est simplement plus commode, à notre avis. Les étudiants qui veulent conserver les suites indexées sur \mathbb{N} peuvent le faire, c'est sans importance ; attention à la notion de suite extraite dans ce cadre !

Une véritable généralisation des suites consisterait à introduire soit la notion – due à Henri Cartan – de *filtre*, soit (c'est équivalent) celle de *suite généralisée* indexée sur un ensemble dirigé quelconque. Tant qu'on se limite aux espaces métriques (c'est le cas à 98% dans ce cours), la notion de « suite ordinaire » s'avère suffisante. On s'en contentera.

Nous revenons avec soin sur les notions de suite extraite et de valeurs d'adhérence, notions qui ne sont pas en général très bien comprises en D.E.U.G.

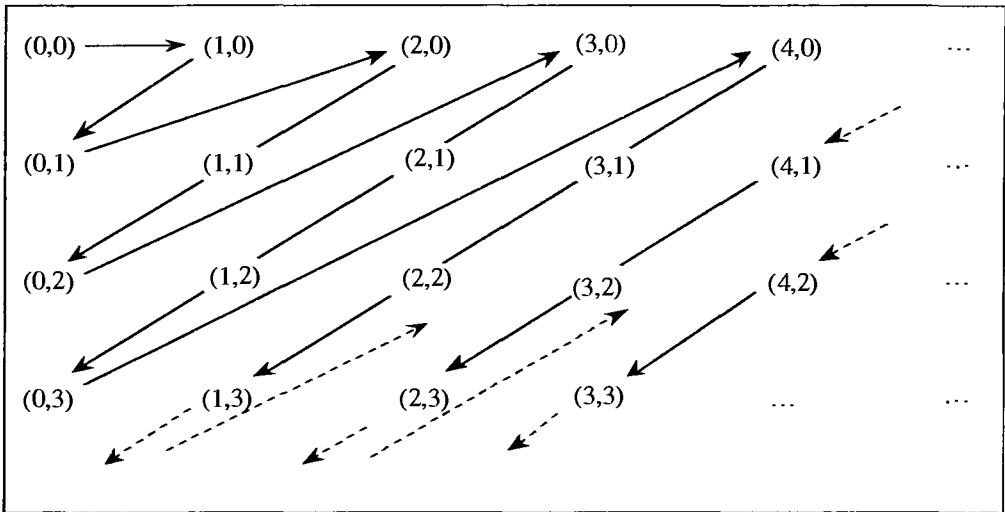
A titre d'application, nous étudions en détail les notions de *limite inférieure* (*supérieure*) d'une suite de réels. Ces notions sont indispensables en Analyse, tout spécialement en théorie de la mesure, où elles sont utilisées en permanence. Il y a là un (réel) effort à faire, qui est indispensable.

Ce chapitre, dans lequel apparaissent les premières véritables démonstrations, est néanmoins assez facile à travailler.

Exercices indispensables : 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.9, 2.10.

Exercices complémentaires : 2.3, 2.8, 2.11.

La Lecture et le problème sont consacrés à la définition de notions de convergence de suites d'*ensembles* (qui ne sont pas des points d'un espace métrique). Vous pouvez aborder le problème dès maintenant, mais vous devrez attendre le chapitre VIII pour le terminer. La lecture n'est nullement indispensable pour la suite du cours : ne vous en occupez pas si vous avez des difficultés à assimiler le cours.



$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable

$f(m, n) = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + n$ est une bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur \mathbb{N}

CHAPITRE III

SUITES DE POINTS D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Dans tout ce qui suit \mathbb{N} désignera l'ensemble des entiers naturels :
 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, et on notera $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Sans que cela soit explicité à chaque fois, on supposera *toujours* que \mathbb{N} est muni de son ordre total « naturel » et que toute partie de \mathbb{N} sera munie de l'ordre total induit par celui de \mathbb{N} .

1. SUITES DE POINTS D'UN ENSEMBLE

Définition 1.1.

Soit E un ensemble non vide quelconque. On appelle *suite de points de E indexée par S* toute application $f : S \rightarrow E$ définie sur une partie *infinie* S de \mathbb{N} , à valeurs dans l'ensemble E . Quand $S = \mathbb{N}$ ou bien $S = \mathbb{N}^*$ l'expression « indexée par \mathbb{N} » (ou \mathbb{N}^*) est généralement omise.

Notation :

Plutôt que de noter $f : n \in S \mapsto f(n)$ une suite de points de E indexée par S , on note le plus souvent l'ensemble de ses valeurs, dans l'ordre naturel, quand n parcourt S : $(f(m), f(n), f(p), \dots) = (u_k)_{k \in S}$, où $u_k = f(k) \in E$, notation dans laquelle m est le minimum de S , n l'élément de S suivant immédiatement m , p est le suivant de n , etc. Quand $S = \mathbb{N}$ on notera donc $(f(0), f(1), f(2), \dots) = (u_0, u_1, u_2, \dots)$ une suite.

$f(n) = u_n$ s'appelle le *terme de rang n* de la suite $(u_k)_{k \in S}$.

Le sous-ensemble $f(S)$ de E s'appelle l'*image de la suite*.

☞ Il ne faut surtout pas confondre une suite et son image ! Les suites – indexées par \mathbb{N} par exemple – suivantes : $(+1, -1, +1, -1, \dots)$ et $(+1, +1, -1, -1, +1, +1, \dots)$ ne sont évidemment pas identiques, mais elles ont même image, à savoir $\{-1, +1\}$. L'image d'une suite ne suffit pas pour « reconstituer » la suite elle-même.

Commentaires

1. On suppose que S est *infini* dans la définition 1.1, mais il n'y a pas d'inconvénient théorique à considérer aussi des *suites finies* (i.e. S fini) ; dans la pratique, en Analyse surtout, on serait alors obligé d'employer sans cesse l'expression « suite infinie ». Ce qu'on pourrait appeler « suite finie » sera dans ce cours un *n -uple*, où n est le nombre de termes de la « suite finie ». (u_0, u_1, \dots, u_n) sera un *n -uple*, pas une suite.

2. Pour beaucoup d'auteurs de manuels, une suite est une application de \mathbb{N} dans E , ou bien de \mathbb{N}^* dans E , ou plus généralement d'une partie S de \mathbb{N} telle que $\text{Card}(\mathbb{N} \setminus S)$ est fini dans E . C'est-à-dire que ne sont définies, « en gros » que les suites indexées par \mathbb{N} tout entier. C'est une manière de procéder parfaitement licite, en ce sens qu'elle ne restreint pas la généralité de la notion, cela parce que :

si S est une partie infinie de \mathbb{N} il existe une bijection strictement croissante unique $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow S$.

Sans entrer dans les détails, φ est définie par :

$\varphi(0) := \min(S)$, $\varphi(1) := \min(S \setminus \{\varphi(0)\})$, $\varphi(2) := \min(S \setminus \{\varphi(0), \varphi(1)\})$, \dots ,
 $\varphi(n) := \min(S \setminus \{\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(n-1)\})$, \dots , et l'application inverse ψ est
 définie par $\psi(\min(S)) = 0$, $\psi(\min(S \setminus \{\min(S)\})) = 1$, \dots , etc.

Donc si l'on considère une suite, au sens de la Déf. 1.1, $(u_n)_{n \in S} = (u_{s_1}, u_{s_2}, \dots)$,
 il revient au même de considérer la suite comme indexée sur \mathbb{N} en considérant la suite
 $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$.

La définition 1.1 ne constitue donc pas une généralisation : la définition d'une suite
 indexée par \mathbb{N} ou bien par une partie *infinie* arbitraire de \mathbb{N} est donc une simple question
 de goût. Nous pensons que « notre » définition est plus commode en Analyse, par
 exemple en cas d'extractions [Déf. 1.3] à répétition, c'est tout.

Il existe des généralisations véritables et intéressantes de la notion de suite (suites
 généralisées de Moore-Smith, filtres de H. Cartan), mais nous n'en parlerons pas ici.

Définition 1.2.

Une suite $(u_n)_{n \in S}$ d'éléments de E est dite **stationnaire** si elle est constante à
 partir d'un certain rang. Ce qui se traduit par :

$$\exists n_0 \in S, \forall n \in S : n \geq n_0 \implies u_n = u_{n_0}.$$

L'image d'une suite stationnaire est nécessairement finie.

Définition 1.3.

On appelle **suite extraite** d'une suite $f : S \rightarrow E$, soit $(u_n)_{n \in S}$, toute restriction
 de l'application f à une partie *infinie* T de S . On notera $(u_n)_{n \in T \subset S}$ une suite
 extraite.

Commentaires :

1. Notez bien que, conformément à la définition d'une suite, on suppose T *infini*
 dans la définition 1.3. Une suite extraite est effectivement une suite, ce qui est heureux
 pour la terminologie choisie . . .

2. Si l'on définit les suites indexées par \mathbb{N} seulement, que devient la notion de suite
 extraite ? C'est très simple, une suite extraite correspond, dans ce cadre, à la donnée
 d'une suite strictement croissante $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $k \mapsto n_k$, d'entiers naturels, et on note alors
 $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ la suite extraite.

Exemple 1.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Soit P l'ensemble des entiers pairs et soit I
 celui des impairs : $(u_n)_{n \in P}$ et $(u_n)_{n \in I}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers $> 2 : 3, 5, 7, \dots$ \mathcal{P} étant infini (savez-vous
 le prouver ?), $(u_n)_{n \in \mathcal{P}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, c'est aussi une suite extraite
 de $(u_n)_{n \in I}$.

On pourrait aussi considérer $F = \{n! / n \in \mathbb{N}^*\}$, $H = \{8n / n \in \mathbb{N}\}$, \dots $(u_n)_{n \in F}$
 est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, mais aussi de $(u_n)_{n \in P}$, de même pour $(u_n)_{n \in H}, \dots$

Avec l'autre définition, Commentaire 2, on aurait plutôt écrit : $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$,
 $(u_{n!})_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(u_{8n})_{n \in \mathbb{N}}$, \dots Mais *quid* pour \mathcal{P} ? Réponse : $(u_n)_{n \in \mathbb{N}, n \text{ premier} \geq 3}$.

Bref :

Une suite extraite est fabriquée à partir d'une suite donnée en supprimant un nombre
 fini ou bien infini de termes, de façon à ce qu'il en reste un nombre infini, les termes
 restants étant bien entendu des termes de la suite initiale.

Opérations sur les suites

Supposons que E , au lieu d'être un ensemble quelconque, non structuré, soit un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Soient $(u_n)_{n \in S}$ et $(v_n)_{n \in S}$ deux suites d'éléments de E indexées sur une même partie (infinie) S de \mathbb{N} . La suite **somme** de terme général w_n , $n \in S$, est par définition la suite, encore indexée sur S , définie par : $w_n = u_n + v_n$. De même, si $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit la suite **produit par un scalaire**, de terme général z_n , $n \in S$, par : $z_n = \lambda \cdot u_n$.

Avec ces deux opérations les suites indexées sur S constituent un espace vectoriel sur \mathbb{K} . Cet espace n'est autre que l'espace vectoriel classique (cf. cours de D.E.U.G.) $\mathcal{F}(S, E)$ de toutes les applications $S \rightarrow E$.

De la même façon, si E est un anneau avec un produit $*$, on considérera la suite produit de terme général $u_n * v_n$.

2. SUITES DE POINTS D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Définition 2.1.

Soit (E, d) un espace métrique et soit $(u_n)_{n \in S}$ une suite de points de E . Soit $u \in E$. On dit que $(u_n)_{n \in S}$ **converge vers** u si l'on a :

$$(2.1) \quad \boxed{\forall \varepsilon \text{ réel } > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies d(u_n, u) \leq \varepsilon.}$$

Commentaires :

La proposition (2.1) peut aussi bien s'écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies u_n \in B(u, \varepsilon], \text{ et se lire :}$$

« pour tout ε réel > 0 , tous les u_n sauf peut-être pour un nombre fini d'indices sont dans la boule $B(u, \varepsilon]$ ».

En utilisant la notation $f : S \rightarrow E$, (2.1) peut encore s'énoncer :

$$\forall \varepsilon > 0, f(S) \subset B(u, \varepsilon], \text{ sauf peut-être pour un nombre fini d'éléments de } S.$$

A cause du $\forall \varepsilon > 0$, on peut remplacer $d(u_n, u) \leq \varepsilon$ par $d(u_n, u) < \varepsilon$, i.e. $B(u, \varepsilon]$ par $B(u, \varepsilon[$. De même $n > N$ peut être mis à la place de $n \geq N$. Mais $\varepsilon > 0$, et non $\varepsilon \geq 0$, est fondamental ! Le lecteur doit assimiler parfaitement les remarques ci-dessus.

Théorème 2.1. (FONDAMENTAL)

Si une suite $(u_n)_{n \in S}$ de points d'un espace métrique (E, d) converge vers $u \in E$ et vers $v \in E$ on a obligatoirement $u = v$.

Démonstration (à connaître) :

Supposons, raisonnant par contradiction, que $u \neq v$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{3}d(u, v)$. D'après l'axiome de séparation de la définition d'une distance, on a $\varepsilon > 0$. Par hypothèse :

$$(1) \quad \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies d(u_n, u) \leq \frac{1}{3}d(u, v)$$

$$(2) \quad \exists M \in S, \forall n \in S : n \geq M \implies d(u_n, v) \leq \frac{1}{3}d(u, v)$$

d'où l'on déduit que pour tout $n \in S$, $n \geq P$, où $P = \max\{N, M\}$, on a :

$$d(u, v) \leq d(u, u_n) + d(u_n, v) \text{ [inég. triang.] } \leq \frac{1}{3}d(u, v) + \frac{1}{3}d(u, v) = \frac{2}{3}d(u, v)$$

ce qui est manifestement impossible ($1 \leq \frac{2}{3}$!) si $d(u, v) \neq 0$. L'hypothèse $u \neq v$ conduit à une contradiction, par conséquent $u = v$. ♦

Si $(u_n)_{n \in S}$ converge vers $u \in E$ on écrira : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n) = u$, ou $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in S}} (u_n) = u$ ou encore $(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty, n \in S]{} u$.

On peut simplifier ces notations : si S ne fait pas de doute, on peut omettre $n \in S$; quant à $n \rightarrow \infty$, son usage est plutôt d'ordre historique, le signe « \lim » indiquant déjà de quoi il s'agit ... On écrira donc simplement : $\lim(u_n) = u$ ou $(u_n) \rightarrow u$, nous réservant de préciser ce qui doit l'être si S est remplacé par un sous-ensemble T , ou si la suite est indexée plusieurs fois : $(u_{n,m})$. La suite du cours permettra de préciser les écritures les plus adéquates.

Définition 2.2.

S'il existe $u \in E$ tel que $\lim(u_n) = u$ on dit que la suite (u_n) est **convergente** [sous-entendu : dans l'espace métrique (E, d)], et que u est la **limite** de la suite (u_n) . On dit aussi que (u_n) **converge** (ou **tend**), **vers** u .

☞ C'est le Théorème 2.1 qui permet de parler de **La** limite.

S'il n'existe aucun $u \in E$ tel que $\lim(u_n) = u$ on dit que la suite (u_n) est **divergente**.

Ecrivons que $(u_n)_{n \in S}$ est **convergente** :

$$(2.2) \quad \exists u \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies d(u_n, u) \leq \varepsilon.$$

Ecrivons que $(u_n)_{n \in S}$ est **divergente**, i.e. la négation logique de la proposition (2.2) :

$$(2.3) \quad \forall u \in E, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in S, \exists n \in S : n \geq N \wedge d(u_n, u) > \varepsilon.$$

(2.3) peut s'énoncer :

pour tout $u \in E$, il existe un $\varepsilon = \varepsilon(u) > 0$, et il existe une suite extraite $(u_n)_{n \in T}$ telle que pour tous les termes de cette suite on a $d(u_n, u) > \varepsilon$ [UTILE].

Commentaire :

La définition (2.1) de la convergence d'une suite dans un espace métrique se ramène en fait à la définition de la convergence d'une suite de réels, définition que le lecteur est supposé bien connaître. En effet, dire que $\lim(u_n)_{n \in S} = u$, cf. (2.1), ne signifie pas autre chose que :

$$(2.4) \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (d(u_n, u)) = 0}.$$

Exemple 2.1.

1. Toute suite stationnaire converge, dans tout espace métrique.
2. Si un ensemble quelconque E est muni de la distance discrète [voir le Chap.I, Exemple 1.4], aucune suite non stationnaire n'est convergente !

On voit de manière frappante, avec cet exemple, que la notion de convergence d'une suite dépend de manière *essentielle* de la distance qu'on utilise. Toutefois, si l'on change la distance d en une distance équivalente δ [cf. Chap.I, Déf. 2.2] on ne change pas la nature (convergence, divergence) des suites de (E, d) , et pour les suites convergentes on ne change pas la limite.

☞ **Exercice 2.1.** (très facile) Démontrez les trois assertions ci-dessus.

☞ **Exercice 2.2.** (très facile) Démontrez que dans un espace métrique (E, d) on a : $[\lim(u_n) = u \text{ et } \lim(v_n) = v] \implies \lim(d(u_n, v_n)) = d(u, v)$.

Proposition 2.1.

|| Toute suite **convergente** dans un espace métrique (E, d) est **bornée** dans cet espace.

Remarque : La notion de suite bornée a un sens puisque une suite de points de E est une application $f : S \rightarrow E$ et f bornée signifie $f(S)$ borné dans E [Chap.I (3.22)].

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n \in S}$ une suite convergente, de limite $u \in E$. Dans la Définition 2.1 faisons $\varepsilon = 1$ (par exemple). Il existe $N \in S$ tel que pour tout $n \in S$, $n \geq N$, on a $u_n \in B(u, 1]$. $Q = \{n \in S / n < N\}$ est fini ; soit $A = \{u_n / n \in Q\}$: c'est un ensemble fini donc borné. Pour tout $n \in S$ on a : $u_n \in A \cup B(u, 1]$ ensemble borné comme réunion de deux bornés, donc la suite est bornée. ♦

Proposition 2.2. (IMPORTANTE)

|| Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente, avec la même limite.

Démonstration :

Soit $(u_n)_{n \in S}$ convergente de limite u , et soit $(u_n)_{n \in T}$ une suite extraite. On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies d(u_n, u) \leq \varepsilon$. Soit P le plus petit entier qui est dans T et est $\geq N$: P existe puisque T est infini (définition d'une suite extraite). Pour tout $n \geq P \geq N$, $n \in T$, on a $d(u_n, u) \leq \varepsilon$; c'est dire que $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (u_n) = u$. ♦

☞ On utilise très fréquemment ce résultat sous forme *contraposée* [rappelons que $(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$] : si l'on peut trouver une suite extraite divergente, ou bien deux suites extraites convergentes ayant des limites distinctes, la suite initiale est divergente.

Par exemple : $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente car $((-1)^n)_{n \in P} = (+1)_{n \in P}$ est stationnaire de limite $+1$, et $((-1)^n)_{n \in I} = (-1)_{n \in I}$ est stationnaire de limite -1 ($P =$ pairs, $I =$ impairs).

Le résultat suivant caractérise l'*adhérence* d'une partie d'un e.m. [cf. Chap.I, Déf.3.2], ainsi que les parties *fermées* d'un e.m. en termes de suites ; d'usage constant, il est fondamental.

Proposition 2.3. (FONDAMENTALE)

|| Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie non vide de E .

(2.5) $u \in \text{adh}(A) \iff$ il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points appartenant à A telle que $\lim(a_n) = u$.

(2.6) A est fermé dans $(E, d) \iff$ toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente dans (E, d) a sa limite dans A .

Démonstration :

(2.5) Soit $u \in \text{adh}(A)$. Par définition toute boule $B(u, \rho[$ a une intersection non vide avec A . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B(u, \frac{1}{n+1}[\cap A \neq \emptyset$: on choisit a_n dans cette intersection. Pour tout n on a $a_n \in A$, et $d(a_n, u) < \frac{1}{n+1}$, d'où [par (2.4)] $\lim(a_n) = u$.

Réciproquement, soit $u \in E$ tel qu'il existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de A convergente vers u . Soit $B(u, \rho[$ une boule. Il existe N tel que pour tout $n \geq N$ on a $a_n \in B(u, \rho[$, d'où $B(u, \rho[\cap A \neq \emptyset$. ♦

(2.6) Si toute suite d'éléments de A convergente a sa limite dans A , on a A fermé. Il nous faut démontrer que $A = \text{adh}(A)$. Comme $A \subset \text{adh}(A)$, il nous suffit de prouver que $\text{adh}(A) \subset A$.

Soit $u \in \text{adh}(A)$; d'après (2.5) il existe (a_n) avec $a_n \in A$ pour tout n telle que $\lim(a_n) = u$. Par hypothèse $u \in A$, d'où le résultat.

Réciproquement, supposons A fermé, i.e. que $A = \text{adh}(A)$, et soit (a_n) une suite de points de A convergente de limite $u \in E$. D'après (2.5) $u \in \text{adh}(A) \subset A$, et la démonstration est terminée. ♦

Plaçons-nous dans le cadre d'un produit fini d'espaces métriques [cf. Chap.I (2.3)] (E_i, d_i) :

Proposition 2.4.

Soit $(u_n)_{n \in S}$, où $u_n = (u_n^1, \dots, u_n^N)$ une suite dans $E = \prod_{1 \leq i \leq N} E_i$ et soit $u = (u^1, \dots, u^N) \in E$. E étant muni d'une de ses distances naturelles (distances de Hölder), la suite $(u_n)_{n \in S}$ converge dans E si et seulement si pour tout $i = 1, 2, \dots, N$ on a : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n^i) = u^i$ dans l'espace métrique (E_i, d_i) [convergence *composante par composante*].

Démonstration :

Il suffit de remarquer que si $(\alpha_n), (\beta_n), (\gamma_n)$, par exemple, sont des suites à termes réels ≥ 0 , on a $\lim(\alpha_n + \beta_n + \gamma_n) = 0$ si et seulement si [$\lim(\alpha_n) = 0$ et $\lim(\beta_n) = 0$ et $\lim(\gamma_n) = 0$]. En effet : $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_n + \beta_n + \gamma_n$, etc. ♦

☞ **Exercice 2.3.** (difficile) Soit $(u_n)_{n \in S}$ une suite convergente de limite u dans un espace métrique (E, d) . Notons f l'application $S \rightarrow E$ définie par $f(n) = u_n$. Soit T une partie infinie de \mathbb{N} et soit $\varphi : T \rightarrow S$ une bijection de T sur S . Considérons la suite composée $f \circ \varphi$, i.e. la suite $(u_{\varphi(p)})_{p \in T}$. Démontrez que cette suite est convergente de limite u .

☞ **Exercice 2.4.** (très facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Démontrez que si les suites $(u_n)_{n \in S}$ et $(v_n)_{n \in S}$ convergent vers u et v respectivement, la suite somme $(u_n + v_n)_{n \in S}$ converge vers $u + v$, et que si $\lambda \in \mathbb{K}$, la suite $(\lambda u_n)_{n \in S}$ converge vers λu . Démontrez que si $\lim_{n \in S} (\lambda_n) = \lambda$ dans \mathbb{K} on a $\lim_{n \in S} (\lambda_n u_n) = \lambda u$. Démontrez enfin que $\lim_{n \in S} (\|u_n\|) = \|u\|$.

L'ensemble des suites convergentes (indexées sur un même S , bien sûr) est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(S, E)$, notons-le $c_{\mathbb{K}}(S, E)$. L'application $\Lambda : c_{\mathbb{K}}(S, E) \rightarrow E$, $(u_n)_{n \in S} \mapsto \lim_{n \in S} (u_n)$ est une application *linéaire*. L'ensemble des éléments de $c(S, E)$ qui ont pour limite 0 est un sous-espace vectoriel, noté $c_0(S, E)$ de $c(S, E)$. $c_0(S, E)$ est le noyau de $\Lambda : c_0(S, E) = \text{Ker}(\Lambda)$.

☞ **Exercice 2.5.** (assez facile, important) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite convergente de vecteurs de E , de limite $u \in E$.

a) On pose : $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrez que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et a pour limite u . Examinez la réciproque.

b) On pose : $w_n = \frac{1}{n^2}(u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrez que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente dans E et a pour limite $\frac{1}{2}u$.

☞ **Exercice 2.6.** (très facile) Soit $(u_n)_{n \in S}$ une suite d'un espace métrique (E, d) et soit $u \in E$. Démontrez que $(u_n)_{n \in S}$ converge vers u si et seulement si de toute suite extraite $(u_n)_{n \in T}$, $T \subset S$, on peut extraire une suite $(u_n)_{n \in U}$, $U \subset T$, convergente vers u .

Valeurs d'adhérence d'une suite dans un espace métrique

Devant une suite $(u_n)_{n \in S}$ de points d'un espace métrique, nous nous trouvons jusqu'à présent devant une alternative : la suite converge ou bien diverge dans E . Si la suite converge on peut (essayer de) déterminer sa limite. Dans le cas de la divergence on peut affiner l'analyse en examinant la convergence des suites extraites.

Définition 2.3.

On appelle *valeur d'adhérence* d'une suite $(u_n)_{n \in S}$ d'un espace métrique toute limite d'une suite extraite $(u_n)_{n \in T}$, $T \subset S$, T infini, de la suite $(u_n)_{n \in S}$.

Autrement dit : u est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in S}$ si et seulement si pour une partie infinie T de S on a $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (u_n) = u$.

En d'autres termes : u est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in S}$ équivaut à :

$$(2.7) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall N \in S, \exists n \in S : n \geq N \text{ et } d(u_n, u) \leq \varepsilon.$$

Exemples 2.2.

1) La suite de réels de terme général $u_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, possède deux valeurs d'adhérence – et deux seulement : voir l'Exercice 2.7 – qui sont -1 et $+1$.

2) Dans $E = \mathbb{C}$, la suite $u_n = i^n$, $n \in \mathbb{N}$, possède quatre – et quatre seulement, cf. Exercice 2.7 – valeurs d'adhérence : -1 et $+1$, $-i$ et $+i$, car $i^{4p} = +1$, $i^{4p+1} = +i$, $i^{4p+2} = -1$, $i^{4p+3} = -i$, pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3) Dans $E = \mathbb{R}$ la suite $u_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, n'a aucune valeur d'adhérence. Dans $E = \mathbb{R}^\#$ [cf. Chap. I, Exemple 1.6], (u_n) est convergente de limite $+\infty$. Dans $E = \mathbb{R}^\#$ [cf. Chap. I, Exemple 1.7], (u_n) est convergente de limite ω .

4) La suite de $E = \mathbb{R}$ de terme général $u_n = 0$ pour n pair et $u_n = n$ pour n impair a une seule valeur d'adhérence : 0 . Elle est divergente.

5) Une suite convergente n'a qu'une seule valeur d'adhérence, qui est sa limite.

6) Soit E un ensemble quelconque (non vide) muni de la distance discrète [cf. Chap. I, Exemple 1.4]. Une suite quelconque a une valeur d'adhérence si et seulement s'il existe une suite extraite stationnaire.

7) L'ensemble des valeurs d'adhérence peut être très « gros », et en particulier peut avoir un cardinal supérieur à celui des entiers. Par exemple, on démontre [voir le Chap. IV, Lecture] que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $u_n = \sin(n)$, $n \in \mathbb{N}$, dans $E = \mathbb{R}$, est l'intervalle $[-1, +1]$.

De même, l'ensemble des valeurs d'adhérence de l'ensemble des rationnels ≥ 0 , rangés en une suite est $[0, +\infty[$. L'explication vient de la « densité » des rationnels (voir un cours sur les réels : entre deux réels distincts aussi proches qu'on veut se trouve un rationnel).

Une manière d'énumérer les rationnels (représentés par des fractions) pour en faire une suite est illustrée par le schéma suivant (on saute les fractions déjà numérotées qui sont entre parenthèses) :

$$\frac{0}{1} \rightarrow \left(\frac{0}{2}\right) \rightarrow \frac{1}{1} \rightarrow \frac{2}{1} \rightarrow \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{0}{3}\right) \rightarrow \left(\frac{0}{4}\right) \rightarrow \frac{1}{3} \rightarrow \left(\frac{2}{2}\right) \rightarrow \frac{3}{1} \rightarrow \frac{4}{1} \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{0}{5}\right) \rightarrow \left(\frac{0}{6}\right) \rightarrow \frac{1}{5} \rightarrow \left(\frac{2}{4}\right) \rightarrow \left(\frac{3}{3}\right) \rightarrow \left(\frac{4}{2}\right) \rightarrow \text{etc.}$$

On voit bien mieux avec un tableau matriciel : sur la 1^{ère} ligne on met les fractions de numérateur 0 : $\frac{0}{1}$; $\frac{0}{2}$; $\frac{0}{3}$; ... , sur la seconde ligne on met les fractions de numérateur 1 : $\frac{1}{1}$; $\frac{1}{2}$; ... , etc., et le schéma ci-dessus indique le « parcours ». Dessinez ce tableau !

• **Exercice 2.7.** (pas si facile, mais à faire absolument) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points dans un espace métrique (E, d) . On pose : $P = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ pair}\}$, $I = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ impair}\}$, $M = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ est multiple de } 7\}$.

Démontrez que si les suites extraites $(u_n)_{n \in P}$, $(u_n)_{n \in I}$, $(u_n)_{n \in M}$ convergent dans E , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E (on ne suppose évidemment pas *a priori* que les suites extraites ont même limite, sinon l'exercice serait fini avant de commencer ...).

Cherchez (et trouvez !) un exemple de suite $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels divergente telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, les suites extraites $(\xi_{k.n})_{n \in \mathbb{N}}$ soient convergentes.

Indication : pensez « nombres premiers ».

• **Exercice 2.8.** (assez facile) Soient A_1, \dots, A_N un nombre fini N de parties infinies de \mathbb{N} telles que $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N = \mathbb{N}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points d'un espace métrique (E, d) . On suppose que : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in A_1} (u_n) = a_1 \in E, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty, n \in A_N} (u_n) = a_N \in E$.

Démontrez que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est égal à l'ensemble $\{a_1, \dots, a_N\}$.

Plus délicat : Une question naturelle se pose : le résultat précédent se prolonge-t-il à une partition infinie de \mathbb{N} ? La réponse est non. Déterminez une famille $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de parties infinies de \mathbb{N} telles que :

$\bigcup_{p \in \mathbb{N}} A_p = \mathbb{N}$, $A_p \cap A_q = \emptyset$ pour tout $p \neq q$, $\forall p \in \mathbb{N} : \lim_{n \rightarrow \infty, n \in A_p} (u_n) = a_p \in \mathbb{R}$, et telle que les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas toutes dans $\{a_0, a_1, a_2, \dots\}$.

Indication : pensez « nombres premiers » et « ensemble des multiples d'un entier ».

• **Exercice 2.9.** (facile, mais abstrait) . Soit $E = \ell^2$, l'espace vectoriel normé réel des suites de réels de carré sommable, muni de sa norme naturelle [voir Chap.II, Exemple 5.2]. On considère dans E les vecteurs de la base hilbertienne naturelle [cf. Chap.II, Exemple 5.4] : $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, $i = 1, 2, \dots$, 1 à la i -ème place. En utilisant ces vecteurs de E , construisez dans E :

a) une suite de vecteurs de E qui est bornée et dont on ne peut extraire aucune suite convergente, i.e. sans valeur d'adhérence,

b) une suite de vecteurs de E qui est bornée, qui ne possède qu'une valeur d'adhérence, qui est divergente.

Un conseil : ne cherchez pas trop compliqué !

• **Exercice 2.10.** (important, difficulté moyenne) Soit (E, d) un espace métrique et soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow E$ une application ; on note $f(m, n) = u_{m,n}$. On suppose que :

$\forall m \in \mathbb{N}, \exists u_m \in E$ tel que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{m,n})_{n \in \mathbb{N}} = u_m$, et que :

$\exists u \in E$ tel que : $\lim_{m \rightarrow \infty} (u_m)_{m \in \mathbb{N}} = u$.

Démontrez qu'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto \varphi(n)$, telle que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n, \varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}} = u$.

Prouvez par un exemple simple que $\varphi(n) = n$ ne convient pas en général.

• **Exercice 2.11.** (assez facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et soient A, B, C des parties non vides de E . On suppose que B est convexe fermé, et que C est borné. Démontrez que si $A + C \subset B + C$ on a : $A \subset B$ (« règle de simplification »).

Déduisez de ce résultat que si A, B sont des convexes fermés, et si C est borné, on a : $A + C = B + C \implies A = B$.

Indication : Soit $a \in A$, et soit $c_1 \in C$: il existe $b_1 \in B$ et $c_2 \in C$ tels que : $a + c_1 = b_1 + c_2$; on a : $a + c_2 \in B + C$, etc.

3. LIMITE SUPÉRIEURE ET LIMITE INFÉRIEURE D'UNE SUITE DE NOMBRES RÉELS

Il est souvent tentant, ne serait-ce que pour abrégé, d'écrire le symbole « lim » devant une suite $(u_n)_{n \in S}$, quitte à s'apercevoir à la suite de quelques calculs que cette limite n'existe pas ... Bien sûr on n'a pas le droit de rédiger ainsi ... Mais on peut le regretter ! Pour les suites de réels, et pour elles seulement, on va introduire deux notions de « limite », \liminf et \limsup , qui existent *toujours*, même si les suites sont divergentes, de sorte qu'on pourra toujours écrire $\limsup(\alpha_n)$ – par exemple – sans se préoccuper *a priori* de la nature de (α_n) . On légalisera ainsi une envie illicite, mais l'intérêt de ces notions dépasse de loin les questions d'écriture correcte !

Limite supérieure d'une suite de réels

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, indexée sur \mathbb{N} pour fixer les idées, mais on peut remplacer \mathbb{N} par $S \subset \mathbb{N}$, S infini arbitraire. Nous distinguerons deux cas suivant que cette suite est, ou n'est pas, majorée.

□ **Premier cas** : (α_n) est majorée ;

il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\alpha_n \leq C$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $A_n := \{\alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \dots\}$ et $\beta_n := \sup(A_n)$. Manifestement on a $A_{n+1} \subset A_n$, et, donc, $\beta_{n+1} \leq \beta_n$. La suite $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante dans \mathbb{R} et par conséquent

(cf. cours de D.E.U.G.) : (β_n) converge dans \mathbb{R} vers une limite que nous noterons β , ou bien tend vers $-\infty$.

• Premier sous-cas : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n) =: \beta \in \mathbb{R}$. β vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $\forall \varepsilon$ réel > 0 , $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies \beta_n < \beta + \varepsilon$ [convergence de (β_n)].

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe un N entier tel que : $\forall n : n \geq N \implies \alpha_n < \beta + \varepsilon$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall n \in \mathbb{N} : \beta_n > \beta - \varepsilon$ [$\forall n \in \mathbb{N} : \beta_n \geq \beta > \beta - \varepsilon$]. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ chaque ensemble A_n contient un α_n qui est $> \beta - \varepsilon$ [définition de $\beta_n := \sup(A_n)$] et, donc : pour une infinité de valeurs de $n \in \mathbb{N}$ on a : $\alpha_n > \beta - \varepsilon$.

Les deux conséquences (Donc ...) de (i) et (ii) nous permettent d'affirmer qu'il existe une suite extraite $(\alpha_n)_{n \in S}$ de (α_n) qui converge vers β .

• Second sous-cas : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n) = -\infty$.

La propriété (ii) n'a plus de sens tandis que (i) devient : pour tout ξ réel et pour tout n assez grand : $\alpha_n < \xi$, ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = -\infty$.

□ **Deuxième cas** : $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée ;

dans ce cas les β_n sont tous $+\infty$ et il est naturel de poser $\beta = +\infty$. Ici la propriété (i) n'a plus de sens, tandis que (ii) devient : pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, pour une infinité de valeurs de $n \in \mathbb{N} : \alpha_n > \eta$. Il existe donc une suite extraite de (α_n) qui tend vers $+\infty$.

Définition 3.1.

$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup(A_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup_{k \in \mathbb{N}} (\alpha_{n+k})]$ est appelé la **limite supérieure** [on dit aussi la **plus grande limite**] de la suite (α_n) .
On note $\beta = \limsup(\alpha_n)$ cette limite qui est dans $\overline{\mathbb{R}}$.

(on rencontre aussi la notation $\overline{\lim}$ dans la littérature, mais cette notation est un peu tombée en désuétude à cause de la difficulté typographique)

Puisque (β_n) est une suite décroissante, on a : $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n) = \inf\{\beta_n / n \in \mathbb{N}\}$, d'où :

$$(3.1) \quad \beta = \limsup(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup_{k \in \mathbb{N}} (\alpha_{n+k})] = \inf_{n \in \mathbb{N}} [\sup_{k \in \mathbb{N}} (\alpha_{n+k})].$$

L'expression « plus grande limite » résume la propriété importante suivante :

Proposition 3.1.

De la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on peut extraire une suite $(\alpha_n)_{n \in S}$, $S \subset \mathbb{N}$, S infini, dont la limite est β . mais on ne peut pas en extraire une dont la limite serait $> \beta$.

Démonstration :

Si β est un réel. Nous avons déjà remarqué qu'il existe une suite extraite de $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers β . Soit $\xi > \beta$, et considérons $\gamma = \beta + \frac{1}{2}(\xi - \beta) = \frac{1}{2}(\beta + \xi)$. Par (i), à partir d'un certain rang, tous les α_n sont $< \gamma$, et donc on ne peut pas extraire une suite convergente vers ξ .

Si $\beta = -\infty$: $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en entier vers β , et donc toute suite extraite a pour limite β .

Si $\beta = +\infty$ le problème ne se pose pas. ♦

La proposition ci-dessus a pour conséquence le :

Corollaire 3.1.

L'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence d'une suite de nombres réels $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une plus grande valeur (i.e. un *maximum*) qui peut être $-\infty$ ou bien $+\infty$: c'est $\lim \sup(\alpha_n)$.

On définit exactement de la même manière la notion de *limite inférieure* (on dit également la *plus petite limite*) de la suite (α_n) en considérant :

$\gamma_n := \inf(A_n) = \inf\{\alpha_{n+k} / k \in \mathbb{N}\}$ et $\gamma := \lim(\gamma_n)$. On note $\gamma := \lim \inf(\alpha_n)$ (on trouve aussi $\underline{\lim}(\alpha_n)$).

$$(3.2) \quad \gamma = \lim \inf(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\inf_{k \in \mathbb{N}} (\alpha_{n+k}) \right] = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\inf_{k \in \mathbb{N}} (\alpha_{n+k}) \right].$$

Symétriquement au Corollaire 3.1 on a : $\lim \inf(\alpha_n)$ est la plus petite valeur d'adhérence de la suite (α_n) ; c'est la plus petite des valeurs possibles pour la limite d'une suite extraite convergente de la suite (α_n) .

Comme pour tout n : $\gamma_n = \inf(A_n) \leq \sup(A_n) = \beta_n$, on a toujours $\gamma \leq \beta$, et $\gamma_n \geq \gamma_0$, $\beta_n \leq \beta_0$, d'où :

$$(3.3) \quad \inf_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n) \leq \lim \inf(\alpha_n) \leq \lim \sup(\alpha_n) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (\alpha_n).$$

Posons : $-A_n = \{-\alpha_n / \alpha_n \in A_n\}$: $\gamma_n = \inf(A_n) = -\sup(-A_n)$, et donc :

$$(3.4) \quad \lim \inf(\alpha_n) = -\lim \sup(-\alpha_n).$$

Suites indexées sur $S \subset \mathbb{N}$:

Tout ce qui vient d'être dit concernant $\lim \inf$ et $\lim \sup$ pour une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être répété pour une suite $(\alpha_n)_{n \in S}$, $S \subset \mathbb{N}$, S infini, et on définit ainsi $\lim \inf_{n \in S}(\alpha_n)$,

$\lim \sup_{n \in S}(\alpha_n)$. Mais on peut procéder différemment.

Soit en effet $u = (u_n)_{n \in S}$ une suite d'un espace métrique ; on suppose que $S = \{s_0, s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ (où $s_i < s_{i+1}$ pour tout i). Considérons la suite, indexée sur \mathbb{N} : $v = (v_n)$ où l'on pose : $v_0 = u_{s_0}$, $v_1 = u_{s_0}$, $v_2 = u_{s_0}, \dots, v_{s_1-1} = u_{s_0}$, $v_{s_1} = u_{s_1}$, $v_{s_1+1} = u_{s_1}, \dots, v_{s_2} = u_{s_2}$, $v_{s_2+1} = u_{s_2}, \dots, v_{s_n-1} = u_{s_{n-1}}$, $v_{s_n} = u_{s_n}$, $v_{s_n+1} = u_{s_n}, \dots$

Il est facile de voir que les suites $(u_n)_{n \in S}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont exactement les mêmes valeurs d'adhérence. On peut donc définir $\lim \inf_{n \in S}(u_n) = \lim \inf(v_n)$ où $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est construite comme indiqué ci-dessus. De même pour $\lim \sup_{n \in S}(u_n) = \lim \sup(v_n)$.

Ainsi, à toute suite de nombres réels $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui n'a pas – en général – de limite, nous avons associé deux éléments de $\overline{\mathbb{R}}$: $\lim \inf(\alpha_n)$ et $\lim \sup(\alpha_n)$ qui s'avèreront précieux en Analyse. Par exemple, si $\alpha_n \leq \beta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ne peut pas écrire $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) \leq \beta$ si la suite (α_n) n'est pas convergente (ou simplement si l'on n'en sait rien, ce qui est la situation la plus courante), mais on pourra écrire $\lim \sup(\alpha_n) \leq \beta$, ce qui est parfois amplement suffisant.

Un autre exemple : dans la formule (dite de Hadamard) qui donne le rayon de convergence ρ d'une série entière $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, on n'a pas besoin que la limite de $(|a_n|^{1/n})$ existe, on a : $1/\rho = \lim \sup(|a_n|^{1/n})$, nombre réel ≥ 0 ou $+\infty$ qui existe toujours.

La théorie de la mesure utilise $\lim \inf$ et $\lim \sup$ en permanence.

Exemples 3.1.

1) Soit la suite : $(\alpha_n) = (1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \dots, \frac{1}{n}, n, \dots)$. $\lim \inf(\alpha_n) = 0$ [on peut extraire la suite $(1/n)$] et $\lim \sup(\alpha_n) = +\infty$ [on peut extraire la suite (n)].

2) Soit $(\alpha_n) = (0, -1, 0, -2, 0, -3, 0, \dots, 0, -n, 0, \dots)$. $\liminf(\alpha_n) = -\infty$ [on peut extraire $(-n)$] et $\limsup(\alpha_n) = 0$ [on peut extraire la suite nulle].

3) $\alpha_n = (-1)^n (1 + \frac{1}{n+1})$, $n \in \mathbb{N}$: $\inf_{n \in \mathbb{N}}(\alpha_n) = \min_{n \in \mathbb{N}}(\alpha_n) = \alpha_1 = -3/2$;
 $\liminf(\alpha_n) = -1$ [suite extraite des termes de rang impair] ; $\limsup(\alpha_n) = +1$ [suite extraite des termes pairs] ; $\sup_{n \in \mathbb{N}}(\alpha_n) = \max_{n \in \mathbb{N}}(\alpha_n) = \alpha_0 = 2$.

4) $(\alpha_n) = (0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0, \dots)$. C'est-à-dire : $\alpha_{3n} = 0$, $\alpha_{3n+1} = 1$, $\alpha_{3n+2} = 2$. $\liminf(\alpha_n) = 0$, $\limsup(\alpha_n) = 2$.

Bien entendu les notions de \liminf et \limsup sont intimement liées à celle de limite, comme le montre déjà la Prop. 3.1 et le Corol. 3.1. Mais on a plus :

Proposition 3.2.

Pour qu'une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels converge vers un nombre réel α [resp. vers $-\infty$, resp. $+\infty$] il faut et il suffit que $\liminf(\alpha_n) = \limsup(\alpha_n) = \alpha$ [resp. $\limsup(\alpha_n) = -\infty$, resp. $\liminf(\alpha_n) = +\infty$].

Démonstration :

Supposons que (α_n) soit convergente. On peut extraire de (α_n) , dans tous les cas, une suite qui tend vers $\beta = \limsup(\alpha_n)$ et une suite qui tend vers $\gamma = \liminf(\alpha_n)$. Mais si (α_n) converge vers α , toutes les suites extraites doivent converger vers la même limite [Prop. 2.2 si $\alpha \in \mathbb{R}$, c'est vrai aussi si $\alpha = \pm\infty$], et donc $\beta = \gamma$.

Réciproquement, si $\beta = \gamma \in \mathbb{R}$: pour tout $\varepsilon > 0$, tous les α_n à partir d'un certain rang seront dans $]\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon[$ d'après (i), pareil pour γ . C'est dire que $\lim(\alpha_n) = \alpha$. Si $\beta = -\infty$, $\beta = \gamma = -\infty$: $\lim(\alpha_n) = -\infty$, et de même si $\gamma = +\infty$, $\beta = \gamma = +\infty$, et $\lim(\alpha_n) = +\infty$. ♦

On peut énoncer immédiatement le Corollaire suivant (supposé déjà connu, il est fondamental !) :

Théorème 3.1. (Théorème de Bolzano-Weierstraß)

De toute suite bornée de nombres réels on peut extraire une suite convergente dans \mathbb{R} .

Qu'on peut compléter (mais c'est sans importance par rapport à la valeur du résultat ci-dessus !) par : *de toute suite non majorée [resp. non minorée] on peut extraire une suite convergente vers $+\infty$ [resp. $-\infty$].*

Si l'on munit \mathbb{R}^n d'une des distances de Hölder [voir Chap.I,(2.6), et Prop. 2.4 du présent Chap.] on obtient facilement (convergence composante par composante) la généralisation à \mathbb{R}^n du Th. 3.1 :

Théorème 3.1. (suite)

De toute suite bornée de \mathbb{R}^n (bornée relativement à une norme de Hölder, par exemple la norme euclidienne) on peut extraire une suite convergente (relativement à une norme de Hölder) dans \mathbb{R}^n .

Remarque : Il faut bien entendu préciser par rapport à quelle distance on dit *borné* et *convergente* ; mais rappelons qu'en l'absence de précision \mathbb{R}^n est muni de la norme euclidienne, et que – donc – les précisions sur la distance employée sont en fait inutiles. Mais il faut avoir à l'esprit que dans \mathbb{R} discret la suite $(\frac{1}{n})_n$ n'a aucune suite extraite convergente puisque seules les suites stationnaires convergent dans cet espace métrique.

Exemple d'application en Optimisation

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

(i) f est *bornée inférieurement*, i.e. qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) \geq \mu$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

(ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \text{sous-niv}(f, \alpha) = \{u \in \mathbb{R}^n / f(u) \leq \alpha\}$ est borné (fonction dite *inf-bornée*),

(iii) pour toute suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^n convergente de limite $u \in \mathbb{R}^n$, on a :

$f(u) \leq \liminf f(u_p)$ (f est une fonction *semi-continue inférieurement*).

(3.5) **Conclusion** : il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(a) = \min_{u \in \mathbb{R}^n} f(u)$.

En d'autres termes [cf. fin du Chap.I] : $\mu(f, \mathbb{R}^n) \in \mathbb{R}$ et $\text{Argmin}(f, \mathbb{R}^n) \neq \emptyset$.

En effet, soit $\mu_0 = \inf_{u \in \mathbb{R}^n} f(u)$, on a $\mu_0 \in \mathbb{R}$, par (i). Soit $\varepsilon = \frac{1}{p}$, pour p entier ≥ 1 . Il existe (a_p) dans \mathbb{R}^n tel que $\mu_0 \leq f(a_p) < \mu_0 + \frac{1}{p}$. Puisque $a_p \in \text{sous-niv}(f, \mu_0 + \frac{1}{p})$ pour tout p , la suite (a_p) est bornée d'après (ii). D'après le Théorème de Bolzano-Weierstraß il existe $(a_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite $a \in \mathbb{R}^n$.

Donc, d'après (iii), on a : $f(a) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} f(a_p) \leq \mu_0 + \frac{1}{p}$. Comme cette inégalité est vraie pour tout p , on a $(\mu_0 \leq) f(a) \leq \mu_0$, i.e. $f(a) = \mu_0$. ♦

Propriétés de \liminf et \limsup

Soient $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels. On a :

(3.6) $\liminf(\alpha_n) + \liminf(\beta_n) \leq \liminf(\alpha_n + \beta_n) \leq \liminf(\alpha_n) + \limsup(\beta_n)$,
 $\limsup(\alpha_n) + \liminf(\beta_n) \leq \limsup(\alpha_n + \beta_n) \leq \limsup(\alpha_n) + \limsup(\beta_n)$.

Ces inégalités sont valides dès qu'elles ont un sens [il faut éliminer $+\infty + (-\infty)$].

Remarquez bien que \liminf et \limsup ne sont pas linéaires ! Et notez que :

$\liminf(\alpha_n + \beta_n) \geq \liminf(\alpha_n) + \liminf(\beta_n)$ tandis que

$\limsup(\alpha_n + \beta_n) \leq \limsup(\alpha_n) + \limsup(\beta_n)$.

On a aussi :

(3.7) si (α_n) est convergente :

(3.7.1) $\liminf(\alpha_n + \beta_n) = \lim(\alpha_n) + \liminf(\beta_n)$,

(3.7.2) $\limsup(\alpha_n + \beta_n) = \lim(\alpha_n) + \limsup(\beta_n)$.

Démonstration : Réécrivons (3.6), en notant $a = (\alpha_n)$, $b = (\beta_n)$:

$\liminf a + \liminf b \leq_{(1)} \liminf(a + b) \leq_{(2)} \liminf a + \limsup b$
 [et $\leq_{(2\text{bis})} \limsup a + \liminf b$]

$\left. \begin{array}{l} \liminf a + \limsup b \\ \limsup a + \liminf b \end{array} \right\} \leq_{(3)(3\text{bis})} \limsup(a + b) \leq_{(4)} \limsup a + \limsup b$.

Tout d'abord, si (3.6) est prouvée, (3.7) s'ensuit immédiatement : prouvons par exemple (3.7.1) ; d'après la Prop. 3.2, $\leq_{(1)}$ et $\leq_{(2\text{bis})}$:

$\liminf a + \liminf b = \lim a + \liminf b \leq \liminf(a + b) \leq \limsup a + \liminf b$
 $\leq \lim a + \liminf b \implies \liminf(a + b) = \lim a + \liminf b$.

De même pour (3.7.2) d'après la Prop. 3.2, $\leq_{(3)}$, $\leq_{(4)}$. ♦

Pour démontrer (3.6), on remarque que si l'on a (2)(3)(4), en changeant a en $-a$, b en $-b$, et en utilisant $\limsup(-a) = -\liminf a$, on obtient (1), (2bis), (3bis).

Comme : $\limsup a = \lim_{n \rightarrow \infty} [\sup(A_n)]$, et $\liminf a = \lim_{n \rightarrow \infty} [\inf(A_n)]$, où

$A_n = \{\alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots\}$, on voit qu'on est ramené à montrer que si $A \subset \mathbb{R}$, et $B \subset \mathbb{R}$ on a :

$$\inf(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B).$$

$\forall a \in A, \forall b \in B : a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$; donc $C = \{a + b / a \in A, b \in B\}$ est majoré par $\sup(A) + \sup(B)$, et comme $\sup(A + B)$ est le plus petit des majorants de $C : \sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

Posons $\xi := \inf(A)$; $\forall a \in A, \forall b \in B : \xi + b \leq a + b \leq \sup(A + B) \implies \forall b \in B : b \leq \sup(A + B) - \xi$; donc B est majoré par $\sup(A + B) - \xi$, et comme $\sup(B)$ est le plus petit des majorants :

$\sup(B) \leq \sup(A + B) - \xi \implies \inf(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$. ♦

Il est clair que les inégalités ci-dessus sont en général strictes : par exemple, pour $a = (-1, +1, -1, +1, -1, \dots)$ et $b = (+1, -1, +1, -1, +1, \dots)$, on a :

$a + b = (0, 0, 0, \dots) \implies \limsup(a + b) = 0 < \limsup a + \limsup b = 1 + 1 = 2$.

Tandis que pour $a = (1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, \dots)$ et $b = (0, 0, 0, 0, \dots)$:

$\liminf a + \limsup b = 0 + 0 = 0 < \limsup(a + b) = +\infty$.

Fin de la partie cours du chapitre III

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ Exercice 2.1.

a) Toute suite $(u_n)_{n \in S}$ stationnaire est convergente, de limite son « terme constant ». C'est évident. En effet, si $u_n = u_{n_0}$ pour tout $n \in S, n \geq n_0$, où $n_0 \in S$, soit $\varepsilon > 0$; pour tout $n \in S, n \geq n_0, u = u_{n_0}$ est le centre de la boule $B(u_{n_0}, \varepsilon]$, et donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u_{n_0} = u$. ♦

b) Dans un espace muni de la distance discrète, les seules suites convergentes sont les suites stationnaires. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq 1$ on a, pour tout $u \in E : B(u, \varepsilon] = \{u\}$. Donc, pour que tous les termes d'une suite (u_n) soient, à partir d'un certain rang, dans la boule $B(u, \varepsilon]$, il est nécessaire qu'à partir d'un certain rang, $u_n = u$. ♦

c) Supposons que $(u_n)_{n \in S}$ converge vers u dans (E, d) , et supposons qu'on remplace d par δ équivalente. Il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que :

$$\forall v, w \in E : c \cdot d(v, w) \leq \delta(v, w) \leq C \cdot d(v, w).$$

On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies d(u_n, u) \leq \varepsilon / C$ d'où :

$\delta(u_n, u) \leq C \cdot d(u_n, u) \leq C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$: donc (u_n) converge au sens de δ vers u .

Réciproquement, si (u_n) converge vers u pour δ :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies \delta(u_n, u) \leq c \cdot \varepsilon$ d'où :

$d(u_n, u) \leq \frac{1}{c} \delta(u_n, u) \leq \frac{1}{c} \cdot c \cdot \varepsilon = \varepsilon$: donc (u_n) converge vers u pour d . ♦

☞ Exercice 2.2.

Démontrons que : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n) = u$ et $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (v_n) = v$ entraînent

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (d(u_n, v_n)) = d(u, v).$$

Ecrivons : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in S$ [resp. $N_2 \in S$], $\forall n \in S : n \geq N_1$ [resp. $n \geq N_2$] $\implies d(u_n, u) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ [resp. $d(v_n, v) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$].

A présent : $|d(u_n, v_n) - d(u, v)| \leq |d(u_n, v_n) - d(u_n, v)| + |d(u_n, v) - d(u, v)|$
 $\leq d(v_n, v) + d(u_n, u)$ [seconde inégalité triangulaire]
 $\leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ pour tout $n \geq N \in S$ tel que $N \geq \max\{N_1, N_2\}$. ♦

☞ Exercice 2.3.

On a par hypothèse : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies f(n) \in B(u, \varepsilon]$. Ce qu'on veut établir, c'est : $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in T, \forall p \in T : p \geq P \implies f(\varphi(p)) \in B(u, \varepsilon]$.

On fixe $\varepsilon > 0$. Soit P le plus petit élément de T qui est $\geq N$. Soit $p \in T, p \geq P, \varphi(p) = n \in S$; deux cas se présentent :

(i) si $\varphi(p) = n < N : f(n) = f(\varphi(p))$ peut ne pas être dans $B(u, \varepsilon]$, et

(ii) si $\varphi(p) = n \geq N : f(n) = f(\varphi(p)) \in B(u, \varepsilon]$.

Il ne nous reste plus qu'à vérifier que $\varphi(p) < N$ ne peut être réalisé que pour un nombre fini de $p \in T$. C'est bien le cas parce que φ est bijective ; en effet, si pour $T_1 \subset T$, T_1 infini, on a $\varphi(T_1) \subset \{1, 2, \dots, N-1\} \cap S$, c'est qu'un des $n \in \{1, 2, \dots, N-1\} \cap S$ a une infinité d'antécédents, or il ne peut en avoir qu'un seul (φ injection). ♦

Ce résultat affirme que si l'on permute (permutation = bijection) les termes d'une suite convergente on obtient une suite convergente ayant la même limite que la suite initiale. Ce fait est intuitivement évident si l'on considère la définition suivante de la convergence vers $u \in E : \forall \varepsilon > 0, f(u_n) \subset B(u, \varepsilon]$ à l'exception éventuelle d'un nombre fini d'indices. Il est clair que ce résultat devient faux si φ n'est pas bijective : dans $E = \mathbb{R}$ prendre $u_n = \frac{1}{n}$ et $\varphi(2p) = 2, \varphi(2p+1) = 2p+1$. La suite composée contiendra la suite stationnaire $\frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers 0.

Exercice 2.4.

Si $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n) = u$ et $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (v_n) = v$:

$$\| (u_n + v_n) - (u + v) \| = \| (u_n - u) + (v_n - v) \| \leq \| u_n - u \| + \| v_n - v \| \xrightarrow[n \rightarrow \infty, n \in S]{} 0. \spadesuit$$

$$\| \lambda u_n - \lambda u \| = |\lambda| \cdot \| u_n - u \| \xrightarrow[n \rightarrow \infty, n \in S]{} 0, \text{ ce qui est un cas particulier de :}$$

$$\begin{aligned} \| \lambda_n u_n - \lambda u \| &= \| \lambda_n u_n - \lambda_n u + \lambda_n u - \lambda u \| \leq |\lambda_n| \cdot \| u_n - u \| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \| u \| \\ &\leq C \| u_n - u \| + |\lambda_n - \lambda| \cdot \| u \| \xrightarrow[n \rightarrow \infty, n \in S]{} 0 \end{aligned}$$

[$|\lambda_n| \leq C$, où $C > 0$: Prop. 2.2, si $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (\lambda_n) = \lambda$] . ♦

$$\| \| u_n \| - \| u \| \| \leq \| u_n - u \| \xrightarrow[n \rightarrow \infty, n \in S]{} 0 \text{ [seconde inégalité triangulaire]. } \spadesuit$$

Exercice 2.5.

a) Une remarque préliminaire intéressante : on peut se contenter sans restreindre la généralité de démontrer le résultat pour $u = 0$. Si, en effet, on a montré cela, et si $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - u) = 0, \text{ alors :}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [(u_1 - u) + (u_2 - u) + \dots + (u_n - u)] &= 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} [u_1 + u_2 + \dots + u_n] - \frac{n}{n} u \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} [u_1 + \dots + u_n] \right) - u. \end{aligned}$$

On supposera donc que $u = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque : $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq N \implies \| u_n \| = \| u_n - 0 \| \leq \frac{1}{2} \varepsilon$. Pour tout $n > N$, écrivons :

$$\| v_n \| \leq \frac{1}{n} [\| u_1 + \dots + u_{N-1} \|] + \frac{1}{n} [\| u_N \| + \dots + \| u_n \|].$$

Mais : $\frac{1}{n} [\| u_N \| + \dots + \| u_n \|] \leq \frac{1}{n} [n - N + 1] \frac{1}{2} \varepsilon$. D'autre part, pour un $M \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq M$: $\frac{1}{n} [\| u_1 + \dots + u_{N-1} \|] \leq \frac{1}{2} \varepsilon$, il suffit de prendre $M = \text{partie entière de } \frac{\varepsilon}{2} \| u_1 + \dots + u_{N-1} \| + 1$. Pour tout $n \geq \max\{N, M\}$, on a donc : $\| v_n \| \leq \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon$, et le résultat est démontré. ♦

La réciproque est évidemment fautive, car $u_n = (-1)^n$ diverge tandis que la suite (v_n) correspondante tend vers 0. La suite (v_n) porte le nom de somme de Cesàro. Des réciproques partielles existent, on les appelle Théorèmes taubériens. ♦

b) La suite (w_n) se traite de la même manière, en commençant par remarquer que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} [(u_1 - u) + 2(u_2 - u) + \dots + n(u_n - u)] \\ &= \frac{1}{n^2} [u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n] - \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n)u \\ &= \frac{1}{n^2} [u_1 + 2u_2 + \dots + nu_n] - \frac{n(n+1)}{2n^2} u, \text{ et que } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}. \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 2.6.

Si $(u_n)_{n \in S}$ converge vers u , toute suite extraite $(u_n)_{n \in T}, T \subset S$, converge aussi vers u , d'après la Prop. 2.2. D'où le résultat en prenant simplement $U := T$.

Pour la réciproque, raisonnons par contradiction et supposons que $(u_n)_{n \in S}$ ne converge pas vers u :

$$\neg [\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies d(u_n, u) \leq \varepsilon].$$

Soit : $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in S, \exists n \in S : n \geq N \wedge d(u_n, u) > \varepsilon$.

Il existe donc $\varepsilon > 0$ et une suite extraite $(u_n)_{n \in Z}, Z \subset S$, tels que : $\forall n \in Z, d(u_n, u) > \varepsilon$.

Il est clair que de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, on ne peut extraire aucune suite convergente vers u , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de départ, et donc $(u_n)_{n \in S}$ converge vers u . ♦

Il est intéressant (voir la remarque ci-dessous) d'écrire la proposition contraposée de l'implication

[de toute suite extraite de $(u_n)_{n \in S}$ on peut extraire une suite qui converge vers u]
 $\implies (u_n)_{n \in S}$ converge vers u .

Ce qui donne :

(*) si $(u_n)_{n \in S}$ ne converge pas vers u , il existe une suite extraite $(u_n)_{n \in T}$, $T \subset S$, dont aucune suite extraite ne converge vers u .

Remarque culturelle : Sur un ensemble $E \neq \emptyset$ arbitraire on peut définir raisonnablement une notion « abstraite » de convergence des suites, i.e. non obligatoirement liée à une topologie sur E , en imposant à cette notion les propriétés suivantes (axiomes de M. Fréchet et C. Kuratowski) :

- (i) toute suite stationnaire est convergente,
- (ii) toute suite extraite d'une suite convergente vers u converge vers u ,
- (iii) la propriété (*) ci-dessus.

Notez qu'on n'a pas imposé l'unicité de la limite. Une convergence possédant les propriétés ci-dessus n'est pas, en général, associée à une topologie [Chap. VI]. Par contre, on démontre que si l'on ajoute la propriété (iv) dont il sera question dans l'Exercice 2.10, la notion de convergence *a priori* abstraite est en fait la convergence associée à une distance (bien plus qu'une simple topologie, donc).

Exercice 2.7.

a) Ecrivons : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in P} (u_n) = u$, $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in I} (u_n) = v$, $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in M} (u_n) = w$.

Soit $Q = \{n \in \mathbb{N} / n \text{ est multiple de } 14\}$: $Q \subset P$ et $Q \subset M$, d'où – d'après la Proposition 2.2 :

$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in Q} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in P} (u_n) = u = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in M} (u_n) = w$.

Soit maintenant $R = \{n \in \mathbb{N} / n = 14k + 7, k \in \mathbb{N}\}$: $R \subset I$ et $R \subset M$, d'où – d'après la Proposition 2.2 :

$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in R} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in I} (u_n) = v = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in M} (u_n) = w$.

D'où : $w = u = v$. C'est terminé, car – de manière évidente :

si $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in P} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in I} (u_n) = u$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} (u_n) = u$: il suffit de revenir à la définition de la convergence d'une suite, et $n \in \mathbb{N}$ est nécessairement dans P ou bien dans I (!). ♦

b) Sans indication, ce ne serait pas si facile... Soit \mathcal{P} l'ensemble (il est infini) des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, etc, et soit pour $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$: $S_k = \{k \cdot n / n \in \mathbb{N}\}$. Pour tout k : $S_k \subset \mathbb{N} \setminus \mathcal{P}$. Il suffit de considérer la suite : $\xi_n = 1$ si $n \in \mathcal{P}$ et $\xi_n = 0$ si $n \in \mathbb{N} \setminus \mathcal{P}$. $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente puisque les suites extraites $(\xi_n)_{n \in \mathcal{P}}$ et $(\xi_n)_{n \in S_2}$ convergent respectivement vers 1 et 0 (et on applique la contraposée de la Prop. 2.2). $\forall k \geq 2$: $(\xi_n)_{n \in S_k}$ est convergente puisque stationnaire de terme constant égal à 0. ♦

Exercice 2.8.

a) Soit $(u_n)_{n \in S}$ une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente de limite u . Puisque S est infini, il existe au moins un indice k , $1 \leq k \leq N$, tel que $S \cap A_k$ est infini (bien réfléchir sur ce point qui est la clef de la démonstration).

Considérons alors la suite extraite $(u_n)_{n \in S \cap A_k}$: d'après la Prop. 2.1, on a :

$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S \cap A_k} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n) = u$, puisque $S \cap A_k \subset A_k$. ♦

Application immédiate : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite et supposons connues les limites des suites extraites $(u_{4k})_{k \in \mathbb{N}}$, $(u_{4k+1})_{k \in \mathbb{N}}$, $(u_{4k+2})_{k \in \mathbb{N}}$, $(u_{4k+3})_{k \in \mathbb{N}}$: on connaît alors toutes les valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. ♦

b) Soit \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers. On définit par récurrence les parties de \mathbb{N} suivantes : $A_2 = \{\text{entiers pairs}\} \cup \{0, 1\}$, $A_3 = \{\text{multiples impairs de } 3\}$,

$A_5 = \{\text{multiples de } 5 \text{ qui ne sont ni pairs ni multiples de } 3\}$, ..., pour $p \in \mathcal{P}$, $p > 5$:

$A_p = \{\text{multiples de } p \notin A_i \text{ pour } i \in \mathcal{P}, i \leq p-1\}$. Clairement, on a : $\forall p \in \mathcal{P}$: $\text{Card}(A_p) = \infty$, $\mathbb{N} = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} A_p$, $\forall p, q \in \mathcal{P}$, $p \neq q$: $A_p \cap A_q = \emptyset$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \in A_p$ avec $n \in \mathcal{P}$ unique ; on peut donc définir une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant : $x_n = \frac{1}{p}$.

$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in A_p} (x_n) = \frac{1}{p}$ (c'est une suite stationnaire). La suite répond bien aux conditions de l'énoncé. Mais pour la suite extraite $(x_p)_{p \in \mathcal{P}}$ on a : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathcal{P}} \frac{1}{p} = 0$, et 0 n'est pas dans l'ensemble $\{\frac{1}{p} / p \in \mathcal{P}\}$. ♦

Exercice 2.9.

Il suffit de faire les trois remarques simples suivantes :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \|e_n\| = \sqrt{1^2} = 1$,

(ii) $\forall n, m \in \mathbb{N}^*, n \neq m : d(e_n, e_m) = \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$, (la suite $e_n - e_m$ comporte un terme valant 1, un valant -1 et les autres sont nuls).

(iii) de manière générale, si $(u_n)_{n \in S}$ est convergente vers u :

$$\lim_{p \rightarrow \infty, p \in S} [\lim_{q \rightarrow \infty, q \in S} d(u_p, u_q)] = 0,$$

puisque $d(u_p, u_q) \leq d(u_p, u) + d(u, u_q)$ et cette somme tend vers 0.

a) On prend tout simplement $u_n = e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* : d(u_p, u_q) = \sqrt{2}$ ne tend pas vers 0 (!). $\|u_n\| = 1$ et (u_n) est bien bornée dans E . L'ensemble des points adhérents à cette suite bornée est vide.

A cause du Th. de Bolzano-Weierstraß on ne peut pas trouver un tel exemple dans \mathbb{R}^n (!). ♦

b) On prend $u_n = e_n$ si n est impair et $u_n = 0$ si n est pair. La suite extraite $(u_n)_{n \in P}$ stationnaire nulle a pour limite 0. Mais dès que dans une suite extraite il y a une infinité de termes impairs, on aura (cf. ci-dessus) : $d(u_{2p}, u_{2q+1}) = 1$ ou bien $d(u_{2p+1}, u_{2q+1}) = \sqrt{2}$ une infinité de fois, et la suite extraite ne peut pas converger. La suite est évidemment bornée par 1. ♦

Exercice 2.10.

Nous allons définir $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto \varphi(n)$ par récurrence sur n . On a par hypothèse : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{1,n}) = u_1$, et pour $\varepsilon = 1$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1 \implies u_{1,n} \in B(u_1, 1]$. Posons $\varphi(1) = N_1 : u_{1, \varphi(1)} \in B(u_1, 1]$. Ensuite, $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{2,n}) = u_2$ et, pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2 \implies u_{2,n} \in B(u_2, \frac{1}{2}]$; il est bien clair qu'on peut choisir $N_2 > N_1$ (!), et on prend $\varphi(2) = N_2 > N_1 = \varphi(1) : u_{2, \varphi(2)} \in B(u_2, \frac{1}{2}]$.

Supposons qu'on a défini ainsi $\varphi(1) < \varphi(2) < \dots < \varphi(p)$ avec $u_{i, \varphi(i)} \in B(u_i, \frac{1}{i}]$ pour $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq p$. Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{p+1,n}) = u_{p+1}$, et donc en faisant $\varepsilon = \frac{1}{p+1}$:

$\exists N_{p+1} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_{p+1} \implies u_{p+1,n} \in B(u_{p+1}, \frac{1}{p+1}]$. On prend $N_{p+1} > N_p$ - ce qui est loisible - et on pose $\varphi(p+1) = N_{p+1} : u_{p+1, \varphi(p+1)} \in B(u_{p+1}, \frac{1}{p+1}]$.

Il nous faut démontrer que la suite $(u_{n, \varphi(n)})$ ainsi construite terme par terme tend vers u quand $n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}$. On a :

$$d(u_{n, \varphi(n)}, u) \leq d(u_{n, \varphi(n)}, u_n) + d(u_n, u) \leq \frac{1}{n} + d(u_n, u).$$

Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u) = 0$ par hypothèse, d'où : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n, \varphi(n)}) = u$. ♦

(On remarque que la propriété démontrée utilise beaucoup les propriétés des espaces métriques, et, effectivement, cette propriété ne « passe pas » à des espaces topologiques plus généraux.)

Il est facile de trouver des exemples tels que la fonction $n \mapsto \varphi(n) = n$ ne convient pas : $(u_{1,n})_n = (1, 0, 0, 0, \dots) \rightarrow u_1 = 0$, $(u_{2,n})_n = (1, 2, 0, 0, \dots) \rightarrow u_2 = 0$, $(u_{3,n})_n = (1, 2, 3, 0, \dots) \rightarrow u_3 = 0, \dots, (u_{m,n})_n = (1, 2, \dots, m, 0, \dots) \rightarrow u_m = 0$, etc.

On a $\lim_{m \rightarrow \infty} (u_m) = 0$, mais $u_{n,n} = n$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ (!). Par contre $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_{n, n+1}) = 0$; $n \mapsto \varphi(n) = n+1$ marche très bien.

Autre exemple : $(v_{1,n})_n = (1, 0, 0, \dots) \rightarrow v_1 = 0$, $(v_{2,n})_n = (1, -1, 0, 0, \dots) \rightarrow v_2 = 0$,

$(v_{3,n})_n = (1, -1, 1, 0, \dots) \rightarrow v_3 = 0, \dots$,

$(v_{m,n})_n = (1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^{m-1}, 0, \dots) \rightarrow v_m = 0$, etc.

$\lim_{m \rightarrow \infty} (v_m) = 0$; $v_{n,n} = (-1)^{n-1}$ ne converge pas quand $n \rightarrow \infty$.

Sauriez-vous trouver un exemple pour lequel $n \mapsto \varphi(n) = n^n$ ne marche pas ?

Exercice 2.11.

Démontrons le premier résultat. Soit $a \in A$, et on veut prouver que $a \in B$.

Soit c_1 arbitraire dans C ; $a + c_1 \in A + C \subset B + C$, d'où : $\exists b_1 \in B$ et $\exists c_2 \in C$ tels que : $a + c_1 = b_1 + c_2$.

De la même façon, $a + c_2 \in A + C \subset B + C \implies \exists b_2 \in B, \exists c_3 \in C$ tels que $a + c_2 = b_2 + c_3$, puis : $a + c_3 = b_3 + c_4$, etc.

Ecrivons les égalités $a + c_1 = b_1 + c_2, a + c_2 = b_2 + c_3, a + c_3 = b_3 + c_4, \dots, a + c_n = b_n + c_{n+1}$ les unes en dessous des autres et ajoutons. Compte-tenu des simplifications par les c_i , on obtient : $na + c_1 = (b_1 + b_2 + \dots + b_n) + c_{n+1}$, soit :

$$a = \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \dots + b_n) + \frac{1}{n}(c_{n+1} - c_1) := u_n + \frac{1}{n}(c_{n+1} - c_1).$$

Comme B est convexe : $u_n = \frac{1}{n}b_1 + \dots + \frac{1}{n}b_n \in B$ [cf. Ex. 6.2 du Chap. II].

D'autre part : $\left\| \frac{1}{n}(c_{n+1} - c_1) \right\| \leq \frac{1}{n} \text{diam}(C) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ puisque C est borné [Chap. I, Déf. 3.4].

Ecrivons : $u_n = a - \frac{1}{n}(c_{n+1} - c_1)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = a$. Or (u_n) est une suite de B fermé, d'où $a \in B$ [par (2.6)]. ♦

Démontrons la seconde partie. On sait que si $A + C \subset B + C$ on a : $A \subset B$ si B est convexe fermé et si C est borné. On suppose que $A + C = B + C$ avec A et B convexes fermés et C borné. On a tout de suite : $A + C \subset B + C \implies A \subset B$. Ensuite, $B + C \subset A + C$ avec A convexe fermé et C borné $\implies B \subset A$. D'où : $A = B$. ♦

LECTURE

Convergence de suites d'ensembles

Soient E_d et F_δ des espaces métriques et soit $f : E \rightarrow F$.

Les mathématiques «classiques» accordent une très grande importance au fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$ dans E_d implique $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(u)$ dans F_δ , ce qui est parfaitement justifié puisque les applications qui vérifient cette propriété ne sont autre que les applications continues sur E [cf. Chap. VII].

Par contre le fait que $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = v$ dans F_δ implique (mais dans quel sens ?)

$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(\{v_n\}) = f^{-1}(\{v\})$ est en général complètement passé sous silence, ce qui est très curieux car une telle «continuité inverse» a autant d'intérêt que l'autre *a priori* (et *a posteriori* également).

Nous allons donner ici quelques indications sur des manières de résoudre ce problème, en donnant un sens à la notion de *convergence d'une suite de sous-ensembles*. Pour diverses raisons on se limite aux suites de parties *fermées*.

Nous avons déjà indiqué une solution avec la *distance de Hausdorff* [Chap. I, Exercice 3.8], mais celle-ci ne convient pas en général car elle ne fait converger que trop peu de suites d'ensembles (on dit qu'elle est trop fine).

Une autre convergence bien connue est celle de *Painlevé-Kuratowski*.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties fermées non vides de E ; on définit deux parties de E : $\text{Li}(A_n)$ et $\text{Ls}(A_n)$, de la manière suivante :

$$u \in \text{Li}(A_n) \iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A_n : \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = u,$$

$$v \in \text{Ls}(A_n) \iff \exists S \subset \mathbb{N}, S \text{ infini}, \forall n \in S, \exists a_n \in A_n : \lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (a_n) = v.$$

Clairement, on a : $\text{Li}(A_n) \subset \text{Ls}(A_n)$. On dit alors que (A_n) est *PK-convergente* si $\text{Li}(A_n) = \text{Ls}(A_n)$, et $A := \text{Li}(A_n) = \text{Ls}(A_n)$ est appelée la *PK-limite* de (A_n) , elle est notée $\text{PK-lim}(A_n)$. $\text{PK-lim}(A_n)$ peut être vide.

Plus récemment, diverses autres notions de convergence pour les suites d'ensembles ont été introduites (une trentaine !). Presque toutes appartiennent à deux catégories qui sont définies comme suit. On se donne $\mathcal{X} \neq \emptyset$ une famille de parties fermées non vides de E , et on définit (pour A_n, A fermés non vides) :

$$\mathcal{X}(p)\text{-}\lim(A_n) = A \iff \forall X \in \mathcal{X} : \lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, X) = d(A, X),$$

$$\mathcal{X}(q)\text{-}\lim(A_n) = A \iff \forall X \in \mathcal{X} : \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{x \in X} |d(x, A_n) - d(x, A)| \right] = 0.$$

Pour \mathcal{X} on peut prendre :

$\mathcal{F} := \{X \subset E / X \neq \emptyset, X \text{ fermé}\}$, $\mathcal{B} := \{X \in \mathcal{F} / X \text{ borné}\}$, $\mathcal{S} := \{\{u\} / u \in E\}$.

Si E est un e.v.n, on peut prendre :

$\mathcal{C} := \{X \in \mathcal{F} / X \text{ convexe}\}$, $\mathcal{CB} := \{X \in \mathcal{C} / X \text{ borné}\}$, etc.

Seule notre imagination peut nous arrêter dans le choix de \mathcal{X} (et aussi la nécessité de prouver l'intérêt de ce choix !). On obtient ainsi – très simplement – un grand nombre de convergences de suites d'ensembles ; celles-ci ne sont pas en général définies par des distances, mais plutôt par des familles de semi-distances ou d'écart [Chap.I]. PK n'est même pas définie par une topologie.

Ces convergences, études théoriques ou applications, se prêtent à d'innombrables exercices et problèmes ; le problème suivant donne un exemple de ce qu'on peut faire.

PROBLÈME
Stabilité en optimisation

☞ **Attention** : quelques connaissances élémentaires des Chap. VII et VIII sont nécessaires, et il est préférable d'avoir étudié les Chap. V et VI.

Soit (E, d) un espace métrique.

On note $\mathcal{F} := \mathcal{F}(E)$ l'ensemble des parties fermées non vides de E . Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ; pour $X \subset E, X \neq \emptyset$, on note : $\mu(f, X) = \inf\{f(x) / x \in X\}$ [cf. Chap. I, vocabulaire de l'optimisation]. f sera dite de type s.c.s. [resp. de type s.c.i.] si pour toute suite $(u_n)_n$ de points de E convergente de limite $u \in E$ on a : $\limsup_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \leq f(u)$ [resp. $f(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$].

Soient $A_n, n = 1, 2, \dots$, et A des éléments de \mathcal{F} . On définit à partir de la suite d'ensembles (A_n) une partie notée $\text{Li}(A_n)$ de E par : $u \in \text{Li}(A_n) \iff$ il existe une suite $(a_n)_n$ telle que $a_n \in A_n$ pour tout $n = 1, 2, \dots$ et telle que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = u$.

1) Démontrez que : $u \in \text{Li}(A_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(u, A_n) = 0$ [pour $d(u, Y)$ voir Chap.I (3.6)].

2) Démontrez que les six propositions suivantes sont toutes équivalentes :

[P1] $A \subset \text{Li}(A_n)$,

[P2] Quel que soit U, U ouvert dans E [cf. Chap.I, Prop.3.1] tel que $A \cap U \neq \emptyset$, il existe un entier N tel que pour tout $n : n \geq N \implies A_n \cap U \neq \emptyset$,

[P3] $\forall u \in E : \limsup_{n \rightarrow \infty} (d(u, A_n)) \leq d(u, A)$,

[P4] $\forall X \in \mathcal{F} : \limsup_{n \rightarrow \infty} (d(A_n, X)) \leq d(A, X)$ [pour $d(Y, Z)$, cf. Chap. I (3.17)],

[P5] pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de type s.c.s : $\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(f, A_n) \leq \mu(f, A)$,

[P6] pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ contractante sur E :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(f, A_n) \leq \mu(f, A).$$

3) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrez que f est de type s.c.s. si et seulement si $\{v \in E / f(v) \geq \alpha\}$ est fermé dans E pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Déduisez-en que f est de type s.c.i. si et seulement si $\{v \in E / f(v) \leq \alpha\}$ est fermé dans E pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

[à faire après le Chap.VII] Caractériser toutes les fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont à la fois de type s.c.s. et s.c.i.

Soit $\mathcal{X} \neq \emptyset$ une famille de parties fermées de E , telle que : $\forall u \in E : \{u\} \in \mathcal{X}$. On suppose que : $\forall X \in \mathcal{X} : \lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, X) = d(A, X)$. On veut démontrer que pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ appartenant à une certaine classe \mathcal{C} on a :

$$\mu(f, A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\mu(f, A_n)).$$

4) Vérifiez que si l'inégalité $\mu(f, A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(f, A_n)$ est fautive, il existe λ_1 et λ_2 dans \mathbb{R} tels que : $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(f, A_n) < \lambda_1 < \lambda_2 < \mu(f, A)$. Déduisez-en que $S := \{n \in \mathbb{N} / \mu(f, A_n) < \lambda_1\}$ est infini, et que pour tout $n \in S$, il existe $a_n \in A_n$ tel que $f(a_n) < \lambda_2$.

On pose : $Z := \{v \in E / f(v) \leq \lambda_2\}$. Vérifiez que $Z \neq \emptyset$, et démontrez que si $Z \in \mathcal{X}$ on a : $d(A, Z) = 0$. Dédisez-en qu'il existe une suite (b_n) d'éléments de A et une suite (z_n) d'éléments de Z telles que : $\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, z_n) = 0$.

Démontrez que si l'on peut trouver un indice n_0 tel que

$$f(b_{n_0}) - f(z_{n_0}) < \mu(f, A) - \lambda_2,$$

on aboutit à une contradiction, et donc que l'on a : $\mu(f, A) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f, A_n)$.

5) [à faire après l'étude du Chap.VIII] On suppose que $\mathcal{X} = \mathcal{F}(E)$ et que f est uniformément continue sur E . Démontrez que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f, A_n) = \mu(f, A)$.

6) [après Chap.VIII] On suppose que $\mathcal{X} = \{X \in \mathcal{F} / X \text{ est borné}\}$. Démontrez que si f est uniformément continue sur tous les bornés de E , et vérifie : $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{u \in E / f(u) \leq \alpha\}$ est borné, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(f, A_n) = \mu(f, A)$.

CORRIGÉ DU PROBLÈME

1) Soit $u \in \text{Li}(A_n)$: il existe (a_n) avec $a_n \in A_n$ (pour tout n) telle que $\lim(a_n) = u$. Pour tout n , $d(u, A_n) \leq d(u, a_n)$ donne :

$$(0 \leq) \limsup d(u, A_n) \leq \limsup d(u, a_n) = \lim d(u, a_n) = 0 \text{ [cf. III Prop. (3.2)].}$$

Donc, $\lim d(u, A_n)$ existe et vaut 0. ♦

Si $\lim d(u, A_n) = 0$, par définition de la borne inférieure :

$\forall n \geq 1, \exists b_n \in A_n : d(u, A_n) \leq d(u, b_n) < d(u, A_n) + \frac{1}{n}$, d'où : $\lim d(u, b_n) = 0$. Par définition de $\text{Li} : u \in \text{Li}(A_n)$. ♦

2) [P2] \implies [P1] Soit $u \in A$, et considérons pour $n \geq 1$ l'ouvert $U = B(u, \frac{1}{n})$. $u \in A \cap U \implies A \cap U \neq \emptyset$ et donc : $\exists N, \forall n : n \geq N \implies A_n \cap U \neq \emptyset$.

Soit, pour chaque $n \geq N$, un $a_n \in A_n \cap U$.

$a_n \in A_n$ et $d(u, a_n) < \frac{1}{n} \implies \lim d(u, a_n) = 0 \implies \lim(a_n) = u$. Donc : $u \in \text{Li}(A_n)$. ♦

[P4] \implies [P3] est trivial en prenant $X = \{u\}$, $u \in E : \{u\} \in \mathcal{F}$. ♦

[P1] \implies [P5] Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ de type s.c.s. Par définition de $\mu(f, A)$ borne inférieure : soit $\varepsilon > 0$ fixé, $\exists u_\varepsilon \in A : \mu(f, A) \leq f(u_\varepsilon) \leq \mu(f, A) + \varepsilon$. Soit (a_n) une suite telle que $a_n \in A_n$ pour tout n et telle que $\lim(a_n) = u ; \forall n : \mu(f, A_n) \leq f(a_n)$, et puisque f est s.c.s. : $\limsup \mu(f, A_n) \leq \limsup f(a_n) \leq f(u) \leq \mu(f, A) + \varepsilon$.

Comme $\limsup \mu(f, A_n) \leq \mu(f, A) + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\limsup \mu(f, A_n) \leq \mu(f, A). \quad \blacklozenge$$

[P5] \implies [P6] est évident car si f est contractante sur E , f est continue sur E et f est à la fois s.c.s. et s.c.i. ; en effet, si $\lim(u_n) = u$, on a [Chap.VII,Th.I.1] :

$$\lim f(u_n) = f(u) = \liminf f(u_n) = \limsup f(u_n). \quad \blacklozenge$$

[P6] \implies [P4] Considérons $X \in \mathcal{F}$, et posons $g(u) := d(u, X)$. la fonction g est contractante [Chap.I (3.9)] et donc :

$$\inf_{u \in A_n} g(u) = d(A_n, X) \longrightarrow \inf_{u \in A} g(u) = d(A, X). \quad \blacklozenge$$

[P3] \implies [P2] Soit $u \in A$.

$$\limsup d(u, A_n) \leq d(u, A) = 0 \implies 0 \leq \liminf d(u, A_n) \leq \limsup d(u, A_n) \leq 0$$

$$\implies \lim d(u, A_n) = 0, \text{ d'où par 1) : } u \in \text{Li}(A_n).$$

Soit U un ouvert tel que $A \cap U \neq \emptyset$, et soit $u \in A \cap U$. Puisque U est ouvert, il existe une boule $B(u, \rho) \subset U$. D'après ce qui précède, il existe (a_n) , $a_n \in A_n$ pour tout n , telle que $\lim(a_n) = u$. Donc, il existe $N, \forall n : n \geq N \implies a_n \in B(u, \rho) \subset U$.

Par conséquent, pour $n \geq N$, on a $a_n \in A_n \cap U$ qui n'est donc pas vide. ♦

Nota : Au passage. on a prouvé [P1] \implies [P2].

La démonstration de l'équivalence des six propriétés est établie d'après le schéma suivant :

$$[P1] \implies [P5] \implies [P6] \implies [P4] \implies [P3] \implies [P2] \implies [P1].$$

On peut évidemment suivre d'autres schémas . . .

3) Soit f de type s.c.s. soit $\alpha \in \mathbb{R}$, et posons $X := \{v \in E / f(v) \geq \alpha\}$. Soit (u_n) une suite de points de X , avec $\lim(u_n) = u$.

On a : $\forall n, \alpha \leq f(u_n) \implies \alpha \leq \limsup f(u_n) \leq f(u) \implies u \in X$, et X est fermé. \blacklozenge

Supposons que $\forall \alpha \in \mathbb{R} : X := \{v \in E / f(v) \leq \alpha\}$ est un fermé. Soit (u_n) une suite de points de E telle que $\lim(u_n) = u$. Soit $\varepsilon > 0$. $Y := \{v \in E / f(v) \geq f(u) + \varepsilon\}$ est fermé, et donc $E \setminus Y = \{v \in E / f(v) < f(u) + \varepsilon\}$ est ouvert. $u \in E \setminus Y$ car $f(u) < f(u) + \varepsilon$.

Soit $B(u, \rho]$ une boule contenue dans $E \setminus Y$. $\exists N, \forall n : n \geq N \implies u_n \in B(u, \rho]$, d'où $f(u_n) < f(u) + \varepsilon$. On a donc : $\limsup f(u_n) \leq f(u) + \varepsilon$, cela pour tout $\varepsilon > 0$, d'où : $\limsup f(u_n) \leq f(u)$, et f est s.c.s. \blacklozenge

Manifestement : f s.c.i. $\iff (-f)$ est s.c.s. $\iff \forall \alpha \in \mathbb{R} : \{v \in E / (-f) \geq -\alpha\}$ est fermé $\iff \forall \alpha \in \mathbb{R} : \{v \in E / f(v) \leq \alpha\}$ est fermé. \blacklozenge

Une fonction qui est à la fois s.c.i. et s.c.s. vérifie pour toute suite (u_n) convergente de limite $u : f(u) \leq \liminf f(u_n) \leq \limsup f(u_n) \leq f(u) \implies \lim f(u_n) = f(u)$. Donc (Chap. VII. Th. 1.1) : f est continue sur E . \blacklozenge

4) Dire que l'inégalité $\mu(f, A) \leq \liminf \mu(f, A_n)$ est fautive revient à dire que $\mu(f, A) > \liminf \mu(f, A_n)$. Il existe donc bien $\lambda_1 < \lambda_2$ tels que :

$$\liminf \mu(f, A_n) < \lambda_1 < \lambda_2 < \mu(f, A). \quad \blacklozenge$$

$S := \{n \in \mathbb{N} / \mu(f, A_n) < \lambda_1\}$ est infini, sinon il existerait N tel que :

$\forall n : n \geq N \implies \mu(f, A_n) \geq \lambda_1 \implies \liminf \mu(f, A_n) \geq \lambda_1 > \liminf \mu(f, A_n)$, ce qui est impossible. \blacklozenge

Soit $n \in S$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_n \in A_n$ tel que :

$\mu(f, A_n) \leq f(a_n) < \mu(f, A_n) + \varepsilon < \lambda_1 + \varepsilon$ et $\lambda_1 + \varepsilon < \lambda_2$ pour ε assez petit. \blacklozenge

$Z \neq \emptyset$ puisque $a_n \in Z$ pour tout $n \in S$. $a_n \in A_n \cap Z \implies d(A_n, Z) = 0$ pour tout $n \in S$.

Si $Z \in \mathcal{X}$, par hypothèse : $d(A, Z) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, Z) = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} d(A_n, Z) = 0$.

D'où : $d(A, Z) = 0$. \blacklozenge

Par définition de inf, pour tout $n \geq 1 : \exists b_n \in A, \exists z_n \in Z$ tels que :

$$0 = d(A, Z) \leq d(b_n, z_n) < d(A, Z) + \frac{1}{n} = 0 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, z_n) = 0$. \blacklozenge

Supposons qu'on puisse trouver un indice n_0 tel que $f(b_{n_0}) - f(z_{n_0}) < \mu(f, A) - \lambda_2$:

$$\mu(f, A) \leq f(b_{n_0}) = f(b_{n_0}) - f(z_{n_0}) + f(z_{n_0}) \leq f(b_{n_0}) - f(z_{n_0}) + \lambda_2$$

$$< (\mu(f, A) - \lambda_2) + \lambda_2 = \mu(f, A) :$$

$\mu(f, A) < \mu(f, A)$ est contradictoire ! \blacklozenge

5) Si f est uniformément continue sur E , f est s.c.s. et donc, d'après le résultat 2) [P3] \implies [P5], on a : $\limsup \mu(f, A_n) \leq \mu(f, A)$. Reste donc à prouver qu'on a aussi : $\mu(f, A) \leq \liminf \mu(f, A_n)$.

Dans le raisonnement ci-dessus : $Z \in \mathcal{F}$ car f est s.c.i. f étant uniformément continue sur E : pour $\varepsilon = \mu(f, A) - \lambda_2 > 0$,

$$\exists \eta > 0, \forall x \in E, \forall y \in E : d(x, y) \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} d(b_n, z_n) = 0 \implies \exists N, \forall n : n \geq N \implies d(b_n, z_n) \leq \eta$.

Donc, il existe N tel que : $\forall n : n \geq N \implies |f(b_n) - f(z_n)| < \varepsilon = \mu(f, A) - \lambda_2$. Contradiction, et par conséquent : $\mu(f, A) \leq \liminf \mu(f, A_n)$.

D'où, en définitive : $\lim \mu(f, A_n) = \mu(f, A)$. \blacklozenge

En reprenant point par point la démonstration, on voit qu'on a aussi :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu(f, A_n) = \nu(f, A), \text{ où } \nu(f, X) = \sup_{x \in X} f(x). \quad \blacklozenge$$

On peut énoncer le résultat cherché :

soient (A_n) et A dans $\mathcal{F}(E)$ tels que $\forall X \in \mathcal{F} : \lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, X) = d(A, X)$; pour toute

$f \in \mathcal{C} = \{f : E \rightarrow \mathbb{R} / f \text{ uniformément continue sur } E\}$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{u \in A_n} f(u) = \inf_{v \in A} f(v), \text{ et aussi : } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{u \in A_n} f(u) = \sup_{v \in A} f(v) (*).$$

Réciproquement, si pour $A_n, A \in \mathcal{F}$ on a pour toute $f \in \mathcal{C} : \lim \mu(f, A_n) = \mu(f, A)$, on a : $\lim d(A_n, X) = d(A, X)$ pour tout $X \in \mathcal{F}$. \blacklozenge

En particulier, en faisant $f = d(\cdot, X)$, on a [cf. Chap.I (3.21)] :

$\forall X \in \mathcal{F} : \lim e(A_n, X) = e(A, X)$. Vérifiez. ♦

On peut aussi prendre $f = \sup_{x \in X} d(\cdot, x)$, etc. ♦

6) Z est fermé et borné. (z_n) est donc bornée, d'où (b_n) est bornée aussi, car $\lim d(b_n, z_n) = 0$. Soit donc B un borné contenant la suite (z_n) et la suite (b_n) . On raisonne ensuite comme ci-dessus. Nous vous laissons le soin d'énoncer le résultat obtenu, comme dans 5). ♦

Fin du Chapitre III

CHAPITRE IV

DENSITÉ ET APPROXIMATION DANS UN ESPACE MÉTRIQUE

Introduction

Le chapitre IV est consacré à la notion de *densité*, c'est-à-dire « en gros » à la notion d'*approximation*.

Cette notion, qui domine l'Analyse, voire se confond avec elle, résout le problème suivant : on ne sait pas travailler sur des objets (par exemple des fonctions) très compliqués, mais parfois on a le droit de ne travailler que sur une classe beaucoup plus petite d'objets plus simples ; il suffit que les objets simples soient *denses* (d'une certaine manière : assez nombreux) par rapport aux objets compliqués.

On conçoit très bien, par exemple, qu'on aura moins de peine à travailler sur des polynômes, ou sur des fonctions en escalier, que sur les fonctions continues les plus générales qui peuvent être très « tourmentées » . . .

Dans ce chapitre nous étudierons particulièrement l'approximation au sens de la *norme uniforme* des fonctions $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, en utilisant des résultats de la théorie élémentaire de l'intégration faite en D.E.U.G. (nous rappelons ces résultats).

La théorie de l'intégration faite en Licence vous apportera de nouveaux résultats d'approximation / densité, au sens de la norme $\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$ cette fois-ci.

Nous comptons sur vous pour trouver la place de ces résultats dans le présent cours.

Enfin, nous démontrons le très fondamental théorème de Weierstraß ($\beta = ss$) et son application à l'approximation uniforme des fonctions continues périodiques. C'est le premier théorème difficile à démontrer de ce cours.

Nous avons adopté la démonstration en termes de polynômes de Bernstein, parce que c'est une des plus facile, et parce qu'il est amusant d'explicitier les polynômes approximatifs ; en revanche cette démonstration est un peu « parachutée », sauf pour ceux qui ont fait un peu (très peu) de Probabilités.

En résumé, ce chapitre n'est pas trop difficile, mais il n'est pas évident non plus.

Il y a une Lecture à finalité culturelle sur les sous-groupes du groupe additif \mathbb{R} : elle est intéressante pour donner des exemples et des contre-exemples.

☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.2, 1.3, 1.4. 1.6.

☞ Exercice complémentaire : 1.5.

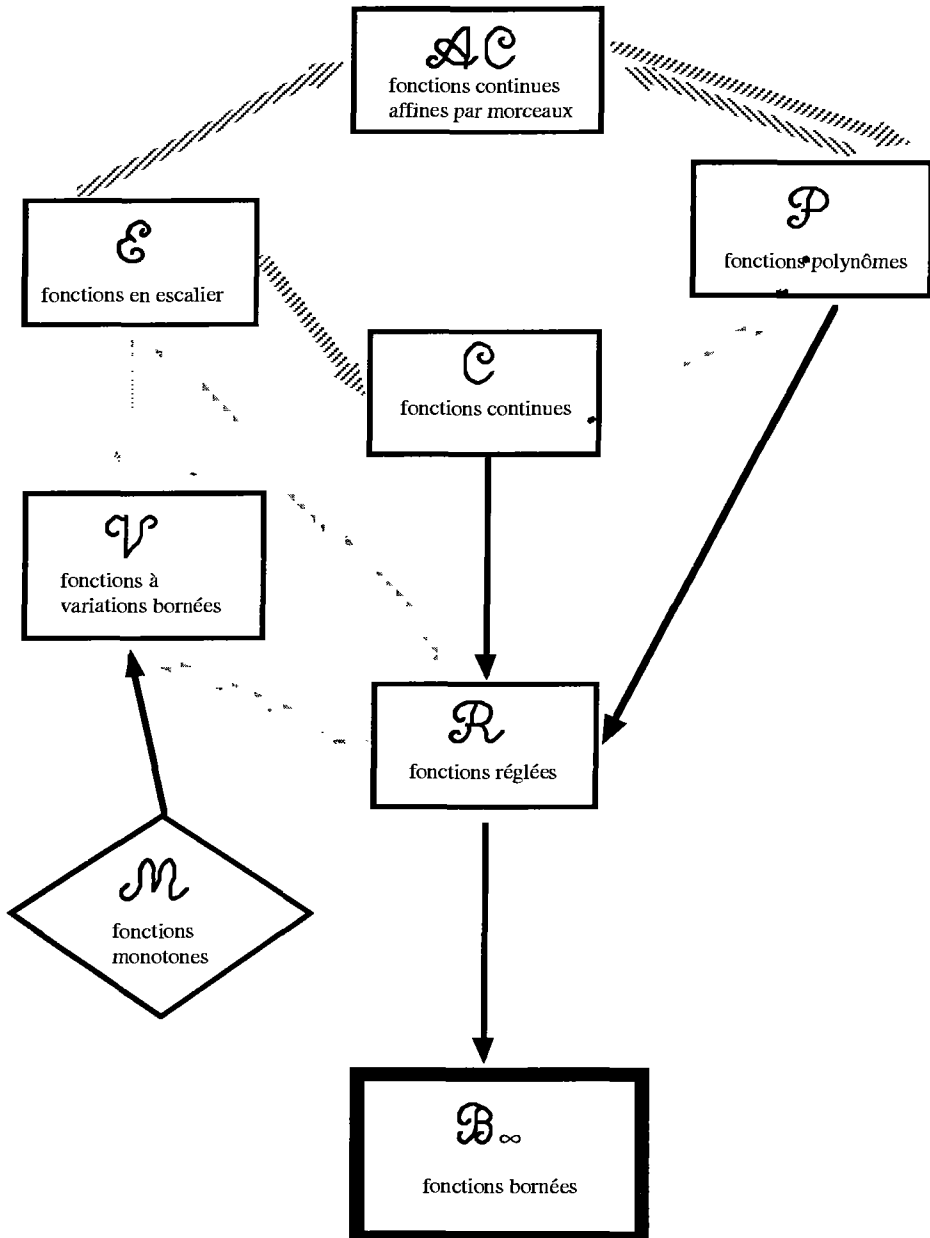
Nous proposons un problème, qui est assez facile.

Dans le prochain chapitre nous prononcerons le mot « topologie » pour la première fois, mais nous faisons en fait de la topologie depuis la première page du chapitre I . . .

BON COURAGE, SURTOUT POUR LE THÉORÈME DE WEIERSTRASS . . .

TABLEAU RÉCAPITULATIF

Complétez (après lecture du cours) le tableau suivant en donnant un sens aux diverses sortes de flèches.



CHAPITRE IV

DENSITÉ et APPROXIMATION DANS UN ESPACE MÉTRIQUE

1. DENSITÉ et APPROXIMATION

Définition 1.1.

Soit (E, d) un espace métrique. Soient A et B deux parties non vides de E .
 A sera dit **dense par rapport à B** si :

$$(1.1) \quad \forall b \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists a = a_\varepsilon \in A : d(a_\varepsilon, b) \leq \varepsilon$$

Si A est dense par rapport à l'espace E tout entier, on dit que A est **partout dense dans E** (on se contente parfois de dire : « A est dense dans E »).

Commentaire :

La proposition encadrée peut s'interpréter de manière plus tangible en disant : « pour tout $b \in B$, il existe un $a \in A$ arbitrairement proche de b », soit encore : « tout élément de B peut être approché d'aussi près qu'on veut par un élément de A ».

✎ **Exercice 1.1.** (très facile) Soient A, B, C trois parties non vides d'un espace métrique (E, d) . Démontrez que A dense par rapport à B et B dense par rapport à C entraînent que A est dense par rapport à C . Démontrez que si A est dense par rapport à B et si $A \subset C$: C est dense par rapport à B . Démontrez que A dense par rapport à B et $C \subset B$ entraîne que A est dense par rapport à C (en particulier, si A est dense par rapport à E entier, A est dense par rapport à tout $B \subset E$, d'où le mot « partout » pour exprimer cette situation).

Définition 1.2.

Un espace métrique (E, d) est dit **séparable** s'il existe une partie A de E qui est **dénombrable ET partout dense** dans E .

Commentaire :

A la place du mot « séparable » qui est peu « parlant » et prête à confusion avec le mot « séparé » [cf. Chap. VI], il a été proposé⁽¹⁾ l'expression « de type dénombrable », mais séparable reste le plus employé. Faire attention, donc.

Exemple 1.1. Soit $E = \mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle $d(s, t) = |s - t|$. On sait que dans tout intervalle $] \alpha, \beta [\subset \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$, il existe une infinité de nombres rationnels et de nombres irrationnels. Donc \mathbb{Q} et $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont tous deux partout denses dans $E = \mathbb{R}$. En effet, soit $s \in \mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ aussi petit qu'on le désire : dans l'intervalle $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$ il existe un (en fait une infinité) rationnel r et un irrationnel t qui vérifient $d(s, r) = |s - r| \leq \varepsilon$ et $d(s, t) = |s - t| \leq \varepsilon$.

L'expression *densité des rationnels* utilisée depuis le lycée prend sa vraie place. Bien sûr, \mathbb{Q} est dense par rapport à $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et \mathbb{I} est dense par rapport à \mathbb{Q} .

\mathbb{Q} est dénombrable : donc \mathbb{R} est un espace métrique *séparable* ($\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable, sinon \mathbb{R} le serait).

(1) Par N. Bourbaki.

$E = \mathbb{R}^n$ étant muni d'une de ses distances usuelles (distances de Hölder) est un espace métrique *séparable*, car \mathbb{Q}^n est dénombrable et partout dense dans \mathbb{R}^n .

\mathbb{Z} n'est pas partout dense dans \mathbb{R} .

Prenons $E =]0, 1[$ muni de la distance induite par \mathbb{R} usuel ; $A =]0, 1[$ et $B = E \cap \mathbb{Q}$ sont partout denses dans E .

Notons encore qu'à cause de la notion de *développement d'un réel suivant une base a* (a entier > 1), on a : les nombres dyadiques, triadiques, décimaux, duodécimaux ($a = 2, 3, 10, 12$), etc. sont partout denses dans \mathbb{R} .

Exemple 1.2. Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble quelconque muni de la distance *discrète* δ . Aucune partie de E n'est partout dense dans E , sauf E lui-même. En effet soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$, $A \neq E$, et soit $u \in E \setminus A$; prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$: il n'existe pas de $a \in A$ tel que $d(u, a) \leq \frac{1}{2}$, puisque $d(u, a) = 1$ pour tout $a \in A$. Donc (E, δ) est séparable si et seulement si E est dénombrable.

De même, si $E = \mathbb{Z}$ est muni de la distance induite par \mathbb{R} usuel : seul \mathbb{Z} est partout dense dans \mathbb{Z} .

☞ **Exercice 1.2.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique, et soient A, B des parties non vides de E . Démontrez que A est dense par rapport à B si et seulement si, pour tout $b \in B$, il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)_n = b$.

Etablissez aussi que : A est dense par rapport à B si et seulement si : $\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0 :$ $B(b, \varepsilon] \cap A \neq \emptyset$ (boules ouvertes ou fermées, peu importe).

Finalement, en terme d'adhérence, on a :

A est dense par rapport à $B \iff B \subset \text{adh}(A)$, et

A est partout dense dans $E \iff \text{adh}(A) = E$.

E est séparable $\iff \exists D \subset E : D$ dénombrable et $\text{adh}(D) = E$.

Vérifiez que si δ est une distance équivalente à d :

A dense par rapport à B pour $d \iff A$ dense par rapport à B pour δ .

Cas des espaces vectoriels normés

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien \mathbb{C} . Soit A une partie de E ; rappelons qu'on note $[A]$ le *sous-espace vectoriel engendré par A*, à savoir : $[A]$ est le sous-espace vectoriel constitué par les combinaisons linéaires d'éléments de A , à coefficients dans \mathbb{K} :

$$[A] = \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot a_i \mid I \text{ ensemble fini, } a_i \in A, \lambda_i \in \mathbb{K} \right\}.$$

Cela étant rappelé, on peut énoncer la définition suivante :

Définition 1.3.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Une partie A de E est dite *totale dans E* si le sous-espace vectoriel $[A]$ de E est *partout dense* dans E .

Commentaire :

Une famille $(u_i)_{i \in I}$, I ensemble d'indexation quelconque, d'éléments de E , sera dite *totale* si $A = \{u_i \mid i \in I\}$ est une partie totale. On parlera en particulier de *suite totale* $(u_n)_{n \in S}$, S partie infinie de \mathbb{N} .

Proposition 1.1.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . E est séparable si et seulement si il existe une suite totale dans E .

Commentaire :

On verra plus tard (Chap XII, Exercice 2.2.) que si E est séparable il existe une suite totale dans E constituée par des vecteurs linéairement indépendants, autrement dit : il existe une suite totale et *libre*.

☞ **Exercice 1.3.** (très facile) Démontrez la Proposition 1.1.

Exemple 1.3. Beaucoup d'e.v.n. intervenant en Analyse sont séparables.

Par exemple : ℓ^p , pour $1 \leq p < \infty$, muni de la norme : $\|(\xi_n)_n\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}$.

De même, les espaces c et c_0 , munis de la norme uniforme habituelle :

$$\|(\xi_n)_n\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|, \text{ sont séparables.}$$

Voir le Chap.II pour tous ces espaces.

L'e.v.n. $C_{\infty}([a, b], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_{\infty} = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ est séparable : c'est

une conséquence immédiate du Th. d'approximation de Weierstraß, voir plus loin dans ce chapitre.

Les espaces L^p de Lebesgue (voir théorie de l'intégration) sont séparables si $p \in [1, \infty[$.

Par contre, les espaces ℓ^{∞} et L^{∞} ne sont *pas* séparables.

☞ **Exercice 1.4.** (assez facile) Prouvez que les espaces vectoriels normés c_0, c, ℓ^p pour $1 \leq p < \infty$, sont séparables.

Indication : Considérez la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où : $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ [1 à la n -ième place], et, pour c uniquement : $e_0 = (1, 1, \dots, 1, \dots)$.

☞ **Exercice 1.5.** (difficulté moyenne) Démontrez que ℓ^{∞} n'est *pas* séparable :

Pour cela, soit $A = \{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(n)}, \dots\}$ une partie dénombrable dans ℓ^{∞} , où :

$a^{(n)} = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots, \alpha_k^{(n)}, \dots)$; on détermine $u = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots) \in \ell^{\infty}$ par :

$x_k = \alpha_k^{(k)} + 1$ si $|\alpha_k^{(k)}| \leq 1$ et $x_k = 0$ si $|\alpha_k^{(k)}| > 1$; vérifiez que $\|a^{(k)} - u\|_{\infty} \geq 1$, et concluez.

☞ **Exercice 1.6.** (facile) Démontrez que tout sous-espace métrique d'un espace métrique séparable est séparable. L'exemple $E = \mathbb{R}, F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{Q}$ partout dense dans E , prouve qu'il ne faut pas raisonner trop rapidement ...

2. APPROXIMATION UNIFORME DES FONCTIONS $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ LE THÉORÈME DE WEIERSTRASS

On se propose, dans ce paragraphe, de rassembler des résultats « anciens » (cours de D.E.U.G) et « nouveaux » (essentiellement le Th. de Weierstraß et ses conséquences) en un ensemble cohérent concernant l'*approximation uniforme* des fonctions $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Cette notion d'approximation se traduira en termes de *densité* et sa « philosophie » peut se résumer ainsi : approcher des fonctions « compliquées » par des fonctions « simples ».

Le critère de « simplicité » sera bien sûr variable suivant le but poursuivi :

- le calcul approché de l'intégrale d'une fonction fait appel à des fonctions en escalier, ou bien affines par morceaux, polynomiales par morceaux, ... qui sont peu « régulières » (= dérivables), mais qui s'intègrent aisément. Ces approximations conduisent à des méthodes numériques [méthode des rectangles, des trapèzes, de Simpson, etc.], mais également à des considérations théoriques très importantes.

- du point de vue théorique (surtout), il est très intéressant d'approcher des fonctions « irrégulières » (non dérivabilité, variations très rapides, ...) par des fonctions impeccablement régulières comme les polynômes.

Quelques ensembles classiques de fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

1) Soit $I = [\alpha, \beta], \alpha < \beta$, un intervalle de \mathbb{R} fermé et borné. On dira que $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ *approche uniformément* $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ à ε près (ε réel > 0) sur I si :

$$(2.1) \quad \forall t \in I : |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon$$

Si f est une fonction *bornée sur I* , i.e. si $f(I) \subset [-m, +m]$, m réel > 0 , et si g approche f à ε près sur I : g est aussi bornée sur I . En effet, pour tout $t \in I$: $|g(t)| \leq |g(t) - f(t)| + |f(t)| \leq \varepsilon + m$.

2) Soit $E = \mathcal{B}_\infty(I, \mathbb{R})$ l'e.v.n. réel des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ *bornées sur I* , muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$ [cf. Chap. I]. Soit $(f_n)_{n \in S}$, S partie infinie de \mathbb{N} , une suite d'éléments de E , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \in S, n \rightarrow \infty} 0$: on a $f \in E$ et $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Explicitons : si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang à partir duquel f_n approche uniformément f à ε près sur I : la fonction f est bornée, et la suite $(f_n)_n$ converge vers f dans E pour la norme uniforme.

3) Un *découpage de I* est une suite finie (α_i) , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, de points de I telle que $\alpha_0 = \alpha$, $\alpha_n = \beta$, et : $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Exemple : le découpage de I en n intervalles égaux est défini par $\alpha_i = \alpha + i \frac{\beta - \alpha}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$.

4) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *en escalier sur I* s'il existe un découpage de I tel que f soit constante sur $] \alpha_i, \alpha_{i+1} [$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$. On notera $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble constitué par toutes les fonctions en escalier sur I (le découpage de I étant variable, bien sûr !).

5) $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *affine par morceaux sur I* s'il existe un découpage de I et des nombres réels α_i, β_i ($0 \leq i \leq n-1$) tels que : $f(t) = \alpha_i t + \beta_i$ pour tout $t \in] \alpha_i, \alpha_{i+1} [$. On notera $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions affines par morceaux sur I .

Remarques : Les fonctions en escalier et les fonctions affines par morceaux possèdent, pour un découpage de I en n sous-intervalles, $n+1$ points de discontinuité éventuels.

On pourrait tout aussi bien introduire des fonctions paraboliques, cubiques, etc. par morceaux. Le calcul numérique des intégrales utilise de telles fonctions.

6) On notera $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues sur I , $\mathcal{AC}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions qui sont affines par morceaux sur I et continues sur I : $\mathcal{AC}(I, \mathbb{R}) = \mathcal{A}(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Enfin, on notera $\mathcal{M}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $I \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont monotones sur I (i.e. croissantes ou bien décroissantes, au sens large, sur I).

$\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{AC}(I, \mathbb{R})$, $\mathcal{M}(I, \mathbb{R})$ sont des sous-ensembles de $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$: c'est évident pour les quatre premiers, et si $f \in \mathcal{M}$ est, par exemple, décroissante : $f(\beta) \leq f(t) \leq f(\alpha)$ pour tout $t \in I$.

Rappelons les quatre résultats suivants dont vous trouverez une démonstration dans tout cours de D.E.U.G. au chapitre *Intégration* (au sens de Riemann ou au sens des fonctions réglées, peu importe). Mais vous aurez peut-être plus vite fait de les retrouver tout seul... Voir aussi les Exercices 2.12 et 2.13 du Chapitre XIV.

7) **Résultat 1** : Toute fonction de $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ peut être approchée uniformément sur I par une fonction en escalier, à ε près, et cela pour tout $\varepsilon > 0$. Autrement dit :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \exists (f_n)_{n \in \mathbb{N}}, f_n \in \mathcal{E} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

Résultat 2 : Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de \mathcal{C} , et soit $f \in \mathcal{B}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$. Conclusion : $f \in \mathcal{C}$.

\mathcal{C} est donc *fermé* pour la convergence uniforme [cf. Chap. III].

Résultat 3 : Toute fonction de \mathcal{C} peut être approchée uniformément sur I par une fonction de \mathcal{AC} , à ε près, pour tout $\varepsilon > 0$. Soit :

$$\forall f \in \mathcal{C}, \exists (f_n)_n, f_n \in \mathcal{AC} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

Résultat 4 : Toute fonction de \mathcal{M} peut être approchée uniformément sur I par une fonction de \mathcal{E} , à ε près, pour tout $\varepsilon > 0$. Soit :

$$\forall f \in \mathcal{M}, \exists (f_n)_n, f_n \in \mathcal{E} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

8) Notons $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions en escalier vérifiant : $\sup_{t \in I} |f(t) - f_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'après

1) et 2) : $f \in \mathcal{B}$.

Nous appellerons **fonctions réglées sur I** les éléments de l'ensemble $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$.

Ces fonctions ont été ou non définies en D.E.U.G. selon la théorie de l'intégration choisie. On a le résultat suivant :

soit $(f_n)_{n \in S}$ une suite de fonctions réglées telle que pour un $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ on ait : $\sup_{t \in I} |f(t) - f_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty, n \in S} 0$. Alors : $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$. C'est-à-dire qu'on a pour $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$

le même résultat de fermeture que pour \mathcal{C} (Résultat 2).

En effet, d'après ce qui précède : $f \in E = \mathcal{B}$, et $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} \|f - f_n\|_\infty = 0$. Pour tout $n \in S$ fixé, il existe une suite $(f_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n - f_{n,m}\|_\infty = 0$ (par définition de \mathcal{R}). Si l'on applique le résultat de l'Exercice 2.10 du Chap. III, on obtient : il existe une fonction $\varphi : S \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_{n, \varphi(n)}\|_\infty = 0$, et donc : $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$. C.Q.F.D.

Les fonctions appartenant à $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ sont susceptibles d'une caractérisation simple et utile [voir Chap. XIV] : $f \in \mathcal{B} : f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R}) \iff$ les limites suivantes existent dans \mathbb{R} : $\lim_{s \rightarrow \alpha, s > \alpha} f(s), \lim_{s \rightarrow \beta, s < \beta} f(s), \forall t \in]\alpha, \beta[: \lim_{s \rightarrow t, s < t} f(s), \lim_{s \rightarrow t, s > t} f(s)$.

On démontre qu'une fonction de \mathcal{R} ne peut avoir de discontinuités qu'en un ensemble au plus dénombrable : des discontinuités de première espèce d'après l'équivalence ci-dessus.

9) Introduisons encore les ensembles suivants :

$\mathcal{P}(I, \mathbb{R})$ sera l'ensemble des restrictions à I de toutes les fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polynomiales (à coefficients réels).

$\mathcal{V}(I, \mathbb{R})$ sera l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui s'écrivent $f = g - h$, où g et h sont des fonctions *croissantes* sur I (g, h dépendent de f , bien sûr !). ces fonctions sont dites à *variation bornée sur I* , car on démontre (non trivial) que $f \in \mathcal{B}$ appartient à \mathcal{V} ssi $\exists m$ réel > 0 tel que pour tout découpage $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ (n variable !) de I : $\sum_{i=0}^{n-1} |f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)| \leq m$. Notons simplement ici que $f \in \mathcal{C} \not\Rightarrow f \in \mathcal{V}$.

☞ **Exercice 2.1.** (assez difficile) Démontrez que l'e.v.n. $F = \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty$ n'est pas séparable.

Suggestion : trouver une famille non dénombrable de fonctions en escalier très simples dont les distances mutuelles (pour $\|\cdot\|_\infty$) sont égales à 1.

Résumons tous ces résultats dans deux propositions.

Proposition 2.1.

(i) $\mathcal{E}, \mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{AC}, \mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{V}$ sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$.

Si $f \in \mathcal{M} : \lambda.f \in \mathcal{M}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, mais $f, g \in \mathcal{M} \not\Rightarrow f + g \in \mathcal{M}$.

(ii) $\mathcal{B}, \mathcal{E}, \mathcal{C}, \mathcal{R}, \mathcal{P}, \mathcal{V}$ sont stables pour la multiplication des fonctions $[(f.g)(t) = f(t).g(t)]$, et $\|f.g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty$ (ce sont des *algèbres*, cf. Chap. X, Annexe).

$\mathcal{A}, \mathcal{AC}, \mathcal{M}$ ne sont pas stables pour la multiplication des fonctions.

(iii) On a les relations d'inclusion suivantes :

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{R} \subset \mathcal{B} \text{ et } \mathcal{AC} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{R}, \mathcal{P} \subset \mathcal{C}, \mathcal{A} \subset \mathcal{R} :$$

(inclusions signifiant *sous-espaces vectoriels*).

Et on a $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$ (inclusion ensembliste).

$$\mathcal{E} \cap \mathcal{C} = \mathcal{E} \cap \mathcal{AC} = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ constantes}\}.$$

Proposition 2.2.

Dans l'e.v.n. $E = \mathcal{B}_\infty(I, \mathbb{R})$, normé par $\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$:

(i) \mathcal{C} et \mathcal{R} sont fermés,

(ii) \mathcal{E} est dense par rapport à \mathcal{C} , et donc \mathcal{E} est dense par rapport à $\mathcal{AC} \subset \mathcal{C}$.

\mathcal{E} est également dense par rapport à \mathcal{M} .

(iii) Par définition, \mathcal{E} est dense par rapport à \mathcal{R} , donc est dense par rapport à $\mathcal{V} \subset \mathcal{R}$.

(iv) \mathcal{AC} est dense par rapport à \mathcal{C} .

(v) Si l'on considère l'e.v.n. $F = \mathcal{R}_\infty(I, \mathbb{R})$: \mathcal{E} est partout dense dans F . Si l'on considère l'e.v.n. $G = \mathcal{C}_\infty(I, \mathbb{R})$: \mathcal{AC} est partout dense dans G .

Attention : on ne peut pas dire que \mathcal{E} est partout dense dans G , pour la bonne raison que $\mathcal{E} \not\subset G$.

Le Théorème de Weierstraß

Nous allons maintenant introduire un résultat d'une importance CAPITALE en Analyse, c'est le Théorème de Weierstraß qui s'énonce ainsi :

Théorème 2.1. (Théorème de Weierstraß) (FONDAMENTAL)

Toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné I de \mathbb{R} , à valeurs réelles, peut être approchée uniformément sur I à ε près, pour tout $\varepsilon > 0$, par une fonction polynomiale.

En d'autres termes :

Le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}(I, \mathbb{R})$ de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est dense par rapport à $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ dans $E = \mathcal{B}_\infty(I, \mathbb{R})$. Soit encore :

$$\boxed{\mathcal{P}(I, \mathbb{R}) \text{ est partout dense dans l'e.v.n. } F = \mathcal{C}_\infty(I, \mathbb{R})}$$

Ce résultat est plutôt étonnant *a priori* si l'on a à l'esprit le comportement atrocement tourmenté qui peut être celui d'une fonction continue : fonction continue n'admettant de tangente (dérivée) en aucun point d'un intervalle, fonction continue à variations très rapides comme $t \mapsto t \cdot \sin(1/t)$ sur $[0, 1]$, etc. [incidence, cette fonction continue n'appartient pas à $\mathcal{V}([0, 1], \mathbb{R})$].

Il existe, conséquence de son intérêt, de multiples démonstrations du Th. de Weierstraß et de ses (nombreuses) généralisations dont la plus utile est le puissant Th. de Stone-Weierstraß [cf. Lecture/Problème du Chap. XIV].

Nous avons choisi ici une démonstration élémentaire, simple à suivre, dont la signification profonde nécessiterait quelques connaissances en calcul des Probabilités. Cette preuve présente l'avantage d'exhiber *explicitement* une suite de polynômes approchant uniformément $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ donnée à ε près, $\varepsilon > 0$ fixé arbitrairement.

C'est la démonstration due à S. Bernstein, qui utilise les polynômes portant son nom ; l'origine probabiliste est claire comme l'indique la présence de la loi binomiale dans l'expression des polynômes.

☞ Voir partie DÉMONSTRATIONS à la suite du cours.

On ne peut pas gagner sur tous les tableaux, et il faut signaler que les polynômes de Bernstein sont à rejeter impitoyablement en Analyse Numérique lorsqu'on désire approximer des fonctions continues par des polynômes :

il faut aller jusqu'au 100000-ème polynôme de Bernstein pour approcher $\sin(t)$ sur $[0, 1]$ à $1/1000$ près !

On déduit facilement du Th. de Weierstraß le résultat suivant, en considérant l'ensemble – qui est dénombrable – des polynômes à coefficients dans \mathbb{Q} :

Proposition 2.3.

| L'e.v.n. $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, muni de $\| \cdot \|_\infty$, est séparable.

Une conséquence importante du Th. de Weierstraß est l'approximation des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et périodiques par des polynômes trigonométriques, résultat qui s'avérera fondamental dans l'étude des séries de Fourier [voir le Chap. XIX].

Nous supposons que la fonction est périodique de période 2π : cela n'est pas une restriction, car si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction périodique de période T réel > 0 [i.e. $\forall t \in \mathbb{R} : g(t + T) = g(t)$], la fonction définie par $f(t) = g(\frac{T}{2\pi} t)$ est périodique de période 2π .

Théorème 2.2. (Théorème de Weierstraß trigonométrique) (FONDAMENTAL)

|| Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur \mathbb{R} et *périodique* de période 2π . Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe un entier N et des nombres réels $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N, \beta_1, \dots, \beta_N$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \left| f(t) - \alpha_0 - \sum_{k=1}^n [\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)] \right| \leq \varepsilon.$$

|| Soit, dans l'e.v.n. $\mathcal{B}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \left\| f - \alpha_0 - \sum_{k=1}^n [\alpha_k \cos(k \cdot) + \beta_k \sin(k \cdot)] \right\|_\infty \leq \varepsilon.$

DÉMONSTRATIONS

Démonstration du Théorème de Weierstraß

□ **Première étape**, dans laquelle on démontre qu'on peut se limiter à l'intervalle $[0, 1]$ (ce n'est pas un point important du théorème, mais un détail technique).

Soit $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[\alpha, \beta]$. On considère les deux fonctions $\theta : [0, 1] \rightarrow [\alpha, \beta], t \mapsto (\beta - \alpha)t + \alpha$, et $\Psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1], t \mapsto \frac{t - \alpha}{\beta - \alpha}$

On a : $\theta \circ \Psi = I_{[\alpha, \beta]}$ et $\Psi \circ \theta = I_{[0, 1]}$; θ et Ψ sont des bijections continues inverses l'une de l'autre. On pose : $g = f \circ \theta, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; g est continue comme composée de fonctions qui le sont.

Soit P un polynôme approchant g uniformément sur $[0, 1]$ à $\varepsilon > 0$ près.

On a donc : $\forall s \in [0, 1] : |g(s) - P(s)| \leq \varepsilon$.

Pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, on a : $|g(\Psi(t)) - P(\Psi(t))| \leq \varepsilon$. Mais : $g \circ \Psi = f \circ \theta \circ \Psi = f$, $P \circ \Psi$ est un polynôme, et $\forall t \in [0, 1] : |f(t) - P \circ \Psi(t)| \leq \varepsilon$. On peut donc se contenter de démontrer le Th. de Weierstraß pour une fonction $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $[0, 1]$. ♦

□ **Deuxième étape**, dans laquelle on prouve trois identités concernant la loi binomiale $r_j(t)$, où $t \in [0, 1]$.

Soit $n \in \mathbb{N}$; pour $j = 0, 1, \dots, n$, on pose : $r_j(t) := C_n^j t^j (1-t)^{n-j}$, où les $C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!}$ sont les coefficients de la formule du binôme de Newton, dont on rappelle l'énoncé :

$$(*) \quad (x+y)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j x^j y^{n-j}.$$

On va démontrer les relations suivantes, valides pour tout $t \in [0, 1]$:

$$(1) \sum_{j=0}^n r_j(t) = 1, \quad (2) \sum_{j=0}^n j r_j(t) = nt, \quad (3) \sum_{j=0}^n (j-nt)^2 r_j(t) = nt(1-t).$$

$$(1) \sum_{j=0}^n r_j(t) = \sum_{j=0}^n C_n^j t^j (1-t)^{n-j} = [t + (1-t)]^n = 1. \quad \blacklozenge$$

(2) On dérive par rapport à x les deux membres de (*) :

$$n(x+y)^{n-1} = \sum_{1 \leq j \leq n} j C_n^j x^{j-1} y^{n-j}, \text{ et on multiplie les deux membres par } x :$$

$$nx(x+y)^{n-1} = \sum_{0 \leq j \leq n} j C_n^j x^j y^{n-j}; \text{ en faisant } x = t \text{ et } y = 1-t, \text{ on obtient la}$$

formule (2). ♦

(3) On dérive deux fois (*) par rapport à x ; on a :

$$n(n-1)(x+y)^{n-2} = \sum_{2 \leq j \leq n} j(j-1) C_n^j x^{j-2} y^{n-j}.$$

On multiplie par x^2 , et on remplace y par $1-x$:

$$\begin{aligned} n(n-1)x^2 &= \sum_{0 \leq j \leq n} j(j-1) C_n^j x^j (1-x)^{n-j} = \sum_{0 \leq j \leq n} j(j-1) r_j(x) \\ &= \sum_{0 \leq j \leq n} j^2 r_j(x) - \sum_{0 \leq j \leq n} j r_j(x). \end{aligned}$$

$$\text{On a: } \sum_{0 \leq j \leq n} (j-nx)^2 r_j(x) = \sum_{0 \leq j \leq n} j^2 r_j(x) - 2nx \sum_{0 \leq j \leq n} j r_j(x) + n^2 x^2 \sum_{0 \leq j \leq n} r_j(x);$$

d'où, d'après (1) (2) et la formule ci-dessus :

$$\sum_{0 \leq j \leq n} (j-nx)^2 r_j(x) = n(n-1)x^2 + nx - 2n^2 x^2 + n^2 x^2 = nx(1-x).$$

On remplace x par t et on a (3). ♦

□ **Troisième (et dernière) étape**, où l'on introduit les polynômes de Bernstein $B_n(f)$, et où l'on démontre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f) - f\|_\infty = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $B_n(f)$ défini par : $B_n(f)(t) := \sum_{0 \leq j \leq n} f(\frac{j}{n}) \cdot r_j(t)$ est

appelé le n -ième polynôme de Bernstein de la fonction f .

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Démontrons que, pour n assez grand, $B_n(f)$ approche f uniformément sur $[0, 1]$ à ε près.

$$\forall t \in [0, 1] : |f(t) - B_n(f)(t)| = \left| \sum_{0 \leq j \leq n} [f(t) - f(\frac{j}{n})] \cdot r_j(t) \right| \leq \sum_{0 \leq j \leq n} |f(t) - f(\frac{j}{n})| \cdot r_j(t).$$

f continue sur $[0, 1]$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ (fonction continue sur un intervalle fermé borné de \mathbb{R} ; Th. de D.E.U.G. ou cf. Chap. XIV).

Donc, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall s, t \in [0, 1] : |s - t| \leq \eta \implies |f(s) - f(t)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

Soit $t \in [0, 1]$; on considère les ensembles suivants (qui dépendent de t) :

$$J_n := \{j \in \mathbb{N} / 0 \leq j \leq n \text{ et } |t - \frac{j}{n}| \leq \eta\}, \quad K_n := \{j \in \mathbb{N} / 0 \leq j \leq n \text{ et } |t - \frac{j}{n}| > \eta\}.$$

$\forall t \in [0, 1]$:

$$|f(t) - B_n(f)(t)| \leq \sum_{0 \leq j \leq n} |f(t) - f(\frac{j}{n})|.r_j(t) \\ \leq \sum_{j \in J_n} |f(t) - f(\frac{j}{n})|.r_j(t) + \sum_{j \in K_n} |f(t) - f(\frac{j}{n})|.r_j(t).$$

Mais, d'une part : $\sum_{j \in J_n} |f(t) - f(\frac{j}{n})|.r_j(t) \leq \sum_{j \in J_n} \frac{1}{2}\epsilon.r_j(t) \leq \frac{1}{2}\epsilon \sum_{0 \leq j \leq n} r_j(t) = \frac{1}{2}\epsilon$,

par (1). Et d'autre part, notant $M = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|$, on a :

$$\sum_{j \in K_n} |f(t) - f(\frac{j}{n})|.r_j(t) \leq \sum_{j \in K_n} [|f(t)| + |f(\frac{j}{n})|].r_j(t) \leq 2M \sum_{j \in K_n} r_j(t) \\ \leq 2M \sum_{j \in K_n} (j - nt)^2.r_j(t) \times \frac{1}{(j - nt)^2}.$$

Or, pour $j \in K_n$, on a : $(j - nt)^2 > n^2\eta^2 \implies \frac{1}{(j - nt)^2} < \frac{1}{n^2\eta^2}$.

De plus : $\sum_{j \in K_n} (j - nt)^2.r_j(t) \leq \sum_{0 \leq j \leq n} (j - nt)^2.r_j(t) = nt(1 - t) \leq \frac{1}{4}n$ [par (3), et

parce que $t \in [0, 1] \implies t(1 - t) \leq \frac{1}{4}$].

Donc : $\sum_{j \in K_n} |f(t) - f(\frac{j}{n})|.r_j(t) \leq \frac{2M}{n^2\eta^2} \times \frac{1}{4}n = \frac{M}{2n\eta^2}$.

En définitive, pour tout $t \in [0, 1]$: $|f(t) - B_n(f)| \leq \frac{1}{2}\epsilon + \frac{M}{2n\eta^2}$, et pour tout n

suffisamment grand : $\frac{M}{2n\eta^2} \leq \frac{1}{2}\epsilon$. D'où, pour n assez grand : $\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \epsilon$. ♦

Remarque :

La démonstration ci-dessus reste valide si la fonction f est une application $f : [0, 1] \rightarrow E$, où $(E, \| \cdot \|)$ est un e.v.n. sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; il suffit de changer partout $|\cdot|$ en $\| \cdot \|$. Avec un peu plus de précautions, mais sans changer le schéma de la démonstration, on peut aussi envisager $f : [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n] \rightarrow \mathbb{R}$.

Démonstration du Th. de Weierstraß trigonométrique

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{R} , périodique de période 2π [$\forall t \in \mathbb{R} : f(t + 2\pi) = f(t)$].

□ **Première étape, dans laquelle on suppose que f est paire**

$$[\forall t \in \mathbb{R} : f(-t) = f(t)].$$

Soit $\varphi : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(\text{Arc cos}(t))$. On a : $f(t) = \varphi(\cos(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Démontrons cela.

Soit, en effet, $t \in \mathbb{R}$: il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $s = t + 2k\pi \in [-\pi, +\pi]$; soit r tel que $r = s$ si $s \in [0, \pi]$ et $r = -s$ si $s \in [-\pi, 0]$: $r \in [0, \pi]$. Puisque f est paire, et puisque f et \cos sont périodiques de période 2π , on a : $f(t) = f(r)$ et $\cos(t) = \cos(r)$.

Mais, par définition de φ , on a : $\varphi(\cos(r)) = f(r)$, d'où le résultat.

La fonction φ est continue sur $[-1, +1]$: on peut appliquer le Th. de Weierstraß à φ et trouver ainsi une suite de polynômes en t convergeant uniformément sur $[-1, 1]$

vers φ . D'où une suite de polynômes en $\cos(t)$, c'est-à-dire de la forme $\sum_{i=0}^n \alpha_k \cos^k t$, convergeant uniformément vers f sur \mathbb{R} .

Il ne reste plus qu'à observer que $\cos^k(t)$ s'exprime linéairement en fonction de $1, \cos(t), \cos(2t), \dots, \cos(kt)$ [$\cos^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t))$, etc. Utilisez la formule de De Moivre]. On obtient finalement une suite de polynômes trigonométriques de la forme

$\alpha_0 + \sum_{1 \leq k \leq N} \alpha_k \cos(kt)$ qui converge uniformément vers f sur \mathbb{R} . ♦

□ **Deuxième étape**, dans laquelle on suppose que f est impaire

$$[\forall t \in \mathbb{R} : f(-t) = -f(t)].$$

Supposons que f est impaire : la fonction $t \mapsto f(t) \cdot \sin(t)$ est continue, périodique de période 2π , et paire. On peut donc lui appliquer le résultat de l'étape précédente. On en déduit que la fonction $t \mapsto f(t) \cdot \sin^2(t)$, continue et 2π -périodique, peut être approchée uniformément sur \mathbb{R} par une suite de polynômes trigonométriques.

En effet, on a une telle approximation, avec des combinaisons de termes de la forme $\cos(kt)$, pour $t \mapsto f(t) \cdot \sin(t)$: on multiplie par $\sin(t)$ « des deux côtés » et on remarque que $\cos(kt) \cdot \sin(t) = \frac{1}{2}(\sin((k+1)t) - \sin((k-1)t))$. D'où une approximation par des « polynômes » en \sin pour la fonction impaire $t \mapsto f(t) \cdot \sin^2(t)$. ♦

□ **Troisième étape**, dans laquelle on approche $f(t) \cdot \sin^2(t)$, sans hypothèse de parité.

Remarquons ensuite que si f est paire, $t \mapsto f(t) \cdot \sin^2(t)$ est paire aussi, continue et 2π -périodique, et donc on peut [1^{ère} étape] approcher cette fonction par des polynômes trigonométriques. De cette remarque et de l'étape 2, on déduit que pour toute fonction continue sur \mathbb{R} et 2π -périodique, la fonction $t \mapsto f(t) \cdot \sin^2(t)$, continue et 2π -périodique, peut être approchée uniformément sur \mathbb{R} par une suite de polynômes trigonométriques.

En effet, f peut s'écrire d'une manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire : $f = g + h$, où $g(t) = \frac{1}{2}[f(t) + f(-t)]$ (paire) et $h(t) = \frac{1}{2}[f(t) - f(-t)]$ (impaire) ; d'où : $f(t) \cdot \sin^2(t) = g(t) \cdot \sin^2(t) + h(t) \cdot \sin^2(t)$; puisque g et h sont continues et 2π -périodiques, il ne reste plus qu'à conclure grâce aux résultats qui précèdent. ♦

□ **Quatrième étape**, dans laquelle on conclut.

Soit à présent $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 2π -périodique. L'étape précédente nous permet d'affirmer que $t \mapsto f(t) \cdot \sin^2(t)$ peut être « approchée » (on abrège de plus en plus...). La fonction $t \mapsto f(\frac{\pi}{2} - t)$ est continue et 2π -périodique ; donc [étape précédente], $t \mapsto f(\frac{\pi}{2} - t) \cdot \sin^2(t)$ peut être approchée. D'où, en posant $s = \frac{\pi}{2} - t$: la fonction $s \mapsto f(s) \cdot \cos^2(s)$ peut être approchée. Puisque $t \mapsto f(t) \cdot \sin^2(t)$ et $t \mapsto \cos^2(t)$ peuvent être approchées, il en est de même de leur somme :
 $t \mapsto f(t) \cdot \sin^2(t) + f(t) \cdot \cos^2(t) = f(t)$. Nous avons terminé. ♦

Fin de la partie cours du Chapitre IV

LECTURE

Sous-groupes du groupe additif des nombres réels

Le présent texte est à considérer comme une suite d'exercices dirigés et comme un complément culturel. Nous savons que \mathbb{R} est un groupe pour l'addition. Nous allons nous intéresser aux sous-groupes de ce groupe. Par exemple $G = \{0\}$, $G = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Q}$, $G = \sqrt{2} \cdot \mathbb{Z} = \{n\sqrt{2} / n \in \mathbb{Z}\}$ sont des sous-groupes de \mathbb{R} additif.

Remarquons que $G = \mathbb{Q}$ est partout dense dans \mathbb{R} (usuel), tandis que les autres sont fermés dans \mathbb{R} .

Nous allons caractériser les sous-groupes partout denses et ceux qui ne le sont pas.

Proposition :

Soit G un sous-groupe de \mathbb{R} additif, non réduit à $\{0\}$.
 Posons $G_+ = \{s \in G / s > 0\}$ et $\mu = \inf(G_+)$. On a l'alternative suivante :

- Si $\mu = 0$: G est partout dense dans \mathbb{R} ,
- Si $\mu > 0$: il existe $\xi \in \mathbb{R}$ tel que $G = \{n.\xi / n \in \mathbb{Z}\}$, et G est fermé dans \mathbb{R} .

Démonstration :

1) *Premier cas* : $\mu = 0$. Fixons un $\varepsilon > 0$ arbitraire, et soit $[\alpha, \beta]$ un intervalle de \mathbb{R} tel que $\beta - \alpha = \varepsilon$. Par définition de la borne inférieure, il existe $\gamma = \gamma_\varepsilon \in G_+$ tel que $0 < \gamma < \varepsilon$. Puisque G est un groupe additif, $\gamma \in G \implies n.\gamma \in G$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Et il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $p.\gamma \in [\alpha, \beta]$. Par conséquent $[\alpha, \beta]$ contient un élément du groupe G , et G est partout dense dans \mathbb{R} . ♦

2) *Second cas* : $\mu > 0$. On va d'abord prouver que $\mu \in G$. Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire tel que $\varepsilon < \mu$. Par définition de la borne inférieure, il existe $\gamma \in G_+$ tel que $\gamma \in [\mu, \mu + \varepsilon]$. Si $\gamma \neq \mu$, il existe – même raisonnement que ci-dessus – $\eta \in G_+$ tel que $\eta \neq \gamma$ et $\eta \in [\mu, \gamma]$. Puisque G est un groupe additif, $\gamma - \eta \in G$ et vérifie : $0 < \gamma - \eta < \varepsilon < \mu$: il existerait $\theta = \gamma - \eta \in G_+$ vérifiant $\theta < \mu$: c'est contradictoire avec le fait que $\mu = \inf(G_+)$.

Donc $\mu = \gamma \in G_+$. Par conséquent, dans $[\mu, \mu + \varepsilon]$, μ est le seul élément de G_+ , et G possède un plus petit élément > 0 .

Soit, à présent, $\gamma \in G$ arbitraire, et soit $q = [\frac{\gamma}{\mu}]$ (partie entière de γ/μ). Ecrivons : $\frac{\gamma}{\mu} = q + \rho$, où $\rho \in [0, 1]$, et posons $\sigma = \mu.\rho$. On a : $\gamma = q.\mu + \sigma$, où $\sigma \in [0, \mu]$.

Mais $q.\mu \in G$, et $\gamma \in G \implies \gamma - \mu.\rho = \sigma \in G$; $\sigma \in G$ est ≥ 0 et $< \mu$: contradiction si $\sigma \neq 0$. Donc $\sigma = 0$, et $\gamma = q.\mu$. En définitive, tout élément de G s'écrit $n.\mu$ avec $n \in \mathbb{Z}$. Il est clair que $\text{adh}(G) = G$, et donc que G est fermé. ♦

Corollaire :

On considère le groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$. Soit G un sous-groupe.
 Si $\inf\{\gamma \in G / \gamma > 1\} = 1$: G est partout dense dans $]0, +\infty[$.
 Si $\inf\{\gamma \in G / \gamma > 1\} > 1$: il existe $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $G = \{\alpha^n / n \in \mathbb{Z}\}$.

Démonstration : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$, $s \mapsto e^s$ et $\mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \ln(t)$ sont des isomorphismes de groupe continus inverses l'un de l'autre. Le résultat découle de la Proposition ci-dessus et des propriétés des homéomorphismes [D.E.U.G. ou voir le Chap. VIII]. ♦

Corollaire :

Soient α et β deux réels $\neq 0$. $G = \{m.\alpha + n.\beta / m, n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de \mathbb{R} additif. Si α/β est irrationnel, G est partout dense dans \mathbb{R} . Si α/β est rationnel, G est l'ensemble des multiples entiers d'un certain réel.

Démonstration :

1) Supposons $\frac{\alpha}{\beta}$ irrationnel. On raisonne par contradiction en prouvant que G n'est pas constitué par les multiples entiers d'un réel γ : d'après la Proposition, G sera partout dense dans \mathbb{R} .

Supposons donc qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $m.\alpha + n.\beta = p.\gamma$ pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$. Evidemment $\gamma \neq 0$.

Soient $m \neq 0, n \neq 0$, entiers : on a $p \neq 0$, car si $p = 0$: $m\alpha + n\beta = 0 \implies \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{n}{m}$ et $\frac{\alpha}{\beta}$ est rationnel, contrairement à l'hypothèse.

Soient $m' \neq 0$ et $n' \neq 0$ entiers tels que $m'n - mn' \neq 0$. $m'\alpha + n'\beta = p'\gamma$ avec $p' \neq 0$ (comme ci-dessus). De $m\alpha + n\beta = p\gamma$ et $m'\alpha + n'\beta = p'\gamma$, on tire :

$\frac{m\alpha + n\beta}{m'\alpha + n'\beta} = \frac{p}{p'}$, et : $(mp' - m'p)\alpha = (n'p - np')\beta$. Si $mp' - m'p = n'p - np' = 0$, on a : $\frac{m}{m'} = \frac{n}{n'} = \frac{p}{p'} \implies m'n - mn' = 0$ contrairement à ce qu'on a supposé.

On a donc : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{n'p - np'}{mp' - m'n}$, et $\frac{\alpha}{\beta}$ serait rationnel. Par conséquent l'existence de γ conduit à une absurdité. ♦

2) Supposons $\frac{\alpha}{\beta}$ rationnel. Soient p et q entiers tels que $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q} \implies \frac{\alpha}{p} = \frac{\beta}{q} = \rho \in \mathbb{R}$.

Soit θ un élément de G : $\theta = m\alpha + n\beta = mp\rho + nq\rho = \rho(mp + nq)$. $H := \{mp + nq / m, n \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de \mathbb{R} additif dont tous les éléments sont des entiers ; donc H possède un plus petit élément > 0 qui est ≥ 1 . Donc il existe $\eta \in \mathbb{R}$ tel que tout $mp + nq = r\eta$, avec r entier.

On en déduit que $\theta = r \cdot \rho\eta$. Finalement, $G = \{r \cdot (\rho\eta) / r \in \mathbb{Z}\}$. ♦

Soit maintenant $C = S(O, 1)$ le cercle de centre O et de rayon 1, orienté comme d'habitude. On considère un angle $\theta \in [0, 2\pi[$ et on considère :

$$G = \{n\theta \text{ [mod } 2\pi] / n \in \mathbb{Z}\}$$

où $n\theta \text{ [mod } 2\pi]$ (mod pour modulo) signifie que l'on identifie tous les nombres qui diffèrent d'un multiple entier de 2π . Autrement dit, on identifie C au groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Plus concrètement, on considère C comme un objet géométrique, et un angle θ est une rotation d'angle compris entre 0 et $2\pi =$ un tour complet. Il est clair que G est un groupe.

Proposition :

Si $\theta/2\pi$ est rationnel, le groupe G est fini. Si $\theta/2\pi$ est irrationnel, G est partout dense dans C (sous-espace métrique de \mathbb{R}^2).

Démonstration :

Supposons d'abord $\theta/2\pi$ rationnel : $\theta/2\pi = p/q$, où p et q sont des entiers premiers entre eux (fraction irréductible). Représentons le groupe G par des points M sur C , d'angle polaire $n\theta$. Pour $n = 0$ on a M_0 d'angle 0, puis M_1 d'angle θ , M_2 d'angle 2θ , etc. Jusqu'à $n = q$: M_q d'angle $q\theta = 2p\pi$ coïncide avec M_0 . Donc, seuls les points M_0, \dots, M_{p-1} sont distincts, et le groupe $G = \{n\theta \text{ [mod } 2\pi] / n \in \mathbb{Z}\}$ est fini. ♦

Supposons à présent que $\theta/2\pi$ est irrationnel. On va démontrer qu'étant donné un angle $\varphi \in [0, 2\pi[$ et ε réel > 0 arbitraires, il existe un point d'angle polaire $m\theta$ qui se trouve dans l'arc de C défini par $\varphi - \varepsilon < \alpha < \varphi + \varepsilon$. La position de ce point est définie à un multiple de 2π près, et donc on cherche en fait deux entiers $m, n \in \mathbb{Z}$ vérifiant : $\varphi - \varepsilon < m\theta + n \cdot 2\pi < \varphi + \varepsilon$. On se ramène ainsi au sous-groupe de \mathbb{R} : $\{ma + nb / m, n \in \mathbb{Z}\}$ considéré dans le corollaire ci-dessus, avec $\alpha = \theta$ et $b = 2\pi$. $\alpha/\beta = \theta/2\pi$ étant irrationnel par hypothèse, le sous-groupe est partout dense dans \mathbb{R} , et les deux entiers m et n cherchés existent. Par conséquent, $G = \{n\theta \text{ [mod } 2\pi] / n \in \mathbb{Z}\}$ est partout dense dans C lorsque $\theta/2\pi$ est irrationnel. ♦

Application :

La densité de l'ensemble des $n\theta \text{ [mod } 2\pi]$ dans C lorsque $\theta/2\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, par exemple si $\theta = 1$, permet de conclure que la suite $(\sin(n\theta))_{n \in \mathbb{N}}$, $\theta/2\pi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, admet $[-1, +1]$ comme ensemble des valeurs d'adhérence, résultat que nous avons déjà annoncé dans le Chap. III.

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ **Exercice 1.1.**

$\forall c \in C, \forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in B : d(c, b_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$; pour ce $b_\varepsilon, \exists a_\varepsilon \in A : d(b_\varepsilon, a_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Ainsi : $d(c, a_\varepsilon) \leq d(c, b_\varepsilon) + d(b_\varepsilon, a_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Donc, A est dense par rapport à C . La relation « dense par rapport à » est transitive. ♦

$\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A : d(b, a_\varepsilon) \leq \varepsilon$, mais $a_\varepsilon \in C$, d'où le résultat. ♦

$\forall c \in C, \forall \varepsilon > 0 : c \in B$, d'où : $\exists a_\varepsilon \in A : d(c, a_\varepsilon) \leq \varepsilon$, et le résultat. ♦

☞ **Exercice 1.2.**

Il suffit de l'écrire ! Si A est dense par rapport à $B, \forall b \in B, \forall \varepsilon = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A : d(a_n, b) \leq \varepsilon = \frac{1}{n}$. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de A vérifie $d(a_n, b) \leq \frac{1}{n}$, et donc converge vers b . ♦

Réciproquement, soit $b \in B$ et soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)_n = b$.

Par définition, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies d(b, a_n) \leq \varepsilon$.

Donc A est dense dans B . ♦

$\forall b \in B, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : d(b, a) < \varepsilon \implies a \in B(b, \varepsilon[\cap A$.

Réciproquement, on considère $a_n \in B(b, \frac{1}{n}[\cap A$ (qui est $\neq \emptyset$) : $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)_n = b$. ♦

Ces propriétés sont équivalentes, on l'a vu [Chap. I et III], à : $B \subset \text{adh}(A)$. ♦

En particulier, A partout dense dans $E \iff \text{adh}(A) = E$.

☞ **Exercice 1.3.**

S'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ totale : $(E, \| \cdot \|)$ est séparable. En effet, posons :

$A = [(a_1, \dots, a_n, \dots)]$; par définition, A est un sous-espace vectoriel de E qui est partout dense dans E . Pour $J \subset \mathbb{N}, J$ fini, posons : $B_J = \left\{ \sum_{j \in J} \lambda_j a_j / \lambda_j \text{ rationnel} \right\}$, où par « rationnel » on

entend : $\lambda_j \in \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, avec $\alpha_j \in \mathbb{Q}, \beta_j \in \mathbb{Q}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe $\underline{\lambda}$ rationnel tel que $|\lambda - \underline{\lambda}| \leq \varepsilon$: c'est la densité de \mathbb{Q}^2 dans \mathbb{R}^2 .

Posons ensuite : $B = \bigcup_{J \subset \mathbb{N}, J \text{ fini}} B_J$. Chaque B_J est dénombrable parce que \mathbb{Q} l'est, l'ensemble des parties finies de \mathbb{N} est dénombrable (vérifiez, c'est facile), et donc B réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable (ce dernier résultat, assez facile, est issu de la théorie des ensembles, plus précisément de la théorie des cardinaux).

Cela étant, on aura terminé si l'on démontre que B est dense par rapport à A (notons que $B \subset A$).

Soit $u \in A : u = \sum_{k \in K} \lambda_k a_k$ (K fini); posons : $M := \sum_{k \in K} \|a_k\|$; pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, et pour

tout $k \in K$, il existe $\underline{\lambda}_k$ rationnel tel que $|\lambda_k - \underline{\lambda}_k| \leq \frac{\varepsilon}{M}$;

$\|u - \sum_{k \in K} \underline{\lambda}_k a_k\| = \left\| \sum_{k \in K} \lambda_k a_k - \sum_{k \in K} \underline{\lambda}_k a_k \right\| \leq \sum_{k \in K} |\lambda_k - \underline{\lambda}_k| \cdot \|a_k\| \leq M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Comme

$\sum_{k \in K} \underline{\lambda}_k a_k \in B$, on a : B est dense dans A . ♦

Réciproquement, si $(E, \| \cdot \|)$ est séparable, soit $D = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ partout dense dans E : $[D]$ est partout dense, ce qui signifie que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est totale. ♦

☞ **Exercice 1.4.**

1) Cas de $E = (c_0)$ muni de $\| \cdot \|_\infty$.

Soit $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ [1 en n -ième place]. Nous allons démontrer que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est totale dans E . Posons $F := [(e_1, \dots, e_n, \dots)]$.

Soit $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de (c_0) . Considérons :

$$u_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \in F, u_n = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots).$$

$$\|a - u_n\|_\infty = \|(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots) - (\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0, 0, \dots)\|_\infty = \|(0, 0, \dots, \alpha_{n+1}, \dots)\|_\infty = \max_{j \geq n+1} |\alpha_j| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

car $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)_n = 0 \implies \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq N \implies |\alpha_n| \leq \varepsilon$. ♦

2) Cas de $E = (c)$ muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Soit $e_0 = (1, 1, 1, \dots)$ [que des 1]. On a, du point de vue algébrique : $E = (c) = (c_0) \oplus [e_0]$.

Posons $G = [e_0, F] = [e_0, e_1, \dots, e_n, \dots]$. G est dense dans E , en effet, soit :

$a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots) \in (c)$, avec $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = \alpha$; on a :

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a - \alpha \cdot e_0) = 0$, soit : $a - \alpha \cdot e_0 \in (c_0)$; donc il existe, d'après le cas 1), une suite (u_n) ,

$u_n \in F$, telle que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = a - \alpha \cdot e_0$; $v_n = \alpha \cdot e_0 + u_n$ appartient à $G = [e_0] \oplus F$ et

$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \alpha \cdot e_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha \cdot e_0 + a - \alpha \cdot e_0 = a$. D'où le résultat, d'après l'Exercice 1.2. ♦

3) Cas de $E = \ell^p$, avec $1 \leq p < \infty$, muni de $\|\cdot\|_p$. Soit encore $F = [(e_1, \dots, e_n, \dots)]$, et soit

$u = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \in \ell^p$, i.e. vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$. Posons $u_n := \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \in F$:

$$\begin{aligned} (\|u - u_n\|_p)^p &= \left(\left\| \sum_{j=1}^n \xi_j e_j - (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) \right\|_p \right)^p = (\|(0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \dots)\|_p)^p \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |\xi_j|^p \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ car le reste d'une série convergente tend vers } 0. \end{aligned}$$

Exercice 1.5.

Soit $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ une partie dénombrable arbitraire dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$; on va prouver que A ne peut pas être partout dense.

$a_n \in \ell^\infty$, $a_n = (\alpha_k^{(n)})_{k \in \mathbb{N}^*}$. Soit $u = (\xi_1, \dots, \xi_k, \dots)$ ainsi définie : $\xi_k = \alpha_k^{(k)} + 1$ si $|\alpha_k^{(k)}| \leq 1$,

et $\xi_k = 0$ si $|\alpha_k^{(k)}| > 1$. Il est clair que $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*} = u \in \ell^\infty$ puisque $|\xi_k| \leq 2$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $u - a_k$ a pour k -ième composante :

$$\xi_k - \alpha_k^{(k)} = \begin{cases} [\alpha_k^{(k)} + 1] - \alpha_k^{(k)} = 1 & \text{si } |\alpha_k^{(k)}| \leq 1 \\ 0 - \alpha_k^{(k)} = -\alpha_k^{(k)} & \text{si } |\alpha_k^{(k)}| > 1 \end{cases}$$

et – donc – pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $|\xi_k - \alpha_k^{(k)}| \geq 1$, d'où l'on déduit :

$$\|u - a_k\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |\xi_n - \alpha_n^{(k)}| \geq \sup_{k \in \mathbb{N}^*} |\xi_k - \alpha_k^{(k)}| \geq 1.$$

$\forall k \in \mathbb{N}^* : \|u - a_k\|_\infty \geq 1 \implies d(u, A) \geq 1$. Donc l'élément $u \in \ell^\infty$ ainsi construit n'est certainement pas approché à ε près pour tout $\varepsilon > 0$ par les éléments de A !

Par conséquent, A n'est pas partout dense dans ℓ^∞ . Comme A est arbitraire, il n'existe pas de partie dénombrable partout dense dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$ et cet espace n'est pas séparable. ♦

Exercice 1.6.

Soit (E, d) séparable, on note D un ensemble dénombrable partout dense dans E ; et soit F un sous-espace métrique de E . L'idée la plus naturelle, malheureusement mauvaise, consiste à considérer l'ensemble (dénombrable !) $D \cap F$ et à essayer, en vain, de prouver que cet ensemble est partout dense dans F . L'exemple $E = \mathbb{R}$ (usuel), $D = \mathbb{Q}$, $F = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dans lequel $D \cap F = \emptyset$, montre à l'évidence que cette idée n'est certainement pas la bonne . . .

Notons $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$, et pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, tout $k \in \mathbb{N}^*$, considérons les boules (ouvertes ou fermées, peu importe) $B(a_i, \frac{1}{k})$. Pour toutes les boules $B(a_i, \frac{1}{k})$ qui rencontrent F , on choisit $b_{i,k} \in B(a_i, \frac{1}{k}) \cap F$. On obtient ainsi une famille $(b_{i,k})$ d'éléments de F indexée par une partie de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, donc dénombrable [Chap.III].

Il reste à vérifier que $\Delta := \{b_{i,k}\}$ est partout dense dans F .

Soit $\varepsilon > 0$ donné quelconque et $u \in F$. Soit $h \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{h} < \varepsilon$. Puisque D est partout dense dans E , il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que $\|u - a_i\| \leq \frac{1}{2h}$.

$u \in B(a_i, \frac{1}{2h}) \cap F$ et donc $B(a_i, \frac{1}{2h}) \cap F \neq \emptyset : b_{i,2h} \in \Delta$. On a alors :

$$\|u - b_{i,2h}\| \leq \|u - a_i\| + \|a_i - b_{i,2h}\| \leq \frac{1}{2h} + \frac{1}{2h} = \frac{1}{h} < \varepsilon.$$

Ainsi, tout élément de F est approché par un point de Δ à moins de ε près et Δ est partout dense dans F . ♦

Exercice 2.1.

Soit $E = \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$.

Pour tout $\xi \in]\alpha, \beta[$ donné, soit φ_ξ la fonction caractéristique de l'intervalle $[\alpha, \xi]$, i.e. que $\varphi_\xi(t) = 1$ si $t \in [\alpha, \xi]$ et $\varphi_\xi(t) = 0$ si $t \in]\xi, \beta[$. φ_ξ est une fonction en escalier sur I .

Si η est tel que $\alpha < \xi < \eta < \beta$ on a :

$$\|\varphi_\xi - \varphi_\eta\|_\infty = \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_\xi(t) - \varphi_\eta(t)| = \sup_{\xi < t \leq \eta} (1) = 1.$$

La famille $(\varphi_\xi)_{\alpha < \xi < \beta}$ est une famille NON dénombrable (elle est équipotente à $] \alpha, \beta[$, donc à $]0, 1[$, donc à \mathbb{R}) d'éléments de E telle que $\|\varphi_\xi - \varphi_\eta\|_\infty = 1$ pour tout $\xi \neq \eta$.

Supposons maintenant que E est séparable, et soit $D = \{f_1, \dots, f_n, \dots\}$ une suite partout dense dans E . Pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$, $\forall f \in E, \exists i \in \mathbb{N}^* : \|f - f_i\|_\infty \leq \frac{1}{4}$, soit : $f \in B(f_i, \frac{1}{4})$. Par conséquent, tout $f \in E$ appartient à une boule $B(f_i, \frac{1}{4})$. La famille $(\varphi_\xi)_\xi$ étant non dénombrable, il existe obligatoirement une boule où se trouvent au moins deux éléments distincts ⁽²⁾ de la famille [en fait un ensemble non dénombrable !]. Soient donc $\varphi_\xi, \varphi_\eta \in B(f_k, \frac{1}{4})$:

$$1 = \|\varphi_\xi - \varphi_\eta\|_\infty \leq \|\varphi_\xi - f_k\|_\infty + \|f_k - \varphi_\eta\|_\infty \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} : \text{contradiction ! } \blacklozenge$$

Corollaire : $\mathcal{B}_\infty(I, \mathbb{R})$ n'est pas non plus séparable. En fait tout sous-espace de \mathcal{B}_∞ qui contient les fonctions en escalier n'est pas séparable.

(2) C'est la généralisation du « Principe des pigeons » : si $N + 1$ pigeons se partagent N nids, obligatoirement, il y a un nid dans lequel se trouvent au moins deux pigeons.

PROBLÈME

Une distance curieuse

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel de dimension ≥ 1 ; on note d la distance associée à la norme. Pour tous $u \in E, v \in E$ on pose :

$$\delta(u, v) = \|u\| + \|v\| \text{ si } \|u\| \neq \|v\|, \delta(u, v) = d(u, v) = \|v - u\| \text{ si } \|u\| = \|v\|.$$

1) Démontrez que δ définit une distance sur E .

2) Décrivez les boules fermées $B_\delta(u, \rho)$ de l'espace métrique (E, δ) à l'aide des boules fermées et des sphères de l'espace métrique (E, d) . Une discussion complète est demandée.

Pour $E = \mathbb{R}$ usuel et $E = \mathbb{R}^2$ euclidien, dessinez $B_\delta(u, \rho)$.

3) Étudiez la convergence d'une suite $(u_n)_n$ dans (E, δ) (comparez avec la convergence dans (E, d)). Donnez un exemple de suite convergente pour d et divergente pour δ .

4) Démontrez que (E, δ) n'est pas séparable. Détaillez le cas de $E = \mathbb{R}$.

CORRIGÉ du PROBLÈME

1) • Par définition, δ est à valeurs réelles puisque d et $\|\cdot\|$ sont à valeurs réelles.

• $\forall u, v \in E : \delta(u, v) \geq 0$ puisque $\|u\| + \|v\| \geq 0$ et $d(u, v) \geq 0$.

• $\forall u, v \in E$, on a $\|u\| = \|v\| \iff \|v\| = \|u\|$ et $\|u\| \neq \|v\| \iff \|v\| \neq \|u\|$. Donc :

$$\delta(v, u) = \|v\| + \|u\| = \|u\| + \|v\| = \delta(u, v) \text{ si } \|u\| \neq \|v\|, \text{ et :}$$

$$\delta(v, u) = d(v, u) = d(u, v) = \delta(u, v) \text{ si } \|u\| = \|v\|.$$

• Comme $\|u\| = \|u\|$ (!) : $\delta(u, u) = d(u, u) = 0$.

• Si $\|u\| \neq \|v\|$, on a $\delta(u, v) = \|u\| + \|v\| > 0$ car, sinon, $\|u\| = \|v\| = 0$, d'où : $u = v = 0$, ce qui est impossible.

Si $\|u\| = \|v\|$ et $\delta(u, v) = 0$, on a $d(u, v) = 0 \implies u = v$ puisque d est une distance.

• Pour l'inégalité triangulaire, envisageons simplement tous les cas possibles pour $u, v, w \in E$.

○ $\|u\| \neq \|v\|, \|u\| \neq \|w\|, \|w\| \neq \|v\|$; on doit avoir :

$$\|u\| + \|v\| \leq \|u\| + \|w\| + \|w\| + \|v\|, \text{ inégalité vraie car } \|w\| \geq 0,$$

○ $\|u\| \neq \|v\|, \|u\| = \|w\|$ ($\implies \|w\| \neq \|v\|$) [ou, symétriquement : $\|u\| \neq \|v\|, \|w\| = \|v\|$ ($\implies \|u\| \neq \|w\|$)] ;

on doit avoir : $\|u\| + \|v\| \leq d(u, w) + \|w\| + \|v\| \iff \|u\| - \|w\| \leq d(u, w) = \|u - w\|$, qui est vraie à cause de la seconde inégalité triangulaire pour $\|\cdot\|$,

○ $\|u\| = \|v\|, \|u\| \neq \|w\|$ ($\implies \|w\| \neq \|v\|$) [ou symétriquement : $\|u\| = \|v\|, \|w\| \neq \|v\|$ ($\implies \|u\| \neq \|w\|$)] ;

on doit avoir : $d(u, v) \leq \|u\| + \|w\| + \|w\| + \|v\|$, qui est vraie car

$$d(u, v) = \|u - v\| \leq \|u\| + \|v\| \leq \|u\| + \|v\| + 2\|w\|,$$

○ $\|u\| = \|v\| = \|w\|$; on doit avoir : $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$, qui est vraie parce que d est une distance.

Donc l'inégalité $\delta(u, v) \leq \delta(u, w) + \delta(w, v)$ est toujours vérifiée. En définitive δ est une distance sur E . ♦

2) Notons $B(u, \rho)$ et $S(u, \rho)$ les boules fermées et les sphères de (E, d) , et $B_\delta(u, \rho)$ les boules fermées de (E, δ) . On va exprimer $B_\delta(u, \rho)$ à l'aide des $B(u, \rho)$ et $S(u, \rho)$.

• Étudions d'abord le cas où $u = 0$.

$0 \in B_\delta(0, \rho)$, et pour $v \neq 0, \|v\| \neq \|0\|$, d'où : $\delta(0, v) \leq \rho \iff \|v\| \leq \rho$.

Donc, pour tout $\rho > 0 : B_\delta(0, \rho) = B(0, \rho)$.

• Supposons maintenant que $u \neq 0, v \in B_\delta(u, \rho) \iff \delta(v, u) \leq \rho$.

- i) si $\|v\| \neq \|u\| : \delta(v, u) = \|v\| + \|u\| \leq \rho \iff \|v\| \leq \rho - \|u\|$,
- ii) si $\|v\| = \|u\| : \delta(v, u) = \|v - u\| \leq \rho \iff v \in B(u, \rho)$.

Le cas ii) signifie que l'on a : $v \in S(0, \|u\|) \cap B(u, \rho)$. Dans le cas i), il nous faut évidemment discuter suivant que $\rho - \|u\|$ est $< 0, = 0, > 0$.

- a) si $\rho - \|u\| < 0 : \|v\| < 0$ est impossible,
- b) si $\rho - \|u\| = 0 : \|v\| = 0$, soit $v = 0$, (et $\|0\| \neq \|u\|$)
- c) si $\rho - \|u\| > 0 : \|v\| \leq \rho - \|u\| \iff v \in B(0, \rho - \|u\|)$ et donc :
 $v \in B(0, \rho - \|u\|) \setminus S(0, \|u\|)$

En résumé, dans le cas où $u \neq 0$ on a par disjonction des cas et équivalence dans chaque cas :

- si $\rho < \|u\| : B_\delta(u, \rho) = S(0, \|u\|) \cap B(u, \rho)$,
- si $\rho = \|u\| : B_\delta(u, \rho) = \{0\} \cup [S(0, \|u\|) \cap B(u, \rho)]$,
- si $\rho > \|u\| : B_\delta(u, \rho) = [B(0, \rho - \|u\|) \setminus S(0, \|u\|)] \cup [(S(0, \|u\|) \cap B(u, \rho))]$.

Dans ce dernier cas, on peut encore préciser :

- Si $\rho < 2\|u\|$, alors $v \in B(0, \rho - \|u\|) \implies \|v\| \leq \rho - \|u\| < \|u\|$ et : $v \notin S(0, \|u\|)$, donc :

$$\|u\| < \rho < 2\|u\| \implies B_\delta(u, \rho) = B(0, \rho - \|u\|) \cup [(S(0, \|u\|) \cap B(u, \rho))]$$

- Si $\rho \geq 2\|u\|$, $\|v\| = \|u\| \implies \|v - u\| \leq \|v\| + \|u\| \leq 2\|u\| \leq \rho \implies v \in B(u, \rho)$.

Ainsi $S(0, \|u\|) \subset B(u, \rho)$, $S(0, \|u\|) \subset B(u, \rho - \|u\|)$ et il reste simplement :

$$\rho \geq 2\|u\| \implies B_\delta(u, \rho) = B(0, \rho - \|u\|).$$

Cas particulier $(E, d) = \mathbb{R}$ usuel.

Prenons $u > 0$ par exemple.

- si $\rho < |u| = u$. $S(0, |u|) = \{-u, u\}$ et $B(u, \rho) = [u - \rho, u + \rho]$.
 Donc $B_\delta(u, \rho) = \{u\}$.
- si $\rho = |u| = u$. $B_\delta(u, \rho) = \{0, u\}$.
- si $\rho > |u| = u$.
 $\implies u < \rho < 2u : B_\delta(u, \rho) = [-\rho + u, \rho - u] \cup \{u\}$.
 $\implies \rho \geq 2u : B_\delta(u, \rho) = [-\rho + u, \rho - u]$.

Cas particulier $(E, d) = \mathbb{R}^2$ euclidien.

Une série de quatre dessins (à faire !) montre plus clairement qu'un long discours les différentes situations possibles.

On notera, une fois encore, que si $\rho \geq 2\|u\|$ on a $B_\delta(u, \rho) = B(0, \rho - \|u\|)$.

On remarquera que dans toute boule $B(u, \rho)$ on peut loger une boule $B_\delta(u, \sigma)$ en choisissant σ assez petit. La réciproque n'est visiblement pas exacte.

3) Commençons par remarquer que $d(u, v) = \|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$, et que, donc, pour tous $u, v \in E$ on a $d(u, v) \leq \delta(u, v)$. Cela se traduit géométriquement par la remarque ci-dessus : $\forall \rho > 0, \exists \sigma > 0$ (on peut prendre $\sigma := \rho) : B_\delta(u, \sigma) \subset B(u, \rho)$.

Donc, si une suite $(u_n)_n$ converge vers u pour δ cette suite converge vers u pour d :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n : n \geq N \implies \delta(u_n, u) \leq \varepsilon$ donne *a fortiori*,
 $\forall n : n \geq N \implies d(u_n, u) \leq \varepsilon$.

Remarquons ensuite que si $\lim(u_n) = 0$ pour d on a aussi $\lim(u_n) = 0$ pour δ puisque $B_\delta(0, \rho) = B(0, \rho)$ pour tout $\rho > 0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n : n \geq N \implies u_n \in B_\delta(0, \rho) = B(0, \rho).$$

Supposons maintenant que l'on a $\lim(u_n) = u$ où $u \neq 0$ pour δ , ce qui équivaut à $\lim \delta(u_n, u) = 0$. Ecrivons que $\mathbb{N} = S \cup T$ où $S := \{n \in \mathbb{N} / \|u_n\| \neq \|u\|\}$ et $T := \mathbb{N} \setminus S$.

Supposons S infini, alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} \delta(u_n, u) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (\|u_n\| + \|u\|)$$

Ce qui est impossible, puisque $u \neq 0 \implies \|u\| \neq 0$.

Ainsi S est fini et, à partir d'un rang N , $\|u_n\| = \|u\| : \delta(u_n, u) = d(u_n, u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Réciproquement, si $\|u_n\| = C$, à partir d'un certain rang N , et si $\lim u_n = u$ au sens de d , on sait que $\|u\| = C$ et, pour $n \geq N$, $\delta(u_n, u) = d(u_n, u) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Ainsi (u_n) converge vers u au sens de δ .

Conclusion : $\lim(u_n) = u \neq 0$ au sens de δ , a lieu si et seulement si :

- 1) $\|u_n\| = \|u\|$ à partir d'un certain rang,
- 2) $\lim(u_n) = u$ au sens de la distance d usuelle.

En définitive : les suites tendant vers 0 sont les mêmes pour d et δ . Les seules autres suites convergentes pour δ sont les suites dont tous les termes u_n (sauf éventuellement un nombre fini) sont sur une même sphère $S(u, \rho)$ [relative à d] et telles que $\lim \|u_n - u\| = 0$.

Dans \mathbb{R} , un exemple de suite convergente pour d et non pour δ est le suivant : $u \neq 0$, $u_n = (1 + \frac{1}{n})u$. ♦

4) Dans le cas $E = \mathbb{R}$ la non-séparabilité de (\mathbb{R}, δ) est particulièrement évidente. Soit en effet $A \subset \mathbb{R}$ une partie partout dense pour δ . Pour tout $u \neq 0$, $u \in \mathbb{R}$ fixé, on doit avoir pour tout $\rho > 0$: $B_\delta(u, \rho) \cap A \neq \emptyset$; or pour tout $\rho < |u|$ on a $B_\delta(u, \rho) = \{u\}$ et donc $\{u\} \cap A \neq \emptyset$ qui signifie que $u \in A$. Donc $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui n'est pas dénombrable, ou bien $A = \mathbb{R}$ non dénombrable.

Passons au cas $\dim(E) \geq 2$. On va démontrer que si A est une partie partout dense de (E, δ) , A ne peut pas être dénombrable. Soit u de norme 1 ($\|u\| = 1$) et considérons les boules $B_\delta(\lambda u, \frac{1}{2}\lambda)$: $\frac{1}{2}\lambda = \frac{1}{2}\|\lambda u\| < \|\lambda u\|$ et donc [voir le 2)] : $B_\delta(\lambda u, \frac{1}{2}\lambda) = S(0, \lambda) \cap B(\lambda u, \frac{1}{2}\lambda)$.

Pour $\lambda \neq \mu$ ($\lambda, \mu \in [0, 1]$) on a : $B_\delta(\lambda u, \frac{1}{2}\lambda) \cap B_\delta(\mu u, \frac{1}{2}\mu) = \emptyset$, car on a déjà : $S(0, \lambda) \cap S(0, \mu) = \emptyset$. L'ensemble des boules $B_\delta(\lambda u, \frac{1}{2}\lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$, est non dénombrable et deux telles boules sont d'intersection vide.

Comme A est partout dense, pour tout λ on a : $B_\delta(\lambda u, \frac{1}{2}\lambda) \cap A \neq \emptyset$ et il y a autant de points distincts dans cette intersection qu'il y a de points dans $[0, 1]$ (à cause de l'intersection vide des boules distinctes). Donc A contient un ensemble non dénombrable, et il ne peut donc pas être dénombrable. Par conséquent (E, δ) n'est pas séparable. ♦

Fin du Chapitre IV

CHAPITRE V

FERMÉS D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Introduction

Le cinquième chapitre traite de sous-ensembles particuliers d'un espace métrique qu'on appelle les *fermés*, et de sujets qui se rattachent naturellement à cette idée de fermeture : *points adhérents*, classés en *points isolés* et en *points d'accumulation*, *adhérence* et *frontière* d'un sous-ensemble.

On commence à parler dans ce chapitre de topologie.

Le prochain chapitre traitera de manière assez symétrique des sous-ensembles ouverts.

Vous devez, petit à petit, vous habituer à travailler sur un ensemble doté de plusieurs distances non équivalentes, et, aussi, à travailler simultanément sur un espace métrique et sur ses sous-espaces.

En bref, vous devez acquérir la notion de *relativité des objets de la topologie*, et un savoir-faire dans ce domaine.

Un grand nombre d'exercices vous sont fournis afin de vous aider.

Ce chapitre est facile, mais attention à la relativité.

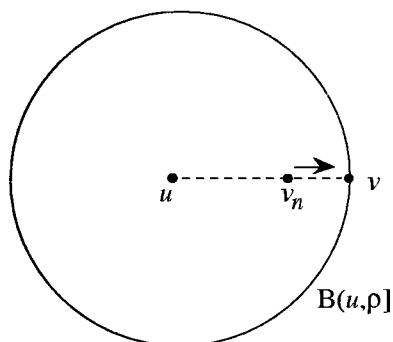
☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 2.2, 2.3, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5.

☞ Exercices complémentaires : 2.1, 4.1.

cf. Exercice 1.5 du Chap. VI sur la notion de frontière.

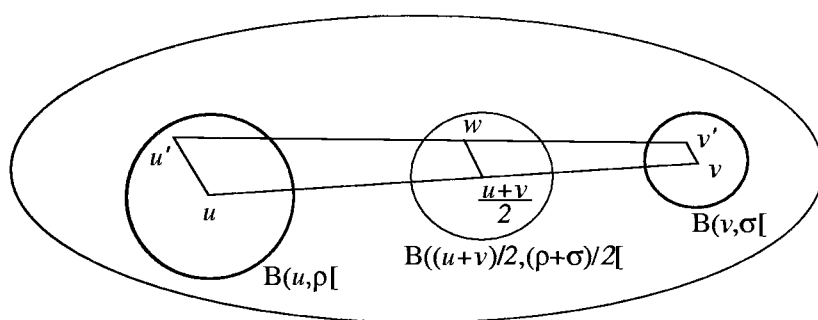
Un problème est proposé, sur les fonctions convexes : quelques questions demandent les Chap. VI, VII. Ce n'est pas un problème facile . . .

RENDEZ-VOUS AU CHAPITRE VI, ET BON TRAVAIL



Si E est un e.v.n. $\text{adh}(B(u, \rho]) = B(u, \rho]$:

Pour $v \in B(u, \rho]$, $v_n = \frac{1}{n}u + (1 - \frac{1}{n})v \in B(u, \rho]$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = v$.



Problème, question 1

CHAPITRE V

FERMÉS D'UN ESPACE MÉTRIQUE

1. NOTION D'ADHÉRENCE

La notion d'adhérence d'une partie A d'un espace métrique (E, d) a été introduite dès le Chap. I par la propriété suivante :

$$u \in \text{adh}(A) \text{ ssi } d(u, A) = 0.$$

Nous reprenons ici la notion à partir d'une définition plus naturelle, généralisable – *mutatis mutandis* – aux espaces topologiques non métriques.

Définition 1.1.

Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie de E .

Un point $u \in E$ est dit **adhérent** à A si *toute* boule centrée en u a une intersection non vide avec A .

L'ensemble de tous les points de E qui sont adhérents à A est appelé l'**adhérence** de A . On le note $\text{adh}(A)$, ou bien A surmonté d'une barre : \bar{A} .

Commentaires :

1) Au lieu de « adhérence de A », on dit aussi, plus rarement, « fermeture de A » [en anglais « closure », avec la notation $\text{cl}(A)$].

2) Nous n'avons pas précisé la nature des boules (ouvertes ou fermées), c'est indifférent, puisqu'il s'agit de toutes les boules :

$$(1.1) \quad u \in \text{adh}(A) \iff \forall \rho > 0 : B(u, \rho] \cap A \neq \emptyset \iff \forall \rho > 0 : B(u, \rho) \cap A \neq \emptyset.$$

En effet :

$$(1.2) \quad \forall \rho > 0, \forall \varepsilon \in]0, \rho[: B(u, \rho - \varepsilon) \subset B(u, \rho) \subset B(u, \rho) \subset B(u, \rho + \varepsilon).$$

Détaillez si vous n'êtes pas absolument convaincu . . .

On peut immédiatement reformuler la définition de $\text{adh}(A)$ ainsi :

$$(1.3) \quad \begin{aligned} u \in \text{adh}(A) &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : d(u, a) < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A : d(u, a) \leq \varepsilon \\ &\iff d(u, A) = 0 \end{aligned}$$

et il est *souvent très commode* d'employer le langage des suites [Chap. III, Prop 2.3.] :

$$(1.4) \quad u \in \text{adh}(A) \iff \text{il existe une suite } (a_n)_{n \in S} [S \subset \mathbb{N}, S \text{ infini}] \\ \text{de points de } A \text{ qui converge vers } u.$$

Dès que ces définitions équivalentes seront assimilées, vous démontrerez sans peine les propriétés élémentaires suivantes de la notion d'adhérence :

Proposition 1.1.

Soit (E, d) un espace métrique. On a :

$$(1.5) \quad \text{adh}(\emptyset) = \emptyset ; \text{adh}(E) = E ; \forall u \in E : \text{adh}(\{u\}) = \{u\},$$

$$(1.6) \quad \forall A \subset E : A \subset \text{adh}(A),$$

$$(1.7) \quad \forall A \subset E, \forall B \subset E : A \subset B \implies \text{adh}(A) \subset \text{adh}(B),$$

$$\begin{aligned} (1.8) \quad & \forall A \subset E : \text{adh}[\text{adh}(A)] = \text{adh}(A), \\ (1.9) \quad & \forall A \subset E, \forall B \subset E : \text{adh}(A \cup B) = \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B). \end{aligned}$$

☞ **Exercice 1.1.** (très facile) Vérifiez avec soin ces propriétés qui sont à connaître par cœur.

☞ **Exercice 1.2.** (très facile) Démontrez que $\text{adh}(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \text{adh}(A_i)$, mais que la propriété ne s'étend pas à une réunion infinie.

Démontrez que $\text{adh}(A \cap B) \subset \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$, mais qu'il n'y a pas en général égalité.

☞ **Exercice 1.3.** (très facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}). Soit F un sous-espace vectoriel de E . Démontrez que l'adhérence de F est aussi un sous-espace vectoriel de E .

Exemples 1.1. Soit $E = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle $d(s, t) = |s - t|$.

a) Considérons les parties de \mathbb{R} suivantes : $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Tout intervalle (*i.e.* toute boule dans \mathbb{R}) $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$ arbitraire, rencontre A d'une part et B d'autre part (\mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont tous les deux partout denses dans \mathbb{R}). Donc t est adhérent à A et aussi à B . Comme t est arbitraire, on a : $\text{adh}(A) = \text{adh}(B) = \mathbb{R} = E$.

b) Considérons $A =]0, 1[$. $t = 0$ est adhérent à A car $] -\varepsilon, +\varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, coupe toujours $]0, 1[$. Aucun autre point de $E \setminus A$ n'est adhérent à A , car si $t > 1$ ou bien si $t < 0$, pour ε assez petit : $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[\cap A = \emptyset$. En définitive : $\text{adh}(A) = [0, 1[$.

Avec le même raisonnement : $\text{adh}(]0, 1]) = \text{adh}([0, 1]) = \text{adh}([0, 1]) = [0, 1]$. ♦

Remarque : Les petites démonstrations ci-dessus ne doivent pas être détaillées davantage, de même pour les suivantes.

c) $A = \mathbb{Z}$: clairement $\text{adh}(A) = A$.

d) $A = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}$. On a : $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n})$, et donc $0 \in \text{adh}(A)$. Aucun autre point de $E \setminus A$ n'est adhérent à A . Donc : $\text{adh}(A) = A \cup \{0\}$.

e) $A =]-\infty, \alpha]$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, on a : $\text{adh}(A) = A$; $B =]\beta, +\infty[$ où $\beta \in \mathbb{R}$: $\text{adh}(B) = [\beta, +\infty[= B \cup \{\beta\}$.

☞ $-\infty$ et $+\infty$ ne font pas partie de \mathbb{R} !!!

f) $A = \{n + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$: $\text{adh}(A) = A$. Soit $B = \{-m / m \in \mathbb{N}, m \geq 2\}$: $\text{adh}(B) = B$. Soit $C = A + B = \{n + \frac{1}{n} - m / m, n \in \mathbb{N}, m \geq 2, n \geq 2\}$: $0 \notin C$ et $\text{adh}(C) = C \cup \{0\}$. ♦

Exemple 1.2. Soit E un ensemble quelconque qu'on munit de la distance discrète. Soit A une partie de E , et soit $u \notin A$: $B(u, 1[(= B(u, \frac{1}{2}]$ si vous préférez) = $\{u\}$, et donc $B(u, 1[\cap A = \emptyset$. Par conséquent, $\forall A \subset E : \text{adh}(A) = A$. ♦

Exemple 1.3. Soit $E = \mathbb{R}^2$ euclidien et :

$A = \{(s, t) / s^2 + t^2 \leq 1, t > 0\} \cup \{(s, t) / s^2 + t^2 < 1, t < 0\}$ (dessin !) : $\text{adh}(A) = B_2(0, 1]$. ♦

Exemple 1.4. Reprenons les exemples traités dans le § 2 du Chap. IV.

$E = B_\infty(I, \mathbb{R})$: $\text{adh}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$, $\text{adh}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, $\text{adh}(\mathcal{E}) = \mathcal{R}$, $\text{adh}(\mathcal{P}) = \mathcal{C}$.

Dans l'espace métrique $F = C_\infty(I, \mathbb{R})$: $\text{adh}(\mathcal{P}) = F$.

" " " $G = \mathcal{R}_\infty(I, \mathbb{R})$: $\text{adh}(\mathcal{E}) = G$.

" " " $H = \mathcal{E}_\infty(I, \mathbb{R})$: $\text{adh}(\mathcal{E}) = H$. ♦

Remarque 1.1.

Si l'on échange la distance d de (E, d) avec une distance équivalente δ , les points adhérents et l'adhérence sont les mêmes dans (E, d) et (E, δ) .

Mais, dans le cas de distances non équivalentes, les exemples 1.1 et 1.2 comparés montrent clairement que ces notions dépendent de manière essentielle de la distance considérée.

Exemple 1.5. $E = \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, où $I = [0, 1]$, et on considère les distances associées aux normes : $\|f\|_\infty = \max_{t \in I} |f(t)|$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Prenons $A = \{f \in E / f(0) = 0\}$. On a : $\text{adh}_\infty(A) = A$, tandis que $\text{adh}_1(A) = E$. Démontrons cela.

Soit $f \in \text{adh}_\infty(A)$: il existe (f_n) suite de points de A telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$, d'où : $\forall t \in I : \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(t)) = f(t)$, or $\forall n \in \mathbb{N} : f_n(0) = 0$, d'où : $f(0) = 0$, et $f \in A$. Donc, $\text{adh}_\infty(A) \subset A$, et par (1.6) : $\text{adh}_\infty(A) = A$. ♦

Soit $f \in E$ arbitraire. Considérons la suite $(f_n)_{n \geq 2}$ définie ainsi : $f_n(t) = f(t)$ pour tout $t \in [\frac{1}{n}, 1]$, $f_n(t) = n \cdot f(\frac{1}{n}) \cdot t$ pour $t \in [0, \frac{1}{n}]$ (dessin !). Pour tout $n \geq 2$, on a : $f_n \in A$.

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_1 &= \int_0^1 |f(t) - f_n(t)| dt = \int_0^{1/n} |f(t) - f_n(t)| dt + \int_{1/n}^1 |f(t) - f_n(t)| dt \\ &= \int_0^{1/n} |f(t) - f_n(t)| dt \leq \sup_{0 \leq t \leq 1/n} |f(t) - f_n(t)| \cdot \int_0^{1/n} dt \leq \frac{1}{n} \sup_{0 \leq t \leq 1/n} [|f(t)| + |f_n(t)|] \\ &\leq \frac{1}{n} \sup_{0 \leq t \leq 1/n} [|f(t)| + n \cdot |f(\frac{1}{n})| \cdot t]; \end{aligned}$$

on majore $|f(t)|$ et $|f(\frac{1}{n})|$ par $\|f\|_\infty$, et t par $\frac{1}{n}$:

$$\|f - f_n\|_1 \leq \frac{1}{n} [\|f\|_\infty + n \cdot \|f\|_\infty \cdot \frac{1}{n}] = \frac{2}{n} \|f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Par conséquent, $f \in \text{adh}_1(A)$, d'où $E \subset \text{adh}_1(A)$, et $E = \text{adh}_1(A)$. ♦

Remarque :

Il est facile de voir que A est un sous-espace vectoriel de E [c'est même un idéal de l'anneau E pour la multiplication $(f \cdot g)(t) = f(t)g(t)$].

Comme $f(t) = [f(t) - f(0)] + f(0) = g(t) + f(0)$ avec $g \in A$, A est un hyperplan de E (précisez ce point). Or nous verrons dans l'Exercice 4.3 qu'un hyperplan est soit fermé soit partout dense. Pour démontrer que A est partout dense pour $\|\cdot\|_1$, il suffit par conséquent de prouver que A n'est pas fermé pour $\|\cdot\|_1$ dans E .

Soit h la fonction constante égale à 1 sur I : $h \notin A$. Soit h_n la fonction valant nt sur $[0, \frac{1}{n}]$ et 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$, $\forall n \geq 2$: $h_n \in A$. Si $\|h - h_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a gagné.

$$\|h - h_n\|_1 = \int_0^1 |h(t) - h_n(t)| dt = \int_0^{1/n} (1 - nt) dt = \frac{1}{n} - n \cdot \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \blacklozenge$$

Remarque 1.2.

Il ne faut pas perdre de vue que la notion de densité se laisse exprimer très simplement en termes d'adhérence :

$$(1.10) \quad A \text{ est dense par rapport à } B \iff \text{adh}(A) \supset B,$$

$$(1.11) \quad A \text{ est partout dense dans } (E, d) \iff \text{adh}(A) = E.$$

Adhérence par rapport à un sous-espace métrique

Soit (E, d) un espace métrique, et soit (F, δ) un sous-espace métrique de (E, d) , c'est-à-dire que l'on a : $F \subset E$ et $\delta = d|_{F \times F}$ (restriction).

Il est clair que les boules et sphères de (F, δ) ne sont rien d'autre que les intersections des boules de (E, d) avec F :

$$(1.12) \quad \forall u \in F, \forall \rho > 0 : B_F(u, \rho) = B(u, \rho) \cap F, \quad B_F(u, \rho) = B(u, \rho) \cap F, \\ S_F(u, \rho) = S(u, \rho) \cap F.$$

On en déduit immédiatement que l'adhérence d'une partie A de F dans (F, δ) est tout simplement l'intersection de l'adhérence de A dans (E, d) avec F :

$$(1.13) \quad \boxed{\text{adh}_F(A) = \text{adh}_E(A) \cap F.}$$

Exemple 1.6. Soit $E = \mathbb{R}$ usuel, et $F = [0, 1[$. Soit $A =]\frac{1}{2}, 1[\subset F$:

$$\text{adh}_E(A) = [\frac{1}{2}, 1], \text{ mais } \text{adh}_F(A) = [\frac{1}{2}, 1] \cap [0, 1[= [\frac{1}{2}, 1[.$$

D'autre part : $\text{adh}_E(F) = [0, 1]$, mais $\text{adh}_F(F) = F = [0, 1[$. ♦

Exemple 1.7. Dans $E = \mathcal{R}_\infty(I, \mathbb{R})$ on a $\text{adh}(E) = \mathcal{R} \supset \mathcal{C}$, mais dans le sous-espace $F = \mathcal{C}_\infty(I, \mathbb{R})$ on ne peut pas écrire que $\text{adh}(\mathcal{E}) = F$ (!). En fait on a : $\mathcal{E} \cap \mathcal{C} = [\mathbf{1}]$, le sous-espace vectoriel engendré par la fonction constante égale à 1, *i.e.* le sous-espace vectoriel des fonctions constantes. Et on a : $\text{adh}([\mathbf{1}]) = [\mathbf{1}]$. ♦

☞ Par manque de précision et/ou d'attention, on peut être conduit à commettre des erreurs graves dans toutes les questions de relativité des notions par rapport à l'espace métrique considéré. Il convient de faire *très* attention !

Remarques 1.3.

À la lumière des exemples précédents, on peut faire les remarques suivantes :

1) L'adhérence d'une partie peut être beaucoup plus grande que cette partie [$\text{adh}(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$], ou n'ajouter que quelques points ($\text{adh}(]0, 1] = [0, 1] =]0, 1] \cup \{0\}$), ou bien encore être égale à la partie elle-même ($\text{adh}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$). Les deux situations extrêmes sont particulièrement intéressantes :

a) « grande adhérence » : c'est le problème important de l'*approximation* ; par exemple, il est très utile de savoir que $\text{adh}(\mathcal{E}) \supset \mathcal{C}$ dans \mathcal{B}_∞ , pensez également au Th. de Weierstraß,

b) « adhérence *minimum* » : $\text{adh}(A) = A$, c'est la définition même d'une partie *fermée* [Chap. I, ou §4 ci-après], notion *fondamentale* de la topologie générale et de l'analyse.

2) Un point adhérent à A n'est jamais « loin » de A ; de fait :

☞ **Exercice 1.4.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique, et soient A, B des parties non vides de E . Démontrez que : $u \in \text{adh}(A) \iff d(u, A) = 0$. et que $d(u, \text{adh}(A)) = d(u, A)$ pour tout $u \in E$.

En particulier, si A est fermée [$\text{adh}(A) = A$] : $u \in A \iff d(u, A) = 0$, et $u \notin A \iff d(u, A) > 0$.

Démontrez que $d[\text{adh}(A), \text{adh}(B)] = d(A, B)$, et que $\text{diam}[\text{adh}(A)] = \text{diam}(A)$.

3) Soit u un point adhérent à A : $B(u, \rho] \cap A$ peut contenir, pour tout $\rho > 0$, une infinité de points distincts ($A = \mathbb{Q}$ et $u \in \mathbb{R}$ ou $A =]0, 1]$ et $u = 0$), ou bien être réduit à $\{u\}$ dès que $\rho > 0$ est assez petit (dans \mathbb{R} : $A = \{1, 2\}$: $B(1, \rho] \cap A = \{1\}$ pour tout $\rho < 1$; voir aussi le cas de la distance discrète).

Cette dernière remarque nous amène à une classification des points adhérents en deux sortes.

2. POINTS D'ACCUMULATION ET POINTS ISOLÉS

Définition 2.1.

Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie de E . $u \in E$ est dit **point d'accumulation de A** si toute boule centrée en u rencontre A en un point distinct de u .

Commentaire :

Un point d'accumulation est d'abord un point adhérent. Il peut se trouver dans A , ou bien ne pas y être (« de A » ne veut pas dire « dans A »).

Exemples 2.1. Soit $E = \mathbb{R}$ usuel. $A =]0, 1[$: $\text{adh}(A) = [0, 1]$; tout point adhérent, y compris $0 \notin A$, est point d'accumulation de A ; $A = \mathbb{Q}$: $\text{adh}(A) = \mathbb{R}$; tout point de \mathbb{R} est point d'accumulation de A .

Définition 2.2.

Soit (E, d) un espace métrique, et soit $A \neq \emptyset$ une partie de E . $u \in A$ est dit **point isolé dans A** s'il existe une boule $B(u, \rho[$ telle que :

$$B(u, \rho[\cap A = \{u\}.$$

Commentaire :

Un point isolé dans A est un point adhérent de A , puisqu'on a $A \subset \text{adh}(A)$. Par définition même, c'est un point appartenant à A . Evitez l'expression « point isolé de A » qui peut entraîner des confusions.

On a donc une **partition** de $\text{adh}(A)$ en deux sous-ensembles d'intersection vide : l'ensemble des points d'accumulation de A [appelé parfois l'**ensemble dérivé** de A , et noté A'], et l'ensemble $\text{adh}(A) \setminus A' = A \setminus A'$ des points isolés dans A . L'un de ces deux ensembles peut être vide. Notez bien qu'un point adhérent à A qui n'appartient pas à A est nécessairement un point d'accumulation.

Exemples 2.2. Soit $E = \mathbb{R}$ usuel. $A =]0, 1[$: tout point de $\text{adh}(A) = [0, 1]$ est un point d'accumulation de A ; aucun point de A n'est isolé dans A .

$A = \mathbb{Z}$: $\text{adh}(A) = \mathbb{Z} = A$, et tout point de A est isolé dans A ; il n'y a pas de point d'accumulation.

$A =]0, 1[\cup \{2\}$: $\text{adh}(A) = [0, 1] \cup \{2\}$; les points de $[0, 1]$ sont des points d'accumulation de A , et 2 est isolé dans A .

Exemple 2.3. Si E est un ensemble quelconque muni de la distance discrète, pour tout $A \subset E$ on a : $\text{adh}(A) = A$, et tout point de A est isolé dans A .

☞ **Exercice 2.1.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique, et soit $A \subset E$. Démontrez que : $u \in A$ est isolé dans $A \iff$ toute suite de points de A convergente de limite u est stationnaire. Démontrez que $u \in \text{adh}(A)$ est point d'accumulation de $A \iff$ il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A convergente vers u et telle que pour tout n : $a_n \neq u$.

☞ **Exercice 2.2.** (assez facile, mais ne pas aller trop vite . . .) Dans $E = \mathbb{R}$ usuel, on considère : $A = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} / m \in \mathbb{N}^*, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Déterminez tous les points isolés dans A et tous les points d'accumulation de A .

Valeurs d'adhérence d'une suite et points adhérents à l'image de la suite

Il arrive assez fréquemment que des erreurs soient commises à cause d'une confusion entre les notions de valeur d'adhérence d'une suite et de points adhérents à l'image de la suite. Il nous faut prêter un peu d'attention à cette question.

Soit $f : S \subset \mathbb{N} \rightarrow E$, $n \in S \mapsto f(n) = u_n$ une suite à valeurs dans un espace métrique (E, d) . S est une partie infinie de \mathbb{N} . L'image de la suite f [ou $(u_n)_{n \in S}$] est la partie $f(S)$ [ou $\{u_n / n \in S\}$] de E . On a :

Proposition 2.1.

- | | |
|--|---|
| | (i) Si $u \in E$ est un point d'accumulation de $f(S)$: u est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in S}$, |
| | (ii) Si $u \in E$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in S}$: u est adhérent à $f(S)$ [u peut être isolé dans $f(S)$]. |

✎ **Exercice 2.3.** (facile) Démontrez la Proposition ci-dessus. Trouvez des exemples (très simples) prouvant que les réciproques sont fausses.

Soit toujours $f : S \subset \mathbb{N} \rightarrow E$ [S infini, (E, d) métrique], $f(n) = u_n$ une suite. Nous allons écrire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite f sous une forme intéressante. Notons :

$$A_n := \{f(k) = u_k / k \in S, k \geq n\} = f(S \setminus \{k \in S / k \leq n - 1\})$$

Toute valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in S}$ est un point adhérent à l'ensemble A_n , et cela pour tout $n \in S$. Réciproquement, un point de E qui est adhérent à A_n pour tout $n \in S$ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in S}$. Cela d'après la Prop. 2.1. On peut donc écrire :

Proposition 2.2.

- | | |
|--|---|
| | L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in S}$ est égal à : |
| | $\bigcap_{n \in S} \text{adh}(A_n)$. |

Borne supérieure (inférieure) et points adhérents

Soit A une partie de \mathbb{R} majorée. Pour démontrer l'existence de la borne supérieure $\sup(A)$ de A , on démontre que l'ensemble des majorants de A est un intervalle fermé de la forme $[\alpha, +\infty[$. $\alpha := \sup(A)$ est le minimum de l'ensemble des majorants. Comme $\forall \varepsilon > 0. \exists a_\varepsilon \in A$ tel que $\alpha - \varepsilon \leq a_\varepsilon < \alpha$, $\alpha = \sup(A)$ est un point adhérent à A . Si $\alpha \notin A$, α est un point d'accumulation. Si $\alpha \in A$, $\alpha = \max(A)$ peut être un point d'accumulation de A ou bien un point isolé dans A [voir : $A = [0, 1]$, $A = [0, 1[$, $A = [0, 1[\cup \{2\}$].

3. FRONTIÈRE

Définition 3.1.

	Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie de E . Un point $u \in E$ est dit <i>point frontière de A</i> si toute boule centrée en u coupe à la fois A et son complémentaire $E \setminus A$ par rapport à E .
--	---

	On appelle <i>frontière de A</i> l'ensemble de tous les points frontières de A ; on le note $\text{fr}(A)$ [on trouve parfois $\partial(A)$].
--	---

Par définition, donc, un point $u \in E$ est point frontière de A si $u \in \text{adh}(A)$ et $u \in \text{adh}(E \setminus A)$. D'où :

	(3.1) $\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(E \setminus A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(\complement_E A)$
--	--

	(3.2) $\text{fr}(A) = \text{fr}(E \setminus A)$ car $E \setminus (E \setminus A) = A$.
--	---

Exemples 3.1.

a) Soit $E = \mathbb{R}$ usuel, $a < b$ réels. $A = [a, b]$.

$\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(E \setminus A) = A \cap \text{adh}(E \setminus A)$. Or : $E \setminus A =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$, d'où :

$$\begin{aligned} \text{adh}(E \setminus A) &= \text{adh}(]-\infty, a[\cup]b, +\infty[) \stackrel{(1.9)}{=} \text{adh}(]-\infty, a[) \cup \text{adh}(]b, +\infty[) \\ &=]-\infty, a[\cap]b, +\infty[. \end{aligned}$$

D'où : $\text{fr}(A) = A \cap (]-\infty, a[\cup]b, +\infty[) = ([a, b] \cap]-\infty, a[) \cup ([a, b] \cap]b, +\infty[)$
 $= \{a\} \cup \{b\} = \{a, b\}$, ce qui correspond assez bien à l'idée de frontière.

De même : $\text{fr}(]a, b[) = \text{fr}([a, b]) = \text{fr}(]a, b]) = \{a, b\}$, et $\text{fr}(\{a\}) = \{a\}$,

$\text{fr}(]a, +\infty[) = \{a\}$, etc. ♦

$\text{fr}(\mathbb{Q}) = \text{fr}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \text{adh}(\mathbb{Q}) \cap \text{adh}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$; ainsi \mathbb{Q} a une « très grosse » frontière, et l'on s'éloigne ici de l'idée intuitive de frontière. ♦

b) Dans \mathbb{R}^2 euclidien, soit :

$$A = \{(s, t) / s^2 + t^2 \leq 1, t > 0\} \cup \{(s, t) / s^2 + t^2 < 1, t \leq 0\}.$$

En faisant un dessin pour A et $E \setminus A$ (cela suffit comme démonstration, pas la peine de remplir des pages de calculs !), on trouve $\text{fr}(A) = S_2(0, 1)$. ♦

c) Dans (E, δ) , E ensemble quelconque, muni de la distance discrète $\delta : \forall A \subset E : \text{fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(E \setminus A) = A \cap (E \setminus A) = \emptyset$. En particulier, pour tout $u \in E : \text{fr}(\{u\}) = \emptyset$, et non $\{u\}$ comme on aurait pu le penser ! ♦

d) A-t-on toujours : $\text{fr}(\text{adh}(A)) = \text{fr}(A)$? Réponse : NON. Dans \mathbb{R} usuel, prenons $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. On a $\text{fr}(\text{adh}(A)) = \text{fr}([0, 1]) = \{0, 1\}$, (cf. a)). Mais :

$$\begin{aligned} \text{fr}(A) &= \text{adh}(A) \cap \text{adh}(\mathbb{R} \setminus A) = \text{adh}(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) \cap \text{adh}(\mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cap [0, 1])) \\ &= [0, 1] \cap \text{adh}\{]-\infty, 0[\cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]0, 1]) \cup]1, +\infty[\} \\ &= [0, 1] \cap \{ \text{adh}(]-\infty, 0[\cup \text{adh}((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap]0, 1]) \cup \text{adh}(]1, +\infty[) \} \\ &= [0, 1] \cap (]-\infty, 0[\cup [0, 1] \cup]1, +\infty[) = [0, 1] \cap \mathbb{R} = [0, 1]. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

e) Est-ce que la frontière de la boule $B(u, \rho[$, ou $B(u, \rho]$, est toujours la sphère $S(u, \rho)$? Réponse : NON ! Plaçons-nous dans le cadre de c) :

$\text{fr}(B(u, 1]) = \text{fr}(\{u\}) = \text{fr}(B(u, 1]) = \text{fr}(E) = \emptyset$, alors que $S(u, 1) = E \setminus \{u\}$. ♦

f) On n'a ni $A \subset B \implies \text{fr}(A) \subset \text{fr}(B)$ ni le contraire :

$\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subset [0, 1]$, et $\text{fr}(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = [0, 1]$ alors que $\text{fr}([0, 1]) = \{0, 1\}$ [Exemple d)] ; $\{1\} \not\subset [0, 1[$ et $\text{fr}(\{1\}) = \{1\}$, $\text{fr}([0, 1]) = \{0, 1\}$. ♦

4. PARTIES FERMÉES D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Définition 4.1.

Soit (E, d) un espace métrique. Une partie A de E est dite **fermée** [dans (E, d)] si elle est égale à son adhérence. En formule :

$$(4.1) \quad \boxed{A \text{ fermée} \iff A = \text{adh}(A).}$$

Commentaire : On précise « dans (E, d) », s'il y a plusieurs distances ou plusieurs espaces métriques considérés en même temps, sinon on dit simplement « dans E ».

Exemples 4.1. Soit $E = \mathbb{R}$, muni de sa distance usuelle. $\emptyset, \mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, [\alpha, \beta]$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, [\alpha, +\infty[$ où $\alpha \in \mathbb{R}, \{\alpha\}$ où $\alpha \in \mathbb{R}, \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ où $\alpha_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}, \{n + \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}$, sont des parties fermées de \mathbb{R} .

Par contre les parties : $[\alpha, \beta[,]\alpha, +\infty[, \mathbb{R}^*, \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ne sont pas fermées dans \mathbb{R} . ♦

Exemple 4.2. Soit E un ensemble quelconque muni de la distance discrète : toute partie A de E est fermée ! ♦

Exemples 4.3. Dans un espace métrique arbitraire : \emptyset et E sont des fermés [on parle aussi bien d'un fermé (nom commun) que d'une partie fermée (adjectif)].

Pour toute partie A de E : $\text{adh}(A)$ est fermée car $\text{adh}[\text{adh}(A)] = \text{adh}(A)$;
 $\text{adh}(A)$ est le plus petit fermé qui contient A , car si B fermé et $B \supset A$:
 $\text{adh}(B) = B \supset \text{adh}(A)$.

$\text{fr}(A)$ est aussi fermée pour tout $A \subset E$ (par exemple parce que c'est l'intersection des deux fermés $\text{adh}(A)$ et $\text{adh}(E \setminus A)$ [cf. Th. 4.1 ci-après].

$\{u\}, \{u_1, \dots, u_n\}$ sont fermés.

Si $(u_n)_{n \in S}$ est une suite dans E convergente de limite u : $\{u\} \cup \{u_i / i \in S\}$ est une partie fermée de E .

L'ensemble des points isolés d'une partie n'est évidemment pas fermé en général : tous les points de $A = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}$ sont isolés et A n'est pas fermé. Par contre l'ensemble A' des points d'accumulation d'une partie A quelconque est fermé dans (E, d) .

☞ **Exercice 4.1.** (assez facile) Démontrez que A' est toujours un fermé.

☞ **Exercice 4.2.** (facile) Démontrez que les boules fermées $B(u, \rho]$ d'un espace métrique quelconque sont fermées (ce qui est heureux pour la terminologie !). Démontrez que les sphères $S(u, \rho)$ sont aussi des fermés. Prouvez par des exemples que l'adhérence de la boule ouverte $B(u, \rho[$ n'est pas, en général $B(u, \rho]$. Par contre, démontrez que dans un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ – sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} – on a effectivement : $\text{adh}(B(u, \rho]) = B(u, \rho]$.

☞ **Exercice 4.3.** (très facile) Soit H un hyperplan d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$. Rappelons qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel de E tel que si F est un sous-espace vectoriel de E contenant H , on a : soit $F = H$, soit $F = E$. Démontrez qu'un hyperplan est soit fermé, soit partout dense dans E .

Exemple 4.4. Réécrivons les résultats de la Lecture du Chap. IV : un sous-groupe G du groupe additif des réels est soit partout dense dans \mathbb{R} (i.e. que $\text{adh}(G) = \mathbb{R}$, exemple $G = \mathbb{Q}$), soit fermé dans \mathbb{R} ($\text{adh}(G) = G$), et dans ce dernier cas : $G = G_\alpha = \{n\alpha / n \in \mathbb{Z}\}$ pour un $\alpha \in \mathbb{R}$.

Application : le groupe des périodes d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est soit fermé (auquel cas il existe une plus petite période), soit partout dense. Notez que G est partout dense ssi G a un point d'accumulation (revoir la démonstration).

Exemple 4.5. Soit $E = \mathcal{B}_\infty(I, \mathbb{R})$. On sait que $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ sont des parties fermées de E . $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{P}(I, \mathbb{R})$ ne sont pas fermés : l'adhérence de \mathcal{E} est \mathcal{R} , l'adhérence de \mathcal{P} est \mathcal{C} .

Proposition 4.1. (IMPORTANTE)

Soit (E, d) un espace métrique, et soit $A \subset E$. On a les caractérisations suivantes :

A est fermée dans $E \iff A$ contient ses points d'accumulation, i.e. $A \supset A'$

$\iff A$ contient ses points frontière, i.e. $A \supset \text{fr}(A)$

\iff toute suite de points de A qui est convergente a sa limite dans A .

Commentaire : Le dernier critère est, avec un autre critère donné dans le Chap. VI suivant (A fermé $\iff E \setminus A$ ouvert), le plus souvent utilisé pour prouver qu'une partie de E est fermée.

Théorème 4.1. (FONDAMENTAL)

- Soit (E, d) un espace métrique :
- (4.2) \emptyset et E entier sont des parties fermées de E ,
 - (4.3) **Toute intersection** de parties fermées de E est une partie fermée de E ,
 - (4.4) **Toute réunion finie** de parties fermées de E est une partie fermée de E .

☞ **Exercice 4.4.** (facile) Démontrez la Prop. 4.1 et le Th. 4.1.

Exemple d'application : Souvenons-nous (fin du §2) que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite $(u_n)_{n \in S}$ s'écrit :

$$\bigcap_{n \in S} \text{adh}(A_n) \text{ où } A_n := \{u_k / k \in S, k \geq n\}$$

on déduit immédiatement de (4.3) que cet ensemble est fermé.

Le Th. 4.1 ci-dessus est très facile à démontrer, ce qui n'enlève rien à son intérêt. Son importance vient de ce que les propriétés (4.2) (4.3) (4.4) ont été choisies (parmi une foule d'autres possibles) pour définir la notion FONDAMENTALE de topologie :

Définition 4.2. (TOPOLOGIE)

On appelle **topologie sur un ensemble** E la donnée d'une famille \mathcal{F} de parties de E ($\mathcal{F} \subset 2^E$) vérifiant les propriétés (ou : axiomes) (4.2) (4.3) (4.4). Les éléments de \mathcal{F} sont appelés les **fermés** de la topologie.

Nous n'insisterons pas ici sur cette notion : voir le Chap. VI, nous contentant de mettre en évidence que la donnée d'une distance sur un ensemble (*i.e.* d'un espace métrique) définit une topologie sur cet ensemble. Cette topologie est la famille des fermés donnée par la définition 4.1.

☞ **Exercice 4.5.** (très facile) Démontrez qu'une union infinie de fermés n'est pas nécessairement fermée.

Exemple 4.6. Soit $E = C_\infty(I, \mathbb{R})$, $I = [\alpha, \beta]$ et soit γ tel que $\alpha \leq \gamma \leq \beta$. $A_\gamma := \{f \in E / f(\gamma) = 0\}$ est fermé dans E .

En effet, si $f_n \in A_\gamma$, et si $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on a :

$$|f(\gamma)| \leq |f(\gamma) - f_n(\gamma)| + |f_n(\gamma)| \leq \|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad [\forall n : f_n(\gamma) = 0] \text{ et donc } f(\gamma) = 0.$$

Soit $\Gamma \subset I$, et : $A_\Gamma := \{f \in E / f|_\Gamma = 0\}$. A_Γ est fermé dans E , car $A_\Gamma = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ et (4.3).

Notons $\mathbf{1}$ la fonction constante, égale à 1 sur I ; on a : $f(t) = [f(t) - f(\gamma)] + f(\gamma) \cdot \mathbf{1}$, et $E = A_\gamma \oplus [\mathbf{1}]$: A_γ est un **hyperplan fermé** de E [cf. Exercice 4. 3].

Relativité des parties fermées

Proposition 4.2 (IMPORTANTE)

- Soit (E, d) un espace métrique, et soit (F, δ) un sous-espace métrique de (E, d) [$F \subset E, \delta = d|_{F \times F}$].
- (i) Une partie A de F est fermée dans (F, δ) si et seulement si : il existe B une partie fermée dans (E, d) telle que $A = B \cap F$.
 - (ii) Une condition nécessaire et suffisante pour que toute partie A de F fermée dans (F, δ) soit fermée dans (E, d) est que F soit fermé dans (E, d) .

Démonstration :

(i) Soit A fermée dans (F, δ) : $A = \text{adh}_F(A)$, et $\text{adh}_F(A) = \text{adh}_E(A) \cap F$ [cf. §1]. Il suffit donc de poser : $B = \text{adh}_E(A)$. Réciproquement, si $A = B \cap F$, avec B fermé dans E , alors $A \subset \text{adh}_E(A) \subset B$ et :

$$A = B \cap F = \text{adh}_E(A) \cap F = \text{adh}_F(A) \implies A \text{ fermé dans } F. \blacklozenge$$

(ii) Si F est fermé dans E , soit $A \subset F$ fermé dans F :

$$A = \text{adh}_F(A) = \text{adh}_E(A) \cap F = \text{adh}_E(A) \cap \text{adh}_E(F)$$

et A est un fermé de E comme intersection de deux fermés. Réciproquement, si toute partie de F fermée dans F est fermée dans E : $A = F$ est fermée dans E . \blacklozenge

Fin de la partie cours du Chapitre V

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ **Exercice 1.1.**

(1.5) $\bullet \emptyset \subset \text{adh}(\emptyset)$ par définition de \emptyset ; ensuite $B(u, \rho] \cap \emptyset = \emptyset$ pour tout $u \in E$ et tout $\rho > 0 \implies \text{adh}(\emptyset) \subset \emptyset$. Finalement : $\text{adh}(\emptyset) = \emptyset$. \blacklozenge

$\bullet \text{adh}(E) \subset E$ puisque un point adhérent est par définition un point de E ;

$\forall u \in E, \forall \rho > 0 : B(u, \rho] \cap E = B(u, \rho] \neq \emptyset$ car $u \in B(u, \rho]$, donc tout $u \in E$ appartient à $\text{adh}(E)$ et $E \subset \text{adh}(E)$. Finalement $\text{adh}(E) = E$. \blacklozenge

$\bullet \{u\} \subset \text{adh}(\{u\})$ car $B(u, \rho] \cap \{u\} = \{u\} \neq \emptyset$; soit $v \neq u : B(v, \frac{1}{2}d(u, v)) \cap \{u\} = \emptyset$ et $v \notin \text{adh}(\{u\})$, d'où : $\text{adh}(\{u\}) = \{u\}$. \blacklozenge

(1.6) Soit $u \in A, \forall \rho > 0 : B(u, \rho] \cap A \ni u$, donc $B(u, \rho] \cap A \neq \emptyset$ et $u \in \text{adh}(A)$. Donc : $A \subset \text{adh}(A)$ pour tout A . \blacklozenge

(1.7) Soit $u \in \text{adh}(A), \forall \rho > 0 : B(u, \rho] \cap A \neq \emptyset \implies B(u, \rho] \cap B \neq \emptyset$ car $B \supset A$. d'où : $u \in \text{adh}(B)$. Finalement $A \subset B \implies \text{adh}(A) \subset \text{adh}(B)$. \blacklozenge

(1.8) $A \subset \text{adh}(A)$ par (1.6) $\implies \text{adh}(A) \subset \text{adh}[\text{adh}(A)]$ par (1.7). Soit à présent $u \in \text{adh}[\text{adh}(A)]$; par (1.3), $\forall \varepsilon > 0, \exists v \in \text{adh}(A) : d(u, v) \leq \varepsilon/2$ et $v \in \text{adh}(A) \implies \exists w \in A : d(v, w) \leq \varepsilon/2$, d'où : $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, d'où $u \in \text{adh}(A)$, par (1.3). Finalement, $\text{adh}[\text{adh}(A)] = \text{adh}(A)$. \blacklozenge

(1.9) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \implies [(1.7)] \text{adh}(A) \subset \text{adh}(A \cup B)$ et $\text{adh}(B) \subset \text{adh}(A \cup B)$, d'où : $\text{adh}(A) \cup \text{adh}(B) \subset \text{adh}(A \cup B)$. Inversement, soit $u \in \text{adh}(A \cup B), \forall \rho > 0 : \emptyset \neq B(u, \rho] \cap (A \cup B) = [B(u, \rho] \cap A] \cup [B(u, \rho] \cap B]$, c'est dire que $B(u, \rho] \cap A \neq \emptyset$ (i.e. $u \in \text{adh}(A)$) ou $B(u, \rho] \cap B \neq \emptyset$ (i.e. $u \in \text{adh}(B)$), et donc que $u \in \text{adh}(A)$ ou $u \in \text{adh}(B)$, soit : $u \in \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$. Finalement : $\text{adh}(A \cup B) = \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$. \blacklozenge

☞ **Exercice 1.2.**

$$\begin{aligned} \text{adh}(A \cup B \cup C) &= \text{adh}(A \cup [B \cup C]) \stackrel{(1.9)}{=} \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B \cup C) \\ &= \text{adh}(A) \cup [\text{adh}(B) \cup \text{adh}(C)] = \text{adh}(A) \cup \text{adh}(B) \cup \text{adh}(C). \end{aligned}$$

Nous vous laissons le soin d'écrire le raisonnement par récurrence adéquat. \blacklozenge

Pour tout ensemble d'indexation $I : A_k \subset \bigcup_{i \in I} A_i$ pour tout $k \in I$, ce qui donne par (1.7) :

$$\text{adh}(A_k) \subset \text{adh}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \implies \bigcup_{k \in I} \text{adh}(A_k) \subset \text{adh}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right). \blacklozenge$$

Mais l'inclusion contraire est en général fautive.

Par exemple, dans $E = \mathbb{R}$ usuel : $\bigcup_{t \in]0,1[} \text{adh}\{t\} = \bigcup_{t \in]0,1[} \{t\} =]0,1[$, alors que $\text{adh}\left(\bigcup_{t \in]0,1[} \{t\}\right) = \text{adh}(]0,1[) = [0,1]$. Ou encore :

$$\text{adh}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]\right) = \text{adh}([0,1]) = [0,1] \text{ et}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \text{adh}\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = [0,1[. \blacklozenge$$

$A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B \implies \text{adh}(A \cap B) \subset \text{adh}(A)$ et $\text{adh}(A \cap B) \subset \text{adh}(B)$, d'où : $\text{adh}(A \cap B) \subset \text{adh}(A) \cap \text{adh}(B)$. \blacklozenge

L'inclusion inverse est grossièrement fautive : $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$:
 $\text{adh}(A \cap B) = \text{adh}(\emptyset) = \emptyset$, alors que $\text{adh}(A) \cap \text{adh}(B) = [0, 1] \cap [1, 2] = \{1\}$. ♦

☞ **Exercice 1.3.**

Soient $u, v \in \text{adh}(F)$: il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans F telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = v$. $\forall n \in \mathbb{N} : u_n + v_n \in F$ (F s.-e.v.), et :
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = u + v$, d'où : $u + v \in \text{adh}(F)$.
 De même, si $\lambda \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda u_n) = \lambda u$ et $\lambda u_n \in F \implies \lambda u \in F$.

Donc $\text{adh}(F)$ est un sous-espace vectoriel de E . ♦

☞ **Exercice 1.4.**

$0 = d(u, A) = \inf_{a \in A} d(u, a) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in A : d(u, a_\varepsilon) \leq \varepsilon \iff u \in \text{adh}(A)$. ♦

$A \subset \text{adh}(A) \implies \forall u \in E : d(u, A) \geq d(u, \text{adh}(A))$;

soit $\alpha := d(u, \text{adh}(A))$, on a :

$\forall a \in \text{adh}(A) : \alpha \leq d(u, a)$ et $\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon \in \text{adh}(A) : d(u, v_\varepsilon) \leq \alpha + \varepsilon$;

$v_\varepsilon \in \text{adh}(A) \implies \exists w_\varepsilon \in A : d(v_\varepsilon, w_\varepsilon) \leq \varepsilon$, d'où :

$d(u, A) \leq d(u, w_\varepsilon) \leq d(u, v_\varepsilon) + d(v_\varepsilon, w_\varepsilon) \leq d(u, v_\varepsilon) + \varepsilon \leq d(u, \text{adh}(A)) + 2\varepsilon$, donc

$\forall \varepsilon > 0 : d(u, A) \leq d(u, \text{adh}(A)) + 2\varepsilon$, et : $d(u, A) \leq d(u, \text{adh}(A))$. ♦

$d(A, B) = \inf_{a \in A} d(a, B) = \inf_{a \in A} d[a, \text{adh}(B)]$, d'après ce qui précède.

Puisque $A \subset \text{adh}(A)$ et $B \subset \text{adh}(B)$, on a : $d[\text{adh}(A), \text{adh}(B)] \leq d(A, B)$; il reste à démontrer l'inégalité contraire, c'est-à-dire simplement : $\inf_{a \in A} d[a, \text{adh}(B)] \geq \inf_{a \in \text{adh}(A)} d[a, \text{adh}(B)]$.

Soit $\mu := \inf_{a \in \text{adh}(A)} d[a, \text{adh}(B)]$, $\forall \varepsilon > 0, \exists b_\varepsilon \in \text{adh}(A) : d[b_\varepsilon, \text{adh}(B)] \leq \mu + \varepsilon$, et $\exists a_\varepsilon \in A : d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \leq \varepsilon$; d'où :

$$\begin{aligned} \inf_{a \in A} d[a, \text{adh}(B)] &\leq d[a_\varepsilon, \text{adh}(B)] && [\text{car } a_\varepsilon \in A] \\ &\leq d[b_\varepsilon, \text{adh}(B)] + d(b_\varepsilon, a_\varepsilon) && [\text{car } |d[a_\varepsilon, \text{adh}(B)] - d[b_\varepsilon, \text{adh}(B)]| \leq d(a_\varepsilon, b_\varepsilon), \\ &\leq \mu + \varepsilon + \varepsilon = \mu + 2\varepsilon. && (3.9) \text{ du Chap. I}] \end{aligned}$$

Inégalité vraie pour tout $\varepsilon > 0$, d'où le résultat cherché. ♦

$A \subset \text{adh}(A) \implies \text{diam}(A) \leq \text{diam}[\text{adh}(A)]$.

Soit $\delta := \text{diam}[\text{adh}(A)] = \sup_{a \in \text{adh}(A), b \in \text{adh}(A)} d(a, b)$. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon \in \text{adh}(A), \exists b_\varepsilon \in \text{adh}(A) :$

$d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \geq \delta - \varepsilon$, et $\exists a'_\varepsilon \in A, \exists b'_\varepsilon \in A : d(a_\varepsilon, a'_\varepsilon) \leq \varepsilon, d(b_\varepsilon, b'_\varepsilon) \leq \varepsilon$, d'où :

$\delta - \varepsilon \leq d(a_\varepsilon, b_\varepsilon) \leq d(a_\varepsilon, a'_\varepsilon) + d(a'_\varepsilon, b'_\varepsilon) + d(b'_\varepsilon, b_\varepsilon) \leq \varepsilon + \text{diam}(A) + \varepsilon$, d'où : $\delta \leq \text{diam}(A) + 3\varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\delta \leq \text{diam}(A)$, et le résultat. ♦

☞ **Remarque importante** : L'expérience nous a souvent montré que de nombreux étudiants n'aiment guère (et même pas du tout) ce type d'exercice, le drame étant qu'on y traite de sup et d'inf « qui n'ont pas de raison d'être atteints », d'où une gymnastique avec les ε qui n'est guère appréciée. Mais il n'y a pas d'Analyse sans ce type de raisonnement standard... Nous recommandons de ne pas abandonner cet exercice avant certitude de compréhension complète.

☞ **Exercice 2.1.**

Il est bien clair que si $a \in A$ est isolé dans $A \iff \exists \rho > 0 : B(a, \rho] \cap A = \{a\}$, toute suite $(a_n)_n$ de points de A convergente vers a est nécessairement stationnaire puisqu'il existe N tel que $n \geq N \implies a_n \in B(a, \rho]$, d'où $a_n = a$ pour tout $n \geq N$.

Réciproquement, si toute suite de points de A de limite $a \in A$ est stationnaire, le point a est isolé dans A . Supposons (raisonnement par contradiction) que a ne soit pas isolé : $\forall \rho > 0, B(a, \rho] \cap A \ni b_\rho \neq a$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists b_n \in B(a, \frac{1}{n}[$ avec $b_n \neq a$. (b_n) est convergente de limite a et ne peut pas être stationnaire car si $b_n = b \neq a$ pour $n \geq N_0$, la suite aurait deux limites distinctes. ♦

Si $u \in E$ est point d'accumulation de $A, \forall n \in \mathbb{N}^* : B(u, \frac{1}{n}[\cap A \ni a_n$ où $a_n \neq u$. La suite (a_n) de points de A est convergente de limite u et vérifie $a_n \neq u$ pour tout n .

Réciproquement, s'il existe $(a_n)_n, a_n \in A, a_n \neq u$ pour tout $n, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = u$, il est clair que u est point d'accumulation de A ; en effet, étant donnée $B(u, \rho], a_n \in B(u, \rho]$ pour tout $n \geq N_\rho$, et $a_n \neq u$. ♦

☞ **Exercice 2.2.**

$A = \{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} / m, n \in \mathbb{N}^* \}$. Soit $u_k = \frac{1}{a_k} + \frac{1}{b_k}$, $k \in \mathbb{N}$, une suite de points de A . Une suite d'entiers ne peut converger que de deux façons : soit elle est stationnaire, soit elle tend vers ∞ .

- Si (a_k) et (b_k) tendent vers ∞ , $\lim(u_k) = 0$, et 0 est point d'accumulation de A , avec $0 \notin A$.
- Si $a_k = m$ pour $k \geq K$ et $(b_k) \rightarrow \infty$: $\lim(u_k) = \frac{1}{m}$ et $\frac{1}{m}$ est point d'accumulation ; $\frac{1}{m} \in A$ car $\frac{1}{m} = \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m}$.

- Si $a_k = m$ pour $k \geq K_1$ et $b_k = n$ pour $k \geq K_2$: $\lim(u_k) = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \in A$.
 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ est isolé dans A s'il n'est pas de la forme $\frac{1}{p}$, $p \in \mathbb{N}^*$.

S'il est de cette forme i.e. si $\frac{m+n}{mn} = \frac{1}{p}$, i.e. si $m+n$ divise mn (exemple : 3 et 6 : $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$) :
 $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p} = \lim_{k \rightarrow \infty} (\frac{1}{p} + \frac{1}{k})$ est point d'accumulation.

En résumé : $0 \notin A$ est point d'accumulation de A . Tout élément de A de la forme $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{p}$; $p \in \mathbb{N}^*$, est point d'accumulation de A . Les autres points de A ($m.n$ non divisible par $m+n$) sont isolés dans A . ♦

☞ **Exercice 2.3.**

(i) et (ii) consistent simplement en une traduction de l'hypothèse et de la conclusion, c'est évident. Pour (ii) u peut être isolé, il suffit de prendre $u_n = (-1)^n$, qui démontre aussi que que la réciproque de (i) est fautive. Pour la réciproque de (ii), il suffit de considérer la suite $(1, 0, 0, \dots, 0, \dots)$: $f(\mathbb{N}) = \{0, 1\}$. ♦

☞ **Exercice 4.1.**

Soit u un point adhérent à A' , on a donc $\forall \rho > 0 : B(u, \rho[\cap A' \neq \emptyset$; on veut démontrer que $u \in A'$, c'est-à-dire que : $\forall \rho > 0, B(u, \rho[\cap A$ contient un point $w \in A$ distinct de u .

Soit $\rho > 0$ fixé arbitraire, et soit $v \in B(u, \rho[\cap A'$ (cette intersection est $\neq \emptyset$).

Si $B(u, \rho[\cap A' = \{u\}$, $u \in A'$ et c'est fini ; sinon, on prend $v \neq u$ et on a $d(u, v) \neq 0$.
 Considérons la boule $B(v, \sigma[$ où $\sigma = \min\{ \frac{1}{2}d(u, v), \rho - d(u, v) \} > 0$ [possible car on a :
 $v \in B(u, \rho[\implies d(u, v) < \rho$;

puisque $v \in A'$, il existe $w \in B(v, \sigma[\cap A$ tel que $w \neq v$. Démontrons que $w \in B(u, \rho[$:

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) < d(u, v) + \sigma = d(u, v) + \rho - d(u, v) = \rho.$$

D'autre part $u = w$ est impossible car $u \notin B(v, \sigma[$. (on aurait $0 \neq d(u, v) < \sigma \leq \frac{1}{2}d(u, v)$!) et $w \in B(v, \sigma[$. On a donc bien trouvé $w \in B(u, \rho[\cap A$ tel que $w \neq u$. Comme cela est vrai pour tout $\rho > 0$: $u \in A'$; donc, $\text{adh}(A') \subset A'$ et A' est fermé.

Un dessin est tout à fait recommandé. ♦

☞ **Exercice 4.2.**

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $A = B(u, \rho]$, convergente de limite v . $\forall n \in \mathbb{N} : d(u, v_n) \leq \rho \implies d(u, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(u, v_n) \leq \rho$ [on a utilisé la continuité de la fonction $d(u, \cdot)$ et le passage à la limite des inégalités : $\xi_n \leq \beta$ pour tout n et $\lim(\xi_n) = \xi \implies \xi \leq \beta$; cf. cours de D.E.U.G. ou Chap. III et Chap. VII]. Donc $v \in B(u, \rho]$.

Même démonstration pour $S(u, \rho)$ avec le passage à la limite d'une égalité. ♦

La distance discrète sur un ensemble E donne le contre-exemple cherché si E a plus de deux éléments. En effet : $B(u, 1[= \{u\} \implies \text{adh}(B(u, 1]) = \text{adh}(\{u\}) = \{u\}$, tandis qu'on a :

$$B(u, 1] = E.$$

On peut aussi considérer $E = \mathbb{Z}$ muni de la distance induite par la distance usuelle de \mathbb{R} : $B(0, 2[= \{-1, 0, +1\}$ et $\text{adh}(B(0, 2]) = B(0, 2[= \{-1, 0, +1\}$, tandis qu'on a :

$$B(0, 2] = \{-2, -1, 0, +1, +2\}. \blacklozenge$$

Plaçons-nous maintenant dans le cadre d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

$B(u, \rho[\subset B(u, \rho] \implies \text{adh}(B(u, \rho]) \subset \text{adh}(B(u, \rho[) = B(u, \rho]$ [vrai dans tout espace métrique !], et prouvons l'inclusion inverse. Il suffit de faire un dessin . . . et de se fier à ce qu'on voit.

Soit $v \in B(u, \rho]$, et posons : $v_n = \frac{1}{n}u + (1 - \frac{1}{n})v$ pour tout $n \geq 1$.

$$\|u - v_n\| = \|\frac{1}{n}u + (1 - \frac{1}{n})u - \frac{1}{n}u - (1 - \frac{1}{n})v\| = \|(1 - \frac{1}{n})(u - v)\| = (1 - \frac{1}{n})\|u - v\| < \rho$$

car $1 - \frac{1}{n} < 1$, $\|u - v\| \leq \rho \implies v_n \in B(u, \rho[$ pour tout $n \geq 1$;

de plus $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = v$ [pour la norme], et, par conséquent, $v \in \text{adh}(B(u, \rho[)$. ♦

Remarque :

On a toujours intérêt à faire des dessins, même si ceux-ci ne représentent que très symboliquement la situation réelle. Parfois les dessins suggèrent une solution possible (comme ci-dessus) ; on peut toujours essayer cette démonstration suggérée, quitte à l'abandonner pour autre chose (peut-être un autre dessin !) si ça ne marche pas.

Exercice 4.3.

D'après l'Exercice 1.3 : $F = \text{adh}(H)$ est un sous-espace vectoriel, et il contient H . Donc $F = H$ (cas où H est fermé) ou bien $F = E$ (cas où H est partout dense). ♦

Exercice 4.4.

Proposition 4.1. Notons (i) à (iv) les propositions dont on veut prouver l'équivalence (dans l'ordre de la Prop.).

(i) \iff (iv) a déjà été démontré [Prop. 2.3 du Chap. III].

(i) \iff (ii) : notons I l'ensemble des points isolés dans A ; comme A est fermé :

$$A' \subset \text{adh}(A) \subset A.$$

Réciproquement, si $A' \subset A$, puisque $I \subset A : A \cup I = \text{adh}(A) \subset A$, et A est fermé.

(i) \iff (iii) : si A fermé, $\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(E \setminus A) \subset \text{adh}(A) = A$, d'où $\text{fr}(A) \subset A$.

Réciproquement, soit $u \in \text{adh}(A) : u \in \text{fr}(A)$ ou bien $u \notin \text{fr}(A)$; si $u \in \text{fr}(A)$, $u \in A$ par hypothèse ; si $u \notin \text{fr}(A)$, puisque $u \in \text{adh}(A) : \exists \rho > 0$ tel que $B(u, \rho] \cap (E \setminus A) = \emptyset$, d'où $u \in A$; finalement, on a $u \in \text{adh}(A) \implies u \in A$, et A est fermé. ♦

Théorème 4.1 (ii). $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ où chaque F_i est fermé, et on veut prouver que F est fermé.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de F convergente de limite u . $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in I : u_n \in F_i$ et F_i est fermé, donc $u \in F_i$ [Prop. 4.1] ; d'où $u \in \bigcap_{i \in I} F_i = F$. ♦

Théorème 4.1 (iii). D'après l'Exercice 1.2 :

$$F = \bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \text{adh}(F_i) = \text{adh}\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i\right) = \text{adh}(F). \quad \blacklozenge$$

Exercice 4.5

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] = \left[0, 1\right] \text{ non fermé. } \blacklozenge$$

PROBLÈME**Étude d'une fonction convexe**

Ce Problème fait appel à quelques connaissances des Chapitres VI et VII. Certaines questions sont réellement difficiles, et peuvent demander du temps ...

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel.

1) Soit $C \neq \emptyset$ une partie convexe de E . Soient $u \in C, v \in C, \rho$ et σ des réels > 0 . Démontrez que si $B(u, \rho] \subset C$ et $B(v, \sigma] \subset C$, on a : $B\left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(\rho+\sigma)\right] \subset C$.

2) Soit $C \neq \emptyset$ une partie convexe et fermée de E , et soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant : $\forall u \in C, \forall v \in C : f\left[\frac{1}{2}(u+v)\right] \leq \frac{1}{2}f(u) + \frac{1}{2}f(v)$.

a) Démontrez que pour tous u, v dans C , pour tout entier $n \geq 1$, pour tous entiers h et k vérifiant : $0 < h < 2^n, 0 < k < 2^n, h+k = 2^n$, on a :

$$f\left[\frac{h}{2^n}u + \frac{k}{2^n}v\right] \leq \frac{h}{2^n}f(u) + \frac{k}{2^n}f(v).$$

b) On suppose de plus que f est continue sur C ; démontrez que f est convexe sur le convexe C .

3) Soit C une partie convexe fermée de E ; on suppose $C \neq \emptyset$ et $C \neq E$. Pour tout $u \in C$, on pose : $h(u) := -d(u, E \setminus C)$. Démontrez que h est une fonction convexe sur C .

Indications : Utilisez 2) et réglez le cas où $\text{int}(C) = \emptyset$. Observez ensuite qu'il suffit de prendre $u \in \text{int}(C)$ et $v \in \text{int}(C)$ pour prouver l'inégalité voulue. Remarquez alors que $d(u, E \setminus C) > 0$ et que $B(u, d(u, E \setminus C)) \subset C$.

4) Dans le cadre de 3), on pose pour tout $u \in E$: $g(u) := d(u, C)$, puis – pour tout $u \in E$: $\delta(u) := g(u)$ pour $u \in E \setminus C$, $\delta(u) := h(u)$ pour $u \in C$. Démontrez que pour tous $u, v \in E$: $|\delta(u) - \delta(v)| \leq 2\|u - v\|$.

5) Même cadre et hypothèses que dans 4). Démontrez que pour tout $u \in E \setminus C$ et pour tout $v \in C$, on a : $d(u, C) + d(v, E \setminus C) \leq \|u - v\|$. Déduisez de ce résultat que pour tous u, v dans E , on a : $|\delta(u) - \delta(v)| \leq \|u - v\|$.

6) Toujours même cadre et mêmes notations. Démontrez que pour tout $u \in E$, on a : $\delta(u) = \inf_{v \in C} \{\|u - v\| - d(v, E \setminus C)\}$.

CORRIGÉ du PROBLÈME

1) Soit $w \in B(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(\rho+\sigma))$, et prouvons que $w \in C$. Pour cela, on va démontrer que w est le milieu d'un segment joignant $u' \in B(u, \rho) \subset C$ à $v' \in B(v, \sigma) \subset C$, et donc w sera dans C convexe. On a :

$$\|w - \frac{1}{2}(u+v)\| < \frac{1}{2}(\rho+\sigma) \iff \|2w - u - v\| < \rho + \sigma \iff \left\| \frac{2w - u - v}{\rho + \sigma} \right\| < 1$$

$$\iff \left\| \frac{\rho}{\rho + \sigma}(2w - u - v) \right\| < \rho \iff \left\| u + \frac{\rho}{\rho + \sigma}(2w - u - v) - u \right\| < \rho,$$

et donc : $u' = u + \frac{\rho}{\rho + \sigma}(2w - u - v) \in B(u, \rho)$. Le même calcul – en multipliant par σ au lieu de ρ – nous amène à envisager le point : $v' = v + \frac{\sigma}{\rho + \sigma}(2w - u - v) \in B(v, \sigma)$.

Mais on a : $u' + v' = u + v + (\frac{\rho}{\rho + \sigma} + \frac{\sigma}{\rho + \sigma})(2w - u - v) = 2w$ et donc : $w = \frac{1}{2}(u' + v') \in C$. ♦

Un dessin trivialise le résultat que l'on vient de démontrer... (voir p.110).

2) a) On raisonne bien sûr par récurrence.

Pour $n = 1$, on a par hypothèse : $f[\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v] \leq \frac{1}{2}f(u) + \frac{1}{2}f(v)$, et la formule cherchée est celle-là.

Afin « d'amorcer la pompe », voyons le cas $n = 2$. On a les possibilités : $h = 1, k = 3$; $h = 2, k = 2$; $h = 3, k = 1$. Le cas $h = 2, k = 2$ est le cas précédent : $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$!

Voyons le cas $h = 1, k = 3$; le dernier cas étant symétrique.

$$\begin{aligned} f\left[\frac{1}{4}u + \frac{3}{4}v\right] &= f\left[\frac{1}{2} \times \frac{u+v}{2} + \frac{1}{2}v\right] \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{u+v}{2}\right) + \frac{1}{2}f(v) \\ &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}f(u) + \frac{1}{2}f(v)\right] + \frac{1}{2}f(v) = \frac{1}{4}f(u) + \frac{3}{4}f(v) \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Faisons donc l'hypothèse de récurrence :

pour $1 \leq h \leq 2^n - 1$; $1 \leq k \leq 2^n - 1$; $h + k = 2^n$ on a : $f\left[\frac{h}{2^n}u + \frac{k}{2^n}v\right] \leq \frac{h}{2^n}f(u) + \frac{k}{2^n}f(v)$.

Prenons maintenant $1 \leq p \leq 2^{n+1} - 1$ et $1 \leq q \leq 2^{n+1} - 1$ tels que $p + q = 2^{n+1}$, et démontrons que :

$$f\left[\frac{p}{2^{n+1}}u + \frac{q}{2^{n+1}}v\right] \leq \frac{p}{2^{n+1}}f(u) + \frac{q}{2^{n+1}}f(v).$$

Si $p = q = 2^n$, on est ramené à la formule au rang 1, et on a terminé. Sinon, on a deux cas possibles symétriques : $p < 2^n, q > 2^n$ et $p > 2^n, q < 2^n$. Traitons le premier cas, par exemple. $q > 2^n \implies q = 2^n + r$ où $0 < r \leq 2^n - 1$. On a :

$$\begin{aligned} f\left[\frac{p}{2^{n+1}}u + \frac{q}{2^{n+1}}v\right] &= f\left[\frac{p}{2^{n+1}}u + \frac{2^n+r}{2^{n+1}}v\right] = f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{p}{2^n}u + \frac{r}{2^n}v\right) + \frac{1}{2}v\right] \\ &\leq \frac{1}{2}f\left[\frac{p}{2^n}u + \frac{r}{2^n}v\right] + \frac{1}{2}f(v). \end{aligned}$$

On peut maintenant appliquer l'hypothèse de récurrence, puisqu'on a : $p < 2^n$ i.e. $p \leq 2^n - 1$; $r \leq 2^n - 1$ et : $p + r = p + q - 2^n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$. Donc :

$$\begin{aligned} f\left[\frac{p}{2^{n+1}}u + \frac{q}{2^{n+1}}v\right] &\leq \frac{1}{2}\left[\frac{p}{2^n}f(u) + \frac{r}{2^n}f(v)\right] + \frac{1}{2}f(v) = \frac{p}{2^{n+1}}f(u) + \left(\frac{r}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\right)f(v) \text{ et} \\ \frac{r}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} &= \frac{r+2^n}{2^{n+1}} = \frac{q}{2^{n+1}}, \text{ d'où le résultat cherché. } \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

b) On veut prouver que $\forall \lambda \in]0, 1[$, $\forall \mu \in]0, 1[$, $\forall u \in C, \forall v \in C$:

$$\lambda + \mu = 1 \implies f(\lambda u + \mu v) \leq \lambda f(u) + \mu f(v).$$

Mais, et c'est là le principe de la numération binaire : pour tout $n \geq 0$, il existe un entier p_n , avec : $0 \leq p_n < 2^n$, et un seul tel que : $\frac{p_n}{2^n} \leq \lambda < \frac{p_n+1}{2^n}$.

On a : $\lambda - \frac{1}{2^n} < \frac{p_n}{2^n} \leq \lambda$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{2^n} = \lambda$

Posons alors $q_n := 2^n - p_n$ de sorte que $p^n + q^n = 2^n$. Si p_n et q_n sont non nuls, on peut appliquer l'inégalité de a) et celle-ci reste vraie pour p_n ou q_n nul :

$$f\left[\frac{p_n}{2^n}u + \frac{q_n}{2^n}v\right] \leq \frac{p_n}{2^n}f(u) + \frac{q_n}{2^n}f(v).$$

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{2^n} = \lambda \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n}{2^n} = 1 - \lambda = \mu$ et comme f est supposée continue sur C [on a : $\frac{p_n}{2^n}u + \frac{q_n}{2^n}v \in C, \lambda u + \mu v \in C$] :

$$f(\lambda u + \mu v) \leq \lambda f(u) + \mu f(v)$$

en utilisant le principe de prolongement des inégalités. ♦

Remarques :

i) f n'a pas besoin d'être continue «à part entière», il suffit qu'elle soit *semi-continue inférieurement*, en ce sens que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u \implies f(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (f(u_n))$.

ii) Il existe des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non continues et vérifiant :

$\forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} : f(s+t) = f(s) + f(t)$; f vérifie alors : $f(\frac{1}{2}s) = \frac{1}{2}f(s)$ et donc

$$f\left(\frac{1}{2}(s+t)\right) = \frac{1}{2}f(s) + \frac{1}{2}f(t);$$

mais f ne peut pas être convexe, car sinon un résultat élémentaire sur les fonctions convexes $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nous permettrait d'affirmer que f est continue . . .

3) On va démontrer que $h : C \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto -d(u, E \setminus C)$ est convexe. Pour pouvoir utiliser 2), commençons par démontrer que h est continue sur C .

$$|h(u) - h(v)| = |d(v, E \setminus C) - d(u, E \setminus C)| \leq d(v, u) = \|u - v\|$$

[$d(\cdot, X)$ contractante]. h est contractante sur C , et donc continue sur C . ♦

Il nous suffit donc à présent de prouver que :

$$-d\left[\frac{1}{2}(u+v), E \setminus C\right] \leq -\frac{1}{2}d(u, E \setminus C) - \frac{1}{2}d(v, E \setminus C),$$

soit :

$$d\left[\frac{1}{2}(u+v), E \setminus C\right] \geq \frac{1}{2}d(u, E \setminus C) + \frac{1}{2}d(v, E \setminus C), \text{ pour tous } u, v \in C.$$

• Si $\text{int}(C) = \emptyset, E \setminus C$ est partout dense et on a :

$$d(u, E \setminus C) = d(u, \text{adh}(E \setminus C)) = d(u, E) = 0$$

(car $d(y, X) = d(y, \text{adh } X)$, cf. chap. I),

de même pour $d(v, E \setminus C)$ et $d(\frac{1}{2}(u+v), E \setminus C)$; l'inégalité est bien vérifiée dans ce cas.

• Si $\text{int}(C) \neq \emptyset$, on a : $C = \text{adh}(C) = \text{adh}(\text{int}(C))$ [Chap.VI, Exercice 1.6], et comme $u \mapsto d(u, E \setminus C)$ est continue, on peut se contenter de démontrer l'inégalité pour $u \in \text{int}(C), v \in \text{int}(C)$.

Si $u \in \text{int}(C)$, on a $d(u, E \setminus C) > 0$, sinon on aurait $u \in \text{adh}(E \setminus C) = E \setminus \text{int}(C)$, impossible. ♦

Il est intéressant de remarquer alors que $B(u, d(u, E \setminus C)) \subset C$.

Eneffet, si $w \in B(u, d(u, E \setminus C))$ [et $w \in E \setminus C$, on aurait : $d(u, E \setminus C) \leq \|u-w\| < d(u, E \setminus C)$: impossible. ♦

Soient $u \in \text{int}(C), v \in \text{int}(C), B(u, d(u, E \setminus C)) \subset C, B(v, d(v, E \setminus C)) \subset C$, et donc, d'après 1) : $B(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(d(u, E \setminus C) + d(v, E \setminus C))) \subset C$. On a donc :

$d(\frac{1}{2}(u+v), E \setminus C) \geq$ rayon de la boule ci-dessus, i.e. $\frac{1}{2}[d(u, E \setminus C) + d(v, E \setminus C)]$, d'où le résultat cherché. ♦

4) $\delta(u) := d(u, C)$ si $u \in E \setminus C$ et $\delta(u) := -d(u, E \setminus C)$ si $u \in C$, donc on a : $\delta(u) = d(u, C) - d(u, E \setminus C)$ pour tout $u \in E$.

Or $u \mapsto d(u, X)$ est contractante, pour toute partie X (Chap.I), c'est-à-dire lipschitzienne de constante 1, donc δ est lipschitzienne de constante 2, en effet :

$$\begin{aligned} |\delta(u) - \delta(v)| &= |d(u, C) - d(u, E \setminus C) - d(v, C) + d(v, E \setminus C)| \\ &\leq |d(u, C) - d(v, C)| + |d(u, E \setminus C) - d(v, E \setminus C)| \\ &\leq \|u - v\| + \|u - v\| = 2\|u - v\|. \end{aligned}$$

5) $\forall u \in E \setminus C, \forall v \in C, \forall x \in C, \forall y \in E \setminus C$, on a :

$$d(u, C) + d(v, E \setminus C) \leq \|u - x\| + \|v - y\|.$$

Ecrivons cela pour $x := \lambda u + (1-\lambda)v$, avec $\lambda \in [0, 1]$, et $y := \mu u + (1-\mu)v$, avec $\mu \in [0, 1]$:

$$\|u - x\| = \|u - \lambda u - (1 - \lambda)v\| = (1 - \lambda)\|u - v\|,$$

$$\|v - y\| = \|v - \mu u - (1 - \mu)v\| = \mu\|u - v\|, \text{ et on a donc l'inégalité :}$$

$d(u, C) + d(v, E \setminus C) \leq (1 - \lambda + \mu)\|u - v\|$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\lambda u + (1 - \lambda)v \in C$, et pour tout $\mu \in [0, 1]$ tel que $\mu u + (1 - \mu)v \in E \setminus C$.

Soit $\nu := \sup\{\lambda \in [0, 1] \mid \lambda u + (1 - \lambda)v \in C\}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\lambda_\varepsilon \in [0, 1]$ tel que $\nu - \varepsilon \leq \lambda_\varepsilon \leq \nu$ et $\lambda_\varepsilon u + (1 - \lambda_\varepsilon)v \in C$, il existe $\mu_\varepsilon \in [0, 1]$ tel que $\nu \leq \mu_\varepsilon \leq \nu + \varepsilon$ et $\mu_\varepsilon u + (1 - \mu_\varepsilon)v \in E \setminus C$, cela par définition de sup.

De : $-\nu \leq -\lambda_\varepsilon \leq -\nu + \varepsilon$ et $\nu \leq \mu_\varepsilon \leq \nu + \varepsilon$, on tire : $0 \leq -\lambda_\varepsilon + \mu_\varepsilon \leq 2\varepsilon$, puis : $1 - \lambda_\varepsilon + \mu_\varepsilon \leq 2\varepsilon$.

On a donc :

$\forall \varepsilon > 0 : d(u, C) + d(v, E \setminus C) \leq (1 + 2\varepsilon)\|u - v\|$, et puisque l'inégalité a lieu pour tout $\varepsilon > 0$: $d(u, C) + d(v, E \setminus C) \leq \|u - v\|$. ♦

• $\forall u \in C, \forall v \in C : |\delta(u) - \delta(v)| = |-d(u, E \setminus C) + d(v, E \setminus C)| \leq \|u - v\|$;

• $\forall u \in E \setminus C, \forall v \in E \setminus C : |\delta(u) - \delta(v)| = |d(u, C) - d(v, C)| \leq \|u - v\|$;

• $\forall u \in C, \forall v \in E \setminus C$ [ou bien : $\forall u \in E \setminus C, \forall v \in C$] :

$$|\delta(u) - \delta(v)| \leq d(u, E \setminus C) + d(v, C) \leq \|u - v\| \text{ d'après 4).}$$

Donc : $|\delta(u) - \delta(v)| \leq \|u - v\|$ pour tous u, v de E , et δ est **contractante** sur E . ♦

Remarque : L'inégalité du début de 5) n'a pas lieu dans un espace métrique quelconque, car soit E un ensemble muni de la distance discrète et soient $u \in E \setminus C, v \in C, C \neq \emptyset$ arbitraire : $d(u, C) + d(v, E \setminus C) = 2$ non inférieur à $d(u, v) = 1$ (!).

6) On veut prouver que : $\inf_{v \in C} \{\|u - v\| - d(v, E \setminus C)\} = \delta(u)$.

i) Si $u \in C$, on a $\delta(u) = -d(u, E \setminus C)$.

• $\inf_{v \in C} \{\|u - v\| - d(v, E \setminus C)\} \leq \|u - v\| - d(v, E \setminus C)$ pour tout $v \in C$, et $v = u$ donne en particulier $\leq -d(v, E \setminus C)$. ♦

• $\|u - v\| - d(v, E \setminus C) \geq -d(v, E \setminus C)$ pour tout $v \in C$, et donc $\geq -d(u, E \setminus C)$ en faisant $v = u \in C$. ♦

ii) Si $u \in E \setminus C$, on a : $\delta(u) = d(u, C)$.

• $\inf_{v \in C} \{\|u - v\| - d(v, E \setminus C)\} \leq \|u - w\| - d(w, E \setminus C) \leq \|u - w\|$ pour tout $w \in C$, d'où : $\inf_{v \in C} \{\|u - v\| - d(v, E \setminus C)\} \leq \inf_{w \in C} \|u - w\| = d(u, C)$. ♦

• D'après 5) : $\|u - v\| - d(v, E \setminus C) \geq d(u, C)$ pour tout $v \in C$ et donc :

$$\inf_{v \in C} \{\|u - v\| - d(v, E \setminus C)\} \geq d(u, C).$$

Finalement : $\delta(u) = \inf_{v \in C} \{\|u - v\| - d(v, E \setminus C)\}$. ♦

Fin du Chapitre V

CHAPITRE VI

OUVERTS D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Introduction

Après avoir dit ce que nous voulions dire sur les sous-ensembles fermés d'un espace métrique dans le chapitre V, il est bien naturel des parler des sous-ensembles *ouverts* dans ce chapitre VI . . .

Retenez bien qu'une partie arbitraire d'un espace métrique n'est généralement *ni fermée ni ouverte* ! Ce n'est pas comme une porte . . . (si l'on s'en tient à ce que prétend A. de Musset sur ce sujet).

Cela ne l'empêche en aucune façon d'être intéressante : pensez à l'exemple de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} usuel. Néanmoins, vous pourrez constater dans la suite du cours que les parties d'espace métrique intéressantes pour l'Analyse sont fréquemment fermées (complètes, compactes, . . .) ou ouvertes (ouvert partout dense, . . .).

Notons qu'une partie partout dense n'est pas en général ouverte (pensez aux sous-espaces vectoriels !).

Par contre une partie peut être *à la fois fermée et ouverte* : c'est toujours le cas pour \emptyset et l'espace entier. Mais dans les « bons » espaces (les e.v.n. en particulier), il n'y en aura pas d'autres (notons que dans un sous-espace métrique d'un e.v.n. il peut en exister !).

Toutefois, la présence de parties propres ($A \neq \emptyset$, $A \neq E$) à la fois fermées et ouvertes n'est pas une rareté. On reviendra assez longuement sur ce sujet dans le Chap. XX (Connexités).

N'oubliez pas la relativité des fermés et des ouverts : la moindre ambiguïté sur ce sujet à un examen peut vous coûter très cher !

Le chapitre est de lecture aisée, mais attention à la relativité.

✍ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.2, 1.3, **1.4**, **1.6**, 2.1, **2.2**, 2.5, 2.8.

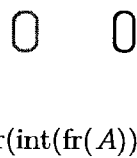
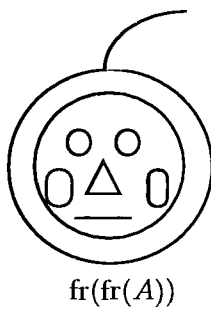
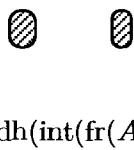
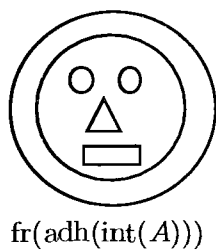
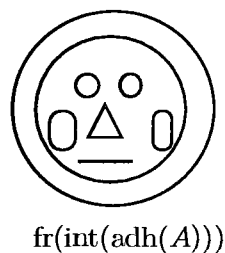
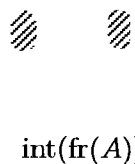
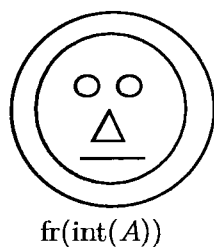
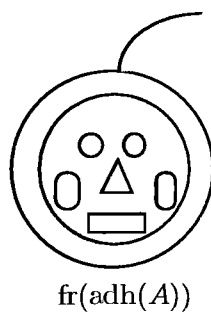
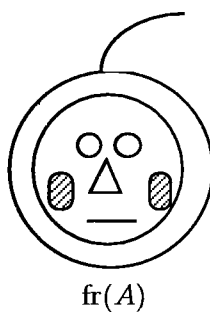
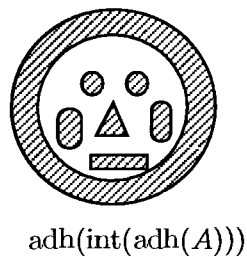
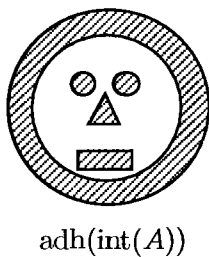
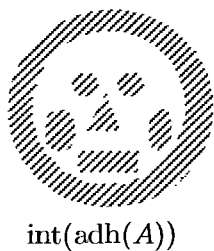
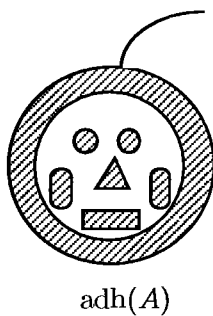
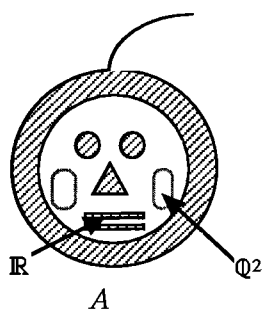
✍ Exercices complémentaires : 1.7, 2.3, 2.4, 2.6, 2.7.

Nous proposons deux problèmes : le premier, sur les boules généralisées, le second sur les ensembles *rare*s. Tous deux sont plutôt faciles, ils vous permettront de vérifier si vous avez bien assimilé le cours.

DANS LE PROCHAIN CHAPITRE NOUS NOUS LANCERONS DANS LA CONTINUITÉ . . .

BON TRAVAIL !

Exercice 1.4



CHAPITRE VI

OUVERTS D'UN ESPACE MÉTRIQUE

1. NOTION D'INTÉRIEUR

Définition 1.1.

Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie de E . Un point $u \in A$ est dit **intérieur à A** [dans (E, d)] s'il existe $\rho > 0$ tel que $B(u, \rho] \subset A$. L'ensemble de tous les points intérieurs à A s'appelle l'**intérieur de A** et se note $\text{int}(A)$ ou également $\overset{\circ}{A}$.

$$(1.1) \quad u \in \text{int}(A) \iff \exists \rho > 0 : B(u, \rho] \subset A.$$

On appelle **extérieur de A** , et on note $\text{ext}(A)$ l'intérieur du complémentaire $(E \setminus A)$ de A : $\text{ext}(A) = \text{int}(E \setminus A)$. Les points de $\text{ext}(A)$ sont dits **extérieurs à A** .

$$(1.2) \quad u \in \text{ext}(A) \iff \exists \rho > 0 : B(u, \rho] \subset E \setminus A.$$

Commentaires :

- 1) Un point intérieur à A est nécessairement un point appartenant à A .
- 2) On peut sans inconvénient remplacer $B(u, \rho[$ par $B(u, \rho]$.
- 3) Si nécessaire – et c'est souvent nécessaire – on précisera **intérieur par rapport à (E, d)** , ou par rapport à d .
- 4) Si l'on remplace d par une distance *équivalente* δ , les points intérieurs, l'intérieur, les points extérieurs, l'extérieur sont les mêmes que pour d .
- 5) Les notions de point extérieur et d'extérieur sont beaucoup moins importantes que celles de point intérieur et d'intérieur.

On a les propriétés élémentaires suivantes de la notion d'intérieur :

Proposition 1.1.

Soit (E, d) un espace métrique.

$$(1.3) \quad \text{int}(\emptyset) = \emptyset ; \text{int}(E) = E,$$

$$(1.4) \quad \forall A \subset E : \text{int}(A) \subset A,$$

$$(1.5) \quad \forall A \subset E, \forall B \subset E : A \subset B \implies \text{int}(A) \subset \text{int}(B),$$

$$(1.6) \quad \forall A \subset E : \text{int}[\text{int}(A)] = \text{int}(A),$$

$$(1.7) \quad \forall A \subset E, \forall B \subset E : \text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$$

☞ **Exercice 1.1.** (très facile) Vérifiez soigneusement ces formules qui sont à connaître par cœur.

Que dire de $\text{int}(\{u\})$ pour $u \in E$? (dans le cas général, et dans le cas particulier d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$).

Démontrez que $\text{int}(\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{int}(A_i)$, et que cette formule est fautive pour une intersection infinie.

Démontrez que $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subset \text{int}(A \cup B)$ mais que l'inclusion inverse est fautive en général.

Exemple 1.1. On considère $E = \mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle $d(s, t) = |s - t|$.

a) Considérons la partie $A = \mathbb{Q}$ et soit $t \in A$: tout intervalle (toute boule, donc) $]t - \rho, t + \rho[$, $\rho > 0$, contient à la fois des rationnels et des irrationnels ; donc t n'est pas intérieur. Ainsi : $\text{int}(A) = \text{int}(\mathbb{Q}) = \emptyset$.

Pour la même raison, si l'on prend $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on a : $\text{int}(B) = \text{int}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset$.

On a donc : $\text{int}(A) \cup \text{ext}(A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$: on est loin de retrouver un espace métrique en réunissant l'intérieur d'une partie et son extérieur !

Ne confondez pas langage mathématique et langage usuel . . .

b) Considérons $A =]0, 1[$. Tout point $t \in]0, 1[$ est intérieur car en choisissant ρ tel que $0 < \rho < \min\{t, 1 - t\}$: $B(t, \rho) =]t - \rho, t + \rho[\subset]0, 1[\subset]0, 1[$. Donc : $\text{int}(A) \supset]0, 1[$. Le point $t = 1$ n'est pas intérieur car tout intervalle $]1 - \rho, 1 + \rho[$, $\rho > 0$, contient des points > 1 , donc hors de $]0, 1[$. Les autres points de \mathbb{R} n'ont pas à être examinés, puisque n'appartenant pas à A . Finalement : $\text{int}(A) =]0, 1[$.

Il est facile de voir que :

$\text{ext}(A) =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, et donc : $\text{int}(A) \cup \text{ext}(A) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} = \mathbb{R} \setminus \text{fr}(A)$.

Avec un raisonnement similaire : $\text{int}(]0, 1]) = \text{int}([0, 1]) = \text{int}([0, 1[) =]0, 1[$.

c) $A = \mathbb{Z}$: aucun intervalle $]n - \rho, n + \rho[$, $\rho > 0$, $n \in \mathbb{Z}$, n'est contenu dans \mathbb{Z} , donc : $\text{int}(A) = \emptyset$. Bien entendu, si l'on considère l'espace métrique $F = \mathbb{Z}$, muni de la distance induite $d(m, n) = |m - n|$, $\text{int}_F(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Faites bien attention à la relativité des notions !

Exemple 1.2. Soit E un ensemble arbitraire qu'on munit de la distance discrète δ , et soit $A \neq \emptyset$ une partie quelconque de E . Soit $u \in A$: $B(u, \rho) = \{u\}$ pour tout $\rho \leq 1$, et donc tout point de A est intérieur à A . $\forall A \subset E$: $\text{int}(A) = A$.

De même, soit $E = \mathbb{Z}$ sous-espace métrique de \mathbb{R} , i.e. \mathbb{Z} muni de $d(m, n) = |m - n|$ et soit $A \neq \emptyset$ une partie de \mathbb{Z} . Soit $m \in \mathbb{Z}$: $B(m, 1[) = \{m\}$ (= $B(m, \frac{1}{2}[$ si vous préférez), et donc $m \in \text{int}(A)$. Donc $\text{int}(A) = A$.

Notez la différence avec l'Exemple 1.1 c).

Exemple 1.3. Dans \mathbb{R}^2 euclidien, soit $A = B_\infty(0, 1]$, i.e. la boule relative à la norme $\|\cdot\|_\infty$: $\text{int}(A) = B_\infty(0, 1[$. Soit $D = \{(s, s) / s \in \mathbb{R}\}$: $\text{int}(D) = \emptyset$.

Exemple 1.4. (IMPORTANT) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et soit F un sous-espace vectoriel de E vérifiant $F \neq E$. Nous allons prouver qu'aucun point de F n'est intérieur à F : $\text{int}(F) = \emptyset$. Cela traduit le fait intuitif qu'un sous-espace vrai ($F \neq E$) «c'est plat».

Mais, bien entendu, si l'on se place dans le sous-e.v.n. F , on aura : $\text{int}(F) = \text{int}_F(F) = F$, et tout sous-e.v. G de F tel que $G \neq F$ sera à son tour d'intérieur vide dans F : $\text{int}_F(G) = \emptyset$.

Démonstration : Soit $u \in F$ un point qu'on suppose intérieur à F , et soit $v \in E \setminus F$ [$F \neq E$, donc v existe].

Considérons les points du segment joignant u à v : $w_\lambda := \lambda.v + (1 - \lambda).u$, où $\lambda \in [0, 1]$, et soit $B(u, \rho) \subset F$ [$u \in \text{int}(F)$ par hypothèse].

$\|w_\lambda - u\| = \|\lambda v + u - \lambda u - u\| = \lambda \|u - v\| < \rho$ pour tout $\lambda < \frac{\rho}{\|u - v\|}$ ($u \in F$ et $v \notin F \implies \|u - v\| \neq 0$). Pour $\lambda_0 = \frac{\rho}{2\|u - v\|}$, par exemple, on a donc : $w_{\lambda_0} \in B(u, \rho) \subset F$.

Mais alors : $w_{\lambda_0} - (1 - \lambda_0).u = \lambda_0.v$, soit : $v = \frac{1}{\lambda_0}[w_{\lambda_0} - (1 - \lambda_0).u] \in F$ puisque F est un sous-espace vectoriel contenant u et w_{λ_0} : on aboutit ainsi à une contradiction car au départ $v \notin F$. ♦

☞ **Exercice 1.2.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique. On considère les boules et sphère $B(u, \rho[$, $B(u, \rho]$, $S(u, \rho)$.

a) Démontrez que tout point de $B(u, \rho[$ est intérieur (faites un dessin !).

b) Démontrez que, en général, $\text{int}(B(u, \rho])$ n'est pas $B(u, \rho[$. Prouvez par des exemples qu'un point v de $B(u, \rho]$ tel que $d(u, v) = \rho$ peut être intérieur, et que $S(u, \rho)$ peut avoir des points intérieurs.

c) Par contre, démontrez que dans un e.v.n. $(E, \| \cdot \|)$ (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) :

$$\text{int}(B(u, \rho]) = B(u, \rho[\text{ et que } \text{fr}(B(u, \rho]) = \text{fr}(B(u, \rho[) = S(u, \rho).$$

Conseil : faites des dessins ! Pour les frontières, utilisez le résultat de l'exercice 1.3 ci-après.

Entre les notions d'intérieur et d'adhérence, on a deux relations en passant aux complémentaires :

Proposition 1.2.

Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie de E . On a les relations suivantes :

$$(1.8) \quad E \setminus \text{int}(A) = \text{adh}(E \setminus A) \text{ ET } : E \setminus \text{adh}(A) = \text{int}(E \setminus A) [= \text{ext}(A)].$$

$$(1.9) \quad \text{Autre écriture : } \mathbb{C}_E \text{int}(A) = \text{adh}(\mathbb{C}_E A) \text{ ET } : \mathbb{C}_E \text{adh}(A) = \text{int}(\mathbb{C}_E A).$$

$$(1.10) \quad \text{Ou encore : } \mathbb{C}_E \overset{\circ}{A} = \overline{\mathbb{C}_E A} \text{ ET } : \mathbb{C}_E \overline{A} = (\mathbb{C}_E A)^\circ.$$

Démonstration :

Tout d'abord, les deux formules se déduisent l'une de l'autre par dualité ensemble / complémentaire : supposons qu'on ait $E \setminus \text{int}(A) = \text{adh}(E \setminus A)$ et démontrons que $E \setminus \text{adh}(A) = \text{int}(E \setminus A)$. Posons : $B := E \setminus A : E \setminus \text{int}(B) = \text{adh}(E \setminus B)$, soit :

$$E \setminus [(\text{int}(E \setminus A))] = \text{adh}[E \setminus (E \setminus A)] = \text{adh}(A)$$

$$\implies E \setminus [E \setminus \text{int}(E \setminus A)] = E \setminus [E \setminus \text{int}(E \setminus A)] = \text{int}(E \setminus A) = E \setminus \text{adh}(A). \blacklozenge$$

Remarque :

Lorsqu'on écrit à la main, il vaut beaucoup mieux utiliser les notations $\mathbb{C}, \overset{\circ}{}$, et $\overline{}$ qui sont plus « parlantes ».

Démontrons à présent la première formule. Soit $u \in E \setminus \text{int}(A) : u \notin \text{int}(A) \implies \text{non}[\exists \rho > 0 : B(u, \rho[\subset A] \implies \forall \rho > 0 : B(u, \rho[\cap (E \setminus A) \neq \emptyset$ et donc $u \in \text{adh}(E \setminus A)$.

Réciproquement, soit $u \in \text{adh}(E \setminus A)$, on a : $\forall \rho > 0 : B(u, \rho[\cap (E \setminus A) \neq \emptyset$; supposons que $u \in \overset{\circ}{A} : \exists \rho_1 > 0 : B(u, \rho_1[\subset A \implies B(u, \rho_1[\cap (E \setminus A) = \emptyset$: contradiction, d'où : $u \in E \setminus \text{int}(A)$. \blacklozenge

☞ **Exercice 1.3.** (facile) Démontrez que E est la réunion de trois parties de E disjointes deux à deux, et l'expression suivante de $\text{fr}(A)$:

$$(1.11) \quad E = \text{int}(A) \cup \text{ext}(A) \cup \text{fr}(A),$$

$$(1.12) \quad \text{fr}(A) = \text{adh}(A) \setminus \text{int}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \mathbb{C}_{\text{adh}(A)} \overset{\circ}{A} \text{ (d'où l'on déduit aisément que : } \text{fr}(A) = \emptyset \iff A \text{ est fermé et ouvert).}$$

Relativité des intérieurs

Soit (E, d) un espace métrique, et soit (F, δ) un sous-espace métrique de (E, d) : $F \subset E$ et $\delta = d|_{F \times F}$. On avait pour les adhérences, pour tout $A \subset E$: $\text{adh}_F(A) = \text{adh}_E(A) \cap F$.

Mais, en général, $\text{int}_F(A)$ n'est pas égal à $\text{int}_E(A) \cap F$!

En effet, dans \mathbb{R} usuel, prenons : $F =]0, 1[$ et $A = F$:

$$\text{int}_F(A) = \text{int}_F(F) = F =]0, 1[, \text{ tandis que}$$

$$\text{int}_E(A) \cap F =]0, 1[\cap F =]0, 1[\cap]0, 1[=]0, 1[\neq]0, 1[.$$

☞ **Exercice 1.4.** (facile) On considère dans \mathbb{R} usuel la partie suivante :

$$A = [0, 1[\cup]1, 2] \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4, 5]).$$

Démontrez que les seize ensembles suivants sont tous différents : A , $\text{adh}(A)$, $\text{int}(A)$, $\text{int}[\text{adh}(A)]$, $\text{adh}[\text{int}(A)]$, $\text{int}\{\text{adh}[\text{int}(A)]\}$, $\text{adh}\{\text{int}[\text{adh}(A)]\}$, $\text{fr}(A)$, $\text{fr}[\text{adh}(A)]$, $\text{fr}[\text{int}(A)]$, $\text{int}[\text{fr}(A)]$, $\text{fr}\{\text{int}[\text{adh}(A)]\}$, $\text{fr}\{\text{adh}[\text{int}(A)]\}$, $\text{adh}\{\text{int}[\text{fr}(A)]\}$, $\text{fr}\{\text{fr}(A)\}$, $\text{fr}\{\text{int}[\text{fr}(A)]\}$.

On démontre (et ce n'est pas au-dessus du niveau de ce cours, faites-le si cela vous amuse) qu'on ne peut pas former d'autres ensembles distincts et non vides en n'utilisant que les opérations $A \mapsto \text{int } A$, $A \mapsto \text{adh } A$, $A \mapsto \text{fr}(A)$.

Inventez un exemple similaire dans \mathbb{R}^2 (voir p. 128).

☞ **Exercice 1.5.** (assez facile)

Démontrez qu'on a toujours : $\text{fr}(A \cup B) \subset \text{fr}(A) \cup \text{fr}(B)$, mais que l'inclusion inverse est fautive en général. Démontrez que si $\text{adh}(A) \cap \text{adh}(B) = \emptyset$, on a : $\text{fr}(A \cup B) = \text{fr}(A) \cup \text{fr}(B)$.

☞ **Exercice 1.6.** (difficile, mais le résultat est souvent utile)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et soit $C \neq \emptyset$ une partie convexe de E .

1) Soient $u \in \text{int}(C)$ et $v \in \text{adh}(C)$. Démontrez que pour tout $\lambda \in [0, 1[$ on a :

$$w_\lambda := \lambda \cdot u + (1 - \lambda) \cdot v \in \text{int}(C).$$

2) Démontrez que $\text{adh}(C)$ et $\text{int}(C)$ sont convexes.

3) Démontrez que si $\text{int}(C) \neq \emptyset$ on a :

$$\text{adh}[\text{int}(C)] = \text{adh}(C) \text{ et } \text{int}[\text{adh}(C)] = \text{int}(C).$$

☞ **Exercice 1.7.** (facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n, soit $C \neq \emptyset$ une partie convexe de E , et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur C . Démontrez que s'il existe $\hat{u} \in \text{int}(C)$ tel que $f(\hat{u}) = \max_{u \in C} f(u)$, on a : f est constante sur C .

2. PARTIES OUVERTES D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Définition 2.1.

Soit (E, d) un espace métrique. Une partie A de E est dite **ouverte** [dans (E, d)] si elle est égale à son intérieur.

$$(2.1) \quad A \text{ ouverte} \iff A = \text{int}(A) \iff \forall a \in A, \exists \rho = \rho_a > 0 : B(a, \rho] \subset A.$$

Commentaires :

1) Même problème que pour les parties fermées : il convient de préciser soigneusement l'espace métrique considéré, ou simplement la distance, si la moindre ambiguïté peut se manifester.

2) Les parties ouvertes d'un espace métrique (E, d) restent ouvertes si l'on remplace d par une distance équivalente δ .

3) On dit souvent « un ouvert » au lieu de partie ouverte. C'est-à-dire que l'adjectif devient volontiers substantif.

Exemples 2.1. On se place dans $E = \mathbb{R}$ usuel. \emptyset , \mathbb{R} , $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $] \alpha, \beta[$ (où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), $] -\infty, \alpha[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $] \beta, +\infty[$ ($\beta \in \mathbb{R}$) sont des *parties ouvertes* dans \mathbb{R} (ou : des ouverts de \mathbb{R}).

\mathbb{N} , \mathbb{N}^* , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta[$ ne sont pas des ouverts de \mathbb{R} .

Exemple 2.2. Soit E un ensemble arbitraire, muni de la distance discrète δ . Toute partie A de E est *ouverte*. En particulier, les singletons $\{u\}$ ($u \in E$) sont ouverts. Rappelons que toute partie est également fermée [Chap. V]. De même, dans l'espace \mathbb{Z} muni de la distance induite celle de \mathbb{R} usuel, toute partie est ouverte, mais aussi fermée.

Exemples 2.3. Dans tout espace métrique, les boules ouvertes sont des ouverts [cf. Exercice 1.2 a)], ce qui justifie *a posteriori* la terminologie. Pour toute partie A de E : $\text{int}(A) = \overset{\circ}{A}$ est un ouvert ; c'est le plus grand ouvert contenu dans A [en effet, si $B \subset A$

est un ouvert : $\text{int}(B) = B \subset \text{int}(A)$. L'extérieur de A : $\text{ext}(A) = \text{int}(E \setminus A)$ est un ouvert, le plus grand ouvert contenu dans $E \setminus A$.

☞ DANS UN ESPACE MÉTRIQUE UNE PARTIE N'EST PAS OU BIEN OUVERTE OU BIEN FERMÉE ! Par exemple, dans \mathbb{R} usuel, $[0, 1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

☞ UNE PARTIE D'UN ESPACE MÉTRIQUE PEUT ÊTRE À LA FOIS OUVERTE ET FERMÉE ! C'est toujours le cas de \emptyset et E entier. Dans les « bons » espaces de l'Analyse, \emptyset et E sont – en général – les seules parties à la fois ouvertes et fermées ; on verra ultérieurement pourquoi [notion de connexité : Chap. XX].

Exemples 2.4.

a) Soit $E = C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$. Soit $f \in E$, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$:

$I(f, \alpha) := \{t \in [0, 1] / f(t) < \alpha\}$ est une partie ouverte de $[0, 1]$.

En effet, si $I(f, \alpha) = \emptyset$, c'est un ouvert ($\text{int}(\emptyset) = \emptyset$), sinon soit $t_0 \in I(f, \alpha)$ tel que $f(t_0) = \beta < \alpha$. f étant continue, pour $\varepsilon = \alpha - \beta > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [0, 1] : t \in]t_0 - \eta, t_0 + \eta[\implies |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$, d'où, en particulier : $f(t) < \beta + (\alpha - \beta) = \alpha$; donc la boule (de $[0, 1]$) $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[\cap [0, 1]$ est contenue dans $I(f, \alpha)$ qui est par conséquent un ouvert. ♦

b) Soit $f_0 \in E$ fixée : $U(f_0) := \{f \in E / f < f_0\}$ est une partie ouverte de E .

En effet, soit $f \in U(f_0)$. La fonction $t \mapsto h(t) = f_0(t) - f(t)$ est > 0 et continue sur $[0, 1]$. Donc, il existe $\underline{t} \in [0, 1]$ tel que $h(\underline{t}) = \inf_{0 \leq t \leq 1} h(t) = \min_{0 \leq t \leq 1} h(t) > 0$.

Posons $h(\underline{t}) = f_0(\underline{t}) - f(\underline{t}) = \rho > 0$, et considérons la boule (de E) $B(f, \rho[$:

$g \in B(f, \rho[\iff \|g - f\|_\infty < \rho$

$\implies \forall t \in [0, 1] : g(t) - f(t) \leq |g(t) - f(t)| < \rho = f_0(\underline{t}) - f(\underline{t}) \leq f_0(t) - f(t)$

$\implies \forall t \in [0, 1] : g(t) < f_0(t) \implies g < f_0 \implies g \in U(f_0)$.

Donc, $B(f, \rho[\subset U(f_0)$ et $U(f_0)$ est ouvert dans E . ♦

Exemple 2.5. Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie non vide quelconque de E . Pour $\rho > 0$, nous avons déjà introduit les boules et sphère généralisées [Chap. I (3.16)] :

$B(A, \rho[:= \{u \in E / d(u, A) < \rho\}$, $B(A, \rho] := \{u \in E / d(u, A) \leq \rho\}$,
 $S(A, \rho) := \{u \in E / d(u, A) = \rho\}$.

$B(A, \rho]$ et $S(A, \rho)$ sont des parties fermées de (E, d) ; montrons-le pour $B(A, \rho]$: soit (u_n) une suite de $B(A, \rho]$ convergente de limite $u \in E$; $\forall n : d(u_n, A) \leq \rho$, et $|d(u, A) - d(u_n, A)| \leq d(u, u_n) \implies d(u, A) \leq d(u_n, A) + d(u, u_n) \leq \rho + d(u, u_n)$; soit $\varepsilon > 0 : \exists N, \forall n : n \geq N \implies d(u, u_n) \leq \varepsilon$; d'où : $d(u, A) \leq \rho + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0 \implies d(u, A) \leq \rho \implies u \in B(A, \rho]$. ♦

Démontrons que $B(A, \rho[$ est ouverte. Soit $u \in B(A, \rho[: d(u, A) = \delta < \rho$.

Considérons la boule $B(u, \rho - \delta[$, [on a $\rho - \delta > 0$], et soit $v \in B(u, \rho - \delta[: |d(v, A) - d(u, A)| \leq d(u, v) < \rho - \delta$

$\implies d(v, A) \leq d(u, A) + \rho - \delta = \delta + (\rho - \delta) = \rho$;

d'où $B(u, \rho - \delta[\subset B(A, \rho[$, et $B(A, \rho[$ est ouverte. ♦

On remarque que, quel que soit A , $B(A, \rho]$ ressemble beaucoup à A lorsque ρ est « petit » ; et que si σ est tel que $0 < \sigma < \rho : B(A, \sigma[\subset B(A, \rho]$, et donc $B(A, \rho]$ possède des points intérieurs, même si A n'en possède pas. En outre, si les boules « ordinaires » $B(u, \rho[$ sont « bien rondes », $B(A, \rho[$ « casse les angles » de A . Pour toutes ces raisons, il est parfois intéressant de travailler avec $B(A, \rho]$ plutôt qu'avec A , et de passer ensuite à la limite quand $\rho \rightarrow 0$. Cette méthode n'est pas une panacée . . .

Exemple 2.6. Dans un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ réel ou complexe, un avantage pour une partie A d'être ouverte consiste en ce qu'on peut « se promener » autour de tout point $u \in A$

sans sortir de A . Cela sera fondamental, par exemple, pour le Calcul Différentiel où l'on doit considérer des vecteurs de la forme $u + t.h$ ou $u + h$ (*accroissements*).

Soit, en effet, A ouvert dans $(E, \|\cdot\|)$, et soit $u \in A$; soit $h \neq 0$ un vecteur arbitraire de E : pour tout $t \in \mathbb{K}$ tel que $|t|$ petit, on a: $u + t.h \in A$. Soit $B(u, \rho[\subset A$: $\|(u + t.h) - u\| = |t| \cdot \|h\| < \rho$ pour tout t vérifiant $|t| < \frac{\rho}{\|h\|}$. De même, $u + h \in A$ dès que $\|h\|$ assez petit: $\|(u + h) - u\| < \rho$ pour tout h tel que $\|h\| < \rho$.

Si l'on compare les chapitres V et VI, au point de vue des exemples donnés, il peut sembler qu'il y ait «davantage» de fermés que d'ouverts. Ce n'est pas du tout le cas! En effet, il y a «exactement autant» d'ouverts que de fermés, pour la bonne raison qu'ils se déduisent les uns des autres par passage au complémentaire.

De manière précise :

Théorème 2.1. (FONDAMENTAL)

Soit (E, d) un espace métrique. Une partie A de (E, d) est *ouverte* si et seulement si son complémentaire $E \setminus A$ est *fermé* dans (E, d) .
 Soit, par passage au complémentaire $[E \setminus (E \setminus A) = A]$:
 Une partie B de E est *fermée* dans (E, d) si et seulement si son complémentaire $E \setminus B$ est *ouvert* dans (E, d) .

Commentaire : Pour démontrer qu'un sous-ensemble est ouvert [resp. fermé] il est très fréquent qu'on soit amené à prouver que son complémentaire est fermé [resp. ouvert].

☞ *Il faut toujours avoir cette tactique à l'esprit.*

Démonstration : Soit A ouvert, et soit $B = E \setminus A$: démontrons que B est fermé. Soit $u \in \text{adh}(B)$, on va démontrer que $u \in B$, d'où $\text{adh}(B) \subset B$ et $\text{adh}(B) = B$.
 Sinon, $u \notin B = E \setminus A$, d'où $u \in E \setminus B = E \setminus (E \setminus A) = A$. Comme A est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(u, \rho[\subset A$ et, donc, telle que $B(u, \rho[\cap B = \emptyset$, ce qui contredit le fait que $u \in \text{adh}(B)$. ♦

Réciproquement, on suppose que $B = E \setminus A$ est fermé. Démontrons que A est ouvert en prouvant que $A \subset \text{int}(A)$, soit $\text{int}(A) = A$. Soit $u \in A$: si $u \notin \text{int}(A)$, toute boule $B(u, \rho[$ coupe $E \setminus A = B$, ce qui signifie que $u \in \text{adh}(B) = B = E \setminus A$, en contradiction avec $u \in A$. ♦

Correspondant au (seul) Théorème du Chap. V, on a :

Théorème 2.2. (FONDAMENTAL)

Soit (E, d) un espace métrique.
 (2.2) \emptyset et E entier sont des parties ouvertes dans E ,
 (2.3) *Toute réunion* de parties ouvertes de E est une partie ouverte de E ,
 (2.4) *Toute intersection finie* de parties ouvertes de E est une partie ouverte de l'espace E .

Démonstration :

(2.2) $\emptyset = E \setminus E$ et E est fermée dans (E, d) [Th. 4.1 du Chap.V], donc [Th.2.1 ci-dessus] \emptyset est ouverte; $E = E \setminus \emptyset$ et \emptyset est fermée dans (E, d) , d'où E est ouverte: même raisonnement. ♦

(2.3) Soit à démontrer que si $A_i, i \in I, I$ ensemble arbitraire, est ouverte dans (E, d) pour tout $i \in I$, on a: $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ouverte. Mais $B_i := E \setminus A_i$ est fermée pour tout $i \in I$ et, donc, $\bigcap_{i \in I} B_i$ est fermée dans (E, d) [Th. 4.1, Chap. V]. Par conséquent: $\bigcup_E (\bigcap_{i \in I} B_i)$ est ouvert [Th. 2.1 ci-dessus], et :

$\bigcup_E (\bigcap_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} (\bigcup_E B_i) = \bigcup_{i \in I} [E \setminus (E \setminus A_i)] = \bigcup_{i \in I} A_i = A$, d'où le résultat. ♦

(2.4) Soient $A_i, i = 1, 2, \dots, n$, des parties ouvertes de $(E, d) : B_i := E \setminus A_i$ sont des parties fermées [Th. 2.1], d'où [Th.4.1.V] $\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i$ est fermée, et donc [Th.2.1]

$\bigcup_E (\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i)$ est ouverte, et :

$$\bigcup_E (\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} [E \setminus (E \setminus A_i)] = \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i. \blacklozenge$$

Autre démonstration de (2.4) : $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \text{int}(A_i) = \text{int}(\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i)$ est ouvert comme intérieur. ♦

On peut reformuler la définition 4.2 du Chap. V :

Définition 2.2. (\iff Définition 4.2, Chap. V) **d'une TOPOLOGIE.**

On appelle **topologie sur un ensemble** E la donnée d'une famille \mathcal{O} de parties de E ($\mathcal{O} \subset 2^E$) vérifiant les propriétés (ou : axiomes) (2.2) (2.3) (2.4) du Théorème 2.2 ci-dessus.

Les éléments de \mathcal{O} sont les **ouverts** de la topologie.

Définition 2.3.

On appelle **espace topologique le couple** (E, \mathcal{O}) [resp. (E, \mathcal{F})] constitué par un ensemble E et par une topologie \mathcal{O} [resp. \mathcal{F}] sur cet ensemble.

La donnée d'une distance sur un ensemble définit une topologie sur cet ensemble, soit comme nous l'avons vu dans le Chap. V à partir de la famille \mathcal{F} des fermés, soit comme on vient de le voir dans ce Chapitre à partir des intérieurs puis de la famille \mathcal{O} des ouverts.

Un espace métrique constitue donc un exemple (important) d'espace topologique.

On notera qu'un espace topologique *n'est pas nécessairement* associé à une distance (voir l'Exercice 2.4 ci-après) : c'est le cas d'espaces topologiques importants en Analyse ; par exemple la topologie naturelle qui correspond à la convergence simple (ou ponctuelle) des fonctions $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ n'est (malheureusement) pas descriptible par une distance . . .

Quand on a une topologie donnée par \mathcal{O} (ou \mathcal{F}) sur un ensemble, on peut définir, en suivant un chemin inverse de ce qui a été fait ici, les points intérieurs, adhérents, la convergence d'une suite, etc. Il suffit de remplacer les boules par des ouverts.

La distance discrète définit la topologie la plus fine possible en ce sens que la famille des ouverts (et donc des fermés) est la plus grande possible : on a

$$\mathcal{O} = \mathcal{F} = 2^E = \mathcal{P}(E).$$

On appelle cette topologie la *topologie discrète*.

Il est à noter que la topologie discrète peut être décrite par une distance qui n'est pas la distance discrète : par exemple, sur $E = \mathbb{Z}$ la distance induite par l'usuelle de \mathbb{R} , $d(m, n) = |m - n|$, ne coïncide pas avec la distance discrète δ , et pourtant d définit la topologie discrète, comme δ .

À l'opposé de la topologie discrète, on peut considérer sur un ensemble E quelconque la topologie la moins fine possible, *i.e.* celle qui contient le moins d'ouverts possible : $\mathcal{O} = \mathcal{F} = \{\emptyset, E\}$. On l'appelle la *topologie grossière* ; elle est bien sûr sans utilité pratique (mais elle sert à donner des exemples et des contre-exemples !).

Un espace topologique (E, \mathcal{O}) est dit **séparé** (*attention à ne pas confondre avec séparable* !) si pour tous u, v de E distincts il existe $U \in \mathcal{O}, V \in \mathcal{O}$ tels que : $u \in U, v \in V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Par exemple tout espace métrique est séparé : si $u \neq v$, on pose $\rho = \frac{1}{3}d(u, v) > 0$ et on prend $U = B(u, \rho[$, $V = B(v, \rho[$.

Attention : on ne peut pas remplacer \mathcal{O} par \mathcal{F} dans cette définition !

Dès qu'un espace topologique est séparé, il y a unicité de la limite d'une suite ; mais la donnée d'une notion de convergence des suites ne suffit pas pour reconstituer la topologie en général (alors qu'on peut le faire avec les espaces métriques).

☞ **Exercice 2.1.** (très facile) Démontrez qu'une intersection infinie d'ouverts n'est pas un ouvert en général.

☞ **Exercice 2.2.** (très facile, souvent utile) Soit (E, d) un espace métrique, et soit $A \subset E$. Démontrez que A est un ouvert dans (E, d) si et seulement si A est une réunion de boules ouvertes.

☞ **Exercice 2.3.** (facile) Déterminez toutes les topologies possibles sur un ensemble à deux ou trois éléments. Examinez pour chacune si elle est séparée ou non.

☞ **Exercice 2.4.** (assez difficile) Démontrez que tout ouvert U de \mathbb{R} (muni de sa distance usuelle) est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Indication : Pour $t \in U$, considérez $[t, +\infty[\cap (\mathbb{R} \setminus U)$.

☞ **Exercice 2.5.** (facile) Soit $E = [0, 1[$. Démontrez que $\mathcal{O} = \{[0, \alpha[\mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$ définit une famille d'ouverts (et donc une topologie) sur E . Déterminez la famille \mathcal{F} des fermés. Déterminez $\text{adh}([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}])$ et $\text{int}([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}])$.

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E convergente dans \mathbb{R} usuel vers $\frac{1}{2}$: démontrez que $(t_n)_n$ converge au sens de la topologie \mathcal{O} vers tout nombre de $[\frac{1}{2}, 1[$. La topologie \mathcal{O} peut-elle être définie par une distance ?

Relativité des ouverts

Proposition 2.1.

Soit (E, d) un espace métrique, et soit (F, δ) un sous-espace métrique de (E, d) [$F \subset E$, $\delta = d|_{F \times F}$].

(i) Une partie U de F est ouverte dans (F, δ) si et seulement si il existe O une partie ouverte de (E, d) telle que : $U = O \cap F$.

(ii) Une condition nécessaire et suffisante pour que toute partie U de F ouverte dans (F, δ) soit aussi ouverte dans (E, d) est que F soit ouverte dans (E, d) .

Démonstration :

(i) Supposons que $U \subset F$ s'écrit $U = O \cap F$ avec O ouvert dans (E, d) . Démontrons que U est ouvert dans (F, δ) . Pour cela il faut démontrer que pour tout $u \in U$ il existe une boule de F , i.e. $B_F(u, \rho[= B(u, \rho[\cap F$ [voir (1.12) Chap. V] qui est contenue dans U . Soit $u \in U$: $u \in O$ ouvert dans $(E, d) \implies \exists \rho > 0$ tel que : $B(u, \rho[\subset O$; on a : $B_F(u, \rho[= B(u, \rho[\cap F \subset O \cap F = U$. ♦

Réciproquement :

soit U un ouvert de (F, δ) . $\forall u \in U, \exists \rho_u > 0 : B_F(u, \rho_u[= B(u, \rho_u[\cap F \subset U$; mais d'autre part, $U \subset \bigcup_{u \in U} B(u, \rho_u[\cap F$. Donc : $U = \bigcup_{u \in U} [B(u, \rho_u[\cap F] = O \cap F$, en posant : $O := \bigcup_{u \in U} B(u, \rho_u[$; O est ouvert dans (E, d) puisque réunion de boules ouvertes (dans (E, d)). ♦

(ii) Si tout ouvert de (F, δ) est ouvert dans (E, d) , on prend $U = F$. Réciproquement, si F est ouvert dans (E, d) et si U est ouvert dans (F, δ) , d'après (i) : $U = O \cap F$ est un ouvert de (E, d) . ♦

Notion de voisinage

Définition 2.4.

Soit (E, \mathcal{O}) un espace topologique, et soit $A \subset E$. Une partie V de E est appelée un **voisinage** de A [dans (E, \mathcal{O})] si V contient une partie ouverte [dans (E, \mathcal{O})] contenant A .

$$(2.5) \quad \boxed{V \text{ voisinage de } A \iff \exists U \in \mathcal{O} : A \subset U \subset V}$$

Si $A = \{u\}$, $u \in E$, on dit plutôt **voisinage de** u que voisinage de $\{u\}$. On peut écrire :

$$(2.6) \quad V \text{ voisinage de } u \in E \iff \exists U \in \mathcal{O} : u \in U \subset V.$$

On peut énoncer (évident) :

(2.7) Un sous-ensemble A de (E, \mathcal{O}) est ouvert $\iff A$ est un voisinage de chacun de ses points.

De sorte qu'il est équivalent de se donner la famille \mathcal{O} des ouverts d'une topologie ou bien, pour tout $u \in E$, la famille $\mathcal{V}(u)$ des voisinages de u .

De manière précise, il est facile de voir que $(\mathcal{V}(u))_{u \in E}$ possède les propriétés suivantes :

$$(2.8) \quad \forall V \in \mathcal{V}(u) : u \in V \text{ [d'où : } V \neq \emptyset],$$

$$(2.9) \quad \text{toute partie } A \text{ de } E \text{ qui contient } V \in \mathcal{V}(u) \text{ vérifie : } A \in \mathcal{V}(u),$$

$$(2.10) \quad \text{toute intersection finie d'éléments de } \mathcal{V}(u) \text{ appartient à } \mathcal{V}(u),$$

$$(2.11) \quad \forall V \in \mathcal{V}(u), \exists W \in \mathcal{V}(u) : \forall w \in W, V \in \mathcal{V}(w).$$

Les propriétés (2.8) à (2.11) sont caractéristiques : si l'on se donne *a priori* $(\mathcal{V}(u))_{u \in E}$ vérifiant (2.9) ... (2.11), il existe une topologie \mathcal{O} *unique* telle que, pour tout $u \in E$, $\mathcal{V}(u)$ est l'ensemble des voisinages du point u . Démontrez ce résultat assez facile si vous en avez envie.

Exemple 2.7. Soit A une partie d'un espace métrique (E, d) . Pour tout $\rho > 0$, les boules généralisées $B(A, \rho[$ et $B(A, \rho]$ [cf. Exemple 2.5] sont des voisinages [le premier ouvert, le second fermé] de A .

☞ **Exercice 2.6.** (facile) Etant donné un voisinage V de A , existe-t-il toujours $\rho > 0$ tel que $B(A, \rho[\subset V$?

Indication : Cherchez dans \mathbb{R}^2 euclidien.

☞ **Exercice 2.7.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique. Démontrez que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(P) Tout fermé est une intersection dénombrable d'ouverts,

(Q) Tout ouvert est une réunion dénombrable de fermés.

Démontrez ensuite que (P) est vraie.

Indication : Pour F fermé, considérez les ensembles $U_n := \bigcup_{u \in F} B(u, \frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N}^*$.

☞ **Exercice 2.8.** (très facile) Soit (E, d) un espace métrique, et soient A, B deux parties fermées non vides disjointes ($A \cap B = \emptyset$) de E .

On pose : $U_A := \{u \in E / d(u, A) < d(u, B)\}$, $U_B := \{u \in E / d(u, A) > d(u, B)\}$, $I := \{u \in E / d(u, A) = d(u, B)\}$.

Démontrez que U_A [resp. U_B] est un ouvert contenant A [resp. B] et que ces ouverts vérifient : $U_A \cap U_B = \emptyset$. Démontrez que I est un fermé.

Fin de la partie cours du Chapitre VI

CORRIGÉ DES EXERCICES
Exercice 1.1.

(1.3) $\text{int}(\emptyset) = \emptyset$ est évident, puisqu'il n'y a aucun point dans \emptyset ; $\text{int}(E) = E$ est évident puisque $\forall u \in E, \forall \rho > 0 : B(u, \rho] \subset E$. ♦

(1.4) $\text{int}(A) \subset A$ par définition même. ♦

(1.5) $u \in \text{int}(A) \iff \exists \rho > 0 : B(u, \rho] \subset A \implies B(u, \rho] \subset B \implies u \in \text{int}(B)$. ♦

(1.6) $\forall A \subset E : \text{int}(A) \subset A \implies \text{int}[\text{int}(A)] \subset \text{int}(A)$; réciproquement, soit $u \in \text{int}(A) : \exists \rho > 0 : B(u, \rho] \subset A ; B(u, \rho] \subset A \implies \text{int}(B(u, \rho]) \subset \text{int}(A)$;
 or $u \in \text{int}(B(u, \rho]) \iff \exists \sigma > 0 : B(u, \sigma] \subset B(u, \rho]$; il suffit de faire $\sigma := \rho$, et on a :
 $u \in \text{int}(B(u, \rho]) \subset \text{int}(A)$ et donc : $u \in \text{int}[\text{int}(A)]$. ♦

(1.7) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B \implies \text{int}(A \cap B) \subset \text{int}(A)$ et $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}(B)$, d'où : $\text{int}(A \cap B) \subset \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$. Inversement, si $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) = \emptyset$, c'est fini ; sinon, soit $u \in \text{int}(A) \cap \text{int}(B) : u \in \text{int}(A)$ et $u \in \text{int}(B)$, d'où : $\exists \rho > 0$ et $\exists \sigma > 0$ tels que $B(u, \rho] \subset A$ et $B(u, \sigma] \subset B$; posons $\tau := \min\{\rho, \sigma\} : B(u, \tau] \subset B(u, \rho] \subset A$ et $B(u, \tau] \subset B(u, \sigma] \subset B \implies B(u, \tau] \subset A \cap B$, et par conséquent : $u \in \text{int}(A \cap B)$. ♦

De toute manière : $\text{int}(\{u\}) \subset \{u\}$, et donc : $\text{int}(\{u\}) = \{u\}$ ou bien $\text{int}(\{u\}) = \emptyset$. Dans E discret, on a : $B(u, 1] = \{u\}$, d'où dans ce cas : $\text{int}(\{u\}) = \{u\}$. De même dans \mathbb{Z} muni de la distance induite par \mathbb{R} usuel. Par contre, dans un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$, avec $\dim(E) \geq 1$, on a pour tout $u \in E : \text{int}(\{u\}) = \emptyset$ car toute boule $B(u, \rho]$ contient une infinité de points ($\forall v \neq 0, \forall \lambda \in]-1, 1[: u + \lambda \rho \frac{v}{\|v\|} \in B(u, \rho]$), et donc ne saurait être contenue dans $\{u\}$. ♦

Par récurrence : $\text{int}(A \cap B \cap C) = \text{int}([A \cap B]) \cap C = [\text{int}(A \cap B)] \cap \text{int}(C)$ [par (1.7)]
 $= [\text{int}(A) \cap \text{int}(B)] \cap \text{int}(C)$ [par (1.7)] = $\text{int}(A) \cap \text{int}(B) \cap \text{int}(C)$. Etc. ♦

Pour une intersection infinie, posons $I_n :=]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ pour $n \geq 1$. $\forall n : \text{int}(I_n) = I_n$.
 $\bigcap_{n \geq 1} \text{int}(I_n) = \{0\}$ tandis que $\text{int}(\bigcap_{n \geq 1} I_n) = \text{int}(\{0\}) = \emptyset$.

On n'a que l'inclusion : $\text{int}(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} \text{int}(A_i)$ due à :

$\forall k \in I : \bigcap_{i \in I} A_i \subset A_k \implies \text{int}(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{k \in I} \text{int}(A_k)$. ♦

$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B \implies \text{int}(A) \subset \text{int}(A \cup B)$ et $\text{int}(B) \subset \text{int}(A \cup B)$, d'où :
 $\text{int}(A) \cup \text{int}(B) \subset \text{int}(A \cup B)$. Mais l'inclusion inverse est fautive : il suffit de prendre $A = \mathbb{Q}$,
 $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} usuel : $A \cup B = \mathbb{R} \implies \text{int}(A \cup B) = \text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, tandis que
 $\text{int}(A) = \text{int}(B) = \emptyset \implies \text{int}(A) \cup \text{int}(B) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. ♦

Exercice 1.2.

a) Soit $v \in B(u, \rho]$. On veut démontrer que v est intérieur à $B(u, \rho]$. Considérons la boule $B(v, \sigma]$ où $\sigma := \rho - d(u, v) > 0$ [dessin !]. Nous allons démontrer que $B(v, \sigma] \subset B(u, \rho]$ et nous aurons terminé. Soit $w \in B(v, \sigma]$:

$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) < d(u, v) + \sigma = d(u, v) + \rho - d(u, v) = \rho$, et donc : $w \in B(u, \rho]$. ♦

b) Par exemple, dans le sous-espace métrique \mathbb{Z} de \mathbb{R} usuel : $B(0, 1] = \{-1, 0, +1\}$ et $\text{int}(B(0, 1]) = B(0, 1]$ [voir Exemple 1.2], tandis que $B(0, 1[= \{0\}$. On a toujours l'inclusion : $B(u, \rho] \subset B(u, \rho]$ d'où : $\text{int}(B(u, \rho]) = B(u, \rho] \subset \text{int}(B(u, \rho])$ (d'après la propriété a)).

Soit toujours $B(0, 1]$ dans \mathbb{Z} induit : $d(0, +1) = 1$ et $+1$ est intérieur car $\{+1\} = B(+1, 1]$. De même, $S(0, 1) = \{-1, +1\}$, et ces deux points sont intérieurs. ♦

c) On va démontrer que dans un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ un point $v \in B(u, \rho]$ tel que $d(u, v) = \rho$ ne peut pas être un point intérieur. Soit $B(v, \sigma]$, où $\sigma < \rho$, une boule centrée en v . On va prouver qu'il existe des points w dans cette boule qui sont hors de $B(u, \rho]$. Faites une figure ! On va chercher ce(s) w sur le segment prolongeant le segment $[u, v]$ vers l'extérieur de $B(u, \rho]$. C'est, bien sûr, la structure d'e.v.n. qui nous permet de considérer ce segment. Considérons donc les points $w_\lambda := u + \lambda \cdot (v - u) = \lambda \cdot v + (1 - \lambda) \cdot u$, où « moralement » $\lambda \geq 1$; on va préciser cela avec simplement $\lambda \geq 0$ pour le moment.

$\|w_\lambda - u\| = \|u + \lambda(v - u) - u\| = \lambda\|v - u\| = \lambda\rho$; pour que w_λ soit hors de $B(u, \rho]$, il suffit que $\lambda\rho > \rho$, soit $\lambda > 1$.

A présent : $\|w_\lambda - v\| = \|\lambda v + (1 - \lambda)u - v\| = (\lambda - 1)\|u - v\| = (\lambda - 1)\rho$; si l'on veut que $w_\lambda \in B(v, \sigma]$, il faut que $(\lambda - 1)\rho < \sigma$, soit : $\lambda < 1 + \frac{\sigma}{\rho}$.

En définitive : si $\lambda \in]1, 1 + \frac{\sigma}{\rho}[$ on aura : $w_\lambda \in B(u, \rho]$ et $w_\lambda \in B(v, \sigma]$.

En conséquence, un point de $B(u, \rho]$ tel que $d(u, v) = \rho$ ne peut jamais (dans un e.v.n. !) être intérieur. Cela démontre aussi que les sphères $S(u, \rho)$ n'ont pas (dans un e.v.n.) de point intérieur. Donc les points intérieurs à $B(u, \rho]$ sont tels que $d(u, v) < \rho$, et donc appartiennent à $B(u, \rho[$: $\text{int}(B(u, \rho]) \subset B(u, \rho]$.

Comme on a, dans tout espace métrique, $B(u, \rho[\subset \text{int}(B(u, \rho])$, on a bien – dans un e.v.n. – $\text{int}(B(u, \rho]) = B(u, \rho]$. ♦

On avait déjà vérifié [Exercice 4.2 du Chap. V] que $\text{adh}(B(u, \rho]) = B(u, \rho]$ dans un e.v.n. En utilisant la formule $\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \setminus \text{int}(A)$ de l'Exercice 1.3 ci-dessous, on obtient : $\text{fr}(B(u, \rho]) = \text{adh}(B(u, \rho]) \setminus \text{int}(B(u, \rho]) = B(u, \rho] \setminus B(u, \rho]$, et, de même : $\text{fr}(B(u, \rho]) = \text{adh}(B(u, \rho]) \setminus \text{int}(B(u, \rho]) = B(u, \rho] \setminus B(u, \rho]$;

or $v \in B(u, \rho] \setminus B(u, \rho[\iff [d(u, v) \leq \rho \text{ et } d(u, v) \geq \rho] \iff d(u, v) = \rho$
 $\iff v \in S(u, \rho)$.

Finalement, dans un e.v.n. : $\text{fr}(B(u, \rho]) = \text{fr}(B(u, \rho]) = S(u, \rho)$. ♦

🔗 **Exercice 1.3.**

Soit $u \in E$: ou bien $u \in \text{int}(A) \cup \text{int}(E \setminus A)$, ou bien

$$\begin{aligned} u \in \mathbf{C}_E[\text{int}(A) \cup \text{int}(E \setminus A)] &= \mathbf{C}_E \text{int}(A) \cap \mathbf{C}_E \text{int}(E \setminus A) \\ &= \text{adh}[\mathbf{C}_E(A)] \cap \text{adh}[\mathbf{C}_E(E \setminus A)] = \text{adh}[\mathbf{C}_E A] \cap \text{adh}[E \setminus (E \setminus A)] \\ &= \text{adh}(E \setminus A) \cap \text{adh}(A) = \text{fr}(A). \end{aligned}$$

Les trois ensembles sont évidemment disjoints deux à deux : A et $E \setminus A$ sont disjoints, *a fortiori* $\text{int}(A)$ et $\text{int}(E \setminus A)$; montrons, par exemple, que $\text{int}(A) \cap \text{fr}(A) = \emptyset$:

$$\text{int}(A) \cap \text{fr}(A) = \text{int}(A) \cap \text{adh}(A) \cap \text{adh}(E \setminus A) = \text{int}(A) \cap \mathbf{C}_E \text{int}(A) = \emptyset.$$

Ensuite :

$$\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(E \setminus A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(\mathbf{C}_E A) = \text{adh}(A) \cap \mathbf{C}_E \text{int}(A),$$

mais $\text{int}(A) \subset \text{adh}(A)$, d'où :

$$\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \mathbf{C}_{\text{adh}(A)} \text{int}(A) = \text{adh}(A) \setminus \text{int}(A). \quad \blacklozenge$$

🔗 **Exercice 1.4.**

$$A = [0, 1[\cup]1, 2] \cup \{3\} \cup (\mathbb{Q} \cap [4, 5]) ;$$

$$\text{adh}(A) = [0, 1] \cup [1, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5] = [0, 2] \cup \{3\} \cup [4, 5] ;$$

$$\text{int}(A) =]0, 1[\cup]1, 2[; \text{int}[\text{adh}(A)] =]0, 2[\cup [4, 5[;$$

$$\text{adh}[\text{int}(A)] = [0, 1] \cup [1, 2] = [0, 2] ; \text{adh}\{\text{int}[\text{adh}(A)]\} = [0, 2] \cup [4, 5] ; \text{int}\{\text{adh}[\text{int}(A)]\} =]0, 2[.$$

$$\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, 0[\cup \{1\} \cup]2, 3[\cup]3, 4[\cup [(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [4, 5]] \cup]5, +\infty[$$

$$\text{adh}(\mathbb{R} \setminus A) =]-\infty, 0[\cup \{1\} \cup [2, 3] \cup [3, 4] \cup [4, 5] \cup [5, +\infty[=]-\infty, 0[\cup \{1\} \cup [2, +\infty[,$$

$$\text{et donc : fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(\mathbb{R} \setminus A) = \{0, 1, 2, 3\} \cup [4, 5] ;$$

$$\mathbb{R} \setminus \text{adh}(A) =]-\infty, 0[\cup]2, 3[\cup]3, 4[\cup]5, +\infty[, \text{ d'où :}$$

$$\text{adh}[\mathbb{R} \setminus \text{adh}(A)] =]-\infty, 0[\cup [2, 3] \cup [3, 4] \cup [5, +\infty[=]-\infty, 0[\cup [2, 4] \cup [5, +\infty[;$$

$$\text{d'où : fr}[\text{adh}(A)] = \{0, 2, 3, 4, 5\} ; \text{fr}[\text{int}(A)] = \{0, 1, 2\} ; \text{int}[\text{fr}(A)] =]4, 5[;$$

$$\text{fr}\{\text{int}[\text{adh}(A)]\} = \{0, 2, 4, 5\} ; \text{fr}\{\text{adh}[\text{int}(A)]\} = \{0, 2\} ; \text{adh}\{\text{int}[\text{fr}(A)]\} = [4, 5] ;$$

$$\text{fr}[\text{fr}(A)] = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} ; \text{fr}\{\text{int}[\text{fr}(A)]\} = \{4, 5\}. \quad \blacklozenge$$

Remarque : Il est plus amusant de considérer un ensemble analogue à A dans $\mathbb{R}^2 \dots$ (cf. p.128)

🔗 **Exercice 1.5.**

$$\text{fr}(A \cup B) = \text{adh}(A \cup B) \cap \text{adh}(\mathbf{C}_E(A \cup B)) = [\text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)] \cap \text{adh}[\mathbf{C}_E A \cap \mathbf{C}_E B],$$

mais : $\text{adh}(X \cap Y) \subset \text{adh}(X) \cap \text{adh}(Y)$ [Exercice 1.2 du Chap. V], d'où :

$$\begin{aligned} \text{fr}(A \cup B) &\subset [\text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)] \cap [\text{adh}(\mathbf{C}_E A) \cap \text{adh}(\mathbf{C}_E B)] \\ &\subset [\text{adh}(A) \cap \text{adh}(\mathbf{C}_E A) \cap \text{adh}(\mathbf{C}_E B)] \cup [\text{adh}(B) \cap \text{adh}(\mathbf{C}_E A) \cap \text{adh}(\mathbf{C}_E B)] \\ &\subset [\text{fr}(A) \cap \text{adh}(\mathbf{C}_E B)] \cup [\text{fr}(B) \cap \text{adh}(\mathbf{C}_E A)] \subset \text{fr}(A) \cup \text{fr}(B) \end{aligned}$$

car $\text{fr}(A) \cap \text{adh}(\mathbf{C}_E B) \subset \text{fr}(A)$ et $\text{fr}(B) \cap \text{adh}(\mathbf{C}_E A) \subset \text{fr}(B)$. ♦

L'inclusion inverse n'a pas lieu en général.

Prenons $A := \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ et $B := (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ dans \mathbb{R} usuel.

$A \cup B = [0, 1] \implies \text{fr}(A \cup B) = \{0, 1\}$. $\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \setminus \text{int}(A) = [0, 1] \setminus \emptyset = [0, 1]$, de même pour $\text{fr}(B)$, et donc $\text{fr}(A) \cup \text{fr}(B) = [0, 1]$. ♦

Sous la condition $\text{adh}(A) \cap \text{adh}(B) = \emptyset$ [qui signifie que A et B sont *fortement disjoints*], prouvons l'égalité $\text{fr}(A \cup B) = \text{fr}(A) \cup \text{fr}(B)$, i.e., eu égard à ce qui précède : $\text{fr}(A) \cup \text{fr}(B) \subset \text{fr}(A \cup B) \iff [\text{fr}(A) \subset \text{fr}(A \cup B) \text{ et } \text{fr}(B) \subset \text{fr}(A \cup B)]$.

Prouvons que $\text{fr}(A) \subset \text{fr}(A \cup B)$.

Si $\text{fr}(A) = \emptyset$, c'est terminé.

Sinon, soit $u \in \text{fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(E \setminus A)$. $u \in \text{adh}(A) \implies u \in \text{adh}(A \cup B)$.

Si $u \notin \text{int}(A \cup B)$, c'est terminé, car $u \in \text{adh}(A \cup B) \setminus \text{int}(A \cup B) = \text{fr}(A \cup B)$.

Supposons donc que $u \in \text{int}(A \cup B)$:

$\exists \rho > 0$ tel que $B(u, \rho] \subset A \cup B$. $u \in \text{adh}(A) \implies u \notin \text{adh}(B)$ [par hypothèse], donc $\exists \sigma > 0 : B(u, \sigma] \cap B = \emptyset$.

Considérons la boule $B(u, \min\{\rho, \sigma\}[$; soit $v \in B(u, \min\{\rho, \sigma\}[$:

$v \in A \cup B$ et $v \notin B \implies v \in A \implies v \notin \mathbb{C}_E A$.

Donc $B(u, \min\{\rho, \sigma\}[\cap \mathbb{C}_E A = \emptyset$ et $u \notin \text{adh}(\mathbb{C}_E A)$, ce qui est une contradiction puisque $u \in \text{fr}(A)$. Donc $u \in \text{int}(A \cup B)$ est impossible, et la démonstration est terminée. ♦

📌 **Exercice 1.6.**

1) Il suffit de s'occuper de $\lambda \in]0, 1[$. Soit $w_\lambda := \lambda u + (1 - \lambda)v$ avec $u \in \text{int}(C)$ et $v \in \text{adh}(C)$. Nous allons démontrer que w_λ appartient à une boule B contenue dans C . $u \in \text{int}(C) \implies \exists \rho > 0 : B(u, \rho] \subset C$; $v \in \text{adh}(C) \implies \exists v' \in C \cap B(v, \frac{\lambda \rho}{1-\lambda}[$.

On considère la boule $B := B(\lambda u + (1 - \lambda)v', \lambda \rho]$.

$$\|w_\lambda - \lambda u - (1 - \lambda)v'\| = \|\lambda u + (1 - \lambda)v - \lambda u - (1 - \lambda)v'\| = (1 - \lambda)\|v - v'\| < (1 - \lambda)\frac{\lambda \rho}{1 - \lambda} = \lambda \rho,$$

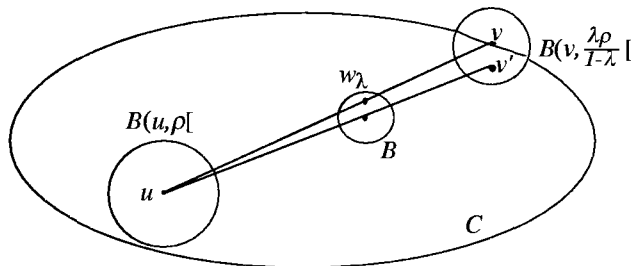
d'où : $w_\lambda \in B(\lambda u + (1 - \lambda)v', \lambda \rho] =: B$.

Démontrons que $B \subset C$. Soit $x \in B$:

$$\|x - \lambda u - (1 - \lambda)v'\| < \lambda \rho \implies \|\frac{1}{\lambda}[x - (1 - \lambda)v'] - u\| < \rho, \text{ d'où : } \frac{1}{\lambda}[x - (1 - \lambda)v'] \in B(u, \rho] \subset C.$$

Posons : $c := \frac{1}{\lambda}[x - (1 - \lambda)v'] \in C$:

$x - (1 - \lambda)v' = \lambda c \implies x = \lambda c + (1 - \lambda)v' \implies x \in C$ car $v' \in C, c \in C, \lambda \in]0, 1[$ et C est convexe. Donc $B \subset C$ et $w_\lambda \in \text{int}(C)$. ♦



Remarques :

1) Les rayons des boules sont à déterminer en prenant *a priori* des rayons inconnus et en écrivant les inégalités qu'on veut obtenir. Un dessin aide beaucoup . . .

2) On peut aussi procéder en deux étapes :

— prouver d'abord le résultat pour $v \in C$;

— prendre $v \in \text{adh}(C)$, choisir $v' \in C$ comme ci-dessus, appliquer la première étape à v' .

2) Soient $u, v \in \text{adh}(C)$ et soit $\lambda \in]0, 1[$. On peut écrire $u = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)_n$ et $v = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)_n$, où $u_n, v_n \in C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque C est convexe,

$\lambda u_n + (1 - \lambda)v_n \in C$ pour tout n et $\lim_{n \rightarrow \infty} [\lambda u_n + (1 - \lambda)v_n] = \lambda u + (1 - \lambda)v$, d'où :

$\lambda u + (1 - \lambda)v \in \text{adh}(C)$ et $\text{adh}(C)$ est convexe. ♦

Soient $u, v \in \text{int}(C)$: on a vu dans 1) que pour tout $\lambda \in]0, 1[$ on a :

$\lambda u + (1 - \lambda)v \in \text{int}(C)$. Donc $\text{int}(C)$ est convexe (le résultat est trivial si $\text{int}(C) = \emptyset$). ♦

3) On suppose que $\text{int}(C) \neq \emptyset$.

a) Démontrons que $\text{adh}(C) = \text{adh}[\text{int}(C)]$.

$\text{int}(C) \subset C \implies \text{adh}[\text{int}(C)] \subset \text{adh}(C)$. Soit $u \in \text{adh}(C)$. Choisissons un point $v \in \text{int}(C)$.

Considérons la suite $u_n = \frac{1}{n}v + (1 - \frac{1}{n})u$. D'après 1) : $u_n \in \text{int}(C)$ pour tout n et on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$, d'où $u \in \text{adh}[\text{int}(C)]$. ♦

Si $\text{int}(C) = \emptyset$, la formule est fautive : $\text{adh}(\{u\}) = \{u\}$, mais $\text{adh}[\text{int}(\{u\})] = \text{adh}(\emptyset) = \emptyset$.

b) Démontrons que $\text{int}(C) = \text{int}[\text{adh}(C)]$.
 $C \subset \text{adh}(C) \implies \text{int}(C) \subset \text{int}[\text{adh}(C)]$. Il nous faut démontrer que :
 $u \in \text{int}[\text{adh}(C)] \implies u \in \text{int}(C)$.
 Soit $u \in \text{int}[\text{adh}(C)] : \exists \rho > 0$ tel que $B(u, \rho] \subset \text{adh}(C)$. $u \in \text{adh}(C)$ et $\text{int}(C) \neq \emptyset \implies \text{adh}[\text{int}(C)] = \text{adh}(C)$ d'après a) ; d'où : $u \in \text{adh}[\text{int}(C)]$; on en déduit qu'il existe $v \in B(u, \rho] \cap \text{int}(C)$. $v \in B(u, \rho] \implies 2v - v \in B(u, \rho]$ (car $\|2v - v - u\| = \|u - v\| < \rho$; [dessin !]).
 Écrivons : $u = \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}(2u - v) : v \in \text{int}(C), 2u - v \in B(u, \rho] \subset \text{adh}(C)$, donc, d'après 1) : $u \in \text{int}(C)$. ♦

☞ **Exercice 1.7. Principe du maximum pour les fonctions convexes.**

On raisonne par contradiction. Si f n'est pas constante sur C , il existe $w \in C$ tel que $f(w) < f(\hat{u})$. Puisque $\hat{u} \in \text{int}(C)$, soit $B(\hat{u}, \rho] \subset C$. Écrivons : $\hat{u} := \lambda w + (1 - \lambda)v$ pour $\lambda \in]0, 1[$, où $v \in E$ a priori.

$\|v - \hat{u}\| = \|(\hat{u} - \frac{\lambda w}{1-\lambda}) - \hat{u}\| = \frac{1}{1-\lambda}\|\hat{u} - \lambda w - \hat{u} + \lambda \hat{u}\| = \frac{\lambda}{1-\lambda}\|\hat{u} - w\| < \rho$ pour $0 < \lambda < \frac{\rho}{\rho + \|u-w\|} < 1$ (*). Donc $v \in B(\hat{u}, \rho] \subset C$ pour λ assez petit pour vérifier l'inégalité

(*). Pour un tel λ , et le v correspondant, on a :
 $f(\hat{u}) = f[\lambda w + (1 - \lambda)v] \leq \lambda f(w) + (1 - \lambda)f(v) < \lambda f(\hat{u}) + (1 - \lambda)f(\hat{u}) = f(\hat{u})$
 contradiction. Donc f est constante sur C . ♦

Le *maximum*, s'il existe, d'une fonction convexe a tendance à se trouver sur la frontière de son domaine de définition.

Cela ne facilite pas sa recherche (pas de dérivabilité en un point frontière . . .).

☞ **Exercice 2.1.**

Dans \mathbb{R} usuel, $A_n =] - \frac{1}{n}, +\frac{1}{n}[$, $n \in \mathbb{N}^*$, est ouvert pour tout n , mais : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \{0\}$ et $\text{int}(\{0\}) = \emptyset$. Une intersection infinie (même dénombrable) d'ouverts n'est pas un ouvert en général. ♦

☞ **Exercice 2.2.**

Supposons que $A = \bigcup_{i \in I} B(u_i, \rho_i]$, I ensemble arbitraire, $u_i \in E$, $\rho_i > 0$. On sait que toute boule ouverte est ouverte dans E [Ex. 1.2] et que toute réunion d'ouverts est ouverte [Th. 2.2]. Donc A est un ouvert. ♦

Réciproquement, soit A une partie ouverte de (E, d) . Pour tout $a \in A$, on peut considérer une boule ouverte $B(a, \rho_a]$, où ρ_a réel > 0 , telle que $B(a, \rho_a] \subset A$ (car A ouvert). Démontrons que $A = \bigcup_{a \in A} B(a, \rho_a]$ et nous aurons terminé. En effet, $A \subset \bigcup_{a \in A} B(a, \rho_a]$ de manière évidente et, inversement : soit $b \in \bigcup_{a \in A} B(a, \rho_a]$, on a : $\exists a_0 \in A$ tel que $b \in B(a_0, \rho_{a_0}] \subset A$. d'où $b \in A$ et le résultat. ♦

☞ **Exercice 2.3.**

Soit $E = \{a, b\}$.

Les topologies possibles sur E sont, tout d'abord la topologie grossière $\mathcal{O}_g = \{\emptyset, E\}$, qui n'est pas séparée, et la topologie discrète $\mathcal{O}_d = 2^E = \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, E\}$ qui est séparée. On a ensuite deux topologies : $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{a\}, E\}$ et $\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{b\}, E\}$ qui auront manifestement des propriétés identiques, au nom des ouverts près ; elles ne sont pas séparées. Il y a donc quatre topologies possibles, dont une seule est séparée. ♦

Soit maintenant $E = \{a, b, c\}$.

La situation se complique, et il faut trouver une méthode systématique de recherche si l'on ne veut pas oublier quelques topologies en route . . . On aura de toute manière $\mathcal{O}_g = \{\emptyset, E\}$ et $\mathcal{O}_d = 2^E = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$.

Dans \mathcal{O}_d il y a – outre les inévitables \emptyset et E – trois singletons (= S) et trois doubletons (= D). On n'a qu'à examiner tous les cas : $0S$ et $0D$, $0S$ et $1D$, . . . , $0S$ et $3D$, puis $1S$ et $0D$, . . . , $1S$ et $3D$, etc. jusqu'à $3S$ et $3D$.

- $0S$ et $0D$: on trouve $\mathcal{O}_g = \{\emptyset, E\}$ non séparée.
- $0S$ et $1D$: $\mathcal{O}_1 = \{\emptyset, \{a, b\}, E\}$, $\mathcal{O}_2 = \{\emptyset, \{a, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_3 = \{\emptyset, \{b, c\}, E\}$ non séparées.
- $0S$ et $2D$: pas de topologie de ce type car l'intersection de deux D donne un S .

- $0S$ et $3D$: même situation que dans le cas précédent.
- $1S$ et $0D$: $\mathcal{O}_4 = \{\emptyset, \{a\}, E\}$, $\mathcal{O}_5 = \{\emptyset, \{b\}, E\}$, $\mathcal{O}_6 = \{\emptyset, \{c\}, E\}$ non séparées.
- $1S$ et $1D$: $\mathcal{O}_7 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, E\}$, $\mathcal{O}_8 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_9 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{10} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, E\}$, $\mathcal{O}_{11} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{12} = \{\emptyset, \{b\}, \{b, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{13} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, b\}, E\}$, $\mathcal{O}_{14} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{15} = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}, E\}$, non séparées.
- $1S$ et $2D$: $\mathcal{O}_{16} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{17} = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{18} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$, non séparées.
- $1S$ et $3D$: impossible car l'intersection des $3D$ deux à deux donne les $3S$.
- $2S$ et $0D$: impossible car la réunion des S donne un D .
- $2S$ et $1D$: $\mathcal{O}_{19} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, E\}$, $\mathcal{O}_{20} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{21} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}, E\}$, non séparées.
- $2S$ et $2D$: $\mathcal{O}_{22} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{23} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{24} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{25} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{26} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, E\}$, $\mathcal{O}_{27} = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$, non séparées.
- $2S$ et $3D$: impossible car l'intersection des $3D$ deux à deux donne $3S$.
- $3S$ et $0D$: impossible (non stable par réunion).
- $3S$ et $1D$: impossible (réunion).
- $3S$ et $2D$: impossible (réunion).
- $3S$ et $3D$: $\mathcal{O}_d = 2^E$.

On trouve en tout 29 topologies possibles, et si l'on regroupe les topologies qui ne diffèrent que par le nom des éléments, on trouve 8 types de topologies véritablement distinctes. L'auteur ignore si l'on dispose d'une formule donnant le nombre de topologies possibles sur un ensemble de n éléments (?). Il semble que non. ♦

Exercice 2.4.

Soit U une partie ouverte non vide de \mathbb{R} muni de sa distance usuelle. Soit $t \in U$: considérons l'ensemble $[t, +\infty[\cap (\mathbb{R} \setminus U)$. Si cette intersection est vide, c'est que $[t, +\infty[\subset U$. Si $[t, +\infty[\cap (\mathbb{R} \setminus U) \neq \emptyset$, cet ensemble minoré par t a une borne inférieure λ . Si $\lambda \in U$: $\exists \rho > 0$ tel que $]\lambda - \rho, \lambda + \rho[\subset U$, puisque U est ouvert. Mais, par définition de la borne inférieure, dans l'intervalle $]\lambda, \lambda + \varepsilon[$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des éléments de $\mathbb{R} \setminus U$, d'où une contradiction, et nécessairement $\lambda \in \mathbb{R} \setminus U$. On peut donc écrire : $[t, \lambda[\subset U$ avec $\lambda \notin U$.

De la même manière, on peut envisager $]-\infty, t] \cap (\mathbb{R} \setminus U)$: ou bien $]-\infty, t] \subset U$, ou bien il existe μ tel que $]\mu, t] \subset U$ avec $\mu \notin U$.

Par conséquent, U contient l'intervalle $]\mu, \lambda[$ (ouvert), et tout point de U est $< \mu$ ou $> \lambda$. Donc, tout point de U appartient à un intervalle ouvert contenu dans U , disjoint de toute autre partie de U (cet intervalle peut être de la forme $]-\infty, \alpha[$, ou $]\beta, +\infty[$ ou encore $]-\infty, +\infty[$). On en déduit que U est une réunion d'intervalles ouverts et deux à deux disjoints.

A l'intérieur de chaque intervalle, on peut faire choix d'un rationnel et un seul. Si la réunion n'était pas dénombrable, on obtiendrait ainsi un ensemble non dénombrable de rationnels distincts, ce qui est impossible. ♦

Exercice 2.5.

$[0, 0[= \emptyset$ et $[0, 1[= E$ sont dans \mathcal{O} . Soit $[0, \alpha_i[$, $i \in I$ arbitraire, $0 \leq \alpha_i \leq 1$, une famille d'ouverts : $\bigcup_{i \in I} [0, \alpha_i[$ est bien de la forme $[0, \alpha[$ avec $0 \leq \alpha \leq 1$, $\alpha := \sup_{i \in I} \{\alpha_i / i \in I\}$, et donc appartient à \mathcal{O} (par exemple $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [0, 1 - \frac{1}{n}[= [0, 1[= E$).

Soient $[0, \alpha_1], \dots, [0, \alpha_n[$ des ouverts : $\bigcap_{1 \leq i \leq n} [0, \alpha_i[= [0, \alpha[$, où $\alpha := \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, appartient à \mathcal{O} .

Remarque : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} [0, \frac{1}{n}[= \{0\}$ n'est pas dans \mathcal{O} . La famille des fermés est donnée par : $\mathcal{F} = \{[\beta, 1[/ 0 \leq \beta \leq 1\}$. ♦

Déterminons $\text{adh}(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. On a : $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}] \subset \text{adh}([\frac{1}{4}, \frac{1}{4}])$. Soit $t \in [0, \frac{1}{4}[$: un ouvert contenant t est de la forme $[0, \alpha[$ avec $\alpha > t$; pour $t < \alpha < \frac{1}{4}$, on a des ouverts qui contiennent t et qui ne coupent pas $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$: ces points ne sont pas adhérents à $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Si, par contre, $t > \frac{3}{4}$, un ouvert $[0, \alpha[$ qui contient t non seulement coupe mais contient $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, ces points sont donc adhérents. L'adhérence de $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$ est par conséquent l'intervalle $[\frac{1}{4}, 1[$.

Soit à présent $t \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$: il est bien clair qu'on ne peut pas trouver un ouvert $[0, \alpha[$ contenant t et contenu dans $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Donc : $\text{int}([\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]) = \emptyset$. ♦

On a : $\lim(t_n)_n = t$ (pour \mathcal{O}) \iff pour tout ouvert U contenant t , $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies t_n \in U$.

Soit $t \in [\frac{1}{2}, 1]$, et soit $[0, t + \varepsilon[$, $\varepsilon > 0$, un ouvert qui contient t . Comme $\lim(t_n) = \frac{1}{2}$ au sens de \mathbb{R} usuel, on a bien $t_n \in [0, t + \varepsilon[$ pour tout n assez grand. D'où le résultat.

La topologie \mathcal{O} ne peut pas être la famille des ouverts associée à une distance, car, sinon, il y aurait unicité de la limite. ♦

Exercice 2.6.

Dans \mathbb{R}^2 euclidien, considérons :

$$A := \{(s, 0) / s \in \mathbb{R}\} \text{ et } V = \{(s, t) / s \in \mathbb{R}, -e^{-|s|} < t < e^{-|s|}\}.$$

A est un fermé de \mathbb{R}^2 ; V est un ouvert contenant A : V est donc un voisinage de A . Il n'existe pas de boule généralisée $B(A, \rho]$ telle que $A \subset B(A, \rho] \subset V$.

En effet, $B(A, \rho] = \{(s, t) / s \in \mathbb{R}, |t| < \rho\}$. $\forall \rho > 0 : B(A, \rho] \cap (\mathbb{R}^2 \setminus V) \neq \emptyset$, car si $s > 0$ (par exemple) : $\rho > e^{-s} \iff -s < \ln \rho \iff s > -\ln \rho = \ln(\frac{1}{\rho})$. ♦

Exercice 2.7.

Supposons (P) vraie, et soit U un ouvert. $E \setminus U$ est un fermé, et donc : $E \setminus U = \bigcap_{n \geq 1} U_n$ où les U_n sont des ouverts. Donc :

$$E \setminus (E \setminus U) = U = \bigcup_{n \geq 1} (E \setminus U_n) = \bigcup_{n \geq 1} F_n,$$

en posant $F_n := E \setminus U_n$ qui est fermé puisque U_n est ouvert ; on a donc (Q).

De manière exactement analogue, (Q) \implies (P). ♦

Démontrons que (P) est vraie.

Soit F un fermé ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $U_n := \bigcup_{u \in F} B(u, \frac{1}{n})$. Les U_n sont des ouverts comme réunion de boules ouvertes, donc d'ouverts. On va démontrer que $F = \bigcap_{n \geq 1} U_n$ et on aura terminé.

Il est évident que $\bigcap_{n \geq 1} U_n = \bigcap_{n \geq 1} (\bigcup_{u \in F} B(u, \frac{1}{n})) \supset F$ car toutes les réunions contiennent F . Il ne nous reste plus qu'à démontrer l'inclusion inverse.

Soit $v \in \bigcap_{n \geq 1} U_n$: on a donc, par définition de \cap , $v \in U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^* : v \in \bigcup_{u \in F} B(u, \frac{1}{n})$, ce qui implique, par définition de \cup que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donné, il existe $u = u_n \in F$ tel que $v \in B(u_n, \frac{1}{n})$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n \in F$ tel que $d(v, u_n) < \frac{1}{n}$. Par conséquent, il existe une suite $(u_n)_n$ de points de F telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = v$: c'est dire que $v \in \text{adh}(F)$, i.e. $v \in F$ puisque F est fermé. ♦

Exercice 2.8.

Soit $u \in U_A : d(u, A) < d(u, B)$; si u appartenait également à U_B , on devrait avoir aussi $d(u, A) > d(u, B)$, ce qui est contradictoire ; donc : $U_A \cap U_B = \emptyset$.

Démontrons que $A \subset U_A$: si $u \in A$, on a $d(u, A) = 0$, et - d'autre part - $d(u, B) > 0$ car $d(u, B) = 0 \iff u \in \text{adh}(B) = B$ car B fermé, or $A \cap B = \emptyset$, d'où $u \notin B$.

Donc $d(u, A) = 0 < d(u, B) \implies u \in U_A$. De la même façon, $B \subset U_B$. ♦

Pour démontrer que U_A est ouvert, le plus commode semble être de démontrer que $V_A = E \setminus U_A$ est fermé. Soit donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de V_A , convergente de limite u .

Il nous faut prouver que $u \in V_A$. On a : $V_A = \{v \in E / d(v, A) \geq d(v, B)\}$, donc : $d(u_n, A) \geq d(u_n, B)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'inégalité $\forall x, y \in E : |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$ [(3.9) Chap. I], nous permet d'affirmer que $|d(u_n, A) - d(u, A)| \leq d(u, u_n)$, et donc que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, A) = d(u, A)$; de même :

$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, B) = d(u, B)$. D'où, puisque les inégalités larges se conservent à la limite : $d(u, A) \geq d(u, B)$, i.e. $u \in V_A$. ♦

Le fait que I est fermé se démontre de la même façon (conservation des égalités à la limite).

On vient donc de prouver que - dans un espace métrique quelconque - deux fermés A, B disjoints peuvent être inclus dans deux ouverts $A \subset U_A$ et $B \subset U_B$ disjoints.

Si $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$, on retrouve le fait qu'un espace métrique est séparé ; mais la propriété de séparation des fermés disjoints démontrée ici est plus puissante que la séparation ordinaire.

PROBLÈME 1
Boules généralisées

Soit (E, d) un espace métrique, et soit $A \neq \emptyset$ une partie quelconque de E . On a déjà introduit les notions de boules généralisées [Chap. I (3.16), et Exemple (2.5) du présent Chapitre] : pour tout $\rho > 0$, $B(A, \rho[:= \{u \in E / d(u, A) < \rho\}$ est un ouvert, et $B(A, \rho] := \{u \in E / d(u, A) \leq \rho\}$ est un fermé.

1) Démontrez que $B(A, \rho[= B(\text{adh}(A), \rho[$ et que $B(A, \rho] = B(\text{adh}(A), \rho]$.

Démontrez que $B(A, \rho[= \bigcup_{a \in A} B(a, \rho[$ et que $\text{adh}(A) = \bigcap_{0 < \rho < \infty} B(A, \rho[$.

Pour bien vous rendre compte de la signification de $B(A, \rho[$, $B(A, \rho]$, dessinez dans \mathbb{R}^2 euclidien : $B(A, \frac{1}{4}[$ pour $A = B_2(0, 1]$, puis $A = B_\infty(0, 1]$. Dans \mathbb{R}^2 muni de $\|\cdot\|_\infty$, dessinez $B(A, \frac{1}{4}[$ pour $A = B_1(0, 1]$. Aucune démonstration n'est demandée, les dessins suffisent.

2) On suppose dans cette question que (E, d) est un e.v.n. réel $(E, \|\cdot\|)$. Démontrez que $B(A, \rho] = \text{adh}(A + \rho \cdot B(0, 1]) = \text{adh}(\bigcup_{a \in A} B(a, \rho])$. Vérifiez que l'égalité est fautive dans un espace métrique quelconque. Démontrez que dans un e.v.n. on a : $B(A, \rho] = \text{adh}(B(A, \rho])$, mais que cette égalité est fautive dans un espace métrique quelconque.

Soit $\varphi \in (E', \|\cdot\|')$. Démontrez que $\sup_{u \in B(A, \rho]} \varphi(u) = \sup_{u \in A} \varphi(u) + \rho \|\varphi\|'$ [Cette question est à faire après le Chap. X].

3) Soit $F \neq \emptyset$ une partie fermée de E , et soient $u \in E$, $\rho > 0$ tels que : $F \cap B(u, \rho] = \emptyset$. Démontrez que : $d(u, F) \leq d(F, B(u, \rho]) + \rho$. Démontrez qu'on n'a pas en général égalité (exemple dans un sous-espace métrique simple de \mathbb{R} usuel). Démontrez qu'on a égalité si (E, d) est un e.v.n. réel $(E, \|\cdot\|)$.

4) Dans (E, d) soient $A \neq \emptyset$ une partie de E , $F \neq \emptyset$ une partie fermée, et $\rho > 0$. On suppose que $d(F, B(A, \rho]) \geq d(A, F) - \rho$. Démontrez qu'on a égalité si (E, d) est un e.v.n. réel.

5) [A faire après l'étude du Chap. XIV] Soit $A \neq \emptyset$ une partie compacte de (E, d) , et soit U un ouvert de E contenant A . Démontrez qu'il existe $\rho > 0$ tel que $B(A, \rho[\subset U$. On suppose que l'espace métrique (E, d) vérifie la propriété suivante : pour tout $u \in E$, il existe un voisinage compact de u . Démontrez qu'il existe $\rho > 0$ tel que $B(A, \rho[\subset U$ et $B(A, \rho]$ a son adhérence compacte.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 1

1) Il suffit de se souvenir que [Chap. I (3.14)] : $d(u, A) = d(u, \text{adh}(A))$; on a donc : $B(A, \rho[= B(\text{adh}(A), \rho[$ et $B(A, \rho] = B(\text{adh}(A), \rho]$. ♦

Soit $v \in \bigcup_{a \in A} B(a, \rho[$: $\exists b \in A$ tel que $v \in B(b, \rho[$, donc $d(v, b) < \rho \implies d(v, A) \leq d(v, b) < \rho$, donc : $v \in B(A, \rho[$. ♦

Soit $v \in B(A, \rho]$: $d(v, A) < \rho$. Écrivons que $d(v, A) := \rho - \alpha$, où $0 < \alpha < \rho$. Par définition de la borne inférieure, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a_\varepsilon \in A$: $\rho - \alpha \leq d(v, a_\varepsilon) < \rho - \alpha + \varepsilon$; on fait $\varepsilon = \alpha$: $\exists b_\alpha \in A$: $\rho - \alpha \leq d(v, b_\alpha) < \rho - \alpha + \alpha = \rho$. Donc il existe $b_\alpha \in A$ tel que $d(v, b_\alpha) < \rho$, ce qui s'écrit $v \in B(b_\alpha, \rho[$. Par conséquent $v \in B(b_\alpha, \rho[\subset \bigcup_{a \in A} B(a, \rho[$. ♦

Si l'on ne savait pas déjà que $B(A, \rho[$ est ouverte, la formule démontrée ci-dessus nous permettrait de le dire, puisque $B(A, \rho[$ s'écrit comme une réunion de boules ouvertes (lesquelles sont des ouverts).

Pour prouver que $B(A, \rho[$ est ouvert, on peut également démontrer que

$E \setminus B(A, \rho[= \{u \in E / d(u, A) \geq \rho\}$ est un fermé (en termes de suites). ♦

Soit $u \in \text{adh}(A)$: pour tout $\rho > 0$, il existe $v_\rho \in B(u, \rho[\cap A$, donc $d(u, v_\rho) < \rho$, avec $v_\rho \in A \implies d(u, A) \leq d(u, v_\rho) < \rho \implies u \in B(A, \rho[$. Cela est vrai pour tout $\rho > 0$, et donc : $u \in \bigcap_{\rho \in]0, \infty[} B(A, \rho[$. ♦

Réciproquement, soit $u \in \bigcap_{\rho \in]0, \infty[} B(A, \rho[$; $\forall \rho > 0 : d(u, A) < \rho$, d'où $d(u, A) = 0$ et $u \in \text{adh}(A)$ [(3.10) Chap. I]. ♦

On aurait pu aussi démontrer que $B(u, \rho[\cap A \neq \emptyset$ pour tout $\rho > 0$: pour $\rho > 0$ fixé, il existe (voir plus haut) $a = a_\rho \in A$ tel que $u \in B(a, \rho[$; $a_\rho \in B(u, \rho[$ et donc $a_\rho \in A \cap B(u, \rho[\neq \emptyset$.

Exemples de boules généralisées [faites les dessins !]. $A =$ boule unité euclidienne et norme euclidienne : $B(A, \frac{1}{4}[$ est la boule euclidienne de rayon $(1 + \frac{1}{4})$. $A =$ boule unité (carrée) de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et norme euclidienne : $B(A, \frac{1}{4}[$ est un carré plus grand (boule ∞ de rayon $\frac{5}{4}$) mais « arrondi » aux quatre coins (quart de cercle de rayon $\frac{1}{4}$). Si A est la boule unité de $\|\cdot\|_1$ et si la norme est $\|\cdot\|_\infty$, $B(A, \frac{1}{4}[$ est le carré de $\|\cdot\|_1$ de rayon $1 + \frac{1}{4}$, avec les quatre coins « cassés ».

Le principe est de faire promener la boule de la norme considérée, de rayon $\frac{1}{4}$, sur le pourtour de A pour obtenir le pourtour de $B(A, \frac{1}{4}[$. Inventez d'autres exemples !

2) Démontrons que $B(A, \rho] = \text{adh}(A + \rho B(0, 1])$.

$u \in B(A, \rho] \iff d(u, A) \leq \rho$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a = a_\varepsilon \in A$ tel que $d(u, A) \leq \|u - a\| \leq d(u, A) + \varepsilon \leq \rho + \varepsilon$. on a : $\|\frac{u-a}{\rho+\varepsilon}\| \leq 1$, et donc il existe $v \in B(0, 1]$ tel que $v = \frac{u-a}{\rho+\varepsilon}$ (v dépend de ε), soit : $u = a + \rho v + \varepsilon v$. Donc :

$\|u - (a + \rho v)\| = \varepsilon \|v\| \leq \varepsilon$, et $u \in \text{adh}(A + \rho B(0, 1])$. ♦

Soit, inversement, $u \in \text{adh}(A + \rho B(0, 1])$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a \in A$ et $v \in B(0, 1]$ tels que : $\|u - (a + \rho v)\| \leq \varepsilon$.

$d(u, A) = \inf_{b \in A} \|u - b\| \leq \|u - a\| = \|u - a - \rho v + \rho v\| \leq \|u - (a + \rho v)\| + \|\rho v\| \leq \rho + \varepsilon$. Puisque l'inégalité est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $d(u, A) \leq \rho$. i.e. $u \in B(A, \rho]$. ♦

A présent :

$$\begin{aligned} B(A, \rho] &= \text{adh}(A + \rho B(0, 1]) = \text{adh}(A + B(0, \rho]) = \text{adh}\left(\bigcup_{a \in A} \{a\} + B(0, \rho)\right) \\ &= \text{adh}\left(\bigcup_{a \in A} B(a, \rho)\right). \end{aligned}$$

Le résultat est faux dans un espace métrique général, comme le montre l'exemple suivant : on prend $E = [0, 1[\cup \{2\}$ muni de la topologie induite par \mathbb{R} , et $A = [0, 1[$. $B(A, 1] = E$, tandis que : $\bigcup_{t \in]0, 1[} B_E(t, 1] = \bigcup_{t \in]0, 1[} ([t - 1, t + 1] \cap E) = [0, 1[$ et $\text{adh}_E([0, 1]) = [0, 1[$. ♦

On sait déjà que $\text{adh}(B(A, \rho]) = B(A, \rho]$ est faux pour $A = \{u\}$ dans un espace métrique général : on prend $E = \mathbb{Z}$ muni de la distance induite par \mathbb{R} usuel, $A = \{1\}$, $B(A, 1] = B(1, 1] = \{0, 1, 2\}$ tandis que $B(\{1\}, 1[= B(1, 1[= \{1\}$, et $\text{adh}(\{1\}) = \{1\}$. ♦

Mais on sait que la formule est vraie pour $A = \{u\}$ dans un e.v.n. Il s'agit donc de généraliser ce résultat à A arbitraire. Il suffit de prouver que $B(A, \rho] \subset \text{adh}(B(A, \rho])$.

Soit $u \in B(A, \rho]$, $d(u, A) \leq \rho$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists a_n \in A$:

$$d(u, A) \leq \|u - a_n\| \leq d(u, A) + \frac{1}{n^2} \leq \rho + \frac{1}{n^2} \leq \rho + 1.$$

On observe que la suite (a_n) est bornée [$a_n \in B(u, \rho + 1]$].

Nota : on a mis $\frac{1}{n^2}$ (ce qui est loisible, e^{-n} est tout aussi permis !) au lieu de l'habituel $\frac{1}{n}$, parce que c'est une nécessité pour ce qui suit.

Posons : $u_n := \frac{1}{n} a_n + (1 - \frac{1}{n})u$. Comme (a_n) est bornée, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ et donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$.

Si l'on prouve que $u_n \in B(A, \rho[$ pour tout n assez grand, on aura bien $u \in \text{adh}(B(A, \rho])$. Or :

$$\begin{aligned} d(u_n, A) &\leq \|u_n - a_n\| = \|\frac{1}{n} a_n + (1 - \frac{1}{n})u - a_n\| = (1 - \frac{1}{n})\|u - a_n\| \\ &\leq (1 - \frac{1}{n})(\rho + \frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

et ce majorant est inférieur à $\rho \iff \rho - \frac{\rho}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} < \rho \iff \rho n^2 - n + 1 > 0$, condition toujours réalisée pour tout n assez grand, car $\rho > 0$. ♦

On a : $\sup_{u \in \text{adh}(X)} \varphi(u) = \sup_{u \in X} \varphi(u)$ pour tout $X \subset E$, $X \neq \emptyset$ et pour tout $u \in E$. En effet, $\sup_{u \in X} \varphi(u) \leq \sup_{u \in \text{adh}(X)} \varphi(u)$, d'une part.

Soit à présent $u \in \text{adh}(X) : u = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$ avec $u_n \in X$ pour tout n ;

$\varphi(u) = \varphi[\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(u_n)$ [car φ continue, cf. Chap. VII, Th. 2.2], et

$\varphi(u_n) \leq \sup_{v \in X} \varphi(v)$ pour tout n , d'où : $\varphi(u) \leq \sup_{v \in X} \varphi(v)$, cela pour tout $u \in \text{adh}(X)$, d'où le résultat.

Donc :

$$\begin{aligned} \sup\{\varphi(u) / u \in B(A, \rho)\} &= \sup\{\varphi(u) / u \in \text{adh}(A + \rho B(0, 1])\} \\ &= \sup\{\varphi(u) / u \in A + \rho B(0, 1]\} = \sup_{\|v\| \leq 1} \sup_{a \in A} \varphi(a + \rho v) \\ &= \sup_{\|v\| \leq 1} \sup_{a \in A} [\varphi(a) + \rho \varphi(v)] = \sup_{a \in A} \varphi(a) + \rho \sup_{\|v\| \leq 1} \varphi(v) \\ &= \sup_{a \in A} \varphi(a) + \rho \|\varphi\|'. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

3) Soient $v \in F$ et $w \in B(u, \rho]$ arbitraires.

$$\begin{aligned} d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u) &\leq d(v, w) + \rho \implies d(u, F) \leq d(w, F) + \rho \\ \implies d(u, F) &\leq d(B(u, \rho], F) + \rho. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Dans un espace métrique général, on n'a pas égalité. Prenons $E := \{0\} \cup]1, +\infty[$ muni de la distance induite par \mathbb{R} usuel, et $B(0, 1] := \{0\}$, $F :=]1, +\infty[$; on a :

$d(0, F) = 1$, $d(B(0, 1], F) = 1$. Si l'on avait égalité, on aurait : $1 = 1 + 1$ (!). \blacklozenge

Dans un e.v.n. l'égalité est vraie. On considère : $w := \lambda v + (1 - \lambda)u = u + \lambda(v - u)$.

Déterminons $\lambda \in [0, 1]$ de manière à ce que $w \in S(u, \rho)$:

$w \in S(u, \rho) \iff \|w - u\| = \rho$, mais $w - u = \lambda(v - u)$, et :

$$\|v - u\| = \rho = \|\lambda(v - u)\| = \lambda \|v - u\| ; v - u \neq 0 \text{ car } F \cap B(u, \rho] = \emptyset, \text{ d'où : } \lambda = \frac{\rho}{\|v - u\|}.$$

Notez que $0 < \frac{\rho}{\|v - u\|} < 1$.

$$\begin{aligned} d(F, B(u, \rho]) &\leq d(w, F) \leq \|w - v\| = (1 - \lambda)\|u - v\| = \left(1 - \frac{\rho}{\|v - u\|}\right) \|u - v\| \\ &\leq \|u - v\| - \rho, \end{aligned}$$

d'où en prenant l'inf sur $v \in F$: $d(F, B(u, \rho]) \leq d(u, F) - \rho$, et finalement :

$$d(F, B(u, \rho]) = d(u, F) - \rho. \quad \blacklozenge$$

4) Soient, comme ci-dessus, $v \in F$, $w \in B(A, \rho]$ et $u \in A$:

$$\begin{aligned} d(v, u) \leq d(v, w) + d(w, u) &\implies d(v, A) \leq d(v, w) + d(w, A) \leq d(v, w) + \rho \\ \implies d(F, A) &\leq d(w, F) + \rho \implies d(F, A) \leq d(B(A, \rho], F) + \rho. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Pour tout $u \in A$, on a $d(F, B(A, \rho]) \leq d(F, B(u, \rho])$ puisque $B(u, \rho] \subset B(A, \rho]$, et donc :

$$d(F, B(A, \rho]) \leq \inf_{u \in A} d(F, B(u, \rho]).$$

D'après 3) :

$$d(F, B(A, \rho]) \leq \inf_{u \in A} d(F, B(u, \rho]) = \inf_{u \in A} [d(u, F) - \rho] = d(A, F) - \rho \leq d(F, B(A, \rho])$$

(cf. ci-dessus). D'où : $d(A, F) - \rho = d(F, B(A, \rho])$. \blacklozenge

5) U ouvert $\iff E \setminus U$ fermé.

Considérons la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f(u) = d(u, E \setminus U)$.

$f(u) > 0$ sur A car, sinon, $u \in A$ et $d(u, E \setminus U) = 0 \implies u \in \text{adh}(E \setminus U) = E \setminus U$, or $A \subset U \implies E \setminus A \supset E \setminus U$, d'où $u \in A$ et $u \in E \setminus A$, contradiction.

f est continue [$|f(u) - f(v)| \leq d(u, v)$] et A compact. Donc [Th. 2.2 du Chap. XIV] il existe $u_0 \in A$ tel que $f(u_0) = \min_{u \in A} f(u)$.

On pose : $\rho := f(u_0) = d(u_0, E \setminus U) > 0$. Soit $v \in B(A, \rho]$: a-t-on $v \in U$?

$d(v, A) < \rho$; posons $d(v, A) := \rho - r$, où $0 < r \leq \rho$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists u_\varepsilon \in A : d(v, A) \leq d(v, u_\varepsilon) \leq d(v, A) + \varepsilon$.

Avec $\varepsilon = \frac{1}{2}r, \exists \underline{u} \in A : d(v, \underline{u}) \leq \rho - r + \frac{1}{2}r = \rho - \frac{1}{2}r$.

$$\begin{aligned} |d(v, E \setminus U) - d(\underline{u}, E \setminus U)| &\leq d(\underline{u}, v) \implies -d(v, E \setminus U) + d(\underline{u}, E \setminus U) \leq d(\underline{u}, v) \\ \implies d(v, E \setminus U) &\geq d(\underline{u}, E \setminus U) - d(\underline{u}, v). \end{aligned}$$

$$\underline{u} \in A \implies d(\underline{u}, E \setminus U) \geq \rho ; d(\underline{u}, v) \leq \rho - \frac{1}{2}r \implies -d(\underline{u}, v) \geq -\rho + \frac{1}{2}r.$$

D'où :

$$d(v, E \setminus U) \geq \rho - \rho + \frac{1}{2}r = \frac{1}{2}r > 0 \implies v \notin \text{adh}(E \setminus U) = E \setminus U \implies v \in U. \quad \blacklozenge$$

Pour tout $u \in A$, soit V_u un voisinage compact de u . $(\text{int}(V_u))_{u \in A}$ constitue un recouvrement ouvert de A . Donc, il existe u_1, \dots, u_n dans A tels que $A \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} \text{int}(V_{u_i})$.

$U := \bigcup_{1 \leq i \leq n} V_{u_i}$ est un compact, et c'est un voisinage de A . D'après le résultat ci-dessus, il existe $B(A, \rho] \subset U$, et $\text{adh}(B(A, \rho])$ fermé dans un compact est compact. \blacklozenge

PROBLÈME 2

Ensembles rares

Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie de E . On dira que A est *rare* si $\text{int}[\text{adh}(A)] = \emptyset$.

1) Démontrez que : A est rare $\iff \text{adh}(A)$ est rare $\iff \text{ext}(A)$ est partout dense dans E .

2) Démontrez que : A est fermé et rare $\iff \text{fr}(A) = A$.

3) Démontrez que : si A est fermé, ou bien si A est ouvert, la frontière de A est rare. Donnez un exemple, dans \mathbb{R} usuel, d'ensemble dont la frontière n'est pas rare.

4) Démontrez que : A est dense dans $E \iff \forall U \neq \emptyset$ ouvert : $A \cap U \neq \emptyset$. Démontrez que si A et B sont rares, on a : $A \cup B$ rare.

Indication : Utilisez 1) et supposez d'abord que A et B sont des fermés.

5) Démontrez que : $u \in \text{ext}(A) \iff d(u, A) > 0$.

6) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et soit F un sous-espace vectoriel de E . Démontrez que F est partout dense dans E ou bien est rare.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 2

Exemples de parties rares ou non rares : dans un e.v.n. $\{u\}$ est rare pour tout $u \in E$; par contre, dans un ensemble E quelconque muni de la distance discrète, pour tout $u \in E$, $\{u\}$ n'est pas rare. Un ensemble partout dense n'est jamais rare. Dans usuel, \mathbb{Z} est rare. Dans \mathbb{R}^2 euclidien, une droite, un cercle sont rares.

1) $\text{adh}[\text{adh}(A)] = \text{adh}(A) \implies \text{int} \text{adh}[\text{adh}(A)] = \text{int}[\text{adh}(A)]$, d'où A rare $\iff \text{adh}(A)$ rare. ♦

A rare $\iff \text{int}[\text{adh}(A)] = \emptyset$
 $\iff E \setminus \text{int}[\text{adh}(A)] = E = \text{adh}[E \setminus \text{adh}(A)] = \text{adh}[\text{int}(E \setminus A)]$
 $\iff \text{adh}[\text{ext}(A)] = E \iff \text{ext}(A)$ est partout dense dans E . ♦

2) Si A est fermé et rare : $\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(E \setminus A) = A \cap \text{adh}(E \setminus A)$, mais $E \setminus A$ est ouvert $\implies E \setminus A = \text{int}(E \setminus A)$ et A rare $\implies \text{adh}[\text{ext}(A)] = E$ [par 1)] = $\text{adh}[\text{int}(E \setminus A)] = \text{adh}(E \setminus A)$. Donc : $\text{fr}(A) = A \cap E = A$.

Réciproquement :

$\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(E \setminus A) = A \implies A$ fermé $\implies \text{int}[\text{adh}(A)] = \text{int}(A)$, et $A = A \cap \text{adh}(E \setminus A)$ entraîne :

$$\text{int}(A) = \text{int}(A) \cap \text{int}[E \setminus \text{int}(A)] \subset \text{int}(A) \cap (E \setminus \text{int}(A)) = \emptyset$$

donc $\text{int}(A) = \emptyset = \text{int}[\text{adh}(A)]$ et A est rare. ♦

3) On suppose A ouvert, i.e. $E \setminus A$ fermé,

on a $\text{fr}(A) = \text{adh}(A) \cap \text{adh}(E \setminus A) = \text{adh}(A) \cap (E \setminus A)$.
 $\text{int}[\text{fr}(A)] = \text{int}[\text{adh}(A)] \cap \text{int}(E \setminus A) = \text{int}[\text{adh}(A)] \cap (E \setminus \text{adh}(A))$
 $\subset \text{adh}(A) \cap (E \setminus \text{adh}(A)) = \emptyset$: $\text{fr}(A)$ est rare. ♦

On suppose A fermé, alors $E \setminus A$ est ouvert, comme $\text{fr}(A) = \text{fr}(E \setminus A)$, la conclusion est la même. ♦

On prend $A = \mathbb{Q}$ dans \mathbb{R} usuel : $\text{fr}(A) = \text{adh}(\mathbb{Q}) \cap \text{adh}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$. ♦

4) On va démontrer que $\text{adh}(A) = E \iff \forall U \neq \emptyset$ ouvert : $A \cap U \neq \emptyset$.

Soit $U \neq \emptyset$ un ouvert, et soit $B(u, \rho]$ une boule contenue dans U . Comme A est partout dense : $\exists a \in A : d(u, a) < \rho \implies a \in B(u, \rho] \implies a \in A \cap B(u, \rho] \subset A \cap U$, et $A \cap U \neq \emptyset$.

Dans l'autre sens, soit $u \in E ; \forall \rho > 0 : B(u, \rho] \cap A \neq \emptyset$. Soit $a \in B(u, \rho] \cap A : a \in A$ et $d(u, a) < \rho$; donc A est partout dense dans E . ♦

Montrons que F, G fermés et rares $\implies F \cup G$ rare.

$F \cup G$ rare $\iff \text{int}[E \setminus (F \cup G)]$ partout dense dans E [par 1] $\iff E \setminus \text{adh}(F \cup G)$ partout dense $\iff [(E \setminus F) \cap (E \setminus G)]$ partout dense dans E [car $\text{adh}(F \cup G) = F \cup G$] $\iff \forall U \neq \emptyset$ ouvert : $U \cap [(E \setminus F) \cap (E \setminus G)] \neq \emptyset$. Mais d'après ce qui a été prouvé au début de ce 4), $\forall V \neq \emptyset$ ouvert : $V \cap (E \setminus F) \neq \emptyset$ et $V \cap (E \setminus G) \neq \emptyset$. D'où : $U \cap [(E \setminus F) \cap (E \setminus G)] = [U \cap (E \setminus F)] \cap (E \setminus G) \neq \emptyset$ car $U \cap (E \setminus F)$ est un ouvert non vide. \blacklozenge

Soient A, B rares : démontrons que $A \cup B$ rare.

$\text{int}[\text{adh}(A \cup B)] = \text{int}[\text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)]$: $\text{adh}(A)$ et $\text{adh}(B)$ sont fermés et, d'après 1), sont rares, d'où – d'après le résultat qui précède – $\text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)$ est rare :

$\text{int}\{\text{adh}[\text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)]\} = \emptyset$, soit :

$\emptyset = \text{int}\{\text{adh}[\text{adh}(A)] \cup \text{adh}[\text{adh}(B)]\} = \text{int}[\text{adh}(A) \cup \text{adh}(B)] = \text{int}[\text{adh}(A \cup B)]$, Q.E.D. \blacklozenge

5) $u \in \text{ext}(A) \iff u \in \text{int}(E \setminus A) \iff u \in E \setminus \text{adh}(A)$, or on sait que

$d(u, A) = 0 \iff u \in \text{adh}(A)$ et donc $d(u, A) > 0 \iff u \in E \setminus \text{adh}(A)$. \blacklozenge

6) Soit F un sous-espace vectoriel de E e.v.n. Si $\text{adh}(F) = E$ (i.e. F partout dense dans E) : $\text{int}[\text{adh}(F)] = \text{int}(E) = E$, et F n'est pas rare. Soit $G = \text{adh}(F)$; si F n'est pas partout dense, c'est que $G \neq E$; or on sait que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace vectoriel [Chap. VI], mais on sait aussi qu'un sous-espace vectoriel $\neq E$ n'a pas de point intérieur [Exemple 1.4], d'où : $\text{int}(G) = \emptyset = \text{int}[\text{adh}(F)]$, et F est rare. \blacklozenge

Fin du Chapitre VI

CHAPITRE VII

APPLICATIONS CONTINUES

Introduction

Ce chapitre VII inaugure une série de quatre chapitres tous relatifs à la notion de *continuité des applications définies sur un espace métrique et à valeurs dans un autre espace métrique*.

La notion était déjà fondamentale dans le cadre restreint où vous l'avez étudiée jusqu'à présent (fonction réelle d'une variable réelle $(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$, fonction réelle de n variables réelles $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, applications vectorielles $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, applications $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$) : elle demeure fondamentale, voire gagne encore en importance, dans le cadre des espaces métriques que nous étudions ici.

Il ne faut évidemment pas oublier ce que vous saviez déjà sur la question !

Nous avons divisé les difficultés sur plusieurs chapitres, de manière à ce que chaque chapitre n'apporte qu'un nombre très réduit de notions nouvelles ou délicates. Nous pensons que tout cela « passera » bien ainsi.

Le présent chapitre est facile à étudier.

Attention, il y a *beaucoup de petites propositions « techniques »*, qu'on ne peut pas déceimment ériger au rang de théorèmes fondamentaux, mais qui sont d'une utilité constante, dans ce cours, mais aussi en calcul différentiel. Par exemple la Prop. 2.4.

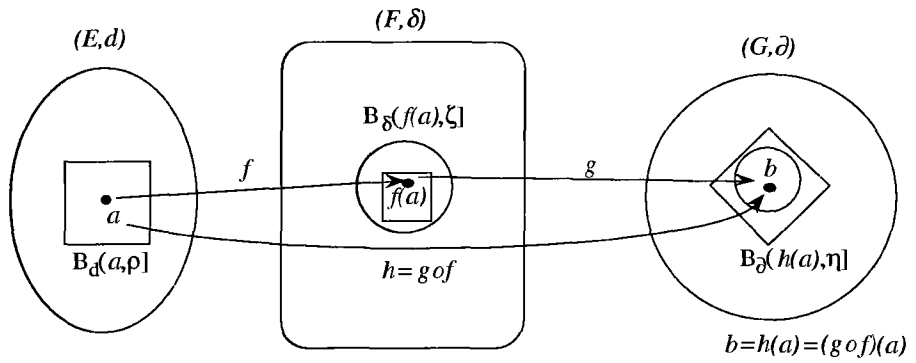
Il ne faut surtout pas négliger ces résultats !

☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 2.1, 2.2, **2.3**, 2.5, **2.6**.

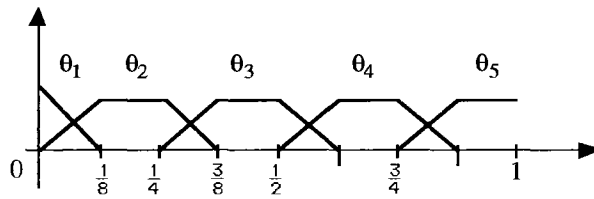
☞ Exercices complémentaires : 1.2, 1.3, 2.4.

Nous proposons une Lecture-Problème consacrée à la notion de *partition continue de l'unité subordonnée à un recouvrement*, une notion qui est fondamentale en géométrie différentielle et dans ses applications. Ici, c'est une bonne suite d'exercices sur la topologie et sur les fonctions continues. Pas trop difficile, mais pas évident non plus.

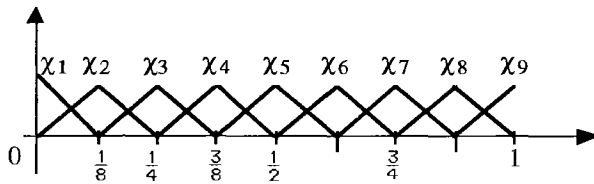
BON TRAVAIL !



Continuité de $h := g \circ f$ au point $a \in E$



Lecture-problème, question 5 : partition de l'unité



Autre partition de l'unité, subordonnée au même recouvrement

CHAPITRE VII

APPLICATIONS CONTINUES

1. CONTINUITÉ EN UN POINT

Définition 1.1.

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, $f : E \rightarrow F$ une application, et a un point de E . f est dite **continue au point** $a \in E$ si :

$$(1.1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E : d(u, a) \leq \eta \implies \delta(f(u), f(a)) \leq \varepsilon.$$

Ce qui peut se lire : « $f(u)$ est aussi près qu'on veut de $f(a)$ dès que u est suffisamment proche de a ».

La condition (1.1) peut immédiatement s'écrire :

$$(1.2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E : u \in B_d(a, \eta] \implies f(u) \in B_\delta(f(a), \varepsilon]$$

| soit encore, évidemment :

$$(1.3) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : f(B_d(a, \eta]) \subset B_\delta(f(a), \varepsilon]$$

| et aussi :

$$(1.4) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : B_d(a, \eta] \subset f^{-1}(B_\delta(f(a), \varepsilon])$$

Commentaires :

1) On dit souvent « en a » au lieu de « au point a ».

2) On peut remplacer l'une des inégalités larges \leq , ou les deux, par une (des) inégalité(s) stricte(s) $<$. Par contre, on ne peut pas prendre $\varepsilon = 0$ ou $\eta = 0$!

3) Si l'on remplace la distance d de E (resp. δ de F) par une distance équivalente d' (resp. δ'), la propriété de continuité (resp. non continuité) en a ne change pas.

4) Si f n'est pas continue au point a , on dit qu'elle est *discontinue au point a* .

5) Pour (1.3) et (1.4) on a utilisé les propriétés ensemblistes suivantes :

$$\forall A, B \subset E : A \subset B \implies f(A) \subset f(B); \forall C, D \subset F : C \subset D \implies f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D); \\ \forall A \subset E : A \subset f^{-1}(f(A)); \forall D \subset F : f(f^{-1}(D)) = D \cap f(E) \subset D.$$

☞ Ces propriétés doivent être connues par cœur.

6) En général, $\eta = \eta(a, \varepsilon)$ dépend du point a et de $\varepsilon > 0$. Il peut arriver que η ne dépende pas de a , ou ne dépende pas de ε . Voir les exemples ci-dessous.

7) Lorsque E est un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$, n'oubliez pas de remplacer $d(u, a)$ par $\|u - a\|$; si $F = \mathbb{R}$, remplacez $d(f(u), f(a))$ par $|f(u) - f(a)|$, etc.

☞ Il faut prouver que vous êtes capable d'adapter une définition générale aux cas particuliers !

Puisqu'un voisinage [Chap. VI] d'un point v d'un espace métrique (E, d) est une partie de E contenant une boule de centre v , on peut encore écrire la condition de continuité en termes de voisinages. Ce serait la définition qu'on adopterait pour des espaces topologiques généraux définis par la donnée des familles de voisinages de tous les points [cf. Chap. VI] :

(1.5) (f continue en $a \in E$) \iff (pour tout voisinage W de $f(a)$ dans (F, δ) , il existe un voisinage V de a dans (E, d) tel que $f(V) \subset W$) \iff (pour tout voisinage W de $f(a)$ dans (F, δ) : $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a dans (E, d) .)

Dans les espaces métriques, on a la chance de pouvoir travailler avec des suites ; on a l'important :

Théorème 1.1. (D'USAGE CONSTANT)

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$ une application.

(i) Si f est continue au point $a \in E$:

pour toute suite $(u_n)_{n \in S}$ [$S \subset \mathbb{N}$, S infini] d'éléments de E convergente dans (E, d) , i.e. telle que $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n) = a$, la suite des images par f : $(f(u_n))_{n \in S}$ est convergente dans (F, δ) , et : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} f(u_n) = f(a)$.

(ii) Réciproquement, si pour toute suite $(u_n)_{n \in S}$ d'éléments de E telle que $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n)$ existe dans (E, d) la suite des images $(f(u_n))_{n \in S}$ est convergente dans (F, δ) : f est continue au point a .

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS immédiatement après la partie Cours. Mais cette démonstration est assez facile pour que vous la fassiez vous-même rapidement. ♦

Commentaires :

1) (i) se généralise aux espaces topologiques non métriques, mais pas (ii) : *encore une fois, les suites ne suffisent pas à caractériser les propriétés topologiques.*

2) La négation de (i) est très souvent utilisée pour démontrer qu'une fonction *n'est pas* continue en un point. Par exemple [rappel de D.E.U.G, en principe], soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R}, \mathbb{R}^2 usuels) définie par $f(s, t) = \frac{st^2}{s^2 + t^4}$ pour $(s, t) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

On a $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ et $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, mais – par contre – $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$ alors que $f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$: f n'est donc pas continue en $(0, 0)$ [elle est continue partout ailleurs, pour des raisons qu'on donnera plus loin].

Nous allons donner quelques exemples de fonctions continues : il convient, bien sûr, d'ajouter le stock de fonctions classiques et d'exemples qu'on vous a donnés en D.E.U.G.

Exemple 1.1. Soit (E, d) , où E est un ensemble quelconque et où d est la distance discrète, et soit (F, δ) un espace métrique *arbitraire*. On a :

toute application $f : E \rightarrow F$ est continue en tout point a de E .

En effet, pour un $a \in E$ quelconque, on va démontrer (1.3) : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$: $f(B_d(a, \eta)) \subset B_\delta(f(a), \varepsilon)$: pour tout $\varepsilon > 0$, on prend $\eta = \frac{1}{2}$: $B_d(a, \frac{1}{2}) = \{a\}$, et on a bien : $f(\{a\}) = \{f(a)\} \subset B_\delta(f(a), \varepsilon)$.

De la même manière, toute application $f : \mathbb{Z} \rightarrow F_\delta$ ou $g : \mathbb{N} \rightarrow F_\delta$ [(F, δ) quelconque] où \mathbb{Z} [resp. \mathbb{N}] est muni de la distance induite par \mathbb{R} usuel, est continue.

En particulier, toute suite $f : S \subset \mathbb{N} \rightarrow F_\delta, n \mapsto f(n)$, est continue si S est muni de la distance induite par \mathbb{N} usuel.

Par contre, considérez l'application $I : E_1 \rightarrow E_2$, où $E_1 = E_2 = E$ a plus de deux éléments, $u \mapsto I(u) = u$, et munissez E_1 de la topologie grossière, E_2 de la distance discrète : I n'est pas continue ! (détaillez).

Exemple 1.2. Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques quelconques, et soit $f : E \rightarrow F$ une fonction *constante*, i.e. telle que $f(u) = v_0, v_0 \in F$ fixé, pour tout $u \in E$. Pour tout $a \in E$ fixé : $\delta(f(u), f(a)) = \delta(v_0, v_0) = 0$, et donc f est continue au point a . $\eta > 0$ peut être pris complètement quelconque pour vérifier (1.1).

Exemple 1.3. Soit (E, d) un espace métrique, et soit $A \subset E$ non vide. On considère le sous-espace métrique $(A, d|_{A \times A})$. Soit $j_A : A \rightarrow E$ l'application $u \in A \mapsto j_A(u) = u \in E$ (appelée *injection canonique* de A dans E). Soit $a \in E$ fixé. $\forall u \in A : d(j_A(u), j_A(a)) = d(u, a) = d|_{A \times A}(u, a) : \text{on peut prendre } \eta = \varepsilon \text{ dans (1.1), et } j_A \text{ est continue en tout point de } A$.

Remarques sur la terminologie :

Expliquons ici pourquoi nous avons introduit la notion de « sous-espace métrique » [dans le Chap. I, §2] avec des réticences.

En fait la « bonne » notion est celle de *sous-espace topologique* qu'on définit de manière naturelle en disant que les ouverts de A sont les intersections de A avec les ouverts de E . A ce moment là, si E est un espace métrique, il n'y a pas besoin de notion de « sous-espace métrique » : on a un sous-espace topologique dont *une* manière (parmi bien d'autres) de définir sa topologie naturelle est de considérer $d|_{A \times A}$. Saisissez-vous la nuance ?

Ce n'est pas grave d'employer l'expression « sous-espace métrique », tout le monde comprend, mais il vaut mieux éviter de le faire à l'oral de l'Agrégation . . .

Tant qu'on est dans les précautions oratoires . . . Le même problème – en plus grave – se pose avec la notion de produit. Nous n'avons pas parlé d'« espace métrique produit », mais de produit cartésien d'un nombre fini d'espaces métriques sur lequel on introduit plusieurs distances équivalentes. La bonne notion est celle de *topologie produit* qu'on définit par ses ouverts, ou ses voisinages de chaque point ; alors le produit cartésien d'un nombre fini (on a envisagé aussi le cas dénombrable en exercices) d'espaces métriques se trouve muni d'une topologie qui peut être décrite par plusieurs distances, distances équivalentes, mais dont aucune n'est canonique (= naturelle).

Si vous ne saisissez pas bien ces nuances en première lecture, ce n'est pas tragique.

Exemples 1.4. Dans le Chapitre III, sur les suites, nous avons démontré par avance, en vertu du Th. 1.1, la continuité en tout point de leur domaine de définition de plusieurs applications naturelles.

1) Soit (E, d) un espace métrique, et soit $\hat{u} \in E$ fixé. La fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $u \in E$ par : $f(u) = d(u, \hat{u})$ est continue en tout $a \in E$; en effet, nous avons démontré que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, \hat{u}) = d(a, \hat{u})$.

En d'autres termes : $|f(u) - f(a)| = |d(u, \hat{u}) - d(a, \hat{u})| \leq d(u, a)$; on prend $\eta = \varepsilon$.

2) Plus généralement, dans le cadre ci-dessus, soit $A \subset E$ non vide. La fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(u) = d(u, A)$ est continue en tout point $u_0 \in E$. En effet, $|g(u) - g(u_0)| = |d(u, A) - d(u_0, A)| \leq d(u, u_0)$, et on prend $\eta = \varepsilon$. 1) est le cas particulier $A = \{\hat{u}\}$.

3) Plus généralement encore, toute application k -lipschitzienne (en particulier toute isométrie) $f : E_d \rightarrow F_\delta$ est continue en tout point $a \in E$.

En effet, par définition, il existe k réel > 0 (le cas $k = 0$ est trivial) tel que $\forall u, v \in E : \delta(f(u), f(v)) \leq k.d(u, v)$; donc : $\delta(f(u), f(a)) \leq k.d(u, a)$, et on prend $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$.

4) Soit (E, d) un espace métrique. On munit $E \times E$ d'une des distances sur un produit, par exemple $d_\infty[(u, v), (u', v')] = \max\{d(u, u'), d(v, v')\}$, et on considère l'application $E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto d(u, v)$. Cette fonction est continue en tout $(a, b) \in E \times E$. En effet :

$$\begin{aligned} |d(u, v) - d(a, b)| &\leq |d(u, v) - d(a, v)| + |d(a, v) - d(a, b)| \leq d(a, u) + d(b, v) \\ &\leq 2 \max\{d(u, a), d(v, b)\} = 2d_\infty[(u, v), (a, b)] ; \text{ on prend } \eta = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 1.5. Soit maintenant $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Les applications suivantes sont toutes continues en tout point de leur domaine de définition :

(i) $E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \|u\|$, car $|\|u\| - \|a\|| \leq \|u - a\| = d(u, a)$; on prend $\eta = \varepsilon$.

(ii) $E \rightarrow E, u \mapsto \lambda_0.u$, où $\lambda_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ est fixé, car :

$\|\lambda_0.u - \lambda_0.a\| = |\lambda_0|. \|u - a\| = |\lambda_0|d(u, a)$; on prend $\eta = \frac{\varepsilon}{|\lambda_0|}$. Le cas $\lambda_0 = 0$ est trivial.

(iii) $\mathbb{K} \rightarrow E, \lambda \mapsto \lambda.u_0$, où $u_0 \in E \setminus \{0\}$ est fixé, car :

$\|\lambda.u_0 - \mu.u_0\| = \|u_0\|.|\lambda - \mu|$; on prend $\eta = \frac{\varepsilon}{\|u_0\|}$. Le cas $u_0 = 0$ est trivial.

(iv) $E \times E \rightarrow E, (u, v) \mapsto u + v$, car :

$\|(u + v) - (a + b)\| \leq \|u - a\| + \|v - b\| \leq 2 \max\{\|u - a\|, \|v - b\|\}$
 $\leq 2d_\infty[(u, v), (a, b)]$; on prend $\eta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Supposons à présent que $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien réel ou complexe.

(v) $E \rightarrow \mathbb{K}, u \mapsto (u|u_0)$, où $u_0 \in E \setminus \{0\}$ fixé, est continue en tout point $a \in E$ car : $|(u|u_0) - (a|u_0)| = |(u - a|u_0)| \leq [\text{Cauchy-Schwarz}] \|u - a\|. \|u_0\|$; on prend $\eta = \frac{\varepsilon}{\|u_0\|}$.

(vi) $E \times E \rightarrow \mathbb{K}, (u, v) \mapsto (u|v)$ est continue en tout point (a, b) car :

$|(u|v) - (a|b)| = |(u|v) - (a|v) + (a|v) - (a|b)| \leq |(u - a|v)| + |(a|v - b)|$
 $\leq \|u - a\|. \|v\| + \|a\|. \|v - b\| \leq \max\{\|a\|, \|v\|\}(\|u - a\| + \|v - b\|)$
 $\leq 2 \max\{\|a\|, \|v\|\} \cdot \max\{\|u - a\|, \|v - b\|\}$
 $\leq 2 \max\{\|a\|, \|v\|\} \cdot d_\infty[(u, v), (a, b)]$;

on prend $\|v\| \leq \|b\| + 1$, puis $\eta = \frac{\varepsilon}{2 \max\{\|a\|, \|b\| + 1\}}$.

☞ **Exercice 1.1.** (facile)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$. Démontrez que la fonction

(linéaire) $E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \varphi(f) = f(\frac{1}{2})$, n'est pas continue au point $f = 0$.

Est-elle continue en d'autres points de E ?

☞ **Exercice 1.2.** (facile) Soit $E = \mathcal{P}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels. On munit E de la norme (vérifiez qu'il s'agit bien d'une norme) :

$$\|P\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|.$$

Soit $s \in [0, 1]$ fixé ; démontrez que la fonction $E \rightarrow \mathbb{R}, P \in E \mapsto \Psi_s(P) = P(s)$ est continue en tout point $P_0 \in E$. Démontrez que la fonction $E \rightarrow \mathbb{R}, P \in E \mapsto \Phi(P) = P(2)$ n'est continue en aucun point de E .

☞ **Exercice 1.3.** (un peu délicat) Soit f la fonction [inventée par Riemann] de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (distance usuelle) définie ainsi : $f(t) = 0$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $f(0) = 1$, $f(t) = 1/q$ si $t \in \mathbb{Q}$, $t = p/q$ (fraction irréductible : $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux). Démontrez que f est discontinue en tout point rationnel, et continue en tout point irrationnel.

Une des premières choses qu'on peut faire avec des applications, c'est, bien sûr, de les composer ; on a :

Proposition 1.1. (FONDAMENTALE))

Soient $(E, d), (F, \delta), (G, \vartheta)$ des espaces métriques, et soient $f : E \rightarrow F$,
 $g : F \rightarrow G$.
 Si f est continue en $a \in E$, et si g est continue en $b = f(a) \in F$, l'application
 composée $h = g \circ f$ est continue en a .

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS, mais faites-la donc vous-même ! ♦

2. CONTINUITÉ SUR UN ESPACE MÉTRIQUE

Définition 2.1.

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques. Une application $f : E \rightarrow F$ sera dite **continue sur E** si elle est continue en **tout** point de E .

Commentaire : On dit simplement **continue** s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemples 2.1. Les Exemples 1.1 à 1.5 fournissent de nombreux exemples d'applications, plus ou moins naturelles, continues sur l'espace métrique de départ.

Proposition 2.1. (FONDAMENTALE)

Dans le même cadre que la Proposition 1.1 : si f est continue sur E , et si g est continue sur F , l'application **composée** $h = g \circ f$ est continue sur E .

Démonstration : Evidente d'après la Prop. 1.1. ♦

Proposition 2.2.

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, soit $f : E \rightarrow F$ une application continue sur E , et soit $A \subset E$, non vide.

La **restriction** $g = f|_A$ de f au sous-espace métrique $(A, d|_{A \times A})$ est **continue** sur cet espace métrique.

Démonstration : g est la composée $g = f \circ j_A$ de deux applications continues [cf. Exemple 1.3], et on applique la Prop. 2.1. ♦

Exemple 2.2. Soient (E, d) un espace métrique, et soit $(F, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur le corps \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}). Soit $f : E \rightarrow F$ une application continue sur E . La fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(u) = \|f(u)\|$, i.e. $g = \|\cdot\| \circ f$ est continue sur E [cf. Exemple 1.5 i)].

Théorème 2.1. (FONDAMENTAL)

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$ une application. Les quatre propriétés suivantes sont **équivalentes** :

- (2.1) f est **continue** sur E ,
- (2.2) pour **toute** partie **ouverte** V de (F, δ) , l'image **réciproque** $U = f^{-1}(V)$ est une partie **ouverte** de (E, d) ,
- (2.3) pour **toute** partie **fermée** B de (F, δ) , l'image **réciproque** $A = f^{-1}(B)$ est une partie **fermée** de (E, d) ,
- (2.4) pour **toute** partie X de E : $f[\text{adh}(X)] \subset \text{adh}[f(X)]$.

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS. ♦

Commentaire : Prenez garde à ne pas confondre \subset et \supset dans (2.4) !

☞ **Exercice 2.1.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique, et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (\mathbb{R} avec sa distance usuelle). Démontrez que si pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on a : $f^{-1}(]-\infty, \alpha])$ et $f^{-1}(] \alpha, +\infty[)$ ouverts dans E : f est continue sur E . **Indication** : Voir l'Exercice 2.4 du Chap. VI.

Théorème 2.2. (FONDAMENTAL, D'UTILISATION CONSTANTE)

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$.
 f est **continue sur E** si et seulement si l'image $(f(u_n))_{n \in S}$ de **toute** suite $(u_n)_{n \in S}$ convergente dans (E, d) est convergente dans (F, δ) .

Précision : Si f est continue sur E , et si $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n)_n = a$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (f(u_n))_n = f(a).$$

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS, mais il n'y a aucune subtilité. ♦

☞ **Exercice 2.2.** (très facile) Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$ continue sur E . Démontrez que le **graphe** de $f : G = \{(u, f(u)) / u \in E\}$ est fermé dans $E \times F$ (où $E \times F$ est muni d'une des distances équivalentes habituelles). Démontrez que la réciproque est fautive (cherchez un exemple : $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

Mise en garde et exemples

☞ Il FAUT remarquer que, dans le Th. 2.1, ce sont les images **réciproques** (ou : inverses) qui interviennent, et NON les images **directes** ! D'ailleurs, on appelle application **ouverte** [resp. **fermée**] une application qui transforme tout ouvert [resp. fermé] en un ouvert [resp. fermé].

Exemples 2.3.

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2$ est continue sur \mathbb{R} ; soit $I =]-1, +1[$, qui est ouvert dans \mathbb{R} : $f(I) = [0, 1[$ qui n'est ni ouvert ni fermé dans \mathbb{R} .

b) $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t}$, est continue sur le fermé $[1, +\infty[$, mais $f([1, +\infty[) =]0, 1]$ qui n'est ni ouvert ni fermé dans \mathbb{R} .

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur \mathbb{R} , mais $f(\mathbb{R}) =]0, 1]$, ...

d) $f : \mathbb{R}_{\text{usuel}} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{discret}}, t \mapsto t$, est ouverte et fermée, mais n'est continue en aucun point [$\forall t \in \mathbb{R} : t + \frac{1}{n}$ converge dans $\mathbb{R}_{\text{usuel}}$ et diverge dans $\mathbb{R}_{\text{discret}}$].

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 0$; f est continue et fermée, mais n'est pas ouverte.

f) $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, p(s, t) = s$ est continue et ouverte [on le montrera dans le Chap. IX] mais n'est pas fermée. Soit, en effet, $H = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / s.t = 1\}$ (c'est le graphe d'une hyperbole équilatère). H est fermé dans \mathbb{R}^2 [cf. l'Exercice 2.2], mais $p(H) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas fermé (son adhérence est \mathbb{R}).

g) $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$ est continue et ouverte, mais pas fermée ($]0, \frac{1}{2}$ est fermé dans $]0, 1[$ mais pas dans \mathbb{R}). De même, $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$, est continue et fermée, mais pas ouverte ($]0, \frac{1}{2}[$ est ouvert dans $[0, 1]$, mais pas dans \mathbb{R}).

☞ Vous ne perdrez pas votre temps si vous méditez un peu tous ces exemples ...

Une application du Th. 2.1.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des e.v.n. sur le même corps \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}), et soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire continue sur E .

$\text{Ker}(f) = \{u \in E / f(u) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E . La réciproque est fautive en général, elle est vraie dans le cas $F = \mathbb{K}$ (formes linéaires), nous le verrons dans le Chap. X. Il est à noter que $\text{Im}(f) = f(E)$ peut être fermé dans F , partout dense dans F , ou ... rien du tout.

L'important résultat suivant dit qu'une fonction continue est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur une partie partout dense.

Théorème 2.3. (IMPORTANT)

|| Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, et soient $f, g : E \rightarrow F$ des fonctions continues sur E . S'il existe une partie A de E partout dense dans (E, d) telle que : $f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$, on a $f = g$, c'est-à-dire $f(u) = g(u)$ pour tout $u \in E$.

Démonstration :

On a $\text{adh}(A) = E$. Soit $u \in E$: il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = u$. On peut écrire, pour tout n :

$$(*) \delta[f(u), g(u)] \leq \delta[f(u), f(a_n)] + \delta[f(a_n), g(a_n)] + \delta[g(a_n), g(u)];$$

le terme médian est nul car $f(a) = g(a)$ pour tout $a \in A$. Puisque f est continue sur E , on a, d'après le Th. 2.2 (ou le Th. 1.1) : $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n)) = f(u)$, i.e.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta[f(u), f(a_n)] = 0$, et – de même – puisque g est continue sur E :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta[g(a_n), g(u)] = 0$. On peut passer à la limite dans (*) en tenant compte du principe de prolongement des inégalités à la limite [Chap. III] ; il vient :

$\delta[f(u), g(u)] \leq 0$, d'où $\delta[f(u), g(u)] = 0$, et donc $f(u) = g(u)$. Cela pour tout $u \in E$. ♦

Commentaire : Le Th. 2.3 ne permet nullement de prolonger une fonction $A \rightarrow F$ continue sur A partout dense dans E en une fonction $E \rightarrow F$ continue sur E ! Prendre, par exemple, $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t}$.

Un tel prolongement n'existe pas en général. Pour un résultat positif de prolongement, voir le Chap. XII.

✎ **Exercice 2.3.** (facile) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} telle que : $\forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} : f(s+t) = f(s) + f(t)$. Démontrez que $f(t) = \alpha.t$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice non corrigé : même exercice (mais sans le résultat) avec $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{R} et vérifiant $f(s+t) = f(s).f(t)$ [ou $f(s.t) = f(s) + f(t)$; $f(s.t) = f(s).f(t)$] pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

Proposition 2.3. (SOUVENT UTILE)

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, et soient $f, g : E \rightarrow F$ des applications **continues** sur E . L'ensemble $\{u \in E / f(u) = g(u)\}$ est un **fermé** de (E, d) .

Cas particulier : En prenant pour g la fonction constante égale à $v_0 \in F$, on obtient : l'ensemble des solutions de l'équation $f(u) = v_0$, i.e. $\{u \in E / f(u) = v_0\}$ est fermé dans E .

Démonstration :

Posons $T = \{u \in E / f(u) = g(u)\}$. Soit $(v_n)_n$ une suite de points de T convergente vers $v \in E$. $\forall n : f(v_n) = g(v_n)$, et, puisque f et g sont continues sur E : $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(v_n)) = f(v)$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} g(v_n) = g(v)$. En vertu du principe de prolongement des égalités à la limite [Chap. III], on a : $f(v) = g(v)$, et donc $v \in T$. ♦

Opérations sur les fonctions réelles et continuité

Proposition 2.4. (D'USAGE CONSTANT)

Soit (E, d) un espace métrique, et soient $f, g : E \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions **continues** sur E :

(2.5) Les fonctions suivantes :

(2.5.1) $f + g \quad [\forall u \in E : (f + g)(u) = f(u) + g(u)],$

(2.5.2) $\lambda.f \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad [\forall u \in E : (\lambda.f)(u) = \lambda.f(u)],$

(2.5.3) $f.g \quad [\forall u \in E : (f.g)(u) = f(u).g(u)],$

(2.5.4) $|f| \quad [\forall u \in E : |f|(u) = |f(u)|],$

(2.5.5) $\sup(f, g)$

$[\forall u \in E : \sup(f, g)(u) = \max\{f(u), g(u)\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)(u)],$

(2.5.6) $\inf(f, g)$

$[\forall u \in E : \inf(f, g)(u) = \min\{f(u), g(u)\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)(u)],$

(2.5.7) $f^+ \quad [\forall u \in E; f^+(u) = \sup(f, 0)(u) = \max\{f(u), 0\}],$

(2.5.8) $f^- \quad [\forall u \in E; f^-(u) = \inf(f, 0)(u) = \min\{f(u), 0\}];$

(on a : $f^- = -(-f)^+$, $f = f^+ + f^-$, $|f| = f^+ - f^-$)

sont toutes **continues** sur E .

- (2.6) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$; on pose $N = \{u \in E / f(u) = 0\}$. On peut définir $\frac{1}{f} = 1/f : E \setminus N \rightarrow \mathbb{R}$ par $(1/f)(u) = 1/f(u)$. Si f est continue en $u_0 \in E \setminus N$, $1/f$ est définie dans toute une boule $B(u_0, \rho]$, et $1/f$ est continue en u_0 .
- (2.7) $\{u \in E / f(u) < [\text{resp. } >] g(u)\}$ est *ouvert* dans (E, d) ,
- (2.8) $\{u \in E / f(u) \leq [\text{resp. } \geq] g(u)\}$ est *fermé* dans (E, d) .
- (2.9) $\forall A \subset E, A \neq \emptyset$:
 $[\forall u \in A : f(u) \leq g(u)] \implies [\forall u \in \text{adh}(A) : f(u) \leq g(u)]$.
- (2.10) $\forall A \subset E, A \neq \emptyset$: $\sup f(A) = \sup f[\text{adh}(A)] = \sup(\text{adh}[f(A)])$.
- De même pour inf.

Commentaires :

1) (2.5.1), (2.5.2) et (2.5.4) restent valides si l'on remplace l'ensemble d'arrivée \mathbb{R} par un e.v.n. $(F, \|\cdot\|)$, en particulier $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

(2.5.3) reste valide si l'on remplace \mathbb{R} par une algèbre [cf. Chap. X, Annexe] commutative F munie d'une norme vérifiant $\forall u, v \in F : \|u.v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

Si l'on remplace \mathbb{R} par un espace préhilbertien $(F, (\cdot|\cdot))$, on peut définir $(f|g)$ par $\forall u \in E : (f|g)(u) = (f(u)|g(u))$; $(f|g)$ est continue (vérifiez).

2) $|f|$ continue $\not\Rightarrow f$ continue. Il suffit de considérer $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = +1$ si $t \in \mathbb{Q}$ et $f(t) = -1$ si $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Démonstration :

Démontrons (2.5).

(2.5.1), (2.5.2) et (2.5.3) se démontrent très facilement en utilisant des suites et le Th. 1.1 ou le Th. 2.2. \blacklozenge

(2.5.4) a déjà été démontré : voir l'Application juste après la Prop. 2.2. \blacklozenge

(2.5.5) et (2.5.6) découlent de (2.5.4) et de (2.5.1)(2.5.2) [notez que $f - g = f + (-1)g$ est continue $\implies |f - g|$ est continue]. \blacklozenge

(2.5.7) et (2.5.8) découlent de (2.5.5)(2.5.6) en faisant $g = 0$ (la fonction constante nulle). \blacklozenge

Démontrons (2.6).

D'après (2.5.4), $|f|$ est continue en u_0 . Donc, étant donné $\frac{1}{2}|f(u_0)| > 0$, $\exists \eta_0 > 0$, $\forall u \in E$:

$$d(u, u_0) \leq \eta_0 \implies ||f(u)| - |f(u_0)|| \leq \frac{1}{2}|f(u_0)| \implies |f(u_0)| - \frac{1}{2}|f(u_0)| \leq |f(u)|.$$

Donc, pour tout $u \in B(u_0, \eta_0) : |f(u)| \geq \frac{1}{2}|f(u_0)| > 0$. Il suffit de faire $\rho = \eta_0 > 0 : B(u_0, \rho] \subset E \setminus N$. \blacklozenge

On veut prouver que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E$:

$$d(u, u_0) \leq \eta \implies |(1/f)(u) - (1/f)(u_0)| = \left| \frac{1}{f(u)} - \frac{1}{f(u_0)} \right| \leq \varepsilon.$$

Imposons d'emblée $\eta \leq \eta_0$ de façon à s'assurer l'estimation $|f(u)| \geq \frac{1}{2}|f(u_0)|$.

f étant continue en u_0 , $\frac{1}{2}|f(u_0)|\varepsilon > 0$ étant donné, $\exists \eta_1 > 0$ [$\eta_1 \leq \eta_0$], $\forall u \in E$:

$d(u, u_0) \leq \eta_1 \implies |f(u) - f(u_0)| \leq \frac{1}{2}|f(u_0)|\varepsilon$. On écrit maintenant :

$$\left| \frac{1}{f(u)} - \frac{1}{f(u_0)} \right| = \frac{|f(u) - f(u_0)|}{|f(u)| \cdot |f(u_0)|} \leq \frac{2}{|f(u_0)|^2} |f(u) - f(u_0)| \leq \frac{|f(u_0)|}{|f(u_0)|} \varepsilon = \varepsilon, \text{ pour}$$

tout $u \in E$ vérifiant $d(u, u_0) \leq \eta = \eta_1 (\leq \eta_0)$. \blacklozenge

Démontrons (2.7).

$\{u \in E / f(u) < g(u)\} = \{u \in E / (f - g)(u) < 0\} = (f - g)^{-1}(]-\infty, 0[)$, et on applique le Th. 2.1. \blacklozenge

Démontrons (2.8).

Comme ci-dessus, $\{u \in E / f(u) \leq g(u)\} = (f - g)^{-1}(]-\infty, 0])$. \blacklozenge

Démontrons (2.9).

$u \in \text{adh}(A) \Rightarrow \exists (a_n)_n$ telle que $\forall n : a_n \in A$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = u$. $\forall n : f(a_n) \leq g(a_n)$; on applique le Th. 2.2 et le principe de prolongement des inégalités à la limite. Attention : on n'a pas le même résultat avec $<$ qui passe à \leq à l'adhérence ! ♦

Démontrons (2.10). $A \subset \text{adh}(A) \Rightarrow f(A) \subset f[\text{adh}(A)]$ et f continue \Rightarrow [Th. 2.1] $f[\text{adh}(A)] \subset \text{adh} f(A)$. Donc : $\sup f(A) \leq \sup f[\text{adh}(A)] \leq \sup(\text{adh}[f(A)])$. Mais $\forall X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset : \sup(X) = \sup[\text{adh}(X)] \Rightarrow \sup(\text{adh}[f(A)]) = \sup f(A)$, et le résultat est démontré. ♦

Pour inf : $\inf(X) = -\sup(-X)$, et on applique le résultat concernant le sup à la fonction $-f$. ♦

☞ **Exercice 2.4.** (très facile) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, \{s \in \mathbb{R} / f(s) \leq \alpha\}$ est fermé dans \mathbb{R} . f est-elle continue sur \mathbb{R} ?

☞ **Exercice 2.5.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique, et soient $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ des parties fermées de E vérifiant $A \cap B = \emptyset$. Pour tout $u \in E$, on pose :

$$f(u) = \frac{d(u, A)}{d(u, A) + d(u, B)}.$$

Démontrez que f est une fonction continue sur E , que $u \in A \iff f(u) = 0$, que $u \in B \iff f(u) = 1$, que $0 < f(u) < 1$ pour tout $u \in E \setminus (A \cup B)$. Démontrez qu'il existe deux ouverts de E, U et V , tels que $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \emptyset$. Comment modifier f pour obtenir une fonction g continue sur E valant -1 sur $A, +1$ sur B , telle que $-1 < g(u) < +1$ pour $u \in E \setminus (A \cup B)$?

☞ **Exercice 2.6.** (assez difficile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ une e.v.n. sur $\mathbb{K}(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$, et soit A une partie de E telle que $A \neq \emptyset, A \neq E$. Le but de l'exercice est de prouver que A ne peut pas être à la fois ouverte et fermée dans $(E, \|\cdot\|)$. Supposons qu'elle soit effectivement ouverte et fermée, et on va arriver à une contradiction. Soient $u \in A$ et $v \in E \setminus A$ fixés, et soit $S := \{\lambda v + (1 - \lambda)u / \lambda \in [0, 1]\}$. Soit $f : [0, 1] \rightarrow S, \lambda \mapsto \lambda v + (1 - \lambda)u$. On pose : $B := A \cap S, C := (E \setminus A) \cap S, I := f^{-1}(B), J := f^{-1}(C)$. On a : $I \cap J = \emptyset, I \cup J = [0, 1], 0 \in I$ et $1 \in J$. Démontrez que $\alpha = \sup(I)$ appartient à I et à J , ce qui est la contradiction cherchée.

DÉMONSTRATIONS

Théorème 1.1.

(i) On suppose que f est continue au point $a \in E$. Soit $(u_n)_{n \in S}$ une suite de E convergente de limite a . Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe :

- $\eta > 0$ tel que $\forall u \in E : u \in B(a, \eta) \implies f(u) \in B(f(a), \varepsilon]$,
- $N \in S$ tel que $\forall n \in S : n \geq N \implies u_n \in B(a, \eta)$

et donc pour tout $n \geq N : u_n \in B(a, \eta) \implies f(u_n) \in B(f(a), \varepsilon]$: c'est dire que la suite $(f(u_n))_{n \in S}$ est convergente de limite $f(a)$. ♦

(ii) Supposons que pour toute suite $(u_n)_{n \in S}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n) = a$, la suite image $(f(u_n))_{n \in S}$ soit convergente, et supposons (raisonnement par contradiction) que f ne soit pas continue au point a .

Exprimons cette hypothèse :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists u \in E : u \in B(a, \eta) \text{ ET } f(u) \notin B(f(a), \varepsilon].$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; en prenant $\eta = \frac{1}{n}$, on peut trouver par conséquent $u_n \in B(a, \frac{1}{n})$ tel que $f(u_n) \notin B(f(a), \varepsilon]$.

Considérons alors la suite $(a, u_1, a, u_2, \dots, a, u_n, a, \dots)$: cette suite est convergente vers a . Par contre la suite image par $f : (f(a), f(u_1), f(a), \dots, f(a), f(u_n), f(a), \dots)$ est divergente car la distance entre deux termes consécutifs $\delta[f(a), f(u_n)]$ est $> \varepsilon > 0$.

Contradiction ! ♦

Proposition 1.1. Ce qu'on a, c'est :

- $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0, \forall u \in E : d(u, a) \leq \eta \implies \delta[f(u), f(a)] \leq \varepsilon,$
 - $\forall \varepsilon > 0, \exists \zeta_\varepsilon > 0, \forall v \in F : \delta[v, f(a)] \leq \zeta \implies \partial[g(v), g(f(a))] \leq \varepsilon,$
- et on veut : $\forall \varepsilon > 0, \exists \theta > 0, \forall u \in E : d(u, a) \leq \theta \implies \partial[g(f(u)), g(f(a))] \leq \varepsilon.$

Soit $\varepsilon > 0. \exists \zeta > 0, \forall v \in F : \delta[v, f(a)] \leq \zeta \implies \partial[g(v), g(f(a))] \leq \varepsilon$ et $\zeta > 0$ étant ainsi déterminé, $\exists \eta = \eta_\zeta > 0, \forall u \in E : d(u, a) \leq \eta \implies \delta[f(u), f(a)] \leq \zeta.$
 Donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E :$

$$d(a, u) \leq \eta \implies \delta[f(u), f(a)] \leq \zeta \implies \partial[g(f(u)), g(f(a))] \leq \varepsilon. \blacklozenge$$

Théorème 2.1.

$$(2.1) \implies (2.4)$$

Soit $u \in \text{adh}(A) :$ il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = u.$
 Puisque f est continue : $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n)) = f(u)$ [Th. 1.1 (i)]. Comme $f(a_n) \in f(A)$ pour tout n , on a bien $f(u) \in \text{adh}[f(A)].$ Donc : $f[\text{adh}(A)] \subset \text{adh}[f(A)]. \blacklozenge$

$$(2.4) \implies (2.3) \text{ Soit } B \text{ fermé dans } (F, \delta), \text{ et soit } A = f^{-1}(B).$$

$f[\text{adh}(A)] \subset \text{adh}[f(A)] = \text{adh}(f[f^{-1}(B)]) [= \text{adh}[B \cap f(E)]] \subset \text{adh}(B) = B.$
 Donc [cf. Com. 5] déf. 1.1 : $\text{adh}(A) \subset f^{-1}[f(\text{adh}(A))] \subset f^{-1}(B) = A ;$ et comme on a toujours $A \subset \text{adh}(A) : A = \text{adh}(A),$ et A est donc fermé. \blacklozenge

(2.3) \implies (2.2) Soit V un ouvert de $(F, \delta).$ $F \setminus V$ est fermé dans $F,$ d'où, par (2.3) : $f^{-1}(F \setminus V)$ est fermé dans $(E, d).$ Mais $f^{-1}(F \setminus V) = E \setminus f^{-1}(V)$ (formule ensembliste connue) qui est donc fermé et, par conséquent : $E \setminus [E \setminus f^{-1}(V)] = f^{-1}(V)$ est ouvert dans $(E, d).$ \blacklozenge

(2.2) \implies (2.1) Soit, pour tout $\varepsilon > 0, B(f(a), \varepsilon[:$ cette boule ouverte est un ouvert, et cet ouvert contient $a.$ Il existe donc une boule $B(a, \eta[\subset f^{-1}(B(f(a), \varepsilon[)$ ($\eta > 0$), et c'est fini. \blacklozenge

Théorème 2.2.

Soit $a \in E.$ Si f est continue et si $(u_n)_n$ est une suite convergente de limite $a :$ $(f(u_n))_n$ est convergente d'après le Th. 1.1 (on sait même que sa limite est $f(a).$) \blacklozenge

Réciproque : on suppose que f n'est pas continue en un point $a \in E,$ et on procède exactement comme dans (ii) du Th. 1.1. \blacklozenge

Fin de la partie cours du Chapitre VII

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ **Exercice 1.1.**

Il suffit [Th. 1.1, négation de (i)] de trouver une suite $(f_n)_n$ dans E telle que $\|f_n - \underline{0}\|_1 = \|f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|\underline{0}\|_1 = 0$ et telle que $\varphi(f_n) = f_n(\frac{1}{2})$ ne converge pas vers $\underline{0}(\frac{1}{2}) = 0$ [$\underline{0}$ est la fonction constante nulle]. On prend pour f_n des fonctions «chapeau pointu» (lesquelles font décidément grand usage) :

f_n vaut 0 sur $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}]$ et sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$ ($n \geq 3$), vaut 1 en $\frac{1}{2}$, est affine par morceaux et continue sur $[0, 1]$ (dessin !).

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)| dt = \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} f_n(t) dt = \text{aire du triangle} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{n} = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ tandis que } f_n(\frac{1}{2}) = 1 \text{ pour tout } n \text{ ne tend pas vers } 0 (!).$$

Remarquons, cela servira plus tard [Chap. X], que φ est une application linéaire de E dans \mathbb{R} , i.e. une forme linéaire sur E [un élément du dual E^* de E]. On vient de voir qu'il existe une suite (f_n) de E telle que $\lim(f_n) = \underline{0}$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$ tandis que $\varphi(f_n) = f_n(\frac{1}{2}) = 1$ ne tend pas vers $\varphi(\underline{0}) = 0$.

Soit à présent $f_0 \in E$ quelconque : $\lim(f_n + f_0) = \lim(f_n) + f_0 = f_0$ dans $(E, \|\cdot\|_1)$; si φ était continue en f_0 , on devrait avoir $\varphi(f_n + f_0) \rightarrow \varphi(f_0)$, soit :

$$\varphi(f_n) + \varphi(f_0) = f_n(\frac{1}{2}) + f_0(\frac{1}{2}) = 1 + f_0(\frac{1}{2}) \rightarrow \varphi(f_0) = f_0(\frac{1}{2}), \text{ ce qui est impossible.}$$

Par conséquent φ est discontinue en tout point de E . ♦

⊗ Exercice 1.2.

Le seul problème pour que $\|\cdot\|$ soit bien une norme est que $\|P\| = 0 \implies P = 0$. Mais si $\max_{0 \leq t \leq 1} |P(t)| = 0$, on a $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, et un polynôme qui s'annule pour une infinité de valeurs ne peut qu'être nul [si degré de $P \leq n$, et si P s'annule $n + 1$ fois, P est nul].

Soit $s \in [0, 1]$ fixé, et soit Ψ_s définie par $\Psi_s(P) = P(s)$. Notez que Ψ_s est une forme linéaire sur E . On veut démontrer que $\forall P \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall Q \in E$:

$$\|P - Q\| \leq \eta \implies |\Psi_s(P) - \Psi_s(Q)| \leq \varepsilon.$$

$$\text{Mais : } |\Psi_s(P) - \Psi_s(Q)| = |P(s) - Q(s)| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |P(t) - Q(t)| = \|P - Q\| :$$

il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$; Ψ_s est continue en tout point P de E . ♦

Soit à présent $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\Phi(P) = P(2)$. Notez que Φ est une forme linéaire sur E . Il suffit de trouver $(P_n)_n$ dans E telle que $\|P_n - \underline{0}\| = \|P_n\| \rightarrow \|\underline{0}\| = 0$ et telle que $(\Phi(P_n))_n$ ne tende pas vers $\Phi(\underline{0}) = 0$ ($\underline{0}$ est le polynôme nul).

$$\text{Prenons : } P_n(t) = 2^{-n}t^n : \|P_n\| = \frac{1}{2^n} \max_{0 \leq t \leq 1} |t^n| = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ mais :}$$

$\Phi(P_n) = P_n(2) = 1$ ne tend pas vers 0. Donc Φ n'est pas continue en 0. On peut démontrer que Φ n'est en fait continue en aucun point $P \in E$, exactement comme dans l'exercice 1.1. ♦

⊗ Exercice 1.3.

Soit $t \in \mathbb{Q}, t = p/q$ (irréductible). (on sait que tout élément de \mathbb{Q} peut être représenté par une fraction irréductible et une seule). On veut démontrer que f n'est pas continue en t , i.e. que $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists s \in \mathbb{R} : |t - s| \leq \eta$ et $|f(t) - f(s)| \geq \varepsilon$.

Pour $t = 0$, il suffit de faire $\varepsilon = \frac{1}{2}$: dans tout intervalle $[-\eta, +\eta]$ il y a des irrationnels s qui sont tels que $f(s) = 0$, d'où $|1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}$.

Si $t \neq 0, p \neq 0$, on prend $\varepsilon = \frac{1}{q}$ ($q \in \mathbb{N}^*$) : dans tout intervalle $[t - \eta, t + \eta]$ il y a des irrationnels s , et $f(s) = 0$, d'où : $|\frac{p}{q} - 0| = \frac{|p|}{q} \geq 1/q$ car $|p| \geq 1$. ♦

Nota : On aurait aussi pu remarquer que si t est rationnel, la suite $(t + \frac{\sqrt{2}}{n})$ converge vers t , mais que $f(t + \frac{\sqrt{2}}{n}) = 0$ ne converge pas vers $f(t) \neq 0$.

Soit à présent t irrationnel : $f(t) = 0$. On raisonnera sur les $t > 0$, ce qui ne diminue pas la généralité du raisonnement. On veut démontrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall s \in \mathbb{R}$ (en fait $s > 0$) : $|t - s| \leq \eta \implies |f(s)| \leq \varepsilon$.

Chaque fois que s est irrationnel, il n'y a pas de problème : $|f(s)| = 0 \leq \varepsilon$. Par contre, pour $q \in \mathbb{Q}, s = \frac{p}{q}$ [$p > 0, q > 0, p$ et q premiers entre eux] : $|f(s)| = \frac{1}{q}$ qu'on veut rendre $\leq \varepsilon$; cela sera réalisé quand $\frac{1}{q} \leq \varepsilon$, soit $q \geq \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1 = q_0$ ($[x]$ est la partie entière de $x \in \mathbb{R}$, i.e. l'entier n tel que $n \leq x < n + 1$). Donc, pour tout rationnel $\frac{p}{q}$ tel que $\frac{1}{q} \leq \varepsilon$, soit $q \geq q_0$, on aura l'inégalité voulue.

Il reste à prouver qu'on peut effectivement trouver un intervalle autour de t ne contenant que des rationnels de ce type.

Considérons d'abord l'intervalle $[[t], [t] + 1[$.

Alors l'ensemble $A := \{\frac{p}{q}$ irréductibles / $q < q_0$ et $[t] \leq \frac{p}{q} < [t] + 1\}$ est un ensemble FINI. En effet, l'ensemble des q tels que $1 \leq q < q_0$ est fini, et pour un tel q fixé, l'ensemble des p possibles est fini aussi puisqu'il est déterminé par $[t]q \leq p < ([t] + 1)q$. On enlève donc de $[[t], [t] + 1[$ cet ensemble fini et on prend ensuite un intervalle autour de t ne contenant aucun point de A (t ne peut pas être dans A !). La démonstration est terminée. ♦

☞ **Exercice 2.1.**

On sait (référence dans l'énoncé) que tout ouvert U de \mathbb{R} usuel s'écrit : $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$, où I_n est un intervalle ouvert, les I_n vérifiant $I_n \cap I_m = \emptyset$ pour tout $m \neq n$.

D'autre part, pour toute fonction $f : f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} f^{-1}(I_n)$.

Puisque toute réunion d'ouverts est ouverte, il nous suffit donc de prouver que tout $f^{-1}(I_n)$ est un ouvert de (E, d) sous l'hypothèse faite, et on conclura par le Th. 2.1. Or les I_n peuvent être de la forme suivante : $I_n = \emptyset$, $I_n = \mathbb{R}$, $I_n =]-\infty, \alpha[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $I_n =]\alpha, \beta[$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), $] \alpha, +\infty[$ ($\alpha \in \mathbb{R}$).

Mais $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = E$, et $f^{-1}(] \alpha, +\infty[)$ de même que $f^{-1}(] -\infty, \alpha[)$ sont ouverts par hypothèse. Il ne reste plus que $] \alpha, \beta[$, $\alpha < \beta$, à examiner ; mais :

$] \alpha, \beta[=] -\infty, \beta[\cap] \alpha, +\infty[$, et :

$f^{-1}(] \alpha, \beta[) = f^{-1}(] -\infty, \beta[\cap] \alpha, +\infty[) = f^{-1}(] -\infty, \beta[) \cap f^{-1}(] \alpha, +\infty[)$ est ouvert car intersection de deux ouverts. ♦

☞ **Exercice 2.2.**

Soit $(u_n, v_n)_n$ une suite de points de G convergent vers $(u, v) \in E \times F$. On va démontrer que $(u, v) \in G$. Par définition de $G : v_n = f(u_n)$ pour tout n . D'autre part, on sait que pour les distances usuelles sur $E \times F$:

$$(u_n, v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (u, v) \iff (u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} u \text{ ET } (v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} v \text{ [cf. Chap. III, Prop. 2.4].}$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$ et, comme f est continue, $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(u_n)) = f(u)$.

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = v = f(u)$ [unicité de la limite]. Finalement : $(u, v) = (u, f(u)) \in G$. ♦

On prend $E = [0, 1]$, $F = \mathbb{R}$, $f(0) = 0$ et $f(t) = \frac{1}{t}$ pour $t \in]0, 1]$. f est discontinue en $t = 0$. $G = \{(0, 0)\} \cup H$, où $H = \{(t, \frac{1}{t}) / t \in]0, 1]\}$. Il suffit de démontrer que H est fermé dans $[0, 1] \times \mathbb{R}$, ce qui est évident en dessinant H : il suffit de s'assurer que les points $(0, t)$, $t > 0$, ne sont pas adhérents à H , ce qui est évident par définition de l'asymptote (dessinez !). ♦

☞ **Exercice 2.3.**

On va démontrer que pour tout $r \in \mathbb{Q}$ (\mathbb{Q} partout dense dans \mathbb{R}), on a : $f(r) = f(1) \cdot r$. Comme f est continue par hypothèse, et comme elle coïncide sur \mathbb{Q} avec $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(1) \cdot t$ (qui est continue sur \mathbb{R} !), on aura d'après le Th. 2.3 : $f(t) = g(t) = f(1) \cdot t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$f(0+0) = f(0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0. \diamond$$

$$\forall t \in \mathbb{Q} : f(t + (-t)) = f(0) = 0 = f(t) + f(-t) \implies f(-t) = -f(t). \diamond$$

$$f(2t) = f(t + t) = f(t) + f(t) = 2f(t), \text{ et - par récurrence :}$$

$f(nt) = f((n-1)t + t) = f((n-1)t) + f(t) = (n-1)f(t) + f(t) = nf(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $t \in \mathbb{Q}$, on a : $f(nt) = nf(t)$. ♦

Soit maintenant un rationnel r ; on peut supposer, d'après ce qui précède, $r > 0$ et écrire $r = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. $f(r) = f(\frac{p}{q}) = p \cdot f(\frac{1}{q})$; mais $1 = \frac{q}{q}$, d'où : $f(1) = q \cdot f(\frac{1}{q})$ et $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q} f(1)$. D'où :

$$f(\frac{p}{q}) = f(r) = p \cdot (\frac{1}{q} \cdot f(1)) = \frac{p}{q} f(1) = r \cdot f(1), \text{ et le résultat. } \diamond$$

☞ **Exercice 2.4.**

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 0$ pour $t \in]-\infty, 0]$ et $f(t) = 1$ pour $t \in]0, +\infty[$. f est discontinue en 0. Démontrons que $\forall \alpha \in \mathbb{R} : N_\alpha = \{t \in \mathbb{R} / f(t) \leq \alpha\}$ est fermé dans \mathbb{R} .

Si $\alpha < 0 : N_\alpha = \emptyset$; si $0 \leq \alpha < 1 : N_\alpha =]-\infty, 0]$; si $\alpha \geq 1 : N_\alpha = \mathbb{R}$; tous les N_α sont fermés dans \mathbb{R} .

Donc : $[\forall \alpha \in \mathbb{R} : N_\alpha \text{ fermé}] \not\Rightarrow f$ continue sur \mathbb{R} . ♦

☞ **Exercice 2.5.**

$d(u, A) + d(u, B) = 0 \implies d(u, A) = 0 \text{ ET } d(u, B) = 0 \implies u \in \text{adh}(A) = A$
 $\text{ET } u \in \text{adh}(B) = B \implies u \in A \cap B = \emptyset$. Cette situation est impossible, et donc :
 $d(u, A) + d(u, B) > 0$ pour tout $u \in E$.

$u \mapsto d(u, A)$ et $u \mapsto d(u, B)$ sont continues sur E car contractantes. On applique la Prop. 2.4 : (2.5.1) et (2.6) nous permettent d'affirmer que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$u \mapsto f(u) = \frac{d(u, A)}{d(u, A) + d(u, B)}$ est (bien définie et) continue sur E . ♦

$$f(u) = 0 \iff d(u, A) = 0 \iff u \in \text{adh}(A) = A.$$

$$f(u) = 1 \iff d(u, A) = d(u, A) + d(u, B) \iff d(u, B) = 0 \\ \iff u \in \text{adh}(B) = B.$$

Enfin, pour $s, t \geq 0$: $\frac{s}{s+t} \in [0, 1]$, d'où : $0 \leq f(u) \leq 1$ pour tout $u \in E$, et $0 < f(u) < 1$ pour tout $u \in E \setminus (A \cup B)$.

Posons $U = f^{-1}(]-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}[)$ et $V = f^{-1}(] \frac{2}{3}, \frac{4}{3} [)$: U et V sont des ouverts [Th. 2.1], $A \subset U$ car $0 \in]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$, $B \subset V$ car $1 \in] \frac{2}{3}, \frac{4}{3} [$, et :

$$U \cap V = f^{-1}(]-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}[) \cap f^{-1}(] \frac{2}{3}, \frac{4}{3} [) = f^{-1}(]-\frac{1}{3}, +\frac{1}{3}[\cap] \frac{2}{3}, \frac{4}{3} [) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

On a là une version différente du résultat obtenu dans l'Exercice 2.8 du Chap. VI. ♦

La fonction $u \mapsto g(u) = 2f(u) - 1 = \frac{d(u, A) - d(u, B)}{d(u, A) + d(u, B)}$ répond à la question posée.

Autre manière de voir les choses : étant donnés A, B non vides fermés d'intersection vide, on a prolongé en une fonction f [resp. g] définie, continue et bornée sur E entier la fonction f_0 [resp. g_0] : $A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$ continue [vérifiez !] valant 0 sur A et 1 sur B [resp. -1 sur A et $+1$ sur B]. ♦

🔗 Exercice 2.6.

$A \neq \emptyset$, donc il existe $u \in A$; $A \neq E \implies E \setminus A \neq \emptyset$, donc il existe $v \in E \setminus A$. On fixe u et v ; notons que $u \neq v$. On a posé : $S := \{\lambda v + (1 - \lambda)u \mid \lambda \in [0, 1]\}$. $B = A \cap S$ est fermé dans S car A est fermé dans E ; $B \neq \emptyset$ car $u \in B$ ($\lambda = 0$).

$C = (E \setminus A) \cap S$ est fermé dans S car $E \setminus A$ est fermé dans E (A est ouvert dans E); $C \neq \emptyset$ car $v \in C$ ($\lambda = 1$).

$$B \cap C = A \cap (E \setminus A) \cap S = \emptyset; B \cup C = [A \cup (E \setminus A)] \cap S = S$$

$f : [0, 1] \rightarrow S$ est continue de $[0, 1]$ muni de la distance induite par \mathbb{R} usuel dans S muni de la distance induite par $(E, \|\cdot\|)$; en effet :

$$\|f(\lambda) - f(\mu)\| = \|\lambda v + (1 - \lambda)u - \mu v - (1 - \mu)u\| = \|(\lambda - \mu)v - (\lambda - \mu)u\| \\ = |\lambda - \mu| \cdot \|v - u\| \leq [\|u\| + \|v\|] \cdot |\lambda - \mu|.$$

On en déduit que I et J sont des fermés de $[0, 1]$.

D'autre part :

$$I \cap J = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(C) = f^{-1}(B \cap C) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset;$$

$$I \cup J = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(C) = f^{-1}(B \cup C) = f^{-1}(S) = [0, 1];$$

$$f(0) = u \in B \implies 0 \in I \text{ et } f(1) = v \in C \implies 1 \in J.$$

Soit $\alpha := \sup(I)$. I est fermé dans $[0, 1]$ qui est fermé dans $E \implies I$ est fermé dans \mathbb{R} et, donc : $\alpha = \sup(I) \in I$.

Par définition de α , on a donc : $] \alpha, 1 [\subset J$. D'où : $\text{adh}_{[0,1]}(] \alpha, 1 [) \subset \text{adh}_{[0,1]}(J) = J$, et $\text{adh}_{[0,1]}(] \alpha, 1 [) = \text{adh}_{\mathbb{R}}(] \alpha, 1 [) \cap [0, 1] =] \alpha, 1 [\cap [0, 1] =] \alpha, 1 [$. Donc $] \alpha, 1 [\subset J$, et en particulier $\alpha \in J$. Contradiction, puisque $\alpha \in I \cap J = \emptyset$. ♦

Conclusion : dans un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ il n'y a pas d'autres parties ouvertes et fermées que \emptyset et E . Mais, *attention*, dans un sous-espace métrique A de E e.v.n. il peut fort bien y avoir d'autres parties ouvertes et fermées que A et \emptyset ! (Cherchez un exemple très simple).

LECTURE-PROBLÈME

Partition continue de l'unité subordonnée à un recouvrement

Soit (E, d) un espace métrique.

1) Soient $F \neq \emptyset$ et $G \neq \emptyset$ deux fermés de E tels que $F \cap G = \emptyset$. Vérifiez que la fonction $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(u) = \frac{d(u, F)}{d(u, F) + d(u, G)}$ pour tout $u \in E$ possède les propriétés suivantes :

φ est continue sur E ; $\forall u \in E : 0 \leq \varphi(u) \leq 1$; $\varphi(u) = 0 \iff u \in F$;

$\varphi(u) = 1 \iff u \in G$. Dessinez le graphe de φ quand $E = \mathbb{R}$ usuel, $F = [-1, 0]$, $G = [1, 2]$.

2) On suppose que $E = U \cup V$ où U et V sont deux ouverts de E . Démontrez qu'il existe un ouvert W de E tel que : $\text{adh}(W) \subset U$ et $E = W \cup V$.

Indication :

Déterminez à l'aide de 1) un ouvert O de E tel que $E \setminus U \subset O \subset \text{adh}(O) \subset V$, puis prendre $W = E \setminus \text{adh}(O)$.

3) Soient $U_i, 1 \leq i \leq N, N$ ouverts de E tels que $E = \bigcup_{1 \leq i \leq N} U_i$. Démontrez qu'il existe N ouverts W_i de E tels que $\forall i, 1 \leq i \leq N : \text{adh}(W_i) \subset U_i$ et $E = \bigcup_{1 \leq i \leq N} W_i$.

4) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On définit les deux sous-ensembles de E suivants : $\sigma(f) := \text{adh}\{u \in E / f(u) \neq 0\}$ et $\alpha(f)$ par :

$u \in \alpha(f) \iff \exists \rho > 0, \forall v \in E : v \in B(u, \rho) \implies f(v) = 0$.

Démontrez que $\alpha(f)$ est un ouvert de E tel que $\sigma(f) = E \setminus \alpha(f)$. Déterminez $\alpha(f)$ et $\sigma(f)$ quand $E = \mathbb{R}$ usuel pour $f(t) = t$ et pour f identiquement nulle.

5) Supposons que $E = \bigcup_{1 \leq i \leq N} U_i$ où les U_i sont N ouverts de E tels que pour tout $i, 1 \leq i \leq N : U_i \neq \emptyset, U_i \neq E$. W_i désignant les N ouverts de E déterminés dans 3), démontrez qu'il existe N fonctions $\varphi_i : E \rightarrow [0, 1]$ continues sur E et telles que pour tout $i, 1 \leq i \leq N : \varphi_i(u) = 1$ si $u \in \text{adh}(W_i), \varphi_i(u) = 0$ si $u \in E \setminus U_i$.

On pose pour tout $u \in E$ et tout $i, 1 \leq i \leq N$:

$$\psi_i(u) := \max\{0, \varphi_i(u) - \frac{1}{2}\}, \quad \psi(u) := \sum_{1 \leq i \leq N} \psi_i(u), \quad \theta_i(u) := \frac{\psi_i(u)}{\psi(u)}.$$

a) Démontrez que : $\sigma(\psi_i) \subset \{u \in E / \varphi_i(u) \geq \frac{1}{4}\} \subset U_i$.

b) Démontrez que les fonctions θ_i sont des fonctions $E \rightarrow [0, 1]$ continues sur E et telles que : $\forall i, 1 \leq i \leq N : \sigma(\theta_i) \subset U_i, \forall u \in E : \sum_{1 \leq i \leq N} \theta_i(u) = 1$.

Pour $E = \mathbb{R}$ usuel, donnez un exemple (sur un dessin) de la situation étudiée dans cette question.

Application : [à traiter après l'étude du Chap. XIV] Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques compacts. On considère l'espace de Banach $\mathcal{E}_\infty = \mathcal{C}(E \times F, \mathbb{R})$ des fonctions $E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $E \times F$, muni de la norme uniforme : $\|f\|_\infty = \max_{(u,v) \in E \times F} |f(u, v)|$.

Soit \mathcal{A} le sous-ensemble de \mathcal{E}_∞ constitué par les fonctions de la forme :

$(u, v) \mapsto g(u).h(v)$, où $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $h : F \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur E et F respectivement.

Démontrez que \mathcal{A} est une famille totale dans \mathcal{E}_∞ .

Indication : Soient $f \in \mathcal{E}_\infty$ et $\varepsilon > 0$ donnés. Recouvrez E [resp. F] par un nombre fini de boules ouvertes déterminées par f et ε ; utilisez 5) pour construire un f_ε appartenant à l'espace vectoriel engendré par \mathcal{A} .

CORRIGÉ DE LECTURE-PROBLÈME

1) C'est l'Exercice 2.5. ♦

Exemple : $E = \mathbb{R}$, $F = [-1, 0]$ et $G = [1, 2]$. Dessinez !

$\varphi(t) = 0$ sur F et $\varphi(t) = 1$ sur G ;

pour $0 \leq t \leq 1$: $d(t, F) = d(t, \{0\}) = t$, $d(t, G) = d(t, \{1\}) = 1 - t$, donc

$$\varphi(t) = \frac{t}{t + 1 - t} = t;$$

pour $t \geq 2$: $d(t, F) = d(t, \{0\}) = t$, $d(t, G) = d(t, \{2\}) = t - 2$, donc

$$\varphi(t) = \frac{t}{t + t - 2} = \frac{t}{2t - 2};$$

pour $t \leq -1$: $d(t, F) = d(t, \{-1\}) = -t - 1$, $d(t, G) = d(t, \{1\}) = 1 - t$, donc

$$\varphi(t) = \frac{-t - 1}{-t - 1 + 1 - t} = \frac{t + 1}{2t}.$$

Nous vous laissons le soin de représenter le graphe de φ . ♦

2) Si l'on sait construire un ouvert O tel que $E \setminus U \subset O \subset \text{adh}(O) \subset V$, il suffira de considérer $W := E \setminus \text{adh}(O)$.

En effet : $\text{adh}(O)$ est fermé $\implies W = E \setminus \text{adh}(O)$ est ouvert dans E ; notons tout d'abord qu'on a : $O \subset \text{int}[\text{adh}(O)]$, en effet :

$O \subset \text{adh}(O) \implies \text{int}(O) = O \subset \text{int}[\text{adh}(O)]$, puisque O est un ouvert.

On a donc :

$$E \setminus U \subset O \subset \text{int}[\text{adh}(O)]$$

$$\implies E \setminus (E \setminus U) = U \supset \mathbb{C}_E(\text{int}[\text{adh}(O)]) = \text{adh}(\mathbb{C}_E[\text{adh}(O)]) = \text{adh}(W);$$

$$W \cup U = (\mathbb{C}_E \text{adh}(O)) \cup V \text{ et } \text{adh}(O) \subset V \implies \mathbb{C}_E \text{adh}(O) \supset \mathbb{C}_E V, \text{ d'où :}$$

$$W \cup U \supset (\mathbb{C}_E V) \cup V = E. \spadesuit$$

Passons à la construction de l'ouvert O .

Si $U = E$, on prend $O = \emptyset$, et on a bien quel que soit V :

$$\mathbb{C}_E U = \emptyset \subset \emptyset \subset \text{adh}(\emptyset) (= \emptyset) \subset V;$$

de même, si $V = E$, on prend $O = E$, et on a bien, quel que soit U :

$$\mathbb{C}_E U \subset E \subset \text{adh}(E) \subset V (= E).$$

On peut donc supposer que $U \neq E$ et $V \neq E$. Considérons alors $F = \mathbb{C}_E U$ et $G = \mathbb{C}_E V$: $F \neq \emptyset$ et $G \neq \emptyset$. F et G complémentaires d'ouverts sont des fermés.

$$F \cap G = (\mathbb{C}_E U) \cap (\mathbb{C}_E V) = \mathbb{C}_E(U \cup V) = \mathbb{C}_E E = \emptyset. \spadesuit$$

On est alors dans les conditions d'application du 1) : il existe $\varphi : E \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $\varphi(u) = 0$ pour $u \in \mathbb{C}_E U = F$ et $\varphi(u) = 1$ pour $u \in \mathbb{C}_E V = G$.

Posons : $O := \{v \in E / \varphi(v) < \frac{1}{2}\}$ (avec $\frac{1}{4}$ ou $\frac{1}{10}$ ça marche aussi bien !).

$O = \varphi^{-1}(]-\infty, \frac{1}{2}[) = \varphi^{-1}([0, \frac{1}{2}[)$ est un ouvert de E ; pour $u \in F$: $\varphi(u) = 0$, donc $u \in O$: $\mathbb{C}_E U \subset O$.

Considérons maintenant le fermé $A := \{v \in E / \varphi(v) \leq \frac{1}{2}\}$;

$$v \in A \implies \varphi(v) \leq \frac{1}{2} \implies \varphi(v) \neq 1 \implies v \notin \mathbb{C}_E V \implies v \in V : A \subset V.$$

Soit $w \in \text{adh}(O)$: il existe une suite $(w_n)_n$ d'éléments de O ($O \neq \emptyset$ car $\mathbb{C}_E U \subset O$ et $\mathbb{C}_E U \neq \emptyset$) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (w_n) = w$.

$$\varphi(w_n) < \frac{1}{2} \implies \varphi(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(w_n) \leq \frac{1}{2} \text{ puisque } \varphi \text{ est continue, et, donc : } w \in A.$$

Comme $O \subset \text{adh}(O)$, on a la chaîne d'inclusions : $\mathbb{C}_E U \subset O \subset \text{adh}(O) \subset A \subset V$.

D'où le résultat cherché. ♦

3) La démonstration se fait bien entendu par récurrence en utilisant le résultat précédent.

Ecrivons : $E = \bigcup_{1 \leq i \leq N} U_i = U_1 \cup (\bigcup_{2 \leq i \leq N} U_i) = U_1 \cup V_1$; en posant : $V_1 := \bigcup_{2 \leq i \leq N} U_i$. V_1 est un ouvert.

D'après 2), il existe W_1 ouvert tel que :

$$\text{adh}(W_1) \subset U_1 \text{ et } E = W_1 \cup V_1 = W_1 \cup (\bigcup_{2 \leq i \leq N} U_i).$$

Supposons obtenus pour $j = 1, \dots, k-1$ des ouverts W_j vérifiant $\text{adh}(W_j) \subset U_j$ et

$$E = [\bigcup_{1 \leq j \leq k-1} W_j] \cup [\bigcup_{k \leq i \leq N} U_i]; \text{ on a :}$$

$E = U_k \cup V_k$, où V_k est un ouvert. D'après 2), il existe W_k ouvert tel que $\text{adh}(W_k) \subset U_k$ et $E = W_k \cup V_k$. Donc, pour $1 \leq j \leq k$, on a obtenu des ouverts W_j tels que $\text{adh}(W_j) \subset U_j$ et

$$E = W_k \cup [\bigcup_{1 \leq j \leq k-1} W_j] \cup [\bigcup_{k+1 \leq i \leq N} U_i] = [\bigcup_{1 \leq j \leq k} W_j] \cup [\bigcup_{k+1 \leq i \leq N} U_i].$$

Pour $k = N$ on a le résultat voulu. ♦

$$\begin{aligned} 4) \bigcup_E \sigma(f) &= \bigcup_E \text{adh}(\{u \in E / f(u) \neq 0\}) = \text{int}(\bigcup_E \{u \in E / f(u) \neq 0\}) \\ &= \text{int}(\{u \in E / f(u) = 0\}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v \in \text{int}(\{u \in E / f(u) = 0\}) &\iff \exists \rho > 0, B(v, \rho[\subset \{u \in E / f(u) = 0\} \\ &\iff \exists \rho > 0, \forall w \in E : w \in B(v, \rho[\implies f(w) = 0. \end{aligned}$$

Donc : $\text{int}(\{u \in E / f(u) = 0\}) = \alpha(f)$ et : $E \setminus \sigma(f) = \alpha(f) \implies \sigma(f) = E \setminus \alpha(f)$.

$\sigma(f)$ est un fermé de E appelé le **support** de f , et souvent noté $\text{supp}(f)$. $\alpha(f)$ est parfois appelé l'**annulation** de f : c'est l'intérieur (donc un ouvert) de l'ensemble des points où f s'annule. ♦

Cas particuliers :

$f(t) = t$: $f(t) = 0 \iff t = 0$, d'où : $\alpha(f) = \text{int}(\{0\}) = \emptyset$, $\sigma(f) = \text{adh}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathbb{R}$.

$f(t) = 0$: $\alpha(f) = \text{int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $\sigma(f) = \text{adh}(\emptyset) = \emptyset$. ♦

5) On a d'après 3) : il existe N ouverts W_i vérifiant pour tout $i = 1, \dots, N$: $\text{adh}(W_i) \subset U_i$ et $E = \bigcup_{1 \leq i \leq N} W_i$.

Par construction [cf. 2)] les W_i ne sont pas vides. Donc, pour tout $i = 1, \dots, N$: $\text{adh}(W_i)$ et $\bigcup_E U_i$ sont des fermés non vides.

Comme $W_i \subset \text{adh}(W_i) \subset U_i$, on a : $\text{adh}(W_i) \cap \bigcup_E U_i = \emptyset$.

On applique le 1) et il existe N fonctions $\varphi_i : E \rightarrow [0, 1]$ continues sur E et telles que pour tout $i = 1, \dots, N$: $\varphi_i(u) = 1$ si $u \in \text{adh}(W_i)$ et $\varphi_i(u) = 0$ si $u \in \bigcup_E U_i$. ♦

a) Les fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto \psi_i(u) = \max\{0, \varphi_i(u) - \frac{1}{2}\}$ sont continues sur E [Chap. VII], $0 \leq \psi_i(u) \leq \frac{1}{2}$ pour tout $u \in E$, $\psi_i(u) = \frac{1}{2}$ pour $u \in \text{adh}(W_i)$, $\psi_i(u) = 0$ pour $u \in \bigcup_E U_i$.

Si $\varphi_i(u) \geq \frac{1}{4}$, on a $u \notin \bigcup_E U_i$, d'où : $u \in U_i$.

Si $\varphi_i(u) < \frac{1}{4}$, on a : $-\frac{1}{2} \leq \varphi_i(u) - \frac{1}{2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \implies \psi_i(u) = 0$
 $\implies u \in \alpha(\psi_i) \implies u \notin \sigma(\psi_i)$.

Donc : $u \in \sigma(\psi_i) \implies \varphi_i(u) \geq \frac{1}{4}$. D'où : $\sigma(\psi_i) \subset \{u \in E / \varphi_i(u) \geq \frac{1}{4}\} \subset U_i$. ♦

b) $\psi(u) = \sum_{1 \leq i \leq N} \psi_i(u)$ est toujours ≥ 0 , puisque $\psi_i(u) \geq 0$ pour tout $u \in E$ et tout $i = 1, \dots, N$.

$E = \bigcup_{1 \leq i \leq N} W_i \implies$ tout $u \in E$ appartient à un W_j au moins. et $\psi_j(u) = \frac{1}{2}$, donc : $\psi(u) > 0$ pour tout $u \in E$.

$\theta_i = \frac{\psi_i}{\psi}$ est par conséquent une fonction $E \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur E , à valeurs dans $[0, 1]$.

Evidemment, $\sigma(\theta_i) = \sigma(\psi_i)$ et donc, par a) : $\sigma(\theta_i) \subset U_i$.

θ_i , pour $i = 1, \dots, N$ fixé, peut prendre des valeurs > 0 ou $= 0$ sur U_i , mais $\theta_i = 0$ sur $\bigcup_E U_i$.

Enfin : $\sum_{1 \leq i \leq N} \theta_i(u) = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{\psi_i(u)}{\psi(u)} = \frac{1}{\psi(u)} \sum_{1 \leq i \leq N} \psi_i(u) = 1$ pour tout $u \in E$. ♦

On dit, classiquement, que la famille $(\theta_i)_{1 \leq i \leq N}$ est une **partition de l'unité continue, subordonnée au recouvrement de E par la famille d'ouverts $(U_i)_{1 \leq i \leq N}$** .

La terminologie s'explique par le fait que, $\mathbf{1}$ désignant la fonction constante égale à 1 sur E , on a : $\mathbf{1} = \sum_{1 \leq i \leq N} \theta_i$. Cette notion est absolument fondamentale, particulièrement en géométrie différentielle et dans toutes les mathématiques qui l'utilisent : équations aux dérivées partielles par exemple.

L'application que nous donnons est – elle – empruntée à l'analyse fonctionnelle. Le résultat obtenu est une conséquence directe du Th. de Stone-Weierstraß, une généralisation du Th. de Weierstraß : voir Lecture / Problème du Chap. XIV.

Arrivant ici, vous avez acquis le droit de contempler une partition de l'unité continue subordonnée à un recouvrement . . .

On prend $E = [0, 1]$ et le recouvrement ouvert suivant, $\varepsilon > 0$ donné étant petit ($\varepsilon = 1/100$ par exemple) : $U_1 = [0, \frac{1}{8} + \varepsilon]$, $U_2 = [0, \frac{3}{8} + \varepsilon]$, $U_3 =]\frac{2}{8} - \varepsilon, \frac{6}{8} + \varepsilon]$, $U_4 =]\frac{4}{8} - \varepsilon, \frac{7}{8} + \varepsilon]$, $U_5 =]\frac{6}{8} - \varepsilon, 1]$, correspondant à un partage de $[0, 1]$ en 8 parties égales.

On prend pour θ_i des fonctions en forme de trapèze, sauf sur les intervalles des extrémités (on aurait aussi bien pu prendre des « chapeaux pointus »).

$$\theta_1(t) = -8t + 1 \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{8}, \theta_1(t) = 0 \text{ si } \frac{1}{8} \leq t \leq 1.$$

$$\theta_2(t) = 8t \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{1}{8}, \theta_2(t) = 1 \text{ si } \frac{1}{8} \leq t \leq \frac{2}{8}, \theta_2(t) = -8t + 3 \text{ si } \frac{2}{8} \leq t \leq \frac{3}{8},$$

$$\theta_2(t) = 0 \text{ si } \frac{3}{8} \leq t \leq 1.$$

$$\theta_3(t) = 0 \text{ si } 0 \leq t \leq \frac{2}{8} \text{ et si } \frac{5}{8} < t \leq 1, \theta_3(t) = 8t - 2 \text{ si } \frac{2}{8} \leq t \leq \frac{3}{8}, \text{ etc.}$$

Construisez θ_4 et θ_5 , et dessinez tous les graphes sur une même figure (voir p. 150).

Application :

Sur $E \times F$ on met une distance définissant la topologie produit, par exemple :

$$d_\infty[(u, v), (u', v')] = \max\{d(u, u'), d(v, v')\}.$$

$(E \times F, d_\infty)$ est – on le sait – un espace métrique compact. Soit $f \in \mathcal{E}_\infty$ arbitraire et $\varepsilon > 0$ fixé. f continue sur le compact $E \times F$, y est [Th. de Heine, Chap. XIV] uniformément continue :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (u, v) \in E \times F, \forall (u', v') \in E \times F :$

$$d_\infty[(u, v), (u', v')] \leq \eta \implies |f(u, v) - f(u', v')| \leq \varepsilon.$$

On en déduit qu'à tout couple $(u, v) \in E \times F$ on peut faire correspondre des boules ouvertes $B_E(u, \eta]$, $B_F(v, \eta]$ telles que :

$$\forall u' \in B_E(u, \eta], \forall v' \in B_F(v, \eta] : |f(u, v) - f(u', v')| \leq \varepsilon.$$

La famille $(B_E(u, \eta])_{u \in E}$ [resp. $(B_F(v, \eta])_{v \in F}$] est un recouvrement ouvert de E [resp. F]. Comme E [resp. F] est compact, on peut extraire les recouvrements ouverts finis $(B_E(u_i, \eta])_{i=1, \dots, N}$ de E et $(B_F(v_j, \eta])_{j=1, \dots, M}$ de F .

Considérons une partition de l'unité continue subordonnée au recouvrement de E par $(B_E(u_i, \eta])_{i=1, \dots, N}$, soit $(\theta_i)_{1 \leq i \leq N}$. De même pour F et $(B_F(v_j, \eta])_{j=1, \dots, M}$, soit $(\tau_j)_{1 \leq j \leq M}$.

Définissons alors une fonction $f_\varepsilon : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f_\varepsilon(u, v) := \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(u_i, v_j) \cdot \theta_i(u) \cdot \tau_j(v).$$

La fonction f_ε est clairement continue sur $E \times F$ et appartient à l'espace vectoriel engendré par l'ensemble \mathcal{A} .

Il ne nous reste plus qu'à prouver que

$$\|f - f_\varepsilon\|_\infty = \max_{(u,v) \in E \times F} |f(u, v) - f_\varepsilon(u, v)| \leq \varepsilon.$$

Comme $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \theta_i(u) \tau_j(v) = \sum_{i=1}^N \theta_i(u) \left(\sum_{j=1}^M \tau_j(v) \right) = \sum_{i=1}^N \theta_i(u) = 1$, on peut écrire pour tous $(u, v) \in E \times F :$

$$\begin{aligned} |f(u, v) - f_\varepsilon(u, v)| &= \left| \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(u, v) \cdot \theta_i(u) \cdot \tau_j(v) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M f(u_i, v_j) \cdot \theta_i(u) \cdot \tau_j(v) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M |f(u, v) - f(u_i, v_j)| \theta_i(u) \cdot \tau_j(v). \end{aligned}$$

Dans cette somme les termes d'indice i tels que $u \notin B_E(u_i, \eta]$ sont nuls car $\theta_i(u) = 0$, de même pour les termes d'indice j tels que $v \notin B_F(v_j, \eta]$ car $\tau_j(v) = 0$.

Il ne reste plus que les termes pour lesquels $u \in B_E(u_i, \eta]$ et $v \in B_F(v_j, \eta]$, auquel cas on a : $|f(u, v) - f(u_i, v_j)| \leq \varepsilon$.

Donc, en notant R l'ensemble des couples (i, j) qui restent :

$$|f(u, v) - f_\varepsilon(u, v)| \leq \sum_{(i,j) \in R} \varepsilon \cdot \theta_i(u) \tau_j(v) \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \varepsilon \cdot \theta_i(u) \tau_j(v) = \varepsilon.$$

En définitive : $|f(u, v) - f_\varepsilon(u, v)| \leq \varepsilon$ quel que soit $(u, v) \in E \times F$; d'où le résultat attendu. ♦

Ce résultat *important* explique – partiellement – pourquoi sont intéressantes les solutions de la forme $F(x).G(y)$ d'une équation aux dérivées partielles comme $\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$: avec les combinaisons linéaires de ces solutions particulières, on peut approcher une solution quelconque.

Fin du Chapitre VII

CHAPITRE VIII

APPLICATIONS UNIFORMÉMENT CONTINUES. HOMÉOMORPHISMES

Introduction

Ce huitième chapitre parle des *applications uniformément continues* d'une part, de la notion d'*homéomorphisme* d'autre part.

Deux sujets parfaitement sans relation entre eux qui ne sont rassemblés ici que pour des questions de découpage du programme en chapitres sensiblement égaux.

Les propriétés vraiment intéressantes (les vrais théorèmes importants) des applications uniformément continues – ainsi d'ailleurs que des applications continues – n'apparaîtront qu'un peu plus loin, avec les espaces complets et les espaces compacts (Chap. XII et XIV).

Cette notion de continuité uniforme, inventée par Heine, a tragiquement manqué aux mathématiciens du milieu du XIX^e siècle, en particulier à Cauchy, et les a souvent empêché de donner des démonstrations vraiment complètes.

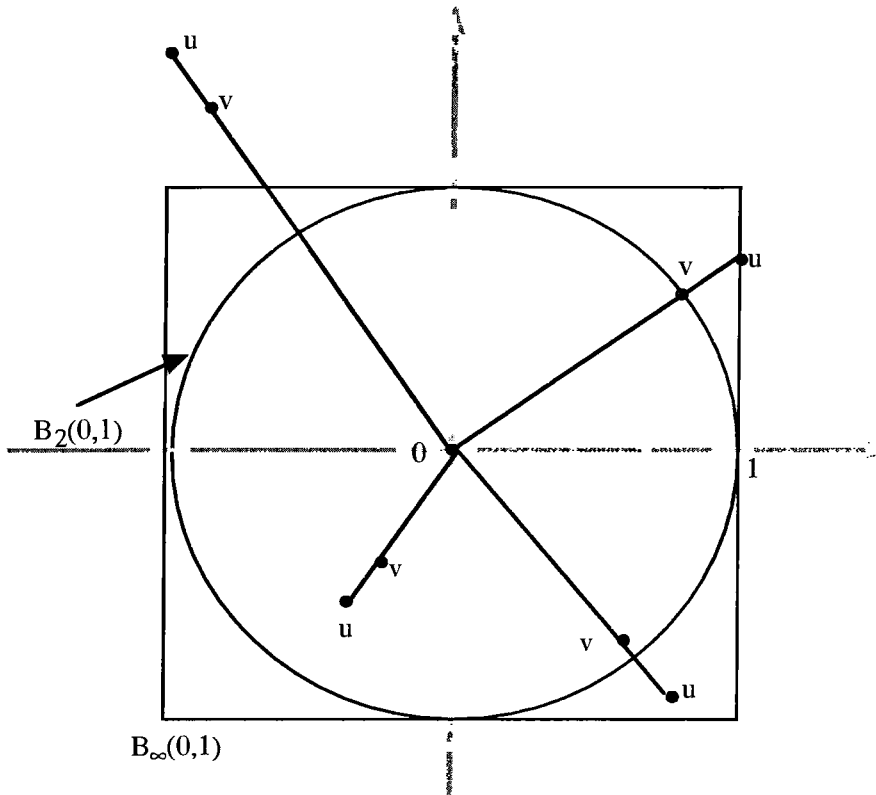
La notion d'homéomorphisme est fondamentale en topologie : des dizaines de milliers de pages sont consacrées dans la littérature mathématique à démontrer que des espaces topologiques sont – ou ne sont pas – homéomorphes. On a construit des théories entières (homotopie, homologie) afin « d'algébriser » le problème des espaces homéomorphes ou pas.

Nous proposons une classification des diverses notions introduites (ou qui seront introduites plus tard) : notions topologiques, notions uniformes, notions « bornologiques », notions purement métriques, qui peut sembler un peu abstraite à ce stade du cours, mais qui vous rendra service plus tard (par exemple lors des révisions !), ne serait-ce que pour clarifier vos connaissances.

☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 2.1, 2.2.

☞ Exercices complémentaires : 2.3, 2.4 (facultatif).

IL NE ME RESTE PLUS QU'À VOUS SOUHAITER UN BON TRAVAIL ...



Exercice 2.3 : projection radiale

$$f(u) = \frac{\|u\|_\infty}{\|u\|_2} u ; \quad v = f(u) \implies \|v\|_2 = \|u\|_\infty$$

CHAPITRE VIII

APPLICATIONS UNIFORMÉMENT CONTINUES. HOMÉOMORPHISMES

1. CONTINUITÉ UNIFORME

Soient (E, d) , (F, δ) des espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$ une application continue sur E . Elle vérifie donc :

$$\forall u \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v \in E : d(u, v) \leq \eta \implies \delta(f(u), f(v)) \leq \varepsilon.$$

Le $\eta > 0$ dépend à la fois de $\varepsilon > 0$ et du point $u \in E$; autrement dit, on a : $\eta = \eta(\varepsilon, u)$.

Si l'on impose à η de ne pas dépendre de $u \in E$, mais seulement de ε , on obtient la définition d'un objet plus restrictif qu'une fonction continue sur E :

Définition 1.1.

Soient (E, d) , (F, δ) des espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$. f est dite **uniformément continue** sur E si l'on a :

$$(1.1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E, \forall v \in E : d(u, v) \leq \eta \implies \delta(f(u), f(v)) \leq \varepsilon.$$

On peut exprimer cette propriété en termes de *diamètre* d'une partie [Chap. I,

Déf. (3.4) : $\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y) / x \in E, y \in E\}$:

$$(1.2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \subset E : \text{diam}(A) \leq \eta \implies \text{diam}(f(A)) \leq \varepsilon$$

Commentaire :

La notion d'application uniformément continue sur un espace métrique est beaucoup plus liée au cadre des espaces métriques que ne l'est la notion d'application continue. On n'aura pas d'équivalent du Th. 2.1 du Chap. VII : la notion ne peut pas s'exprimer en termes d'ouverts seulement, *i.e.* de topologie.

Proposition 1.1.

|| Si $f : E_d \rightarrow F_\delta$ est **uniformément continue** sur E_d , elle est **continue** sur E_d .

Démonstration : Evident, par définition même. ♦

Proposition 1.2.

|| Soit $f : E_d \rightarrow F_\delta$ une application **uniformément continue** sur E , on a :

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall (v_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} (d(u_n, v_n))_n = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} (\delta(f(u_n), f(v_n)))_n = 0.$$

Démonstration : Evident d'après la formulation (1.2). ♦

Commentaire : Cette Proposition est surtout utile sous sa forme contraposée (on a : $[P \implies Q] \iff [\neg Q \implies \neg P]$) pour prouver qu'une application *n'est pas* uniformément continue.

Exemple 1.1. $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^2$ est continue sur \mathbb{R} , mais elle *n'est pas* uniformément continue sur \mathbb{R} . Prenons en effet les suites : $s_n := n$ et $t_n := n + \frac{1}{n}$;

$$|t_n - s_n| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ tandis que : } |t_n^2 - s_n^2| = |n^2 + 2n \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} - n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2.$$

Exemple 1.2. $]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto 1/t$ est continue sur $]0, 1[$, mais elle n'est pas uniformément continue sur $]0, 1[$. Prenons les suites : $t_n := \frac{1}{n}, s_n := \frac{1}{n+1}$:

$$|t_n - s_n| = \frac{1}{n(n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ mais : } \left| \frac{1}{t_n} - \frac{1}{s_n} \right| = |n - (n+1)| = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Définition 1.2.

On appelle *module de continuité* toute fonction $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ qui est croissante, telle que $\varphi(0) = 0$, et continue en 0.

On dira qu'une application $f : E_d \rightarrow F_\delta$ admet φ comme *module de continuité* si l'on a :

$$(1.3) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : \delta(f(u), f(v)) \leq \varphi(d(u, v)).$$

Proposition 1.3.

Si $f : E_d \rightarrow F_\delta$ admet un module de continuité φ : f est uniformément continue sur E .

Démonstration :

$\lim_{t \rightarrow 0, t \geq 0} \varphi(t) = \varphi(0) = 0$, donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in [0, +\infty[:$
 $0 \leq t \leq \eta \implies \varphi(t) \leq \varepsilon$. Par conséquent, $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E, \forall v \in E :$
 $d(u, v) \leq \eta \implies \delta(f(u), f(v)) \leq \varphi(d(u, v)) \leq \varepsilon$. ♦

Remarque :

Réciproquement, si $f : E_d \rightarrow F_\delta$ est uniformément continue sur E , elle admet le module de continuité suivant défini pour $t \geq 0$:

$$\varphi(t) = \sup\{\text{diam}(f(A)) \mid A \subset E, \text{diam}(A) \leq t\}.$$

Nous n'irons pas plus loin sur cette question.

Exemples 1.3. (IMPORTANT)

Les applications $f : E_d \rightarrow F_\delta$ qui admettent $\varphi(t) = C \cdot t^\alpha$, C réel ≥ 0 , α réel > 0 , comme module de continuité sont dites *höldériennes*, de *constante* C et d'*ordre* α sur E . Si $\alpha = 1$, on parle plutôt d'application *lipschitzienne* sur E , et C est appelée la *constante de Lipschitz* de l'application [cf. Chap. I].

Rappelons [Chap. I] que dans ce cas, si $C = 1$ on dit que f est *contractante* sur E ; et si $0 \leq C < 1$ on dit que f est *strictement contractante* sur E .

On retiendra surtout le fait qu'une application $E_d \rightarrow F_\delta$ lipschitzienne sur E est uniformément continue sur E ; *a fortiori* toute application contractante sur E est uniformément continue sur E .

En particulier, toute *isométrie* de E dans F , i.e. toute application vérifiant :

$$\forall u \in E, \forall v \in E : \delta(f(u), f(v)) = d(u, v),$$

est contractante sur E , et donc uniformément continue sur E .

Exemples 1.4.

1) Soit (E, d) un espace métrique, et soit $A \subset E, A \neq \emptyset$. On considère $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(u) := d(u, A) = \inf_{a \in A} d(u, a)$. On sait [Chap. I (3.9)] que : $|f(u) - f(v)| = |d(u, A) - d(v, A)| \leq d(u, v)$; f est *contractante* sur E , donc uniformément continue sur E . ♦

2) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

i) La fonction norme $E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto g(u) = \|u\|$ est *contractante* sur E :

$$|g(u) - g(v)| = \left| \|u\| - \|v\| \right| \leq \|u - v\|. \quad \blacklozenge$$

ii) Pour tout $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ fixé, l'application $h : E \rightarrow E, u \mapsto h(u) = \lambda_0 \cdot u$ est une application lipschitzienne sur E de constante $|\lambda_0|$:

$$\|h(u) - h(v)\| = \|\lambda_0 \cdot u - \lambda_0 \cdot v\| = |\lambda_0| \cdot \|u - v\|.$$

h est contractante $\iff |\lambda_0| \leq 1$, strictement contractante $\iff |\lambda_0| < 1$. Si $|\lambda_0| = 1$, h est une isométrie de E sur E . ♦

iii) Pour tout $u_0 \in E$ fixé, l'application $j : \mathbb{K} \rightarrow E, \lambda \mapsto j(\lambda) = \lambda \cdot u_0$, est lipschitzienne sur \mathbb{K} de constante $\|u_0\|$:

$$\|j(\lambda) - j(\mu)\| = \|\lambda u_0 - \mu u_0\| = \|u_0\| \cdot |\lambda - \mu|.$$

j est contractante $\iff \|u_0\| \leq 1$, strictement contractante $\iff \|u_0\| < 1$. Si $\|u_0\| = 1$, j est une isométrie de \mathbb{K} dans E (ou de \mathbb{K} sur $[u_0]$). ♦

iv) L'application $\sigma : E \times E \rightarrow E, (u, v) \mapsto u + v$, vérifie :

$$\|\sigma(u, v) - \sigma(u', v')\| = \|(u + v) - (u' + v')\| \leq \|u - u'\| + \|v - v'\|.$$

Si l'on munit $E \times E$ de la distance $d_1[(u, v), (u', v')] = \|u - u'\| + \|v - v'\|$, σ est contractante sur $E \times E$. σ est lipschitzienne de constante 2, si l'on munit $E \times E$ de la distance $d_\infty[(u, v), (u', v')] = \max\{\|u - u'\|, \|v - v'\|\}$. ♦

v) $\pi : \mathbb{K} \times E \rightarrow E, (\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u$ est continue sur $\mathbb{K} \times E$ mais n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{K} \times E$. Cela est intuitivement évident d'après l'Exemple 1.1, mais démontrons-le quand même.

Munissons $\mathbb{K} \times E$ de la distance d_1 [comme dans iv)] et fixons $\hat{u} \neq 0$; considérons les suites de $\mathbb{K} \times E : x_n := (\lambda_n, u_n) = ((n + \frac{1}{n})\hat{u}, n\hat{u})$ et $y_n := (\mu_n, v_n) = (n, n\hat{u})$. $d_1(x_n, y_n) = |(n + \frac{1}{n}) - n| + \|n\hat{u} - n\hat{u}\| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, mais :

$$\|\pi(x_n) - \pi(y_n)\| = \|\lambda_n \cdot u_n - \mu_n \cdot v_n\| = \|(n + \frac{1}{n}) \cdot n\hat{u} - n \cdot n\hat{u}\| = \|\hat{u}\| \neq 0 \text{ ne tend pas vers } 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty. \blacklozenge$$

☞ **Exercice 1.1.** (facile) Démontrez que π de v) ci-dessus est uniformément continue sur toute partie bornée B de $\mathbb{K} \times E$ [B étant l'espace métrique $(B, d_1|_{B \times B})$].

vi) Toute translation $\tau : E \rightarrow E, u \mapsto \tau(u) = u + a$ est une isométrie de E sur E :

$$\|\tau(u) - \tau(v)\| = \|u + a - (v + a)\| = \|u - v\|. \blacklozenge$$

3) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel.

• $\forall a \in E$ fixé, la fonction φ [c'est une forme linéaire] $E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \varphi(u) = (u|a)$ est lipschitzienne de constante $\|a\|$:

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| = |(u|a) - (v|a)| = |(u - v|a)| \leq \|a\| \cdot \|u - v\|$$

[inégalité de Cauchy-Schwarz : Chap. II (5.8)]. φ est une contraction $\iff \|a\| \leq 1$,

une contraction stricte $\iff \|a\| < 1$. ♦

• $\Pi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \Pi(u, v) = (u|v)$ est continue mais pas uniformément continue sur $E \times E$ [même argumentation que dans 2) v)]. Π est uniformément continu sur tout borné B de $E \times E$. ♦

Remarque 1.1.

Si $f : E_d \rightarrow F_\delta$ est uniformément continue sur E , elle le reste si l'on remplace d ou δ par des distances équivalentes. Cette invariance est évidemment fautive pour les notions d'applications contractantes et strictement contractantes (!).

Proposition 1.4.

- (i) Soient $f : E_d \rightarrow F_\delta$ et $g : F_\delta \rightarrow G_\delta$ des applications uniformément continues, f sur E et g sur F . La composée $h = g \circ f : E_d \rightarrow G_\delta$ est une application uniformément continue sur E .
- (ii) La restriction à un sous-espace métrique d'une application uniformément continue est uniformément continue sur ce sous-espace.

Démonstration : Utilisez *mutatis mutandis* les démonstrations correspondantes pour les applications continues. ♦

☞ **Exercice 1.2.** (facile) Démontrez que la composée de deux isométries est une isométrie. Démontrez que si $f : E_d \rightarrow F_\delta$ est une isométrie, $f^{-1} : f(E) \rightarrow E$ est une isométrie. Démontrez enfin que l'ensemble des isométries surjectives sur un espace métrique E_d est un groupe pour la loi de composition \circ (on l'appelle le *groupe des isométries* de E_d).

☞ **Exercice 1.3.** (difficile) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit $f : E \rightarrow F$ une application uniformément continue sur E . Démontrez qu'il existe α et β réels > 0 tels que $\forall u \in E : \|f(u)\|_F \leq \alpha\|u\|_E + \beta$.

☞ **Exercice 1.4.** (niveau moyen) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue sur \mathbb{R} telle que : $\lim_{t \rightarrow -\infty} [f(t) - g(t)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [f(t) - g(t)] = 0$. Démontrez que f est uniformément continue sur \mathbb{R} .

Indication : On admettra un résultat [le Th. de Heine] démontré dans le Chap. XIV : si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $I = [\alpha, \beta]$, α, β réels, $\alpha < \beta$, h est uniformément continue sur I .

☞ **Exercice 1.5.** (très facile) Soient E, F des e.v.n. réels, $U \subset E$ un convexe ouvert. Soit $f : U \rightarrow F$ une application vérifiant :

$$\exists c > 0, \exists \alpha > 1, \forall u, v \in U, \|f(u) - f(v)\| \leq c\|u - v\|^\alpha \text{ (voir Exemples 1.3.)}$$

Démontrer que f est une application constante sur U .

Remarque : cet exercice utilise un peu (vraiment très peu) de calcul différentiel.

2. HOMÉOMORPHISMES

Définition 2.1.

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques. On appelle *homéomorphisme* de E sur F toute application $f : E \rightarrow F$ vérifiant :

(2.1) f est une *bijection* de E sur F , et :

(2.2) $f : E \rightarrow F$ est *continue* sur (E, d) et $f^{-1} : F \rightarrow E$ est *continue* sur (F, δ) .

Commentaires :

1) Soit f un homéomorphisme de E_d sur F_δ . Comme f et f^{-1} jouent des rôles symétriques, on peut parler d'*homéomorphisme entre* E_d et F_δ . On dit encore simplement que E_d et F_δ sont *homéomorphes*.

On dit que E_d et F_δ *ne sont pas* homéomorphes s'il n'existe *aucun* homéomorphisme de E_d sur F_δ (il est souvent très difficile de prouver que deux espaces topologiques en bijection ne sont pas homéomorphes ; le Chap. XX, sur la connexité, apportera quelques réponses dans des cas assez simples, cf. aussi le Chap. XIV, mais c'est la *topologie algébrique* qui permet généralement de résoudre ce type de problème).

2) Un homéomorphisme est aussi une *bijection continue et ouverte* ou bien une *bijection continue et fermée* [cf. Chap. VII pour ces termes].

3) On peut définir – *c'est même son cadre le plus naturel* (! ! !) – un homéomorphisme entre deux espaces topologiques (E, \mathcal{O}_E) et (F, \mathcal{O}_F) .

Propriétés des homéomorphismes

L'inverse d'un homéomorphisme est un homéomorphisme [car f bijectif $\implies (f^{-1})^{-1} = f$]. La composée $f \circ g$ de deux homéomorphismes est un homéomorphisme [car f, g bijectifs $\implies (f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$]. L'ensemble de tous les homéomorphismes d'un e.m. sur lui-même est un groupe (appelé *groupe des homéomorphismes*) pour la loi \circ .

Exemples 2.1. (\mathbb{R} est \mathbb{R} usuel, sauf indication contraire)

1) $\ln : \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme d'inverse $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. ♦

2) $\text{Arc tan} : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, +\pi/2[$ est un homéomorphisme dont l'inverse est la restriction de \tan à $]-\pi/2, +\pi/2[$. Énoncez vous-même les résultats correspondants pour \cos et \sin . ♦

3) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^3$ est un homéomorphisme (notez qu'il n'est pas uniformément continu sur \mathbb{R}). ♦

4) $\mathbb{R} \rightarrow]-1, +1[, t \mapsto \frac{t}{1+|t|}$ est un homéomorphisme d'inverse $s \mapsto \frac{s}{1-|s|}$. ♦

5) Toute isométrie surjective est un homéomorphisme uniformément continu dont l'inverse (qui est une isométrie) a les mêmes propriétés. ♦

6) Tous les intervalles ouverts non vides de \mathbb{R} sont homéomorphes entre-eux : pour deux intervalles bornés, on peut prendre des fonctions affines $t \mapsto \alpha t + \beta$, pour les autres types d'intervalles, utilisez 1) 2) 4).

Idem pour les intervalles fermés non vides et non réduits à un singleton. Par contre, $]0, 1]$ et $[0, 1]$ ne sont pas homéomorphes [cf. XIV]. ♦

7) $\mathbb{R}_{\text{discret}} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{usuel}}, t \mapsto i(t) = t$ est bijective et continue, mais son inverse $\mathbb{R}_{\text{usuel}} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{discret}}, s \mapsto i^{-1}(s) = s$ n'est pas continu. *Ce n'est pas un homéomorphisme.* ♦

8) $f : E = [0, 1[\cup \{2\} \rightarrow F = [0, 1], f(t) = t$ si $t \in [0, 1[$ et $f(2) = 1$.

$[E, F$ sont munis de distances induites par \mathbb{R} : f est bijective et continue (vérifiez). Mais $f^{-1}(t) = t$ pour $t \in [0, 1[$ et $f^{-1}(1) = 2$ n'est pas continu. f n'est pas un homéomorphisme. ♦

CLASSIFICATION DES NOTIONS RENCONTRÉES EN TOPOLOGIE

Soit E un ensemble muni de deux distances d et δ , qui donnent naissance à deux espaces métriques (E, d) et (E, δ) .

On suppose qu'il existe un homéomorphisme f de (E, d) sur (E, δ) . Pour tout ouvert O de (E, d) on a un correspondant $U = f(O)$ ouvert de (E, δ) , et – réciproquement – on a $O = f^{-1}(U)$. Par conséquent toutes les notions dont la définition ne dépend que des ouverts seront les mêmes pour les deux espaces métriques. Ces notions sont dites **TOPOLOGIQUES**, ou : **invariantes par homéomorphismes**.

Exemples : Les fermés, les voisinages, les points adhérents, les points d'accumulation et les points isolés, l'adhérence et l'intérieur, la frontière, les ensembles denses, les familles totales, la séparabilité, les suites convergentes/divergentes, la continuité (et la discontinuité !) des applications, la notion d'homéomorphisme, plus tard les notions de compacité et de connexité, sont toutes des **notions topologiques**.

Remarque : Étant donné que ce cours est consacré aux espaces métriques de manière presque exclusive, les définitions sont données de telle façon qu'il n'est pas toujours complètement évident qu'une notion est ou n'est pas topologique... Mais en réfléchissant un peu, le lecteur s'apercevra aisément que les notions citées ci-dessus ne dépendent en fait que de la famille \mathcal{O} des ouverts, et non d'une distance particulière.

D'autre part un certain nombre de notions dépendent de manière essentielle de la structure métrique : distance entre deux points (!), distance point-ensemble $d(y, X)$, diamètre, ... Elles sont toutefois invariantes par isométrie, aussi peut-on les appeler **notions isométriques**.

Un certain nombre de notions appartiennent à une autre catégorie que nous n'étudierons pas en tant que telle ici : ce sont les *notions uniformes*. Ce sont des notions qui *ne sont pas* invariantes sous l'effet d'un homéomorphisme, mais qui sont invariantes sous l'effet d'homéomorphismes plus particuliers, ceux qui sont *uniformément continus ainsi que leurs inverses* : le premier exemple que nous rencontrons est celui des applications uniformément continues, mais nous en rencontrerons d'autres plus tard : suites de Cauchy, espaces complets, espaces précompacts [Chap. XI. XIII].

Exemple 2.2. L'application Id_E uniformément continue sur $\mathbb{R} : \mathbb{R}_{\text{usuel}} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{usuel}}$, $t \mapsto t$, ne l'est plus si l'on change la distance usuelle de l'espace d'arrivée par la distance $\delta(s, t) = |s^3 - t^3|$, ce qui revient à composer Id_E avec l'homéomorphisme $t \mapsto t^3$. Pourtant la famille $\mathcal{O}(\text{usuel})$ et la famille $\mathcal{O}(\delta)$ sont identiques. ♦

Enfin, la notion de *partie bornée* a un statut particulier : ce n'est pas une notion uniforme [cf. Exemple ci-après], mais elle est invariante par des applications plus générales que les isométries. Disons, sans insister, que c'est une *notion bornologique*.

Exemple 2.3. Soit d'une part \mathbb{R} muni de sa distance usuelle $d(s, t) = |s - t|$, et soit d'autre part \mathbb{R} muni de la distance $\delta(s, t) = \frac{d(s, t)}{1 + d(s, t)}$. La fonction $Id_E : \mathbb{R}_{\text{usuel}} \rightarrow \mathbb{R}_\delta$, $t \mapsto t$, est un homéomorphisme uniformément continu ainsi que son inverse.

Par contre les bornés de \mathbb{R}_u et de \mathbb{R}_δ ne sont évidemment pas les mêmes, puisque dans \mathbb{R}_δ toutes les parties sont bornées. ♦

Notons que le changement de la distance d initiale par une distance δ équivalente à d au sens de la Définition 2.2 du Chap. I laisse invariantes toutes les notions (y compris celle de borné) sauf les notions isométriques. Nous l'avons vérifié au fur et à mesure que nous introduisons les notions.

Nous allons introduire plusieurs notions qui nous permettront d'affiner l'idée d'équivalence des distances.

Définition 2.2.

Soient d et δ deux distances sur un même ensemble E .

(i) d et δ seront dites *topologiquement équivalentes* si

$Id_E : E_d \rightarrow E_\delta$, $t \mapsto Id_E(t) = t$, est un homéomorphisme.

(ii) d et δ seront dites *uniformément équivalentes* si Id_E est un homéomorphisme uniformément continu ainsi que son inverse.

(iii) d et δ seront dites *bornologiquement équivalentes* (expression non classique !) si elles sont uniformément équivalentes et si Id_E et son inverse transforment les bornés en bornés.

Evidemment :

$$(2.3) : \quad d \text{ et } \delta \text{ équivalentes} \implies d \text{ et } \delta \text{ bornologiquement équivalentes} \implies d \text{ et } \delta \text{ uniformément équivalentes} \implies d \text{ et } \delta \text{ topologiquement équivalentes.}$$

☞ **Exercice 2.1.** (assez facile) On reprend l'Exercice 2.2 du Chap. I. Démontrez que si φ est une fonction continue en $s = 0$, les distances d et δ sont uniformément équivalentes.

Exemples 2.4. Ce qui précède nous permet de donner les exemples suivants : sur \mathbb{R} , les distances $d(s, t) = |s - t|$ et $\delta(s, t) = |s^3 - t^3|$ sont topologiquement équivalentes, mais elles ne sont pas uniformément équivalentes.

Sur \mathbb{R} , les distances $\delta(s, t) = \frac{|s-t|}{1+|s-t|}$ et $\partial(s, t) = \min\{1, |s-t|\}$ sont uniformément équivalentes à $d(s, t) = |s-t|$, mais elles ne sont pas bornologiquement équivalentes à d . δ et ∂ sont bornologiquement équivalentes (toutes les parties sont bornées pour les deux distances), mais elles ne sont pas équivalentes. ♦

✎ **Exercice 2.2.** (assez facile) Caractériser le plus précisément possible les homéomorphismes de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

✎ **Exercice 2.3.** (assez facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. réel, et soit p une norme sur E . On définit $f : E_{\|\cdot\|} \rightarrow E_p$ par : $f(0) = 0$ et $\forall u \in E \setminus \{0\} : f(u) = \frac{\|u\|}{p(u)} u$.

a) Démontrez que f est une bijection de E sur E ; explicitez $g = f^{-1}$. Montrez que f et g sont continues en 0.

b) Démontrez les inégalités suivantes :

$$\forall u, v \in E \setminus \{0\} : p(f(u) - f(v)) \leq \frac{2\|u\|}{p(u)} p(u - v) + \|u - v\|,$$

$$\forall u, v \in E \setminus \{0\} : \|g(u) - g(v)\| \leq \frac{2 \cdot p(u)}{\|u\|} \|u - v\| + p(u - v).$$

c) Déduisez de b) que si les normes $\|\cdot\|$ et $p(\cdot)$ sont équivalentes, f est un homéomorphisme lipschitzien ainsi que son inverse.

✎ **Exercice 2.4.** (assez facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. réel, et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On suppose que f est continue en un point $\hat{u} \in E$.

On se propose de démontrer qu'il existe une boule $B := B(\hat{u}, \rho]$ et un réel $k = k(\hat{u}) > 0$ tels que : $\forall u \in B, \forall v \in B : |f(u) - f(v)| \leq k\|u - v\|$, i.e. que f est lipschitzienne de constante k dans une petite boule de centre \hat{u} .

C'est un résultat intéressant dû à H. Halkin.

1) Démontrez qu'on peut se contenter d'étudier le problème pour $\hat{u} = 0$ et f telle que $f(0) = 0$.

2) Résoudre le problème en suivant le canevas suivant :

$\exists \eta > 0, \forall u \in E : \|u\| \leq \eta \implies |f(u)| \leq 1$. On prend $B := B(0, \frac{\eta}{2})$ et $k := \frac{8}{\eta}$, et on suppose qu'il existe $u, v \in E$ tels que $f(v) - f(u) > k\|u - v\|$; démontrez que $\alpha := \frac{\eta}{2\|u - v\|} \leq 1$ ou $\alpha > 1$ conduisent à des contradictions, et concluez.

CORRIGÉ DES EXERCICES

✎ Exercice 1.1.

On veut démontrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (\lambda, u) \in B, \forall (\mu, v) \in B :$

$$d_1[(\lambda, u), (\mu, v)] = |\lambda - \mu| + \|u - v\| \leq \eta \implies \|\pi(\lambda, u) - \pi(\mu, v)\| = \|\lambda u - \mu v\| \leq \varepsilon.$$

B borné signifie que B est contenu dans une boule fermée centrée en $(0, 0)$ de rayon $C > 0$.

Soit $(\lambda, u) \in B$, on a : $|\lambda - 0| + \|u - 0\| = |\lambda| + \|u\| \leq C \implies |\lambda| \leq C$ et $\|u\| \leq C$.

Ecrivons :

$$\begin{aligned} \|\lambda u - \mu v\| &\leq \|\lambda u - \mu u\| + \|\mu u - \mu v\| = |\lambda - \mu| \cdot \|u\| + |\mu| \cdot \|u - v\| \\ &\leq C[|\lambda - \mu| + \|u - v\|] = C \cdot d_1[(\lambda, u), (\mu, v)]. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\eta := \frac{\varepsilon}{C}$. ♦

On démontre exactement de la même manière que si $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien réel (ou complexe, d'ailleurs) la fonction $\Pi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto (u|v)$ est uniformément continue sur tout borné B de $E \times E$.

✎ Exercice 1.2.

Soient $f : E_d \rightarrow F_\delta$ et $g : F_\delta \rightarrow G_\theta$ deux isométries. $\forall u, v \in E :$

$\partial[(g \circ f)(u), (g \circ f)(v)] = \partial[g(f(u)), g(f(v))] = \delta[f(u), f(v)] = d(u, v)$; donc la composée de deux isométries est une isométrie. ♦

Soit $f : E_d \rightarrow F_\delta$ une isométrie.

$$f(u) = f(v) \implies \delta[f(u), f(v)] = 0 = d(u, v) \implies u = v,$$

i.e. f est injective. f est donc une bijection de E sur $f(E)$.

Soit $g = f^{-1} : f(E) \rightarrow E$, et soient $x, y \in f(E)$. Il existe u, v uniques tels que $x = f(u)$, i.e. $u = g(x)$ et $y = f(v)$, i.e. $v = g(y)$.

$$\delta(x, y) = \delta[f(u), f(v)] = d(u, v) = d[g(x), g(y)]$$

donc g est une isométrie. \blacklozenge

Soit \mathcal{I} l'ensemble de toutes les isométries de E_d sur lui-même (surjectives). $\mathcal{I} \neq \emptyset$ car l'identité Id_E sur E est une isométrie qui est un élément neutre pour la loi de composition \circ .

Il est trivial de vérifier que (\mathcal{I}, \circ) est effectivement un groupe. \blacklozenge

Exercice 1.3.

f étant uniformément continue sur E : pour $\varepsilon = 1$, $\exists \eta > 0, \forall v \in E, \forall w \in E : \|v - w\|_E \leq \eta \implies \|f(v) - f(w)\|_F \leq 1$.

Soit $u \in E$ un vecteur arbitraire, et divisons $\|u\|_E$ par $\eta > 0$: $\|u\| = n(u) \cdot \eta + \rho(u)$, où n – dépendant de u – est un entier ≥ 0 , et où $\rho = \rho(u)$, qui est le reste de la division, vérifie : $0 \leq \rho(u) < \eta$. Posons ensuite $w = \frac{u}{\|u\|}$ ($\|w\| = 1$; w est un vecteur unitaire porté par u) et effectuons une subdivision de u en posant : $u_k = k \cdot \eta \cdot w$, avec k entier, $0 \leq k \leq n(u)$.

Ecrivons ensuite, avec $n = n(u)$ introduit ci-dessus :

$$f(u) = (f(u) - f(u_n)) + (f(u_n) - f(u_{n-1})) + \dots + (f(u_1) - f(u_0)) + f(u_0).$$

On a : $u_0 = 0$, d'où : $f(u_0) = f(0)$. On peut donc écrire :

$$\|f(u)\|_F \leq \|f(u) - f(u_n)\|_F + \sum_{1 \leq k \leq n(u)} \|f(u_k) - f(u_{k-1})\|_F + \|f(0)\|_F.$$

Pour k tel que $1 \leq k \leq n(u)$: $\|u_k - u_{k-1}\|_E = \|k \cdot \eta \cdot w - (k-1) \cdot \eta \cdot w\| = \|\eta \cdot w\| = \eta \|w\| = \eta$, et, donc : $\|f(u_k) - f(u_{k-1})\|_F \leq 1$.

$\|u - u_n\| = \|\|u\| \cdot w - n \cdot \eta \cdot w\| = \|\|u\| - n \cdot \eta\| = \rho < \eta$, d'où : $\|f(u) - f(u_n)\|_F \leq 1$.

On a majoré ainsi $n(u) + 1$ termes, et on peut écrire : $\|f(u)\| \leq n(u) + 1 + \|f(0)\|$. Mais

$$\|u\| = n(u) \cdot \eta + \rho(u) \implies n(u) = \frac{1}{\eta} [\|u\| - \rho(u)] \leq \frac{1}{\eta} \|u\|, \text{ d'où :}$$

$$\|f(u)\| \leq \frac{1}{\eta} \|u\| + 1 + \|f(0)\| = \frac{1}{\eta} \|u\| + (\|f(0)\| + 1).$$

On pose : $\alpha := \frac{1}{\eta}$, $\beta := \|f(0)\| + 1$ et on a le résultat cherché. \blacklozenge

Interprétez le résultat obtenu dans le cas d'une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (dessin de $t \mapsto \alpha|t| + \beta$), et constatez alors que $t \mapsto t^2$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

Exercice 1.4.

On veut prouver que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} : |s - t| \leq \eta \implies |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

On se donne donc $\varepsilon > 0$ arbitraire et on va déterminer η .

Par définition de \lim et \lim :

$$\exists T_1, \forall t : t \leq T_1 \implies |f(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}, \text{ et : } \exists T_2, \forall t : t \geq T_2 \implies |f(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Prenons $T := \max\{|T_1|, |T_2|\} \geq 0 : \forall t : |t| \geq T \implies |f(t) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Considérons l'intervalle fermé borné $K := [-T - \varepsilon, T + \varepsilon]$. Sur K , f est uniformément continue, et d'après le Th. de Heine (D.E.U.G. ou Chap. XIV) :

$$\exists \eta_0 > 0, \forall s \in K, \forall t \in K : |s - t| \leq \eta_0 \implies |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

g étant uniformément continue sur \mathbb{R} :

$$\exists \theta > 0, \forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} : |s - t| \leq \theta \implies |g(s) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Prenons $\eta := \min\{\eta_0, \theta, \varepsilon\}$.

• Si $|s| \geq T$, $|t| \geq T$, et $|s - t| \leq \eta$:

$$|f(s) - f(t)| \leq |f(s) - g(s)| + |g(s) - g(t)| + |g(t) - f(t)|,$$

et on a : $|f(s) - g(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ car $|s| \geq T$, $|g(t) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ car $|t| \geq T$, enfin $|g(s) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ car $|s - t| \leq \eta \leq \theta$, d'où : $|f(s) - f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

Donc tout marche bien, avec le η choisi, si $|s| \geq T$ et $|t| \geq T$.

• Si $|s| \leq T$, $|t| \leq T$, $|s - t| \leq \eta \leq \eta_0 \implies |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$ car $s \in K$, $t \in K$.

• Il reste à voir ce qui se passe si $|s| \leq T$, $|t| \geq T$ (ou, symétriquement, si $|s| \geq T$, $|t| \leq T$) ; supposons donc $|s| \leq T$, $|t| \geq T$ et $|s - t| \leq \eta$:

$|t| - |s| \leq |s - t| \leq \eta \leq \varepsilon \implies |t| \leq |s| + \varepsilon \leq T + \varepsilon$; donc dans ce cas, $s \in K, t \in K$, et comme $\eta \leq \eta_0$ ce cas est réglé.

Finalement, $\eta := \min\{\eta_0, \theta, \varepsilon\}$ convient. ♦

☞ **Exercice 1.5.**

Désignons par $\underline{0}$ l'application linéaire nulle de E dans F . On a : $\forall u \in U, \forall h \in E$:

$$\|f(u+h) - f(u) - \underline{0}(h)\| = \|f(u+h) - f(u)\| \leq c \|u+h-u\|^\alpha = c \|h\|^\alpha$$

Posons $\varepsilon := \alpha - 1 > 0$, on a : $\frac{\|f(u+h) - f(u) - \underline{0}(h)\|}{\|h\|} \leq c \|h\|^\varepsilon \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

C'est dire que f est dérivable au point u de U , de dérivée nulle : $Df(u) = \underline{0}$.

On sait (conséquence immédiate du th. de la moyenne) que, U étant convexe, f est alors une application constante sur U . ♦

Ce ne serait pas vraiment une bonne idée de bâtir toute une théorie sur les applications höldériennes d'ordre $\alpha > 1$! Les applications höldériennes ne sont intéressantes que pour $0 \leq \alpha \leq 1$.

☞ **Exercice 2.1.**

Rappelons qu'on considère un e.m. (E, d) et une fonction $\varphi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ qui vérifie : φ est croissante, $\varphi(0) = 0, t > 0 \implies \varphi(t) > 0, \forall s, t : \varphi(s+t) \leq \varphi(s) + \varphi(t)$.

On a prouvé dans l'Exercice 2.2 du Chap. I que $d = \varphi \circ \delta$ est une distance sur E , et que les fonctions $t \mapsto t^\alpha$ ($0 < \alpha \leq 1$), $t \mapsto \frac{t}{1+t}$, $t \mapsto \ln(1+t)$, $t \mapsto \min\{1, t\}$ sont des exemples de fonctions φ .

Démontrons que si φ est continue en 0, d est uniformément équivalente à δ , i.e. que $Id_E : (E, \delta) \rightarrow (E, d)$ est uniformément continue, et de même pour $Id_E : (E, d) \rightarrow (E, \delta)$.

Ecrivons que φ est continue en 0 :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall s \in [0, +\infty[: |s| = s \leq \eta \implies |\varphi(s) - \varphi(0)| = \varphi(s) \leq \varepsilon.$$

Ce qu'on veut, c'est :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u, v \in E : \delta(u, v) \leq \eta \implies d[Id_E(u), Id_E(v)] = \varphi(\delta(u, v)) \leq \varepsilon.$$

Il est clair qu'il suffit de faire $s := \delta(u, v)$ pour avoir le résultat cherché. ♦

On doit démontrer également que : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u, v \in E$:

$$d(u, v) = \varphi(\delta(u, v)) \leq \eta \implies \delta[Id_E(u), Id_E(v)] = \delta(u, v) \leq \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon_1 \in]0, \varepsilon[$ tel que $0 < \varphi(\varepsilon_1) < \varphi(\varepsilon) : \varepsilon_1$ existe puisque φ est continue en 0 et $\varphi(\varepsilon) > 0$ car $\varepsilon > 0$; on prend $\eta := \varphi(\varepsilon_1) : \varphi(\delta(u, v)) \leq \varphi(\varepsilon_1) \implies \delta(u, v) \leq \varepsilon$,

sinon $\delta(u, v) > \varepsilon \implies \varphi(\delta(u, v)) \geq \varphi(\varepsilon)$ [φ croissante] $> \varphi(\varepsilon_1) : \text{contradiction.} \blacklozenge$

☞ **Exercice 2.2.**

Supposons que f est un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

Soient a, b, c dans $[0, 1]$ vérifiant : $a < b < c$: les images $\alpha = f(a), \beta = f(b), \gamma = f(c)$ sont toutes distinctes puisque f est injective.

On va démontrer que β est entre α et γ . Supposons que $\alpha < \gamma$ (sinon on ferait le même raisonnement « à l'envers »), et démontrons que $\beta \in]\alpha, \gamma[$.

Raisonnons par contradiction et supposons que $\beta \notin]\alpha, \gamma[$, par exemple que $\beta < \alpha$ (même raisonnement si $\beta > \gamma$).

En a , f prend la valeur α , et en b la valeur β ; donc, puisque f est continue sur $[a, b]$, f prend sur cet intervalle toutes les valeurs comprises entre β et α [Th. des valeurs intermédiaires, D.E.U.G. ou Chap. XX].

De la même manière, sur l'intervalle $[b, c]$, f continue prend toutes les valeurs comprises entre β et γ . Donc, dans le cas de figure envisagé, f prend sur $[a, c]$ deux fois toutes les valeurs comprises entre β et γ : c'est incompatible avec le fait que f est injective ! Les autres cas se traitent de la même manière.

Supposons maintenant que f ne soit pas monotone : il existerait a, b, c avec $a < b < c$ tels que $f(b)$ ne soit pas entre $f(a)$ et $f(c)$, ce qui n'est pas le cas comme on vient de le voir. Donc f est monotone, strictement puisque f est injective. ♦

Réciproquement, si f est une fonction surjective, strictement monotone et continue, on sait [cf. D.E.U.G.] que f^{-1} est continue et strictement monotone.

Donc, les *homéomorphismes* de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$ sont les fonctions *surjectives, strictement monotones et continues*. De plus, ou bien $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ (cas croissant), ou bien $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$ (cas décroissant). ♦

☞ **Exercice 2.3.**

a) Pour $u \neq 0$, $f(u)$ est proportionnel à u : on peut penser qu'il en sera de même pour g ; écrivons que $g(u) = \lambda(u).u$, où $\lambda : E \rightarrow \mathbb{R}$, et écrivons que $f \circ g = Id_E$:

$$f(g(u)) = u = \frac{\|\lambda(u).u\|}{p(\lambda(u).u)} \lambda(u).u = \frac{\|u\|}{p(u)} \lambda(u).u \implies \lambda(u) = \frac{p(u)}{\|u\|}.$$

Prenons donc : $g(0) = 0$, et pour $u \neq 0$: $g(u) = \frac{p(u)}{\|u\|}u$, et vérifions qu'on a bien l'inverse cherché.

$(g \circ f)(0) = (f \circ g)(0) = 0$, et pour $u \neq 0$:

$$(f \circ g)(u) = f\left(\frac{p(u)}{\|u\|}u\right) = \frac{\left\|\frac{p(u)}{\|u\|}u\right\|}{p\left(\frac{p(u)}{\|u\|}u\right)} \times \frac{p(u)}{\|u\|}u = \frac{\|u\|}{p(u)} \times \frac{p(u)}{\|u\|}u = u, \text{ et :}$$

$$(g \circ f)(u) = g\left(\frac{\|u\|}{p(u)}u\right) = \frac{p\left(\frac{\|u\|}{p(u)}u\right)}{\left\|\frac{\|u\|}{p(u)}u\right\|} \times \frac{\|u\|}{p(u)}u = u. \spadesuit$$

$$p(f(u) - f(0)) = p(f(u)) = p\left(\frac{\|u\|}{p(u)}u\right) = \frac{\|u\|}{p(u)}p(u) = \|u\| \leq \varepsilon \text{ (si } \|u\| \leq \varepsilon \text{ !),}$$

$$\|g(u) - g(0)\| = \|g(u)\| = \left\|\frac{p(u)}{\|u\|}u\right\| = p(u) \leq \varepsilon \text{ (si } p(u) \leq \varepsilon \text{ !).}$$

f et g sont continues en 0. ♦

b) Pour $u \neq 0$ et $v \neq 0$:

$$\begin{aligned} p(f(u) - f(v)) &= p\left(\frac{\|u\|}{p(u)}u - \frac{\|v\|}{p(v)}v\right) \leq p\left(\frac{\|u\|}{p(u)}u - \frac{\|u\|}{p(u)}v\right) + p\left(\frac{\|u\|}{p(u)}v - \frac{\|v\|}{p(v)}v\right) \\ &\leq \frac{\|u\|}{p(u)}p(u - v) + p(v) \left| \frac{\|u\|}{p(u)} - \frac{\|v\|}{p(v)} \right|; \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\|u\|}{p(u)} - \frac{\|v\|}{p(v)} \right| \leq \left| \frac{\|u\|}{p(u)} - \frac{\|u\|}{p(v)} \right| + \left| \frac{\|u\|}{p(v)} - \frac{\|v\|}{p(v)} \right| = \|u\| \left| \frac{p(v) - p(u)}{p(u)p(v)} \right| + \frac{1}{p(v)} \left| \|u\| - \|v\| \right|,$$

$$\begin{aligned} \text{d'où : } p(f(u) - f(v)) &\leq \frac{\|u\|}{p(u)}p(u - v) + \|u\| \frac{p(v)}{p(u)p(v)}p(u - v) + \|u - v\| \\ &\leq 2 \frac{\|u\|}{p(u)}p(u - v) + \|u - v\|. \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \|g(u) - g(v)\| &\leq \left\| \frac{p(u)}{\|u\|}u - \frac{p(u)}{\|u\|}v \right\| + \left\| \frac{p(u)}{\|u\|}v - \frac{p(v)}{\|v\|}v \right\| \\ &\leq \frac{p(u)}{\|u\|} \|u - v\| + \|v\| \left| \frac{p(u)}{\|u\|} - \frac{p(v)}{\|v\|} \right|; \end{aligned}$$

$$\left| \frac{p(u)}{\|u\|} - \frac{p(v)}{\|v\|} \right| \leq \left| \frac{p(u)}{\|u\|} - \frac{p(u)}{\|v\|} \right| + \left| \frac{p(u)}{\|v\|} - \frac{p(v)}{\|v\|} \right| = p(u) \left| \frac{\|v\| - \|u\|}{\|u\|\|v\|} \right| + \frac{1}{\|v\|} |p(u) - p(v)|$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \|g(u) - g(v)\| &\leq \frac{p(u)}{\|u\|} \|u - v\| + \|v\| \frac{p(u)}{\|u\|\|v\|} \|u - v\| + p(u - v) \\ &\leq 2 \times \frac{p(u)}{\|u\|} \|u - v\| + p(u - v). \spadesuit \end{aligned}$$

c) Si $\forall u \in E : c.\|u\| \leq p(u) \leq C.\|u\|$, où c et C sont deux constantes > 0 , on a pour tous u, v non nuls : $p(f(u) - f(v)) \leq \left(\frac{2C}{c} + 1\right)\|u - v\|$, et $\|g(u) - g(v)\| \leq \left(\frac{2C}{c} + 1\right)p(u - v)$. Ces inégalités sont valides si $v = 0$ car $\frac{2C}{c} + 1 \geq 1$, et bien sûr pour $u = v = 0$. ♦

Remarque :

Regardez (dessin p. 170) ce que sont f et g si l'on prend $E = \mathbb{R}^2$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ et $p(\cdot) = \|\cdot\|_2$.

☞ **Exercice 2.4.**

Soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(v) = f(\widehat{u} - v) - f(\widehat{u})$ pour tout $v \in E$.

$g(0) = f(\widehat{u}) - f(\widehat{u}) = 0$; g est continue en 0, car si $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 0$ on a :

$$\begin{aligned} \lim(\widehat{u} - v_n) = \widehat{u} &\implies \lim f(\widehat{u} - v_n) = f(\widehat{u}) \text{ (par hypothèse)} \\ &\implies \lim f(\widehat{u} - v_n) - f(\widehat{u}) = f(\widehat{u}) - f(\widehat{u}) = 0 \implies \lim g(v_n) = 0. \spadesuit \end{aligned}$$

1) Supposons qu'il existe $B = B(0, \rho]$ et $k > 0$ tels que pour tous $v, w \in B$ on a : $|g(v) - g(w)| \leq k\|v - w\|$. Soient $x, y \in B(\widehat{u}, \rho]$; posons : $v := \widehat{u} - x$ et $w := \widehat{u} - y$; on a $v, w \in B(0, \rho] \implies |g(v) - g(w)| \leq k\|v - w\|$, soit :

$$|g(\widehat{u} - x) - g(\widehat{u} - y)| \leq k\|(\widehat{u} - x) - (\widehat{u} - y)\| = k\|x - y\|, \text{ ou encore :}$$

$$|g(\widehat{u} - x) - f(\widehat{u}) - [g(\widehat{u} - y) - f(\widehat{u})]| = |f[\widehat{u} - (\widehat{u} - x)] - f(\widehat{u}) - f[\widehat{u} - (\widehat{u} - y)] + f(\widehat{u})| \\ = |f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|. \blacklozenge$$

On peut donc supposer sans nuire à la généralité que f est continue en $\widehat{u} = 0$ et que $f(\widehat{u}) = f(0) = 0$. On fera cette hypothèse qui simplifie les notations dans la suite.

2) f continue en $\widehat{u} = 0$ implique, pour $\varepsilon = 1$:

$$\exists \eta > 0, \forall u \in E : \|u\| \leq \eta \implies |f(u)| \leq 1.$$

Prenons $B := B(0, \frac{1}{2}\eta)$ et $k := \frac{8}{\eta}$.

On suppose que $\forall u, v \in B : |f(u) - f(v)| \leq k\|u - v\|$ est fausse, et on va voir qu'on aboutit alors à une contradiction.

Supposons donc qu'il existe u, v dans B tels que $f(v) - f(u) > k\|u - v\|$ (*), ce qui implique $u \neq v$. Remarquons que $w \in B \implies \|w\| \leq \frac{1}{2}\eta \leq \frac{1}{2}\eta \implies |f(w)| \leq 1$.

Il sera commode de considérer le réel $\alpha := \frac{\eta}{2\|u-v\|} > 0$.

• Si $\alpha \leq 1$, (*) $\implies \alpha[f(v) - f(u)] > a.k.\|v - u\| = \frac{\eta}{2\|v-u\|} \times \frac{8}{\eta}\|v - u\| = 4$. d'où :

$$4 < \alpha[f(v) - f(u)] \leq f(v) - f(u) \text{ [car } \alpha \leq 1]$$

$$\leq |f(v) - f(u)| \leq |f(v)| + |f(u)| \leq 1 + 1 = 2,$$

car $u, v \in B$. On aboutit donc à $4 < 2$: contradiction ! \blacklozenge

• Si $\alpha > 1$, soit $w = u + \alpha(v - u)$, on a : $v = \frac{1}{\alpha}w + (1 - \frac{1}{\alpha}).u$, où $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$.

f étant convexe, on a : $f(v) \leq \frac{1}{\alpha}f(w) + (1 - \frac{1}{\alpha}).f(u)$. D'où :

$$\alpha[f(v) - f(u)] \leq f(w) - f(u) \leq |f(w) - f(u)| \leq |f(w)| + |f(u)| \leq |f(w)| + 1 \text{ [car } u \in B].$$

$$\text{Mais : } \|w\| \leq \|u\| + \alpha\|v - u\| \leq \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2\|u-v\|}\|u - v\| = \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \implies |f(w)| \leq 1.$$

Donc : $\alpha[f(v) - f(u)] \leq 2$. On en déduit, par (*) :

$$k\|u - v\| < f(v) - f(u) \implies \alpha.k\|u - v\| < \alpha[f(v) - f(u)] \leq 2$$

$$\implies \frac{\eta}{2\|u-v\|} \times \frac{8}{\eta}\|u - v\| < 2 \implies 4 \leq 2, \text{ encore une contradiction ! } \blacklozenge$$

Comme α doit être ≤ 1 ou > 1 (!), c'est que notre hypothèse de départ est fausse, et donc : $|f(u) - f(v)| \leq k\|u - v\|$ pour tous $u, v \in B = B(0, \frac{\eta}{2})$, avec $k = \frac{8}{\eta} \cdot \blacklozenge$

On vient donc de démontrer que toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et continue sur E est localement lipschitzienne, i.e. que :

$$\forall u \in E, \exists B = B(u, \rho), \exists k = k(u) > 0, \forall v \in B, \forall w \in B : |f(v) - f(w)| \leq k\|v - w\|.$$

On remarquera que la convexité de f est nécessaire ; en effet la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \sqrt{|t|}$ est continue en tout point de \mathbb{R} , mais quel que soit un intervalle de la forme $[-\rho, +\rho]$, $\rho > 0$, il n'existe pas $k > 0$ tel que $|\sqrt{|t|} - \sqrt{|s|}| \leq k|t - s|$.

Sinon on aurait $\sqrt{|t|} \leq k|t|$, et donc $\sqrt{|t|} \geq \frac{1}{k}$ ce qui est absurde au voisinage de 0 ! \blacklozenge

La démonstration ci-dessus peut sembler un peu « parachutée », et elle l'est effectivement un peu à cause du choix *a priori* de B, k, α . Mais il est tout à fait possible de donner une démonstration plus « naturelle » en laissant B, k, α indéterminés jusqu'à ce que leur valeur s'impose dans les calculs. Voyez cela, si vous avez un moment libre.

Fin du Chapitre VIII

CHAPITRE IX

PRODUIT D'ESPACES MÉTRIQUES et CONTINUITÉ. LIMITE D'UNE APPLICATION

Introduction

Ce chapitre IX traite d'une part des *produits* (finis) d'espaces métriques et de la continuité des applications définies sur un produit et/ou à valeurs dans un produit.

D'autre part, on parle de la notion de *limite* d'une application en un point adhérent à son domaine de définition.

On démontre d'ailleurs que la notion de limite se ramène à la notion de continuité : dans certains cours on fait le contraire, en définissant d'abord la notion de limite, puis celle de continuité. C'est une simple question de goût . . .

Le contenu de ce chapitre sera très utilisé dans le cours de calcul différentiel, dont nous donnons d'ailleurs le point de départ comme application de la notion de limite.

Le chapitre ne présente aucune difficulté, et la totalité des démonstrations du cours peut être faite en exercices.

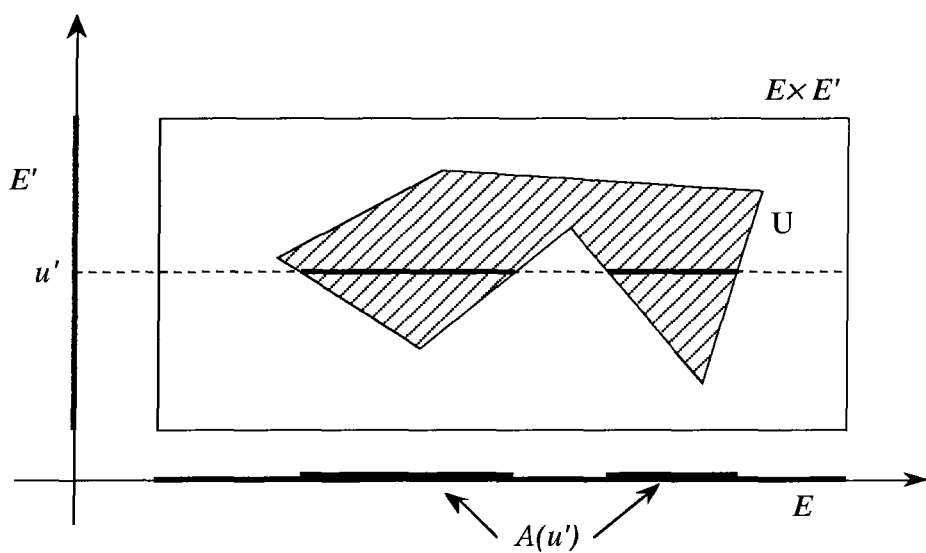
Comme dans le chapitre précédent, les deux sujets abordés sont tout à fait indépendants l'un de l'autre : question de taille de chapitre ici aussi !

Prêtez attention aux mises en garde contre des erreurs fréquentes.

☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.2, 1.4, 2.1, 3.1, 3.2.

☞ Exercices complémentaires : 1.3, 3.3.

CHAPITRE CALME . . . BON TRAVAIL !



Proposition 2.2

CHAPITRE IX

PRODUIT D'ESPACES MÉTRIQUES et CONTINUITÉ. LIMITE D'UNE APPLICATION

1. PRODUIT D'ESPACES MÉTRIQUES

Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_N, d_N)$ des espaces métriques. On a défini sur le produit cartésien $E := E_1 \times \dots \times E_N = \prod_{i=1}^N E_i$ les distances dites de **Hölder** [Chap. I (2.6)], qui sont *toutes équivalentes* ; en particulier, ces distances définissent toutes la *même topologie* (i.e. la même famille d'ouverts, ou de fermés).

Rappelons l'expression de ces distances :

$$(1.1) \quad u = (u_1, \dots, u_N) \in E, v = (v_1, \dots, v_N) \in E :$$

$$\delta_p(u, v) = \left(\sum_{i=1}^N (d_i(u_i, v_i))^p \right)^{1/p} \text{ pour } 1 \leq p < +\infty,$$
$$\delta_\infty(u, v) = \max\{d_i(u_i, v_i) / 1 \leq i \leq N\}.$$

Nous démontrerons ici – afin de simplifier les notations – les résultats pour le produit de *deux* espaces métriques. Tout ce qui sera dit s'étend – bien sûr – à un nombre quelconque fini d'espaces métriques.

Bon nombre de ces résultats s'étendraient même (mais il faudrait y regarder de près) à un nombre infini dénombrable d'espaces métriques [Chap. I, Exercice 2.4].

Rappelons que ce qu'on appelle « espace métrique produit » est en fait (E, \mathcal{O}) , où \mathcal{O} désigne la *topologie produit*, topologie qui – par chance – s'exprime par une distance, par exemple l'une des distances de Hölder.

Rappelons aussi que le remplacement d'une distance par une distance équivalente [Chap.I (2.1)(2.2)] n'affecte pas les notions topologiques, les notions uniformes, les bornés [Chap. VIII] ; seules sont affectées les notions purement métriques (isométriques).

Soient donc (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, et $F = E \times E'$ leur produit cartésien. On considère sur F la distance $d = d_\infty$ que nous privilégierons uniquement parce qu'elle donne plus simplement les résultats.

$$(1.2) \quad U = (u, u'), V = (v, v') : \delta(U, V) = \max\{d(u, v), d'(u', v')\}.$$

☞ **Exercice 1.1.** (très facile) Vérifiez que l'application $\varpi : E \times E' \rightarrow E' \times E$, définie par : $\varpi(u, u') = (u', u)$ est une isométrie surjective.

Nous noterons $B(u, \rho], B'(u', \rho[$ ($B(u, \rho], B'(u', \rho]$) les boules ouvertes [fermées] de E et E' . Les boules de F seront notées $\mathbf{B}(U, \rho]$, où $U = (u, u')$, et $\mathbf{B}(U, \rho]$.

Proposition 1.1.

| Pour tout $U = (u, u')$, et tout $\rho > 0$, on a :

$$(1.3) \quad \mathbf{B}(U, \rho] = B(u, \rho] \times B'(u', \rho[\text{ et } \mathbf{B}(U, \rho] = B(u, \rho] \times B'(u', \rho].$$

Commentaire :

Cette propriété n'est vraie que pour d_∞ . Dans $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, un disque euclidien n'est pas le produit de deux intervalles !

Proposition 1.2.

Soit A une partie de E , et soit A' une partie de E' , $A \neq \emptyset$, $A' \neq \emptyset$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $A \times A'$ soit une partie *ouverte* [resp. *fermée*] de $(E \times E', d)$ est que A soit *ouverte* [resp. *fermée*] dans (E, d) ET que A' soit *ouverte* [resp. *fermée*] dans (E', d') .

On a :

$$(1.4) \quad \text{adh}_F(A \times A') = \text{adh}_E(A) \times \text{adh}_{E'}(A')$$

$$(1.5) \quad \text{int}_F(A \times A') = \text{int}_E(A) \times \text{int}_{E'}(A')$$

☞ Il ne faut perdre de vue à aucun instant qu'une partie B de $E \times E'$ n'est pas en général le produit d'une partie de E par une partie de E' !!!

☞ $]0, 1]$ n'est ni ouvert ni fermé dans \mathbb{R} , mais $]0, 1] \times \emptyset = \emptyset$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Cela explique l'hypothèse $A \neq \emptyset$, $A' \neq \emptyset$ dans la Prop. 1.2. $A \times \emptyset = \emptyset$ est ouvert et fermé pour toute partie A !

☞ **Exercice 1.2.** (très facile) Vérifiez patiemment et avec minutie tous ces petits résultats des Propositions 1.1 et 1.2.

☞ **Exercice 1.3.** Démontrez que :

$$(1.6) \quad \text{fr}_F(A \times A') = [\text{fr}_E(A) \times \text{adh}_{E'}(A')] \cup [\text{adh}_E(A) \times \text{fr}_{E'}(A')].$$

Tenez compte des résultats de théorie des ensembles évidents suivants (prouvez-les si besoin est) :

(1.7) Pour tous $X, Y \subset E$, $X', Y' \subset E'$:

$$(1.7.1) \quad X \times X' \subset Y \times Y' \iff X \subset Y \text{ ET } X' \subset Y',$$

$$(1.7.2) \quad X \times X' = Y \times Y' \iff X = X' \text{ ET } Y = Y',$$

$$(1.7.3) \quad (X \times X') \cap (Y \times Y') = (X \cap Y) \times (X' \cap Y')$$

(il n'y a pas de relation analogue avec \cup),

$$(1.7.4) \quad (E \times E') \setminus (X \times X') = [(E \setminus X) \times X'] \cup [X \times (E' \setminus X')] \cup [(E \setminus X) \times (E' \setminus X')]$$

(3 termes là où l'optimiste n'en attend que 2...).

Définition 1.1.

On appelle **projections naturelles**, et on notera p et p' , les applications $p : E \times E' \rightarrow E$ et $p' : E \times E' \rightarrow E'$ définies par :

(1.8) Pour tout $U = (u, u') \in F = E \times E'$:

$$(1.8.1) \quad p(U) = p((u, u')) := u \quad [\text{on notera simplement } p(u, u')],$$

$$(1.8.2) \quad p'(U) = p'((u, u')) := u' \quad [\text{on notera simplement } p'(u, u')].$$

Proposition 1.3.

(i) p et p' sont des *surjections*, et pour tout $A \subset E$, tout $A' \subset E'$:
 $p^{-1}(A) = A \times E'$, $p'^{-1}(A') = E \times A'$,

(ii) p et p' sont des applications *contractantes* (lipschitziennes de constante 1) et, donc, en particulier sont *uniformément continues* sur $E \times E'$,

(iii) si $(E, \|\cdot\|)$ et $(E', \|\cdot\|')$ sont des e.v.n. sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} :
 p et p' sont des applications *linéaires* sur l'espace vectoriel produit $E \times E'$.

[Rappel : $(u, u') + (v, v') = (u + v, u' + v')$ et $\lambda(u, u') = (\lambda u, \lambda u')$].

Démonstration : (i) et (iii) sont immédiates à vérifier. Quant à (ii) :

$$\begin{aligned} d(p(U), p(V)) &= d(p(u, u'), p(v, v')) = d(u, v) \\ &\leq \max\{d(u, v), d'(u', v')\} = d_\infty(U, V) = \delta(U, V). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

✎ **Exercice 1.4.** (très facile) Démontrez que $F = E \times E'$ est séparable si et seulement si E et E' le sont.

2. ESPACE MÉTRIQUE PRODUIT ET CONTINUITÉ

Théorème 2.1. (SOUVENT UTILE)

|| Soit (G, ∂) un espace métrique, et soit $f : G \rightarrow F = E \times E'$ une application.
(2.1) f s'écrit (φ, ψ) , où : $\varphi = p \circ f$ et $\psi = p' \circ f$.

|| Une condition *nécessaire et suffisante* pour que f soit continue en un point $a \in G$ [resp. continue sur G] [resp. uniformément continue sur G] est que ses *composantes* φ et ψ soient continues en a [resp. continues sur G] [resp. uniformément continues sur G].

Commentaire : On peut considérer f comme une fonction à valeurs vectorielles, d'où le nom de composantes données à φ et ψ . Ce Th. permet en particulier de traiter de la continuité des applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Démonstration :

$\forall v \in G : f(v) = (p[f(v)], p'[f(v)]) = (\varphi(v), \psi(v))$, où $\varphi := p \circ f$ et $\psi := p' \circ f$. ♦
Si f est continue en $a \in G$ [continue sur G] [uniformément continue sur G], il en est de même de φ et de ψ d'après la Prop. 1.3 ci-dessus et les résultats de continuité d'une composée démontrés dans les Chap. VII et VIII. ♦

Réciproquement (on démontre seulement la continuité uniforme) :

$$\begin{aligned} \delta[f(v), f(w)] &= \delta[(\varphi(v), \psi(v)), (\varphi(w), \psi(w))] \\ &= \max\{d[\varphi(v), \varphi(w)], d'[\psi(v), \psi(w)]\} \end{aligned}$$

Or : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v, w \in G : \partial(v, w) \leq \eta \implies d[\varphi(v), \varphi(w)] \leq \varepsilon$ et $\exists \eta' > 0, \forall v, w \in G : \partial(v, w) \leq \eta' \implies d'[\psi(v), \psi(w)] \leq \varepsilon$.

Soit $\eta_1 := \min\{\eta, \eta'\}$, on a : $\forall v, w \in G : \partial(v, w) \leq \eta_1 \implies \delta[f(v), f(w)] \leq \varepsilon$. ♦

Proposition 2.1.

Soit $u' \in E'$ [resp. $u \in E$] fixé.

On note $j_{u'}$ [resp. j_u] l'application $E \rightarrow F = E \times E'$ [resp. $E' \rightarrow F$] définie par $j_{u'}(v) = (v, u')$ [resp. $j_u(v') = (u, v')$].

$j_{u'}$ [resp. j_u] est pour tout $u' \in E'$ [$u \in E$] une *isométrie*.

$j_{u'} : E \rightarrow E \times \{u'\}$ [resp. $j_u : E' \rightarrow \{u\} \times E'$] est une *isométrie surjective* dont l'inverse est la restriction $p|_{E \times \{u'\}}$ de p à $E \times \{u'\}$ [resp. $p'|_{\{u\} \times E'}$ restriction de p' à $\{u\} \times E'$].

Si $(E, \|\cdot\|)$ et $(E', \|\cdot\|')$ sont des e.v.n. sur le même corps \mathbb{K} , $j_{u'}$ [resp. j_u] n'est pas une application linéaire (additive, mais non homogène), sauf si $u' = 0$ [resp. $u = 0$].

Démonstration : Elle est évidente, mais rédigez-la soigneusement. ♦

Proposition 2.2.

|| Soit U une partie ouverte [resp. fermée] dans $F = E \times E'$, et soit $u' \in E'$.
L'ensemble $A(u') = p(U \cap (E \times \{u'\}))$ est ouvert [resp. fermé] dans (E, d) .

|| De même, si $u \in E$ est fixé, l'ensemble $A'(u) = p'(U \cap (\{u\} \times E'))$ est ouvert [resp. fermé] dans (E', d') .

Démonstration : Commencez par faire un dessin illustrant la situation ! (Voir p. 184).

U étant ouvert [fermé] dans $E \times E' : U \cap (E \times \{u'\})$ est ouvert [fermé] dans le sous-espace métrique $E \times \{u'\}$ [voir dans les Chapitres V et VI la relativité des fermés et des ouverts]. Donc : $(j_{u'})^{-1}(U \cap (E \times \{u'\}))$ est ouvert [fermé] dans E , et $(j_{u'})^{-1} = p|_{E \times \{u'\}}$ comme il a été dit dans la Prop. 2.1. ♦

Proposition 2.3.

|| Si U est ouvert dans $F = E \times E' : p(U)$ et $p'(U)$ sont des ouverts de E et E' respectivement. Autrement dit, p et p' sont des *applications ouvertes*.

☞ Prendre garde au fait qu'il n'y a pas d'analogue pour les fermés : p et p' ne sont pas des *applications fermées* !

Démonstration :

$$\begin{aligned} p(U) &= p(U \cap (E \times E')) = p(U \cap (\bigcup_{u' \in E'} (E \times \{u'\}))) \\ &= p(\bigcup_{u' \in E'} (U \cap (E \times \{u'\}))) = \bigcup_{u' \in E'} p(U \cap (E \times \{u'\})) \\ &= \bigcup_{u' \in E'} p|_{E \times \{u'\}} (U \cap (E \times \{u'\})) = \bigcup_{u' \in E'} A(u') \end{aligned}$$

[on a utilisé $f(\bigcup_{i \in I} X_i) = \bigcup_{i \in I} f(X_i)$, pour I arbitraire, f quelconque].
 $p(U)$ réunion des ouverts $A(u')$ [Prop. 2.2] est bien un ouvert. ♦

Exemple 2.1. Un exemple a déjà été donné dans le Chap. VII : $E = E' = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{R}^2$. $A = \{(s, t) \in F / s.t = 1\}$ est fermé dans F , mais $p(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ne l'est pas (accessoirement, on constate que la projection d'un fermé non ouvert peut être un ouvert non fermé...). Si vous préférez que A soit « d'un seul morceau », prenez $A = \{(s, t) \in F / s.t = 1, s > 0\}$.

Proposition 2.4. (SOUVENT UTILISÉE)

|| Soit (G, ∂) un espace métrique, et soit $f : F = E \times E' \rightarrow G$.
 Si f est continue en $U = (u_0, u'_0)$ [resp. continue sur F] [resp. uniformément continue sur F], les applications appelées *applications partielles* :

$$(2.2) \quad \forall b \in E' \text{ fixé, } f_b : E \rightarrow G, u \in E \mapsto f_b(u) = f(u, b) \in G,$$

$$(2.3) \quad \forall a \in E \text{ fixé, } f_a : E' \rightarrow G, u' \in E' \mapsto f_a(u') = f(a, u') \in G$$

sont toutes deux continues, en u_0 pour f_b et en u'_0 pour f_a , [resp. continues sur $E (E')$] [resp. uniformément continues sur $E (E')$].

Remarque : Au lieu de f_b et f_a , on note très souvent $f(\cdot, b)$ et $f(a, \cdot)$, d'où les écritures $f(\cdot, b)(u) = f(u, b)$ et $f(a, \cdot)(u') = f(a, u')$.

☞ LA RÉCIPROQUE EST TOUT A FAIT FAUSSE !!! La continuité de toutes les applications partielles n'implique pas la continuité de la fonction.

Démonstration : Pour $b \in E'$ fixé, l'application $u \in E \mapsto f_b(u) = f(u, b) \in G$ est la composée $f|_{E \times \{b\}} \circ j_b$, et le résultat s'ensuit de la Prop. 2.1 et des règles de composition des Chap. VII et VIII. ♦

Exemple 2.2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(s, t) = \frac{st}{s^2 + t^2}$ si $(s, t) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ car $(s, t) \mapsto s$, $(s, t) \mapsto t$, $(s, t) \mapsto s.t$, $(s, t) \mapsto s^2$, $(s, t) \mapsto t^2$, donc $(s, t) \mapsto s^2 + t^2$ sont continues sur \mathbb{R}^2 , et $s^2 + t^2 \neq 0$ en $(a, b) \neq (0, 0) \implies (s, t) \mapsto \frac{1}{s^2 + t^2}$ est continue en (a, b) . Tout cela résulte de la Prop. 2.4 du Chap. VII, notamment de (2.6) pour la dernière assertion.

Comme f est symétrique en s et t , il suffit de considérer les fonctions partielles de la première variable. Pour $b \neq 0$, $f_b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto f_b(s) = f(s, b) = \frac{sb}{s^2 + b^2}$ et pour $b = 0$, $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $s \mapsto f_0(s) = f(s, 0) = 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Clairement, toutes les fonctions partielles f_b , $b \in \mathbb{R}$ sont continues sur \mathbb{R} entier.

Mais la fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$; en effet la suite $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})_n$ converge vers $(0, 0)$ tandis que la suite $(f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))_n$ est constante égale à $\frac{1}{2}$ et ne tend pas vers 0.

☞ **Exercice 2.1.** (assez facile) Soit $A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / s \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < t < s^2\}$. On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(s, t) = 0$ si $(s, t) \notin A$ et $f(s, t) = 1$ si $(s, t) \in A$.

Vérifiez que pour tout $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la fonction $\varphi_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :
 $\varphi_a(t) := f(t, a) = f(t\alpha, t\beta)$ est continue en 0.

Vérifiez que f n'est pas continue en $(0, 0)$. Faites un dessin !

Proposition 2.5.

Soient E, E', F, F' des espaces métriques, et soient $f : E \rightarrow F, g : E' \rightarrow F'$.
 L'application $\Phi : G = E \times E' \rightarrow H = F \times F', (u, u') \mapsto (f(u), g(u'))$ est continue en $(u_0, u'_0) \in G$ [resp. continue sur G] [resp. uniformément continue sur G] si et seulement si f est continue en u_0 [resp. cont. sur E] [resp. unif. cont. sur E] ET g est continue en u'_0 [resp. cont. sur E'] [resp. unif. cont. sur E'].

☞ La plupart des résultats de ce paragraphe seront utilisés en permanence en calcul différentiel.

Démonstration : Traitons par exemple de la continuité sur G .

$f(u) = p_F(\Phi(u, u'))$ pour tout $u' \in E'$ fixé, et $g(u') = p_{F'}(\Phi(u, u'))$ pour tout $u \in E$ fixé, sont continues sur E et E' respectivement si Φ est continue sur G , d'après les Prop. 1.3 et 2.4.

Réciproquement : $\Phi = (f \circ p_E, g \circ p_{E'})$ est continue sur G si f l'est sur E et g sur E' , d'après le Th. 2.1. ♦

Proposition 2.6.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des e.v.n. sur $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soient $f, g : E \rightarrow F$.
 L'application $E \rightarrow F, u \mapsto (f + g)(u)$ est continue en $a \in E$ [cont. sur E] [unif. cont. sur E] si f ET g ont ces propriétés.
 Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé, $\lambda f : E \rightarrow F, u \mapsto (\lambda f)(u) = \lambda f(u)$ possède les mêmes propriétés de continuité que f .

Démonstration : L'application $E \rightarrow F, u \mapsto f(u) + g(u)$ est composée de l'application $(f, g) : E \rightarrow F \times F, u \mapsto (f(u), g(u))$, pour laquelle on se référera au Th. 2.1, et de l'application $\sigma : F \times F \rightarrow F, (v, w) \mapsto v + w$ qui est lipschitzienne (donc uniformément continue). On applique ensuite les résultats de composition. ♦

Remarque : σ est linéaire sur le produit $F \times F$.

$E \rightarrow F, u \mapsto \lambda.f(u)$ est composée de $u \in E \mapsto f(u) \in F$ et de $v \in F \mapsto \lambda.v \in F$ qui est lipschitzienne, et on applique les résultats de composition. ♦

Remarque 2.1. (sur les suites et les produits)

Soit $F = E \times E'$. On a démontré dans le Chap. III que $(u_n, u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans F vers (u, u') si et seulement si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E vers u et $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans E' vers u' . En ce qui concerne les valeurs d'adhérence, il est facile de voir que si $(u_n, u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet (u, u') pour valeur d'adhérence : u est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et u' est valeur d'adhérence de $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Un contre-exemple très simple prouve que la réciproque est fautive :

$s_{2n} = t_{2n+1} = 0, s_{2n+1} = t_{2n} = 1 ; (s_n)$ et $(t_n), n \in \mathbb{N}$, ont 0 et 1 comme valeurs d'adhérence, mais $(1, 1)$ et $(0, 0)$ ne sont pas valeurs d'adhérence de la suite (s_n, t_n) .

3. LIMITE D'UNE APPLICATION

Ce paragraphe sera assez court, cela ne signifie nullement que la notion de limite d'une application en un point est devenue sans importance sous prétexte qu'on passe de \mathbb{R} et \mathbb{R}^n aux espaces métriques ! Tout ce qui a été fait en D.E.U.G. sur le sujet conserve tout son intérêt !

Définition 3.1.

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques. Soit $A \neq \emptyset$ une partie de E , et soit $a \in \text{adh}(A)$. Soit $f : A \rightarrow F$.

On dit que f **tend vers** $b \in F$ **quand** $u \in A$ **tend vers** a si l'application $f^\# : A \cup \{a\} \rightarrow F$ définie par :

$$f^\#(u) := f(u) \text{ pour tout } u \in A \setminus \{a\} \text{ et } f^\#(a) := b$$

est **continue au point** a .

Remarque : $A \cup \{a\}$ est un espace métrique, comme sous-espace métrique de E .

On dit encore que b est **limite de** f **au point** $a \in \text{adh}(A)$ **par rapport à** A , et on note :

$$\mathbf{lim}_{u \rightarrow a, u \in A} f(u) = b.$$

Exprimons $\mathbf{lim}_{u \rightarrow a, u \in A} f(u) = b$ en formule (on écrit simplement que $f^\#$ est continue en a) :

$$(3.1) \quad \mathbf{lim}_{u \rightarrow a, u \in A} f(u) = b \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in A \setminus \{a\} : d(u, a) \leq \eta \implies \delta(f(u), b) \leq \varepsilon.$$

Commentaires :

1) Si $a \in A$, l'application $f^\#$ n'utilise pas la valeur $f(a)$. On rappelle parfois ce fait en notant : $\mathbf{lim}_{u \rightarrow a, u \in A, u \neq a} f(u) = b$. Mais c'est par définition même que $u \neq a$, et donc cette précision est superflue. Toutefois, la notation ci-dessus a le mérite de rappeler que $f(a)$ n'intervient pas dans $\mathbf{lim}_{u \rightarrow a, u \in A} f(u)$: vous pouvez l'utiliser si cela peut vous permettre de ne pas oublier la définition correcte de $f^\#$!

Si $a \in A$, $\mathbf{lim}_{u \rightarrow a} f(u) = f(a)$ exprime simplement que l'application f est continue au point a , f étant définie sur le sous-espace métrique $(A, d|_{A \times A})$. Voir la Prop. 3.2 ci-dessous.

2) On n'envisage pas $a \notin \text{adh}(A)$ car $f^\#$ serait continue en a pour tout $b \in F$: la notion n'aurait aucun intérêt. Pour $a \in \text{adh}(A)$ on a, par contre :

Proposition 3.1.

La limite de f en $a \in \text{adh}(A)$, quand $u \rightarrow a, u \in A$, si elle existe, est **unique**. On peut donc parler (si elle existe) de **La** limite de f en $a \in \text{adh}(A)$ par rapport à la partie A .

Démonstration : Soient $b \in F, c \in F$ deux limites. On utilise (3.1) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in A, u \neq a : d(u, a) \leq \eta \implies \delta[f(u), b] \leq \varepsilon.$$

Et, de même : $\exists \eta_1 > 0, \forall u \in A, u \neq a : d(u, a) \leq \eta_1 \implies \delta[f(u), c] \leq \varepsilon$.

Prenons $\theta := \min\{\eta, \eta_1\}$. On a :

$$\forall u \in A, u \neq a : d(u, a) \leq \theta \implies \delta(b, c) \leq \delta[b, f(u)] + \delta[f(u), c] \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Cela pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\delta(b, c) = 0$ et $b = c$. ♦

Proposition 3.2.

Soit $f : E \rightarrow F$. Soit $a \in E$ tel que $a \in \text{adh}[E \setminus \{a\}]$. Pour que f soit continue en a , il faut et il suffit que $\mathbf{lim}_{u \rightarrow a, u \in E \setminus \{a\}} f(u) = f(a)$.

Démonstration : Simple réécriture de la définition. ♦

Remarque : Bien remarquer que $a \in \text{adh}[E \setminus \{a\}]$ n'est pas automatiquement vérifiée : soit $E = \mathbb{Z}$ et soit $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\text{adh}[\mathbb{Z} \setminus \{n\}] = \mathbb{Z} \setminus \{n\} \not\ni n$.

Terminologie : Soit $f : A \subset E \rightarrow F$ une application continue sur A (i.e. sur $(A, d|_{A \times A})$). Soit $a \in \text{adh}(A) \setminus A$. Supposons que $\lim_{u \rightarrow a, u \in A} f(u) = b$.

L'application $f^\# : A \cup \{a\} \rightarrow F$ définie par $f^\#(u) := f(u)$ pour $u \in A$ et par $f^\#(a) := b$ est continue sur $A \cup \{a\}$

($A \cup \{a\}$ étant muni de la distance $d|_{(A \cup \{a\}) \times (A \cup \{a\})}$)

On appelle $f^\#$ le **prolongement par continuité** de f à a . On peut aussi prolonger par continuité à $B \subset \text{adh}(A) \setminus A$, sous réserve de l'existence d'une limite en chaque point considéré.

☞ **Exercice 3.1.** (facile) On pose $\Delta = \{(s, s) \in \mathbb{R}^2 / s \in \mathbb{R}\}$. Démontrez que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \Delta \rightarrow \mathbb{R}, (s, t) \mapsto \frac{\sin s - \sin t}{s - t}$ peut être prolongée par continuité en une fonction $f^\# : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur \mathbb{R}^2 .

☞ **Exercice 3.2.** (très facile) Peut-on prolonger par continuité à \mathbb{R}^2 la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}; f(s, t) := \frac{st^2}{s^2 + t^4} ?$$

☞ **Exercice 3.3.** (assez facile) Un arc γ à valeurs dans un espace métrique (E, d) est une application continue de l'intervalle $[0, 1]$ dans E . Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. réel, et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Démontrez que f est continue sur E si et seulement si $f \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[0, 1]$ pour tout arc γ à valeurs dans E .

Proposition 3.3.

|| On suppose que $\lim_{u \rightarrow a, u \in A} f(u) = b$ ($a \in \text{adh}(A)$). Soit B une partie de A telle que $a \in \text{adh}(B)$. On a : $\lim_{u \rightarrow a, u \in B} f(u) = b$.

Démonstration : La restriction de f à $B \cup \{a\}$ est continue comme restriction d'une fonction continue. ♦

Commentaire : Pour calculer $\lim_{u \rightarrow a, u \in A} f(u)$, on a en fait besoin seulement des valeurs de f dans une boule arbitrairement petite de centre a .

$$(3.2) \quad \forall \rho > 0 : \lim_{u \rightarrow a, u \in A} f(u) = \lim_{u \rightarrow a, u \in B(a, \rho) \cap A} f(u).$$

Pour cette raison, on dit que la notion de limite est une notion **locale**. Et insistons encore sur le fait que dans le cas où $a \in A$ la valeur $f(a)$ n'intervient pas !

Remarque : Soit $f : A \rightarrow F$ et soit $a \in \text{adh}(A)$. Supposons que $A = B \cup C$, avec $a \in \text{adh}(B)$ et $a \in \text{adh}(C)$.

Si $\lim_{u \rightarrow a, u \in B} f(u) = b$ et si $\lim_{u \rightarrow a, u \in C} f(u) = b$, on a $\lim_{u \rightarrow a, u \in A} f(u) = b$.

C'est évident à partir de (3.1) et parfois utile lorsqu'une fonction est définie par des « formules » dépendant du point considéré.

Proposition 3.4.

|| Soient $f : A \subset E_d \rightarrow F_\delta$ et $g : F_\delta \rightarrow G_\theta$. Si $\lim_{u \rightarrow a, u \in A} f(u) = b$, et si g est continue en $b \in F : \lim_{u \rightarrow a, u \in A} (g \circ f)(u) = g(b)$.

Démonstration : Evidente, composition d'applications continues en un point. ♦

Il est à noter que la limite d'une suite rentre dans le cadre des limites au sens défini ci-dessus en prenant pour a le point $+\infty \in \text{adh}(\mathbb{N})$, \mathbb{N} étant considéré comme une partie de la droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$. On peut, de même, définir $\lim_{t \rightarrow +\infty, t \in \mathbb{R}} f(t)$, etc.

On pourrait multiplier les résultats sur les limites puisqu'il suffit de traduire des résultats de continuité. Vous les démontrerez vous-mêmes facilement en cas de besoin.

Citons tout de même, puisque nous venons d'étudier les produits d'espaces métriques :

Proposition 3.5.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soient } f = (\varphi, \psi) : G_{\partial} \rightarrow F = E_d \times E'_d, A \subset G \text{ et } a \in \text{adh}(A). \\ \lim_{u \rightarrow a, u \in A} f(u) = (b, b') \in E \times E' \text{ si et seulement si } \lim_{u \rightarrow a, u \in A} \varphi(u) = b \text{ et} \\ \lim_{u \rightarrow a, u \in A} \psi(u) = b'. \end{array} \right.$$

Démonstration : C'est une traduction du Th. 2.1. ♦

Nous avons déjà dit que le calcul différentiel faisait un usage intensif de la notion de limite ; cela découle de la définition fondamentale du calcul différentiel :

Définition 3.2.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Soient } (E, \|\cdot\|_E) \text{ et } (F, \|\cdot\|_F) \text{ des e.v.n. sur le même corps } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}, \text{ soit} \\ U \neq \emptyset \text{ une partie ouverte de } E, \text{ et soit } f : U \rightarrow F. f \text{ est dite } \mathbf{dérivable au point} \\ u \in U \text{ s'il existe } A_u : E \rightarrow F \text{ linéaire et continue sur } E \text{ telle que :} \\ \varepsilon_u(h) = \frac{f(u+h) - f(u) - A_u(h)}{\|h\|} \quad [\varepsilon_u \text{ est une application } E \setminus \{0\} \rightarrow F] \\ \text{vérifie : } \lim_{h \rightarrow 0, h \in E \setminus \{0\}} \varepsilon_u(h) = 0. \\ \text{On note alors } A_u := Df(u) \text{ et cette application linéaire continue est appelée} \\ \mathbf{dérivée de } f \text{ au point } u \text{ (ou : « en } u \text{ »)}. \end{array} \right.$$

Nota : E étant un e.v.n, on a bien : $0 \in \text{adh}(E \setminus \{0\})$. On notera $h \neq 0$ pour $h \in E \setminus \{0\}$. U étant ouvert, pour tout h tel que $\|h\|$ assez petit, $f(u+h)$ est bien défini : c'est d'ailleurs la raison pour laquelle on ne parle de dérivabilité que pour les fonctions définies sur un ouvert !

Proposition 3.6.

Une dérivée au point u , lorsqu'il en existe, est unique. De sorte qu'on peut parler de **la** dérivée au point u .

Démonstration :

Supposons qu'il en existe deux :

$$f(u+h) - f(u) - A_u(h) = \|h\| \cdot \varepsilon_1(h) \text{ et } f(u+h) - f(u) - B_u(h) = \|h\| \cdot \varepsilon_2(h),$$

où $\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \varepsilon_1(h) = \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \varepsilon_2(h) = 0$.

Donc : $A_u(h) - B_u(h) = \|h\|(\varepsilon_2(h) - \varepsilon_1(h))$, et :

$$\|A_u(h) - B_u(h)\| \leq \|h\|(\|\varepsilon_1(h)\| + \|\varepsilon_2(h)\|)$$

D'où : $\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\|C_u(h)\|}{\|h\|} = 0$, où $C_u := A_u - B_u$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé, arbitraire ;

$$\exists \eta > 0, \forall h \in E, h \neq 0 : \|h\| \leq \eta \implies \frac{\|C_u(h)\|}{\|h\|} \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in E, x \neq 0 : \left\| \frac{\eta x}{\|x\|} \right\| = \eta \implies \frac{\|C_u(\frac{\eta x}{\|x\|})\|}{\|\frac{\eta x}{\|x\|}\|} \leq \varepsilon$, i.e. $\frac{\|C_u(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon$ (C_u est linéaire).

Soit : $\forall x \neq 0 : \frac{\|C_u(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon [\forall \varepsilon > 0] \implies \forall x \neq 0 : \|C_u(x)\| = 0 \implies C_u(x) = 0$ pour tout $x \in E$ [$C_u(0) = 0$]. Finalement, $C_u = 0$ et $A_u = B_u$. ♦

Exemple 3.1. On prend pour E un espace préhilbertien réel $(E, (\cdot|\cdot))$, et $F = \mathbb{R}$; on considère la fonction $f : U = E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2$.

$$\begin{aligned} f(u+h) - f(u) &= \frac{1}{2}[\|u+h\|^2 - \|u\|^2] = \frac{1}{2}[\|u\|^2 + 2(u|h) + \|h\|^2 - \|u\|^2] \\ &= (u|h) + \|h\| \left(\frac{1}{2}\|h\|\right). \end{aligned}$$

$h \mapsto (u|h)$ est une fonction linéaire continue (lipschitzienne) de E dans $F = \mathbb{R}$, et $\varepsilon_u(h) = \frac{1}{2}\|h\| \xrightarrow{h \rightarrow 0, h \neq 0} 0$.

Donc, pour tout $u \in E$, f est dérivable au point u et sa dérivée en u est la fonction linéaire et continue $Df(u) : E \rightarrow \mathbb{R}$, $h \mapsto [Df(u)](h) := Df(u).h = (u|h)$. ♦

Nous ne poursuivrons pas plus loin, ici, dans le calcul différentiel qui fait l'objet d'un autre module de Licence.

CORRIGÉ DES EXERCICES
Exercice 1.1.

$\varpi : E \times E' \rightarrow E' \times E$, $(u, u') \mapsto \varpi(u, u') = (u', u)$ est clairement une bijection, d'inverse $\varpi^{-1}(u', u) = (u, u')$.

$$\delta[(u', u), (v', v)] = \max\{d'(u', v'), d(u, v)\} = \max\{d(u, v), d'(u', v')\} = \delta[(u, u'), (v, v')]. \blacklozenge$$

Exercice 1.2.

Montrons (1.3). Soit $U = (u, u')$, $\rho > 0$.

$$\begin{aligned} V = (v, v') \in \mathbf{B}(U, \rho] &\iff \delta(U, V) = \max\{d(u, v), d(v, v')\} < \rho \\ &\iff d(u, v) < \rho \text{ et } d'(u', v') < \rho \iff v \in B(u, \rho] \text{ et } v' \in B'(u', \rho] \\ &\iff (v, v') \in B(u, \rho] \times B'(u', \rho]. \text{ M\^eme chose pour les boules ferm\^ees. } \blacklozenge \end{aligned}$$

Soit A [resp. A'] ouvert de E [resp. de E'], et soit $U = (u, u') \in A \times A'$. $\exists \rho > 0 : B(u, \rho] \subset A$ et $\exists \rho' > 0 : B'(u', \rho'] \subset A'$. Soit $\sigma := \min\{\rho, \rho'\}$:

$B(u, \sigma] \times B'(u', \sigma] \subset B(u, \rho] \times B'(u', \rho'] \subset A \times A'$; soit : $\mathbf{B}(U, \sigma] \subset A \times A'$; $A \times A'$ est donc un ouvert.

R\^ecioproquement, supposons $A \times A'$ ouvert dans $E \times E'$. Soient $u \in A$ et $u' \in A'$, posons $U = (u, u')$. Il existe $\rho > 0$ tel que : $\mathbf{B}(U, \rho] = \mathbf{B}((u, u'), \rho] = B(u, \rho] \times B'(u', \rho] \subset A \times A'$, donc par (1.7.1) $B(u, \rho] \subset A$ et $B'(u', \rho] \subset A'$; donc A et A' sont ouverts dans E et E' respectivement. \blacklozenge

Pour prouver que $A \times A'$ ferm\^e $\implies A$ et A' sont ferm\^es, on peut proc\^eder en termes de suites en utilisant : (u_n, u'_n) converge vers (u, u') $\iff (u_n)$ converge vers u et (u'_n) converge vers u' . Le r\^esultat est alors \^evident. \blacklozenge

On peut aussi utiliser (1.4), voir plus loin.

Montrons (1.4) Soit $U = (u, u') \in \text{adh}(A) \times \text{adh}(A')$.

$\forall \varepsilon > 0, \exists v \in A : d(u, v) \leq \varepsilon$, et $\exists v' \in A' : d'(u', v') \leq \varepsilon$; soit $V = (v, v') \in A \times A' : \delta[(u, u'), (v, v')] \leq \varepsilon$, soit : $V \in \text{adh}(A \times A')$. \blacklozenge

R\^ecioproquement : soit $U = (u, u') \in \text{adh}(A \times A')$, et supposons que U n'appartient pas \^a $\text{adh}(A) \times \text{adh}(A')$. Ou bien $u \notin \text{adh}(A)$, ou bien $u' \notin \text{adh}(A')$.

Si $u \notin \text{adh}(A) : (E \setminus A) \times E'$ est un ouvert de $E \times E'$ [cf. ci-dessus] ; donc :

$\exists \mathbf{B}(U, \rho] \subset (E \setminus A) \times E'$. D'apr\^es (1.7.3) :

$$(A \times A') \cap [(E \setminus A) \times E'] = [A \cap (E \setminus A)] \times (A' \cap E') = \emptyset \times A' = \emptyset.$$

Donc : $\mathbf{B}(U, \rho] \cap (A \times A') = \emptyset$ et $U = (u, u') \notin \text{adh}(A \times A')$: contradiction.

M\^eme raisonnement si $u' \notin \text{adh}(A')$. \blacklozenge

On d\^eduit de ce r\^esultat que si A [A'] ferm\^e de E [E'] :

$$\text{adh}(A \times A') = \text{adh}(A) \times \text{adh}(A') = A \times A'.$$

Inversement, si $A \times A'$ est ferm\^e dans $E \times E'$:

$$\text{adh}(A \times A') = A \times A' = \text{adh}(A) \times \text{adh}(A') \implies [\text{par (1.7.2)}] A = \text{adh}(A) \text{ et } A' = \text{adh}(A'). \blacklozenge$$

Montrons (1.5). Soit $U = (u, u') \in \text{int}(A) \times \text{int}(A')$:

$\exists \rho > 0 : B(u, \rho] \subset A$ et $\exists \rho' > 0 : B'(u', \rho'] \subset A'$. Soit $\sigma = \min\{\rho, \rho'\}$.

$\mathbf{B}(U, \sigma] = B(u, \sigma] \times B'(u', \sigma] \subset A \times A'$. D'o\^u : $\text{int}(A) \times \text{int}(A') \subset \text{int}(A \times A')$. \blacklozenge

Si $U = (u, u') \in \text{int}(A \times A')$, $\exists \mathbf{B}(U, \rho] = B(u, \rho] \times B'(u', \rho] \subset A \times A'$. D'o\^u, par (1.7.2) $B(u, \rho] \subset A$ et $B'(u', \rho] \subset A' \implies (u, u') \in \text{int}(A) \times \text{int}(A')$. \blacklozenge

Exercice 1.3.

$\text{fr}(A \times A') = \text{adh}(A \times A') \setminus \text{int}(A \times A')$ (cf. Chap. 6, Exerc. 1.3).

$$\begin{aligned} \text{adh}(A \times A') &= \text{adh}(A) \times \text{adh}(A') = (\text{fr}(A) \cup \text{int}(A)) \times (\text{fr}(A') \cup \text{int}(A')) \\ &= (\text{fr}(A) \times \text{fr}(A')) \cup (\text{fr}(A) \times \text{int}(A')) \cup (\text{int}(A) \times \text{fr}(A')) \cup (\text{int}(A) \times \text{int}(A')) \end{aligned}$$

La r\^eunion pr\^ecedente est disjointe et, par (1.5) : $\text{int}(A \times A') = \text{int}(A) \times \text{int}(A')$, d'o\^u :

$$\text{fr}(A \times A') = (\text{fr}(A) \times \text{fr}(A')) \cup (\text{fr}(A) \times \text{int}(A')) \cup (\text{int}(A) \times \text{fr}(A'))$$

Soit, en utilisant deux fois $\text{fr}(A) \times \text{fr}(A') :$

$$\begin{aligned} \text{fr}(A \times A') &= \text{fr}(A) \times (\text{fr}(A') \cup \text{int}(A')) \cup (\text{fr}(A) \cup \text{int}(A)) \times \text{fr}(A') \\ \text{fr}(A \times A') &= [\text{fr}(A) \times \text{adh}(A')] \cup [\text{adh}(A) \times \text{fr}(A')]. \spadesuit \end{aligned}$$

Exercice 1.4.

Si E et E' sont séparables, il existe $D \subset E$ et $D' \subset E'$ dénombrables et partout denses. $D \times D'$ est dénombrable (même démonstration que pour $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, énumération diagonale), et : $\text{adh}(D \times D') = \text{adh}(D) \times \text{adh}(D') = E \times E' = F$. \spadesuit

Réciproque : soit D dénombrable et partout dense dans $F = E \times E'$. $u' \in E'$ étant choisi, E est isométrique à $E \times \{u'\}$, et $E \times \{u'\}$ sous-espace métrique d'un espace séparable est séparable [Chap. IV, Exerc. 1.6]. Ensuite, une isométrie conserve la séparabilité (un simple homéomorphisme aurait suffi). Donc E est séparable. De même pour E' . \spadesuit

Exercice 2.1.

Un dessin s'impose ! Pour tout $a = (\alpha, \beta)$ fixé : $\varphi_a(t) = f(ta) = f(t\alpha, t\beta)$.

Pour tout a fixé, il est clair qu'il existe (cf. figure) un $\rho(a) > 0$ tel que pour tout t vérifiant $|t| < \rho(a)$ on a en fait $\varphi_a(t) = 0$, et donc φ_a est évidemment continue en $t = 0$ [on peut expliciter $\rho(a)$ si l'on veut].

$f(0, 0) = 0$. Plaçons-nous sur la courbe $s \mapsto |s|^3$ qui est telle que $0 < |s|^3 < s^2$ pour $|s| < 1$. On a : $f(s, |s|^3) = 1$, et donc $\lim_{s \rightarrow 0, s \neq 0} f(s, |s|^3) = 1 \neq f(0, 0) = 0$. f n'est donc pas continue en $(0, 0)$. \spadesuit

Exercice 3.1.

$$\sin s - \sin t = 2 \cdot \cos \frac{s+t}{2} \sin \frac{s-t}{2}, \text{ d'où : } \frac{\sin(s) - \sin(t)}{s - t} = \cos \frac{s+t}{2} \frac{\sin \frac{s-t}{2}}{\frac{s-t}{2}},$$

mais $\lim_{x \rightarrow 0, x \neq 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et, donc : $\lim_{(u,v) \rightarrow (s,s) \in \mathbb{R}^2, (u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta} f(u, v) = \cos(s)$.

Posons : $f^\#(s, t) := f(s, t)$ pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ et $f^\#(s, s) = \cos(s)$.

D'après ce qui précède et d'après $\lim_{(u,u) \rightarrow (s,s)} f^\#(u, u) = \cos s$, $f^\# : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur \mathbb{R}^2 . \spadesuit

Exercice 3.2.

Il est clair, résultats sur les fonctions continues (précisez lesquels), que f est continue en tout point (s_0, t_0) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Supposons que $\lim_{(s,t) \rightarrow (0,0), (s,t) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}} f(s, t) = \alpha \in \mathbb{R}$. Le seul prolongement par continuité possible serait obtenu en posant $f(0, 0) = \alpha$.

Puisque $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \rightarrow (0, 0)$, on devrait avoir $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = f(0, 0) = \alpha$.

Mais $f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \frac{n}{n+n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et donc on aurait $\alpha = 0$.

Mais on a aussi : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) = (0, 0)$, et $f(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{n^4} \times \frac{1}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$. Donc f ne peut pas être prolongée par continuité à \mathbb{R}^2 entier. ou, en d'autres termes, la limite de f lorsque $(s, t) \rightarrow (0, 0)$ n'existe pas. \spadesuit

Exercice 3.3.

Si f est continue sur E , puisqu'un arc est continu sur $[0, 1]$ par définition, la composée $f \circ g$ est continue sur $[0, 1]$ d'après un résultat classique sur les applications continues. C'est la réciproque qui pose problème. Soit $u \in E$ arbitraire. Si pour toute suite (u_n) vérifiant $\lim(u_n) = u$ on a $\lim(f(u_n)) = f(u)$, le résultat voulu sera prouvé [Chap. VII, Th. 1]. Soit donc (u_n) telle que $\lim(u_n) = u$. Si nous parvenons à construire un arc χ vérifiant $\chi(0) = u$ et $\chi(\frac{1}{n}) = u_n$, nous aurons gagné, car alors :

$$\lim(f \circ \chi)(\frac{1}{n}) = (f \circ \chi)(0) \quad [\lim \frac{1}{n} = 0 \text{ et } f \circ \chi \text{ est continu par hypothèse}], \text{ soit :}$$

$$\lim(f(u_n)) = f(u).$$

Il n'est pas difficile de construire l'arc χ : $\chi(\frac{1}{n}) := u_n$ et $\chi(\frac{1}{n+1}) := u_{n+1}$; pour $t \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$, on prendra pour $\chi(t)$ le segment joignant u_n à u_{n+1} . On obtient bien ainsi une application continue de $]0, 1]$ dans E , et on a un prolongement par continuité de χ à $[0, 1]$ en posant $\chi(0) := u$. \spadesuit

Vous pouvez expliciter χ , si vous voulez, en considérant les deux homéomorphismes inverses $\theta : [0, 1] \rightarrow [\alpha, \beta]$, $t \mapsto (\beta - \alpha)t + \alpha$ et $\theta^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1]$, $s \mapsto \frac{s - \alpha}{\beta - \alpha}$.
On trouve : pour $\frac{1}{n+1} \leq t \leq \frac{1}{n}$: $\chi(t) := (n+1)(1-nt) \cdot u_n + n[(n+1)t - 1] \cdot u_{n+1}$.

Fin du Chapitre IX

CHAPITRE X

APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

Introduction

Ce chapitre – *très important* – est consacré aux applications définies et à valeurs dans des espaces vectoriels normés qui sont *linéaires* et *continues*. Notez bien que les deux e.v.n. doivent être construits sur le même corps qui sera toujours ici \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

En fin de chapitre vous disposez de quelques rappels d'algèbre linéaire : ce sont les connaissances minimales à avoir dans ce domaine. Mais il est bon d'en savoir un peu plus (calcul matriciel, déterminants, par exemple).

Le contenu de ce chapitre constitue un préliminaire à une part importante de ce qu'on a coutume d'appeler l'*Analyse Fonctionnelle classique*, « classique » signifiant ici linéaire.

Cette branche des mathématiques, au moins dans ses aspects les plus élémentaires, fait partie du bagage commun à tous les mathématiciens – aussi « purs », ou aussi « appliqués » soient-ils – elle mérite donc un effort particulier.

Dans les chapitres suivants nous compléterons cette étude.

La partie « cours » *stricto sensu* est assez brève et facile, le reste du chapitre étant consacré à des exemples nombreux et détaillés (pas obligatoirement faciles) : *à quoi serviraient des connaissances sur les applications linéaires continues si l'on ne disposait pas d'exemples concrets ?*

Vous n'êtes toutefois pas tenu d'apprendre par cœur tous les exemples !

De nombreux exercices sont là pour vous aider à assimiler le cours.

☞ Appliquer à une application linéaire la définition générale de la continuité traduit une méconnaissance du cours, *c'est très mal vu* . . .

☞ Réfléchissez à la question des normes *atteintes/pas atteintes*, ne serait-ce que pour la raison futile suivante : cela tombe souvent aux examens . . .

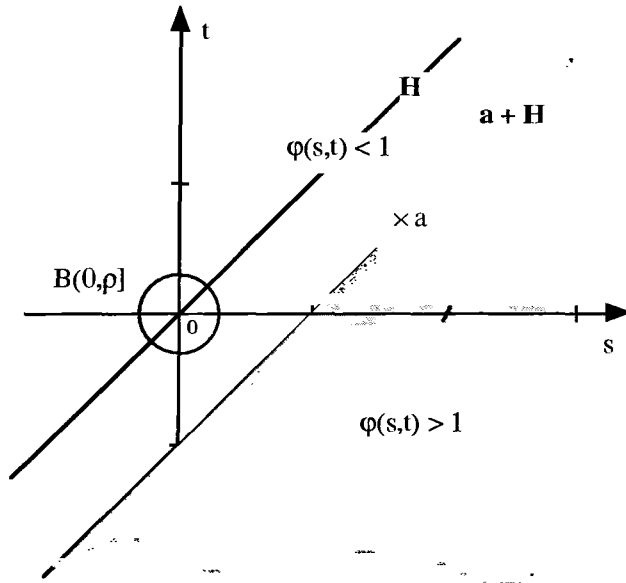
☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.4, 2.5, 2.6, 3.1, 3.2, 3.3.

☞ Exercices complémentaires : 1.4, 2.2, 2.3, 2.7.

Deux Lectures sont proposées. La première donne un résultat curieux sur les isométries d'un e.v.n. sur un autre. La seconde donne des informations sur la notion d'approximation d'un e.v.n. Elle intéressera davantage les étudiants qui se destinent aux mathématiques appliqués, mais les « puristes » y trouveront matière à réflexion utile.

Nous rappelons que les Lectures sont facultatives et essentiellement destinées aux « fanatiques » des mathématiques : les étudiants disposant de peu de temps, et ceux qui ont de la peine à assimiler l'essentiel, peuvent s'en dispenser sans inconvénient.

JE VOUS SOUHAITE UN BON ET STUDIOUX TRAVAIL



Théorème 3.1

CHAPITRE X

APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

1. CARACTÉRISATIONS DES APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES.

L'ESPACE VECTORIEL NORMÉ $\mathcal{L}(E, F)$

Soient deux espaces vectoriels normés (en abrégé e.v.n.), $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, sur le même corps des scalaires : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Notations :

On notera $\mathcal{L}(E, F)$ le sous-ensemble de $L(E, F)$ [voir les rappels d'Algèbre Linéaire en Annexe, à la fin de ce chapitre] constitué par toutes les applications $A \in L(E, F)$ qui sont *continues sur E entier*. On écrit souvent Au au lieu de $A(u)$.

On abrégera $\mathcal{L}(E, E)$ en $\mathcal{L}(E)$.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ s'appelle le *dual topologique* de E , et on le notera E' : c'est le sous-ensemble du *dual algébrique* E^* de E constitué par toutes les applications $\varphi \in E^*$ qui sont continues sur E entier.

Pour $u \in E$ et $\varphi \in E^*$ ou E' , on note souvent $\varphi(u) = \langle u, \varphi \rangle$.

On notera $\mathcal{I}\text{som}(E, F)$ le sous-ensemble de $\text{Isom}(E, F)$ [cf. Annexe] constitué par toutes les applications $A \in \text{Isom}(E, F)$ qui sont continues sur E entier ET telles que $A^{-1} : F \rightarrow E$ est continue sur F entier. $\mathcal{I}\text{som}(E, E)$ sera noté $\mathcal{G}\mathcal{L}(E)$.

☞ Insistons sur le fait que :

$$[A \in \text{Isom}(E, F), A \text{ continue sur } E] \not\Rightarrow A \in \mathcal{I}\text{som}(E, F) ;$$

En effet, l'inverse d'une application linéaire bijective continue sur E n'est pas en général continue sur F .

☞ Ne confondez pas *isomorphisme* d'e.v.n. [application linéaire bijective continue, d'inverse continu] et *isométrie linéaire* [A linéaire telle que $\|A(u)\| = \|u\|$ pour tout u : A est injective et continue, mais pas nécessairement surjective].

Mais si deux e.v.n. sont *isométriques*, cela signifie, par définition [cf. Chap. I] qu'il existe une *isométrie linéaire* de l'un **sur** l'autre. $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ sont isomorphes, mais ils *ne sont pas* isométriques (vérifiez !).

Les propriétés générales des applications continues [cf. Chap. VII] nous permettent d'énoncer sans démonstration les résultats suivants :

Proposition 1.1.

- || (1.1) $\mathcal{L}(E, F)$ est un *sous-espace vectoriel* de $L(E, F)$.
|| (1.2) Si $(G, \|\cdot\|_G)$ est un autre e.v.n. sur \mathbb{K} , si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$,
|| on a : $B \circ A \in \mathcal{L}(E, G)$.

Corollaire

- $\mathcal{L}(E)$ est un *sous-anneau*, en fait une *sous-algèbre*, de $L(E)$.
 (1.3) $\mathcal{GL}(E)$ est un *sous-groupe* du groupe $GL(E)$ (le groupe linéaire).
 (1.4) Si $A \in \mathcal{L}(E, F) : \text{Ker}(A) = A^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E .

Les applications linéaires $E \rightarrow F$, où E, F sont des e.v.n. sur le même corps \mathbb{K} , possèdent des propriétés très particulières par rapport à la notion de continuité : leur comportement est très simple. L'étude des conditions de continuité amène à doter l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ d'une norme « naturelle », ou « canonique », très utile.

Théorème 1.1. (FONDAMENTAL)

Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ des e.v.n. sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $A \in L(E, F)$. Les propriétés suivantes sont toutes équivalentes :

- (1.5) A est continue en un point quelconque $u_0 \in E$, par exemple au point $u_0 = 0$,
 (1.6) A est continue sur E entier, c'est-à-dire, par définition : $A \in \mathcal{L}(E, F)$,
 (1.7) A est uniformément continue sur E entier, plus précisément : A est lipschitzienne sur E ,
 (1.8) l'image $A(X)$ de toute partie bornée X de E est une partie bornée de F ,
 (1.9) il existe m réel ≥ 0 tel que : $\forall u \in E : \|A(u)\|_F \leq m \cdot \|u\|_E$.

Démonstration : Voir la partie DÉMONSTRATIONS en fin de chapitre.

Ces démonstrations, très simples, doivent être connues du lecteur, *i.e.* qu'il doit savoir les retrouver rapidement. ♦

Commentaires :

1) Lorsqu'on cherche à démontrer qu'une application *linéaire* A est continue, on majore $\|A(u)\|$ en cherchant à faire apparaître $m \geq 0$ tel que $\|A(u)\| \leq m \cdot \|u\|$ pour tout $u \in E$, *i.e.* qu'on utilise (1.9) qui est le critère le plus pratique.

☛ On ne revient *jamais* à la définition générale de la continuité :

$$" \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u, v \in E, \text{ etc. } "$$

De même, pour démontrer que A (linéaire) est injective on n'écrit jamais $A(u) = A(v) \implies \dots$, mais $A(u) = 0 \implies \dots$

Ce seraient des fautes de goût impardonnables !

2) Une application *linéaire continue* est parfois appelée un *opérateur*. Cette terminologie est classique, et vous pouvez l'adopter, mais « application linéaire continue » est plus prudent pour un débutant... Voir aussi Commentaire 1) page suivante, *in fine*.

Exemple 1.1. $E = C_\infty([a, b], \mathbb{R}), \|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$.

Soit $s \in [a, b]$ fixé. Pour tout $f \in E$, on pose : $\delta_s(f) := f(s)$. δ_s est une forme linéaire sur E , *i.e.* $\delta_s \in E^*$, appelée *mesure de Dirac au point s* , ou *fonctionnelle d'évaluation en s* , ou *charge ponctuelle en s* . Démontrons que δ_s est continue.

$\forall f \in E : |\delta_s(f)| = |f(s)| \leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| = \|f\|_\infty$. Dans (1.9), $m = 1$ convient, et donc δ_s est continue (sur E). ♦

Changeons d'e.v.n. en prenant $F = C_1([a, b], \mathbb{R}), \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$. On va prouver que δ_s n'est pas continue sur F .

Supposons qu'elle le soit, donc qu'il existe $m \geq 0$ tel que $|\delta_s(f)| \leq m \cdot \|f\|_1$ pour tout $f \in F$. Pour $s \in]a, b[$ et n suffisamment grand, considérons la suite de fonctions suivante :

$f_n(t) = 0$ si $t \in [a, s - \frac{1}{n}]$, $f_n(t) = 0$ si $t \in [s + \frac{1}{n}, b]$, $f_n(s) = 1$, et f_n est continue, affine par morceaux ; f_n est un « chapeau pointu » [dessinez !].

On aurait pour tout n :

$|\delta_s(f_n)| = |f_n(s)| = 1 \leq m \|f_n\|_1 = m \cdot \frac{1}{2} \cdot [(s + \frac{1}{n}) - (s - \frac{1}{n})] = \frac{m}{n}$, d'où en faisant $n \rightarrow \infty$: $1 \leq 0$, une contradiction !

Nota : si $s = a$ ou si $s = b$, on doit modifier un peu les f_n (le voir). ♦

Théorème 1.2. (FONDAMENTAL)

Pour $A \in \mathcal{L}(E, F)$, on pose : $\nu(A) := \sup \left\{ \frac{\|A(u)\|_F}{\|u\|_E} / u \in E, u \neq 0 \right\}$.

On a les égalités suivantes :

(1.10)

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sup_{u \in E, \|u\| < 1} \|A(u)\|_F = \sup_{u \in E, \|u\| \leq 1} \|A(u)\|_F \\ &= \sup_{u \in E, \|u\|=1} \|A(u)\|_F = \frac{1}{\rho} \times \sup_{u \in E, \|u\| \leq \rho} \|A(u)\|_F, \text{ pour tout } \rho > 0 \\ &= \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|A(u)\|_F}{\|u\|_E} \\ &= \inf \{ m \text{ réel } \geq 0 / \forall u \in E : \|A(u)\|_F \leq m \cdot \|u\|_E \} \end{aligned}$$

(1.11) La fonction $A \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto \nu(A) \in \mathbb{R}$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$. On l'appelle la **norme naturelle** de $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration : Voir la partie DÉMONSTRATIONS en fin de chapitre. Ces vérifications (plutôt que « démonstrations ») doivent être connues. ♦

Notations :

Sauf mention explicite du contraire, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est toujours supposé muni de la norme $A \mapsto \nu(A)$. On peut donc parler de l'e.v.n. $\mathcal{L}(E, F)$ sans préciser davantage. On notera $\nu(A) = \|A\|_{\mathcal{L}(E, F)}$, ou simplement $\|A\|$ la norme naturelle de $\mathcal{L}(E, F)$. La norme de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E'$ sera notée $\|\cdot\|'$ au lieu de $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}$.

L'inégalité fondamentale

Puisque $\|A\| = \inf \{ m \text{ réel } > 0 / \forall u \in E : \|A(u)\|_F \leq m \cdot \|u\|_E \}$, et comme la borne inférieure est le plus grand des minorants, on a l'inégalité fondamentale suivante :

(1.12) $\forall u \in E : \|A(u)\|_F \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \cdot \|u\|_E$

Commentaires :

1) La propriété (1.8) du Th. 1.1 s'exprime souvent en disant que « A est bornée », puisqu'elle envoie les bornés de E dans les bornés de F . Cela ne signifie pas que $A(E) = \text{Im}(A)$ est bornée dans F , puisque c'est un espace vectoriel !!! A part si $A = 0$, ou bien si $E = \{0\}$, $A(E)$ n'est jamais bornée dans F . Cette notion d'application linéaire bornée (\iff continue) est donc tout à fait distincte de la notion générale d'application bornée définie dans le Chap. I, fin du § 3, « Un exemple important d'espace métrique ». Pour éviter toute confusion, nous ne ferons pas usage de cette terminologie ici.

2) Les inégalités (1.12) et (1.13) ci-dessous, particulièrement intéressantes, ne sont pas vraies pour une norme quelconque sur $\mathcal{L}(E, F)$! D'où l'intérêt de la norme « naturelle » $\nu \dots$

Par exemple, si l'on prend $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et si l'on identifie $L(E)$ aux matrices carrées 2×2 muni aussi de la norme $\|\cdot\|_\infty$, il n'est pas difficile de trouver $A, B \in L(E)$ et $u \in E$ tels que $\|A(u)\| > \|A\| \cdot \|u\|$ et $\|A \circ B\| > \|A\| \cdot \|B\|$ [pour A prendre la matrice de coefficients 1, 2, 3, 4, pour B tous les coefficients égaux à 1, et $u = (1, 1)$].

3) Le *sup* dans l'expression de $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ ne peut pas être remplacé par un *max* en général. Nous rencontrerons vite des exemples.

Si l'on peut remplacer *sup* par *max*, i.e. s'il existe $\hat{u} \in E, \|\hat{u}\| = 1$ tel que $\|A\| = \|A(\hat{u})\|$, on dit que *la norme est atteinte*, sinon on dit qu'*elle n'est pas atteinte*.

Pour calculer $\|A\|$ on calcule le *sup* de $\|A(u)\|$ pour $u \in B(0, 1[$, ou pour $u \in B(0, 1]$, ou encore pour $u \in S(0, 1)$: en fait $u \mapsto \|A(u)\| = (\|\cdot\| \circ A)(u)$ est une fonction *convexe*, et le *sup* d'une telle fonction sur un convexe ne peut être atteint (s'il l'est !) que sur la frontière du convexe [cf. Chap.VI, Exercice 1.7], ici $S(0, 1)$: $\|A\| = \sup_{\|u\|=1} \|A(u)\|$ résulte donc d'un principe général.

4) (1.12) dit que A est plus qu'uniformément continue sur E entier : elle est lipschitzienne de constante $\|A\|$ sur E ; en effet :

$$\|A(u) - A(v)\| = \|A(u - v)\| \leq \|A\| \cdot \|u - v\|.$$

5) Etant donnés des espaces vectoriels E, F , on sait construire des éléments non nuls de $L(E, F)$ à l'aide de bases (au sens algébrique) de E et F [l'existence d'une base pour tout e.v. a été admise en D.E.U.G, on continuera à l'admettre]. Pour $\mathcal{L}(E, F)$ on ne dispose pas d'argument de ce type, et on ne pourra pas en fait affirmer *ici* que $\mathcal{L}(E, F)$ contient dans le cas général autre chose que la fonction nulle ! On démontre que $\mathcal{L}(E, F)$ est effectivement assez « gros » mais que – toutefois – $\mathcal{L}(E, F) \neq L(E, F)$ si $\dim(E) = \infty$ et $\dim(F) \geq 1$ (en particulier $E' \neq E^*$ si $\dim(E) = \infty$). Voir un cours d'analyse fonctionnelle de Maîtrise.

Proposition 1.2. (TRÈS SOUVENT UTILE)

Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ des e.v.n. sur le même corps \mathbb{K} . Soient $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $B \in \mathcal{L}(F, G)$: on sait [Prop. 1.1 (1.2)] que $B \circ A \in \mathcal{L}(E, G)$; on a l'inégalité :

$$(1.13) \quad \|B \circ A\|_{\mathcal{L}(E,G)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)}$$

Démonstration : D'après l'inégalité fondamentale ci-dessus appliquée deux fois de suite : $\forall u \in E$:

$$\begin{aligned} \|(B \circ A)(u)\|_G &= \|B(A(u))\|_G \\ &\leq \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)} \cdot \|A(u)\|_F \leq \|B\|_{\mathcal{L}(F,G)} \cdot \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \cdot \|u\|_E. \end{aligned}$$

On applique le Th.1.2 :

$$\begin{aligned} \|B \circ A\|_{\mathcal{L}(E,G)} &= \sup_{u \in E, \|u\|=1} \|(B \circ A)(u)\|_G \\ &\leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \sup_{u \in E, \|u\|=1} \|u\|_E = \|A\| \cdot \|B\|. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Corollaire 1.1.

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$. On peut définir les puissances entières de A par : $A^0 := Id_E$ (l'identité sur E), $A^1 := A$, $A^2 := A \circ A$, et, par récurrence : $A^n := A \circ A^{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. On a : $\|Id_E\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$, et pour tout $n \geq 1$:

$$(1.14) \quad \|A^n\|_{\mathcal{L}(E)} \leq (\|A\|_{\mathcal{L}(E)})^n$$

Démonstration : $\|Id_E\| = \sup_{u \in E, \|u\|=1} \|Id_E(u)\| = \sup_{u \in E, \|u\|=1} \|u\| = 1$. $\|A^n\| \leq \|A\|^n$ est évident par récurrence et Prop. 1.2. \blacklozenge

✎ **Exercice 1.1.** (facile) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des e.v.n. réels, et soit $A : E \rightarrow F$ une application additive et bornée au sens suivant :

- (i) $\forall u \in E, \forall v \in E : A(u + v) = A(u) + A(v),$
- (ii) $\exists M \text{ réel } > 0, \forall u \in E : \|u\| \leq 1 \implies \|A(u)\| \leq M.$

Démontrez que A est une application linéaire continue, i.e. que $A \in \mathcal{L}(E, F).$

Proposition 1.3.

Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ des e.v.n. sur le même corps $\mathbb{K}.$
 Soit $A \in \text{Isom}(E, F)$ (supposé non vide).
 $A \in \mathcal{I}\text{som}(E, F)$ si et seulement si : il existe m, M réels > 0 tels que :
 $\forall u \in E : m \cdot \|u\|_E \leq \|A(u)\|_F \leq M \cdot \|u\|_E.$

Démonstration :

Il suffit d'appliquer le Th.1.1 (1.4); si $A \in \mathcal{I}\text{som}(E, F) : A \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$; donc il existe $C > 0$ tel que $\forall u \in E : \|A(u)\| \leq C\|u\|,$ et il existe $c > 0$ tel que $\forall v \in F : \|A^{-1}(v)\| \leq c\|v\|.$

Soit $u \in E$ arbitraire, et soit $v = A(u),$ soit $u = A^{-1}(v) :$

$$\|A^{-1}(A(u))\| = \|u\| \leq c\|A(u)\|, \text{ d'où : } \|A(u)\| \geq \frac{1}{c}\|u\|.$$

On prendra $m = \frac{1}{c}$ et $M = C.$

La réciproque invoque les mêmes arguments.

Nota : c et C sont $> 0,$ sinon A ou A^{-1} serait nul, donc certainement pas dans $\mathcal{I}\text{som}(E, F) ! \blacklozenge$

☞ On se gardera bien de croire que $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(F,E)} = \frac{1}{\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)}} = \frac{1}{\|A\|} !$

On a simplement : $1 = \|Id_E\| = \|A \circ A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\|,$ d'où : $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$ et $\|A\| \geq \frac{1}{\|A^{-1}\|} .$

D'ailleurs, pour $A \in \mathcal{I}\text{som}(E, F),$ le produit $\|A\| \cdot \|A^{-1}\| := \text{cond}(A) \geq 1$ est une quantité importante en analyse numérique ; on l'appelle le *conditionnement* de $A .$

Théorème des formes linéaires à noyau fermé

On sait, Prop.1.1, que si $A \in \mathcal{L}(E, F) : \text{Ker}(A)$ est fermé dans $E.$ Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est telle que $\text{Ker}(A)$ est fermé dans $E,$ il n'y pas de raison pour que A soit continue (penser à $A \in \text{Isom}(E, F)$ non continue : $\text{Ker}(A) = \{0\}$) . . .

Mais le résultat est vrai pour les *formes linéaires,* et c'est extrêmement important.

Il est à noter qu'en général $\text{Im}(A)$ peut être fermée, partout dense . . . ou rien du tout.

Théorème 1.3. (IMPORTANT)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C},$ et soit $\varphi \in E^* = L(E, \mathbb{K}).$ Si $\text{Ker}(\varphi)$ est fermé dans $E : \varphi$ est continue, i.e. appartient à $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}).$

Démonstration : Elle est élémentaire, mais nullement triviale. Voir DÉMONSTRATIONS en fin de chapitre. \blacklozenge

Commentaire : On sait [cf. Annexe] que pour $\varphi \in E' :$ ou bien $\varphi = 0,$ auquel cas $\text{Ker}(\varphi) = E,$ ou bien $\varphi \neq 0,$ auquel cas $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan. On sait d'autre part [Chap. V] qu'un hyperplan H est soit fermé dans E i.e. $\text{adh}(H) = H,$ soit partout dense dans $E,$ i.e. $\text{adh}(H) = E.$

D'après les Th. 1.1 et 1.3, étant donnée $\varphi \in E^*, \varphi \neq 0,$ on a l'alternative suivante :

- $\text{Ker}(\varphi)$ partout dense dans $E \iff \varphi$ est *discontinue* en tout point de $E,$
- $\text{Ker}(\varphi)$ fermé dans $E \iff \varphi$ est *continue* en tout point de $E.$

Un calcul de distance

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

Nous allons démontrer que la distance d'un point $u \in E$ à l'hyperplan fermé $H = \{v \in E / \varphi(v) = \alpha\}$ est donnée par :

$$(1.15) \quad \text{Formule d'Ascoli : } d(u, H) = \frac{|\varphi(u) - \alpha|}{\|\varphi\|'}$$

Démonstration : $\forall v \in H : \varphi(u - v) = \varphi(u) - \varphi(v) = \varphi(u) - \alpha$, et par (1.12) : $|\varphi(u - v)| \leq \|\varphi\|' \cdot \|u - v\|$, d'où : $|\varphi(u) - \alpha| \leq \|\varphi\|' \cdot \|u - v\|$. Donc :

$$|\varphi(u) - \alpha| \leq \|\varphi\|' \cdot d(u, H), \text{ en prenant } \inf_{v \in H}, \text{ soit : } d(u, H) \geq \frac{|\varphi(u) - \alpha|}{\|\varphi\|'}$$

Ensuite, $\|\varphi\|' = \sup_{w \in E \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(w)|}{\|w\|}$ et donc [borne sup.] pour tout entier n assez grand il existe $w_n \in E$ tel que : $0 < \|\varphi\|' - \frac{1}{n} \leq \frac{|\varphi(w_n)|}{\|w_n\|}$.

Considérons le vecteur : $v_n = u - \frac{\varphi(u) - \alpha}{\varphi(w_n)} w_n$ [n assez grand pour que $\varphi(w_n) \neq 0$, cf. le choix de w_n]; on a : $\varphi(v_n) = \varphi(u) - (\varphi(u) - \alpha) = \alpha$, d'où : $v_n \in H$. Donc : $d(u, H) \leq \|u - v_n\| = \frac{|\varphi(u) - \alpha|}{|\varphi(w_n)|} \|w_n\| \leq \frac{|\varphi(u) - \alpha|}{\|\varphi\|' - \frac{1}{n}}$. Il suffit à présent de faire tendre n vers l'infini pour obtenir $d(u, H) \leq \frac{|\varphi(u) - \alpha|}{\|\varphi\|'}$, et la formule est prouvée. ♦

Faute de connaissances (espaces complets, espaces compacts), nous ne pouvons pas aller plus loin pour le moment dans l'étude des applications linéaires continues.

C'est un peu dommage... mais ce n'est que partie remise. En attendant, nous allons donner un bon nombre d'exemples instructifs. Auparavant, nous allons admettre un résultat du Chap. XIV pour démontrer un résultat utile ici.

Théorème (provisoirement admis : cf. Chap. XII, Th. 2.3. ou Chap. XIV, Exer. 2.9.)

|| Toutes les normes sur un espace vectoriel de *dimension finie* sont équivalentes.
|| Attention ! Il s'agit des *normes*, pas des *distances* !

Proposition 1.4.

|| Si E est un e.v.n. de dimension finie, et si F est un e.v.n. quelconque, tous deux sur le même corps, toute application linéaire $A : E \rightarrow F$ est continue.
|| Autrement dit, dans cette situation : $\mathcal{L}(E, F) = L(E, F)$.

Démonstration : Soit (e_1, \dots, e_n) une base de E . Tout $u \in E$ s'écrit d'une manière unique : $u = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$. La fonction $u \mapsto \|u\| = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|$ est une norme sur E (évident).

Considérons pour tout j , $1 \leq j \leq n$, la fonction $\psi^j : E \rightarrow \mathbb{K}$, $u \mapsto \xi_j$; ψ^j est évidemment linéaire (on l'appelle « forme linéaire coordonnée »), et elle est continue sur $(E, \|\cdot\|) : \forall u \in E : |\psi^j(u)| = |\xi_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| = \|u\|$, et de norme $\|\psi^j\|_{E'} \leq 1$.

Comme toutes les normes sont équivalentes sur E , les ψ^j sont continues sur E indépendamment de la norme de E .

Soit à présent $A \in L(E, F)$:

$$\begin{aligned} \|A(u)\|_F &= \|A(\sum_{i=1}^n \psi^i(u) e_i)\|_F = \|\sum_{i=1}^n \psi^i(u) A(e_i)\|_F \leq \sum_{i=1}^n |\psi^i(u)| \cdot \|A(e_i)\|_F \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|\psi^i\|' \cdot \|u\| \cdot \|A(e_i)\|_F \leq (\sum_{i=1}^n \|A(e_i)\|_F) \cdot \|u\|, \end{aligned}$$

et donc A est continue de norme $\|A\| \leq \sum_{i=1}^n \|A(e_i)\|_F$, pour toute norme $\|\cdot\|_F$ sur F .

A est donc continue pour toutes les normes possibles sur E et sur F ; bien entendu, $\|A\|$ dépend des normes choisies. ♦

☞ **Exercice 1.2.** (très facile, résultat utile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Démontrez que l'application $\Lambda : E \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}, E) [= L(\mathbb{K}, E)]$ d'après la Prop. 1.4] définie par $\forall \lambda \in \mathbb{K} : [\Lambda(u)](\lambda) = \lambda.u$ est une isométrie linéaire surjective.

On identifie souvent E et $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$ grâce à cette isométrie (notamment en calcul différentiel). Les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$ sont parfois appelés *contravecteurs* : on identifie donc vecteurs et contravecteurs.

☞ **Exercice 1.3.** (facile) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ [resp. $(F, \|\cdot\|_F)$] un e.v.n. sur le corps \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), et soit $(E', \|\cdot\|_{E'})$ [resp. $(F', \|\cdot\|_{F'})$] son dual topologique naturellement normé.

$E \times F$ et $E' \times F'$ sont des espaces vectoriels sur \mathbb{K} pour les opérations usuelles sur un produit. On munit $E \times F$ de la norme $\|(u, v)\|_{E \times F} = \max\{\|u\|_E, \|v\|_F\}$, et $E' \times F'$ de la norme $\|(\varphi, \psi)\|_{E' \times F'} = \|\varphi\|_{E'} + \|\psi\|_{F'}$. Enfin, $(E \times F)'$ est muni de la norme naturelle $\|\Psi\|' = \sup\{|\Psi(u, v)| / \|(u, v)\|_{E \times F} \leq 1\}$.

A tout $(\varphi, \psi) \in E' \times F'$ on fait correspondre $f(\varphi, \psi) = \Phi$ où Φ est définie par : $\Phi(u, v) = \varphi(u) + \psi(v)$ pour tout $(u, v) \in E \times F$.

1) Démontrez que $\Phi \in (E \times F)'$. Démontrez que $f : E' \times F' \rightarrow (E \times F)'$ est une application linéaire et continue. Démontrez que f est surjective.

2) Démontrez que f est une isométrie.

Conclusion : on peut identifier les e.v.n. $(E \times F)'$ et $E' \times F'$ (en prenant soin de prendre les normes comme décrit ci-dessus). On écrit souvent : $(E \times F)' \approx E' \times F'$.

☞ **Exercice 1.4.** (facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit U une partie de E . Démontrez que si l'on a :

$$\forall u \in U, \exists \rho > 0, \forall v \in E : \|v\| < \rho \implies u + v \in U$$

U est un ouvert de E .

Soit $(F, \|\cdot\|)$ un autre e.v.n. sur le même corps. Utilisez le lemme ci-dessus pour démontrer que l'ensemble :

$\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{L}(E, F) / \exists m > 0, \exists M > 0, \forall u \in E : m.\|u\| \leq \|A(u)\| \leq M.\|u\|\}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$.

(m et M dépendent bien entendu de A).

2. EXEMPLES

Exemple 2.1. Reprenons l'Exemple 1.1 et calculons $\|\delta_s\|'$ pour $\delta_s \in E'$. On a vu que $\forall f \in E : |\delta_s(f)| \leq \|f\|_\infty$; donc d'après la dernière égalité de (1.10) : $\|\delta_s\|' \leq 1$. En supposant qu'on ait majoré finement, on peut penser que $\|\delta_s\|' = 1$. En effet, soit g une fonction telle que $g(s) = 1, \|g\|_\infty = 1$:

$$\|\delta_s\|' = \sup_{f \in E, \|f\|_\infty=1} |\delta_s(f)| = \sup_{f \in E, \|f\|_\infty=1} |f(s)| \geq |g(s)| = 1.$$

Donc : $\|\delta_s\|' = 1$. Pour g on peut prendre, entre autres, la fonction **1** constante égale à 1. ♦

☞ **Exercice 2.1.** Soit $E = C_\infty([a, b], \mathbb{R})$, où $a < b$. On se donne s, t tels que $a \leq s < t \leq b$. On pose $\varphi = \delta_s + \delta_t$ et $\psi = \delta_s - \delta_t$ (δ_s défini dans les Exemples 1.1 et 2.1). Déterminez $\|\varphi\|', \|\psi\|'$.

Exemple 2.2. $E = C_\infty([a, b], \mathbb{R}), a < b$. On pose pour $f \in E : \varphi(f) = \int_a^b f(t) dt$.

La linéarité de l'intégrale implique que $\varphi \in E^*$.

$$\forall f \in E : |\varphi(f)| = \left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt \leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \int_a^b dt = (b-a).\|f\|_\infty.$$

Donc φ est continue de norme $\|\varphi\|' \leq b - a$.

Considérons d'autre part la fonction **1** qui vaut 1 sur $[a, b]$:

$$\|\varphi\|' = \sup_{f \in E, \|f\|_\infty=1} |\varphi(f)| \geq |\varphi(\mathbf{1})| = \left| \int_a^b dt \right| = b - a.$$

Par conséquent $\|\varphi\|' = b - a$. ♦

Exemple 2.3. Même cadre que l'Exercice précédent. On définit $A : E \rightarrow E$ par :

$$\forall f \in E, \forall t \in [a, b] : [A(f)](t) = \int_a^t f(s) ds.$$

Le cours sur l'intégration de D.E.U.G. (intégrale fonction de sa borne supérieure) nous permet d'affirmer que $\forall f \in E : A(f)$ a un sens et appartient bien à E . La linéarité de A résulte de celle de l'intégration, et on a : $A \in L(E)$.

$\forall f \in E, \forall t \in [a, b] :$

$$\begin{aligned} |[A(f)](t)| &= \left| \int_a^t f(s) ds \right| \leq \int_a^t |f(s)| ds \leq \max_{a \leq s \leq t} |f(s)| \int_a^t ds \\ &\leq \max_{a \leq s \leq t} |f(s)| \cdot (t - a) \leq \|f\|_\infty \cdot (b - a) \end{aligned}$$

$$\text{car } t \leq b \implies \max_{a \leq s \leq t} |f(s)| \leq \max_{a \leq s \leq b} |f(s)|.$$

$$\text{Donc, } \forall f \in E : \|A(f)\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |[A(f)](t)| \leq (b - a) \cdot \|f\|_\infty.$$

A est continue, $A \in \mathcal{L}(E)$, de norme $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq b - a$. Vérifions que $\|A\| = b - a$.

$\|A\| = \sup_{f \in E, \|f\|_\infty=1} \|A(f)\|_\infty \geq \|A(\mathbf{1})\|_\infty$. Mais :

$$[A(\mathbf{1})](t) = \int_a^t \mathbf{1}(s) ds = \int_a^t ds = t - a, \text{ et}$$

$$\|A(\mathbf{1})\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |[A(\mathbf{1})](t)| = \max_{a \leq t \leq b} |t - a| = b - a.$$

Par conséquent, $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \geq \|A(\mathbf{1})\|_\infty = b - a$. En définitive : $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = b - a$. ♦

Exemple 2.4. Soit $(E, (\cdot, \cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soit $a \in E$. On pose pour tout $u \in E : \varphi(u) = (a|u)$. $\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} :$

$\varphi(\lambda u + \mu v) = (a|\lambda u + \mu v) = \lambda(a|u) + \mu(a|v) = \lambda\varphi(u) + \mu\varphi(v)$ [bilinéarité du produit scalaire (\cdot, \cdot)], d'où $\varphi \in E^*$.

$\forall u \in E : |\varphi(u)| = |(a|u)| \leq \|a\| \cdot \|u\|$ [Inégalité de Cauchy-Schwarz, Chap. II (5.8)], et donc φ est continue de norme $\|\varphi\|' \leq \|a\|$.

A présent, si $a = 0$, $\varphi = 0$ et $\|\varphi\|' = 0$. Si $a \neq 0$, on a :

$$\|\varphi\|' = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{|(a|u)|}{\|u\|} \geq \frac{|(a|a)|}{\|a\|} = \|a\|. \text{ D'où : } \|\varphi\|' = \|a\|. \text{ ♦}$$

Exemple 2.5. Applications linéaires de rang fini

Soient E, F des e.v.n. sur le même corps \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). On se donne $v \in F$, $v \neq 0$, et $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$. On définit $A : E \rightarrow F$, qu'on note $v \otimes \varphi$, par :

$$\forall u \in E : (v \otimes \varphi)(u) := \varphi(u) \cdot v = \langle u, \varphi \rangle \cdot v.$$

φ étant linéaire, et d'après $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$, A est linéaire : $A \in L(E, F)$.

C' est une application de rang 1 : $\text{Im}(A) = [v]$, et $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(\varphi)$.

$\forall u \in E :$

$$\|A(u)\|_F = \|\varphi(u) \cdot v\|_F = |\varphi(u)| \cdot \|v\|_F \leq \|\varphi\|_{E'} \cdot \|u\|_E \cdot \|v\|_F = (\|v\|_F \cdot \|\varphi\|') \|u\|;$$

donc $A \in \mathcal{L}(E, F)$, avec $\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \|v\|_F \cdot \|\varphi\|_{E'}$.

Il serait maladroit d'essayer de travailler comme dans les exemples précédents, alors qu'on a très simplement :

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_{u \in E, \|u\|=1} \|A(u)\| = \sup_{u \in E, \|u\|=1} |\varphi(u)| \cdot \|v\| \\ &= \|v\| \cdot \sup_{u \in E, \|u\|=1} |\varphi(u)| = \|v\| \cdot \|\varphi\|'. \end{aligned}$$

On a : $\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|v \otimes \varphi\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|v\|_F \cdot \|\varphi\|_{E'}$.

On peut aussi envisager des applications linéaires du type suivant : v_1, \dots, v_N sont des éléments non nuls de F , $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ sont des éléments non nuls de E' , et $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ sont des scalaires, soient $3 \times N$ données ; on pose :

$$\forall u \in E : A(u) := \sum_{1 \leq k \leq N} \lambda_k (v_k \otimes \varphi_k)(u) = \sum_{1 \leq k \leq N} \lambda_k \varphi_k(u) \cdot v_k.$$

$A \in L(E, F)$ est évident, et A est continue :

$$\forall u \in E : \|A(u)\|_F = \left\| \sum_{1 \leq k \leq N} \lambda_k \varphi_k(u) \cdot v_k \right\| \leq \sum_{1 \leq k \leq N} |\lambda_k| \cdot \|\varphi_k\|' \cdot \|u\|_E \cdot \|v_k\|_F,$$

de norme : $\|A\|_{L(E, F)} \leq \sum_{1 \leq k \leq N} |\lambda_k| \cdot \|\varphi_k\|_{E'} \cdot \|v_k\|_F$. On a là un exemple d'application linéaire de rang fini ($\leq N$) continue.

Si $\dim(E) < +\infty$, tout $A \in \mathcal{L}(E, F) = L(E, F)$ [cf. Prop. 1.4.] peut s'écrire $A = \sum_{1 \leq k \leq N} \lambda_k (v_k \otimes \varphi_k)$.

Soit en effet N la dimension de E , et soit (e_1, \dots, e_N) une base de E . Tout $u \in E$ s'écrit, d'une manière unique, $u = \sum_{1 \leq k \leq N} \xi_k e_k$ et $u \mapsto \xi_k$ est une forme linéaire

continue sur E , notée ψ^k [Voir la Prop.1.4].

A présent $A(u) = \sum_{1 \leq k \leq N} \xi_k \cdot A(e_k) = \sum_{1 \leq k \leq N} \psi^k(u) \cdot A(e_k) = \sum_{1 \leq k \leq N} (w_k \otimes \psi^k)(u)$, en posant $w_k = A(e_k)$. D'où le résultat. ♦

Exemple 2.6. Poids, noyaux, moments

On considère $E = C_\infty([a, b], \mathbb{R})$. Soit p un élément donné de E , appelé **poids**.

On définit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall f \in E : \varphi(f) := \int_a^b f(t) \cdot p(t) dt.$$

Il est clair que $\varphi \in E^*$, et on a :

$$|\varphi(f)| = \left| \int_a^b f(t) \cdot p(t) dt \right| \leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \int_a^b |p(t)| dt = \left(\int_a^b |p(t)| dt \right) \cdot \|f\|_\infty.$$

Donc $\varphi \in E'$ avec $\|\varphi\|' \leq \int_a^b |p(t)| dt$.

Si $p(t) \geq 0$ ou $p(t) \leq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, il est facile de démontrer que $\|\varphi\|' = \int_a^b |p(t)| dt$:

par exemple si $p \geq 0$, $\|\varphi\|' = \sup_{f \in E, \|f\|_\infty=1} |\varphi(f)| \geq |\varphi(\mathbf{1})| = \int_a^b |p(t)| dt$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1 ; si $p \leq 0$, on prendra $-\mathbf{1}$ au lieu de $\mathbf{1}$.

Si p n'est pas de signe constant, il peut osciller fortement, et il est alors beaucoup plus délicat de démontrer que $\|\varphi\|' = \int_a^b |p(t)| dt$. On trouve des tas de démonstrations non élémentaires ou passablement compliquées dans la littérature ; en voici une très simple et élémentaire due au Prof. I. Maddox (Queen's Univ., Belfast).

$\forall n$ entier ≥ 2 :

$$\begin{aligned} \int_a^b |p(t)| dt &= \int_a^b \frac{|p(t)|(1+n|p(t)|)}{1+n|p(t)|} dt = \int_a^b \frac{|p(t)|}{1+n|p(t)|} dt + \int_a^b \frac{n|p(t)|^2}{1+n|p(t)|} dt \\ &= \int_a^b \frac{|p(t)|}{1+n|p(t)|} dt + \varphi\left(\frac{np}{1+n|p|}\right) \leq \int_a^b \frac{1}{n} dt + \|\varphi\|' \cdot \left\| \frac{np}{1+n|p|} \right\|_\infty \end{aligned}$$

car $1+n|p(t)| \geq n|p(t)| \implies \frac{|p(t)|}{1+n|p(t)|} \leq \frac{1}{n}$, et $\left\| \frac{np}{1+n|p|} \right\|_\infty \leq 1$, d'où :

$$\int_a^b |p(t)| dt \leq \frac{1}{n}(b-a) + \|\varphi\|', \text{ et en faisant tendre } n \text{ vers l'infini : } \int_a^b |p(t)| dt \leq \|\varphi\|'.$$

Donc, finalement :

$$\|\varphi\|' = \int_a^b |p(t)| dt \text{ pour tout } p \in E \quad \blacklozenge$$

Soit maintenant une fonction $K \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b], \mathbb{R})$ qu'on appellera un *noyau*. On définit $A : E \rightarrow E$ par :

$$\forall f \in E, \forall s \in [a, b] : [A(f)](s) := \int_a^b K(s, t) \cdot f(t) dt$$

On a bien [théorie élémentaire des intégrales] : $A(f) \in E$, et $A \in L(E)$.

Posons $M := \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)| dt$. On a :

$$\begin{aligned} |[A(f)](s)| &\leq \int_a^b |K(s, t)| \cdot |f(t)| dt \leq \max_{a \leq t \leq b} |f(t)| \int_a^b |K(s, t)| dt \\ &\leq \int_a^b |K(s, t)| dt \times \|f\|_\infty, \text{ d'où :} \end{aligned}$$

$$\|A(f)\|_\infty = \max_{a \leq s \leq b} |[A(f)](s)| \leq \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)| dt \times \|f\|_\infty = M \|f\|_\infty.$$

Donc $A \in \mathcal{L}(E)$ et $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq M$. On va démontrer que $\|A\| = M$.

$s \in [a, b] \mapsto \int_a^b |K(s, t)| dt$ est une fonction continue par rapport à s [résultat de D.E.U.G.] et donc [autre résultat de D.E.U.G., ou Chap. XIV] il existe $s_0 \in [a, b]$ tel que $\int_a^b |K(s_0, t)| dt = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)| dt = M$.

Considérons l'application suivante : $\forall f \in E : \psi(f) := \int_a^b K(s_0, t) \cdot f(t) dt$.

ψ est une forme linéaire sur E qui est du type étudié ci-dessus, avec un poids $p(t) = K(s_0, t)$ (s_0 est constant). On en déduit que $\psi \in E'$ et que sa norme est :

$$\|\psi\|' = \int_a^b |K(s_0, t)| dt.$$

A présent, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé, il existe [borne sup.] $f_\varepsilon \in E$ telle que

$$\|f_\varepsilon\|_\infty \leq 1 \text{ et telle que : } \psi(f_\varepsilon) \geq \|\psi\|' - \varepsilon = \int_a^b |K(s_0, t)| dt - \varepsilon.$$

Posons : $A(f_\varepsilon) := g_\varepsilon$;

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \geq \|A(f_\varepsilon)\|_\infty = \|g_\varepsilon\|_\infty \geq g_\varepsilon(s_0) = [A(f_\varepsilon)](s_0) = \int_a^b K(s_0, t) f_\varepsilon(t) dt$$

Soit $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \geq \psi(f_\varepsilon) \geq M - \varepsilon$, d'où enfin le résultat :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = \max_{a \leq s \leq b} \int_a^b |K(s, t)| dt \quad \blacklozenge$$

Application : Soit $g \in E$ une fonction donnée. On suppose que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_a^b t^n \cdot g(t) dt = 0. \text{ On va démontrer que } g \text{ est identiquement nulle sur } [a, b].$$

Les quantités $\int_a^b t^n \cdot g(t) dt$, $n = 0, 1, 2, \dots$, sont appelées les *moments* de g ; ce qu'on veut démontrer, c'est qu'une fonction dont tous les moments sont nuls est nulle.

Considérons g comme un poids (noté p ci-dessus) : $\int_a^b t^n \cdot g(t) dt = 0 = \varphi(t^n)$

[φ de ci-dessus ; d'autre part on devrait noter $\varphi(t \mapsto t^n)$, mais l'abus d'écriture n'est pas grave].

Notons $\mathcal{P} = \mathcal{P}([a, b], \mathbb{R})$ le sous-espace de E des fonctions polynômes restreintes à $[a, b]$. D'après le Th. de Weierstraß [cf. Chap. IV] \mathcal{P} est dense dans E . Soit $P \in \mathcal{P}$: $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$; on a :

$$\varphi(P) = a_0\varphi(1) + a_1\varphi(t) + a_2\varphi(t^2) + \dots + a_n\varphi(t^n) = 0.$$

Donc φ coïncide avec la forme nulle $0 \in E'$ sur \mathcal{P} partout dense dans E , et par conséquent, $\varphi = 0$ [Chap. VII, Th. 2.3]. D'où : $\|\varphi\|' = 0 = \int_a^b |g(t)| dt$, d'après ce qui précède, et comme $t \mapsto |g(t)|$ est continue ≥ 0 , on en déduit que $g = 0$ sur $[a, b]$ [cf. Chap. II, Exercice 3.1]. ♦

☞ **Exercice 2.2.** (assez difficile) Soit $E = C_1([a, b], \mathbb{R})$, muni de la norme :

$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt$. On considère la forme linéaire $f \mapsto \psi(f) = \int_a^b f(t) \cdot p(t) dt$, où $p \in E$ est fixée. Démontrez que $\|\psi\|' = \|p\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |p(t)|$.

Exemple 2.7. Une forme linéaire continue dont la norme n'est pas atteinte sur la sphère unité.

Soit $E = c_0 = c_0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites de réels $u = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ convergentes de limite 0. E est normé par $\|u\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}^*} |\xi_n|$. On définit $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(u) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \cdot \xi_n$.

$\forall u \in E$, $\varphi(u)$ est bien définie comme somme d'une série absolument convergente : $|\frac{1}{2^n} \cdot \xi_n| \leq \frac{1}{2^n} \cdot \|u\|_\infty$, pour tout $n \geq 1$, et l'on a :

$$|\varphi(u)| \leq \|u\|_\infty \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \|u\|_\infty = \|u\|_\infty.$$

Il est clair que $\varphi \in E^*$, et on a : φ est continue ($\varphi \in E'$), de norme $\|\varphi\|' \leq 1$. Cette norme est en fait égale à 1. Soit en effet (u_p) , $p \geq 1$, la suite d'éléments de E définie par : $u_p = (1, 1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots)$ avec p fois 1, tout le reste nul. $u_p \in E$ et $\|u_p\|_\infty = 1$ pour tout p ; on a donc :

$$\|\varphi\|' \geq \varphi(u_p) = \sum_{1 \leq n \leq p} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - 2^{-p}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - 2^{-p}.$$

Et $\|\varphi\|' \geq 1 - 2^{-p}$ pour tout $p \geq 1$ implique $\|\varphi\|' \geq 1$, d'où : $\|\varphi\|' = 1$.

Démontrons à présent que l'existence de $u \in E$ tel que $\|u\|_\infty \leq 1$ et $\|\varphi\|' = \varphi(u) = 1$ est contradictoire.

Supposons le contraire et soit $u = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ un tel vecteur.

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n) = 0$, il existe un entier N tel que $\forall n \geq N$ on a : $|\xi_n| \leq \frac{1}{2}$; mais alors :

$$\begin{aligned} 1 = \varphi(u) &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \times \xi_n = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} \times \xi_n + \sum_{n=N}^\infty \frac{1}{2^n} \times \xi_n \\ &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=N}^\infty \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{N-1}}\right) < 1 : \end{aligned}$$

$1 < 1$ contradiction ! ♦

Conclusions pratiques :

Soient E, F des e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit $A \in L(E, F)$.

Pour prouver que A est continue, on essaie de prouver qu'il existe un réel $m \geq 0$ tel que $\|A(u)\|_F \leq m \cdot \|u\|_E$ pour tout $u \in E$, i.e. (1.9). On ne revient *jamais* à la définition de la continuité d'une application quelconque !

Pour prouver, au contraire, que A est discontinue, on essaiera de trouver une suite (u_n) de E telle que $\|u_n\| = 1$ (ou ≤ 1) et telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A(u_n)\| = \infty$ (lim sup au lieu de lim suffit), i.e. qu'on nie (1.8).

Dans le premier cas (continuité) A est continue et on a $\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq m$. Bien sûr m n'est pas généralement $\|A\|$ (!). Mais si l'on a majoré finement on a des chances pour qu'il en soit ainsi (sinon, il faudra majorer plus finement ...).

Pour démontrer l'égalité on cherche, $\varepsilon > 0$ arbitraire étant donné, un $u_\varepsilon \in E$ tel que $\|u_\varepsilon\| = 1$ (ou ≤ 1) et tel que $\|A(u_\varepsilon)\| \geq m - \varepsilon$; on a alors $\|A\| \geq \|A(u_\varepsilon)\| \geq m - \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, soit $\|A\| \geq m$, et donc, $\|A\| = m$. On peut aussi chercher $u_\varepsilon \neq 0$ (sans s'occuper de sa norme) tel que $\frac{\|A(u_\varepsilon)\|}{\|u_\varepsilon\|} \geq m - \varepsilon$.

Exceptionnellement (puisque le « sup » n'est pas un « max » en général), on trouvera directement $v \in E$ tel que $\|v\| = 1$ et $\|A(v)\| = m$, ce qui règle le problème. Dans le doute, il est plus sage de démarrer sur $\forall \varepsilon > 0$, etc.

✦ **Exercice 2.3.** (facile, à faire plutôt après le Chap. XII (séries dans les e.v.n.))

Soit $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots)$ une suite de réels bornée : $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |\alpha_n| < \infty$. On considère l'espace $E = \ell^2$ des suites de réels de carré sommable :

$$u = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in E \iff \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n)^2 < \infty.$$

On norme E par : $(\|u\|_2)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n)^2$.

Pour tout $u \in E$, on pose : $A(u) = (\alpha_1 \cdot \xi_1, \alpha_2 \cdot \xi_2, \dots, \alpha_n \cdot \xi_n, \dots)$.

1) Démontrez qu'on définit ainsi une application linéaire continue $A \in \mathcal{L}(E)$, et que $\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|a\|_\infty$. Cette norme est-elle toujours (parfois, jamais) effectivement atteinte pour un $u \in E$ tel que $\|u\| \leq 1$ (suivant a) ?

2) Démontrez que $A \in \mathcal{I}som(E, E) = \mathcal{GL}(E)$ si et seulement si $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{|\alpha_n|} < \infty$.

✦ **Exercice 2.4.** (assez facile) Soit l'e.v.n. $E = C_\infty([-1, +1], \mathbb{R})$, avec sa norme usuelle : $\|f\|_\infty = \max_{-1 \leq t \leq +1} |f(t)|$.

Pour tout $f \in E$ on pose : $\varphi(f) = \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt$.

1) Vérifiez que $\varphi \in E'$ et déterminez $\|\varphi\|'$.

2) Démontrez qu'il n'existe pas $g \in E$ telle que $\|g\|_\infty = 1$ et $\|\varphi\|' = \varphi(g)$.

✦ **Exercice 2.5.** (facile) Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n. réel et soit $\varphi \in E', \varphi \neq 0$.

1) Démontrez qu'il existe $a \in E$ tel que $\varphi(a) = 1$. On note $[a]$ le sous-espace vectoriel de E engendré par a : $[a] = \{\lambda a / \lambda \in \mathbb{R}\}$. Dites pourquoi les sous-espaces vectoriels $[a]$ et $\text{Ker}(\varphi)$ sont fermés dans E .

2) On définit une application $A : E \rightarrow E$ par $\forall u \in E : A(u) = \varphi(u) \cdot u$ [$A = a \otimes \varphi$ avec les notations de l'Exemple 2.5]. Démontrez que $A \in \mathcal{L}(E)$ et déterminez $\|A\|_{\mathcal{L}(E)}$. Déterminez $A^2 = A \circ A$ ainsi que $(Id_E - A)^2$ [Id_E est l'identité sur E].

3) On munit le produit cartésien $F = \text{Ker}(\varphi) \times [a]$ de la norme :

$$\|(v, \lambda a)\|_F = \|v\|_E + |\lambda| \cdot \|a\|_E.$$

Soit $\Lambda : E \rightarrow F$ l'application définie par $\forall u \in E : \Lambda(u) = (u - \varphi(u) \cdot a, \varphi(u) \cdot a)$.

Démontrez que Λ est un homéomorphisme linéaire.

4) Démontrez que l'application $h : [a] \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ par $h(\lambda a) = \lambda$ est un homéomorphisme linéaire (la norme sur $[a]$ est la norme induite par $\|\cdot\|_E$). On note p l'application $F \rightarrow [a]$ définie par $p(v, \lambda a) = \lambda a$ pour tout $(v, \lambda) \in F$.

Démontrez que $\varphi = h \circ p \circ \Lambda$. Démontrez que l'image $\varphi(U)$ de tout ouvert U de E est un ouvert de \mathbb{R} (toute forme linéaire continue non nulle est ouverte).

✎ **Exercice 2.6.** (facile) Soit E un e.v.n. réel ou complexe, et soit $\psi \in E^*$. On suppose que pour toute suite (u_n) de E telle que $\lim(u_n) = 0$ la suite $(\psi(u_n))$ est bornée. Démontrez que ψ est continue sur E (raisonnez par contradiction).

✎ **Exercice 2.7.** (assez difficile) Soit $E = C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|. \text{ Pour tout } f \in E \text{ on pose : } \varphi(f) := \int_0^1 f(t) dt, \text{ et pour tout } n \geq 1 :$$

$$\varphi_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Démontrez que φ et φ_n sont des formes linéaires continues sur E ; calculez leur norme $\|\varphi\|'$ et $\|\varphi_n\|'$. On pose : $\psi_n = \varphi - \varphi_n$. Démontrez que $\forall f \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} (\psi_n(f))_n = 0$.

Démontrez que $\|\psi_n\|' = 2$ mais qu'il n'existe pas $g \in E$, $\|g\|_\infty \leq 1$, telle que $\|\psi_n\|' = |\psi_n(g)|$ (pour tout n fixé).

3. CARACTÉRISATIONS DES APPLICATIONS MULTILINÉAIRES CONTINUES

Nous nous contenterons d'examiner les applications *bilinéaires*, les résultats s'étendant sans autre difficulté que celle des notations aux applications tri, quadri, ..., n -linéaires. Les applications multilinéaires continues sont d'usage constant dans le cours de calcul différentiel (dérivées d'ordre ≥ 2).

(3.1) Rappelons qu'une application $b : E \times F \rightarrow G$, où E, F, G sont trois espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , est dite *bilinéaire* si :

(3.1.1) $\forall v \in F$ fixé, l'application $b(\cdot, v) : E \rightarrow G, u \mapsto b(u, v)$ est *linéaire*, et :

(3.1.2) $\forall u \in E$ fixé, l'application $b(u, \cdot) : F \rightarrow G, v \mapsto b(u, v)$ est *linéaire*.

(3.2) On note $B(E, F; G)$ ou bien $L(E, F; G)$ l'ensemble des applications bilinéaires définies sur $E \times F$ à valeurs dans G . Ici on notera $B(E, F; G)$. *Bien noter la virgule entre E et F , et le point virgule entre F et G .*

Si $G = \mathbb{K}$, on dit plutôt *forme bilinéaire*.

☞ On se souviendra que $B(E, F; G)$ n'a rien à voir avec l'espace vectoriel $L(E \times F, G)$:

Exemples 3.1.

a) Soit $\beta \in \mathbb{R}$ donné, $\beta \neq 0$: $b(\xi, \eta) := \beta \cdot \xi \cdot \eta$ définit un élément de $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}; \mathbb{R})$ qui n'appartient pas à $L(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$.

b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0, \beta \neq 0$: $A(\xi, \eta) := \alpha \xi + \beta \eta$ définit un élément de $L(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui n'appartient pas à $B(\mathbb{R}, \mathbb{R}; \mathbb{R})$.

Si l'on pose : $(b_1 + b_2)(u, v) = b_1(u, v) + b_2(u, v)$ et $(\lambda \cdot b)(u, v) = \lambda \cdot b(u, v)$, on munit $B(E, F; G)$ d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} .

Supposons maintenant que $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ sont trois e.v.n. sur \mathbb{K} . On met sur $E \times F$ une des normes usuelles sur un produit cartésien, par exemple : $\|(u, v)\|_{E \times F} = \max\{\|u\|_E, \|v\|_F\}$. On peut alors parler de la continuité de $b \in B(E, F; G)$ sur $E \times F$.

(3.3) On notera $\mathcal{B}(E, F; G)$ ou bien $\mathcal{L}(E, F; G)$ l'ensemble des applications bilinéaires continues sur $E \times F$: $\mathcal{B}(E, F; G)$ est clairement un sous-espace vectoriel de $B(E, F; G)$.

Proposition 3.1 (IMPORTANTE)

Les cinq assertions suivantes sont *équivalentes* :

(3.4) b est continue sur $E \times F$, i.e. $b \in \mathcal{B}(E, F; G)$,

(3.5) b est continue au point $(0, 0)$, l'origine de $E \times F$,

(3.6) b est bornée sur $B_E(0, 1] \times B_F(0, 1]$,

(3.7) b est bornée sur $S_E(0, 1) \times S_F(0, 1)$,

(3.8) il existe m réel > 0 tel que :

$$\forall (u, v) \in E \times F : \|b(u, v)\|_G \leq m \cdot \|u\|_E \cdot \|v\|_F.$$

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS ci-après. ♦

Commentaires :

1) Comme pour les applications linéaires, le critère pratique est (3.8). Pour prouver que b n'est pas continue, on utilise souvent (3.6) en trouvant une suite (u_n, v_n) telle que $\|(u_n, v_n)\| \leq 1$ et $\lim \|b(u_n, v_n)\| = \infty$.

2) Notez que pour A linéaire sur $E \times F$ la continuité s'écrirait :
 $\|A(u, v)\| \leq m \cdot \|(u, v)\|_{E \times F}$: comparez avec (3.8).

3) Si l'on compare la Prop. 3.1 et le Th. 1.1 on constate qu'il manque une caractérisation importante dans la Proposition : on n'a pas la continuité uniforme sur $E \times F$. Ce n'est pas étonnant car on sait déjà (D.E.U.G.) que $(s, t) \mapsto s \cdot t, \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ne serait-ce que parce que $s \in \mathbb{R} \mapsto s^2$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} . En modifiant convenablement la démonstration de la Proposition, il n'est pas difficile de montrer que b continue est uniformément continue sur toute partie bornée de $E \times F$.

☞ **Exercice 3.1.** Prouvez qu'une application $b \in \mathcal{B}(E, F; G)$ non nulle n'est jamais uniformément continue sur $E \times F$.

☞ **Encore une mise en garde !** Si $b \in \mathcal{B}(E, F; G)$ est continue, les applications linéaires $b(u, \cdot)$ et $b(\cdot, v)$ sont continues pour tout $u \in E, v \in F$ fixés ; en effet, par exemple, $\forall w \in F : \|b(u, \cdot)(w)\| = \|b(u, w)\| \leq m \cdot \|u\| \cdot \|w\|$ et donc $b(u, \cdot)$ est continue de norme $\leq m \cdot \|u\|$.

On pourrait penser que la réciproque est exacte ... Mais elle est fautive ! L'Exercice suivant donne un exemple.

☞ **Exercice 3.2.** (très facile)

Soit $E = c_{00} = \{u = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in c_0(\mathbb{R}) / \exists N = N_u, \forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq N \Rightarrow \xi_n = 0\}$ (autrement dit l'ensemble des suites de réels dont tous les termes sont nuls à partir d'un certain rang). On norme E par $\|u\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}^*} |\xi_n|$.

On considère la fonction $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour $u = (\xi_n)$ et $v = (\eta_n)$ par $b(u, v) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot \eta_n$. Démontrez que b est bilinéaire, que $\forall u \in E, \forall v \in E : b(u, \cdot)$ et $b(\cdot, v)$ sont continues, mais que b n'est pas continue sur $E \times E$.

Proposition 3.2. (IMPORTANTE)

L'application :

$$b \mapsto \nu(b) = \inf \{m \text{ réel } > 0 / \forall (u, v) \in E \times F : \|b(u, v)\|_G \leq m \cdot \|u\|_E \cdot \|v\|_F\}$$

est une **norme** sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(E, F; G)$.

On notera : $\nu(b) = \|b\|$ ($\|b\|_{\mathcal{B}(E, F; G)}$ si nécessaire). On a :

$$\begin{aligned}
 (3.9) \quad \|b\| &= \sup_{u \in E, u \neq 0; v \in F, v \neq 0} \frac{\|b(u, v)\|_G}{\|u\|_E \cdot \|v\|_F} \\
 &= \sup_{u \in E, \|u\| \leq 1; v \in F, \|v\| \leq 1} \|b(u, v)\|_G \\
 &= \sup_{u \in E, \|u\| = 1; v \in F, \|v\| = 1} \|b(u, v)\|_G
 \end{aligned}$$

et l'inégalité fondamentale :

$$(3.10) \quad \boxed{\forall (u, v) \in E \times F : \|b(u, v)\|_G \leq \|b\| \cdot \|u\|_E \cdot \|v\|_F}$$

Démonstration : C'est exactement la même, aux notations près, que celle du Th.1.2. ♦

Exemple 3.2. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des e.v.n. sur \mathbb{K} .

$$b : \mathcal{L}(E, F) \times E \rightarrow F, (A, u) \mapsto A(u),$$

est une application bilinéaire (évident, vérifiez), continue de norme 1.

En effet : $\|b(A, u)\|_F = \|A(u)\|_F \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \cdot \|u\|_E$, et donc b est continue de norme ≤ 1 . Ensuite $\|b\| \geq \|A(u)\|_F$ pour tout $u \in E$ avec $\|u\| \leq 1$ et tout $A \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\|A\| \leq 1$; pour tout $\varepsilon > 0$, par définition de $\|A\|$, il existe $u_\varepsilon \in E$ avec $\|u_\varepsilon\| = 1$ tel que $\|A\| - \varepsilon \leq \|A(u_\varepsilon)\|_F$; d'où :

$\|b\| \geq \|A(u_\varepsilon)\|_F \geq \|A\| - \varepsilon \implies \|b\| \geq \sup_{\|A\| \leq 1} (\|A\| - \varepsilon) = 1 - \varepsilon$, cela pour tout ε , donc : $\|b\| \geq 1$, et $\|b\| = 1$. ♦

Cas particulier : On prend $F = \mathbb{K}$ normé par $|\cdot|$; $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E'$ est le dual topologique de E , qu'on suppose naturellement normé par $\|\varphi\|' = \sup_{u \in E, \|u\|=1} |\varphi(u)|$.

L'application bilinéaire $E' \times E \rightarrow \mathbb{K}, (\varphi, u) \mapsto \varphi(u) = \langle u, \varphi \rangle$ est continue de norme 1; on l'appelle la **dualité entre E et E'** .

Exemple 3.3. Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ des e.v.n. sur \mathbb{K} .

$b : \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) \rightarrow \mathcal{L}(E, G), (A, B) \mapsto B \circ A$ est une application bilinéaire continue de norme ≤ 1 : $\|b(A, B)\| = \|B \circ A\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$. On démontre que $\|b\| = 1$, mais ce n'est pas une évidence.

Exemple 3.4.

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel de norme associée $\|u\| = \sqrt{(u|u)}$.

La fonction $E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto b(u, v) = (u|v)$ est bilinéaire; elle est continue de norme ≤ 1 à cause de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(u|v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ [Chap. II, (5.7)(5.8)].

$\|b\| \geq (u|v)$ pour tous u, v tels que $\|u\| = 1, \|v\| = 1$, d'où $\|b\| \geq (u|u) = \|u\|^2 = 1$ pour u tel que $\|u\| = 1$, et $\|b\| = 1$.

Théorème 3.1. (TRÈS IMPORTANT)

Soient $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ trois e.v.n. sur le même corps \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). L'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(E, F; G), \|\cdot\|_{\mathcal{B}})$ [espace d'applications bilinéaires] décrit ci-dessus est linéairement isométrique à l'e.v.n. $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$ [espace d'applications linéaires] naturellement normé.

Démonstration : Soit $b \in \mathcal{B}(E, F; G)$. On a déjà défini (début du §3), pour tout $u \in E$, une application linéaire, notée $b(u, \cdot)$, par $\forall v \in F : [b(u, \cdot)](v) = b(u, v)$.

$\forall u \in E : b(u, \cdot) \in \mathcal{L}(F, G)$; de plus : $\| [b(u, \cdot)](v) \|_G = \| b(u, v) \|_G \leq \| b \| \cdot \| u \| \cdot \| v \|$, donc $b(u, \cdot) \in \mathcal{L}(F, G)$ et sa norme est $\leq \| b \| \cdot \| u \|$.

Considérons maintenant l'application $f : E \rightarrow \mathcal{L}(F, G)$ définie par $f(u) = b(u, \cdot)$. f est linéaire : $\forall u \in E, \forall u' \in E, \forall v \in F :$

$$\begin{aligned}
 f(u + u')(v) &= b(u + u', \cdot)(v) = b(u + u', v) = b(u, v) + b(u', v) \\
 &= b(u, \cdot)(v) + b(u', \cdot)(v) = f(u)(v) + f(u')(v) = (f(u) + f(u'))(v).
 \end{aligned}$$

Donc : $\forall u \in E, \forall u' \in E : f(u + u') = f(u) + f(u')$;

de même, $\forall \lambda \in \mathbb{K} : f(\lambda u) = \lambda \cdot f(u)$.

f est continue car $\forall u \in E : \|f(u)\|_{\mathcal{L}(F,G)} = \|b(u, \cdot)\|_{\mathcal{L}(F,G)} \leq \|b\| \cdot \|u\|$, et est de norme $\leq \|b\|$.

Envisageons maintenant l'application $\Phi : \mathcal{B}(E, F; G) \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$ définie par : $\Phi(b)$ est l'application $f = f_b$ définie ci-dessus.

Soit $\forall b \in \mathcal{B}(E, F; G), \forall u \in E : [\Phi(b)](u) = b(u, \cdot)$.

Φ est une application linéaire : $\forall b \in \mathcal{B}, \forall b' \in \mathcal{B}, \forall u \in E :$

$$[\Phi(b + b')](u) = (b + b')(u, \cdot) = b(u, \cdot) + b'(u, \cdot) = [\Phi(b)](u) + [\Phi(b')](u) \implies \Phi(b + b') = \Phi(b) + \Phi(b') \text{ pour tous } b, b' \in \mathcal{B}(E, F; G).$$

De même, on a $\Phi(\lambda \cdot b) = \lambda \cdot \Phi(b)$.

Prouvons que Φ est une isométrie : $\forall b \in \mathcal{B}(E, F; G) :$

$$\begin{aligned} \|\Phi(b)\|_{\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F,G))} &= \sup_{u \in E, \|u\|=1} \|[\Phi(b)](u)\|_{\mathcal{L}(F,G)} \\ &= \sup_{u \in E, \|u\|=1} \|b(u, \cdot)\|_{\mathcal{L}(F,G)} = \sup_{u \in E, \|u\|=1} \left[\sup_{v \in F, \|v\|=1} \|b(u, \cdot)(v)\|_G \right] \\ &= \sup_{u \in E, \|u\|=1; v \in F, \|v\|=1} \|b(u, v)\|_G = \|b\|_{\mathcal{B}(E, F; G)} \text{ [cf. Prop. 3.2].} \end{aligned}$$

En particulier, donc, Φ est injective. Il nous reste à prouver que Φ est surjective.

Soit $A \in \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$: montrons qu'il existe $b \in \mathcal{B}(E, F; G)$ telle que $\Phi(b) = A$.

Il suffit de considérer b définie par $\forall u \in E, \forall v \in F : b(u, v) = [A(u)](v)$.

Il est clair que b ainsi définie est bilinéaire, continue [$\|b(u, v)\| \leq \|A\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|$] et que $[\Phi(b)](u) = A(u)$ pour tout $u \in E$, soit $\Phi(b) = A$. La démonstration est terminée. ♦

Commentaires :

1) On a d'après ce qui précède : $b(u, v) = ([\Phi(b)](u))(v)$, qu'on peut sans grand risque écrire simplement $\Phi(b)(u)(v)$, et même $b(u)(v)$; d'où l'écriture $\mathbf{b}(u, v) = \mathbf{b}(u)(v)$.

2) Le résultat ci-dessus est d'utilisation constante dans le calcul différentiel, car la dérivée seconde en un point $u \in U$ d'une application $f : U \subset E \rightarrow F$ (E, F e.v.n., U ouvert) deux fois différentiable est une application, notée $D^2 f(u)$, appartenant à $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(E, F))$ qu'on identifie à $\mathcal{B}(E, E; F)$. D'après 1) on écrit :

$$D^2 f(u)(h, k) = D^2 f(u)(h)(k) = D^2 f(u).h.k.$$

3) Exactement comme ci-dessus, mais en considérant $b(\cdot, v)$ au lieu de $b(u, \cdot)$, on démontre que $\mathcal{B}(E, F; G)$ est isométrique à $\mathcal{L}(F, \mathcal{L}(E, G))$. On écrit :

$$(3.11) \quad \boxed{\mathcal{B}(E, F; G) \approx \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G)) \approx \mathcal{L}(F, \mathcal{L}(E, G))}$$

4) En particulier, si $G = \mathbb{K}$:

$$\mathcal{B}(E, F; \mathbb{K}) \approx \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, \mathbb{K})) = \mathcal{L}(E, F'), \text{ et}$$

$$\mathcal{B}(E, F; \mathbb{K}) \approx \mathcal{L}(F, \mathcal{L}(E, \mathbb{K})) = \mathcal{L}(F, E'), \text{ d'où : } \mathcal{L}(E, F') \approx \mathcal{L}(F, E').$$

D'autre part, $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E) \approx E$ [Exercice 1.2], et donc :

$$\mathcal{B}(E, \mathbb{K}; G) \approx \mathcal{L}(E, G) \approx \mathcal{L}(\mathbb{K}, \mathcal{L}(E, G)).$$

Corollaire 3.1.

Si E et F sont de dimension finie, on a : $\boxed{\mathcal{B}(E, F; G) = \mathcal{B}(E, F; G)}$

Démonstration : D'après la Prop. 1.4 $\mathcal{L}(F, G) = L(F, G)$ car $\dim(F) < \infty$ et $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G)) = L(E, L(F, G))$ car $\dim(E) < \infty$. ♦

☞ **Exercice 3.3.** (assez facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soit $A \in L(E)$ vérifiant :

(i) $\forall u \in E : (Au|u) \geq 0$,

(ii) $\forall u \in E, \forall v \in E : (Au|v) = (u|Av)$ [on a noté : $Au = A(u)$].

Démontrez l'inégalité suivante : $\forall u \in E : \|Au\|^4 \leq (Au|u) \cdot (A^2u|Au)$, où $A^2 = A \circ A$.

On suppose maintenant que A est continu : $A \in \mathcal{L}(E)$; démontrez que $\forall u \in E : \|Au\|^2 \leq (Au|u) \cdot \|A\|_{\mathcal{L}(E)}$, et déduisez-en que $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{\|u\| \leq 1} (Au|u)$.

DÉMONSTRATIONS

Théorème 1.1.

• (1.7) \implies (1.6) \implies (1.5) sont des implications triviales. \blacklozenge

• Démontrons (1.1) \implies (1.9).

On suppose que A est continue en $u_0 = 0$, ce qui s'écrit :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E : \|u\|_E \leq \eta \implies \|A(u) - A(0)\|_F \leq \varepsilon$ et, en particulier, en faisant $\varepsilon = 1 : \exists \eta > 0, \forall u \in E : \|u\| \leq \eta \implies \|A(u)\| \leq 1$.

Soit $v \neq 0$ quelconque dans E ; considérons le vecteur $\frac{\eta}{\|v\|} v : \|\frac{\eta}{\|v\|} v\| = \eta$, d'où : $\|A(\frac{\eta}{\|v\|} v)\| \leq 1$, soit, puisque A est homogène : $\|A(v)\| \leq \frac{1}{\eta} \|v\|$. Il suffit donc de prendre $m := \frac{1}{\eta}$. Le cas où $v = 0$ est trivial car $A(0) = 0$. Si A est continue en un point $u_0 \neq 0$, la démonstration est pratiquement identique, en écrivant : $\|A(u)\| \leq \|A(u_0)\| + \|A(u) - A(u_0)\| \leq \|A(u_0)\| + 1$, etc. (vérifiez). \blacklozenge

• Démonstration de (1.9) \implies (1.8).

Soit X une partie bornée de E : il existe $M > 0$ tel que $\forall u \in X : \|u\| \leq M$.

Soit $v \in A(X) : v = A(u)$ pour un (ou plusieurs) $u \in X$, d'où : $\|v\| = \|A(u)\| \leq m \cdot \|u\| \leq m \cdot M$. Donc $A(X)$ est borné. \blacklozenge

• Démonstration de (1.8) \implies (1.9) [on aura donc (1.8) \iff (1.9)].

On a en particulier : $A(B(0, 1))$ est une partie bornée de F . Autrement dit, il existe $m > 0$ tel que $\forall u \in E : \|u\| \leq 1 \implies \|A(u)\| \leq m$. Soit alors $v \in E, v \neq 0$:

$\|\frac{v}{\|v\|}\| = 1$, d'où : $\|A(\frac{v}{\|v\|})\| \leq m$, soit : $\|A(v)\| \leq m \cdot \|v\|$.

Le cas $v = 0$ est trivial. \blacklozenge

• Démonstration de (1.9) \implies (1.7) [ce qui termine la démonstration du Th.].

$\exists m > 0, \forall u \in E : \|A(u)\| \leq m \cdot \|u\|$ par hypothèse.

Démontrons que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u, v \in E : \|u - v\| \leq \eta \implies \|A(u) - A(v)\| \leq \varepsilon$.

$\varepsilon > 0$ étant donné, posons $\eta = \frac{\varepsilon}{m} \cdot \forall u, v \in E$ vérifiant $\|u - v\| \leq \eta$ on a : $\|A(u) - A(v)\| = \|A(u - v)\|$ [car $A \in \mathcal{L}(E, F)$] $\leq m \cdot \|u - v\| \leq m \times \frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon$. \blacklozenge

Remarque : Cette démonstration est faite de petites vérifications faciles. A titre d'exercices vous pouvez démontrer les implications non envisagées ci-dessus.

Théorème 1.2.

Posons $\|A\| = \sup_{u \in E, \|u\| \leq 1} \|A(u)\|_F$ pour tout $A \in \mathcal{L}(E, F)$, et démontrons qu'on obtient ainsi une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$.

D'après (1.9), il existe un réel $m > 0$ tel que $\forall u \in E$ avec $\|u\| \leq 1$, on a : $\|A(u)\| \leq m$. Donc $\|A\|$ est un réel (ce n'est jamais $+\infty$). \blacklozenge

$\forall A \in \mathcal{L}(E, F) : \|A\| \geq 0$ car $\|A(u)\| \geq 0$ pour tout $u \in E$. \blacklozenge

Si $\|A\| = 0$, on a $\|A(u)\| = 0$ pour tout $u \in E$ tel que $\|u\| \leq 1$, soit : $A(u) = 0$ pour tout $u \in E$ tel que $\|u\| \leq 1$. Soit $v \in E$ tel que $\|v\| > 1 ; \frac{v}{\|v\|}$ est de norme égale

à 1 et, donc : $A(\frac{v}{\|v\|}) = 0 = \frac{1}{\|v\|} A(v)$, d'où $A(v) = 0$. Finalement $A(w) = 0$ pour tout $w \in E$, i.e. $A = 0$, par définition. \blacklozenge

Soit $\lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda.A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|\lambda.A(u)\| = |\lambda| \cdot \sup_{\|u\| \leq 1} \|A(u)\| = |\lambda| \cdot \|A\|$. ♦

Soient $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$. $\forall u \in E, \|u\| \leq 1$:

$$\begin{aligned} \|(A+B)(u)\| &= \|A(u) + B(u)\| \leq \|A(u)\| + \|B(u)\| \\ &\leq \sup_{\|v\| \leq 1} \|A(v)\| + \sup_{\|v\| \leq 1} \|B(v)\| = \|A\| + \|B\| ; \end{aligned}$$

donc $\{\|(A+B)(u)\| / u \in E, \|u\| \leq 1\}$ est majoré par $\|A\| + \|B\|$, et la borne supérieure étant le plus petit des majorants on a :

$$\|A+B\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|(A+B)(u)\| \leq \|A\| + \|B\|. \blacklozenge$$

En définitive, $A \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto \|A\|$ est effectivement une *norme*.

$$\bullet \nu(A) = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|A(u)\|}{\|u\|} = \sup_{u \in E, u \neq 0} \left\| A\left(\frac{u}{\|u\|}\right) \right\| = \sup_{v \in E, \|v\|=1} \|A(v)\|. \blacklozenge$$

• $\sup_{\|u\| < 1} \|A(u)\| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|A(u)\|$ est évident.

Posons $\alpha := \sup_{\|u\| < 1} \|A(u)\|$, et soit $v \in E$ tel que $\|v\| \leq 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, posons $v_n = (1 - \frac{1}{n})v$: $\|v_n\| = (1 - \frac{1}{n})\|v\| \leq (1 - \frac{1}{n}) < 1$, d'où : $\|A(v_n)\| \leq \alpha$, pour tout n .

A présent : $\|A(v)\| = \|A(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n)\| = \lim \|A(v_n)\| \leq \alpha$, et cela pour tout v tel que $\|v\| \leq 1$, d'où $\sup_{\|v\| \leq 1} \|A(v)\| \leq \alpha$. On a donc :

$$\sup_{\|u\| < 1} \|A(u)\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|A(u)\|. \blacklozenge$$

• Evidemment : $\sup_{\|u\|=1} \|A(u)\| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|A(u)\|$. Si $A = 0$ on a égalité ; supposons donc que $A \neq 0$. Si l'inégalité était stricte, il existerait $v \in E$, avec $\|v\| < 1$ tel que $\|A(v)\| > \|A(u)\|$ pour tout $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$.

Soit $\frac{v}{\|v\|}$ qui est de norme 1 : $\|A(v)\| > \|A(\frac{v}{\|v\|})\| = \frac{1}{\|v\|} \|A(v)\|$; comme $A(v) \neq 0$ [sinon $A(u) = 0$ pour tout u tel que $\|u\| = 1$, d'où $A = 0$] on a : $\|v\| > 1$, une contradiction. On a donc : $\sup_{\|u\|=1} \|A(u)\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|A(u)\|$. ♦

• $\{m > 0 / \forall u \in E : \|A(u)\| \leq m \cdot \|u\|\} = \{m > 0 / \forall u \in E \setminus \{0\} : \frac{\|A(u)\|}{\|u\|} \leq m\}$ et la borne inférieure de ce dernier ensemble est évidemment $\sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|A(u)\|}{\|u\|} = \nu(A)$, ce qui termine la suite d'égalités. ♦

Théorème 1.3.

Soit $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$. Notons $H := \text{Ker}(\varphi)$, et supposons que H est fermé dans E . Soit $a \in E$ tel que $\varphi(a) = 1$ [il existe $b \in E$ tel que $\varphi(b) \neq 0$ car $\varphi \neq 0$, on prend $a = \frac{1}{\varphi(b)} b$: $\varphi(a) = 1$], bien sûr $a \notin H$.

H étant fermé, il en est de même du translaté $a + H = \{a + u / u \in H\}$, en effet $x \mapsto h(x) = a + x$ est un homéomorphisme de E qui transforme H en $a + H$.

L'origine 0 de E n'appartient pas à $a + H$ (sinon contradiction avec $a \notin H$), 0 appartient donc au complémentaire de $a + H$ qui est un ouvert. Donc il existe une boule $B(0, \rho)$ contenue dans $E \setminus (a + H)$, i.e. telle que $B(0, \rho) \cap (a + H) = \emptyset$.

Pour tout $u \in B(0, \rho)$ on a $\varphi(u) \neq 1$: en effet, sinon : $\varphi(u) = \varphi(a) = 1 \implies \varphi(u - a) = 0 \implies u - a \in H \implies u \in a + H$ et $u \in B(0, \rho) \cap (a + H) = \emptyset$, contradiction.

Démontrons maintenant que si $u \in B(0, \rho)$ on a : $|\varphi(u)| \leq 1$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et posons $\alpha := \varphi(u)$ avec $|\alpha| > 1$. On a : $\|\frac{u}{\alpha}\| = \frac{1}{|\alpha|} \|u\| < \rho$ car $\|u\| \leq \rho$ et $\frac{1}{|\alpha|} < 1$, d'où : $\frac{u}{\alpha} \in B(0, 1]$ et :

$$\varphi\left(\frac{u}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \varphi(u) = \frac{\varphi(u)}{\varphi(u)} = 1, \text{ ce qui est impossible ; on a donc bien } |\varphi(u)| \leq 1.$$

Ensuite, soit $v \neq 0$ quelconque dans $E : \frac{\rho v}{\|v\|}$ est de norme ρ , et donc appartient à $B(0, \rho]$, d'où : $|\varphi(\frac{\rho v}{\|v\|})| \leq 1 \implies |\varphi(v)| \leq \frac{1}{\rho} \|v\|$, et φ est continue d'après le Th. 1.1 (1.9). ♦

Remarque : Il est bon de faire un dessin pour $E = \mathbb{R}^2$ euclidien et $\varphi = (1 \ -1)$; $\varphi(s, t) = s - t$, $a = (3, 2)$ vérifie $\varphi(a) = 3 - 2 = 1$; $H = \text{Ker}(\varphi)$ a pour équation $t = s$, et $a + H$ a pour équation $t = s - 1$ (dessinez). En dessous de $a + H$ on a $\varphi(s, t) > 1$ (hachurez), et en dessus $\varphi(s, t) < 1$, $\varphi(s, t) = 1$ sur $a + H$. Dessinez aussi une boule de rayon $\rho < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et vous obtenez une figure « mnémotechnique » qui vous permettra – peut-être – de vous souvenir de la démonstration (voir p. 198).

Proposition 3.1.

• (3.4) \implies (3.5) par définition. ♦

• (3.5) \implies (3.6)

On a $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (u, v) \in E \times F :$

$$\|(u, v)\| = \max\{\|u\|, \|v\|\} \leq \eta \implies \|b(u, v)\| \leq \varepsilon.$$

$\forall (u, v) \in B(0, 1) \times B(0, 1)$, on a : $\|\eta \cdot u\| \leq \eta$ et $\|\eta \cdot v\| \leq \eta$, soit : $\|\eta \cdot (u, v)\| \leq \eta \implies \|b(\eta \cdot u, \eta \cdot v)\| \leq \varepsilon \implies \|b(u, v)\| \leq \frac{\varepsilon}{\eta^2}$. ♦

• (3.6) \implies (3.7) est trivial. ♦

• (3.7) \implies (3.8)

Par hypothèse, il existe m réel > 0 tel que pour tous $(u, v) \in S(0, 1) \times S(0, 1)$ on a : $\|b(u, v)\| \leq m$. Soit $(u, v) \in E \times F$ tel que $u \neq 0$ et $v \neq 0$:

$\|b(\frac{u}{\|u\|}, \frac{v}{\|v\|})\| \leq m \implies \|b(u, v)\| \leq m \cdot \|u\| \cdot \|v\|$. Cette inégalité est évidente si $u = 0$ ou $v = 0$. ♦

• (3.8) \implies (3.4)

Soit $(u_0, v_0) \in E \times F$ un point arbitraire. Nous allons démontrer que b est continue en (u_0, v_0) , soit : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (u, v) \in E \times F :$

$$\|(u, v) - (u_0, v_0)\| = \|(u - u_0, v - v_0)\| = \max\{\|u - u_0\|, \|v - v_0\|\} \leq \eta \implies \|b(u, v) - b(u_0, v_0)\| \leq \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} \|b(u, v) - b(u_0, v_0)\| &\leq \|b(u, v) - b(u_0, v)\| + \|b(u_0, v) - b(u_0, v_0)\| \\ &\leq \|b(u - u_0, v)\| + \|b(u_0, v - v_0)\| \\ &\leq m \cdot \|u - u_0\| \cdot \|v\| + m \cdot \|u_0\| \cdot \|v - v_0\|. [\text{par hypothèse}] \end{aligned}$$

Prenons v tel que $\|v - v_0\| \leq 1$, de sorte que $\|v\| \leq \|v - v_0\| + \|v_0\| \leq 1 + \|v_0\|$, il vient :

$$\begin{aligned} \|b(u, v) - b(u_0, v_0)\| &\leq m(1 + \|v_0\|) \cdot \|u - u_0\| + m \cdot \|u_0\| \cdot \|v - v_0\| \\ &\leq m_1(\|u - u_0\| + \|v - v_0\|) \text{ [en posant } m_1 = \max\{m(1 + \|v_0\|), m\|u_0\|\}] \\ &\leq 2m_1 \cdot \max\{\|u - u_0\|, \|v - v_0\|\} \leq \varepsilon \end{aligned}$$

en prenant $\|u - u_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2m_1}$ et $\|v - v_0\| \leq \frac{\varepsilon}{2m_1}$. ♦

Fin de la partie cours du Chapitre X

LECTURE 1

Une propriété des isométries

Nous allons démontrer un résultat inattendu et élémentaire dû à S. Mazur et S. Ulam (en 1932). Ce résultat s'exprime comme suit : Soient E et F sont des e.v.n. réels, et soit $f : E \rightarrow F$ une isométrie surjective telle que $f(0) = 0$. Conclusion : f est linéaire.

Lemme 1.

Soit (E, d) un espace métrique, et soient a, b deux points distincts de E . On pose : $B_1 = \{u \in E / d(u, a) = d(u, b) = \frac{1}{2}d(a, b)\}$, puis on définit par récurrence B_2, B_3, \dots en posant : $B_n = \{u \in B_{n-1} / \forall v \in B_{n-1} : d(u, v) \leq \frac{1}{2} \text{diam}(B_{n-1})\}$. On a : $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ est soit vide, soit réduit à un seul point. On appellera *centre du couple* (a, b) ce point, quand il existe. Les points de B_1 sont les points « milieux » de a, b .

Démonstration :

Notons que non seulement B peut être vide mais encore que les B_n , et même B_1 peuvent être vides : c'est le cas pour B_1 si d est la distance discrète.

Dans ce qui suit on suppose les ensembles non vides.

Bien noter aussi que, par construction, $B_n \subset B_{n-1}$: la suite (B_n) est décroissante pour \subset . Soient u, v arbitraires dans B_n : $v \in B_{n-1} \implies d(u, v) \leq \frac{1}{2} \text{diam}(B_{n-1})$, et donc : $\text{diam}(B_n) \leq \frac{1}{2} \text{diam}(B_{n-1})$.

On en déduit immédiatement : $\text{diam}(B_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{diam}(B_1)$.

Si $u, v \in B_1$: $d(u, v) \leq d(u, a) + d(a, v) = \frac{1}{2}d(a, b) + \frac{1}{2}d(a, b) = d(a, b)$, d'où : $\text{diam}(B_1) \leq d(a, b)$, et : $\text{diam}(B_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} d(a, b)$. Par conséquent, comme $\text{diam}(B) \leq \text{diam}(B_n)$ pour tout n , $\text{diam}(B) = 0$; donc B est \emptyset ou bien $\{c\}$. ♦

Lemme 2.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. réel. Le centre c de (a, b) existe, et $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Démonstration :

Pour tout $u \in E$, notons : $u^\circ = a + b - u$. On va d'abord démontrer, par récurrence, que $u \in B_n \implies u^\circ \in B_n$.

Soit $u \in B_1$: $\|u^\circ - a\| = \|a + b - u - a\| = \|u - b\| = \frac{1}{2}\|a - b\|$ et : $\|u^\circ - b\| = \|a + b - u - b\| = \|u - a\| = \frac{1}{2}\|a - b\|$, d'où : $u^\circ \in B_1$.

Supposons que $u \in B_{n-1} \implies u^\circ \in B_{n-1}$, et soit $v \in B_n$;

$\forall u \in B_{n-1} : \|v^\circ - u\| = \|a + b - v - u\| = \|u^\circ - v\| \leq \frac{1}{2} \text{diam}(B_{n-1})$ car $u^\circ \in B_{n-1}$ (hypothèse de récurrence) et $v \in B_n$, et par définition de B_n ; donc $v^\circ \in B_n$. ♦

$c = \frac{1}{2}(a + b) \in B_1$: $\|c - a\| = \|\frac{1}{2}(a + b) - a\| = \frac{1}{2}\|a - b\|$,

$\|c - b\| = \|\frac{1}{2}(a + b) - b\| = \frac{1}{2}\|a - b\|$.

Supposons que $c \in B_{n-1}$. $\forall u \in B_{n-1}$, on a $a + b - u = u^\circ \in B_{n-1}$, d'après ce qui précède, d'où :

$2\|c - u\| = \|a + b - 2u\| = \|u - u^\circ\| \leq \text{diam}(B_{n-1})$

$\implies \|c - u\| \leq \frac{1}{2} \text{diam}(B_{n-1}) \implies c \in B_n$. ♦

Passons maintenant à la démonstration du résultat annoncé.

Soient a, b deux points arbitraires de E . Le centre de (a, b) dans E est, on vient de le voir, $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Le centre de $(f(a), f(b))$ dans F est, pour la même raison, $c' = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$.

Si l'on montre que $f[\frac{1}{2}(a+b)]$ est centre de $(f(a), f(b))$, par unicité du centre, on aura : $f[\frac{1}{2}(a+b)] = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$. On aura alors le résultat cherché, car en faisant $a = u, b = 0$: $f(\frac{1}{2}u) = \frac{1}{2}[f(u) + f(0)] = \frac{1}{2}f(u)$ (car $f(0) = 0$), d'où :

$f(u+v) = f[\frac{1}{2}(2u+2v)] = \frac{1}{2}[f(2u) + f(2v)] = \frac{1}{2}[2f(u) + 2f(v)] = f(u) + f(v)$, et donc f est *additive*.

Comme f est continue (isométrie !) il ne reste plus qu'à appliquer le résultat de l'Exercice 1.1 et f est *linéaire*. ♦

Appelons C_n l'analogie dans F , pour $(f(a), f(b))$, de B_n dans E pour (a, b) . Si l'on montre que $C_n = f(B_n)$, on aura le résultat voulu, car

$\frac{1}{2}(a+b) \in B_n \Rightarrow f[\frac{1}{2}(a+b)] \in C_n$ pour tout $n \Rightarrow f(c)$ est centre de $(f(a), f(b))$.

$C_1 = \{w \in F / \|w - f(a)\| = \|w - f(b)\| = \frac{1}{2}\|f(a) - f(b)\|\}$

$= \{f(u) / u \in E \text{ et } \|f(u) - f(a)\| = \|u - a\| = \|f(u) - f(b)\| = \|u - b\| = \frac{1}{2}\|a - b\|\}$
(f est bijective et isométrique), donc $C_1 = f(B_1)$.

Supposons qu'on a $C_{n-1} = f(B_{n-1})$.

$\text{diam}(C_n) = \sup_{u \in B_{n-1}, v \in B_{n-1}} \|f(u) - f(v)\| = \sup_{u \in B_{n-1}, v \in B_{n-1}} \|u - v\|$
 $= \text{diam}(B_{n-1})$.

$C_n = \{w \in C_{n-1} / \forall z \in C_{n-1} : \|w - z\| \leq \frac{1}{2} \text{diam}(C_n)\}$

$= \{f(u) / u \in B_{n-1}, \forall v \in B_{n-1} : \|f(u) - f(v)\| = \|u - v\| \leq \frac{1}{2} \text{diam}(B_{n-1})\}$

$= f(B_n)$, en utilisant l'hypothèse de récurrence, $\text{diam}(C_{n-1}) = \text{diam}(B_{n-1})$.

C'est terminé. ♦

Remarque :

Si f isométrique surjective est telle que l'on a $f(0) = w_0 \neq 0$, $g(u) := f(u) - w_0$ vérifie $g(0) = 0$ et est isométrique surjective, et on peut appliquer le résultat ci-dessus : g est linéaire, et donc f est affine.

LECTURE 2

Approximation d'un e.v.n.

Un très grand nombre de *phénomènes physiques* est décrit par une ou plusieurs *équations aux dérivées partielles*, et par ce qu'on appelle des *conditions aux limites*.

Par exemple, on cherche les solutions $u : \text{adh}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ d'une équation de la forme :

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, y) = f(x, y) \text{ pour } (x, y) \in \Omega,$$

avec la condition aux limites : $u(x, y) = 0$ pour $(x, y) \in \partial\Omega$, où : Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 , $\partial\Omega$ est le bord de Ω (i.e. $\text{fr}(\Omega)$) si $\partial\Omega$ n'est pas trop tordu, f est une fonction donnée sur Ω . C'est le *problème de Dirichlet*.

Les problèmes qui se posent naturellement sont les suivants :

- *existe-t-il* une solution au moins ?
- s'il y a une solution, est-elle *unique* ?
- s'il existe une solution unique, quel est son degré de *régularité* ? Est-elle seulement deux fois dérivable, ou bien est-elle indéfiniment dérivable ?
- enfin, et surtout s'il s'agit d'un problème concret : calcul numérique de la solution, par exemple aux nœuds d'un maillage suffisamment fin de $\text{adh}(\Omega)$.

En général il n'est pas question de déterminer une solution explicite ! *Déjà, pour les équations différentielles « ordinaires », il n'y a guère que les équations des sujets d'examen dont on sache calculer la solution . . .*

Pour résoudre ces problèmes, on fait choix d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ de fonctions $\Omega \cup \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui *vérifient la condition aux limites*, i.e. qui sont nulles sur $\partial\Omega$.

L'équation aux dérivées partielles (linéaire) se présente alors comme un opérateur linéaire continu A de E dans le dual topologique E' , et le problème d'*existence* est celui de la *surjectivité* de l'opérateur, le problème de l'*unicité* est celui de la *bijektivité* de l'opérateur.

On donnera dans le Chapitre XVIII un théorème (le Th. de Lax-Milgram) qui dit que, sous certaines hypothèses faites sur A , on a effectivement existence et unicité de la solution.

Malheureusement nous ne pouvons pas expliciter les « bons » E et E' , cela implique des connaissances de Maîtrise (espaces de Sobolev) ; mais peu importe, appelons simplement E cet espace sans nous poser de question sur son contenu. Retenons qu'il s'agit d'un espace de fonctions, et donc d'un espace de *dimension infinie*.

C'est là que le bât blesse du point de vue numérique : en effet les ordinateurs – même les plus puissants – ne s'accommodent pas de la dimension infinie !

Nous voulons donner une idée dans ce qui suit de la méthode utilisée pour résoudre numériquement le problème.

On commence par se donner une *approximation de l'e.v.n.* E , i.e. une famille d'e.v.n. de dimension *finie* $N(n)$ croissante avec n , $(E_n, \|\cdot\|_n)$, qui va être « reliée » à $(E, \|\cdot\|)$ comme suit :

en même temps que $(E_n, \|\cdot\|_n)$ on se donne :

- des opérateurs dits *prolongements* $p_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$, $n \in \mathbb{N}$, qui seront en général supposés injectifs,
- des opérateurs dits *restrictions* $r_n \in \mathcal{L}(E, E_n)$, $n \in \mathbb{N}$, qui seront en général supposés surjectifs,

• les opérateurs $t_n = p_n \circ r_n$, sont dits *troncatures*. On leur impose souvent de vérifier la condition de convergence suivante :

$$[C] \quad \forall u \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} (p_n \circ r_n)(u) = u.$$

Une *approximation* de $(E, \|\cdot\|)$ sera un ensemble $\{E_n, \|\cdot\|_n, p_n, r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$; on dit que l'*approximation est convergente* si [C] est vérifiée.

Les prolongements [resp. restrictions] sont dits *stables* s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N} : \|p_n\| \leq M$ [resp. $\|r_n\| \leq M$]. Si les p_n et r_n sont stables, on dit que l'approximation est *stable*.

Etant donnée une approximation, on peut « comparer » des éléments de E et de E_n de diverses manières : pour $u \in E$ et $u_n \in E_n$, on appelle :

- $\|u - p_n(u_n)\|_E$ l'*erreur entre u et u_n* ,
- $\|u_n - r_n(u)\|_n$ l'*erreur discrète entre u et u_n* ,
- $\|u - p_n \circ r_n(u)\|_E$ l'*erreur de troncature de u* .

Si l'on a [C], l'erreur de troncature tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

Remarques : Si E_n n'est pas *a priori* normé et si $p_n \in L(E, E)$ est injectif, on peut prendre $\|\cdot\|_n = \|p_n(\cdot)\|$ qui assure $p_n \in \mathcal{L}(E_n, E)$, mais ce choix n'est pas toujours le meilleur.

Les E_n ne sont pas nécessairement des sous-espaces vectoriels de E , ils ne sont même pas en général contenus dans E .

Pour le dual E' , on peut considérer les e.v.n. E'_n munis de leur norme duale $\|\cdot\|'_n$, et : $p'_n = {}^t r_n, r'_n = {}^t p_n$ [cf. Annexe]. On a : $[p'_n(\varphi_n)](u) = \varphi_n[r_n(u)]$ pour tout $\varphi_n \in E'_n$ et tout $u \in E$, et : $[r'_n(\varphi)](u_n) = \varphi[p_n(u_n)]$ pour tout $\varphi \in E'$, tout $u_n \in E_n$.

Cette approximation du dual n'est pas convergente en général.

Maintenant, il faut « approximer » l'application linéaire $A : E \rightarrow E'$; on se donne $A_n : E_n \rightarrow E'_n, n \in \mathbb{N}$, linéaires, avec une condition de *consistance* entre A et (A_n) qui pourra être :

- (i) $\forall u \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} \|r'_n \circ A(u) - A_n \circ r_n(u)\|'_n = 0$, ou bien :
- (ii) $\forall (u_n)_n, u_n \in E_n : \lim_{n \rightarrow \infty} \|p'_n \circ A_n(u_n) - A \circ p_n(u_n)\|' = 0$.

On peut imaginer d'autres *adéquations* de A_n à $A \dots$

On veut résoudre $A(\hat{u}) = \varphi, \varphi \in E'$ donné (φ « représente » le second membre f).

On considère $\varphi_n = r'_n(\varphi)$, et on résout $A_n(\hat{u}_n) = \varphi_n$, pour chaque n . Cette équation est un « simple » *système linéaire* à résoudre en termes de matrices après avoir fait un choix de bases de E_n et E'_n . Et on sait résoudre des systèmes linéaires sur un ordinateur. Il est à noter que *le choix des bases est fondamental* pour avoir des matrices simples à inverser.

Cela étant, on aura résolu le problème si l'on a $(\hat{u}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \hat{u}$ en un certain sens, avec si possible une majoration de l'erreur $\|\hat{u} - p_n(\hat{u}_n)\|$ ou $\|r_n(\hat{u}) - \hat{u}_n\|_n$.

Tel est « en gros » le processus à suivre. ♦

Exemple 1. Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert [cf. Chap. XI] réel séparable. On démontrera qu'il existe une suite $(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ [base hilbertienne : Chap. XII et surtout Chap. XIX] telle que tout $u \in E$ s'écrit :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n)e_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (u|e_n)e_n.$$

On peut prendre : $E_n = \mathbb{R}^n$, $p_n : \mathbb{R}^n \rightarrow E$, $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \mapsto p_n(u) = \sum_{j=1}^n \xi_j e_j$ et $r_n : E \rightarrow E_n$, $u \mapsto r_n(u) = ((u|e_1), (u|e_2), \dots, (u|e_n))$. Cette approximation est convergente si l'on prend sur E_n la norme $\|(\xi_1, \dots, \xi_n)\|_n = \left\| \sum_{j=1}^n \xi_j e_j \right\|_E$.

Exemple 2. Soit $E = C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $n \geq 1$ donné, on divise $[0, 1]$ en n parties égales en considérant les points $0 = \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1$. On prend $E_n = \mathbb{R}^{n+1}$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Pour $f \in E$, on définit $r_n(f) = (f(0), f(\frac{1}{n}), \dots, f(\frac{n-1}{n}), f(1))$.

On peut prendre pour $p_n(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$ la fonction *continue affine par morceaux* passant par les points $(\frac{k}{n}, \xi_k)$. Cette approximation est convergente. Voir les Chap. IV et XIV.

Nous n'irons pas plus loin sur ce sujet.

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ **Exercice 1.1.**

Il nous faut démontrer que A est homogène, i.e. vérifie :

$$\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : A(\lambda.u) = \lambda.A(u).$$

(i) $\implies A(0+0) = A(0) = A(0) + A(0) \implies A(0) = 0.$

$\forall u \in E : A(u + (-u)) = A(0) = 0 = A(u) + A(-u) \implies A(-u) = -A(u).$

$\forall u \in E : \text{(i) entraîne } A(u + u) = A(2u) = A(u) + A(u) = 2A(u).$

Supposons que $\forall u \in E$, pour $n \in \mathbb{N} : A(n.u) = n.A(u)$. (i) entraîne :

$A[(n+1).u] = A(n.u + u) = A(n.u) + A(u) = n.A(u) + A(u) = (n+1).A(u).$

On a donc prouvé que pour tout $u \in E$, tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $A(n.u) = n.A(u)$.

Soient à présent $u \in E, q \in \mathbb{N}^* :$

$$A[(\frac{1}{q}).q.u] = A(u) = q.A[(\frac{1}{q}).u] \implies A[(\frac{1}{q}).u] = (\frac{1}{q}).A(u);$$

donc, pour $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^* : A[(\frac{p}{q}).u] = (\frac{p}{q}).A(u)$. Par conséquent,

$$\forall r \in \mathbb{Q} : A(r.u) = r.A(u). \spadesuit$$

Démontrons maintenant que A est continue (uniformément, en fait) sur E , i.e. que : $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E, \forall v \in E : \|u - v\| \leq \eta \implies \|A(u) - A(v)\| \leq \epsilon.$

On a vu que $A(u) - A(v) = A(u - v)$; prenons pour η un rationnel > 0 et $\leq \frac{\epsilon}{M}$ (M est la constante de (ii)) ;

$$\|u - v\| \leq \eta \implies \|\frac{1}{\eta}(u - v)\| \leq 1 \implies (\text{par (ii)}) \|A[\frac{1}{\eta}(u - v)]\| \leq M \implies (\frac{1}{\eta} \in \mathbb{Q})$$

$$\|A(u) - A(v)\| = \|A(u - v)\| \leq M\eta \leq M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon. \spadesuit$$

Soit à présent $u \in E$, et soit $\rho \in \mathbb{R} : \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_n)$, où les ρ_n sont des rationnels ; on a :

$$A(\rho.u) = A[\lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_n).u] = \lim_{n \rightarrow \infty} A(\rho_n.u) \text{ [continuité de } A] = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n.A(u) \text{ [ci-dessus], donc}$$

$$A(\rho.u) = \rho.A(u).$$

A est une application linéaire, et on a vu qu'elle est continue. \spadesuit

Nota :

On a démontré la continuité à l'aide de la définition générale, et non avec les caractérisations propres aux applications linéaires : c'est normal, puisqu'on ne savait pas encore que A est linéaire !

☞ **Exercice 1.2.**

Soit $u \in E$ fixé, et soit $A_u : \mathbb{K} \rightarrow E, \lambda \mapsto \lambda.u$. On a $A_u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$ car $A_u \in L(\mathbb{K}, E)$ est évident et :

$$\|A_u\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)} = \sup_{|\lambda|=1} \|A_u(\lambda)\| = \sup_{|\lambda|=1} \|\lambda.u\| = \|u\|. \sup_{|\lambda|=1} |\lambda| = \|u\|.$$

Soit à présent $\Lambda : E \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}, E), u \mapsto A_u$.

Λ est linéaire car $\forall u, v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} :$

$$[\Lambda(u + v)](\lambda) = A_{u+v}(\lambda) = \lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v = A_u(\lambda) + A_v(\lambda)$$

$$= [A_u + A_v](\lambda) = [\Lambda(u) + \Lambda(v)](\lambda), \text{ soit : } \Lambda(u + v) = \Lambda(u) + \Lambda(v),$$

pareillement pour $\Lambda(\mu u) = \mu\Lambda(u)$.

Donc $\Lambda \in L(E, L(\mathbb{K}, E))$.

Démontrons que Λ est surjective ; soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}, E)$, on pose $v = A(1) \in E$; on a : $\forall \lambda \in \mathbb{K} : [\Lambda(v)](\lambda) = A_v(\lambda) = \lambda.v = \lambda.A(1) = A(\lambda) \implies \Lambda(v) = A$; v est l'antécédent cherché.

Démontrons enfin que Λ est une *isométrie*, i.e. vérifie :

$$\forall u \in E : \|\Lambda(u)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)} = \|u\|_E.$$

C'est évident puisque $\|\Lambda(u)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)} = \|A_u\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K}, E)} = \|u\|_E$ comme on l'a vu plus haut.

On a donc $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E) \approx E$.

Quand $\dim(E) < \infty$, les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{K}, E) = L(\mathbb{K}, E)$ sont appelés *contravecteurs*, on les identifie aux vecteurs (éléments de E) via Λ ; dans ce contexte les éléments de $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = L(E, \mathbb{K}) = E^*$ sont appelés *covecteurs*. [vocabulaire du calcul tensoriel].

☞ **Exercice 1.3.**

1) Pour tout $(\varphi, \psi) \in E' \times F'$, démontrons que $\Phi = f(\varphi, \psi)$ appartient à $(E \times F)'$.

$\forall (u, v) \in E \times F, \forall (u', v') \in E \times F$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi[(u, v) + (u', v')] &= \Phi(u + u', v + v') = \varphi(u + u') + \psi(v + v') \\ &= \varphi(u) + \varphi(u') + \psi(v) + \psi(v') = [\varphi(u) + \psi(v)] + [\varphi(u') + \psi(v')] \\ &= \Phi(u, v) + \Phi(u', v'); \end{aligned}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} : \Phi(\lambda(u, v)) = \Phi(\lambda u, \lambda v) = \varphi(\lambda u) + \psi(\lambda v) = \lambda[\varphi(u) + \psi(v)] = \lambda\Phi(u, v);$$

par conséquent Φ est linéaire : $\Phi \in (E \times F)'$.

$$\forall (u, v) \in E \times F;$$

$$\begin{aligned} |\Phi(u, v)| &= |\varphi(u) + \psi(v)| \leq |\varphi(u)| + |\psi(v)| \leq \|\varphi\|' \cdot \|u\| + \|\psi\|' \cdot \|v\| \\ &\leq \max\{\|u\|, \|v\|\} \cdot (\|\varphi\|' + \|\psi\|') = \|(\varphi, \psi)\| \cdot \|(u, v)\|; \end{aligned}$$

donc Φ est continue de norme $\leq \|(\varphi, \psi)\|'$. Donc $\Phi \in (E \times F)'$. ♦

Démontrons que f est linéaire. $\forall (\varphi, \psi) \in E' \times F', \forall (\xi, \zeta) \in E' \times F'$:

$$f[(\varphi, \psi) + (\xi, \zeta)] = f(\varphi + \xi, \psi + \zeta) := \Phi.$$

$$\forall (u, v) \in E \times F :$$

$$\begin{aligned} \Phi(u, v) &= (\varphi + \xi)(u) + (\psi + \zeta)(v) = [\varphi(u) + \psi(v)] + [\xi(u) + \zeta(v)] \\ &= f(\varphi, \psi)(u, v) + f(\xi, \zeta)(u, v) = [f(\varphi, \psi) + f(\xi, \zeta)](u, v). \text{ Donc :} \end{aligned}$$

$$f[(\varphi, \psi) + (\xi, \zeta)] = f(\varphi, \psi) + f(\xi, \zeta).$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} :$$

$$\begin{aligned} f[\lambda(\varphi, \psi)](u, v) &= f(\lambda\varphi, \lambda\psi)(u, v) = \lambda\varphi(u) + \lambda\psi(v) = \lambda[\varphi(u) + \psi(v)] \\ &= \lambda f(\varphi, \psi)(u, v) \implies f[\lambda(\varphi, \psi)] = \lambda f(\varphi, \psi). \end{aligned}$$

f est donc une application linéaire de $E' \times F'$ dans $(E \times F)'$. ♦

Démontrons que f est continue.

$$|f(\varphi, \psi)(u, v)| = |\varphi(u) + \psi(v)| \leq \|(u, v)\| \cdot \|(\varphi, \psi)\| \text{ [cf. ci-dessus], d'où :}$$

$$\begin{aligned} \|f(\varphi, \psi)\| &= \sup_{\|(u, v)\| \leq 1} |f(\varphi, \psi)(u, v)| \leq \sup_{\|(u, v)\| \leq 1} \|(u, v)\| \cdot \|(\varphi, \psi)\| \\ &\leq \|(\varphi, \psi)\|. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Démontrons que f est surjective. La question se traduit par : $\Psi \in (E \times F)'$ étant donnée, existe-t-il $(\xi, \zeta) \in E' \times F'$ tel que $f(\xi, \zeta) = \Psi$?

Condition nécessaire :

$$\forall (u, v) \in E \times F : f(\xi, \zeta)(u, v) = \Psi(u, v) = \xi(u) + \zeta(v); \text{ faisant } v = 0 : \Psi(u, 0) = \xi(u),$$

$$\text{puis faisant } u = 0 : \Psi(0, v) = \zeta(v);$$

on est amené à considérer $\xi = \Psi(\cdot, 0)$ et $\zeta = \Psi(0, \cdot)$.

Condition suffisante :

Il est facile de vérifier que $\xi = \Psi(\cdot, 0) \in E'$ et $\zeta = \Psi(0, \cdot) \in F'$, et on a :

$$\begin{aligned} f(\xi, \zeta)(u, v) &= f[\Psi(\cdot, 0), \Psi(0, \cdot)](u, v) = \Psi(\cdot, 0)(u) + \Psi(0, \cdot)(v) \\ &= \Psi(u, 0) + \Psi(0, v) = \Psi(u, v). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

2) Démontrons que f est une isométrie, i.e. que :

$$\forall (\varphi, \psi) \in E' \times F' : \|f(\varphi, \psi)\| = \|(\varphi, \psi)\|.$$

On a déjà prouvé ci-dessus que $\|f(\varphi, \psi)\| \leq \|(\varphi, \psi)\|$, il reste à prouver l'inégalité inverse.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Par définition d'un sup, il existe $u_0 \in E$ tel que $\|u_0\| \leq 1$ et $\|\varphi\|' - \varepsilon \leq \varphi(u_0)$, et de même il existe $v_0 \in F$ tel que $\|v_0\| \leq 1$ et $\|\psi\|' - \varepsilon \leq \psi(v_0)$.

On a :

$$\begin{aligned} \|f(\varphi, \psi)\| &= \sup_{\|(u, v)\| \leq 1} |f(\varphi, \psi)(u, v)| = \sup_{\max\{\|u\|, \|v\|\} \leq 1} |\varphi(u) + \psi(v)| \\ &\geq \varphi(u_0) + \psi(v_0) \geq \|\varphi\|' - \varepsilon + \|\psi\|' - \varepsilon = \|(\varphi, \psi)\| - 2\varepsilon; \end{aligned}$$

comme cette inégalité a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'égalité cherchée. ♦

Le résultat dit que $(E \times F)'$, dont on pouvait se demander ce que cet espace pouvait bien être, est isométrique (linéairement) à $E' \times F'$, espace dont on comprend bien la nature.

On écrit souvent : $(E \times F)' \approx E' \times F'$.

Deux e.v.n. linéairement isométriques sont en fait *indiscernables* – toutes leurs propriétés sont les mêmes – sauf par la nature de leurs éléments.

☞ **Exercice 1.4.**

Soit $u \in U$: par hypothèse il existe $\rho > 0$ tel que $\forall v \in E : \|v\| < \rho \implies u + v \in U$; il suffit de prouver que $B(u, \rho] \subset U$.

Soit $w \in B(u, \rho]$. On a : $\|u - w\| < \rho$, et on écrit $w = u + (w - u)$:

$\|w - u\| < \rho \implies w \in U$ par hypothèse.

Ce « mini lemme » (disons cette remarque !) est constamment utilisé en calcul différentiel. ♦

Nous allons démontrer que \mathcal{I} est un ouvert de $\mathcal{L}(E, F)$. Soit $A \in \mathcal{I}$: par définition de \mathcal{I} il existe $m = m_A$ et $M = M_A$ réels > 0 tels que :

$$\forall u \in E : m\|u\|_E \leq \|A(u)\|_F \leq M\|u\|_E.$$

Soit $B \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\|B\|_{\mathcal{L}(E, F)} < m$; on va démontrer que $A + B \in \mathcal{I}$, ce qui résoudra le problème d'après le lemme ci-dessus appliqué à l'e.v.n. $\mathcal{L}(E, F)$.

$$\forall u \in E : \|(A + B)(u)\| = \|A(u) + B(u)\| \leq \|A(u)\| + \|B(u)\| \leq M\|u\| + \|B\| \cdot \|u\| \leq M\|u\| + m\|u\| = (m + M)\|u\|.$$

D'autre part : $\|A(u) + B(u)\| \geq \| \|A(u)\| - \|B(u)\| \| \geq \|A(u)\| - \|B(u)\|$, et

$$\|A(u)\| \geq m\|u\|, \|B(u)\| \leq \|B\| \cdot \|u\| \implies \|A(u)\| - \|B(u)\| \geq m\|u\| - \|B\| \cdot \|u\| = (m - \|B\|)\|u\| ;$$

d'où : $\|A(u) + B(u)\| \geq (m - \|B\|)\|u\|$, et $m - \|B\| > 0$. Il suffit donc de prendre $m_{A+B} = m_A - \|B\| > 0$ et $M_{A+B} = m_A + M_A > 0$, et on a bien $A + B \in \mathcal{I}$. ♦

Remarque :

\mathcal{I} n'est pas $\mathcal{I}\text{som}(E, F)$, car ses éléments ne sont pas nécessairement dans $\text{Isom}(E, F)$: ils sont injectifs (trivial) mais pas obligatoirement surjectifs ; c'est un ensemble plus grand [comparez avec la Prop. 1.3]. Nous aurons dans le Chap. XII un résultat de type « ouverture » pour $\mathcal{I}\text{som}(E, F)$.

🔗 **Exercice 2.1.**

$\varphi = \delta_s + \delta_t$ et $\psi = \delta_s - \delta_t$ sont des formes linéaires continues sur $E = \mathcal{C}_\infty([a, b], \mathbb{R})$ comme somme et différence de formes linéaires continues : voir Exemples 1.1 et 2.1.

$$\|\varphi\|' = \|\delta_s + \delta_t\|' \leq \|\delta_s\|' + \|\delta_t\|' = 1 + 1 = 2 \text{ (loc. cit.) ; de même } \|\psi\|' \leq 2.$$

Soit $g \in E$ telle que $g(s) = g(t) = 1$ et $\|g\|_\infty = 1$ (g vaut ce qu'elle veut ailleurs, on peut prendre $g = \mathbf{1}$ par exemple).

$$\|\varphi\|' = \sup_{f \in E, \|f\|_\infty=1} |\varphi(f)| \geq \varphi(g) = \delta_s(g) + \delta_t(g) = g(s) + g(t) = 1 + 1 = 2. \text{ Donc } \|\varphi\|' = 2.$$

Pour ψ , considérons une fonction $h \in E$ telle que $\|h\|_\infty = 1, h(s) = +1, h(t) = -1$. Comme ci-dessus : $\|\psi\|' \geq \psi(h) = \delta_s(h) - \delta_t(h) = h(s) - h(t) = +1 - (-1) = 2$, et $\|\psi\|' = 2$.

Encore faut-il s'assurer qu'il existe bien une telle fonction h ! Mais c'est évident, il suffit de prendre $h(x) = +1$ pour $a \leq x \leq s, h(x) = -1$ pour $t \leq x \leq b, h$ affine pour $s \leq x \leq t$ et h continue. (dessinez). ♦

🔗 **Exercice 2.2.**

$$E = \mathcal{C}_1([a, b], \mathbb{R}), \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)| dt, p \in E \text{ donné, } \forall f \in E : \psi(f) = \int_a^b f(t) \cdot p(t) dt.$$

Calculons $\|\psi\|'$.

$$\forall f \in E : |\psi(f)| = \left| \int_a^b f(t) \cdot p(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| \cdot |p(t)| dt \leq \max_{a \leq t \leq b} |p(t)| \int_a^b |f(t)| dt \leq \|p\|_\infty \cdot \|f\|_1.$$

Donc ψ est continue, $\psi \in E'$, de norme $\|\psi\|' = \sup_{f \in E, \|f\|_1 \leq 1} |\psi(f)| \leq \|p\|_\infty$.

On va démontrer qu'il y a égalité. Pour cela il nous suffirait de trouver une fonction $g \in E$ telle que $\|g\|_1 = 1$ et telle que $\psi(g) = \|p\|_\infty$, auquel cas on aurait : $\|\psi\|' \geq \psi(g) = \|p\|_\infty$, et on aurait terminé.

Mais, catastrophe, une telle fonction g n'existe pas en général ! [exercice classique de la théorie de la mesure ou des distributions].

On va donc procéder en construisant une suite (g_n) de fonctions de norme $\|g_n\|_1 \leq 1$ et telles que $\psi(g_n) \geq \|p\|_\infty - \varepsilon_n$, où $\varepsilon_n > 0$, pour tout n , et $\lim(\varepsilon_n) = 0$. On aura alors $\|\psi\|' = \sup_{f \in E, \|f\|_1 \leq 1} |\psi(f)| \geq \psi(g_n) \geq \|p\|_\infty - \varepsilon_n$, d'où le résultat cherché en faisant tendre n vers l'infini.

p étant continue sur $[a, b]$, il existe un $t_0 \in [a, b]$ (au moins) tel que $\|p\|_\infty = |p(t_0)|$. $p = 0$ étant exclu (cas trivial), on peut supposer, pour fixer les idées, que $p(t_0) > 0$ et que $t_0 \in]a, b[$.

Puisque p est continue en t_0 :

$$\forall n \text{ entier, } \exists \eta > 0, \forall t \in [a, b] : t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \implies |p(t) - p(t_0)| \leq \frac{1}{n},$$

soit : $\|p\|_\infty - \frac{1}{n} \leq p(t) \leq \|p\|_\infty + \frac{1}{n}$; seule l'inégalité de gauche nous intéressera, et on ne considère que les n assez grands pour que $\|p\|_\infty - \frac{1}{n} > 0$.

Cela étant, on considère la suite de fonctions (g_n) ainsi définies : sur $[a, t_0 - \eta]$ et sur $[t_0 + \eta, b]$, g_n vaut zéro ; sur $[t_0 - \eta + 2\frac{\eta}{n}, t_0 + \eta - 2\frac{\eta}{n}]$, g_n est constante et vaut $\frac{1}{2\eta}$, ailleurs g_n est affine de façon à ce que g_n soit continue sur $[a, b]$. Les g_n ont donc l'allure de trapèzes : dessinez ! Dans tout cela n est choisi assez grand pour que tout soit bien défini.

On a :

$$\begin{aligned} \|g_n\|_1 &= \int_a^b g_n(t) dt = \text{aire du trapèze} = \frac{1}{2} \times h \times (b + B) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\eta} [((t_0 + \eta) - (t_0 - \eta)) + ((t_0 + \eta - 2\frac{\eta}{n}) - (t_0 - \eta + 2\frac{\eta}{n}))] \\ &= \frac{1}{4\eta} [2\eta + 2\eta - 4\frac{\eta}{n}] = 1 - \frac{1}{n} < 1, \text{ et } \lim \|g_n\|_1 = 1. \end{aligned}$$

Calculons maintenant $\psi(g_n)$:

$$\begin{aligned} \psi(g_n) &= \int_a^b g_n(t) \cdot p(t) dt = \int_{t_0 - \eta}^{t_0 - \eta + 2\frac{\eta}{n}} g_n(t) \cdot p(t) dt + \int_{t_0 - \eta + 2\frac{\eta}{n}}^{t_0 + \eta - 2\frac{\eta}{n}} g_n(t) \cdot p(t) dt + \int_{t_0 + \eta - 2\frac{\eta}{n}}^{t_0 + \eta} g_n(t) \cdot p(t) dt \\ \psi(g_n) &\geq \int_{t_0 - \eta + 2\frac{\eta}{n}}^{t_0 + \eta - 2\frac{\eta}{n}} g_n(t) \cdot p(t) dt \text{ [car les deux intégrales extrêmes sont } \geq 0] \\ &\geq \frac{1}{2\eta} (\|p\|_\infty - \frac{1}{n}) \int_{t_0 - \eta + 2\frac{\eta}{n}}^{t_0 + \eta - 2\frac{\eta}{n}} dt = \frac{1}{2\eta} (\|p\|_\infty - \frac{1}{n}) (2\eta - 4\frac{\eta}{n}) \\ &\geq (\|p\|_\infty - \frac{1}{n}) (1 - \frac{2}{n}) = \|p\|_\infty - [\frac{1}{n} + 2\frac{\|p\|_\infty}{n} - \frac{2}{n^2}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|p\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc $\|\psi\|' \geq \|p\|_\infty$, et le résultat final : $\|\psi\|' = \|p\|_\infty$. ♦

📌 **Exercice 2.3.**

1) Il faut d'abord prouver que $A(u)$ est bien défini et est un élément de $E = \ell^2$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cdot \xi_n)^2 &= \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \cdot \xi_n^2 \leq \max_{1 \leq n \leq N} (\alpha_n^2) \sum_{n=1}^N \xi_n^2 \leq \max_{n \in \mathbb{N}^*} (\alpha_n^2) \sum_{n=1}^N \xi_n^2 \\ &\leq \|a\|_\infty^2 \sum_{n=1}^\infty \xi_n^2 = \|a\|_\infty^2 \cdot \|u\|_2^2. \end{aligned}$$

Donc $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (\alpha_n \cdot \xi_n)^2$ existe et vaut $\sum_{n=1}^\infty (\alpha_n \cdot \xi_n)^2 = \|A(u)\|^2$ qui est majoré (prolongement des inégalités) par $\|a\|_\infty^2 \cdot \|u\|_2^2$.

Par conséquent $A \in L(E)$ (évident) est continu de norme $\|A\| \leq \|a\|_\infty$.

Démontrons que $\|A\| = \|a\|_\infty$. Posons : $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$ [1 à la n -ème place et 0 ailleurs] ; on a $e_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, avec $\|e_n\|_2 = 1$; $A(e_n) = (0, 0, \dots, 0, \alpha_n, 0, \dots)$ et $\|A(e_n)\| = |\alpha_n|$;

$$\|A\| \geq \|A(e_n)\| = |\alpha_n| \implies \|A\| \geq \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |\alpha_n| = \|a\|_\infty. \text{ ♦}$$

Si $\|a\|_\infty$ est effectivement atteinte en α_p , alors $\|A\|$ est effectivement atteinte au point $v = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ où 1 occupe la p -ème place. Mais si $|\alpha_n| < \|a\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la norme $\|A\|$ n'est pas obligatoirement atteinte ;

prenons par exemple $\alpha_n = 1 - \frac{1}{n}$: $\|a\|_\infty = 1$, et si $\|A(\hat{u})\|_2 = 1$ pour $\|\hat{u}\|_2 = 1$, on doit avoir $\sum_{n=1}^\infty (1 - \frac{1}{n})^2 \xi_n^2 = \sum_{n=1}^\infty \xi_n^2 = 1$, ce qui est impossible. ♦

2) Si $A \in \mathcal{GL}(E)$: $\|u\| = \|(A^{-1} \circ A)(u)\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|A(u)\|$, soit pour tout $u \in E$:

$$\|A(u)\| \geq \frac{\|u\|}{\|A^{-1}\|} \text{ et, en particulier : } \|A(e_n)\| = |\alpha_n| \geq \frac{\|e_n\|}{\|A^{-1}\|} = \frac{1}{\|A^{-1}\|}. \text{ Donc :}$$

$$\frac{1}{|\alpha_n|} \leq \|A^{-1}\|, \text{ soit } \left(\frac{1}{|\alpha_n|}\right)_n \in \ell^\infty \text{ (suite bornée).}$$

Réciproquement, si $\left(\frac{1}{|\alpha_n|}\right)$ est bornée, le raisonnement du 1) démontre que

$$B(u) = \left(\frac{1}{\alpha_1} \xi_1, \frac{1}{\alpha_2} \xi_2, \dots, \frac{1}{\alpha_n} \xi_n, \dots\right) \text{ définit un élément de } \mathcal{L}(E).$$

Il ne nous reste plus qu'à prouver que $A \circ B = B \circ A = Id_E$:

$$A \circ B(u) = A\left(\frac{1}{\alpha_1} \xi_1, \dots, \frac{1}{\alpha_n} \xi_n, \dots\right) = \left(\alpha_1 \times \frac{1}{\alpha_1} \xi_1, \dots, \alpha_n \times \frac{1}{\alpha_n} \xi_n, \dots\right) = u = B \circ A(u).$$

On remarquera que $\|A^{-1}\| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{|\alpha_n|} = \frac{1}{\inf_{n \in \mathbb{N}^*} |\alpha_n|}$ n'est pas égal à $\frac{1}{\|a\|_\infty} = \frac{1}{\|A\|}$. ♦

📌 **Exercice 2.4.**

$$E = \mathcal{C}([-1, +1], \mathbb{R}), \|f\|_\infty = \max_{-1 \leq t \leq +1} |f(t)|, \text{ et } : \varphi(f) = \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt.$$

1) $\forall f \in E$:

$$|\varphi(f)| \leq \int_{-1}^0 |f(t)| dt + \int_0^1 |f(t)| dt = \int_{-1}^1 |f(t)| dt \leq \max_{-1 \leq t \leq +1} |f(t)| \int_{-1}^1 dt \leq 2\|f\|_\infty.$$

Donc φ est continue de norme $\|\varphi\|' \leq 2$.

Pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ arbitraire, considérons la fonction g_ε qui vaut $+1$ sur $[-1, -\varepsilon]$, $-\frac{1}{\varepsilon} t$ sur $[-\varepsilon, +\varepsilon]$, -1 sur $[\varepsilon, 1]$:

$$\|g_\varepsilon\|_\infty = 1 \text{ et } : \varphi(g_\varepsilon) = - \int_{-1}^{-\varepsilon} dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} -\frac{1}{\varepsilon} t dt + \int_{\varepsilon}^1 - dt = 2 - 2\varepsilon.$$

D'où : $\|\varphi\|' = \sup_{\|f\|_\infty=1} |\varphi(f)| \geq \varphi(g_\varepsilon) = 2 - 2\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0 \implies \|\varphi\|' \geq 2$, et $\|\varphi\|' = 2$. ♦

2) (notons que ce 2) aide à à imaginer g_ε ci-dessus ... *Toujours lire les énoncés de problèmes en entier!*.)

On veut prouver qu'il n'existe pas $g \in E$ telle que $\|g\|_\infty = 1$ et $\|\varphi\|' = \varphi(g)$, i.e. telle que :

$$\int_{-1}^0 g(t) dt - \int_0^1 g(t) dt = 2.$$

$$\text{Mais : } \left| \int_{-1}^0 g(t) dt \right| \leq \int_{-1}^0 |g(t)| dt \leq 1, \text{ et } \left| \int_0^1 g(t) dt \right| \leq \int_0^1 |g(t)| dt \leq 1.$$

La seule possibilité est donc que $\int_{-1}^0 g(t) dt = 1$ et $\int_0^1 g(t) dt = -1$, mais cela implique,

puisque g doit être continue, que g doit être identique à $+1$ sur $[-1, 0[$, et à -1 sur $]0, 1]$ (petit raisonnement par contradiction si vous n'êtes pas complètement convaincu), et cela implique que g a une discontinuité en $t = 0$! g ne peut donc pas exister dans E (elle existerait dans un espace plus grand, mais ce n'est pas notre problème ici). ♦

📌 **Exercice 2.5.**

1) Puisque $\varphi \neq 0$, il existe $u \in E$ tel que $\varphi(u) = \alpha \neq 0$. Il suffit de prendre $a = \frac{1}{\alpha} u$: $\varphi(a) = \varphi\left(\frac{1}{\alpha} u\right) = \frac{1}{\alpha} \alpha = 1$; a n'est pas unique, bien sûr !

$\text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ est image réciproque par φ continue de $\{0\}$ fermé et donc est fermé. $[a]$ est de dimension finie 1, donc complet, et donc fermé. ♦

2) On a vu dans l'Exemple 2.5 que $\|A\| = \|\varphi\|' \cdot \|a\|$.

$$\forall u \in E : A^2(u) = A[\varphi(u).a] = \varphi(u).A(a) = \varphi(u).\varphi(a).a = \varphi(u).a = A(u) : A^2 = A.$$

$$\forall u \in E : (Id_E - A)^2 = (Id_E - A) \circ (Id_E - A) = Id_E \circ Id_E - Id_E \circ A - A \circ Id_E + A \circ A = Id_E - A - A + A = Id_E - A.$$

A et $Id_E - A$ sont *idempotents*. Ce sont des projecteurs supplémentaires, en ce sens que : $A + (Id_E - A) = Id_E$. ♦

3) $\|(\cdot, \cdot)\|_F$ est bien une norme sur $F : \text{Ker}(\varphi)$ et $[a]$ étant munis de la norme induite par E , la norme $\|(\cdot, \cdot)\|_F$ est une des trois normes usuelles sur un produit cartésien.

D'autre part Λ applique bien E dans F ; $\forall u \in E : \varphi(u).a \in [a]$ pour tout $u \in E$, et $\varphi(u - \varphi(u).a) = \varphi(u) - \varphi(u).\varphi(a) = \varphi(u) - \varphi(u) = 0 \implies u - \varphi(u).a \in \text{Ker}(\varphi)$.

Λ est linéaire et continue car ses deux composantes $Id_E - A$ et A le sont. On peut aussi écrire :

$$\begin{aligned} \forall u \in E : \|\Lambda(u)\|_F &= \|(u - \varphi(u).a, \varphi(u).a)\|_F = \|u - \varphi(u).a\|_E + \|\varphi(u).a\|_E \\ &\leq \|u\| + 2|\varphi(u)| \cdot \|a\| \leq \|u\| + 2\|\varphi\|' \cdot \|u\| \cdot \|a\| = (1 + 2\|\varphi\|' \cdot \|a\|) \cdot \|u\| : \end{aligned}$$

donc Λ est continue.

Λ est injective : $\Lambda(u) = 0 \implies [u - \varphi(u).a = 0 \text{ et } \varphi(u).a = 0] \implies u = 0$.

Λ est surjective : soit $(v, \lambda a) \in F$; on considère $u = v + \lambda a \in E$;
 $\Lambda(u) = (u - \varphi(u).a, \varphi(u).a) = (v + \lambda a - [\varphi(v) + \lambda\varphi(a)].a, [\varphi(v) + \lambda\varphi(a)].a)$
 $= (v + \lambda a - \lambda a, \lambda a) = (v, \lambda a)$. ♦

Λ est donc bijectif et son inverse Λ^{-1} est défini par $\Lambda^{-1}(v, \lambda a) = v + \lambda a$.

Λ^{-1} est continue car l'addition $E \times E \rightarrow E$ restreinte à $\text{Ker}(\varphi) \times [a]$ est continue ; d'ailleurs :
 $\|\Lambda^{-1}(v, \lambda a)\| = \|v + \lambda a\| \leq \|v\| + \|\lambda a\| = \|(v, \lambda a)\|_F$.

Λ est donc un *homéomorphisme linéaire*. ♦

4) $h : [a] \rightarrow \mathbb{R}, \lambda a \mapsto \lambda$ a clairement pour inverse $h^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow [a], \lambda \mapsto \lambda a$ qui est linéaire.

$$|h(\lambda a)| = |\lambda| = \frac{1}{\|a\|} |\lambda| \cdot \|a\| = \frac{1}{\|a\|} \|\lambda a\| \implies \|h\| = \frac{1}{\|a\|}, \text{ et}$$

$$\|h^{-1}(\lambda)\| = \|\lambda a\| = |\lambda| \cdot \|a\| \implies \|h^{-1}\| = \|a\|. \text{ ♦}$$

$\forall u \in E : h \circ p \circ \Lambda(u) = h \circ p(u - \varphi(u).a, \varphi(u).a) = h(\varphi(u).a) = \varphi(u) \implies \varphi = h \circ p \circ \Lambda$. ♦

p n'est autre que la projection naturelle $\text{Ker}(\varphi) \times [a] \rightarrow [a], (v, \lambda a) \mapsto \lambda a$, qui est linéaire continue [Chap. IX], et p transforme tout ouvert en un ouvert [Chap. IX, Prop.2.3]. Λ et h , qui sont des homéomorphismes, transforment également les ouverts en ouverts.

Par conséquent, pour tout ouvert U de $E, \varphi(U) = (h \circ p \circ \Lambda)(U)$ est un ouvert de \mathbb{R} . On peut démontrer ce résultat plus rapidement par d'autres moyens, mais au niveau Licence il n'est pas trivial. ♦

🔗 **Exercice 2.6.**

ψ continue $\iff \exists M$ réel $> 0, \forall u \in E : \|u\| = 1 \implies |\psi(u)| \leq M$, et donc :

ψ discontinue $\iff \forall M$ réel $> 0, \exists u \in E : \|u\| = 1$ et $|\psi(u)| > M$.

En particulier, si ψ est discontinue, en prenant $M = n^2, n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in E : \|u_n\| = 1 \text{ et } |\psi(u_n)| > n^2.$$

Considérons la suite de terme général $v_n = \frac{u_n}{n} : \|v_n\| = \frac{\|u_n\|}{n} = \frac{1}{n}$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 0$.

Mais : $|\psi(u_n)| > n^2 \implies \frac{1}{n} |\psi(u_n)| = |\psi(\frac{u_n}{n})| = |\psi(v_n)| > \frac{1}{n} n^2 = n$: on arrive à une contradiction avec le fait que $(\psi(v_n))$ est une suite bornée. Par conséquent, ψ ne peut pas être discontinue, et elle est donc continue. ♦

Remarque : Si au lieu de $\psi \in E^*$ on prend $A \in L(E, F)$ le résultat est aussi vrai, il suffit de changer les notations.

🔗 **Exercice 2.7.**

$\varphi \in E^*$ est évident (propriétés de l'intégrale).

$$\forall f \in E : |\varphi(f)| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty ; \text{ donc } \varphi \in E' \text{ et } \|\varphi\|' \leq 1.$$

Notant $\mathbf{1}$ la fonction identique à 1 sur $[0, 1] : \|\mathbf{1}\|_\infty = 1$ et $\|\varphi\|' \geq \varphi(\mathbf{1}) = \int_0^1 dt = 1$. Donc :

$$\|\varphi\|' = 1.$$

$\varphi_n \in E^*$ est évident ;

$$\forall f \in E, \forall n \geq 1 : |\varphi_n(f)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(\frac{k}{n})| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \|f\|_\infty = \frac{1}{n} n \|f\|_\infty = \|f\|_\infty ; \text{ donc :}$$

$$\varphi_n \in E' \text{ et } \|\varphi_n\|' \leq 1 ; \|\varphi_n\|' \geq \varphi_n(\mathbf{1}) = \frac{1}{n} n = 1. \text{ Donc : } \|\varphi_n\|' = 1. \text{ ♦}$$

Soit $f \in E$.

$$\begin{aligned} |\psi_n(f)| &= |\varphi(f) - \varphi_n(f)| = \left| \int_0^1 f(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) \right| \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(\frac{k}{n}) dt \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(t) - f(\frac{k}{n})| dt. \end{aligned}$$

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue est uniformément continue [cours D.E.U.G, ou généralisation dans le Chap. XIV sous le nom de Th. de Heine] :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall s, t \in [0, 1] : |s - t| \leq \eta \implies |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Prenons n assez grand pour que $\frac{1}{n} \leq \eta$, alors dans chaque intervalle $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, pour t dans cet intervalle : $|f(t) - f(\frac{k}{n})| \leq \varepsilon$; et, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N , choisi tel que $\frac{1}{N} \leq \eta$, tel que pour tout $n \geq N$ on a :

$$|\psi_n(f)| \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \varepsilon dt = n \cdot \frac{1}{n} \cdot \varepsilon = \varepsilon. \blacklozenge$$

$$\|\psi_n\|' = \|\varphi - \varphi_n\|' \leq \|\varphi\|' + \|\varphi_n\|' = 1 + 1 = 2.$$

Pour $n \geq 1$ fixé, démontrons que $\|\psi_n\|' = 2 = |\psi_n(g)|$ est impossible à réaliser pour $g \in E$, $\|g\|_\infty \leq 1$; par exemple montrons que $\psi_n(g) = 2$ n'est pas possible.

On aurait : $\int_0^1 f(t) dt = 2 + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$. Le premier membre est compris entre -1 et $+1$ ($\|f\|_\infty \leq 1$) tandis que le second est ≥ 1 (toujours parce que $\|f\|_\infty \leq 1$). On ne peut donc qu'avoir : $\int_0^1 f(t) dt = 1$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) = -1$, soit $f = 1$ d'une part, et $f(\frac{k}{n}) = -1$ pour tout $k = 1, \dots, n$, d'autre part : les deux conditions sont incompatibles !

Donc la norme $\|\psi_n\|' = 2$ ne peut pas être effectivement atteinte sur la boule unité de E . \blacklozenge

Il nous faut prouver qu'on peut trouver $g_{n,\varepsilon} \in E$, $\varepsilon > 0$, $\|g_{n,\varepsilon}\|_\infty = 1$, telle que $g_{n,\varepsilon}(\frac{k}{n}) = -1$, et telle que $g_{n,\varepsilon}(t) = +1$ partout sauf sur une réunion finie d'intervalles « petits ».

On aura alors :

$$\psi(g_{n,\varepsilon}) = \varphi(g_{n,\varepsilon}) - \varphi_n(g_{n,\varepsilon}) = \int_0^1 g_{n,\varepsilon}(t) dt - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (-1) = 1 + \int_0^1 g_{n,\varepsilon}(t) dt,$$

avec $\int_0^1 g_{n,\varepsilon}(t) dt < 1$ mais tendant vers 1 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

On aura ainsi $\|\psi_n\|' \geq \psi_n(g_{n,\varepsilon}) \geq 2 - \varepsilon$ pour tout ε , et $\|\psi_n\|' = 2$.

On prend (faire une figure !) pour ε très petit devant $\frac{1}{n}$, et pour $k = 0, 1, \dots, n-1$:

$g_{n,\varepsilon}(\frac{k}{n}) = 0$, $g_{n,\varepsilon}(\frac{k}{n} + \varepsilon) = 0$, $g_{n,\varepsilon}(t) = 1$ si $t \in [\frac{k}{n} + 2\varepsilon, \frac{k+1}{n} - 2\varepsilon]$, $g_{n,\varepsilon}(\frac{k+1}{n} - \varepsilon) = 0$, $g_{n,\varepsilon}$ continue sur $[0, 1]$, $g_{n,\varepsilon}$ affine par morceaux.

$$\int_0^1 g_{n,\varepsilon}(t) dt = n \times \text{aire d'un trapèze} - n \times \text{aire d'un triangle} \\ = n \cdot \frac{1}{2} [(\frac{1}{n} - 2\varepsilon) + (\frac{1}{n} - 4\varepsilon)] - n \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon = 1 - 4n\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1. \blacklozenge$$

Exercice 3.1.

Soit $b : E \times F \rightarrow G$ une application bilinéaire continue non nulle.

Soit $(u, v) \in E \times F$ tel que $b(u, v) \neq 0$; $u \neq 0$ et $v \neq 0$, donc.

Considérons les deux suites :

$(u_n, v_n) = ((n + \frac{1}{n}).u, (n + \frac{1}{n}).v)$ et $(x_n, y_n) = (n.u, n.v)$, pour $n \geq 1$. On a :

$$\|(u_n, v_n) - (x_n, y_n)\|_{E \times F} = \|(u_n - x_n, v_n - y_n)\|_{E \times F} = \max\{\|u_n - x_n\|_E, \|v_n - y_n\|_F\},$$

et : $\|u_n - x_n\|_E = \|(n + \frac{1}{n}).u - n.u\|_E = \|\frac{1}{n}u\|_E = \frac{1}{n}\|u\|_E$; de même :

$$\|v_n - y_n\|_F = \frac{1}{n}\|v\|_F.$$

D'où : $\|(u_n, v_n) - (x_n, y_n)\|_{E \times F} = \frac{1}{n} \max\{\|u\|_E, \|v\|_F\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

D'autre part :

$$\|b(u_n, v_n) - b(x_n, y_n)\|_G = \|b((n + \frac{1}{n}).u, (n + \frac{1}{n}).v) - b(n.u, n.v)\|_G \\ = \|(n + \frac{1}{n})^2 b(u, v) - n^2.b(u, v)\|_G = (2 + \frac{1}{n^2}).\|b(u, v)\|_G \\ \rightarrow 2.\|b(u, v)\|_G \neq 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty, \text{ d'où le résultat.}$$

Nota : On n'a fait qu'adapter la démonstration classique de $t \mapsto t^2, \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non uniformément continue sur \mathbb{R} . \blacklozenge

Exercice 3.2.

Soit $u_0 = (\xi_n^0)$ fixé dans c_{00} . Notons $\varphi(v) = f(u_0, v)$: il est clair que φ est une forme linéaire sur E .

Puisque f est symétrique en u et v , pour $v_0 \in E$ fixé, $\psi(u) = f(u, v_0)$ est aussi une forme linéaire sur E . Donc f est une forme bilinéaire sur E .

$$\forall v = (\eta_n) \in E : |\varphi(v)| = |f(u_0, v)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^0 \cdot \eta_n \right| \leq \max_{n \in \mathbb{N}^*} |\eta_n| \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^0| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^0| \right) \cdot \|v\|_\infty :$$

donc φ est continue de norme $\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^0|$ [notez bien que toutes ces sommes sont en fait finies !].

Même chose pour ψ bien sûr.

Mais f n'est pas continue sur $E \times E$. Considérons en effet la suite d'éléments de E suivante : pour $k \in \mathbb{N}^*$: $u_k = (\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, 0, \dots)$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$: $u_k \in c_{00}$, et $\|u_k\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$; donc : $u_k \in B(0, 1]$; [$u_k \in S(0, 1)$ en fait].

$\forall k \in \mathbb{N}^*$: $f(u_k, u_k) = \sum_{n=1}^k \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^k \frac{1}{n} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \infty$ (série harmonique !) :

f n'est donc pas bornée sur $B(0, 1] \times B(0, 1]$, et n'est donc pas continue sur $E \times E$ d'après (3.6) de la Prop. 3.1. ♦

🔗 Exercice 3.3.

Posons : $b(u, v) = (Au|v)$; b est [évident par bilinéarité de $(\cdot|\cdot)$, cf. Chap. II, Déf. 5.1, et linéarité de A : écrivez, sans oublier les \forall] une forme bilinéaire sur E ;

b est symétrique et positive (*loc. cit.*). b n'est pas séparée (= définie), mais cela n'empêche pas qu'on puisse lui appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz [Chap. II, (5.7)] :

$\forall u, v \in E$: $[b(u, v)]^2 \leq b(u, u) \cdot b(v, v)$, soit : $[(Au|v)]^2 \leq (Au|u) \cdot (Av|v)$.

Il suffit de faire $v := Au$ pour avoir l'inégalité cherchée :

$$[(Au|Au)]^2 = (\|Au\|^2)^2 = \|Au\|^4 \leq (Au|u) \cdot (A(Au)|Au) = (Au|u) \cdot (A^2u|Au). \quad \blacklozenge$$

Si A est continu on a : $(A(Au)|Au) \leq \|A(Au)\| \cdot \|Au\| \leq \|A\| \cdot \|Au\|^2$ par Cauchy-Schwarz et l'inégalité fondamentale (1.13), d'où : $\|Au\|^4 \leq (Au|u) \cdot \|A\| \cdot \|Au\|^2$, d'où $\|Au\|^2 \leq (Au|u) \cdot \|A\|$ si $Au \neq 0$ (on divise), mais l'inégalité est trivialement vérifiée si $Au = 0$, d'où le résultat cherché. ♦

On déduit de cette inégalité que :

$\sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\|^2 = (\sup_{\|u\| \leq 1} \|Au\|)^2$ [justifiez !] = $\|A\|^2 \leq \sup_{\|u\| \leq 1} (Au|u) \cdot \|A\|$, ce qui implique : $\|A\| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} (Au|u)$, si $A \neq 0$, inégalité vraie aussi si $A = 0$.

L'inégalité inverse est toujours vraie, sans propriété spéciale pour A continu :

$$(Au|u) \leq \|Au\| \cdot \|u\| \leq \|A\| \cdot \|u\|^2 \implies \sup_{\|u\| \leq 1} (Au|u) \leq \|A\| \cdot \sup_{\|u\| \leq 1} \|u\|^2 = \|A\|. \quad \blacklozenge$$

ANNEXE

RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Soient E et F des espaces vectoriels sur le même corps des scalaires \mathbb{K} qui sera soit \mathbb{R} soit \mathbb{C} . On rappelle qu'une application $A : E \rightarrow F$ est dite \mathbb{K} -linéaire (on ne note pas ce \mathbb{K} s'il n'y a pas d'ambiguïté) si elle vérifie :

(A 1) $\forall u \in E, \forall v \in E : A(u + v) = A(u) + A(v)$ [additivité], et :

(A 2) $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : A(\lambda.u) = \lambda.A(u)$ [homogénéité].

L'ensemble de toutes les applications \mathbb{K} -linéaires $A : E \rightarrow F$ est noté $L(E, F)$. On munit $L(E, F)$ d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} en y définissant les deux lois de composition suivantes :

(A 3) [addition] $\forall u \in E : (A + B)(u) = A(u) + B(u)$, et :

(A 4) [multiplication par les scalaires] $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda.A)(u) = \lambda.A(u)$

Soit G un autre espace vectoriel sur \mathbb{K} . Si $A \in L(E, F)$ et $B \in L(F, G)$, on sait définir la composée, notée $B \circ A$, par :

(A 5) $\forall u \in E : (B \circ A)(u) = B[A(u)]$. On a : $B \circ A \in L(E, G)$.

Muni des lois $+$ et \circ , l'espace vectoriel $L(E, E)$, qu'on note simplement $L(E)$, est un anneau. C'est un anneau unitaire d'unité Id_E (identité sur E , $Id_E(u) = u$ pour tout $u \in E$). Il est non commutatif si $\dim(E) > 1$.

Dans $L(E)$ on a (compatibilité de la multiplication par les scalaires avec la loi \circ) :

(A 6) $\forall A, B \in L(E), \forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda.B) \circ A = B \circ (\lambda.A) = \lambda.(B \circ A)$,

ce qui confère à $L(E)$, espace vectoriel et anneau plus (A6), une nouvelle structure algébrique, appelée algèbre sur \mathbb{K} .

On notera $\text{Isom}(E, F)$ l'ensemble, éventuellement vide [penser à $\dim(E) = m$, $\dim(F) = n$, avec $m \neq n$], des applications linéaires et bijectives de E sur F .

$\text{Isom}(E, E)$ est souvent noté $GL(E)$: c'est un groupe (le groupe linéaire de E) pour la loi \circ , d'élément neutre Id_E .

L'inverse A^{-1} de $A \in \text{Isom}(E, F)$ est une application linéaire : $A^{-1} \in L(F, E)$, et en fait : $A^{-1} \in \text{Isom}(F, E)$.

$A \in L(E, F)$ appartient à $\text{Isom}(E, F)$ si et seulement si il existe $B : F \rightarrow E$ telle que : $A \circ B = Id_F$ et $B \circ A = Id_E$.

Rappelons qu'étant donnée une application linéaire $A \in L(E, F)$ on définit :

(A 7) son **noyau** : $\text{Ker}(A) = A^{-1}(\{0\}) = \{u \in E / A(u) = 0\}$, qui est un sous-espace vectoriel de E ,

(A 8) son **image** : $\text{Im}(A) = A(E) = \{v \in F / \exists u \in E : A(u) = v\}$, qui est un sous-espace vectoriel de F .

(A 9) A est injective si et seulement si $\text{Ker}(A) = \{0\}$, i.e. ssi $[A(u) = 0 \implies u = 0]$.

(A 10) L'espace vectoriel $L(E, \mathbb{K})$ qui est noté E^* est appelé le **dual** (algébrique) de E : ses éléments sont les **formes linéaires** sur E [on dit aussi *covecteurs*].

On définit aussi le **bidual** de E : $E^{**} = (E^*)^*$.

L'application $\chi : E \rightarrow E^{**}$ qui à $u \in E$ fait correspondre $\chi(u)$ définie par $[\chi(u)](\varphi) = \varphi(u)$ pour tout $\varphi \in E^*$, est linéaire injective, on l'appelle l'**injection canonique** de E dans E^{**} .

χ est surjective $\iff \dim(E) < \infty$: dans ce cas on identifie E et E^{**} par l'isomorphisme χ .

(A 11) L'espace vectoriel $L(\mathbb{K}, E)$ [dont les éléments sont appelés *contravecteurs*] est identifié à E en faisant correspondre à $a \in E$ l'application $\mathbb{K} \rightarrow E, \lambda \mapsto \lambda.a$. Cette correspondance est un isomorphisme d'e.v. On identifie donc les contravecteurs et les vecteurs.

(A 12) Pour $A \in L(E, F)$, on peut considérer $B \in L(F^*, E^*)$ définie pour $\psi \in F^*$ par $B(\psi) = \psi \circ A$;

B est appelée la *transposée* de A et est notée tA . On a les formules :

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB, {}^t(\lambda A) = \lambda.{}^tA, {}^t(B \circ A) = {}^tA \circ {}^tB, \text{ etc.}$$

(A 13) On appelle *hyperplan* d'un espace vectoriel E un sous-espace vectoriel H de E tel que pour tout sous-espace vectoriel F de E contenant strictement H on a $F = E$.

(A 14) H sous-espace vectoriel de E est un hyperplan si et seulement si il existe $a \in E, a \neq 0$ tel que $E = H \oplus [a]$ ($[a] = \{\lambda.a \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ est l'espace vectoriel engendré par a ; $E = F \oplus G$ signifie que tout $u \in E$ s'écrit d'une manière unique $u = v + w$, où $v \in F, w \in G$).

On a l'important résultat suivant :

Proposition :

Soit $\varphi \in E^*, \varphi \neq 0$: $\text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan de E . Réciproquement, si H est un hyperplan de E , il existe $\varphi \in E^*, \varphi \neq 0$, telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$. On dit que $\varphi(u) = 0$ est une *équation* de H .

Si $\varphi(u) = 0$ est une équation de H , toute autre équation de H s'écrit $(\lambda.\varphi)(u) = 0$ où $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$.

Démonstration :

Soit $\varphi \in E^*, \varphi \neq 0$, posons $H = \text{Ker}(\varphi)$. H est un sous-espace vectoriel de E , par (A 7). Puisque $\varphi \neq 0$, soit $a \in E$ tel que $\varphi(a) \neq 0$, bien sûr $a \neq 0$. On a : $E = H \oplus [a]$. En effet, soit $u \in E$ et considérons $v = u - \frac{\varphi(u)}{\varphi(a)}a$: $\varphi(v) = \varphi(u) - \frac{\varphi(u)}{\varphi(a)}\varphi(a) = 0$, et donc $v \in \text{Ker}(\varphi)$. On peut donc écrire : $u = v + \frac{\varphi(u)}{\varphi(a)}a$, où $v \in \text{Ker}(\varphi)$ et $\frac{\varphi(u)}{\varphi(a)}a \in [a]$. La décomposition est unique : si $u = v + \lambda.a = w + \mu.a$ avec $v, w \in \text{Ker}(\varphi)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a : $\varphi(u) = \varphi(v) + \lambda.\varphi(a) = \varphi(w) + \mu.\varphi(a) \implies \lambda.\varphi(a) = \mu.\varphi(a)$ avec $\varphi(a) \neq 0 \implies \lambda = \mu$; ensuite : $v + \lambda.a = w + \lambda.a \implies v = w$. ♦

Réciproquement, soit H un hyperplan de E . D'après (A 13) : $E = H \oplus [a]$; $u \in E$ s'écrit de manière unique $u = v + \lambda.a$, où $v \in H$; posons $\varphi(u) = \lambda$. φ est linéaire car si $u = v + \lambda.a$ et $u' = v' + \lambda'.a$: $\varphi(u + u') = \lambda + \lambda' = \varphi(u) + \varphi(u')$, et $\varphi(\mu.u) = \lambda.\mu = \mu.\varphi(u)$, en écrivant que $u + u' = v + v' + (\lambda + \lambda').a$ et $\mu.u = \mu.v + \lambda\mu.a$. Manifestement : $\text{Ker}(\varphi) = H$. ♦

Si $\varphi(u) = 0$ et $\psi(u) = 0$ sont deux équations de H , cela signifie que l'on a : $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$, et cela est équivalent à : ψ est proportionnelle à φ (résultat connu, facile à prouver). ♦

Fin du Chapitre X

CHAPITRE XI

SUITES DE CAUCHY et ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

Espaces de Banach, espaces de Hilbert

Introduction

Nous abordons dans ce chapitre XI un sujet extrêmement important qui nous occupera très souvent dans la suite de ce cours (chap. XII, XV, XVI, XVII, XVIII, XIX mais aussi XIII et XIV) : les *suites de Cauchy* et les *espaces métriques complets*, à savoir les espaces dans lesquels *toute suite de Cauchy est convergente*.

Les *espaces de Banach* sont les e.v.n. complets, et les *espaces de Hilbert* sont les espaces préhilbertiens complets.

Il faut bien se rendre compte que si l'on ne dispose pas des notions de suite de Cauchy et d'espace métrique complet, on ne peut jamais dire qu'une suite est convergente sans connaître explicitement sa limite : *cela rend impossible toute considération théorique sur les suites !*

Il est donc inutile d'insister sur l'intérêt de ces notions ... et du présent chapitre pour la suite du cours.

Il est à remarquer que si le chapitre est un peu lourd, il n'est pas pour autant difficile : aucune démonstration n'est « parachutée », et vous pouvez d'ailleurs considérer ces démonstrations comme autant d'exercices.

Bien sûr, il faut avoir en tête des exemples d'espaces de Banach, autres que \mathbb{R}^n , et des exemples d'espaces de Hilbert (et aussi un exemple d'e.v.n. non complet).

Lorsqu'on demande à un oral des exemples d'espaces de Banach, on obtient parfois une réponse du genre suivant : « Euh ... \mathbb{R} , euh ... \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , ... euh ... \mathbb{R}^n , ..., euh ... \mathbb{C} , \mathbb{C}^2 , euh ... \mathbb{C}^n ... ». On peut dire que cet oral démarre mal !

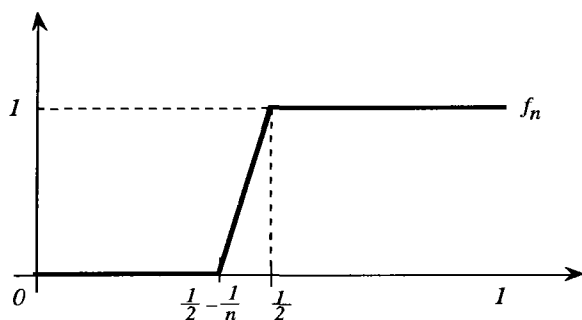
Il n'est pas recommandé non plus d'essayer d'épater un examinateur en donnant comme premier exemple d'espace de Banach le dual de ℓ^∞ (ou, pire, de L^∞) ! L'examineur s'empressera de demander des détails ...

Ne parler que de ce qu'on connaît bien, en toute circonstance !

✍ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.4, 1.5, 2.1, 2.2, 2.4, 2.5, 3.1.

✍ Exercices complémentaires : 1.3, 2.3, 2.6, 2.7, 3.2.

BON COURAGE !



$$\begin{cases} f_n(t) := 0 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ f_n(t) := nt + (1 - \frac{1}{2}n) & \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_n(t) := 1 & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

La suite (f_n) est de Cauchy dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme

$\|g\|_1 = \int_0^1 |g(t)| dt$, mais n'est pas convergente dans cet espace.

CHAPITRE XI

SUITES DE CAUCHY ET ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

Espaces de Banach, espaces de Hilbert

1. SUITES DE CAUCHY

Définition 1.1.

Soit (E, d) un espace métrique.

Soit $(u_n)_{n \in S}$ une suite d'éléments de E ($S \subset \mathbb{N}$, S infini). On dit que $(u_n)_{n \in S}$ est une **suite de Cauchy** dans (E, d) si :

$$(1.1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall p \in S, \forall q \in S : p \geq N \text{ et } q \geq N \implies d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.$$

Commentaires :

1) Au lieu de dire qu'une suite est de Cauchy, on dit aussi que la suite *vérifie le critère de Cauchy*. On trouve aussi l'expression "suite fondamentale".

2) L'expression (1.1) signifie que : $\lim_{p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty, p \in S, q \in S} d(u_p, u_q) = 0$ [suite double de réels ≥ 0 convergente de limite 0].

3) Si l'on pose pour tout $n \in S : A_n := \{u_p / p \in S, p \geq n\}$, on a :

$$(1.2) \quad (u_n)_{n \in S} \text{ est une suite de Cauchy} \iff \lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (\text{diam}(A_n)) = 0.$$

où, cf. Chap. I (3.18) : $\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y) / x \in X, y \in X\}$.

4) Quand $S = \mathbb{N}$ (ou \mathbb{N}^*), on écrit souvent le critère de Cauchy :

$$(1.3) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} : n \geq N \implies d(u_{n+p}, u_n) \leq \varepsilon.$$

5) Les inégalités larges peuvent être remplacées par des strictes, sauf pour $\varepsilon > 0$.

6) Si d et δ sont des distances équivalentes [Chap. I (2.1)] sur E : les suites de Cauchy de (E, d) et de (E, δ) sont les mêmes.

7) Soit (F, δ) un sous-espace métrique de (E, d) [$F \subset E, \delta = d|_{F \times F}$] et soit $(u_n)_{n \in S}$ une suite de points de F : (u_n) est de Cauchy dans (E, d) si et seulement elle est de Cauchy dans (F, δ) .

Exemple 1.1 : Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ normé par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

La suite (f_n) , $n \geq 2$, définie ainsi :

$$f_n(t) := 0 \text{ pour } t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}], f_n(t) := 1 \text{ pour } t \in [\frac{1}{2}, 1],$$

$$f_n(t) := nt + (1 - \frac{1}{2}n) \text{ pour } t \in [\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}] \text{ (dessinez ! Voir p. 234),}$$

est une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

$$\text{En effet : } \|f_{n+p} - f_n\|_1 = \int_0^1 |f_{n+p}(t) - f_n(t)| dt = \int_0^1 (f_n(t) - f_{n+p}(t)) dt$$

(car $f_{n+p}(t) \leq f_n(t)$ sur $[0, 1]$) $= \int_0^1 f_n(t) dt - \int_0^1 f_{n+p}(t) dt = \text{aire du triangle de sommets } (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, 0), (\frac{1}{2} - \frac{1}{n+p}, 0), (\frac{1}{2}, 1) :$

$\|f_{n+p} - f_n\|_1 = \frac{1}{2} \cdot [(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+p}) - (\frac{1}{2} - \frac{1}{n})] \cdot 1 = \frac{1}{2} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}) \leq \frac{1}{2n} \leq \varepsilon$, pour tout $n \geq N = \lceil \frac{1}{2\varepsilon} \rceil + 1$ (où $[x]$ désigne la partie entière du réel x), et pour tout $p \in \mathbb{N}$.

☞ **Exercice 1.1.** (assez facile) Démontrez que $(f_n)_{n \geq 2}$ n'est pas convergente dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Proposition 1.1. (PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES SOUVENT UTILES)

Soit (E, d) un espace métrique, et soit $(u_n)_{n \in S}$ une suite d'éléments de E . On a :

- (i) si $(u_n)_{n \in S}$ est une suite de Cauchy, il en est de même de toute suite extraite $(u_n)_{n \in T}$ [$T \subset S$, T infini],
- (ii) si $(u_n)_{n \in S}$ est une suite convergente dans (E, d) : $(u_n)_{n \in S}$ est une suite de Cauchy,
- (iii) si $(u_n)_{n \in S}$ est une suite de Cauchy dans (E, d) : $(u_n)_{n \in S}$ est une suite bornée dans (E, d) ,
- (iv) si $(u_n)_{n \in S}$ est une suite de Cauchy et si $(u_n)_{n \in S}$ admet une valeur d'adhérence $u \in E$ [i.e. $\exists T \subset S$, T infini : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (u_n) = u$] : $(u_n)_{n \in S}$ est convergente dans (E, d) et on a : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n) = u$.

Commentaire : (ii) est souvent utilisée sous la forme contraposée [$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P)$] : une suite qui n'est pas de Cauchy est divergente.

Démonstration : (i) est une simple constatation. ♦

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies d(u_n, u) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ et donc $\forall p \in S, \forall q \in S : p \geq N$ et $q \geq N \implies d(u_p, u_q) \leq d(u_p, u) + d(u, u_q) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ♦

(iii) Pour $\varepsilon = 1, \exists N \in S, \forall p \in S, \forall q \in S : p \geq N$ et $q \geq N \implies d(u_p, u_q) \leq 1$; fixons $p = N$, pour tout $q \in S$ tel que $q \geq N$ on a : $d(u_N, u_q) \leq 1$, soit : $u_q \in B(u_N, 1]$; donc : $\{u_n / n \in S\} \subset \{u_1, \dots, u_{N-1}\} \cup B(u_N, 1]$; un ensemble fini est borné et $\text{diam } B(u_N, 1] \leq 2$, ensuite la réunion de deux bornés est bornée. ♦

(iv) Ecrivons nos hypothèses :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in T, \forall n \in T : n \geq N_1 \implies d(u_n, u) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in S, \forall p \in S, \forall q \in S : p \geq N_2 \text{ et } q \geq N_2 \implies d(u_p, u_q) \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

et on veut : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies d(u_n, u) \leq \varepsilon$.

Prenons : $N = \max\{N_1, N_2\}$; $T \subset S$ et donc $N \in S$. $\forall n \in S, n \geq N$, on a : $\exists m = m(n) \in T$ avec $m \geq n$ car T est infini, d'où :

$$d(u_n, u) \leq d(u_n, u_m) + d(u_m, u) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ car } n, m \geq N \geq N_2 \implies d(u_n, u_m) \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } m \in T, m \geq n \geq N \geq N_1 \implies d(u_m, u) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \blacklozenge$$

Exemples 1.2. En général une suite de Cauchy dans un espace métrique n'est pas convergente dans cet espace.

a) $E =]0, 1]$ muni de la distance de \mathbb{R} usuel. $s_n = \frac{1}{n}, n \geq 1$, définit une suite de Cauchy de E : en effet (s_n) converge vers 0 dans \mathbb{R} , donc y est de Cauchy [Prop. 1.1 (ii)], et donc est de Cauchy dans E [Commentaire 7)]. Cette suite ne converge pas dans E . ♦

b) $E = \mathbb{Q}$ muni de la distance de \mathbb{R} usuel. La suite $t_1 = 1, t_2 = 1,4, t_3 = 1,41, t_4 = 1,414, t_5 = 1,4142, \dots$ des approximations décimales par défaut de $\sqrt{2}$ est une suite de Cauchy dans E (car convergente dans \mathbb{R} , vers $\sqrt{2}$), mais elle ne converge pas dans E . ♦

☞ **Exercice 1.2.** (très facile) Démontrez que $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

c) On démontre (faites-le à titre d'exercice !) que la suite définie par récurrence par $s_1 = 1, s_{n+1} = \frac{1}{2}(s_n + \frac{2}{s_n})$ est une suite convergente dans \mathbb{R} , vers $\sqrt{2}$. $s_n \in \mathbb{Q}$ pour tout n , (s_n) est de Cauchy dans \mathbb{Q} , mais elle ne converge pas dans \mathbb{Q} . ♦

d) La suite $r_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \geq 1$, est une suite de Cauchy de rationnels non convergente dans \mathbb{Q} ; sa limite dans \mathbb{R} est e , la base des logarithmes népériens. ♦

☞ **Exercice 1.3.** (classique et facile) A l'aide des deux suites adjacentes $s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $t_n = s_n + \frac{1}{n \cdot n!}$, démontrez que $e \notin \mathbb{Q}$.

Exemple 1.3.

Soit $E = \ell^2(\mathbb{R}) = \{u = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) / \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n)^2 < \infty, \xi_n \in \mathbb{R} \text{ pour tout } n\}$
 espace vectoriel normé par : $\|u\| = (\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n)^2)^{1/2}$.

Posons : $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ [1 à la n -ième place, 0 ailleurs]. La suite (e_n) n'est pas de Cauchy, et on ne peut en extraire aucune suite de Cauchy. En effet : $\forall p, q \in \mathbb{N}^*, p \neq q : \|e_p - e_q\|^2 = 1 + 1 = 2$, soit : $\|e_p - e_q\| = \sqrt{2}$. On remarquera que la suite (e_n) est bornée : $\|e_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En fait les e_n appartiennent à $S(0, 1)$ qui est fermé et borné. Cet exemple, ainsi que le suivant nous seront précieux dans la suite du cours. ♦

Exemple 1.4. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_{\infty} = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)|$. La suite (f_n) définie par : $f_n(t) := 0$ pour $t \in [0, \frac{1}{2n+2}] \cup [\frac{1}{2n}, 1]$, $f_n(\frac{1}{2n+1}) := 1$, f_n continue sur $[0, 1]$ et affine sur $[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}]$ et $[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$ (dessinez !) appartient à la boule fermée unité de E . Aucune suite extraite de (f_n) n'est une suite de Cauchy.

☞ **Exercice 1.4.** (facile) Démontrez l'assertion ci-dessus.

☞ **Exercice 1.5.** (facile) Soit $F = \mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels, restreintes à $[0, 1]$. $\|P\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |P(t)|$ sera la norme de F . Démontrez que la suite $(P_n)_{n \geq 1}$ donnée par $P_n(t) = (1 + \frac{t}{n})^n$ est une suite de Cauchy dans F , non convergente dans F .

Remarque :

La suite $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ (série harmonique) n'est pas de Cauchy : $s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

Mais $\forall k$ entier ≥ 1 , on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+k} - s_n) = 0$ [en particulier : $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = 0$].

En effet : $s_{n+k} - s_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+k} \leq k \times \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ [$n \rightarrow \infty$].

☞ $\lim_{n \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty} d(u_{n+k}, u_n) = 0$ (dans (1.3)) signifie que n et k tendent vers ∞ indépendamment l'un de l'autre !

2. ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

Espaces de Banach, espaces de Hilbert

Si dans un espace métrique (E, d) on sait que *toutes* les suites de Cauchy sont convergentes, c'est extrêmement intéressant : en effet, on pourra dans un tel espace démontrer qu'une suite converge *sans connaître* (ou « deviner ») *la limite d'avance*. Il suffira de démontrer que la suite est de Cauchy, ce qui ne présuppose rien en ce qui concerne la limite.

C'est FONDAMENTAL : comment démontrer directement, par exemple, que la suite de réels $s_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{m^2}$ est convergente dans \mathbb{R} ? Certainement pas en devinant que sa limite est $\frac{\pi^2}{6}$! Comment procéder avec : $\sum_{m=1}^n \frac{1}{m^3}$ dont on sait seulement, depuis peu de temps d'ailleurs, que la limite n'est pas rationnelle... ?

Bien sûr, de tels espaces n'auront un intérêt que s'il y en a « beaucoup » – d'une part – et si l'on dispose de méthodes indirectes assez simples pour prouver qu'un espace métrique donné possède cette propriété – d'autre part. C'est à ces questions que nous allons nous intéresser dans ce qui suit. Mais, d'abord, nous allons donner un nom à ces espaces particuliers mais très importants.

Définition 2.1.

- (i) Un espace métrique (E, d) sera dit **complet** si toute suite de Cauchy d'éléments de E est convergente dans (E, d) .
- (ii) Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien \mathbb{C} , qui est complet pour la distance associée à sa norme ⁽¹⁾ est appelé un **espace de Banach**.
- (iii) Un espace préhilbertien $(E, (\cdot|\cdot))$, réel ou complexe, qui est complet pour la distance associée à son produit scalaire ⁽²⁾ est appelé un **espace de Hilbert**.

Nota : Banach se prononce « banak », ou (le plus souvent) « banarh » (ch allemand), mais jamais « banach(e) ».

Nota : Dans des ouvrages assez anciens, on trouve parfois l'expression « l'espace de Hilbert », comme s'il n'y en avait qu'un seul : c'est de l'espace $(\ell^2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ qu'il s'agit. L'explication de cette « tendance unitaire » sera donnée dans les chapitres XVIII et XIX.

Définition 2.2.

Une partie F d'un espace métrique (E, d) est dite **complète** si le sous-espace métrique $(F, d|_{F \times F})$ est un espace métrique complet.

Proposition 2.1.

|| \mathbb{R} , muni de la distance usuelle $d(s, t) = |s - t|$, est un espace métrique complet.

Commentaire : On dit simplement « \mathbb{R} est complet », en sous-entendant qu'il s'agit de la distance usuelle. Bien que \mathbb{R} soit effectivement un espace de Banach, et même un espace de Hilbert réel, on ne l'exprime jamais comme cela (pédant !).

Démonstration :

Soit $(s_n)_{n \in S}$ une suite de Cauchy de réels : elle est bornée d'après (iii) de la Prop. 1.1. Donc, d'après le Th. de Bolzano-Weierstraß [cours D.E.U.G. ou Chap. IV], il existe une suite extraite $(s_n)_{n \in T}$, $T \subset S$, T infini, qui converge vers $s \in \mathbb{R}$. D'après (iv) de la Prop. 1.1 : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (s_n) = s$. ♦

Remarque : La démonstration ci-dessus n'en est vraiment une que si l'on part d'une axiomatique de \mathbb{R} bien précise – ce que nous n'avons pas fait [cf. Annexe Chap. XV]. Cela n'a aucune importance, car nous démontrerons plus tard [Chap. XV] que \mathbb{R} est justement obtenu en ajoutant des points (ce seront les irrationnels) à \mathbb{Q} jusqu'à avoir un espace métrique complet.

Exemples 2.1.

a) Les sous-espaces métriques $F =]0, 1]$ et $G = \mathbb{Q}$ de \mathbb{R} usuel ne sont pas complets : voir Exemples 1.2.

b) L'e.v.n. $E = C([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas complet : ce n'est pas un espace de Banach. Voir l'Exercice 1.1.

⁽¹⁾ i.e. $d(u, v) = \|u - v\|$.

⁽²⁾ i.e. $d(u, v) = \sqrt{(u - v|u - v)}$.

c) L'e.v.n. $F = \mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas complet, ce n'est pas un espace de Banach. Voir l'Exercice 1.5.

On peut prouver cela sans faire appel à un exemple précis : considérons F comme un sous-espace métrique de $E = C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$; soit g une fonction qui n'est pas polynomiale ; d'après le Th. de Weierstraß [Chap. IV], il existe une suite (P_n) d'éléments de F telle que $\|g - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. (P_n) est une suite de Cauchy non convergente dans F .

Proposition 2.2.

Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_N, d_N)$ un nombre fini d'espaces métriques, et soit $E = \prod_{i=1}^N E_i = E_1 \times \dots \times E_N$ leur produit cartésien muni de la distance :

$$d_\infty((u^1, \dots, u^N), (v^1, \dots, v^N)) = \max\{d_1(u^1, v^1), \dots, d_N(u^N, v^N)\}.$$

(i) Une suite $(u_n)_{n \in S}$ dans E est de Cauchy dans (E, d_∞) si et seulement si les N suites composantes $(u_n^i)_{n \in S}$, $1 \leq i \leq N$, sont de Cauchy dans (E_i, d_i) .

(ii) (E, d_∞) est complet si et seulement si les (E_i, d_i) sont complets pour tout i , $1 \leq i \leq N$.

Démonstration :

(i) Soit $(u_n)_{n \in S}$, $u_n = (u_n^1, \dots, u_n^N)$, une suite de points de $E = \prod_{i=1}^N E_i$. Écrivons que c'est une suite de Cauchy pour d_∞ : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in S, \forall p \in S, \forall q \in S : p \geq n_0$ et $q \geq n_0 \implies d_\infty(u_p, u_q) = \max_{1 \leq i \leq N} d_i(u_p^i, u_q^i) \leq \varepsilon$ et cela implique que $d_i(u_p^i, u_q^i) \leq \varepsilon$ pour tout i fixé entre 1 et N , donc que les $(u_n^i)_{n \in S}$ sont toutes de Cauchy. Réciproquement, on écrit $\forall \varepsilon > 0, \exists n_i \in S, \dots$ et on considère $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_N\}$. (ii) est évident d'après (i). ♦

Remarque 2.1.

Il est clair que si (E, d) est un espace complet, et si δ est une distance sur E équivalente à d [Chap. I, Déf. 2.2] : (E, δ) est aussi complet. Détaillez !

On a aussi : deux espaces métriques *isométriques* [Chap. I, Déf.2.3] sont simultanément complets ou non complets.

Corollaire 2.1.

(\mathbb{R}^n, d_∞) [soit $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$] est complet. (\mathbb{R}^n, d_p) [ou $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$] est complet pour toutes les distances (ou les normes) de Hölder, $1 \leq p \leq \infty$.
En particulier, \mathbb{R}^n euclidien ($p = 2$) est complet. \mathbb{C} isométrique à \mathbb{R}^2 euclidien est complet, et donc \mathbb{C}^n muni d'une distance höldérienne est complet.

☞ **Exercice 2.1.** (assez facile) On munit $E = [0, 1]$ de la distance (vérifiez que c'est bien une distance) suivante : $\delta(s, t) = \left| \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-t} \right|$. (E, δ) est-il ou non complet ?

☞ **Exercice 2.2.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique, et soit δ la distance sur E donnée par $\delta(u, v) = \frac{d(u, v)}{1 + d(u, v)}$ [Chap. I, Exercice 2.2]. Démontrez que (E, d) complet équivaut à (E, δ) complet.

☞ **Exercice 2.3.** (assez facile) On considère l'espace métrique (E, d) défini dans l'Exercice 2.4 du Chapitre I. Démontrez que si tous les espaces métriques (E_i, d_i) sont complets, il en est de même de (E, d) .

Exemple 2.2 : Soit E un ensemble arbitraire muni de la distance discrète $\delta(u, v) = 1$ pour tous $u \neq v$. $\delta(u_p, u_q)$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1. Donc, pour qu'une

suite soit de Cauchy dans cet espace, il faut et il suffit qu'elle soit stationnaire, auquel cas elle est convergente. Donc (E, δ) est complet (mais ça ne servira pas à grand chose, puisqu'il n'y a pratiquement pas de suites de Cauchy ...).

Théorème 2.1. (IMPORTANT)

- (i) Soit (E, d) un espace métrique quelconque, et soit F une partie **complète** de (E, d) [Déf.2.2]. F est une partie **fermée** de E .
- (ii) Soit (E, d) un espace métrique **complet** : toute partie **fermée** F de E est **complète**.

Démonstration :

(i) Soit $u \in \text{adh}(F)$: il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de F telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$ dans (E, d) . D'après (ii) de la Prop.1.1, (u_n) est une suite de Cauchy dans $(F, d|_{F \times F})$ qui est complet : donc il existe $v \in F$ tel que (u_n) converge dans F vers v . D'après l'unicité de la limite d'une suite on a $v = u$, et donc $u \in F$. Par conséquent $\text{adh}(F) \subset F$ et F est fermée dans E . ♦

(ii) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de points de F : puisque (E, d) est complet, il existe $u \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} (u_n) = u$; on a $u \in \text{adh}(F) = F$ et le résultat. ♦

Commentaire : Le Th.2.1 permet de donner facilement des exemples d'espaces métriques complets ou non complets.

a) Par exemple une partie $F \neq E$ de E partout dense dans E complet n'est pas complète, sinon elle serait fermée par (i) et on aurait $F = \text{adh}(F) = E$.

b) \mathbb{R} étant complet, $[a, b]$ est complet, de même que $[a, +\infty[$ car ce sont des fermés de \mathbb{R} ; par contre $] -\infty, a[$ n'est pas complet car non fermé dans \mathbb{R} .

✎ **Exercice 2.4.** (facile, souvent utile) Soit (E, d) un espace métrique **complet**. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties non vides **fermées** de (E, d) , vérifiant :

- (1) $\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+1} \subset F_n$ (suite décroissante),
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{diam}(F_n)] = 0$.

Démontrez que $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ contient un point et un seul.

Rappel : $\text{diam}(X) = \sup\{d(x, y) / x \in X, y \in X\}$.

Exemple 2.3. Cet exemple est destiné à prouver que les notions de suite de Cauchy et d'espace complet *ne sont pas* des notions topologiques [cf. Chap. VIII, p.7].

Les Exercices 2.1 et 2.5 vont aussi dans ce sens.

Soit $E = \mathbb{R} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ (droite réelle étendue) muni de la distance :

$$\delta(s, t) := |\text{Arc tan}(s) - \text{Arc tan}(t)|,$$

avec $\text{Arc tan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ et $\text{Arc tan}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$.

On notera \mathbb{R}_δ le sous-espace métrique \mathbb{R} de (E, δ) . On va démontrer que $\mathbb{R}_{\text{usuel}}$ et \mathbb{R}_δ sont homéomorphes, l'homéomorphisme étant réalisée par l'identité $Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto t$. Donc \mathbb{R} et \mathbb{R}_δ auront les mêmes ouverts, les mêmes suites convergentes, etc.

On note $f : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, $s \mapsto \text{Arc tan}(s)$ et $f^{-1} :]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \tan(t)$. f et f^{-1} sont des homéomorphismes inverses l'un de l'autre quand \mathbb{R} et $] -\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sont munis de la distance usuelle.

• Considérons $f : \mathbb{R}_\delta \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[_{\text{usuel}}$, et $f^{-1} :]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[_{\text{usuel}} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{usuel}}$. $f^{-1} \circ f = Id$. $\forall s, t \in \mathbb{R} : |f(s) - f(t)| = |\text{Arc tan}(s) - \text{Arc tan}(t)| = \delta(s, t) : f$ est donc une isométrie de \mathbb{R}_δ sur $] -\pi/2, +\pi/2[_{\text{usuel}}$. Comme f^{-1} est continue, on a $Id : \mathbb{R}_\delta \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.

• A présent, considérons $f : \mathbb{R}_{\text{usuel}} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[_{\text{usuel}}$, et $f^{-1} :]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[_{\text{usuel}} \rightarrow \mathbb{R}_\delta$. $\forall s, t \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[:$

$$\begin{aligned} \delta[f^{-1}(s), f^{-1}(t)] &= |\text{Arc tan}[f^{-1}(s)] - \text{Arc tan}[f^{-1}(t)]| \\ &= |\text{Arc tan}[\tan(s)] - \text{Arc tan}[\tan(t)]| = |s - t|; \end{aligned}$$

f^{-1} est donc une isométrie de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ usuel sur \mathbb{R}_δ .

Comme $f : \mathbb{R}_{\text{usuel}} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ usuel est continue, on a $Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\delta$ est continue.

• Réunissant les deux résultats obtenus ci-dessus : l'application $Id : s \mapsto s$ de $\mathbb{R}_{\text{usuel}}$ sur \mathbb{R}_δ est un **homéomorphisme**.

Soit à présent la suite de réels $s_n = n$: cette suite n'est pas de Cauchy dans \mathbb{R} usuel (elle n'est pas bornée), mais, par contre, dans \mathbb{R}_δ c'est une suite de Cauchy, car c'est une suite convergente dans $\overline{\mathbb{R}}_\delta$ dont \mathbb{R}_δ est un sous-espace métrique.

En effet : $\delta(n, +\infty) = |\text{Arc tan}(n) - \frac{\pi}{2}| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Etendons alors f à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant $\tilde{f}(-\infty) := -\frac{\pi}{2}$, $\tilde{f}(+\infty) := +\frac{\pi}{2}$, et f^{-1} à $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ en posant $\tilde{f}^{-1}(-\frac{\pi}{2}) := -\infty$, $\tilde{f}^{-1}(+\frac{\pi}{2}) := +\infty$. \tilde{f} est alors une isométrie de $\overline{\mathbb{R}}_\delta$ sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ usuel.

Cet intervalle fermé dans \mathbb{R} usuel est complet et, par conséquent, $\overline{\mathbb{R}}_\delta$ isométrique à un espace métrique complet est aussi complet.

\mathbb{R}_δ n'est pas complet puisque la suite $s_n = n$ est de Cauchy dans \mathbb{R}_δ et ne converge pas dans \mathbb{R}_δ (sa limite dans $\overline{\mathbb{R}}_\delta$ est $+\infty$ et $+\infty \notin \mathbb{R}$).

☞ **Exercice 2.5.** Soit $E =]0, +\infty[$. On considère sur E les deux distances suivantes : $d(s, t) = |s - t|$ et $\delta(s, t) = |\ln s - \ln t|$. Démontrez que ces deux espaces sont homéomorphes, que (E, d) n'est pas complet et que (E, δ) est complet.

Proposition 2.3.

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques.

(i) Soit $f : E \rightarrow F$ une application **uniformément continue** sur E : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (E, d) , la suite image $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (F, δ) .

(ii) Soit $g : E \rightarrow F$ une **bijection** de E sur F telle qu'il existe $c > 0$ et $C > 0$ vérifiant :

$$\forall u \in E, \forall v \in E : c \cdot d(u, v) \leq \delta[g(u), g(v)] \leq C \cdot d(u, v).$$

Dans ces conditions (E, d) est complet si et seulement si (F, δ) est complet.

Corollaire 2.2.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des e.v.n. sur le même corps (\mathbb{R} ou \mathbb{C}).

(1) Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$: (i) s'applique.

(2) Si $A \in \mathcal{I}\text{som}(E, F)$: (ii) s'applique.

Démonstration :

(i) On a $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E, \forall v \in E : d(u, v) \leq \eta \implies \delta[f(u), f(v)] \leq \varepsilon$, et $\forall \eta > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N} : p \geq N$ et $q \geq N \implies d(u_p, u_q) \leq \eta$.

On veut :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N} : p \geq M$$
 et $q \geq M \implies \delta[f(u_p), f(u_q)] \leq \varepsilon$.

Il suffit de prendre $M := N$. ♦

(ii) Supposons (E, d) complet, et soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (F, δ) .

Posons $u_n := g^{-1}(v_n)$:

$$d(u_p, u_q) \leq \frac{1}{c} \delta[g(u_p), g(u_q)] = \frac{1}{c} \delta[g(g^{-1}(v_p)), g(g^{-1}(v_q))] = \frac{1}{c} \delta(v_p, v_q).$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, d) et, donc, converge vers $u \in E$. Soit $v := g(u)$:

$\delta(v_n, v) = \delta[g(u_n), g(v)] \leq C.d(u_n, u)$, et ce dernier terme tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty, n \in S$. Et donc : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (v_n) = v$. (F, δ) est donc un espace métrique complet.

Même démonstration pour la réciproque en considérant g^{-1} car $\forall v, w \in F$:

$$\frac{1}{C}\delta(v, w) \leq d[g^{-1}(v), g^{-1}(w)] \leq \frac{1}{C}\delta(v, w). \blacklozenge$$

La démonstration du Corollaire est immédiate, car $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est non seulement uniformément continue mais lipschitzienne [Chap. X, Th.1.1], d'où (1). La Prop.1.3 du Chap. X dit que (ii) s'applique, d'où (2). \blacklozenge

Remarque 2.2.

On sait que (i) est faux si f est seulement continue, et même si f est un homéomorphisme : Exemple 2.3. Un autre exemple, tout simple : $E =]0, 1]$, $F = \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t}$; $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans E tandis que $f(\frac{1}{n}) = n$ n'est pas bornée dans F , donc n'est pas de Cauchy.

☞ Pour (2) ne confondez pas $\mathcal{I}so(m)(E, F)$ avec $\mathcal{L}(E, F)$! (erreur fréquente ...).

☞ L'image de E complet par une application linéaire continue n'est pas nécessairement un complet de F , pas même un fermé.

On donnera des exemples plus tard.

☞ **Exercice 2.6.** (difficulté moyenne) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des e.v.n. réels. On suppose que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Soit $\Phi : E \rightarrow F$ une application vérifiant :

(i) $\exists M$ réel $> 0, \forall u \in E, \forall v \in E : \|\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)\|_F \leq M$,

(ii) $\exists C$ réel $> 0, \forall u \in E : \|u\|_E \leq 1 \implies \|\Phi(u)\|_F \leq C$.

1) Démontrez que pour tout $u \in E$ et pour tout n entier ≥ 1 on a :

$$\left\| \frac{1}{2^n} \cdot \Phi(2^n \cdot u) - \Phi(u) \right\|_F \leq \frac{M}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

En déduire que pour tout $u \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2^n} \Phi(2^n \cdot u) \right)$ existe dans F . Nous noterons $A(u)$ cette limite.

2) Démontrez que l'application $A : E \rightarrow F, u \mapsto A(u)$, vérifie :

$$\forall u \in E, \forall v \in E : A(u+v) = A(u) + A(v).$$

3) Démontrez que : $\sup_{u \in E} \|\Phi(u) - A(u)\|_F \leq M$. Déduisez-en que A est une application linéaire continue. Démontrez qu'il n'existe qu'une seule application linéaire vérifiant cette inégalité.

☞ **Exercice 2.7.** (assez difficile) Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit U une partie ouverte de E telle que $U \neq \emptyset, U \neq E$. On note F le complémentaire de U dans E . Pour tous u, v dans U on pose : $\delta(u, v) = d(u, v) + \left| \frac{1}{d(u, F)} - \frac{1}{d(v, F)} \right|$.

1) Démontrez que δ est une distance sur U .

2) Soit (u_n) une suite d'éléments de U . Démontrez que (u_n) est convergente dans l'espace métrique (U, δ) si et seulement si (u_n) est convergente dans le sous-espace métrique $(U, d|_{U \times U})$.

3) Démontrez sur un exemple, avec $E = \mathbb{R}$, que les distances δ et $d|_{U \times U}$ ne sont pas en général équivalentes.

4) Démontrez que l'espace métrique (U, δ) est complet.

3. EXEMPLES FONDAMENTAUX D'ESPACES MÉTRIQUES ET D' E.V.N. COMPLETS

Espaces de Banach classiques

Théorème 3.1. (TRÈS IMPORTANT)

Soit A un ensemble quelconque, et soit (F, δ) un espace métrique. Soit $E = \mathcal{B}_\infty(A, F)$ l'espace métrique des applications $f : A \rightarrow F$ **bornées** [i.e. vérifiant : $\text{diam}[f(A)] < \infty$, cf. Chap. I (3.22)] muni de la distance uniforme :

$$d_\infty(f, g) = \sup_{a \in A} \delta[f(a), g(a)].$$

Si (F, δ) est **complet**, l'espace (E, d_∞) est **complet**.

Corollaire 3.1.

En prenant $A = \mathbb{N}$, ou bien $A = S \subset \mathbb{N}$, S infini, on obtient : l'espace métrique des **suites bornées à valeurs dans un espace métrique complet est complet pour la distance uniforme**.

On pourra noter $\ell^\infty(\mathbb{N}, F_\delta)$, $\ell^\infty(S, F_\delta)$, cet espace métrique.

En particulier, $\ell^\infty(\mathbb{N}, F_{\|\cdot\|})$, $\ell^\infty(S, F_{\|\cdot\|})$ muni de la norme uniforme est un **espace de Banach** sur \mathbb{K} si $(F, \|\cdot\|)$ est un **espace de Banach** sur \mathbb{K} . Encore plus particulièrement, puisque \mathbb{R} et \mathbb{C} sont complets, les espaces $\ell^\infty_{\mathbb{R}}$ et $\ell^\infty_{\mathbb{C}}$ sont des **espaces de Banach** pour leur norme habituelle.

Corollaire 3.2.

L'espace métrique $c(F_\delta)$, i.e. $c(\mathbb{N}, F_\delta)$ ou $c(S, F_\delta)$, constitué par les **suites convergentes** est **complet** pour la distance uniforme si (F, δ) est **complet**.

Si $(F, \|\cdot\|)$ est un **espace de Banach** : $c(F)$ est un **espace de Banach**. Dans ce cas particulier, l'espace $c_0(F)$ des **suites convergentes de limite 0** est un **espace de Banach** pour la norme uniforme. Encore plus particulièrement, les espaces c et c_0 correspondants à $F = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} sont des **espaces de Banach**.

Corollaire 3.3.

Soient (F, δ) et (G, ϑ) des espaces métriques, et soit $E := \mathcal{CB}_\infty(F, G)$ l'espace métrique des applications **continues et bornées** de F dans G muni de d_∞ . Si (G, ϑ) est **complet** l'espace (E, d_∞) est **complet**.

En particulier, $\mathcal{C}_\infty([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ est un **espace de Banach**.

Corollaire 3.4.

Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ des e.v.n. On note $E = \mathcal{B}_0(F, G)$ l'e.v.n. des applications $f : F \rightarrow G$ vérifiant :

(i) $\forall B$ borné dans F : $f(B)$ borné dans G ,

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists M = M(f)$ réel $> 0, \forall u \in F : \|u\|_F \geq M \implies \|f(u)\|_G \leq \varepsilon$, muni de la norme uniforme.

Si $(G, \|\cdot\|_G)$ est un espace de Banach, l'e.v.n. $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Cas particulier : Si $F = G = \mathbb{R}$, $E = \mathcal{B}_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est l'espace de Banach des fonctions bornées qui tendent vers 0 à l'infini, i.e. telles que : $\lim_{|t| \rightarrow \infty} |f(t)| = 0$.

Corollaire 3.5.

L'e.v.n. $\mathcal{R}([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ des **fonctions réglées** sur $[\alpha, \beta]$ est un **espace de Banach** pour la norme uniforme.

☞ **Exercice 3.1.** (facile) Démontrez les Corollaires 3.2 à 3.5.

Démonstration du Théorème 3.1 : On note $(E, d) = (\mathcal{B}[A, (F, \delta)], d_\infty)$.

Etape 1 : Soit $(f_n)_{n \in S}$, $S \subset \mathbb{N}$, S infini, une suite de Cauchy dans (E, d) :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall p \in S, \forall q \in S : p \geq N \text{ et } q \geq N \implies d_\infty(f_p, f_q) \leq \varepsilon$.

Mais $d_\infty(f_p, f_q) = \sup_{a \in A} \delta[f_p(a), f_q(a)] \leq \varepsilon \implies \forall a \in A : \delta[f_p(a), f_q(a)] \leq \varepsilon$.

On en déduit :

(*) $\forall a \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall p \in S, \forall q \in S : p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \delta[f_p(a), f_q(a)] \leq \varepsilon$.

Remarque : pas de problème pour mettre $\forall a$ au début car $\exists \forall \implies \forall \exists$ (mais pas la réciproque !); remarquons que, malgré l'écriture, N ne dépend pas de a .

Donc, pour tout $a \in A$, la suite $(f_n(a))_{n \in S}$ est une suite de Cauchy d'éléments de (F, δ) qui est un espace complet par hypothèse ; par conséquent cette suite converge dans (F, δ) .

Notons : $g(a) := \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(a))$; eu égard à l'unicité de la limite, on définit ainsi une application $g : A \rightarrow F$. ♦

Etape 2 : Démontrons que $g \in E$. Dans (*) faisons $\varepsilon = 1$ et fixons $p = N_1$ (qui est la valeur de N obtenue pour $\varepsilon = 1$) :

$\forall a \in A, \forall q \in S : q \geq N_1 \implies \delta[f_{N_1}(a), f_q(a)] \leq 1$, et donc :

$\delta[f_{N_1}(a), g(a)] \leq \delta[f_{N_1}(a), f_q(a)] + \delta[f_q(a), g(a)] \leq 1 + \delta[f_q(a), g(a)]$.

Comme $\lim_{q \rightarrow \infty} \delta[f_q(a), g(a)] = 0$, il vient (prolongement des inégalités) :

$\delta[f_{N_1}(a), g(a)] \leq 1$, cela pour tout $a \in A$.

Donc pour tous $a, b \in A$:

$\delta[g(a), g(b)] \leq \delta[g(a), f_{N_1}(a)] + \delta[f_{N_1}(a), f_{N_1}(b)] + \delta[f_{N_1}(b), g(b)]$
 $\leq 1 + \text{diam}[f_{N_1}(A)] + 1$

D'où : $\text{diam}[g(A)] \leq 2 + \text{diam}[f_{N_1}(A)] < \infty$. D'où : $g \in \mathcal{B}(A, F_\delta)$. ♦

Etape 3 : On démontre que $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (f_n) = g$ pour d_∞ , ce qui termine la démonstration. On a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall p \in S, \forall q \in S : p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \forall a \in A :$

$\delta[f_p(a), g(a)] \leq \delta[f_p(a), f_q(a)] + \delta[f_q(a), g(a)] \leq d_\infty(f_p, f_q) + \delta[f_q(a), g(a)]$
 $\leq \varepsilon + \delta[f_q(a), g(a)] ;$

faisons tendre q vers l'infini, d'après le principe de prolongement des inégalités, il vient : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, \forall q : p \geq N \implies \forall a \in A : \delta[f_p(a), g(a)] \leq \varepsilon$, soit $\sup_{a \in A} \delta[f_p(a), g(a)] = d_\infty(f_p, g) \leq \varepsilon$.

Finalement $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall p \in S : p \geq N \implies d_\infty(f_p, g) \leq \varepsilon$,

i.e. $\lim_{p \rightarrow \infty, p \in S} (f_p) = g$ pour d_∞ . ♦

Théorème 3.2. (FONDAMENTAL)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On considère l'e.v.n. sur \mathbb{K} ,

$\mathcal{L}(E, F) = \{A : E \rightarrow F / A \text{ linéaire et continue}\}$

muni de la norme : $A \in \mathcal{L}(E, F) \mapsto \|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{u \in E, \|u\|_E \leq 1} \|A(u)\|_F$
 [voir le Chap. X].

Si l'e.v.n. d'arrivée $(F, \|\cdot\|_F)$ est un *espace de Banach*, l'e.v.n.

$(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)})$ est lui-même un *espace de Banach*.

En particulier, puisque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien \mathbb{C} est complet, le *dual topologique* $(E', \|\cdot\|')$ est toujours un *espace de Banach*, même si E n'est pas complet, car $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ avec $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, \mathbb{K})}$.

Corollaire :

Si $(G, \|\cdot\|_G)$ (sur \mathbb{K}) est un espace de Banach, l'e.v.n. $\mathcal{B}(E, F; G)$ des applications **bilinéaires continues** naturellement normé [cf. Chap. X, §3] est lui-même de Banach.

En effet, cet e.v.n. est isométrique à l'e.v.n. $\mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$ [Chap. X, Th.3.1], et on applique deux fois le résultat ci-dessus.

Démonstration du théorème :

Soit E un e.v.n. (sur \mathbb{K}) *complet ou non*, et soit F un espace de Banach (sur \mathbb{K}); on va démontrer que $\mathcal{L}(E, F)$ muni de sa *norme naturelle* est un espace de Banach (sur \mathbb{K}). La démonstration ressemble à celle du théorème précédent.

Etape 1 : Soit $(A_n)_{n \in S}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$; on a :

(*) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall p \in S, \forall q \in S : p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \|A_p - A_q\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \varepsilon.$

Soit $u \in E$ arbitraire :

$$\|A_p(u) - A_q(u)\|_F = \|(A_p - A_q)(u)\|_F \leq \|A_p - A_q\|_{\mathcal{L}(E, F)} \cdot \|u\|_E,$$

d'après l'inégalité fondamentale [voir Chap. X (1.12)].

Donc (*) implique, pour tout $u \in E$ fixé, N ne dépendant d'ailleurs pas de u :

(°) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall p \in S, \forall q \in S :$

$$p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \|A_p(u) - A_q(u)\|_F \leq \varepsilon \cdot \|u\|_E.$$

Cette proposition (°) signifie que pour tout $u \in E$ fixé la suite $(A_n(u))_{n \in S}$ est une suite de Cauchy de points de F . Or F est supposé complet, donc cette suite est convergente dans F , vers un vecteur de F que nous noterons A_u . ♦

Etape 2 : Ce qui précède étant valide pour tout $u \in E$, et eu égard à l'unicité de la limite, on peut considérer l'application de E dans F qui à $u \in E$ associe $A_u \in F$.

Montrons que cette application est linéaire et continue.

Soient u et v dans E , λ et μ dans \mathbb{K} . La suite $(A_n(\lambda u + \mu v))_{n \in S}$ converge vers $A_{\lambda u + \mu v}$, la suite $(A_n(u))_n$ vers A_u , la suite $(A_n(v))_n$ vers A_v . Comme pour tout $n \in S$ on a : $A_n(\lambda u + \mu v) = \lambda A_n(u) + \mu A_n(v)$, les A_n étant linéaires, on a en passant à la limite, principe de prolongement des égalités : $A_{\lambda u + \mu v} = \lambda A_u + \mu A_v$. Posant $A(u) := A_u$, on constate que l'application $A : E \rightarrow F$ ainsi définie est linéaire : $A \in L(E, F)$. ♦

La suite $(A_n)_{n \in S}$ étant de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$ est [Prop. 1.1 (iii)] bornée dans cet espace : il existe M réel > 0 tel que $\|A_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq M$ pour tout $n \in S$. Donc, d'après l'inégalité fondamentale [Chap. X (1.12)],

$$\forall u \in E : \|A_n(u)\|_F \leq \|A_n\|_{\mathcal{L}(E, F)} \cdot \|u\|_E \leq M \cdot \|u\|_E,$$

d'où (continuité de la norme et principe de prolongement des inégalités), $\forall u \in E$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} \|A_n(u)\|_F = \|\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (A_n(u))\|_F = \|A(u)\|_F \leq M \cdot \|u\|_E.$$

Par conséquent [Chap. X, Th. 1.1] A est continue, et on a ce qu'on cherchait :

$$A \in \mathcal{L}(E, F). \quad \blacklozenge$$

Etape 3 : Il ne nous reste plus qu'à démontrer que la suite $(A_n)_{n \in S}$ converge dans $\mathcal{L}(E, F)$ vers A . Reprenons (°) dans laquelle nous laissons p fixe et faisons tendre $q \in S$ vers l'infini, il vient : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p : p \geq N \implies \forall u \in E : \|A_p(u) - A(u)\| \leq \varepsilon$, d'où : $\sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{\|A_p(u) - A(u)\|}{\|u\|} \leq \varepsilon$, soit : $\|A_p - A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \varepsilon$, ce qui signifie que $\lim_{p \rightarrow \infty, p \in S} \|A_p - A\|_{\mathcal{L}(E, F)} = 0$, i.e. que la suite de Cauchy $(A_n)_{n \in S}$ est convergente dans $\mathcal{L}(E, F)$. ♦

☞ **Exercice 3.2.** (difficulté moyenne) On a le résultat suivant, qui ne sera pas démontré dans ce cours (Corollaire du th. de Hahn-Banach, voir un cours de Maîtrise) : pour tout e.v.n. G (sur

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et tout $x \in G$ tel que $\|x\| = 1$, il existe $\varphi \in G'$ tel que $\|\varphi\|' = \varphi(x) = 1$. Admettant ce résultat, démontrez la réciproque du Th. 3.2, i.e. que si $\mathcal{L}(E, F)$ est de Banach, F l'est nécessairement aussi.

Théorème 3.3. (IMPORTANT)

Soit $(F, \|\cdot\|_F)$ un e.v.n. sur \mathbb{K} , et soit p un réel tel que $1 \leq p < \infty$.
 On note $E = \ell^p(F)$ l'ensemble des suites $u = (u_1, u_2, \dots, u_k, \dots)$ de vecteurs de F telles que : $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_F^p < \infty$. On norme E par : $\|u\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_F^p\right)^{1/p}$.
 Si $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach, il en est de même de $(E = \ell^p(F), \|\cdot\|_{\ell^p})$.
 En particulier, pour $p = 2$, et si $(F, (\cdot|\cdot)_F)$ est un espace de Hilbert réel : $\ell^2(F)$ est un espace de Hilbert réel pour le produit scalaire : $(u|v)_{\ell^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (u_k|v_k)_F$.
 Pour $F = \mathbb{K}$ (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) qui est complet, on obtient donc : $\ell_{\mathbb{K}}^p$ est un espace de Banach, et $\ell_{\mathbb{R}}^2$ est un espace de Hilbert réel.

Démonstration : Nous renvoyons au Chap. II pour la démonstration du fait que $\ell_{\mathbb{K}}^p$ est un e.v.n. pour la norme $\|(\xi_n)\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p}$; si l'on remplace \mathbb{K} par F , il suffit de remplacer $|\cdot|$ par $\|\cdot\|_F$.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans $\ell^p(F)$ avec, pour tout $n \geq 1$:

$$u_n := (u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^k, \dots) \in \ell^p(F),$$

Ecrivons que $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy :

(*) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : m \geq N \text{ et } n \geq N$

$$\implies d_p(u_m, u_n) = \|u_m - u_n\|_{\ell^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|u_m^k - u_n^k\|_F^p\right)^{1/p} \leq \varepsilon.$$

On en déduit que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, \forall n : m \geq N \text{ et } n \geq N \implies \forall k \geq 1 : \|u_m^k - u_n^k\|_F \leq \varepsilon.$$

Donc, pour tout $k \geq 1$ fixé, la suite $(u_n^k)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans F espace de Banach ; par conséquent $(u_n^k)_n$ est convergente dans F , nous noterons u_k sa limite.

Considérons alors la suite $u = (u_1, \dots, u_k, \dots)$.

Réécrivons (*) : pour tout r entier ≥ 1 on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall m, \forall n : m \geq N \text{ et } n \geq N \implies \forall r \geq 1 : \sum_{1 \leq k \leq r} \|u_m^k - u_n^k\|_F^p \leq \varepsilon^p.$$

Faisons tendre n vers l'infini dans la dernière inégalité :

$$\forall r \geq 1 : \sum_{1 \leq k \leq r} \|u_m^k - u_k\|_F^p \leq \varepsilon^p,$$

puis en faisant tendre r vers l'infini : $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_m^k - u_k\|_F^p \leq \varepsilon^p$, ce qui prouve que :

$u_m - u \in \ell^p(F)$, d'où : $u = -(u_m - u) + u_m \in \ell^p(F)$, et enfin que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{\ell^p(F)} = 0. \text{ D'où le résultat cherché. } \blacklozenge$$

Remarque : Dans le module de théorie de la mesure, il vous sera démontré que les très importants espaces de Lebesgue $L^p(A)$, $1 \leq p \leq \infty$, sont des espaces de Banach.

☞ **Exercice 3.3.** Soit E un espace de Banach, et soit $A \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\|Id_E - A\| \leq \rho < 1$. On pose $B_0 = 0_E$ (opérateur nul) et pour $n \geq 0$:

$$B_{n+1} = \frac{1}{2}(Id_E - A + B_n^2), \text{ où } B_n^2 = B_n \circ B_n.$$

1) Démontrez que pour tout $n \geq 0$: $\|B_n\| \leq \sqrt{\rho}$, puis que pour tous $n, k \geq 0$:

$$B_{n+k} - B_n = \frac{1}{2}(B_{n+k+1}^2 - B_{n-1}^2).$$

2) Démontrez que B_n est un polynôme par rapport à A ; déduisez-en que pour tous $p, q \geq 0$:

$$B_p^2 - B_q^2 = (B_p + B_q) \circ (B_p - B_q).$$

Démontrez que pour tous $n, p \geq 0$: $\|B_{n+p} - B_n\| \leq (\sqrt{p})^{n+1}$.

3) Démontrez que (B_n) est convergente ; on note B sa limite. Démontrez qu'il existe $R \in \mathcal{L}(E)$ tel que $R^2 = A$. Démontrez que $\|Id_E - R\| \leq \sqrt{p}$.

Fin de la partie cours du chapitre XI

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ Exercice 1.1.

Supposons que (f_n) converge pour la norme $\|\cdot\|_1$ vers $f \in E$: $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f(t) - f_n(t)| dt = 0$.

On voit bien sur une figure que s'il y a un problème c'est en $t = \frac{1}{2}$.

Ecrivons donc, d'une part :

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} |f(t)| dt &\leq \int_0^{1/2} |f(t) - f_n(t)| dt + \int_0^{1/2} |f_n(t)| dt \\ &\leq \int_0^{1/2} |f(t) - f_n(t)| dt + \text{aire du triangle de sommets } \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right) \\ &\leq \|f - f_n\|_1 + \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Donc : $\int_0^{1/2} |f(t)| dt = 0$, et puisque f est continue sur $[0, 1]$, donc sur $[0, \frac{1}{2}]$, $|f|$ est ≥ 0 et continue sur $[0, \frac{1}{2}]$, il vient : $|f| = f = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ [cf. Chap. II, Exercice 3.1].

$$\text{D'autre part : } \int_{1/2}^1 |f(t) - f_n(t)| dt = \int_{1/2}^1 |f(t) - 1| dt \leq \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

d'où : $\int_{1/2}^1 |f(t) - 1| dt = 0$, $|f(t) - 1| \geq 0$ et est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$, donc $|f(t) - 1| = 0$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$, soit $f = 1$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

D'où une impossibilité car $f(\frac{1}{2}) = 0$ d'une part et $f(\frac{1}{2}) = 1$ d'autre part : f prendrait deux valeurs distinctes au point $\frac{1}{2}$: l'horreur ! Finalement (f_n) ne peut pas être convergente dans $E = C_1([0, 1], \mathbb{R})$. ♦

Nota :

On « sent » bien que (f_n) devrait converger vers la fonction discontinue $f = 0$ sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $f = 1$ sur $]\frac{1}{2}, 1]$, $f(\frac{1}{2})$ étant arbitraire.

Voir le module de calcul intégral pour ce point de vue, mais on pourrait arranger cela dans $\mathcal{R}([0, 1], \mathbb{R})$ où $\|\cdot\|_1$ n'est pas une norme, mais ne demande qu'à en devenir une . . .

[cf. Chap. I, Exercice 1.3].

☞ Exercice 1.2.

Supposons que $\sqrt{2} = p/q$, où $p, q \in \mathbb{N}^*$, la fraction étant irréductible. On aurait donc $p^2 = 2q^2$. On n'a plus qu'à démontrer que tous les cas (p pair, q impair), (p impair, q pair), (p impair, q impair) conduisent à une absurdité [(p pair, q pair) n'a pas à être examiné car p/q serait simplifiable par 2].

Exemple : $p = 2h$, $q = 2k + 1$ impliquerait : $4h^2 = 2(2k + 1)^2$, c'est-à-dire : $2h^2 = 4k^2 + 4k + 1$, impossible ; etc. ♦

☞ Exercice 1.3.

$n \mapsto s_n = \sum_{0 \leq k \leq n} \frac{1}{k!}$ est strictement croissante et tend, on le sait (cours D.E.U.G.), vers

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$. D'autre part, $n \mapsto t_n = s_n + \frac{1}{n \cdot n!}$ est strictement décroissante et tend aussi vers e .

On a : $s_n < t_n$ pour tout $n \geq 1$. $s_n \leq e$ et en fait $s_n < e$ car (s_n) est strictement croissante et, de même, $t_n > e$. Bref, pour tout $n \geq 1$: $s_n < e < t_n$.

Supposons que $e = \frac{p}{q}$, où $p, q \in \mathbb{N}^*$, fraction irréductible ; on a en faisant $n = q$: $s_q < \frac{p}{q} < t_q$, soit : $s_q < \frac{p}{q} < s_q + \frac{1}{q \cdot q!} \implies q \cdot q! \cdot s_q < p \cdot q! < q \cdot q! \cdot s_q + 1$; mais $q \cdot q! \cdot s_q = q \cdot q! \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{q!}\right)$ est un entier. Donc $p \cdot q!$ serait un entier strictement compris entre un entier et son suivant : c'est impossible. ♦
Rappel : $e = 2,71828$ par défaut.

☞ **Exercice 1.4.**

La suite (f_n) est construite de telle façon que si $m \neq n$ les parties non nulles des fonctions n'ont pas de point en commun [attention en dessinant les f_n : le triangle n'est pas isocèle : $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} < \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}$].

En effet, si $m > n$: $m \geq n+1 \implies 2m \geq 2n+2 \implies \frac{1}{2m} \leq \frac{1}{2n+2}$ (figure !).

De telle sorte que si $m \neq n$ on a : $\|f_n - f_m\|_\infty = \|f_n\|_\infty = \|f_m\|_\infty = 1$.

On ne peut donc pas extraire de la suite (f_n) une suite qui soit de Cauchy. ♦

☞ **Exercice 1.5.**

$P_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ avec $0 \leq t \leq 1$. $\ln P_n(t) = n \cdot \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right)$ et $\ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{t}{n}$;

donc, pour tout $t \in [0, 1]$: $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(t)) = e^t$.

On sait que $t \mapsto e^t$ n'est pas une fonction polynomiale :

en effet si $e^t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_p t^p$, en dérivant $p+1$ fois, on obtiendrait : $e^t = 0$, absurde.

Nous allons démontrer que $\|P_n - \exp(\cdot)\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |P_n(t) - e^t| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Comme $\max_{0 \leq t \leq 1} |P_n(t) - e^t| = \max_{0 \leq t \leq 1} \{e^t \cdot |P_n(t) \cdot e^{-t} - 1|\} \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |P_n(t) \cdot e^{-t} - 1| \cdot e$,

il suffit de démontrer, posant $f_n(t) = P_n(t) \cdot e^{-t}$, que : $\max_{0 \leq t \leq 1} |f_n(t) - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$f'_n(t) = n \cdot \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n-1} \times \frac{1}{n} e^{-t} + \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n (-e^{-t}) = \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n-1} \cdot e^{-t} \left(1 - 1 - \frac{t}{n}\right) \leq 0$;
 donc $t \mapsto f_n(t)$ est, pour tout $n \geq 1$, décroissante sur $[0, 1]$.

$$\forall t \in [0, 1] : f_n(1) \leq f_n(t) \leq f_n(0) : f_n(1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{-1} \text{ et } f_n(0) = 1.$$

On en déduit que $0 \leq |f_n(t) - 1| = 1 - f_n(t) \leq 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{-1}$.

Finalement : $\max_{0 \leq t \leq 1} |f_n(t) - 1| \leq 1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 - e \cdot e^{-1} = 0$.

Ainsi, la suite $(P_n)_n$ converge dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ vers la fonction continue $t \mapsto e^t$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, et $t \mapsto e^t$ n'est pas une fonction polynomiale, i.e. n'appartient pas à $\mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})$.

Donc, dans le sous-espace métrique $\mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})$ la suite $(P_n)_n$ est une suite de Cauchy non convergente. ♦

☞ **Exercice 2.1.**

Il est clair que $d(s, t) = \left| \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-t} \right|$ définit bien une distance sur $E = [0, 1]$. En effet : d est à valeurs dans \mathbb{R} car $s < 1 \implies 1-s > 0$ et $\frac{1}{1-s} \in \mathbb{R}$;

$$d(s, t) = 0 \implies \frac{1}{1-s} = \frac{1}{1-t} \implies s = t ;$$

$$\forall s, t \in E : d(t, s) = d(s, t) ;$$

$$d(s, t) = \left| \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-r} + \frac{1}{1-r} - \frac{1}{1-t} \right| \leq d(s, r) + d(r, t) \text{ pour tous } r, s, t \in E. \blacklozenge$$

Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, \forall q$:

$$p \geq N \text{ et } q \geq N \implies d(s_p, s_q) = \left| \frac{1}{1-s_p} - \frac{1}{1-s_q} \right| = \frac{|s_p - s_q|}{(1-s_p)(1-s_q)} \leq \varepsilon.$$

On en déduit, puisque $0 < 1 - s_p \leq 1, 0 < 1 - s_q \leq 1$, que :

$$|s_p - s_q| = \frac{|s_p - s_q|}{(1-s_p)(1-s_q)} (1-s_p)(1-s_q) \leq \varepsilon.$$

Donc $(s_n)_n$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R} qui est complet pour sa distance usuelle [Prop. 2.1].
 Donc (s_n) est convergente dans \mathbb{R} vers $s \in \mathbb{R}$, pour la distance usuelle. Comme $0 \leq s < 1$ pour tout $n : 0 \leq s \leq 1 ; s \in E \cup \{1\}$ a priori.

Mais, d'autre part, comme (s_n) est de Cauchy pour d , elle est bornée pour d [Prop. 1.1 (iii)]; donc il existe $C > 0$ tel que $d(0, s_n) \leq C$ pour tout n :

$$d(0, s_n) = \left| \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s_n} \right| = \left| 1 - \frac{1}{1-s_n} \right| = \frac{s_n}{1-s_n} \leq C$$

D'où : $s_n \leq C(1-s_n) \implies s_n(1+C) \leq C \implies s_n \leq \frac{C}{1+C} = K < 1$.

Donc en passant à la limite avec la distance usuelle : $s \leq K < 1$, soit $s \in E$.

A présent : $d(s, s_n) = \left| \frac{1}{1-s} - \frac{1}{1-s_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et, donc, (s_n) tend vers $s \in E$ pour la distance d . En définitive, $E = ([0, 1[, d)$ est un espace métrique complet. ♦

Exercice 2.2.

Supposons que (E, d) soit complet et démontrons que (E, δ) est aussi complet.

Considérons la fonction $t \mapsto f(t) = \frac{t}{1+t}$ qui est un homéomorphisme de $[0, 1]$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ et dont l'application inverse est $s \mapsto g(s) = \frac{s}{1-s}$.

Ecrivons que g est continue en $s = 0$; on a $g(0) = 0$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall s \in [0, \frac{1}{2}] : 0 \leq s \leq \eta \implies 0 \leq g(s) \leq \varepsilon.$$

Soit maintenant $(u_n)_{n \in S}$ une suite de Cauchy dans (E, δ) : $\eta > 0$ étant fixé par la proposition ci-dessus,

$\exists N \in S, \forall p \in S, \forall q \in S : p \geq N$ et $q \geq N \implies 0 \leq \delta(u_p, u_q) \leq \eta$, d'où l'on déduit que : $0 \leq g[\delta(u_p, u_q)] \leq \varepsilon$, soit :

$$0 \leq g \left[\frac{d(u_p, u_q)}{1 + d(u_p, u_q)} \right] = g(f[d(u_p, u_q)]) = (g \circ f)[d(u_p, u_q)] = d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, la suite (u_n) est une suite de Cauchy de (E, d) qui est complet : donc il existe $u \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} d(u_n, u) = 0$. f étant continue au point 0, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (f[d(u_n, u)]) = 0 \text{ et } f[d(u_n, u)] = \frac{d(u_n, u)}{1 + d(u_n, u)} = \delta(u_n, u).$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (\delta(u_n, u)) = 0$ et $(u_n)_{n \in S}$ a une limite dans (E, δ) , lequel est donc complet. ♦

On démontre exactement de la même manière, en échangeant f et g , que si (E, δ) est complet, (E, d) l'est aussi. Faites-le en détail, surtout si vous n'avez rien su démontrer !

Exercice 2.3.

$(E_i, d_i), i = 1, 2, \dots$ est une famille d'espaces métriques. On pose $E := \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ et on définit pour

$$u = (u_1, \dots, u_i, \dots) \in E, v = (v_1, \dots, v_i, \dots) \in E : d(u, v) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)}.$$

On sait déjà [Chap. I, Exercice 2.4] que (E, d) est un espace métrique.

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy de points de $E, u_n := (u_n^1, u_n^2, \dots, u_n^i, \dots)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1, \forall p \geq 1, \forall q \geq 1 : p \geq N, q \geq N \implies d(u_p, u_q) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(u_p^i, u_q^i)}{1 + d_i(u_p^i, u_q^i)} \leq \varepsilon;$$

$$\text{donc pour tout } i \geq 1 \text{ fixé : } 2^{-i} \cdot \frac{d_i(u_p^i, u_q^i)}{1 + d_i(u_p^i, u_q^i)} \leq \varepsilon.$$

Par conséquent : pour tout i fixé, la suite $(u_n^i)_{n \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans l'espace métrique (E_i, d_i) où $d_i = \frac{d_i}{1 + d_i}$. Or on sait par l'exercice précédent que (E_i, d_i) est complet puisque (E_i, d_i) est complet par hypothèse. Par conséquent, la suite $(u_n^i)_{n \geq 1}$ a une limite $u_i \in E_i$ dans (E_i, d_i) .

Considérons le point $u = (u^1, u^2, \dots, u^i, \dots) \in E$. Nous allons démontrer que $(u_n)_n$ converge vers u dans (E, d) .

$$\begin{aligned} d(u_n, u) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(u_n^i, u^i)}{1 + d_i(u_n^i, u^i)} = \sum_{i=1}^M 2^{-i} \frac{d_i(u_n^i, u^i)}{1 + d_i(u_n^i, u^i)} + \sum_{i=M+1}^{\infty} 2^{-i} \frac{d_i(u_n^i, u^i)}{1 + d_i(u_n^i, u^i)} \\ &\leq \sum_{i=1}^M 2^{-i} \frac{d_i(u_n^i, u^i)}{1 + d_i(u_n^i, u^i)} + \sum_{i=M+1}^{\infty} 2^{-i} = \sum_{i=1}^M 2^{-i} \frac{d_i(u_n^i, u^i)}{1 + d_i(u_n^i, u^i)} + 2^{-M} \end{aligned}$$

(progression géométrique).

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. On choisit M tel que $2^{-M} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Ensuite, pour tout i compris entre 1 et M , la suite $(u_n^i)_n$ converge vers u_i pour la distance d_i et, donc :

$$\exists N_i \in \mathbb{N}^*, \forall n : n \geq N_i \implies \delta_i(u_n^i, u^i) \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

On pose $N = \max\{M, N_1, N_2, \dots, N_M\}$. Pour tout $n \geq N$ on a :

$$d(u_n, u) \leq \frac{1}{2}\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^M 2^{-i} + 2^{-M} \leq \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} + \frac{1}{2}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \text{ Finalement, la suite } (u_n)_n$$

est convergente dans (E, d) qui est donc un espace métrique complet. ♦

Exemples : pour la distance considérée ici, les espaces $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (ou \mathbb{N}^*) sont complets. $[0, 1]^{\mathbb{N}} = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots$ est appelé le *cube de Hilbert*.

☞ Exercice 2.4.

$F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n$, donc $F \subset F_n \implies \text{diam}(F) \leq \text{diam}(F_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par conséquent,

d'après (2) : $\text{diam}(F) = 0$. On est donc devant l'alternative suivante : $F = \emptyset$ ou bien $F = \{u\}$, $u \in E$. Il nous suffit de prouver que $F \neq \emptyset$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons arbitrairement $u_n \in F_n$. Pour tout $p \geq n$, comme – par (1) – $F_p \subset F_n$, on a : $u_p \in F_n$. Donc : $A_n = \{u_p / p \geq n\} \subset F_n$ et, donc : $\text{diam}(A_n) \leq \text{diam}(F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après (2) on a donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{diam}(A_n)] = 0$. Cela signifie [Commentaire

(1.2)] que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, dans (E, d) complet. Par conséquent, il existe $u \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$. Mais, pour tout n fixé : $\forall p \geq n$ on a $u_p \in F_n$, qui est fermé,

et par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N} : u \in \text{adh}(F_n) = F_n$. C'est dire que $u \in \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = F$. Donc

F est non vide, et on a le résultat cherché. ♦

Remarques :

(1) étant réalisée, on peut se demander légitimement si la condition $\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{diam}(F_n)] \neq 0$ ne permet pas d'affirmer que $F \neq \emptyset$, et même contient plus d'un point ? Ce n'est pas le cas : dans $E = \mathbb{R}$ (complet) prenons $F_n = [n, +\infty[$; (F_n) est une suite décroissante de fermés et $\text{diam}(F_n) = \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela n'empêche pas que $F = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = \emptyset$.

D'autre part, le résultat réciproque de l'exercice est vrai ; en abrégé :

(u_n) de Cauchy, $A_n = \{u_p / p \geq n\}$, puis $A = \bigcap_{n=0}^{\infty} \text{adh}(A_n) = \{\text{valeurs d'adhérence de } (u_n)\}$,

Le résultat de cet exercice est connu sous le nom de «théorème de G. Cantor».

☞ Exercice 2.5.

On procède exactement comme dans l'exemple 2.3. $f : E_d \rightarrow \mathbb{R}_d, t \mapsto \ln(t)$ est continue et $g : \mathbb{R}_d \rightarrow E_d, s \mapsto e^s$ est continue.

E_d et \mathbb{R}_d sont homéomorphes grâce aux homéomorphismes inverses l'un de l'autre f et g . Néanmoins $\mathbb{R}_d, i.e. \mathbb{R}$ usuel est complet tandis que E_d ne l'est pas : E n'est pas fermé dans \mathbb{R}_d .

Considérons $Id : E \rightarrow E, t \mapsto t$, et envisageons $f : E_d \rightarrow \mathbb{R}_d, g : \mathbb{R}_d \rightarrow E_d ; \forall s, t \in E$:

$$\delta[g(s), g(t)] = |\ln(g(s)) - \ln(g(t))| = |\ln(e^s) - \ln(e^t)| = |s - t| = d(s, t).$$

$Id = g \circ f$ est continue car f est continue et g est une isométrie.

Ensuite envisageons $f : E_d \rightarrow \mathbb{R}_d, g : \mathbb{R}_d \rightarrow E_d$:

$$d[f(s), f(t)] = |f(s) - f(t)| = |\ln(s) - \ln(t)| = \delta(s, t) \text{ pour tous } s, t \in E.$$

Donc f est une isométrie et $Id = g \circ f$ est continue. Donc E_d et E sont homéomorphes via l'identité Id : leurs ouverts, suites convergentes, etc. sont donc les mêmes. Démontrons que E – contrairement à E_d – est complet. Soit (s_n) une suite de Cauchy dans E :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, \forall q : p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \delta(s_p, s_q) = |\ln(s_p) - \ln(s_q)| \leq \varepsilon.$$

Cela signifie que la suite (s_n) est telle que la suite $t_n = \ln(s_n)$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R}_d qui est complet. Donc, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que : $d[\ln(s_n), s] = |t_n - s| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Soit : $(\ln(s_n)) \rightarrow s$ dans \mathbb{R} usuel.

Comme l'exponentielle est continue de \mathbb{R} dans $]0, +\infty[$ usuels, on a : $(e^{\ln(s_n)}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^s$ dans \mathbb{R} ,

et dans $E =]0, +\infty[$ muni de d . Posons : $r = e^s, r \in E$.

On a : $\delta(s_n, r) = |\ln(s_n) - \ln(r)| = |\ln(s_n) - s| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et, donc, $\lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = r$ dans E pour

la distance $\delta : E$ est par conséquent complet. ♦

☞ **Exercice 2.6.**

1) Prouvons l'inégalité cherchée pour $n = 1$ en faisant $v = u$ dans (i).

$\forall u \in E : \|\Phi(u + u) - \Phi(u) - \Phi(u)\| = \|\Phi(2u) - 2\Phi(u)\| \leq M$, d'où :

$$\|\frac{1}{2}\Phi(2u) - \Phi(u)\| \leq \frac{M}{2}$$

Raisonnant ensuite par récurrence, supposons que

$$\forall u \in E : \|\frac{1}{2^n}\Phi(2^n u) - \Phi(u)\| \leq \frac{M}{2}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}).$$

Pour tout $u \in E$ remplaçons u et v dans (i) par $2^n u$, il vient :

$\|\Phi(2^{n+1}u) - \Phi(2^n u) - \Phi(2^n u)\| = \|\Phi(2^{n+1}u) - 2\Phi(2^n u)\| \leq M$, soit :

$$\|\frac{1}{2^{n+1}}\Phi(2^{n+1}u) - \frac{1}{2^n}\Phi(2^n u)\| \leq \frac{M}{2^{n+1}}$$

A présent :

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{2^{n+1}}\Phi(2^{n+1}u) - \Phi(u)\| &\leq \|\frac{1}{2^{n+1}}\Phi(2^{n+1}u) - \frac{1}{2^n}\Phi(2^n u)\| + \|\frac{1}{2^n}\Phi(2^n u) - \Phi(u)\| \\ &\leq \frac{M}{2^{n+1}} + \frac{M}{2}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}) = \frac{M}{2}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}). \diamond \end{aligned}$$

Déduisons de cette majoration que la suite $(\frac{1}{2^n}\Phi(2^n u))_n$ est – pour tout $u \in E$ – une suite de Cauchy dans F . Pour tous entiers $n \geq 1$ et $p \geq 0$ on a :

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{2^{n+p}}\Phi(2^{n+p}u) - \frac{1}{2^n}\Phi(2^n u)\| &= \frac{1}{2^n}\|\frac{1}{2^p}\Phi(2^p \cdot 2^n u) - \Phi(2^n u)\| \\ &\leq \frac{1}{2^n} \times \frac{M}{2}(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}}) \end{aligned}$$

(on a changé n en p et u en $2^n u$ dans l'inégalité trouvée ci-dessus) et

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} = 2\frac{2^p - 1}{2^p - 1}, \text{ d'où :}$$

$$\|\frac{1}{2^{n+p}}\Phi(2^{n+p}u) - \frac{1}{2^n}\Phi(2^n u)\| \leq \frac{M}{2^n} \times \frac{2^p - 1}{2^p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \text{ pour tout } p.$$

Comme E est complet, la suite $(\frac{1}{2^n}\Phi(2^n u))_n$ est convergente dans F , pour tout $u \in E$; on note $A(u)$ sa limite, ce qui définit une application $A : E \rightarrow F$. \diamond

2) Pour tous u, v dans E , et tout $n \geq 1$, on a en changeant u en $2^n u$ et v en $2^n v$ dans (i) :

$$\begin{aligned} \|\Phi(2^n u + 2^n v) - \Phi(2^n u) - \Phi(2^n v)\| &\leq M \\ \implies \|\frac{1}{2^n}\Phi[2^n(u + v)] - \frac{1}{2^n}\Phi(2^n u) - \frac{1}{2^n}\Phi(2^n v)\| &\leq \frac{M}{2^n}. \end{aligned}$$

On fait tendre n vers l'infini et [puisque $\|\cdot\|$ est continue, et limite d'une somme = somme des limites] on obtient : $\|A(u + v) - A(u) - A(v)\| \leq 0$, soit : $A(u + v) = A(u) + A(v)$. \diamond

3) $\forall u \in E$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(u) - A(u)\| &= \|\Phi(u) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n}\Phi(2^n u)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\Phi(u) - \frac{1}{2^n}\Phi(2^n u)\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} M \frac{2^n - 1}{2^n} = M \text{ (continuité de } \|\cdot\| \text{ et inégalité du 1))}. \end{aligned}$$

Donc : $\sup_{u \in E} \|\Phi(u) - A(u)\| \leq M$. \diamond

$\forall u \in E : \|A(u)\| \leq \|A(u) - \Phi(u)\| + \|\Phi(u)\| \implies$

$$\sup_{\|u\| \leq 1} \|A(u)\| \leq \sup_{\|u\| \leq 1} \|A(u) - \Phi(u)\| + C \leq M + C.$$

A étant additive (2)) et bornée sur la boule unité est linéaire et continue d'après l'Exercice 1.1 du Chapitre X. \diamond

Soient A et B deux applications linéaires vérifiant $\sup_{u \in E} \|\Phi(u) - A(u)\| < \infty$ et

$$\sup_{u \in E} \|\Phi(u) - B(u)\| < \infty.$$

$\forall u \in E : \|A(u) - B(u)\| \leq \|A(u) - \Phi(u)\| + \|\Phi(u) - B(u)\| < \infty$. Posant alors $C = A - B$, l'application linéaire C vérifierait $\forall u \in E : \|C(u)\| \leq K = \text{constante}$, ce qui est impossible sauf si $C = 0$ [prendre $u \notin \text{Ker}(C)$ et envisager $n.u, n \in \mathbb{N}^*$]. \diamond

☞ **Exercice 2.7.**

1) $F := E \setminus U$ est fermé dans (E, d) puisque U est ouvert, et on a : $F \neq \emptyset, F \neq E$. On sait [Chap. I] que $d(u, F) = 0 \iff u \in \text{adh}(F) = F$. Donc, pour tout $u \in U$, on a : $d(u, F) > 0$, et $\frac{1}{d(u, F)}$ est un réel > 0 . La fonction δ est parfaitement définie sur $U \times U$.

$\forall u, v \in U : \delta(u, v) \geq 0$ car $d(u, v) \geq 0$ et une valeur absolue est ≥ 0 .

$\forall u, v \in U : \delta(u, v) \geq d(u, v)$. Donc : $\delta(u, v) = 0 \implies d(u, v) = 0 \implies u = v$, car d est une distance.

$\forall u, v \in U :$

$\delta(u, v) = d(u, v) + \left| \frac{1}{d(u, F)} - \frac{1}{d(v, F)} \right| = d(v, u) + \left| \frac{1}{d(v, F)} - \frac{1}{d(u, F)} \right| = \delta(v, u) : \delta$ est symétrique parce que d est une distance.

$\forall u, v, w \in E :$

$$\begin{aligned} \delta(u, v) &\leq d(u, w) + d(w, v) + \left| \frac{1}{d(u, F)} - \frac{1}{d(w, F)} + \frac{1}{d(w, F)} - \frac{1}{d(v, F)} \right| \\ &\leq [d(u, w) + \left| \frac{1}{d(u, F)} - \frac{1}{d(w, F)} \right|] + [d(w, v) + \left| \frac{1}{d(w, F)} - \frac{1}{d(v, F)} \right|] \\ &\leq \delta(u, w) + \delta(w, v). \delta \text{ est une distance sur } U. \spadesuit \end{aligned}$$

2) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de U convergente vers $u \in U$ dans $(U, \delta) :$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(u_n, u) = 0$. Mais $0 \leq d(u_n, u) \leq \delta(u_n, u)$ pour tout n , et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u) = 0$.

(u_n) est convergente vers u dans $(U, d|_{U \times U})$. \spadesuit

Réciproquement, si $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$ dans $(U, d|_{U \times U})$, notons qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in U : \delta(u, v) &= d(u, v) + \frac{|d(v, F) - d(u, F)|}{d(u, F).d(v, F)} \leq d(u, v) + \frac{d(u, v)}{d(u, F).d(v, F)} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{d(u, F).d(v, F)}\right).d(u, v). \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \delta(u_n, u) \leq \left(1 + \frac{1}{d(u_n, F).d(u, F)}\right).d(u_n, u).$$

On aura le résultat cherché si $\frac{1}{d(u_n, F).d(u, F)}$ est une quantité bornée ; mais $d(\cdot, F)$ est une fonction continue sur E , donc sur U , et : $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, F) = d(u, F)$.

Donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |d(u_n, F) - d(u, F)| \leq \varepsilon ;$

faisant $\varepsilon = \frac{1}{2}d(u, F)$, il vient : $\frac{1}{d(u_n, F).d(u, F)} \leq \frac{2}{[d(u, F)]^2}$, et le résultat :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(u_n, u) = 0. \spadesuit$$

Nota : Dire simplement que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, F) = d(u, F) > 0$ suffisait.

3) Prenons $E = \mathbb{R}$ usuel, $U =]0, +\infty[$ et donc $F =]-\infty, 0]$.

$$\forall s, t \in U : \delta(s, t) = |s - t| + \left| \frac{1}{s} - \frac{1}{t} \right| = |s - t| + \frac{|s - t|}{s.t}.$$

On sait que $d \leq \delta$. Supposons que $\delta \leq C.d$ pour un $C > 0 : |s - t| + \frac{|s - t|}{s.t} \leq C.|s - t|$ implique si $s \neq t : 1 + \frac{1}{s.t} \leq C \implies s.t \geq \frac{1}{C-1}$: on peut toujours supposer que $C > 1$, et on arrive à une impossibilité en faisant $s = \frac{1}{n}, t = 1$, pour n assez grand. \spadesuit

d et δ sont donc topologiquement équivalentes (la topologie définie est la même) mais ne sont pas équivalentes.

4) Soit (u_n) une suite de Cauchy pour δ d'éléments de $U :$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N} : p \geq N \text{ et } q \geq N \implies \delta(u_p, u_q) \leq \varepsilon, \text{ soit :}$$

$$d(u_p, u_q) + \left| \frac{1}{d(u_p, F)} - \frac{1}{d(u_q, F)} \right| \leq \varepsilon, \text{ ce qui implique :}$$

(a) la suite (u_n) est de Cauchy pour d , et

(b) la suite $\left(\frac{1}{d(u_n, F)}\right)_n$ est de Cauchy dans \mathbb{R} .

(a) implique, puisque (E, d) est complet, que (u_n) est convergente vers $u \in E$ [pas $u \in U$ a priori !], et (b) implique que la suite $\left(\frac{1}{d(u_n, F)}\right)_n$ est bornée dans $\mathbb{R} :$

$$\exists M \text{ réel } > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \frac{1}{d(u_n, F)} \leq M \implies \forall n \in \mathbb{N} : d(u_n, F) \geq \frac{1}{M} > 0.$$

D'où, puisque $d(\cdot, F)$ est continue, et par prolongement des inégalités :

$$d(u, F) \geq \frac{1}{M} > 0 \implies u \in U. \text{ Donc } (u_n) \text{ tend vers } u \in U \text{ dans le sous-espace métrique } (U, d|_{U \times U}), \text{ et d'après 2) : } (u_n) \text{ tend vers } u \text{ dans } (E, \delta) \text{ qui est par conséquent complet. } \spadesuit$$

☞ **Exercice 3.1.**

Les démonstrations diffèrent un peu suivant la nature des espaces et de leurs éléments, mais le principe sera toujours le même : on démontre que l'espace considéré est fermé dans un espace métrique complet, et on applique le Th. 2.1 (ii).

Corollaire 3.2. : Puisqu'une suite convergente est bornée, $c(F_\delta)$ est un sous-ensemble de l'espace métrique $\mathcal{B}(\mathbb{N}, F_\delta)$. Démontrons que $c(F_\delta)$ est fermé dans $\mathcal{B}_\infty(\mathbb{N}, F_\delta)$.

Soit $U = (u_1, \dots, u_n, \dots) \in \text{adh}[c(F_\delta)]$. $\forall \varepsilon > 0, \exists V = (v_1, \dots, v_n, \dots) \in c(F_\delta) : d_\infty(U, V) \leq \varepsilon$.

Par définition, $\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = v$ existe dans $F_\delta : \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n : n \geq N \implies \delta(v_n, v) \leq \varepsilon$.

Donc, pour tout $n \geq N : \delta(u_n, v) \leq \delta(u_n, v_n) + \delta(v_n, v) \leq d_\infty(U, V) + \varepsilon \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. ♦

Remarque : On peut remplacer \mathbb{N} par $S \subset \mathbb{N}$, S infini.

La démonstration pour $c_0(F)$ [($F, \|\cdot\|$) e.v.n.] est exactement la même (la faire à titre d'entraînement).

Corollaire 3.3. : $\mathcal{CB}(F, G)$ est – par définition – un sous-ensemble de $\mathcal{B}(F, G)$. Démontrons qu'il y est fermé pour d_∞ .

Soit $f \in \text{adh}[\mathcal{CB}(F, G)]$. $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{CB}(F, G) : d_\infty(f, g) \leq \varepsilon$. Démontrons que f est continue sur F .

$g \in \mathcal{CB}(F, G)$ et donc : $\forall u \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v \in F : \delta(u, v) \leq \eta \implies \delta[g(u), g(v)] \leq \varepsilon$; on a alors :

$$\begin{aligned} \delta[f(u), f(v)] &\leq \delta[f(u), g(u)] + \delta[g(u), g(v)] + \delta[g(v), f(v)] \\ &\leq d_\infty(f, g) + \varepsilon + d_\infty(f, g) \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \text{ dès que } v \in F \text{ vérifie } \delta(u, v) \leq \eta. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ♦

En particulier, les fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$ sont bornées, et donc :

$\mathcal{C}_\infty([a, b], \mathbb{R}) = \mathcal{CB}_\infty([a, b], \mathbb{R})$ est un espace de Banach. ♦

Corollaire 3.4. : Les applications de $\mathcal{B}_0(F, G)$ transforment les bornés en bornés et « tendent vers 0 à l'infini ».

Prouvons d'abord que $\mathcal{B}_0(F, G) \subset \mathcal{B}(F, G)$.

Soit $f \in \mathcal{B}_0(F, G)$; pour $\varepsilon = 1, \exists M_f > 0, \forall u \in F : \|u\| \geq M_f \implies \|f(u)\| \leq 1$, d'une part et, d'autre part : $B = \{u \in F / \|u\| < M_f\} = B(0, M_f)$ est un borné de $F : \forall u \in B : \|f(u)\| \leq C$ constant, par (i). Donc f est une application bornée. ♦

Soit à présent $f \in \text{adh}[\mathcal{B}_0(F, G)]$. $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in \mathcal{B}_0(F, G) : d_\infty(f, g) \leq \varepsilon$.

Montrons que $f \in \mathcal{B}_0(F, G)$.

(i) Soit B borné dans $F : g(B)$ est borné dans G ; soit $u \in B$:

$$\|f(u)\| \leq \|f(u) - g(u)\| + \|g(u)\| \leq d_\infty(f, g) + \text{diam } g(B) \leq \varepsilon + \text{diam } g(B).$$

Donc, f transforme les bornés en bornés.

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists M_g > 0, \forall u \in F : \|u\| \geq M_g \implies \|g(u)\| \leq \varepsilon$.

$\|f(u)\| \leq \|f(u) - g(u)\| + \|g(u)\| \leq \|f - g\|_\infty + \varepsilon \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, pour $\|u\| \geq M_g$. ♦

Corollaire 3.5. : $\mathcal{R}([a, b], \mathbb{R})$ est – par définition même – l'adhérence pour $\|\cdot\|_\infty$ de $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ (fonctions en escalier). C'est donc un fermé, qui est par conséquent complet dans $\mathcal{B}_\infty([a, b], \mathbb{R})$ complet. ♦

☞ **Exercice 3.2.**

Soit $\widehat{u} \in E$ un point fixé vérifiant $\|\widehat{u}\| = 1$. D'après le résultat admis (un corollaire du Théorème de Hahn-Banach) : $\exists \varphi \in E'$ telle que $\varphi(\widehat{u}) = \|\varphi\|' = 1$. A tout $v \in F$, faisons correspondre $A_v : E \rightarrow F$ définie par $A_v(u) = (v \otimes \varphi)(u) = \varphi(u).v$ pour tout $u \in E$.

On sait que $A_v \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\|A_v\| = \|v\| \cdot \|\varphi\|' = \|v\|$ [Chap. X, Exemple 2.5].

Soit à présent (v_n) une suite de Cauchy d'éléments de F . On notera $A_n := A_{v_n}$.

$\forall u \in E : \|A_p(u) - A_q(u)\| = \|\varphi(u).v_p - \varphi(u).v_q\| = |\varphi(u)| \cdot \|v_p - v_q\|$, d'où :

$$\begin{aligned} \|A_p - A_q\|_{\mathcal{L}(E, F)} &= \sup_{\|u\| \leq 1} \|A_p(u) - A_q(u)\| = \sup_{\|u\| \leq 1} |\varphi(u)| \cdot \|v_p - v_q\| \\ &= \|v_p - v_q\| \cdot \sup_{\|u\| \leq 1} |\varphi(u)| = \|v_p - v_q\| \cdot \|\varphi\|' = \|v_p - v_q\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, (A_n) est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Comme $\mathcal{L}(E, F)$ est complet, la suite (A_n) est convergente dans $\mathcal{L}(E, F)$, vers $A \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\forall u \in E : \|A_n(u) - A(u)\| \leq \|A_n - A\| \cdot \|u\|$, et donc $\forall u \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n(u)) = A(u)$.

En particulier : $\lim_{n \rightarrow \infty} (A_n(\hat{u})) = A(\hat{u})$, et $A_n(\hat{u}) = A_{v_n}(\hat{u}) = \varphi(\hat{u}) \cdot v_n = v_n$.

Donc, la suite (v_n) est convergente, de limite $A(\hat{u})$, et F est donc complet. ♦

Observons que l'application $\Phi : F \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$, $v \mapsto A_v$, est linéaire (évident) et isométrique : $\|\Phi(v)\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|A_v(u)\| = \|A_v\| = \|v\|$ (cf. ci-dessus).

F est donc isométrique à l'e.v.n. $\Phi(F) \subset \mathcal{L}(E, F)$. Cette isométrie n'est évidemment pas surjective sauf si $\dim(E) = 1$.

Exercice 3.3.

$$1) \|B_0\| = \|0_E\| = 0 \leq \sqrt{\rho};$$

$$B_1 = \frac{1}{2}(Id_E - A) : \|B_1\| = \frac{1}{2}\|Id_E - A\| \leq \frac{1}{2}\rho \leq \rho \leq \sqrt{\rho} \text{ car } 0 \leq t \leq 1 \text{ entraîne } t^2 \leq t \leq \sqrt{t}.$$

On raisonne par récurrence, et on suppose que $\|B_n\| \leq \sqrt{\rho}$.

$$\|B_{n+1}\| = \frac{1}{2}\|Id_E - A + B_n^2\| \leq \frac{1}{2}\|Id_E - A\| + \frac{1}{2}\|B_n\|^2 \leq \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\rho = \rho \leq \sqrt{\rho}. \blacklozenge$$

$$B_{n+p} = \frac{1}{2}Id_E - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(B_{n+p-1})^2 \text{ et } B_n = \frac{1}{2}Id_E - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}(B_{n-1})^2$$

$$D'où : \quad B_{n+p} - B_n = \frac{1}{2}(B_{n+p-1})^2 - \frac{1}{2}(B_{n-1})^2. \blacklozenge$$

2) B_0 et B_1 sont des polynômes par rapport à A .

Par récurrence, on suppose que $B_n = \sum_{1 \leq k \leq N(n)} \alpha_k A^k$. D'après l'expression de B_{n+1} , il est clair

que B_{n+1} est aussi un polynôme d'indéterminée A .

L'identité $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ est vraie dans tout anneau dès que a et b sont commutables, i.e. tels que $a.b = b.a$ (c'est évident). Or dans $\mathcal{L}(E)$, si P et Q sont deux polynômes de la même indéterminée A , on a : $P \circ Q = Q \circ P$, car $A^p \circ A^q = A^{p+q} = A^q \circ A^p$.

Par conséquent, on a : $B_p^2 - B_q^2 = (B_p + B_q) \circ (B_p - B_q)$ comme demandé. ♦

$$\|B_{n+p} - B_n\| = \frac{1}{2}\|(B_{n+p-1})^2 - (B_{n-1})^2\| \text{ [par 1]}$$

$$= \frac{1}{2}\|(B_{n+p-1} + B_{n-1}) \circ (B_{n+p-1} - B_{n-1})\| \text{ [ci-dessus]}$$

$$\leq \frac{1}{2}\|B_{n+p-1} + B_{n-1}\| \cdot \|B_{n+p-1} - B_{n-1}\|$$

$$\leq \frac{1}{2}(\|B_{n+p-1}\| + \|B_{n-1}\|) \cdot \|B_{n+p-1} - B_{n-1}\|$$

$$\leq \frac{1}{2} \times 2\sqrt{\rho} \|B_{n+p-1} - B_{n-1}\| \text{ [par 1]}. \blacklozenge$$

On a donc aussi : $\|B_{n+p-1} - B_{n-1}\| \leq \sqrt{\rho} \|B_{n+p-2} - B_{n-2}\|, \dots$, et :

$$\|B_{p+1} - B_1\| \leq \sqrt{\rho} \|B_p - B_0\|;$$

en remplaçant, on obtient, puisque $B_0 = 0_E$:

$$\|B_{n+p-1} - B_{n-1}\| \leq (\sqrt{\rho})^n \|B_p\| \leq (\sqrt{\rho})^n \sqrt{\rho} = (\sqrt{\rho})^{n+1}. \text{ Q.E.D. } \blacklozenge$$

3) Puisque $\rho \in [0, 1]$, $\sqrt{\rho} \in [0, 1]$, et $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{\rho})^{n+1} = 0$.

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty} \|B_{n+p} - B_n\| = 0$, et la suite (B_n) est de Cauchy dans $\mathcal{L}(E)$. Or E est complet, donc $\mathcal{L}(E)$ l'est aussi [Th. 3.2]. Par conséquent, (B_n) est convergente dans $\mathcal{L}(E)$; notons $B \in \mathcal{L}(E)$ sa limite. ♦

En passant à la limite dans l'expression de B_{n+1} (loisible car les opérations qui y figurent sont continues), on a : $B = \frac{1}{2}(Id_E - A + B^2) \implies \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}Id_E - B + \frac{1}{2}B^2$ et $A = (Id_E - B)^2$ [Id_E et B commutent].

On pose : $R := Id_E - B$, et on a : $A = R^2$, i.e. « A admet un opérateur racine carrée », c'était cela le but de cet exercice. ♦

En passant à la limite dans $\|B_n\| \leq \sqrt{\rho}$, il vient : $\|B\| \leq \sqrt{\rho}$, [car $\|\cdot\|$ est continue et prolongement des inégalités]. On en tire : $\|Id_E - R\| = \|B\| \leq \sqrt{\rho}$. ♦

Fin du Chapitre XI

CHAPITRE XII

ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

(Suite)

Introduction

Le chapitre XII fait directement suite au chapitre XI, et parle encore des espaces métriques complets.

Ce chapitre est composé de trois paragraphes plutôt hétéroclites : le §1 contient des résultats importants de *prolongement par densité des applications uniformément continues*.

Le théorème relatif au prolongement des applications linéaires continues par densité est utilisé très fréquemment en analyse fonctionnelle, en théorie de la mesure, etc.

Le §2 contient des résultats tout à fait fondamentaux sur les espaces vectoriels normés de *dimension finie* ; les chapitres XIII et XIV contiendront d'autres résultats caractéristiques des e.v.n. de dimension finie.

Les étudiants qui enseignent dans le secondaire trouveront certainement matière ici pour approfondir et clarifier leur connaissance de \mathbb{R} et \mathbb{R}^n .

Tous ces résultats doivent être parfaitement connus.

Le §3 constitue une (trop brève) introduction à l'étude des *séries* dans les e.v.n. On a fait l'impasse sur la notion, pourtant très intéressante, de famille sommable . . .

Les résultats élémentaires sur les séries sont très importants. Revoir un cours de D.E.U.G. sur les séries numériques (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) et les séries de fonctions me paraît une excellente chose. La définition donnée ici d'une série semble effroyablement snob à certains auteurs qui préféreraient dire qu'une série est une suite (u_n) dont on étudie les sommes $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$. L'auteur ne se sent pas interpellé par ce litige . . .

Le peu qui est dit sur les bases de Schauder peut être ignoré . . .

Les démonstrations du §1 sont longues (d'autant plus que nous les avons détaillées à l'extrême), mais elles sont faciles, car l'enchaînement des étapes est très naturel.

En bref, ce chapitre est d'un niveau de difficulté très moyen, et ne devrait pas vous poser de gros problèmes.

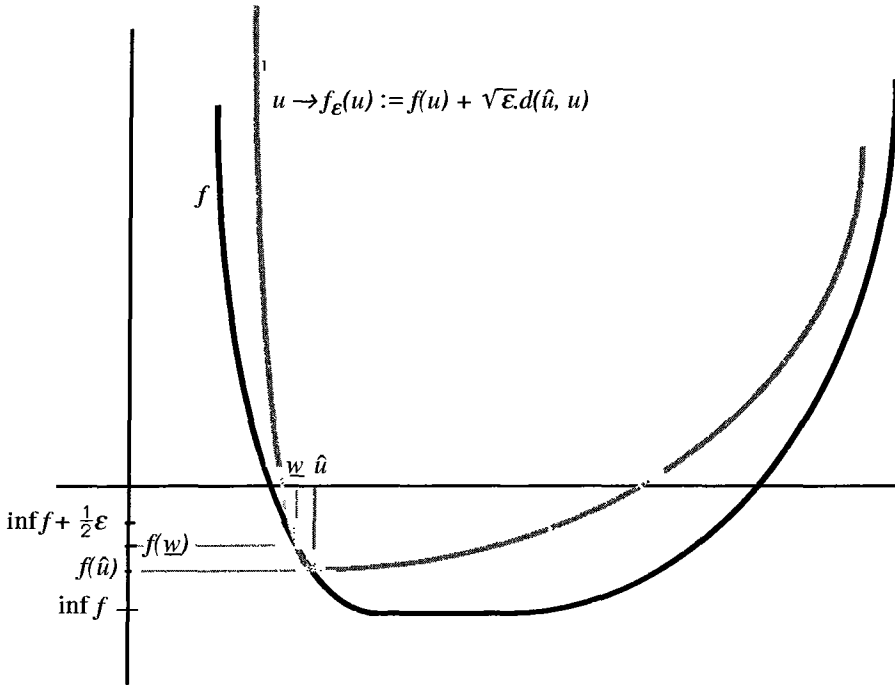
✍ **Exercices indispensables** : 1.1, 2.1, **2.2**, 3.1, 3.2.

Trois Lectures / Problèmes sont proposées. La première sur le principe de Ekeland est profonde, et très intéressante à cause de ses nombreuses applications ; elle est intéressante aussi parce que c'est le seul résultat relativement récent (1972) de ce cours.

Les deux autres Lectures–Problèmes proposent deux approches distinctes du très important théorème de prolongement de Tietze-Urysohn.

Tous ces résultats mériteraient largement de faire partie du cours proprement dit, mais celui-ci doit occuper une place raisonnable, alors il faut bien s'arrêter quelque part . . . Les étudiants qui disposent de tout leur temps et qui ont l'impression d'être à l'aise dans ce cours gagneront beaucoup à l'étude de ces trois Lectures–Problèmes.

DANS LE PROCHAIN CHAPITRE ON ABORDE LA COMPACTITÉ . . . BON COURAGE, VOUS EN AUREZ BESOIN !



Principe de Ekeland

Soit (E, d) un espace métrique *complet* et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée inférieurement et semi-continue inférieurement.

Soit $\epsilon > 0$ et soit $\underline{w} \in E$ tel que $\inf_{u \in E} f(u) \leq f(\underline{w}) < \inf_{u \in E} f(u) + \frac{1}{2} \epsilon$.

Il existe $\hat{u} \in E$ tel que :

$d(\hat{u}, \underline{w}) \leq \sqrt{\epsilon}$, $f(\hat{u}) \leq f(\underline{w})$, f_ϵ définie par $f_\epsilon(u) := f(u) + \sqrt{\epsilon} d(\hat{u}, u)$ atteint son *minimum* $f_\epsilon(\hat{u}) = f(\hat{u})$ au seul point \hat{u} .

CHAPITRE XII

ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS (Suite)

1. THÉORÈMES DE PROLONGEMENT

Théorème 1.1. [de prolongement par densité des applications uniformément continues] (TRÈS IMPORTANT)

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques. On suppose que l'espace métrique (F, δ) est complet.

Soit A une partie partout dense de (E, d) . Soit enfin $f : A \rightarrow F$ une application uniformément continue sur A .

Conclusion : il existe une application unique $g : E \rightarrow F$ telle que $g|_A = f$ et uniformément continue sur E .

De plus : si f est lipschitzienne de constante $k > 0$, il en est de même de g .

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS après la partie Cours. ♦

Le point fondamental de cette démonstration est la construction de g , c'est-à-dire le calcul de $g(u)$ en tout point $u \in E$: $g(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n))$, où (a_n) est une suite de points de A convergente vers $u \in E$, cette suite étant arbitraire.

Commentaires :

1) L'unicité est immédiate [Chap. VII, Th. 2.3].

2) Le résultat devient faux si f est seulement supposée continue sur A . Un exemple très simple est donné par la situation suivante : $E = [0, 1]$, $A =]0, 1]$, $F = \mathbb{R}$ et $f(t) = \sin(\frac{1}{t})$ [le « sinus des topologues »].

3) Le résultat est également faux si F n'est pas supposé complet. Par exemple $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, $t \mapsto t$ ne peut pas s'étendre en une fonction continue $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$.

☞ **Exercice 1.1.** (très facile) Vérifiez les trois assertions des Commentaires.

Le théorème suivant, « correspondant linéaire » du précédent, est d'utilisation constante en analyse fonctionnelle, au point que son intervention n'est pas toujours explicitée ; souvent aussi, le prolongement est noté comme l'application de départ.

Théorème 1.2. [de prolongement par densité des applications linéaires continues] (FONDAMENTAL)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés sur le même corps \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). On suppose que $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach. Soit E_0 un sous-espace vectoriel partout dense de $(E, \|\cdot\|_E)$. Soit enfin $A \in \mathcal{L}(E_0, F)$.

Conclusion : il existe $B \in \mathcal{L}(E, F)$ unique telle que $B|_{E_0} = A$, et on a :

$$(1.1) \quad \|B\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|A\|_{\mathcal{L}(E_0, F)}.$$

Cas particulier : Si $\varphi \in E'_0$ il existe $\psi \in E'$ unique telle que $\psi|_{E_0} = \varphi$ et $\|\psi\|_{E'} = \|\varphi\|_{E'_0}$.

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS.

En ce qui concerne le point particulier, il suffit de remarquer que : $E'_0 = \mathcal{L}(E_0, \mathbb{K})$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est complet. ♦

Corollaire 1.1.

|| Avec les notations et les hypothèses du Th. 1.2 : il existe une *isométrie linéaire et surjective* entre les e.v.n. $\mathcal{L}(E_0, F)$ et $\mathcal{L}(E, F)$.

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS. ♦

Nous rencontrerons plus tard des applications des deux théorèmes ci-dessus, en particulier dans le Chap. XV. Mais en voici tout de suite un exemple non trivial.

Exemple 1.1. On considère l'e.v.n. $E = \mathcal{R}_\infty([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ des fonctions *réglées*, et le sous-espace vectoriel $E_0 = \mathcal{E}_\infty([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ des fonctions *en escalier*.

On définit $\varphi \in E'_0$ de la manière suivante :

soit $f \in E_0$ et soit $t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = \beta$ un découpage de $[\alpha, \beta]$ tel que $f(t) = \xi_k \in \mathbb{R}$, si $t \in]t_k, t_{k+1}[$ ($0 \leq k \leq n-1$) ; on pose : $\varphi(f) := \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) \xi_k$; on a : $|\varphi(f)| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |\xi_k| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k) = (\beta - \alpha) \|f\|_\infty$.

Notons que $\varphi(f)$ n'est rien d'autre que $\int_\alpha^\beta f(t) dt$. Le prolongement par densité ψ de φ à E n'est autre que l'intégrale d'une fonction réglée : $\psi(g) = \int_\alpha^\beta g(t) dt$ qu'on sait calculer en prenant une suite (g_n) de fonctions en escalier convergente (pour $\|\cdot\|_\infty$) vers g : $\psi(g) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi(g_n))$.

On peut de la même manière définir l'intégrale d'une fonction continue à partir de l'intégrale des polynômes [qu'on sait expliciter !], cela grâce au Th. de Weierstraß. Ces exemples sont de nature pédagogique, mais l'idée de prolongement y est bien illustrée et prouve – une fois de plus – l'intérêt de la notion de densité = approximation.

2. ESPACES VECTORIELS NORMÉS DE DIMENSION FINIE

Soit E un espace vectoriel de dimension *finie* N sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Soit (e_1, e_2, \dots, e_N) une *base* de l'espace E : quel que soit $u \in E$ il existe un N -uplet *unique* $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) \in \mathbb{K}^N$ tel que : $u = \sum_{i=1}^N \xi_i e_i$.

Notons $\xi_i = \varepsilon^i(u)$, ce qui définit (à cause de l'unicité) N *applications* $\varepsilon^i : E \rightarrow \mathbb{K}$.

On a : $\varepsilon^i(e_i) = 1$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, et $\varepsilon^i(e_j) = 0$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$ tels que $i \neq j$.

On note souvent : $\varepsilon^i(e_j) = \delta_j^i$ [δ_j^i est appelé *symbole*, ou δ , de *Kronecker*].

Les ε^i sont des éléments de $E^* = L(E, \mathbb{K})$; $(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^N)$ est une base de E^* , qui est donc de dimension N , comme E .

☞ **Exercice 2.1.** (très facile) Vérifiez ce résultat, ainsi que le résultat ci-dessous.

Considérons l'application :

$$(2.1) \quad \Phi : \mathbb{K}^N \rightarrow E, x = (\xi_1, \dots, \xi_N) \mapsto \Phi(x) = u = \sum_{i=1}^N \xi_i e_i.$$

Φ est *linéaire* et *bijective*. Son inverse $\Phi^{-1} : E \rightarrow \mathbb{K}^N$ est donné par :

$$(2.2) \quad \Phi^{-1}(u) = \Phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^N \xi_i e_i\right) = (\xi_1, \dots, \xi_N) = x = (\varepsilon^1(u), \dots, \varepsilon^N(u)).$$

Donc Φ^{-1} est l'application à valeurs dans \mathbb{K}^N donnée par $\Phi^{-1} = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^N)$.

Lemme 2.1. (FONDAMENTAL)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{K} de dimension finie N . Soit (e_1, \dots, e_N) une base de E . On munit \mathbb{K}^N de la norme $\|\cdot\|_\infty$ (pour $x = (\xi_1, \dots, \xi_N) \in \mathbb{K}^N$: $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |\xi_i|$). On a :

$$(2.3) \quad \Phi \in \mathcal{I}\text{som}(\mathbb{K}^N, E).$$

Autrement dit, il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que :

$$(2.4) \quad \forall x \in \mathbb{K}^N : c\|x\|_\infty \leq \|\Phi(x)\| \leq C\|x\|_\infty.$$

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS. ♦

Théorème 2.2. (FONDAMENTAL)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{K} de dimension finie : $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach.
 Tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un e.v.n. sur \mathbb{K} arbitraire est une partie complète de cet e.v.n. En particulier, tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un e.v.n. quelconque est fermé dans cet e.v.n.

Démonstration :

Soit $N = \dim_{\mathbb{K}}(E)$; on choisit une base (e_1, \dots, e_N) de E .

Soit $\Phi \in \mathcal{I}\text{som}(\mathbb{K}^N, E)$ comme dans le Lemme ci-dessus.

On sait que $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach [Chap. XI, Corol. 2.1], donc $(E, \|\cdot\|)$ est aussi un espace de Banach [Chap. XI, Corol. 2.2]. ♦

Soit à présent $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. de dimension quelconque, et soit F un sous-espace vectoriel de E vérifiant $\dim_{\mathbb{K}}(F) < \infty$. L'e.v.n. induit $(F, \|\cdot\|_F)$ est un espace de Banach d'après ce qui précède ; c'est dire – par définition – que F est une partie complète de $(E, \|\cdot\|)$. D'après le Th. 2.1 (i) du Chap. XI, et ce qui précède : F est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|)$. ♦

Théorème 2.3. (FONDAMENTAL)

Soit E un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie : deux normes quelconques $\|\cdot\|$ et $|||\cdot|||$ sur E sont équivalentes.

Démonstration :

D'après le Lemme ci-dessus :

$$\exists c > 0, \exists C > 0, \forall x \in \mathbb{K}^N : c\|x\|_\infty \leq \|\Phi(x)\| \leq C\|x\|_\infty \text{ et :}$$

$$\exists k > 0, \exists K > 0, \forall x \in \mathbb{K}^N : k\|x\|_\infty \leq |||\Phi(x)||| \leq K\|x\|_\infty.$$

Posant $x = \Phi^{-1}(u) \iff u = \Phi(x)$, on obtient : $\forall u \in E$:

$$c\|\Phi^{-1}(u)\|_\infty \leq \|u\| \leq C\|\Phi^{-1}(u)\|_\infty, \text{ et } k\|\Phi^{-1}(u)\|_\infty \leq |||u||| \leq K\|\Phi^{-1}(u)\|_\infty,$$

d'où l'on tire :

$$\|u\| \leq C\|\Phi^{-1}(u)\|_\infty \leq \frac{C}{k}|||u|||, \text{ et : } \|u\| \geq c\|\Phi^{-1}(u)\|_\infty \geq \frac{c}{K}|||u|||.$$

D'où le résultat cherché : $\forall u \in E : \frac{c}{K}|||u||| \leq \|u\| \leq \frac{C}{k}|||u|||$. ♦

Commentaire :

Sur un espace vectoriel E de dimension finie, toutes les normes [et non pas toutes les distances !!!] définissent une seule et même topologie, i.e. la même famille d'ouverts.

On parle de **topologie naturelle** pour qualifier cette topologie.

On démontre (nous ne le feront pas ici) que la topologie naturelle est déterminée par LA famille d'ouverts \mathcal{O} telle que :

(i) \mathcal{O} est la plus petite possible,

(ii) $\forall u, v \in E, u \neq v, \exists O \in \mathcal{O}, \exists U \in \mathcal{O} : O \cap U = \emptyset, u \in O, v \in U,$

(iii) les opérations $E \times E \rightarrow E, (u, v) \mapsto u + v$ et $\mathbb{K} \times E \rightarrow E, (\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u$ sont continues.

Lemme 2.4.

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des e.v.n. sur le même corps \mathbb{K} , de *dimension finie*. Toute application $A : E \rightarrow F$ linéaire est *continue* sur E . Autrement dit :

$$(2.5) \quad \mathcal{L}(E, F) = L(E, F)$$

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS. ♦

Théorème 2.5. (FONDAMENTAL)

Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n. sur \mathbb{K} de *dimension finie* et $(F, \|\cdot\|_F)$ un e.v.n. sur \mathbb{K} de dimension arbitraire. Toute application $A : E \rightarrow F$ linéaire est *continue*. Autrement dit :

$$(2.6) \quad \mathcal{L}(E, F) = L(E, F)$$

Commentaire : Ne pas inverser le départ et l'arrivée ! Si E n'est pas de dimension finie, le résultat devient *faux*, même si $F = \mathbb{K}$; on sait en effet qu'il existe des formes linéaires discontinues [cf. Exemples dans le Chap. X]. D'ailleurs (pas de démonstration ici) : $E^* = E'$ si et seulement si $\dim(E) < \infty$.

Démonstration :

$$\dim[\text{Im}(A)] = \text{rg}(A) = \text{codim}_E[\text{Ker}(A)] \leq \dim(E) < \infty.$$

$\underline{A} : E \rightarrow \text{Im}(A), u \mapsto \underline{A}(u) = A(u)$ est continue, d'après le Lemme 2.2, de $(E, \|\cdot\|_E)$ sur le sous-e.v.n. de $F : (\text{Im}(A), \|\cdot\|_{F|_{\text{Im}(A)}})$.

D'autre part, l'injection naturelle $j : \text{Im}(A) \rightarrow F, v \mapsto v$ est aussi continue [Chap. VII, Exemple 1.3]. Donc par composition [Chap. VII, Prop.2.1] : $A = j \circ \underline{A}$ est continue de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$. ♦

☞ **Exercice 2.2.** (facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) *séparable*.

Démontrez qu'il existe une suite *totale* dans E constituée par des vecteurs *linéairement indépendants* [cf. Chap. IV, où ce résultat est annoncé].

3. SÉRIES DANS LES ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Définition 3.1.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E .

On appelle **série, de terme général** u_n , le **couple** constitué par la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et par la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$(3.1) \quad \forall n \in \mathbb{N} : S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i$$

appelée **somme partielle de rang** n de la série.

Une série est dite **convergente** dans $(E, \|\cdot\|)$ si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite $u \in E$. u est alors appelé la **somme de la série** et est notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u$.

Pour une série convergente, $R_n := u - S_n$ est appelé le **reste de rang n** de la série, on le note parfois $\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i$.

Si la série n'est pas convergente, on dit qu'elle est **divergente**.

Comme il est extrêmement rare qu'on puisse deviner la somme d'une série pour démontrer qu'elle converge effectivement vers l'élément deviné (c'est déjà le cas pour $E = \mathbb{R}$, d'ailleurs), la notion de série n'a qu'un intérêt limité hors du cadre des espaces de Banach.

Pour les espaces de Banach, on a le **critère de Cauchy pour les séries** suivant :

Proposition 3.1.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur \mathbb{K} .
Pour qu'une série de terme général u_n soit convergente, il faut et il suffit qu'elle vérifie le critère de Cauchy, à savoir :

$$(3.2) \quad \lim_{p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty} \|S_p - S_q\| = 0, \text{ soit :}$$

$$(3.3) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow \|u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n+p}\| \leq \varepsilon.$$

Démonstration : Elle consiste simplement à écrire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc convergente dans E complet. ♦

Remarque : La convergence ou la divergence d'une série n'est pas affectée par le remplacement de la norme de l'e.v.n. considéré par une norme équivalente.

Définition 3.2.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{K} .
On dit qu'une série de terme général u_n est **normalement convergente** [ou encore **absolument convergente**] si la série de terme général $\|u_n\|$ (à termes réels ≥ 0) est convergente.

Remarque : Même dans le cas $E = \mathbb{R}$, une série peut converger sans converger normalement ; par exemple, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ (série *harmonique alternée*) converge tandis que la série de terme général $\frac{1}{n}$ (série *harmonique*) diverge.

Théorème 3.1. (TRÈS IMPORTANT)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur \mathbb{K} . Si une série, de terme général u_n , est **normalement convergente**, elle est **convergente**. De plus, on a la majoration suivante :

$$(3.4) \quad \left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|$$

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS. ♦

Exemple 3.1. Soit $F = c_{00}(\mathbb{R}) = \{(\xi_n)_{n \geq 1} / \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N : \xi_n = 0\}$ [où N dépend de la suite], le sous-e.v.n. de $E = c_0(\mathbb{R})$ [espace des suites de réels tendant vers 0] normé par $\|(\xi_n)\|_{\infty} = \max_{n \in \mathbb{N}^*} |\xi_n|$. Pour tout $n \geq 1$ on considère la suite de F suivante : $u_n = (0, 0, \dots, 0, \frac{1}{n^2}, 0, \dots)$ (le seul terme non nul est au rang n), et on envisage la série de terme général u_n .

$\|u_n\|_{\infty} = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$, et donc : $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (= \frac{\pi^2}{6})$. La série de terme général u_n est **normalement convergente**.

Considérons maintenant $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, 0, 0, \dots)$ qui est une suite d'éléments de F . Nous allons voir que la suite $(S_n)_n$ n'a pas de limite dans F , i.e. que la série de terme général u_n est divergente dans F .

Remarquons au passage que $(S_n)_n$ vérifie le *critère de Cauchy* : pour tout $q \geq p$,

$$\|S_p - S_q\|_\infty = \|(1, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{p^2}, 0, \dots) - (1, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{p^2}, \frac{1}{(p+1)^2}, \dots, \frac{1}{q^2}, 0, \dots)\|_\infty$$

$$= \|(0, \dots, 0, \frac{1}{(p+1)^2}, \frac{1}{(p+2)^2}, \dots, \frac{1}{q^2}, 0, 0, \dots)\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq q-p} \frac{1}{(p+k)^2}$$

$$= \frac{1}{(p+1)^2} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

A présent, soit $u = (1, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \dots) \in c_0$, mais $u \notin c_{00}$:

$$\|u - S_n\|_\infty = \|(1, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2}, \dots) - (1, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{n^2}, 0, \dots)\|_\infty$$

$$= \|(0, 0, \dots, 0, \frac{1}{(n+1)^2}, \frac{1}{(n+2)^2}, \dots)\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$
 et donc la suite $(S_n)_n$ converge dans $E = c_0$ vers $u \notin c_{00}$; elle ne peut pas converger simultanément vers un $v \in c_{00}$, sinon elle aurait deux limites distinctes. ♦

Nous savons [Chap. XI, Exercice 3.1] que c_0 est complet, nous venons de prouver, *passim*, que son sous-espace c_{00} n'est pas complet, i.e. n'est pas fermé dans c_0 .

☞ **Exercice 3.1.** (pas très facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{K} . Démontrez que si toute série dans E normalement convergente est convergente, E est nécessairement un espace de Banach.

Nota : En principe, cet exercice dispense de l'Exemple 3.1... Mais il n'était pas inutile de montrer qu'il est facile de trouver effectivement un exemple de série non convergente mais normalement convergente.

Exemple 3.2. Exponentielle d'un opérateur

Soit $A \in \mathcal{L}(E)$, où E est un espace de Banach sur \mathbb{K} .

Considérons la série de terme général : $u_n = \frac{A^n}{n!}$, où $A^0 = Id_E$, $A^1 = A$, puis $A^2 = A \circ A$, ..., $A^{n+1} = A \circ A^n (= A^n \circ A)$.

Cette série est *normalement convergente* car $\| \frac{A^n}{n!} \| = \frac{\|A^n\|}{n!} \leq \frac{\|A\|^n}{n!}$ [Chap. X (1.14)], et donc : $\sum_{n=0}^{\infty} \| \frac{A^n}{n!} \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\|A\|^n}{n!} = e^{\|A\|}$.

Comme $\mathcal{L}(E)$ est un espace de Banach [Chap. XI : $\mathcal{L}(E, F)$ est complet si F l'est], d'après le Th.3.1, la série de terme général u_n est convergente dans $\mathcal{L}(E)$, de somme une application *linéaire* et *continue* $E \rightarrow E$ qu'on note – assez naturellement : $\exp(A)$, et qu'on appelle *l'exponentielle de l'opérateur* A .

D'après (3.4) : $\| \exp(A) \|_{\mathcal{L}(E)} \leq e^{\|A\|_{\mathcal{L}(E)}}$.

Il faut prendre garde au fait que cette exponentielle d'opérateur (= application linéaire continue) *ne possède pas* toutes les propriétés de l'exponentielle de réels ou de complexes habituelle.

Par exemple, on n'a pas, en général :

$$\exp(A + B) = \exp(A) \circ \exp(B) = \exp(B) \circ \exp(A).$$

Mais le résultat est vrai [vérifiez-le !] si A et B *commutent* [$A \circ B = B \circ A$].

En particulier, on a : $\exp(A) \circ \exp(-A) = \exp(-A) \circ \exp(A) = \exp(0_E) = Id_E$, pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$, et donc : $\forall A \in \mathcal{L}(E) : \exp(A) \in \mathcal{I} \text{som}(E) = \mathcal{GL}(E)$.

Notez aussi que $\exp(\lambda \cdot Id_E) = e^\lambda \cdot Id_E$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Voilà qui meuble un peu $\mathcal{GL}(E)$!

L'application $t \in \mathbb{K} \mapsto \exp(tA) \in \mathcal{L}(E)$ a une importance capitale dans la théorie des équations différentielles linéaires dans les espaces de Banach : voir un cours de calcul différentiel.

Pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$ fixé, $\{\exp(tA) / t \in \mathbb{K}\}$ est un sous-groupe du groupe $\mathcal{GL}(E)$.

Vous pouvez, si cela vous amuse, définir : $\sin(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$ et : $\cos(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!}$, et voir ce qui subsiste du formulaire habituel. Pareil pour $\operatorname{sh}(A) = \frac{1}{2}[\exp(A) - \exp(-A)]$ et $\operatorname{ch}(A) = \frac{1}{2}[\exp(A) + \exp(-A)]$.

Exemple 3.3. Petite perturbation d'un isomorphisme

Soit E un espace de Banach sur \mathbb{K} . Soit $A \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$.

On sait que la série de terme général $\|A\|^n$ est convergente (série géométrique de raison < 1) et que : $\sum_{n=0}^{\infty} \|A\|^n = \frac{1}{1 - \|A\|}$.

Par conséquent, d'après le Th. 3.1, les séries de terme général $u_n = A^n$ et $v_n = (-1)^n A^n$ sont *normalement convergentes* et donc convergentes ; de plus :

$$(3.5) \quad \left\| \sum_{n=0}^{\infty} A^n \right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}, \text{ et : } \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n \right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Considérons la série de somme $C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n \in \mathcal{L}(E)$, pour $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} < 1$.

Passant aux sommes partielles, on a :

$$\begin{aligned} & (Id_E + A) \circ (Id_E - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^N A^N) \\ &= (Id_E - A + A^2 - A^3 + \cdots + (-1)^N A^N) \circ (Id_E + A) = Id_E + (-1)^N A^{N+1}, \\ \text{et : } & \|(-1)^N A^{N+1}\| = \|A^{N+1}\| \leq \|A\|^{N+1}, \text{ avec } \|A\| < 1, \text{ ce qui prouve que} \\ & (-1)^N A^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0_E. \end{aligned}$$

Passant à la limite, en vertu du prolongement des identités, il vient :

$$(3.6) \quad (Id_E + A) \circ C = C \circ (Id_E + A) = Id_E, \text{ d'où l'on déduit : } \\ C = (Id_E + A)^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

Ce qu'on peut exprimer ainsi :

$$(3.7) \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{L}(E) \text{ tel que } \|A\|_{\mathcal{L}(E)} < 1, \text{ on a : } Id_E + A \in \mathcal{GL}(E), \text{ avec :} \\ (Id_E + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n$$

On a encore un peu rempli le groupe $\mathcal{GL}(E)$.

Le résultat suivant sera très important en calcul différentiel.

Proposition 3.2. (IMPORTANT)

Soient E et F des espaces de Banach tels que $\mathcal{I}\operatorname{som}(E, F) \neq \emptyset$. On a :

- (i) $\mathcal{I}\operatorname{som}(E, F)$ est un ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$,
- (ii) l'application $A \mapsto A^{-1}$, $\mathcal{I}\operatorname{som}(E, F) \rightarrow \mathcal{L}(F, E)$ est continue en tout point de $\mathcal{I}\operatorname{som}(E, F)$. C'est un *homéomorphisme* de $\mathcal{I}\operatorname{som}(E, F)$ sur $\mathcal{I}\operatorname{som}(F, E)$.

Démonstration : Remarquons que si $\mathcal{I}\operatorname{som}(E, F) = \emptyset$ (c'est le cas, par exemple, si $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$, si $n \neq m$) cet ensemble est tout de même ouvert... Mais ce n'est pas précisément le cas intéressant.

(i) Soit $A \in \mathcal{I}\operatorname{som}(E, F) \neq \emptyset$. Posons $\rho = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Soit $B \in \mathcal{L}(E, F)$ quelconque vérifiant $\|B\| < \rho$. On a : $A^{-1} \circ B \in \mathcal{L}(E)$, et : $\|A^{-1} \circ B\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B\| = \frac{\|B\|}{\rho} < 1$.

On en déduit [(3.6), (3.7)] que : $Id_E + A^{-1} \circ B \in \mathcal{GL}(E) : (Id_E + A^{-1} \circ B)^{-1}$ existe et appartient à $\mathcal{L}(E)$. Notant que $A+B = A \circ (Id_E + A^{-1} \circ B)$, on a : $(A+B)^{-1}$ existe, dans $\mathcal{L}(E, F)$, et : $(A+B)^{-1} = (Id_E + A^{-1} \circ B)^{-1} \circ A^{-1}$.

On exprimera cela en disant qu'une « petite » [de façon précise : $\|B\| < (\|A^{-1}\|)^{-1}$] « perturbation » de $A \in \mathcal{I}som(E, F)$ appartient encore à $\mathcal{I}som(E, F)$:

$$A + B \in \mathcal{I}som(E, F).$$

En particulier, $\mathcal{I}som(E, F)$ est ouvert dans $\mathcal{L}(E, F)$: soit $A \in \mathcal{I}som(E, F)$ et soit $B(A, \rho[$ la boule ouverte de centre A et de rayon $\rho = \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

Je dis que $B(A, \rho[\subset \mathcal{I}som(E, F)$, et donc que A est un point intérieur à $\mathcal{I}som(E, F)$. En effet, si $C \in B(A, \rho[: \|C - A\| < \rho$, d'où : $A + (C - A) \in \mathcal{I}som(E, F)$, soit : $C \in \mathcal{I}som(E, F)$. ♦

(ii) Reprenons $\|(A+B)^{-1} - A^{-1}\|$ avec $\|B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$.

$(A+B)^{-1} = (Id_E + A^{-1} \circ B)^{-1} \circ A^{-1}$, d'où :

$$\begin{aligned} \|(A+B)^{-1} - A^{-1}\| &= \|(Id_E + A^{-1} \circ B)^{-1} \circ A^{-1} - A^{-1}\| \\ &= \|[(Id_E + A^{-1} \circ B)^{-1} - Id_E] \circ A^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|(Id_E + A^{-1} \circ B)^{-1} - Id_E\|. \end{aligned}$$

Mais (3.7) $\implies (Id_E + A^{-1} \circ B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (A^{-1} \circ B)^n$, d'où :

$$\begin{aligned} \|(A+B)^{-1} - A^{-1}\| &\leq \|A^{-1}\| \cdot \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (A^{-1} \circ B)^n \right\| \leq \|A^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} \|A^{-1}\|^n \cdot \|B\|^n \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \|B\| \frac{1}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|B\|} = \frac{\|A^{-1}\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \cdot \|B\|} \|B\|. \end{aligned}$$

D'où le résultat cherché : $\lim_{\|B\| \rightarrow 0} \|(A+B)^{-1} - A^{-1}\| = 0$. ♦

☞ **Exercice 3.2.** (facile) [**Critère de convergence d'Abel**]. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit une série d'éléments de E de terme général $u_n = \lambda_n \cdot v_n$, avec $\lambda_n \in \mathbb{K}$ et $v_n \in E$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose vérifiées les trois conditions suivantes :

(i) $\exists M$ réel > 0 , $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N} : p \geq n \implies \|v_n + v_{n+1} + \dots + v_p\| \leq M$,

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n) = 0$,

(iii) la série de terme général $\alpha_n = |\lambda_{n+1} - \lambda_n|$ est convergente.

Démontrez que la série de terme général u_n est convergente dans E .

Il y aurait encore beaucoup à dire sur les séries ... Il serait bien intéressant d'introduire la notion de famille sommable ... Mais il faut aussi s'arrêter quelque part ! Toutefois, nous allons introduire une dernière notion, intéressante à divers titres.

Définition 3.3.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un **espace de Banach** sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, d'éléments de E est appelée une **base de Schauder** de E si pour tout $u \in E$, il existe une suite $(\lambda_n)_n$, où $\lambda_n = \lambda_n(u)$, d'éléments de \mathbb{K} , et une seule, telle que :

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot b_n \text{ i.e. : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u - \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot b_j \right\| = 0.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot b_n$ est appelé le **développement de u dans la base (b_n)** , et $\lambda_n = \lambda_n(u)$ est la n -ème **coordonnée** de u dans la base (b_n) .

La fonction $\varepsilon_n : E \rightarrow \mathbb{K}, u \mapsto \lambda_n(u)$ est appelée n -ème **fonction coordonnée**.

Bien entendu, \mathbb{N}^* peut être remplacé par \mathbb{N} .

Nous avons rencontré dans les exercices plusieurs exemples de bases de Schauder : $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ [$n \geq 1$, 1 à la n -ème place, 0 ailleurs], $n \in \mathbb{N}^*$, est une base

de Schauder des espaces c_0 et ℓ^p , $1 \leq p < \infty$; ces e_n plus $e_0 = (1, 1, 1, \dots, 1, \dot{1}, \dots)$ [seulement des 1] constituent une base de Schauder de c ; les bases hilbertiennes du Chap. XIX seront des bases de Schauder des espaces de Hilbert séparables.

Il est à noter que si un espace de Banach admet une base de Schauder, cet espace est obligatoirement *séparable* : en effet, $\left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot b_j / \lambda_j \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est alors une famille totale (i.e. dénombrable et dense) de E .

La réciproque : *tout espace de Banach séparable admet-il une base de Schauder ? (conjecture de Banach)* est restée sans réponse pendant plus de 40 ans, malgré les efforts de nombreux (et bons) mathématiciens.

Finalement, la réponse est NON. On sait maintenant que l'espace assez simple $\mathcal{L}(\ell^2, \ell^2) = \mathcal{L}(\ell^2)$ n'admet pas de base de Schauder.

Quelques propriétés des bases de Schauder (sans démonstration).

Soient $u, v \in E$ ayant respectivement pour coordonnées $\lambda_n = \varepsilon_n(u)$ et $\mu_n = \varepsilon_n(v)$: $\lambda_n + \mu_n$ est une suite de coordonnées adéquates pour $u + v$, et donc – à cause de l'unicité – $\varepsilon_n(u + v) = \varepsilon_n(u) + \varepsilon_n(v)$. De même : $\varepsilon_n(\lambda u) = \lambda \varepsilon_n(u)$. Les fonctions $\varepsilon_n : E \rightarrow \mathbb{K}$, $u \mapsto \varepsilon_n(u)$ sont *linéaires*.

On pose : $P_n(u) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j(u) \cdot b_j$, et $Q_n(u) = u - P_n(u)$. P_n et Q_n sont donc linéaires. On définit une nouvelle norme sur E en posant : $\| \|u\| \| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|P_n(u)\|$.

Notons E_1 l'e.v.n. $(E, \| \| \cdot \| \|)$.

Les normes $\| \cdot \|$ et $\| \| \cdot \| \|$ sont équivalentes (d'après un Th. enseigné en Maîtrise), i.e. que l'application identique $j : E \rightarrow E_1$, $u \mapsto j(u) = u$ est un homéomorphisme linéaire.

Chaque ε_n est l'unique élément de E' qui vérifie $\varepsilon_i(b_j) = \delta_{i,j}$ [δ de Kronecker (début du §2)] pour tous i, j ; on a : $\|\varepsilon_n\|_1 \cdot \|b_n\|_1 \leq 2$ pour tout n .

$P_m \circ P_n = P_{\min\{m,n\}}$, d'où – en particulier – $P_m^2 = P_m$. P_n et Q_n sont continus sur E [i.e. sur E_1] et : $\|P_n\|_1 \leq 1$, $\|Q_n\|_1 \leq 2$; il existe $C > 0$ tel que $\|P_n\| \leq C$ et $\|Q_n\| \leq C + 1$.

Pour finir, signalons que l'e.v.n. $C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ possède une base de Schauder naturelle « célèbre » :

$b_0(t) = t$; $b_1(t) = 1 - t$; $b_2(t) = 2b_0(t)$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ et $b_2(t) = 2b_1(t)$ si $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$; on pose enfin, pour ce qui suit, $b_2(t) = 0$ pour $t \leq 0$ ou $t \geq 1$; pour $i = 1$ ou 2 : $b_{2+i}(t) = b_2(2t - i + 1)$; pour $i = 1, 2, 3, 4$: $b_{4+i}(t) = b_2(4t - i + 1)$; ... ; pour $i = 1, \dots, 2^n$: $b_{2^n+i}(t) = b_2(2^n t - i + 1)$; ...

Les formes coordonnées sont définies par : $\varepsilon^0(f) = f(1)$; $\varepsilon^1(f) = f(0)$; $\varepsilon^2(t) = f(\frac{1}{2}) - \frac{1}{2}[f(0) + f(1)]$, etc. Calculez et dessinez.

Ce type de base, assez ancien, a repris du service dans les années 80 avec la théorie des « ondelettes ».

DÉMONSTRATIONS
Théorème 1.1.

Étape 1 : Soit $u \in E$. Puisque A est partout dense dans (E, d) , il existe une suite $(a_n)_n$ d'éléments de A convergente de limite u . $(a_n)_n$ est donc une suite de Cauchy [Chap. XI, Prop. 1.1 (ii)].

Puisque f est uniformément continue sur A , la suite $(f(a_n))_n$ est une suite de Cauchy dans (F, δ) [Chap. XI, Prop.2.3(i)], lequel est complet. Donc, $(f(a_n))_n$ est une suite convergente dans (F, δ) , vers un point x de F ; $x := \lim_{n \rightarrow \infty} (f(a_n))_n$.

Nous allons démontrer maintenant que si $(b_n)_n$ est une autre suite de points de A qui converge vers u , notant $y := \lim_{n \rightarrow \infty} (f(b_n))_n \in F$, on a : $y = x$.

$$(1) \quad \delta(x, y) \leq \delta[x, f(a_n)] + \delta[f(a_n), f(b_n)] + \delta[f(b_n), y].$$

Puisque f est uniformément continue sur A :

$$(2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : d(a_n, b_n) \leq \eta \implies \delta[f(a_n), f(b_n)] \leq \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Puisque (a_n) et (b_n) convergent toutes deux vers u :

$$(3) \quad \forall \eta > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1 \implies d(a_n, u) \leq \frac{1}{2}\eta,$$

$$\forall \eta > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_2 \implies d(b_n, u) \leq \frac{1}{2}\eta, \text{ d'où :}$$

$$(4) \quad \forall \eta > 0, \exists N_\eta = \max\{N_1, N_2\}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\eta \\ \implies d(a_n, b_n) \leq d(a_n, u) + d(u, b_n) \leq \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta = \eta.$$

Et, par (2), on a pour tout $n \geq N_\eta : \delta[f(a_n), f(b_n)] \leq \frac{1}{3}\varepsilon$.

D'autre part :

$$(5) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N_x, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_x \implies \delta[f(a_n), x] \leq \frac{1}{3}\varepsilon, \text{ et :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_y, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_y \implies \delta[f(b_n), y] \leq \frac{1}{3}\varepsilon.$$

En définitive, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé :

$$\exists N = \max\{N_\eta, N_x, N_y\}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies d(x, y) \leq \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon.$$

Donc : $\delta(x, y) = 0$ et $x = y$.

Par conséquent, la limite x de la suite $(f(a_n))_n$, où $(a_n)_n$ est une suite arbitraire de points de A convergente vers u , ne dépend que de u . Appelons donc $g(u)$ cette limite, ce qui définit – u parcourant E – une application $g : E \rightarrow F, u \mapsto g(u)$. ♦

Étape 2 : Si $u \in A$: u est la limite de la suite stationnaire de points de A : $(u_n)_n = (u, u, \dots, u, \dots)$ et $(f(u_n))_n$ tend vers $f(u)$. Donc $g(u) = f(u)$ [unicité de la limite] pour tout $u \in A$. g est donc un prolongement à E entier de f . ♦

Étape 3 : Démontrons enfin que g est uniformément continue sur E . On veut :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \theta > 0, \forall u, v \in E : d(u, v) \leq \theta \implies \delta[g(u), g(v)] \leq \varepsilon, \text{ et on a :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u, v \in A : d(u, v) \leq \eta \implies \delta[g(u), g(v)] \leq \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Nous allons voir que $\theta = \frac{1}{3}\eta$ fait l'affaire.

$\varepsilon > 0$ étant fixé, soient $u, v \in E$ tels que $d(u, v) \leq \frac{1}{3}\eta$. Soient (a_n) une suite de points convergente vers u , et, de même, (b_n) une suite de points de A convergente vers v [densité de A]. Il existe $N = N_\eta$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\eta \implies d(a_n, b_n) \leq d(a_n, u) + d(u, v) + d(v, b_n) \leq \frac{1}{3}\eta + \frac{1}{3}\eta + \frac{1}{3}\eta = \eta.$$

D'autre part, par définition de g , il existe N_1 et N_2 tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1 \implies \delta[g(u), f(a_n)] \leq \frac{1}{3}\varepsilon \text{ et } n \geq N_2 \implies \delta[g(v), f(b_n)] \leq \frac{1}{3}\varepsilon,$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N} : n \geq N = \max\{N_\eta, N_1, N_2\}$:

$$\delta[g(u), g(v)] \leq \delta[g(u), f(a_n)] + \delta[f(a_n), f(b_n)] + \delta[f(b_n), g(v)] \\ \leq \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon. \quad \blacklozenge$$

La fonction g répond bien aux conditions imposées.

Si $\delta[g(u), g(v)] \leq k.d(u, v)$ pour tous les u, v appartenant à A partout dense dans E , on a la même inégalité sur E entier car g, δ et d sont continues [Chap. VII].

Théorème 1.2.

Soit $A \in \mathcal{L}(E_0, F)$; A continue $\implies A$ uniformément continue [cf. Chap. X, §1].
Donc, d'après le Th. 1.1, il existe $B : E \rightarrow F$ uniformément continue prolongeant $A : B|_{E_0} = A$.

Démontrons que B est une application \mathbb{K} -linéaire. On pose pour tous $u, v \in E$: $\Phi(u, v) := B(u + v) - B(u) - B(v)$; Φ est continue sur $E \times E$ à valeurs dans F , et coïncide avec l'application continue nulle $0 : E_0 \times E_0 \rightarrow F$ sur $E_0 \times E_0$ qui est partout dense dans $E \times E$ [Chap. IX] ; donc, d'après le principe d'extension des identités sur les parties partout denses [cf. Chap. VII] on a : $\Phi(u, v) = 0$ sur $E \times E$.

De même, $\Psi : \mathbb{K} \times E \rightarrow F$, $\Psi(\lambda, u) := B(\lambda.u) - \lambda.B(u)$ est continue sur $\mathbb{K} \times E$, et coïncide avec 0 sur $\mathbb{K} \times E_0$ partout dense dans $\mathbb{K} \times E$, donc : $\Psi(\lambda, u) = 0$ sur $\mathbb{K} \times E$; d'où le résultat. ♦

Considérons à présent : $\varphi(u) := \|B(u)\|_F$, $\psi(u) := \|A\|_{\mathcal{L}(E_0, F)} \cdot \|u\|_E$; ces deux fonctions sont continues sur E , et on a :

$\forall u \in E_0 : \varphi(u) = \|A(u)\|_F \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E_0, F)} \cdot \|u\|_E = \psi(u)$, d'où [prolongement des inégalités sur une partie partout dense, cf. Chap. VII] : $\forall u \in E : \varphi(u) \leq \psi(u)$, d'où l'on déduit : $\sup_{u \in E, \|u\|=1} \|B(u)\| = \|B\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E_0, F)}$.

Mais : $\|B\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{u \in E, \|u\|=1} \|B(u)\| \geq \sup_{u \in E_0, \|u\|=1} \|B(u)\|$ [car $E_0 \subset E$], soit : $\|B\|_{\mathcal{L}(E, F)} \geq \|A\|_{\mathcal{L}(E_0, F)}$.

Finalement : $\|B\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|A\|_{\mathcal{L}(E_0, F)}$. ♦

Corollaire 1.1.

Considérons l'application $j : \mathcal{L}(E_0, F) \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$, $A \mapsto j(A) := B$, où B est l'unique prolongement de $A \in \mathcal{L}(E_0, F)$ à $B \in \mathcal{L}(E, F)$ donné par le Th. 1.2.

Prouvons que j est linéaire : $j(A_1 + A_2)$ et $j(A_1) + j(A_2)$ sont continues sur E , et sur E_0 partout dense dans E on a :

$$j(A_1 + A_2)(u) = (A_1 + A_2)(u) = A_1(u) + A_2(u) = j(A_1)(u) + j(A_2)(u),$$

d'où par prolongement des identités : $j(A_1 + A_2) = j(A_1) + j(A_2)$. De même pour $j(\lambda A) = \lambda j(A)$.

j est une isométrie car : $\|j(A)\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \|A\|_{\mathcal{L}(E_0, F)}$.

Enfin j est surjective, car si $B \in \mathcal{L}(E, F)$, considérons $B|_{E_0} : B|_{E_0}$ se prolonge de manière unique en $j(B|_{E_0}) = B$. Donc les espaces vectoriels normés $\mathcal{L}(E_0, F)$ et $\mathcal{L}(E, F)$ sont isométriques :

$$\mathcal{L}(E_0, F) \approx \mathcal{L}(E, F). \quad \blacklozenge$$

Lemme 2.1.

On procède par récurrence sur la dimension de E .

Pour $n = 1$, $\Phi_1 : \mathbb{K} \rightarrow E$. Soit $u \neq 0$ un vecteur constituant une base de E .

$$\Phi_1(\xi) = \xi.u : \|\Phi_1(\xi)\| = \|\xi.u\| = |\xi| \cdot \|u\| = \|u\| \cdot \|\xi\|_\infty, \quad c = C = \|u\| > 0.$$

Φ_1 est continue et d'inverse continu. ♦

Supposons que le résultat est vrai pour la dimension $(n - 1)$, et démontrons qu'il est alors vrai pour n . Tout d'abord Φ_n est continue ; en effet, $\forall x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$\|\Phi_n(x)\| = \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| \cdot \|e_i\| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i| \cdot \sum_{i=1}^n \|e_i\| = C \cdot \|x\|_\infty$, en posant :
 $C := \sum_{i=1}^n \|e_i\| > 0$.

Ensuite, $\Phi_n^{-1} = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$; donc d'après le résultat sur la continuité des applications à valeurs dans un produit [Chap. IX] : Φ_n^{-1} est continue si et seulement si $\forall i = 1, \dots, n$: ε^i est continue, i.e. $\varepsilon^i \in E'$, ce qui équivaut [Chap. X, Th.1.3] à : $\forall i = 1, \dots, n$, on a : $H_i = \text{Ker}(\varepsilon^i)$ est fermé dans E .

Or, H_i hyperplan dans E de dimension n est un sous-espace de dimension $(n-1)$; plus précisément, comme $\varepsilon^i(e_i) = 1$, on a : $H_i = [(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)]$.

Donc, d'après l'hypothèse de récurrence et le Corol.2.2 du Chap. XI : H_i est complet dans E . Donc, [Chap. XI], H_i est fermé dans E et ε^i est une forme linéaire continue; cela pour tout $i = 1, \dots, n$. Par conséquent Φ_n^{-1} est continue et $\Phi_n \in \mathcal{I}\text{som}(\mathbb{K}^n, E)$ comme annoncé. ♦

Remarque :

Ce résultat est plus subtil qu'il n'y paraît au premier abord; la démonstration n'est pas difficile, mais ce que le débutant a parfois de la peine à comprendre... c'est que cette démonstration doit être effectivement faite. Le problème est réel et mérite qu'on y réfléchisse un peu.

Lemme 2.4.

Soient (e_1, \dots, e_N) une base de E et (f_1, \dots, f_M) une base de F .

Soient $\Phi : \mathbb{K}^N \rightarrow E$ et $\Psi : \mathbb{K}^M \rightarrow F$ les isomorphismes d'e.v.n. correspondants.

Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$; $\Psi^{-1} \circ A \circ \Phi : \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^M$ n'est rien d'autre que la *matrice* de l'application linéaire A dans les bases (e_1, \dots, e_N) et (f_1, \dots, f_M) . C'est une application linéaire continue de $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{K}^M, \|\cdot\|_\infty)$ comme on va le vérifier ci-dessous. Ainsi : $A = \Psi \circ (\Psi^{-1} \circ A \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ composée de trois applications linéaires continues est continue. ♦

Soit $\Lambda : \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^M$ une application linéaire; on va démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{K}^N$: $\|\Lambda(x)\|_\infty \leq k \cdot \|x\|_\infty$.

Par rapport aux bases naturelles de \mathbb{K}^N et \mathbb{K}^M , Λ est définie par : $(\Lambda(x))_j = \sum_{i=1}^N \lambda_{j,i} \xi_i$ ($1 \leq j \leq M$), $(\lambda_{j,i})_{1 \leq j \leq M, 1 \leq i \leq N}$ est la matrice de Λ .

$$\forall j : |(\Lambda(x))_j| \leq \sum_{i=1}^N |\lambda_{j,i}| \cdot |\xi_i| \leq \|x\|_\infty \cdot \sum_{i=1}^N |\lambda_{j,i}| = \|x\|_\infty \cdot \|\Lambda_j\|_1,$$

où $\Lambda_j := (\lambda_{1,j}, \dots, \lambda_{M,j})$ est la j -ème colonne de la matrice et $\|\Lambda_j\|_1$ est sa norme $\|\cdot\|_1$ (somme des valeurs absolues).

Donc :

$$\forall x \in \mathbb{K}^N : \|\Lambda(x)\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq M} |(\Lambda(x))_j| \leq \left[\max_{1 \leq j \leq M} \|\Lambda_j\|_1 \right] \cdot \|x\|_\infty = k \cdot \|x\|_\infty. \quad \blacklozenge$$

Théorème 3.1.

Par hypothèse, la *série* de terme général $\|u_n\|$ est convergente, ce qui signifie que la *suite* $s_n = \|u_0\| + \|u_1\| + \dots + \|u_n\|$ est convergente, donc de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^* :$$

$$n \geq N \implies 0 \leq s_{n+p} - s_n = \|u_{n+1}\| + \|u_{n+2}\| + \dots + \|u_{n+p}\| \leq \varepsilon.$$

D'où l'on déduit que pour tout $n \geq N$, tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \|u_{n+1} + \dots + u_{n+p}\| \leq \|u_{n+1}\| + \dots + \|u_{n+p}\| = s_{n+p} - s_n \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, $(S_n)_n$ est une suite de Cauchy dans E espace de Banach : elle converge donc dans E . La série de terme général u_n est donc convergente dans E . ♦

On a pour tout n : $\|S_n\| = \|u_0 + u_1 + \dots + u_n\| \leq \sum_{k=0}^n \|u_k\| = s_n$. On passe à la limite quand $n \rightarrow \infty$, en se rappelant que la norme est une fonction continue et en utilisant le prolongement des inégalités :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|S_n\|) = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\|. \blacklozenge$$

Fin de la partie cours du Chapitre XII

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ Exercice 1.1.

1) Soient en effet g et h deux applications $E \rightarrow F$ prolongeant f . Pour tout $u \in A$ on a : $g(u) = h(u) = f(u)$. g et h sont continues sur E , et A est partout dense : on applique le Th.2.3 du Chap. VII, et on obtient : $g(u) = h(u)$ pour tout $u \in E$. ♦

2) Sinon on aurait $g(0) = \lim_{t \rightarrow 0, t \in A} f(t)$ et, en particulier, puisque $(\frac{1}{n})_n \rightarrow 0$ et $\frac{1}{n} \in A$, on aurait : $g(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\frac{1}{n})^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n)$; or on sait que cette suite n'a pas de limite, l'ensemble de ses valeurs d'adhérence étant $[-1, +1]$ [Chap. IV]. ♦

3) Si, en effet, g existait, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Q}$ avec $g|_{\mathbb{Q}}(t) = t$ pour tout $t \in \mathbb{Q}$. Soit $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et soit $(\mathbb{Q}$ partout dense) $(s_n)_n$ une suite d'éléments de \mathbb{Q} convergente vers l'irrationnel s . Comme g est continue sur \mathbb{R} , on aurait : $g(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n) = s \notin \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. ♦

Un autre exemple facile : $E = C_{\infty}([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \mathcal{P}_{\infty}([0, 1], \mathbb{R})$ [fonctions polynomiales] ; $f : F \rightarrow F$, $P \mapsto P$ ne s'étend pas en $g : E \rightarrow F$ continue et prolongeant f . ♦

☞ Exercice 2.1.

A cause de l'unicité : $u + v = \sum_{1 \leq i \leq N} \xi_i e_i + \sum_{1 \leq i \leq N} \eta_i e_i = \sum_{1 \leq i \leq N} (\xi_i + \eta_i) e_i$, d'où : $\varepsilon^i(u + v) = \varepsilon^i(u) + \varepsilon^i(v)$, et $\lambda u = \lambda \sum_{1 \leq i \leq N} \xi_i e_i = \sum_{1 \leq i \leq N} (\lambda \xi_i) e_i$, d'où : $\varepsilon^i(\lambda u) = \lambda \varepsilon^i(u)$.

Donc, pour $i = 1, \dots, N$: $\varepsilon^i \in E^*$.

Soit $\varphi \in E^*$. $\forall u \in E$:

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{1 \leq i \leq N} \xi_i e_i\right) = \sum_{1 \leq i \leq N} \xi_i \varphi(e_i) = \sum_{1 \leq i \leq N} \varphi(e_i) \varepsilon^i(u) \implies \varphi = \sum_{1 \leq i \leq N} \varphi(e_i) \varepsilon^i.$$

Si $\sum_{1 \leq i \leq N} \mu_i \varepsilon^i = 0$, pour tout $j = 1, \dots, N$: $\sum_{1 \leq i \leq N} \mu_i \varepsilon^i(e_j) = 0 = \mu_j \varepsilon^j(e_j) = \mu_j$.

$\Phi : \mathbb{K}^N \rightarrow E$, $x \mapsto u = \sum_{1 \leq i \leq N} \xi_i e_i$ où $x = (\xi_1, \dots, \xi_N)$ est évidemment linéaire et bijective.

Son inverse Φ^{-1} est donné par :

$$\Phi^{-1}(u) = \Phi^{-1}\left(\sum_{1 \leq i \leq N} \xi_i e_i\right) = (\xi_1, \dots, \xi_N) = x = (\varepsilon^1(u), \dots, \varepsilon^N(u)). \text{ Soit :}$$

$$\Phi^{-1} = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^N). \blacklozenge$$

☞ Exercice 2.2.

Si $\dim(E) < \infty$, la question est réglée : on prend une base de E , qui est une famille totale finie, formée de vecteurs linéairement indépendants.

Si $\dim(E) = \infty$, soit $\{a_n / n \in \mathbb{N}\}$ une famille *dénombrable dense* de vecteurs de E . Nous définirons par récurrence une sous-famille $\{a_{j_n} / j_n \in \mathbb{N}\}$ telle que les a_{j_n} sont linéairement indépendants, et telle que pour tout m entier $\leq j_n$: a_m est une combinaison linéaire de a_{j_1}, \dots, a_{j_n} .

Prenons pour j_1 le premier indice n tel que $a_n \neq 0$.
Supposons construits $a_{j_1}, \dots, a_{j_{n-1}}$. Pour j_n on prend le premier indice $n > j_{n-1}$ tel que a_n n'appartient pas au sous-espace E_n engendré par $a_{j_1}, \dots, a_{j_{n-1}}$. Un tel indice existe car, sinon, puisque E_n est fermé [Th. 2.1] :

$$E_n \supset \{a_n / n \in \mathbb{N}\} \implies \text{adh}(E_n) = E_n \supset \text{adh}\{a_n / n \in \mathbb{N}\} = E,$$

ce qui contredit le fait que $\dim(E) = \infty$.

$\{a_{j_n} / n \in \mathbb{N}\}$ est bien constitué de vecteurs linéairement indépendants, par construction.

Cette famille est totale puisque l'espace engendré par les a_{j_n} est le même que celui engendré par les a_n ; on a tout simplement enlevé les vecteurs superflus. ♦

Exercice 3.1.

Soit $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$ une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|)$, ce qu'on écrira sous la forme suivante : pour tout entier $k \geq 0$, il existe N_k entier ≥ 0 tel que pour tous $p, q \geq N_k$ on a : $\|u_p - u_q\| \leq \frac{1}{2^k}$ [il est très fréquent qu'au lieu de prendre $\varepsilon > 0$ on choisisse $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$, ou $\varepsilon_k = 2^{-k}$, etc. suivant les besoins].

On prend les N_k ($k = 1, 2, \dots$) de manière à en constituer une suite strictement croissante, ce qui ne pose aucun problème.

Considérons alors la série de terme général $v_n = u_{N_n} - u_{N_{n-1}}$, dont la somme partielle S_n de rang n ($n \geq 2$) va s'écrire :

$$S_n = (u_{N_2} - u_{N_1}) + (u_{N_3} - u_{N_2}) + \dots + (u_{N_{n-1}} - u_{N_{n-2}}) + (u_{N_n} - u_{N_{n-1}}).$$

La série des normes $\|u_{N_n} - u_{N_{n-1}}\|$ est convergente car majorée par la série : $\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ qui est convergente (progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$).

Donc, d'après l'hypothèse de départ, la série des vecteurs est convergente dans E , ce qui signifie que $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n) = u$ existe dans E .

$$\text{Mais } S_n = -u_{N_1} + u_{N_n}. \text{ D'où : } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_{N_n})_n = u + u_{N_1}.$$

On a donc trouvé une suite extraite $(u_{N_n})_{n \in \mathbb{N}}$ de la suite de départ $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite extraite qui est convergente.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite de Cauchy qui admet une suite extraite convergente : elle est convergente [voir Chap. XI, Prop. 1.1 (iv)]. En définitive, E est complet. ♦

Exercice 3.2.

On va démontrer que la série de terme général u_n est convergente en appliquant le critère de Cauchy (E est de Banach).

Pour tout entier $n \geq 0$, et tout entier $p > n$, p fixé pour le moment, posons :

$$w_n := v_n + v_{n+1} + \dots + v_p.$$

On a, pour tout k : $w_k - w_{k+1} = v_k$, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1} + \dots + u_p &= \lambda_n \cdot v_n + \lambda_{n+1} \cdot v_{n+1} + \dots + \lambda_p \cdot v_p \\ &= \lambda_n \cdot (w_n - w_{n+1}) + \lambda_{n+1} \cdot (w_{n+1} - w_{n+2}) + \dots + \lambda_{p-1} \cdot (w_{p-1} - w_p) + \lambda_p \cdot w_p \\ &= \lambda_n \cdot w_n + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \cdot w_{n+1} + \dots + (\lambda_p - \lambda_{p-1}) \cdot w_p \\ &= \lambda_n \cdot (v_n + \dots + v_p) + (\lambda_{n+1} - \lambda_n) \cdot (v_{n+1} + \dots + v_p) + \dots + (\lambda_p - \lambda_{p-1}) \cdot v_p, \end{aligned}$$

d'où en passant à la norme :

$$\begin{aligned} \|u_n + u_{n+1} + \dots + u_p\| &\leq |\lambda_n| \cdot \|v_n + \dots + v_p\| + |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \cdot \|v_{n+1} + \dots + v_p\| + \dots + |\lambda_p - \lambda_{p-1}| \cdot \|v_p\| \\ &\leq M \left[|\lambda_n| + |\lambda_{n+1} - \lambda_n| + \dots + |\lambda_p - \lambda_{p-1}| \right] \\ &\leq M \left[|\lambda_n| + \sum_{k=n}^p |\lambda_{k+1} - \lambda_k| \right], \text{ d'après la condition (i).} \end{aligned}$$

Ensuite : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n) = 0$, d'où : $\lim_{n \rightarrow \infty} (|\lambda_n|) = 0$, d'après (ii).

Et, d'après (iii), si l'on applique le critère de Cauchy :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty, p \geq n} \sum_{k=n}^p |\lambda_{k+1} - \lambda_k| = 0.$$

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty, p \geq n} \|u_n + u_{n+1} + \dots + u_p\| = 0$, et on a le résultat cherché. ♦

LECTURE – PROBLÈME 1

Le principe de Ekeland

Soit (E, d) un espace métrique complet.

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *bornée inférieurement sur E* et *semi-continue inférieurement sur E* , i.e. vérifiant :

pour toute suite (u_n) convergente de limite u dans E , on a $f(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (f(u_n))$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé une fois pour toutes. Soit (justifiez) $\underline{w} \in E$ tel que :

$$\inf_{v \in E} f(v) \leq f(\underline{w}) \leq \inf_{v \in E} f(v) + \frac{1}{2} \varepsilon ; \text{ on suppose } \underline{w} \text{ fixé une fois pour toutes.}$$

On définit sur E une relation, notée \prec , par :

$$u \prec v \text{ si et seulement si : } f(u) \leq f(v) - \sqrt{\varepsilon} \cdot d(u, v).$$

1) Vérifiez que \prec est une relation d'ordre.

On construit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de E , et une suite $(S_n)_{n \geq 1}$ de parties de E , en procédant de la manière suivante :

- on pose : $u_1 := \underline{w}$, et on pose : $S_1 := \{u \in E / u \prec u_1\}$,
- soit $u_2 \in S_1$ tel que $\inf_{v \in S_1} f(v) \leq f(u_2) \leq \inf_{v \in S_1} f(v) + \frac{\varepsilon}{2^2}$; et on pose :
 $S_2 := \{u \in E / u \prec u_2\}$,
- soit $u_3 \in S_2$ tel que $\inf_{v \in S_2} f(v) \leq f(u_3) \leq \inf_{v \in S_2} f(v) + \frac{\varepsilon}{2^3}$; et on pose :
 $S_3 := \{u \in E / u \prec u_3\}$,
- ainsi de suite ...

2) Justifiez la construction des suites (u_n) et (S_n) en vérifiant que $S_n \neq \emptyset$ pour tout n et qu'il existe $u_{n+1} \in S_n$ tel que :

$$\inf_{v \in S_n} f(v) \leq f(u_{n+1}) \leq \inf_{v \in S_n} f(v) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

3) Démontrez que la suite (S_n) est décroissante [pour tout $n : S_{n+1} \subset S_n$], et que, pour tout n , S_n est fermé dans E .

4) Démontrez que : $\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{diam}(S_n)] = 0$, où $\text{diam}(S_n) = \sup_{x \in S_n, y \in S_n} d(x, y)$.

Indication : si $x \in S_n$, démontrez que $d(x, u_n) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2^n}$.

5) Démontrez que la suite (u_n) est convergente dans E . On notera : $\hat{u} := \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$.

Démontrez que $\bigcap_1^\infty S_n = \{\hat{u}\}$.

6) Démontrez que :

- a) $f(\hat{u}) \leq f(\underline{w})$,
- b) $\forall u \in E, u \neq \hat{u} : f(\hat{u}) < f(u) + \sqrt{\varepsilon} \cdot d(u, \hat{u})$.

Indication : prouvez que $u \prec \hat{u}$ est impossible,

c) $d(\hat{u}, \underline{w}) \leq \sqrt{\varepsilon}$. *Indication* : majorez $d(u_n, \underline{w})$ en utilisant l'indication du 4).

7) Soit $T : E \rightarrow 2^E \setminus \{\emptyset\}$ [ensemble des parties non vides de E] une application vérifiant : $\forall u \in E, \forall v \in T(u) : f(v) \leq f(u) - d(u, v)$.

Démontrez qu'il existe $a \in E$ tel que $a \in T(a)$.

8) Supposons maintenant, de plus, que E est un espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ et que f est différentiable sur E . Démontrez que $\|Df(\hat{u})\|' \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Nota : Les connaissances de calcul différentiel demandées sont très rudimentaires.

CORRIGÉ DE LECTURE – PROBLÈME 1

Soit $\mu := \inf_{v \in E} f(v) : \mu \in \mathbb{R}$ puisque f est bornée inférieurement. L'existence de $\underline{w} \in E$ tel que $\mu \leq f(\underline{w}) \leq \mu + \frac{\varepsilon}{2}$ résulte simplement de la définition de la borne inférieure.

1) $u < v \iff f(u) \leq f(v) - \sqrt{\varepsilon}d(u, v)$ définit une relation d'ordre.

• Réflexivité. $\forall u \in E : f(u) \leq f(u) - \sqrt{\varepsilon}d(u, u) = f(u) \implies u < u$;

• Antisymétrie. $u < v$ et $v < u \iff f(u) \leq f(v) - \sqrt{\varepsilon}d(u, v)$ et $f(v) \leq f(u) - \sqrt{\varepsilon}d(v, u)$

Comme $d(u, v) = d(v, u)$, ceci implique $2\sqrt{\varepsilon}d(u, v) \leq 0$, soit $d(u, v) = 0$ et $u = v$;

• Transitivité. $\forall u, v, w \in E :$

$u < v$ et $v < w \implies f(u) \leq f(v) - \sqrt{\varepsilon}d(u, v)$ et $f(v) \leq f(w) - \sqrt{\varepsilon}d(v, w)$, d'où :

$f(u) \leq f(w) - \sqrt{\varepsilon}[d(u, v) + d(v, w)] \implies f(u) \leq f(w) - \sqrt{\varepsilon}d(u, w) \implies u < w$.

(car : $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$). ♦

2) On a vu que $u_1 = \underline{w}$ existe. $S_1 := \{u \in E / u < u_1\} \neq \emptyset$ car $u_1 = \underline{w} \in S_1$ (réflexivité) ; posons $\mu_1 := \inf_{v \in S_1} f(v)$, $\mu_1 \in \mathbb{R}$ car $\mu_1 \geq \mu$; l'existence de $u_2 \in S_1$ tel que $\mu_1 \leq f(u_2) \leq \mu_1 + \frac{\varepsilon}{4}$ découle de la définition de inf.

On raisonne par récurrence en supposant qu'il existe $u_n \in S_{n-1} \neq \emptyset$;

$S_n = \{u \in E / u < u_n\} \neq \emptyset$ car $u_n \in S_n$, et u_{n+1} existe par définition de inf.

L'existence des suites (u_n) et (S_n) est assurée. ♦

3) La suite (S_n) est décroissante :

soit $u \in S_{n+1}$, i.e. $u < u_{n+1}$; comme $u_{n+1} \in S_n$ par définition de u_{n+1} , on a $u_{n+1} < u_n$ (déf. de S_n), d'où par transitivité de $<$: $u < u_n \implies u \in S_n$. ♦

S_n est un fermé de E .

Soit $(v_i)_{i \geq 1}$ une suite de points de S_n convergente vers $v \in E$; $\forall i \geq 1$ on a $v_i < u_n$, i.e. $f(v_i) \leq f(u_n) - \sqrt{\varepsilon}d(v_i, u_n)$; faisons $i \rightarrow \infty$: comme $d(\cdot, u_n)$ est continue, et en utilisant la semi-continuité inférieure de f , on a :

$$f(u) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} f(v_i) \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} [f(u_n) - \sqrt{\varepsilon}d(v_i, u_n)] = \lim_{i \rightarrow \infty} [f(u_n) - \sqrt{\varepsilon}d(v_i, u_n)] \\ \leq f(u_n) - \sqrt{\varepsilon}d(u, u_n). \text{ Donc } u < u_n \text{ et } u \in S_n. \spadesuit$$

4) Soit $u \in S_n$: $u < u_n \implies f(u) \leq f(u_n) - \sqrt{\varepsilon}d(u, u_n)$. Mais on a aussi $u \in S_{n-1}$ (suite décroissante), d'où :

$f(u_n) \leq \inf_{v \in S_{n-1}} f(v) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ (définition de u_n) $\leq f(u) + \frac{\varepsilon}{2^n}$; on tire de ces deux inégalités :

$$f(u) \leq f(u) + \frac{\varepsilon}{2^n} - \sqrt{\varepsilon}d(u, u_n) \implies \sqrt{\varepsilon}d(u, u_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n} \implies d(u, u_n) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2^n}.$$

$$\text{Soit } v \in S_n : d(v, u_n) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2^n} \implies d(u, v) \leq d(u, u_n) + d(u_n, v) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2^n} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2^n} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2^{n-1}}.$$

Comme u et v sont arbitraires : $\text{diam}(S_n) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2^{n-1}}$, d'où : $\lim_{n \rightarrow \infty} [\text{diam}(S_n)] = 0$. ♦

5) $\forall n \geq 1, \forall p \geq 0 : n \leq n+p \implies S_{n+p} \subset S_n$, d'où : $u_{n+p} \in S_n$, et d'après la question précédente : $d(u_n, u_{n+p}) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2^n}$; donc $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u_{n+p}) = 0$ pour tout p , et (u_n) est une suite de Cauchy de E . Comme E est complet, (u_n) converge vers un point de E qu'on notera \hat{u} . ♦

Posons $S := \bigcap_1^\infty S_n$. Puisque $S \subset S_n$ pour tout n , $\text{diam}(S) \leq \text{diam}(S_n)$ pour tout n , et donc :

$\text{diam}(S) = 0$. Par conséquent, S est soit vide, soit un singleton $\{v\}$.

Soit $k \geq 1$; pour tout $n \geq k$ on a $u_n \in S_n \subset S_k$, et donc, comme S_k est fermé : $\hat{u} \in S_k$. Comme $\hat{u} \in S_k$ pour tout k : $\hat{u} \in S$, et donc $v = \hat{u}$.

En définitive : $S = \bigcap_1^\infty S_n = \{\hat{u}\}$. ♦

6) a) Evident car $\hat{u} \in S_1 \implies \hat{u} < \underline{w} \implies f(\hat{u}) \leq f(\underline{w}) - \sqrt{\varepsilon}d(\hat{u}, \underline{w}) \leq f(\underline{w})$. ♦

b) Soit $u \in E \setminus \{\hat{u}\}$. Si l'on avait $u < \hat{u}$, on aurait $u \in S_n$ pour tout n (déf. de S_n et $\hat{u} \in S_n$, pour tout n), d'où $u \in S = \{\hat{u}\}$, et $u = \hat{u}$, impossible.

On a donc :

$\text{non}(u < \hat{u}) \iff f(u) > f(\hat{u}) - \sqrt{\varepsilon}d(u, \hat{u})$, i.e. $f(\hat{u}) < f(u) + \sqrt{\varepsilon}d(u, \hat{u})$. ♦

c) Ecrivons :

$$d(u_n, \underline{w}) \leq d(u_n, u_{n-1}) + d(u_{n-1}, u_{n-2}) + \dots + d(u_2, u_1) + d(u_1, \underline{w}).$$

On a $u_n \in S_{n-1}$ (déf. de u_n) et $u_{n-1} \in S_{n-1}$ (déf. de S_{n-1}), d'où en appliquant l'inégalité du 4) :

$$d(u_n, \underline{w}) \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2^{n-1}} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2^{n-2}} + \cdots + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2^1} = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} (1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}}) < \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \times 2 = \sqrt{\varepsilon}.$$

Il ne reste plus qu'à faire $n \rightarrow \infty$, et on a : $d(\hat{u}, \underline{w}) \leq \sqrt{\varepsilon}$. ♦

7) Faisons $\varepsilon = 1$ dans le résultat ci-dessus : il existe $\hat{u} \in E$ tel que, d'après 6) b) :

$$\forall u \neq \hat{u} : f(\hat{u}) < f(u) + d(u, \hat{u}).$$

On a obligatoirement $\hat{u} \in T(\hat{u})$ car, sinon, pour tout $u \in T(\hat{u})$ on a $u \neq \hat{u}$, et donc

$f(\hat{u}) < f(u) + d(u, \hat{u})$, mais d'après l'hypothèse de 6) on a aussi :

$$f(u) \leq f(\hat{u}) - d(u, \hat{u}) \implies f(\hat{u}) < f(\hat{u}) : \text{contradiction ! } \blacklozenge$$

8) Il existe $\hat{u} \in E$ tel que, d'après 6) b) : $f(\hat{u}) < f(u) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|u - \hat{u}\|$, pour tout $u \in E \setminus \{\hat{u}\}$, et donc tel que pour tout $u \in E$: $f(\hat{u}) \leq f(u) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|u - \hat{u}\|$.

Faisons $u = \hat{u} + th$, où t réel > 0 et $h \in E$ arbitraire. Il vient :

$$f(\hat{u}) \leq f(\hat{u} + th) + \sqrt{\varepsilon} \cdot \|th\| \implies -\frac{1}{t} [f(\hat{u} + th) - f(\hat{u})] \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \|h\| ; \text{ d'où en faisant } t \rightarrow 0, t > 0, \text{ eu égard à l'hypothèse de différentiabilité : } -Df(\hat{u}) \cdot h \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \|h\|.$$

Comme h est arbitraire, on peut changer h en $-h$, ce qui donne : $Df(\hat{u}) \cdot h \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \|h\|$, et donc : $|Df(\hat{u}) \cdot h| \leq \sqrt{\varepsilon} \cdot \|h\|$. On en déduit :

$$\|Df(\hat{u})\|' = \sup_{h \in E, \|h\|=1} |Df(\hat{u}) \cdot h| \leq \sqrt{\varepsilon}. \blacklozenge$$

Commentaires :

Le résultat démontré de 1) à 6) est appelé le *principe variationnel* de I. Ekeland.

7) et 8) sont deux applications tout à fait immédiates, mais très intéressantes.

7) est le *théorème de point fixe* [le Chap. XVI sera consacré à cette notion], pour des applications multivoques, de J. Caristi ; même pour des applications « ordinaires », i.e. à valeurs singletons, ce résultat est intéressant car il ne nécessite pas la continuité de T .

Ce principe de Ekeland a de très nombreuses applications, notamment en optimisation et en analyse non linéaire (quelqu'un a écrit un petit livre uniquement sur ce principe et quelques conséquences !).

Il est tout à fait curieux qu'il ait fallu attendre 1972 pour qu'un résultat aussi fondamental, et relativement élémentaire, voie le jour !

LECTURE – PROBLÈME 2

Le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn

I. Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques. Soit $(f_n)_n, n \in \mathbb{N}^*, f_n : E \rightarrow F$ une suite d'applications.

1) Soit $f : E \rightarrow F$ une application, et on considère les hypothèses suivantes :

(i) $\forall u \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} \delta[f_n(u), f(u)] = 0,$

(ii) $\forall B \subset E, B \neq \emptyset$ borné : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{u \in B} \delta[f_n(u), f(u)]) = 0,$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{u \in E} \delta[f_n(u), f(u)]) = 0.$

Si toutes les fonctions f_n sont continues sur E [resp. uniformément continues sur E], sous quelles hypothèses parmi (i), (ii), (iii) a-t-on : f continue sur E [resp. uniformément continue sur E] ? (on demande une démonstration ou bien un contre-exemple).

2) On suppose maintenant que (F, δ) est un espace métrique complet. Démontrez que : il existe $f : E \rightarrow F$ satisfaisant à (ii) équivaut à :

(iv) $\forall B \subset E$, B borné, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\forall u \in B$:
 $p \geq N$ et $q \geq N \implies \delta[f_p(u), f_q(u)] \leq \varepsilon$.

3) On fait $(F, \delta) = \mathbb{R}$ usuel, et on suppose que $\forall B \subset E$, B borné, il existe une suite (α_n) de réels ≥ 0 [dépendante de B] telle que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty, \forall u \in B : |f_n(u)| \leq \alpha_n.$$

Démontrez que la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(u)$ est convergente pour tout $u \in E$, et que sa somme $f(u)$ définit une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, continue sur E si toutes les f_n sont continues sur E .

II. Soit (E, d) un espace métrique, et soient G, G' deux parties fermées non vides de E telles que $G \cap G' = \emptyset$. Pour tout α réel $\neq 0$, on considère la fonction $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $g(u) := \alpha \times \frac{d(u, G) - d(u, G')}{d(u, G) + d(u, G')}$

Démontrez que g est une fonction continue sur E vérifiant $\forall u \in E : |g(u)| \leq |\alpha|$, $g(u) = \alpha \iff u \in G'$ et $g(u) = -\alpha \iff u \in G$. Démontrez en utilisant g qu'il existe deux ouverts U et U' de E tels que $U \cap U' = \emptyset$, $G \subset U$, $G' \subset U'$.

III. Soit (E, d) un espace métrique, et soit $F \neq \emptyset$ une partie fermée de E . Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le sous-espace métrique $(F, d|_{F \times F})$ telle que $|f(u)| \leq C$ pour tout $u \in F$ (C réel > 0).

1) Démontrez qu'il existe une fonction $f^* : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur E telle que :

$$\forall u \in E : |f^*(u)| \leq \frac{1}{3}C \text{ et } \forall u \in F : |f(u) - f^*(u)| \leq \frac{2}{3}C.$$

Indication : Utilisez II avec des fermés et α convenablement choisis.

2) Notant f_1 la fonction f^* obtenue dans 1), on applique 1) à $f - f_1$, construisant ainsi f_2 ; puis on construit f_3 en partant de $f - f_1 - f_2$, etc.

Démontrez que :

$$\forall n = 1, 2, \dots, \forall u \in E : |f_n(u)| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n C, \text{ et :}$$

$$\forall n = 1, 2, \dots, \forall u \in F : |f(u) - f_1(u) - \dots - f_n(u)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n C.$$

Déduisez-en qu'il existe $f^\# : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur E , telle que $f^\#(u) = f(u)$ pour tout $u \in F$, et telle que $|f^\#(u)| \leq C$ pour tout $u \in E$.

3) Un tel résultat est-il possible si F n'est pas fermé ?

Démontrez que si $|f(u)| < 1$ pour tout $u \in F$ on peut trouver $f^\#$ comme dans 2) vérifiant $|f^\#(u)| < 1$ pour tout $u \in E$ (bricolez une fonction convenable avec $u \mapsto d(u, F)$).

Supposons enfin que $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $(F, d|_{F \times F})$ n'est pas bornée sur F . Démontrez qu'il existe $f^\sim : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur E telle que $f^\sim(u) = f(u)$ sur F . (utilisez une bijection entre \mathbb{R} et $]-1, +1[$).

CORRIGÉ DE LECTURE – PROBLÈME 2

I. 1) La condition (i) s'appelle *convergence simple* [ou : *ponctuelle*] sur E de la suite $(f_n)_n$ vers f . (ii) s'appelle *convergence uniforme sur tout borné* (non vide) de E de la suite $(f_n)_n$ vers f . Enfin (iii) est la *convergence uniforme sur E* de $(f_n)_n$ vers f .

On peut aussi, par exemple, introduire la *convergence uniforme sur toutes les parties compactes* de E [cf. Chap. XIV].

Notons que, évidemment : (iii) \implies (ii) \implies (i).

(i) n'implique pas en général la continuité de f quand les f_n sont continues. Il suffit de prendre $E := [0, 1]$, $F := \mathbb{R}$ (distance usuelle sur E et F) et $f_n(t) := t^n$ (f_n est continue sur $[0, 1]$ pour tout n). Pour tout $t \in [0, 1[$: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$; $f = 0$ sur $[0, 1[$ et $f(1) = 1$: f est discontinue en $t = 1$. ♦

(ii) [et donc aussi (iii)] implique la continuité de f .

Soit $u_0 \in E$, u_0 arbitraire, et considérons le voisinage borné $B = B(u_0, 1]$; il suffit bien sûr de considérer les restrictions des f_n et de f à B ; on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{u \in B} \delta[f_n(u), f(u)]) = 0$, soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq N \implies \sup_{u \in B} \delta[f_n(u), f(u)] \leq \frac{1}{3} \varepsilon ;$$

on veut $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in B [u \in B \text{ ou } u \in E, \text{ c'est pareil, ici}] :$

$$d(u, u_0) \leq \eta \implies \delta[f(u), f(u_0)] \leq \varepsilon.$$

Pour un N_0 choisi arbitrairement mais tel que $N_0 \geq N$, on a :

$$\delta[f(u), f(u_0)] \leq \delta[f(u), f_{N_0}(u)] + \delta[f_{N_0}(u), f_{N_0}(u_0)] + \delta[f_{N_0}(u_0), f(u_0)],$$

d'où, pour tout $u \in B$:

$$\delta[f(u), f(u_0)] \leq 2 \sup_{v \in B} \delta[f_{N_0}(v), f(v)] + \delta[f_{N_0}(u), f_{N_0}(u_0)] \leq \frac{2}{3} \varepsilon + \delta[f_{N_0}(u), f_{N_0}(u_0)];$$

il suffit d'écrire que f_{N_0} est continue en u_0 : $\exists \eta_0 > 0$ [η_0 dépendant de u_0, ε, B, N_0],

$\forall u \in B : d(u, u_0) \leq \eta_0 \implies \delta[f_{N_0}(u), f_{N_0}(u_0)] \leq \frac{1}{3} \varepsilon$, et on a :

$$\delta[f(u), f(u_0)] \leq \frac{2}{3} \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon = \varepsilon \text{ pour tout } u \in B \text{ vérifiant } d(u, u_0) \leq \eta_0. \blacklozenge$$

Remarque : La convergence uniforme sur tous les compacts, qui est moins restrictive que la cv unif. sur tous les bornés, est suffisante pour assurer que la continuité des f_n implique celle de f . On démontre la continuité en termes de suites :

si $\lim_{k \rightarrow \infty} (v_k) = u_0$, $K := \{v_k / k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{u_0\}$ est un compact,

d'où : $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta[f_n(v_k), f(v_k)] = 0$ pour tout k et $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta[f_n(u_0), f(u_0)] = 0$. et pour tout n fixé :

$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta[f_n(v_k), f_n(u_0)] = 0$; on écrit :

$$\delta[f(v_k), f(u_0)] \leq \delta[f(v_k), f_n(v_k)] + \delta[f_n(v_k), f_n(u_0)] + \delta[f_n(u_0), f(u_0)] \text{ et on a le résultat. } \blacklozenge$$

(ii) n'implique pas la continuité uniforme de f sur E si les f_n sont unif. cont. sur E .

Prenons en effet : $E := [0, +\infty[$, $F := \mathbb{R}$ et $f(t) := t^2$; pour f_n , on prend la fonction qui vaut t^2 entre 0 et n , et n^2 pour $t \geq n$; les f_n sont uniformément continus sur E , tandis que f ne l'est pas. Si B est un borné de E : $B \subset [0, \alpha]$; pour tout $n \geq \alpha$ on a : $f(t) - f_n(t) = 0$, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{t \in B} |f_n(t) - f(t)|) = 0$, soit (ii). ♦

Un exemple du même type prouve que si E est borné, et si l'on a convergence uniforme sur tous les compacts, il n'y a pas passage à la limite de la continuité uniforme sur E ; on prend $E :=]0, 1]$, $F := \mathbb{R}$ et $f(t) := \frac{1}{t}$ non uniformément continue sur E , pour f_n on prend $f_n(t) := \frac{1}{t}$ pour $t \geq \frac{1}{n}$ et $f_n(t) := n$ pour $t \leq \frac{1}{n}$; chaque f_n est uniformément continue sur E ; si K est compact dans E , on a $K \subset [\alpha, 1]$ avec $\alpha > 0$; pour n tel que $\frac{1}{n} < \alpha$ on a $f_n(t) - f(t) = 0$, d'où : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{t \in K} |f_n(t) - f(t)|) = 0$. ♦

Par contre, (iii) implique la continuité uniforme de f si les f_n sont unif. cont.

On veut $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E, \forall v \in E, d(u, v) \leq \eta \implies \delta[f(u), f(v)] \leq \varepsilon$;

on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq N \implies \sup_{u \in E} \delta[f_n(u), f(u)] \leq \frac{1}{3} \varepsilon$.

D'où, pour un n_0 fixé $\geq N$:

$$\begin{aligned} \delta[f(u), f(v)] &\leq \delta[f(u), f_{n_0}(u)] + \delta[f_{n_0}(u), f_{n_0}(v)] + \delta[f_{n_0}(v), f(v)] \\ &\leq 2 \sup_{w \in E} \delta[f_{n_0}(w), f(w)] + \delta[f_{n_0}(v), f(v)] \leq \frac{2}{3} \varepsilon + \delta[f_{n_0}(v), f(v)], \end{aligned}$$

et il ne reste plus qu'à écrire que f_{n_0} est uniformément continue sur E , i.e.

$$\exists \eta_0 > 0, \forall u \in E, \forall v \in E : d(u, v) \leq \eta_0 \implies \delta[f_{n_0}(u), f_{n_0}(v)] \leq \frac{1}{3} \varepsilon ;$$

on prend $\eta := \eta_0$. ♦

2) B étant choisi, arbitraire, (ii) signifie que $(\sup_{u \in B} \delta[f_n(u), f(u)])_n$ est une suite convergente dans \mathbb{R} (vers 0), donc est une suite de Cauchy, ce qui est justement (iv).

Réciproquement, si l'on a (iv), en prenant $B = \{u\}$, où u est arbitraire, on a : $(f_n(u))_n$ est une suite de Cauchy dans (F, δ) qui est complet. Donc $(f_n(u))_n$ est une suite convergente vers une limite qu'on notera $f(u)$. On définit ainsi $f : E \rightarrow F$ (unicité de la limite).

Reprenons (iv) : $\forall B \subset E, B \neq \emptyset$ borné, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$,
 $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall u \in B : p \geq N$ et $q \geq N \implies \delta[f_p(u), f_q(u)] \leq \varepsilon$.

La continuité de δ , le principe de prolongement des inégalités, et le fait que $\lim_{q \rightarrow \infty} (f_q(u)) = f(u)$, nous permettent d'écrire : $\forall B \subset E$ borné, $\forall \varepsilon > 0$:
 $\exists N \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall u \in B : p \geq N \implies \delta[f_p(u), f(u)] \leq \varepsilon$, c'est-à-dire (ii). ♦

3) Soit $u \in E$ fixé. On prend $B := \{u\}$.

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n(u) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(u)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty,$$

où $(\alpha_n)_n$ est la suite relative au borné $B = \{u\}$. La série de terme général $f_n(u)$ est donc absolument convergente, donc convergente, pour tout $u \in E$.

Posons, pour tout $u \in E : f(u) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(u)$, ce qui signifie que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(u)) = f(u), \text{ où } S_n(u) = f_1(u) + \dots + f_n(u).$$

Soit B borné, $B \subset E$. Pour tous p, q de \mathbb{N}^* , en supposant $q \geq p + 1$:

$$\sup_{u \in B} |S_q(u) - S_p(u)| = \sup_{u \in B} \left| \sum_{n=p+1}^q f_n(u) \right| \leq \sup_{u \in B} \sum_{n=p+1}^q |f_n(u)| \leq \sum_{n=p+1}^q \alpha_n, \text{ où } (\alpha_n) \text{ est la suite relative à } B.$$

Comme $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < +\infty$, on a : $\lim_{p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=p+1}^q \alpha_n \right) = 0$, car $(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$ est de Cauchy.

Donc (S_n) vérifie (iv), et - d'après 2) - vérifie (ii).

Donc, pour tout B borné : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{u \in B} |S_n(u) - f(u)| \right) = 0$. Donc - d'après 1) - si les f_n sont continues sur E , il en est de même de S_n , et donc aussi de f . Ce résultat constitue le très utile *critère de Weierstraß*. ♦

II. $\forall u \in E : d(u) = \alpha \frac{d(u, G) - d(u, G')}{d(u, G) + d(u, G')}$, où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Puisque $d(u, G)$ et $d(u, G')$ sont ≥ 0 , $d(u, G) + d(u, G') = 0$ implique $d(u, G) = 0$ et $d(u, G') = 0$, soit $u \in \text{adh}(G) = G$ et $u \in \text{adh}(G') = G'$ i.e. $u \in G \cap G'$. Comme $G \cap G' = \emptyset$, on a donc $\forall u \in E : d(u, G) + d(u, G') > 0$.

Puisque $u \mapsto d(u, G)$ [resp. $d(u, G')$] est continue (contractante) on a grâce aux règles usuelles sur les fonctions continues [Chap. VII] : g est continue sur E .

$$|d(u, G) - d(u, G')| \leq d(u, G) + d(u, G') \implies |g(u)| \leq |\alpha| \frac{|d(u, G) - d(u, G')|}{d(u, G) + d(u, G')} \leq |\alpha| \text{ pour tout } u \in E.$$

$$g(u) = \alpha \iff \frac{d(u, G) - d(u, G')}{d(u, G) + d(u, G')} = 1 \iff 2d(u, G') = 0 \iff u \in \text{adh}(G') = G';$$

et, de même : $g(u) = -\alpha \iff u \in G$. ♦

Prenons $\alpha := 1$ et $U := g^{-1}(]-\infty, 0])$, $U' := g^{-1}(]0, +\infty[)$. g étant continue : U et U' sont des ouverts de (E, d) .

$$u \in G \iff g(u) = -1 \iff u \in g^{-1}(\{-1\}) \implies u \in g^{-1}(]-\infty, 0]) = U;$$

de même : $u \in G' \implies u \in U'$.

Enfin :

$$U \cap U' = g^{-1}(]-\infty, 0]) \cap g^{-1}(]0, +\infty[) = g^{-1}(]-\infty, 0[\cap]0, +\infty[) = g^{-1}(\emptyset) = \emptyset. \blacklozenge$$

III. 1) Si $|f(u)| \leq \frac{1}{3} C$, on peut prendre $f^* \equiv 0$:

$$|f^*(u)| \leq \frac{1}{3} C \text{ et } |f(u) - f^*(u)| = |f(u)| \leq \frac{1}{3} C \leq \frac{2}{3} C \text{ pour } u \in F.$$

Si $-\frac{1}{3} C \leq f(u) \leq C : f^*(u) := \frac{1}{3} C$ convient car :

$$|f^*(u)| \leq \frac{1}{3} C \text{ et } |f(u) - f^*(u)| \leq C - \frac{1}{3} C = \frac{2}{3} C \text{ pour tout } u \in F.$$

De même, si $-C \leq f(u) \leq \frac{1}{3} C$, $f^*(u) := -\frac{1}{3} C$ convient.

Maintenant, si f prend des valeurs $\leq -\frac{1}{3} C$ et des valeurs $\geq \frac{1}{3} C$, considérons les parties de F suivantes :

$$F_+ := \{u \in F / f(u) \geq \frac{1}{3} C\} \text{ et } F_- := \{u \in F / f(u) \leq -\frac{1}{3} C\}.$$

$F_+ \neq \emptyset$ et $F_- \neq \emptyset$ sont des parties fermées de F , puisque f est une fonction continue sur F (car on a : $F_+ = f^{-1}([\frac{1}{3}C, +\infty[) = f^{-1}([\frac{1}{3}C, C])$ et de même $F_- = f^{-1](]-\infty, -\frac{1}{3}C]) = f^{-1}([-C, -\frac{1}{3}C])$).

Puisque F est fermé dans E , F_+ et F_- sont des fermés de (E, d) [Chap. V], et évidemment, $F_+ \cap F_- = \emptyset$.

Considérons la fonction $f^* : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f^*(u) = \alpha \frac{d(u, F_+) - d(u, F_-)}{d(u, F_+) + d(u, F_-)}$ où α est à déterminer. On sait que si $u \in F_-$ on a $f^*(u) = \alpha$, et si $u \in F_+$ on a $f^*(u) = -\alpha$, d'après II.

Si $u \in F_-$ on a $f(u) \leq -\frac{1}{3}C$ par définition. On prendra donc $\alpha = -\frac{1}{3}C$. La fonction $f^*(u) = -\frac{1}{3}C \frac{d(u, F_+) - d(u, F_-)}{d(u, F_+) + d(u, F_-)}$ va répondre à la question.

On sait par II que pour tout $u \in E$: $|f^*(u)| \leq |-\frac{1}{3}C| = \frac{1}{3}C$. Ensuite pour $u \in F$:

• si $u \in F_+$: $f^*(u) = \frac{1}{3}C$ et $\frac{1}{3}C \leq f(u) \leq C$ donne :

$$0 = \frac{1}{3}C - \frac{1}{3}C \leq |f(u) - f^*(u)| = f(u) - f^*(u) \leq C - \frac{1}{3}C = \frac{2}{3}C : \\ |f(u) - f^*(u)| \leq \frac{2}{3}C ;$$

• si $u \in F_-$: $f^*(u) = -\frac{1}{3}C$ et $-C \leq f(u) \leq -\frac{1}{3}C$ donne :

$$0 = \frac{1}{3}C - \frac{1}{3}C \leq |f(u) - f^*(u)| = f^*(u) - f(u) \leq -\frac{1}{3}C + C = \frac{2}{3}C : \\ |f(u) - f^*(u)| \leq \frac{2}{3}C ;$$

• si $u \in F \setminus (F_+ \cup F_-)$: $|f^*(u)| < \frac{1}{3}C$ [cf. II] et $-\frac{1}{3}C \leq f(u) \leq \frac{1}{3}C$, par définition de F_+ et F_- , i.e. $|f(u)| \leq \frac{1}{3}C$, d'où :

$$|f(u) - f^*(u)| \leq |f(u)| + |f^*(u)| < \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}C = \frac{2}{3}C.$$

Finalement : $\forall u \in F : |f(u) - f^*(u)| \leq \frac{2}{3}C$. ♦

2) Dans ce qui précède, à partir de $|f| \leq C$ sur F , on a obtenu $f_1 = f^*$ vérifiant sur E : $|f_1| \leq \frac{2}{3}C$ et sur F : $|f - f_1| \leq \frac{2}{3}C$.

On applique le même procédé à $f - f_1$: on obtient $f_2 : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $|f_2| \leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3}C)$ sur E et $|(f - f_1) - f_2| \leq 2 \times \frac{2}{3}(\frac{1}{3}C)$ sur F , soit : $|f - f_1 - f_2| \leq (\frac{2}{3})^2 C$.

On recommence avec $f - f_1 - f_2$ obtenant f_3 telle que : $|f_3| \leq \frac{1}{3}[(\frac{2}{3})^2 C] = \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^2 C$ sur E , et : $|(f - f_1 - f_2) - f_3| \leq \frac{2}{3}(\frac{2}{3})^2 C$ sur F . Soit : $|f - f_1 - f_2 - f_3| \leq (\frac{2}{3})^3 C$.

On continue ainsi, obtenant une suite $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ de fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in E : |f_n(u)| \leq \frac{1}{2}(\frac{2}{3})^n C, \text{ et :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in F : |f(u) - f_1(u) - f_2(u) - \dots - f_n(u)| \leq (\frac{2}{3})^n C.$$

On a : $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n = \frac{2}{3}(1 + \frac{2}{3} + (\frac{2}{3})^2 + \dots) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 2$.

Posons pour tout $u \in E$: $f^\#(u) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(u)$.

D'après la première majoration ci-dessus et les résultats de I.3), on obtient : $f^\#$ est une fonction continue sur E .

De plus, $\forall u \in E : |f^\#(u)| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^n C = \frac{1}{2} \times 2C = C$.

Enfin, la seconde inégalité nous donne :

$$\forall u \in F, \forall n \in \mathbb{N}^* : |f(u) - \sum_{i=1}^n f_i(u)| \leq (\frac{2}{3})^n C \implies |f(u) - f^\#(u)| \leq 0,$$

soit : $f^\#(u) = f(u)$ pour tout $u \in F$.

Nous avons donc obtenu un prolongement à E tout entier de la fonction f , prolongement continu sur E , et qui, si $|f| \leq C$ sur F , vérifie $|f^\#| \leq C$ sur E .

C'est le **théorème de prolongement de Tietze-Urysohn**. ♦

3) La condition « F fermé » est essentielle ! Si cette condition n'est pas remplie, on trouve facilement un contre-exemple : $E := \mathbb{R}$ usuel, $F := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, et $f(t) := -1$ pour $t < 0$, $f(t) := +1$ pour $t > 0$. f est continue sur F , et $|f| \leq 1$, mais on ne peut pas trouver $f^\# : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $E = \mathbb{R}$ et coïncidant avec f sur $F = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ♦

Si $|f| < 1$ sur F (au lieu de $|f| \leq 1$ comme ci-dessus), on peut trouver un prolongement f^\sim tel que $|f^\sim| < 1$ sur E . Il suffit de prendre : $f^\sim(u) := \gamma(u) \cdot f^\#(u)$ où $\gamma(u) := \frac{1-d(u,F)}{1+d(u,F)}$.

f^\sim est continue sur E , $\gamma(u) = \frac{1-d(u,F)}{1+d(u,F)} \leq 1$, et $\gamma(u) = 1 \iff u \in F$. ♦

Soit maintenant $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur F , mais *non bornée*. $g(u) := \frac{f(u)}{1+|f(u)|}$ est continue sur F , et $|g(u)| < 1$ pour tout $u \in F$; il existe donc $g^\sim : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $|g^\sim(u)| < 1$ sur E , avec $g^\sim|_F = g$ (cf. ci-dessus).

Il suffit à présent de considérer $f^\bullet(u) := \frac{g^\sim(u)}{1-|g^\sim(u)|} : f^\bullet : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, et $f^\bullet|_F = f$.

Nota : On a utilisé la bijection $t \mapsto s = \varphi(t) = \frac{t}{1+|t|}$, $\mathbb{R} \rightarrow]-1, +1[$, avec :

$$s \mapsto \varphi^{-1}(s) = t = \frac{s}{1-|s|},]-1, +1[\rightarrow \mathbb{R}, \text{ souvent utile. } \blacklozenge$$

LECTURE – PROBLÈME 3

Le théorème de Tietze–Urysohn : une autre approche

Nous proposons ici une autre démonstration du Théorème de Tietze–Urysohn, démonstration dans laquelle on *explícite* la fonction prolongement.

Soit (E, d) un espace métrique, et soit F une partie fermée de E telle que $F \neq \emptyset$, $F \neq E$. Soit $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le sous-espace métrique $(F, d|_{F \times F})$, vérifiant : $\inf_{v \in F} f(v) = 1$ et $\sup_{v \in F} f(v) = 2$.

On considère la fonction $f^\# : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f^\#(u) := f(u)$ pour tout $u \in F$, et par $f^\#(u) := \frac{1}{d(u,F)} g(u)$ pour tout $u \in E \setminus F$, où $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ est définie ainsi :

$$g(u) := \inf\{f(v) \cdot d(u, v) / v \in F\}.$$

1) Démontrez que $f^\#$ est bien définie sur E , et vérifie :

$$\inf_{u \in E} f^\#(u) = 1 \text{ et } \sup_{u \in E} f^\#(u) = 2.$$

2) Démontrez que g est lipschitzienne de constante 2 sur E . Déduisez-en que $f^\#$ est continue sur $E \setminus F$.

3) Vérifiez que $f^\#(u) = \frac{1}{d(u,F)} \inf\{f(v) \cdot d(u, v) / v \in G\}$,

où : $G = F \cap B(u, 2d(u, F))$, et remarquez que $d(u, G) = d(u, F)$ pour tout $u \in E \setminus F$.

Démontrez que $f^\#$ est continue en tout point $a \in F$.

Indication : Dans la majoration de $|f^\#(u) - f^\#(a)|$, distinguez les cas $u \in F$ et $u \in E \setminus F$; dans ce dernier cas, $\forall v \in G$, on a : $d(u, v) \leq 2d(u, F) \leq 2d(u, a)$.

4) Déduisez de ce qui précède le résultat suivant : soit $h : F \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée sur F ; il existe une fonction $h^\# : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur E , égale à h sur F , et telle que : $\inf_E h^\# = \inf_F h$, $\sup_E h^\# = \sup_F h$.

CORRIGÉ DE LECTURE – PROBLÈME 3

1) Le seul problème est de savoir si $f^\#(u)$ est bien défini quand $u \in E \setminus F$.

Comme F est fermé : $d(u, F) > 0$ pour tout $u \in E \setminus F$, et $\frac{1}{d(u, F)}$ a un sens.

Comme $F \subset E$: $\inf_E f^\# \leq \inf_F f = 1$, et comme $f(v) \geq 1$ pour tout $v \in F$:

$$f^\#(u) = \frac{1}{d(u, F)} \inf_{v \in F} f(v) \cdot d(u, v) \geq \frac{1}{d(u, F)} \inf_{v \in F} d(u, v) = \frac{1}{d(u, F)} \cdot d(u, F) = 1.$$

De même : $\sup_E f^\# \geq \sup_F f = 2$, et :

$$f^\#(u) \leq 2 \frac{1}{d(u, F)} \inf_{v \in F} d(u, v) = 2 \frac{1}{d(u, F)} \cdot d(u, F) = 2. \spadesuit$$

2) Soient $u, u' \in E \setminus F$; $d(u, v) \leq d(u, u') + d(u', v)$, d'où :

$$\forall v \in F : f(v) \cdot d(u, v) \leq f(v) \cdot d(u, u') + f(v) \cdot d(u', v) \leq f(v) \cdot d(u', v) + 2d(u, u') \\ \implies \inf_{v \in F} [f(v) \cdot d(u, v)] = g(u) \leq \inf_{v \in F} [f(v) \cdot d(u', v)] + 2d(u, u').$$

En intervertissant u et u' , de la même façon : $g(u') \leq g(u) + 2d(u, u')$. D'où :

$$\forall u, u' \in E \setminus F : |g(u) - g(u')| \leq 2d(u, u').$$

Si $u \in F : g(u) = 0$ et la majoration reste valide.

On a donc, $\forall u, u' \in E : |g(u) - g(u')| \leq 2d(u, u')$. g est donc – en particulier – uniformément continue sur E entier.

$E \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto d(u, F)$ est uniformément continue sur E (et même lipschitzienne) car $|d(u, F) - d(u', F)| \leq d(u, u')$. Donc : $E \setminus F \rightarrow]0, +\infty[$, $u \mapsto d(u, F)$ est continue sur $E \setminus F$ et, d'autre part, $t \mapsto \frac{1}{t}$, $]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ est continue.

Par composition : $u \in E \setminus F \mapsto d(u) = \frac{1}{d(u, F)} \in]0, +\infty[$ est continue. Ensuite le produit $d \cdot g$ est continu sur $E \setminus F$. \spadesuit

3) Soit $u \in E \setminus F$. Si $v \in F$, $v \notin B(u, 2d(u, F)) : d(u, v) > 2d(u, F)$, et :

$$\frac{1}{d(u, F)} \inf_{v \in F} [f(v) \cdot d(u, v)] > \frac{1}{d(u, F)} \times 2d(u, F) \cdot \inf_{v \in F} f(v) = 2;$$

donc, posant $G := B(u, 2d(u, F)) \cap F : f^\#(u) = \frac{1}{d(u, F)} \inf_{v \in G} [f(v) \cdot d(u, v)]$.

De la même manière, si $v \notin B(u, 2d(u, F)) : d(u, v) > 2d(u, F) > d(u, F)$ et donc : $d(u, F) = d(u, G)$.

Soit $a \in F$. Écrivons que f est continue sur F en a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in F : d(u, a) \leq \eta \implies |f(u) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Ce qu'on veut, c'est :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \theta > 0, \forall u \in E : d(u, a) \leq \theta \implies |f^\#(u) - f^\#(a)| = |f^\#(u) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

On voit que si $a \in \text{int}(F)$ (qui peut être vide) il n'y a pas de problème. Il n'y a pas de problème non plus pour les $u \in F$ quand $a \in \text{fr}(F)$ qui est le cas difficile (on prend $\theta = \eta$, c'est tout).

Le problème délicat est donc la situation $a \in \text{fr}(F)$ et $u \in E \setminus F$. Dans ce cas, écrivons :

$\forall v \in G = F \cap B(u, 2d(u, F)) : d(u, v) \leq 2d(u, F) \leq 2d(u, a)$, et on aura : $2d(u, a) \leq \eta$ si l'on prend (ce qui est loisible) : $d(u, a) \leq \frac{1}{2}\eta$ (i.e. qu'au moins provisoirement on prendrait $\theta = \frac{1}{2}\eta$).

A présent : $d(v, a) \leq d(v, u) + d(u, a) \leq \eta + \frac{1}{2}\eta = \frac{3}{2}\eta$, qui est trop grand.

On prendra donc plutôt : $\theta = \frac{1}{3}\eta$. Alors :

$$d(u, a) \leq \frac{1}{3}\eta, d(u, v) \leq \frac{2}{3}\eta \text{ et } d(v, a) \leq \frac{1}{3}\eta + \frac{2}{3}\eta = \eta, \text{ cela pour tout } v \in G.$$

Donc : $|f(v) - f(a)| \leq \varepsilon$ et $\forall v \in G : f(a) - \varepsilon \leq f(v) \leq f(a) + \varepsilon$ entraîne :

$$d(u, v) \cdot [f(a) - \varepsilon] \leq d(u, v) \cdot f(v) \leq d(u, v) \cdot [f(a) + \varepsilon], \text{ d'où :}$$

$$\inf_{v \in G} d(u, v) \cdot [f(a) - \varepsilon] \leq \inf_{v \in G} [f(v) \cdot d(u, v)] \leq \inf_{v \in G} d(u, v) \cdot [f(a) + \varepsilon] \text{ et}$$

$$d(u, F)[f(a) - \varepsilon] \leq \inf_{v \in G} [f(v) \cdot d(u, v)] \leq d(u, F) + \varepsilon, \text{ soit :}$$

$$f(a) - \varepsilon \leq f^\#(u) \leq f(a) + \varepsilon \implies |f^\#(u) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Donc : $\theta = \frac{1}{3}\eta$ convient. \spadesuit

4) Si h est constante, le problème est réglé, on prend $h^\# := h$. Sinon soit $\alpha := \inf_F h$ et $\beta := \sup_F h$, $\alpha < \beta$.

Soit alors $f := ah + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, et écrivons :

$$\inf_F f = 1 = a \inf_F h + b \implies 1 = a\alpha + b \text{ et}$$

$$\sup_F f = 2 = a \sup_F h + b \implies 2 = a\beta + b,$$

d'où l'on tire : $a = \frac{1}{\beta - \alpha}$ et $b = \frac{\beta - 2\alpha}{\beta - \alpha}$. f est continue sur F comme h , et vérifie : $\inf_F f = 1$ et $\sup_F f = 2$.

D'après ce qui précède, on peut trouver $f^\# : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f^\#|_F = f$, continue sur E , et telle que $\inf_E f^\# = 1$, $\sup_E f^\# = 2$.

Refaisant à l'envers le travail précédent, on considère : $h^\# := (\beta - \alpha)f^\# + (2\alpha - \beta)$. On a bien $h^\#$ continue sur E , telle que $h^\#|_F = h$, et enfin telle que $\inf_E h^\# = \alpha$ et $\sup_E h^\# = \beta$. ♦

Exemple d'application :

Soient F, G fermés non vides dans E tels que $F \cap G = \emptyset$, et soient $\varphi : F \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée sur F , $\psi : G \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée sur G .

Il existe une fonction $f^\# : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée sur E , telle que $f^\#|_F = \varphi$ et $f^\#|_G = \psi$. Il suffit en effet de considérer le fermé $K = F \cup G$ et la fonction $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(u) = \varphi(u)$ si $u \in F$, $f(u) = \psi(u)$ si $u \in G$; d'après les propriétés de F et G , f est bien définie et continue sur K , $\inf_K f = \min\{\inf_F \varphi, \inf_G \psi\}$, $\sup_K f = \max\{\sup_F \varphi, \sup_G \psi\}$.

On applique le Th. de Tietze-Urysohn à f , et on a le résultat voulu. ♦

Plus particulièrement encore, soit $F \neq \emptyset$, $F \neq E$, fermé. Pour $\varepsilon > 0$, considérons $F_1 := B(F, \frac{1}{3}\varepsilon)$ et $G := E \setminus B(F, \varepsilon)$, supposons que $G \neq \emptyset$. Clairement, $F_1 \cap G = \emptyset$.

D'après ce qui précède, il existe une fonction f continue sur E telle que $f|_{F_1} \equiv 1$, $f|_G \equiv 0$ et $0 \leq f \leq 1$.

Si F est un fermé borné de \mathbb{R}^n , on peut ensuite régulariser f (par convolution) de manière à la rendre indéfiniment dérivable. Une telle « fonction caractéristique approchée » est précieuse dans la théorie des distributions.

En topologie générale, le théorème de Tietze-Urysohn exprime que tout espace métrique est un espace topologique *normal*.

Fin du Chapitre XII

CHAPITRE XIII

ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS (I)

Introduction

Ce chapitre XIII introduit à la notion tout à fait fondamentale d'espace métrique *compact*.

Nous avons choisi de faire une large place, en préliminaire, à la notion d'espace métrique *précompact* dont le contenu intuitif est précieux pour acquérir une compréhension véritable de ce qu'est un compact.

Beaucoup d'étudiants se contentent de prendre conscience de l'*utilité* fondamentale des compacts en Analyse, ce qui n'est déjà pas si mal . . . mais ce point de vue utilitaire ne saurait remplacer l'assimilation correcte du *concept* de compact.

En pratique, notre détour, qui rompt avec l'ordre historique, ne coûte pas cher car nous obtenons ensuite de nombreux et utiles résultats . . . sans démonstration, en réunissant simplement des résultats antérieurs.

Beaucoup de propositions (plus de quinze !) dans ce chapitre, mais toutes sont de démonstration immédiate, ou presque.

Chapitre assez facile, donc. Profitez-en pour méditer longuement sur la notion de (pré)compacité.

Exercices indispensables : 1.1, 2.1, 2.2, 3.1.

Exercices complémentaires : 2.3, 2.4.

Je vous propose quatre problèmes pour vous aider à réviser (fin du premier semestre) tous les chapitres qui précèdent.

Le premier établit que le dual topologique de l'e.v.n. c_0 s'identifie – *via* une isométrie linéaire surjective – à l'e.v.n. ℓ^1 ; il est facile, et très intéressant car prototype de nombreux résultats utiles de cette sorte (ils ne sont pas toujours aussi simples).

Il est bien agréable d'identifier le dual d'un e.v.n. connu/classique à un e.v.n. tout aussi connu/classique : que savons-nous du dual d'un e.v.n. lorsqu'on ne sait pas le ramener à un e.v.n. connu ?

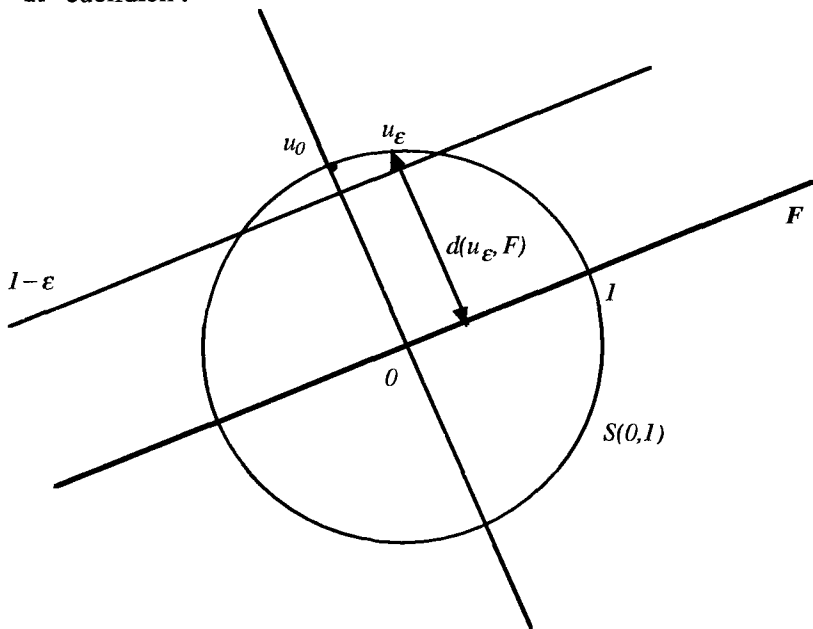
Le second montre comment munir l'ensemble des fermés non vides d'un e.m. séparable d'une distance ; facile.

Le troisième, très simple, fait travailler sur les normes.

Le quatrième problème fait retourner au chapitre I et donne quelques propriétés amusantes des espaces ultramétriques.

BON TRAVAIL, ET BONNES RÉVISIONS !

$E = \mathbb{R}^2$ euclidien :



Lemme 3.1 (F. Riesz) : Pour tout $\epsilon > 0$, il existe u_ϵ tel que $\|u_\epsilon\| = 1$ et $d(u_\epsilon, F) \geq 1 - \epsilon$.

Ici, il existe u_0 tel que $\|u_0\| = 1$ et $d(u_0, F) = 1$ (cas $\epsilon = 0$), mais, ce serait faux en général pour un e.v.n. de dimension infinie (c'est vrai, toutefois, pour les espaces préhilbertiens : le voir).

CHAPITRE XIII

ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS

(I)

1. RECOUVREMENTS

Définition 1.1.

Soit E un ensemble (quelconque) et soit A une partie de E . Un **recouvrement** de A est une famille $(B_i)_{i \in I}$ de parties de E vérifiant :

$$A \subset \bigcup_{i \in I} B_i.$$

Terminologie : Si I est *fini* [resp. *dénombrable*] on parlera de *recouvrement fini* [resp. *dénombrable*].

Commentaire : Si $A = E$, puisque $\bigcup_{i \in I} B_i \subset E$, on a l'égalité : $\bigcup_{i \in I} B_i = E$.

Exemples 1.1.

1) La famille $\{A\}$ réduite à A est un recouvrement de A (peu utile ...).

2) $(B_u)_{u \in A}$ avec $B_u = \{u\}$ est un recouvrement de A (peu utile ...).

3) Soit (E, d) un espace métrique, et soit $A \subset E$: $(B_u)_{u \in A}$ où $B_u = B(u, \rho_u]$ – ou bien $B_u = B(u, \rho_u)$ – les ρ_u étant des réels > 0 , est un recouvrement souvent utilisé de A .

4) Soit $E = \mathbb{R}$; $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} = ([-n, +n])_{n \in \mathbb{N}}$, ou $(]-n, +n[)_{n \in \mathbb{N}}$, sont des recouvrements de E .

5) Soit $A = [\alpha, \beta]$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$) un intervalle de \mathbb{R} .

Pour tout $n \geq 1$, on découpe l'intervalle en n parties égales en considérant les points $(t_k)_{0 \leq k \leq n}$; $t_k := \alpha + \frac{k}{n}(\beta - \alpha)$; les boules (intervalles) $B_k =]t_k - \frac{1}{n}, t_k + \frac{1}{n}[$ constituent un recouvrement de A par $(n+1)$ boules. Même chose pour les intervalles $] \alpha, \beta[$, $] \alpha, \beta]$ et $[\alpha, \beta[$.

☞ **Exercice 1.1.** (très facile) Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \subset E$. Soit $D \subset E$ une partie dense par rapport à A (i.e. $\text{adh}(D) \supset A$). Vérifiez que pour tout $\rho > 0$ fixé : $(B_u)_{u \in D}$, $B_u = B(u, \rho]$ est un recouvrement de A .

2. ESPACES MÉTRIQUES PRÉCOMPACTS

Définition 2.1.

Soit (E, d) un espace métrique.

On dit que (E, d) est **précompact** [ou bien : *totalemtent borné*] si :

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des parties de E dont le diamètre est inférieur à ε

[Rappelons que le diamètre de $X \subset E$ est défini par :

$$\text{diam}(X) := \sup_{x \in X, y \in X} d(x, y).]$$

Une partie A de E sera dite **précompacte** dans (E, d) si le sous-espace métrique $(A, d|_{A \times A})$ est précompact.

Commentaire : Peu importe si «inférieur» signifie $<$ ou bien \leq , à cause de «tout $\varepsilon > 0$ ».

Exemples 2.1.

1) Dans tout espace métrique (E, d) toute partie finie $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ est précompact car : $A \subset \bigcup_{1 \leq k \leq n} \{a_k\}$ et $\text{diam}(\{a_k\}) = 0$ pour tout $k = 1, \dots, n$.

2) Soit $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, sous-espace métrique de \mathbb{R} usuel [cf. Exemples 1.1, 5)]. $\varepsilon > 0$ étant donné, on choisit $n \geq 1$ tel que $\frac{2}{n} \leq \varepsilon$, et on considère le recouvrement suivant de $[\alpha, \beta]$: $B_0 = [\alpha, \alpha + \frac{1}{n}[$, $B_k =]t_k - \frac{1}{n}, t_k + \frac{1}{n}[$, $B_n =]\beta - \frac{1}{n}, \beta]$. $\text{diam}(B_i)$ vaut $\frac{1}{n}$ pour $i = 0$ et $i = n$, et vaut $\frac{2}{n}$ pour $1 \leq i \leq n - 1$, et est donc dans tous les cas $\leq \varepsilon$. Donc $[\alpha, \beta]$ muni de la distance induite par \mathbb{R} usuel est un e.m. précompact, ou – c'est équivalent – $[\alpha, \beta]$ est une partie précompacte de \mathbb{R} .

3) Soit E un ensemble quelconque qu'on munit de la distance discrète δ : quand (E, δ) est-il précompact ?

Si E est fini, (E, δ) est précompact d'après 1). Si E n'est pas fini, soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$: les seules parties de E dont le diamètre est $\leq \varepsilon$ sont les sous-ensembles $\{u\}$ avec $u \in E$ et \emptyset . Il est clair qu'on ne peut pas recouvrir E infini avec un nombre fini de parties réduites à un point. Donc (E, δ) n'est pas précompact.

Les seules parties précompactes sont donc les parties finies.

Remarquons, pour la suite, que toutes les parties de (E, δ) sont à la fois fermées et ouvertes.

Proposition 2.1.

Soit (E, d) un espace métrique. (E, d) est précompact si et seulement s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes :

$$(2.1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists F (= F_\varepsilon) \subset E, F \text{ fini, tel que } \forall u \in E : d(u, F) \leq \varepsilon,$$

$$(2.2) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists u_1 \in E, \dots, \exists u_n \in E : E \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(u_i, \varepsilon].$$

(n et les u_i dépendant de ε)

Commentaire : $d(u, F) \leq \varepsilon$ peut être remplacé par $d(u, F) < \varepsilon$, les boules ouvertes $B(u_i, \varepsilon[$ peuvent être remplacées par les boules fermées $B(u_i, \varepsilon]$.

☞ **Exercice 2.1.** (très facile) Démontrez cette Proposition, ainsi que celle qui suit.

Proposition 2.2.

|| Toute partie A d'un espace métrique (E, d) précompact est précompacte.

Proposition 2.3.

|| Un espace métrique précompact est nécessairement **borné**.

Démonstration : Faisons $\varepsilon = 1$ dans (2.1) : soit $F = \{u_1, \dots, u_m\}$ tel que $\forall u \in E$ on a $d(u, F) \leq 1$. Soient u et v arbitraires dans E : il existe $u' \in F$ et $v' \in F$ tels que $d(u, u') = d(v, v') = d(u, F) \leq 1$ [existence due au fait que F est fini], d'où : $d(u, v) \leq d(u, u') + d(u', v') + d(v', v) \leq 1 + \text{diam}(F) + 1 = 2 + \text{diam}(F) < \infty$ car le diamètre d'un ensemble fini est fini. ♦

Exemples 2.2.

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, n \geq 1, \mathbb{Z}$ munis de leur distance usuelle ne sont pas précompacts car non bornés.

Soit maintenant $A \subset \mathbb{R}$ une partie bornée de \mathbb{R} usuel. Posant $\alpha := \inf(A)$ et $\beta := \sup(A)$, on a : $A \subset [\alpha, \beta]$, avec α et β dans \mathbb{R} . D'après l'Exemple 2.1 : $[\alpha, \beta]$ est précompact, et, d'après la Prop. 2.2 : A est précompacte.

Réciproquement, si A est une partie précompacte de \mathbb{R} , c'est une partie bornée d'après la Prop. 2.3. On peut donc énoncer l'important résultat :

Proposition 2.4.

|| Les parties *précompactes* de \mathbb{R} usuel sont les parties *bornées*.

La Proposition ci-dessous est constituée de résultats dont la démonstration est immédiate (voyez vous-même).

Proposition 2.5.

(i) On ne change pas la notion d'espace métrique précompact si l'on remplace la distance initiale par une distance équivalente. En particulier deux espaces métriques isométriques sont simultanément précompacts ou non précompacts.

(ii) Soit (E, d) un espace métrique et soient $A_i, i \in I, I$ arbitraire, des parties précompacts de (E, d) : $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ est précompacte dans (E, d) .

(iii) La réunion d'une famille *finie* de parties précompacts est précompacte. $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, +n]$ prouve que ce résultat serait *faux* pour une réunion infinie.

(iv) Soient $(E_i, d_i), i = 1, \dots, n$, des espaces métriques précompacts.

Le produit cartésien $E = \prod_{1 \leq i \leq n} E_i$ muni de la distance d_∞ [ou d'une distance équivalente, d'après (i)] est précompact.

Corollaire 2.1.

|| Les parties *précompactes* de $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ usuels sont les parties *bornées*.

Démonstration : En effet, si B est borné dans \mathbb{R}^n , B est contenu dans un pavé $[\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$ qui est précompact à cause de la Prop. 2.4 et de (iv) de la Prop. 2.5, on applique ensuite la Prop. 2.2.

Ensuite, \mathbb{C} est isométrique à \mathbb{R}^2 , et \mathbb{C}^n à \mathbb{R}^{2n} . ♦

Proposition 2.6.

|| Tout espace métrique précompact est *séparable*.

Démonstration : Par définition : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists F_n \subset E, F_n$ fini, $\forall u \in E : d(u, F_n) \leq \frac{1}{n}$.

Posons : $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n$: une réunion dénombrable d'ensembles finis (et même dénombrables !) est dénombrable. Soit à présent $u \in E$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : d(u, D) \leq d(u, F_n) \leq \frac{1}{n} \implies d(u, D) = 0 \implies u \in \text{adh}(D),$$

d'où : $\text{adh}(D) = E$. ♦

Proposition 2.7.

|| Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie *précompacte* de E , l'adhérence de A est aussi *précompacte*.

Démonstration : $\forall \varepsilon > 0, \exists F = F_{\varepsilon/2} \subset A, F$ fini, $\forall u \in A : d(u, F) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$.

Soit $v \in \text{adh}(A)$; $\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon \in A : d(v, v_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Donc, puisque $|d(x, X) - d(y, X)| \leq d(x, y)$, on a : $d(v, F) \leq d(v_\varepsilon, F) + d(v, v_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$, et $\text{adh}(A)$ est précompact [le même $F \subset A$ sert pour A et pour $\text{adh}(A)$]. ♦

☞ Un gros défaut de la notion de précompacité (qui possède par ailleurs de bonnes propriétés, comme le prouvent les Propositions ci-dessus) est que *ce n'est pas une notion topologique*. Un exemple très simple va nous le montrer immédiatement :

$f :]0, 1[\rightarrow]1, +\infty[, t \mapsto f(t) = \frac{1}{t}$ est un homéomorphisme, et $]0, 1[$ est précompact tandis que $]1, +\infty[$ ne l'est pas (non borné).

On a une petite Proposition de consolation . . .

Proposition 2.8.

Soient (E, d) , (F, δ) des espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$ une application uniformément continue sur E . Si (E, d) est précompact, l'image $f(E)$ est une partie précompacte de (F, δ) .

Démonstration : (E, d) est précompact, donc : $\forall \alpha > 0, \exists A_1, \dots, \exists A_n$ des parties de E telles que $\text{diam}(A_i) \leq \alpha$ et $E \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$.

D'autre part, f uniformément continue s'écrit [cf. Chap. VIII, Déf.1.1] :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall A \subset E : \text{diam}(A) \leq \eta \implies \text{diam}(f(A)) \leq \varepsilon.$$

Il suffit donc de faire $\alpha = \eta$ dans la définition de la précompacité, on aura : $\text{diam}(f(A_i)) \leq \varepsilon$ pour $i = 1, \dots, n$, et :

$$f(E) \subset f\left(\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right) = \bigcup_{1 \leq i \leq n} f(A_i). \blacklozenge$$

Remarque : La dernière égalité serait vraie pour une réunion quelconque, cette formule de théorie des ensembles doit être connue.

Corollaire 2.2.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} de dimension finie.
Les parties précompactes de E sont les parties bornées.

☞ **Exercice 2.2.** (très facile) Démontrez ce Corollaire.

☞ **Exercice 2.3.** (facile) On reprend une fois de plus l'espace métrique (E, d) défini dans l'Exercice 2.4 du Chap. I [voir aussi l'Exercice 2.3 du Chap. XI]. Démontrez que si tous les (E_i, d_i) sont précompacts, il en est de même du produit (E, d) .

☞ **Exercice 2.4.** (difficile) Soit $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, et soit (E, d) un espace métrique.

Soit $f : I \rightarrow E$ une application possédant la propriété suivante : il existe un réel $C \geq 0$ tel que pour toute suite finie strictement croissante $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ de points de I on a l'inégalité :

$$\sum_{i=0}^{n-1} d[f(t_{i+1}), f(t_i)] \leq C. \text{ Démontrez que } f(I) \text{ est une partie précompacte de } (E, d).$$

Indication : Procédez par contradiction en niant (i) de la Prop. 2.1. Insistons sur le fait que n n'est pas fixé d'avance.

Commentaires :

Faisant abstraction du préfixe « pré » (= avant), regardons dans le Petit Larousse (illustré) ce que veut dire **compact** : du latin *compactus*, resserré, qui est condensé, dense, serré.

D'autre part, si l'on regarde la définition donnée par la Prop. 2.1 (i), on peut penser que la notion de précompact remplace en quelque sorte la notion d'ensemble fini de la théorie des ensembles : « en gros », il s'agit d'ensembles *approximativement finis*.

On peut aussi regarder la notion de précompact comme une généralisation de la notion de borné dans \mathbb{R}^n qui soit plus fine dans les espaces métriques généraux que ne l'est la notion de borné.

Encore une idée donnant une intuition de la notion de précompacité, en se référant à la Prop. 2.1 (ii) : une étendue de terrain est à éclairer par des réverbères de portée $\leq \varepsilon$, F_ε est l'ensemble des points d'installation des réverbères nécessaires.

L'idée intuitive de précompact est un compromis entre les idées ci-dessus . . .

La notion de précompact – outre son contenu intuitif – est intéressante car très *stable* (inclusion, réunion finie, intersection, passage à l'adhérence, . . .), mais son gros défaut est qu'elle *n'est pas topologique*.

Pour avoir des propriétés vraiment « bonnes », la notion de précompacité doit être un peu restreinte en y ajoutant une autre propriété : celle d'espace *complet*.

On arrive ainsi à la notion de **compact** dont le contenu intuitif est moindre, mais dont les propriétés mathématiques sont TRÈS satisfaisantes.

Curieusement, en ajoutant deux notions *non* topologiques, nous allons tomber sur une notion topologique [ce que nous ne prouverons que dans le prochain chapitre (suspense !)].

3. ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS

Définition 3.1.

Un espace métrique (E, d) sera dit **compact** s'il est **précompact** ET **complet**.

Une partie A d'un espace métrique (E, d) sera dite **compacte** si le sous-espace métrique $(A, d|_{A \times A})$ est compact.

En juxtaposant simplement les propriétés des espaces métriques complets d'une part [voir le Chap. XI et le §2 du Chap. XII], celles des espaces métriques précompacts étudiées dans le § précédent d'autre part, on obtient immédiatement, sans démonstration nouvelle, les [importants] résultats suivants.

Proposition 3.1. (IMPORTANTE)

Soit (E, d) un espace métrique **compact** :

(3.1) (E, d) est **borné**,

(3.2) (E, d) est **séparable**,

(3.3) Si δ est une distance sur E équivalente à d : (E, δ) est compact,

(3.4) Si (F, δ) est un espace métrique isométrique à (E, d) : (F, δ) est compact.

Proposition 3.2.

(i) Soient (E_i, d_i) , $1 \leq i \leq N$, des espaces métriques compacts. $E = \prod_{i=1}^N E_i$ muni de la distance d_∞ est un espace métrique compact. Il en est de même si E est muni d'une autre distance de Hölder d_p , $1 \leq p \leq \infty$ [cf. Chap. I].

(ii) **Produit infini** : L'Exercice (2.4), joint à l'Exercice 2.3 du Chap. XI, montre que si (E_i, d_i) , $i \in \mathbb{N}^*$, est une famille dénombrable d'espaces métriques compacts, l'espace produit $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$, muni de la distance :

$$d[(u_i), (v_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)}$$

est un espace métrique compact. Pour $E_i = [0, 1]$, ou bien $[-1, +1]$, $i \in \mathbb{N}^*$, on note cet espace compact $[0, 1]^{\mathbb{N}^*}$, ou bien $[-1, +1]^{\mathbb{N}^*}$: c'est le **cube de Hilbert**.

Ces résultats sur la compacité des produits s'étendent en topologie générale à un produit absolument *quelconque* : c'est le **Théorème de Tychonov**, un des plus puissants théorèmes de toute l'analyse, et d'autres branches des mathématiques [cf. un cours de topologie générale].

Proposition 3.3.

Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie **compacte** de E : A est une partie **complète** dans (E, d) , et donc A est **fermée** dans (E, d) . A est aussi **bornée** dans (E, d) .

Proposition 3.4.

Soit (E, d) un espace métrique **compact**, et soit A une partie de E : A est **compacte** si et seulement si A est **fermée** dans (E, d) .

Proposition 3.5.

|| Soit (E, d) un espace métrique *complet*, et soit A une partie de E : A est *compacte* si et seulement si A est *précompacte* et *fermée*.

Proposition 3.6.

|| Soit (E, d) un espace métrique :

(i) La réunion $\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ d'un nombre *fini* de parties compactes de (E, d) est compacte dans (E, d) .

(ii) Toute intersection $\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i$ de parties compactes de (E, d) est compacte dans (E, d) .

Proposition 3.7.

|| Les parties compactes de \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n , munis des distances usuelles, sont les parties *fermées et bornées*.

En invoquant : le Corollaire 2.2, le Corollaire 2.2 du Chap. XI, et le Lemme 2.4 du Chap. XII, on obtient le :

Corollaire 3.1.

|| Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} de *dimension finie* : les parties *compactes* de E sont exactement les parties *fermées et bornées* de E .

☞ **Exercice 3.1.** (difficile) On considère l'espace de Hilbert $E = \ell_{\mathbb{R}}^2$ [cf. Chap. II et le Th. 3.3 du Chap. XI].

Soit K le sous-ensemble de E constitué par les suites $u = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$, $\xi_n \in \mathbb{R}$, vérifiant $|\xi_n| \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Démontrez que K est une partie convexe et compacte de E .

K est appelé le cube de Hilbert car il est homéomorphe, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, à $[-1, +1]^{\mathbb{N}}$.

On a avec K un exemple de partie compacte qui est relativement « grosse » : en particulier, K n'est contenu dans aucun sous-espace de dimension finie.

Cet exemple est à rapprocher de ce qui suit.

« Rareté » des précompacts et des compacts dans les e.v.n. de dimension infinie.

Comme le prouve déjà l'exemple de la distance discrète sur un ensemble infini, la notion de partie compacte ne se réduit pas à celle de partie fermée bornée, comme c'est le cas dans les e.v.n. de dimension finie.

En effet, dans un espace (E, δ) , E infini, où δ est la distance discrète, *toutes les parties sont fermées et bornées, mais les seules parties compactes sont les parties finies*.

Dans les e.v.n. de dimension infinie, il y a bien d'autres compacts que les ensembles finis, ne serait-ce que les fermés bornés contenus dans des sous-espaces de dimension finie... Mais nous allons prouver que les parties compactes ne sont pas « très épaisses », et qu'en fait les e.v.n. de dimension infinie sont *relativement* pauvres en parties compactes.

Cela explique – au moins en partie – que sur les e.v.n. de dimension infinie on ait été conduit à envisager des topologies autres que celle définie par leur norme, en fait des topologies non définies par une distance (topologies dites « faibles »), topologies pour lesquelles il y a *davantage* de compacts.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , de dimension ≥ 1 . Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \neq E$ et fermé dans $(E, \|\cdot\|)$.

Notons $S = S(0, 1) = \{u \in E / \|u\| = 1\}$ la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$.

On va s'intéresser à la distance $d(u, F)$, où $u \in S$. Cette distance varie entre 0 ($u \in S \cap F$) et 1 car $d(u, F) \leq \|u - 0\| = \|u\| = 1$ ($0 \in F$).

Question : existe-t-il toujours des points de S tels que $d(u, F) = 1$? **Réponse** : NON !

En effet, nous avons vu dans le Chap. X [Exemple 2.7] qu'il existe une forme linéaire continue sur l'e.v.n. $E = c_0$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ qui n'atteint pas sa norme $\|\varphi\|'$ sur la sphère unité de E . Donc, pour cet espace E et cette forme φ , on a : $|\varphi(v)| < \|\varphi\|'$ pour tout $v \in S$ (et même pour tout $v \in B(0, 1)$).

D'autre part, dans ce même Chap. X, nous avons démontré que pour tout E , tout $\varphi \in E' \setminus \{0\}$, tout $u \in E$, on a : $d(u, \text{Ker}(\varphi)) = \frac{|\varphi(u)|}{\|\varphi\|'}$ [formule (1.15)].

Rappelons que $\text{Ker}(\varphi)$ est fermé dans E pour φ continue.

Nous tenons donc le contre-exemple cherché en prenant $F = \text{Ker}(\varphi)$ dans l'Exemple rappelé ci-dessus.

En effet, si $d(u, F) = 1$ avec $\|u\| = 1$, on a : $|\varphi(u)| = \|\varphi\|'$ pour $u \in S$, ce qui est contradictoire avec $|\varphi(v)| < \|\varphi\|'$ pour tout $v \in S$. Ce résultat négatif donne de l'intérêt au résultat très utile suivant :

Lemme 3.1. (de F. Riesz)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , de dimension ≥ 1 . Soit F un sous-espace fermé de $(E, \|\cdot\|)$ tel que $F \neq E$.

Conclusion : $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, $\exists u_\varepsilon \in E : \|u_\varepsilon\| = 1$ et $d(u_\varepsilon, F) \geq 1 - \varepsilon$.

Démonstration : (faites d'abord des dessins dans \mathbb{R}^2 muni de différentes normes).

Soit $u \in E \setminus F \neq \emptyset$; $\delta = d(u, F) = \inf_{v \in F} \|u - v\|$ est > 0 car F est fermé.

Par définition de la borne inférieure :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists v_\varepsilon \in F \text{ tel que : } \delta \leq \|u - v_\varepsilon\| \leq \delta + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \delta.$$

[car $\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} > 0$; ce réel sophistiqué est choisi pour que tout marche bien, mais vous pouvez tout aussi bien prendre un $\eta_\varepsilon > 0$ que vous déterminerez à la fin].

Cela étant, posons : $\alpha := \frac{1}{\|u - v_\varepsilon\|}$ et $u_\varepsilon := \alpha(u - v_\varepsilon) : \|u_\varepsilon\| = 1$ (il n'y a pas de problème pour α car $u \in E \setminus F$ et $v_\varepsilon \in F : \|u - v_\varepsilon\| \neq 0$).

Pour tout $v \in F$, puisque F est un espace vectoriel, on a : $\frac{1}{\alpha}v + v_\varepsilon \in F$ et, donc :

$$\begin{aligned} \|v - u_\varepsilon\| &= \|v - (\alpha u - \alpha v_\varepsilon)\| = \|v - \alpha u + \alpha v_\varepsilon\| = \alpha \left\| \left(\frac{1}{\alpha}v + v_\varepsilon \right) - u \right\| \\ &\geq \alpha \cdot d(u, F) = \alpha \cdot \delta = \frac{1}{\|u - v_\varepsilon\|} \delta \geq \frac{1}{\delta + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \delta} \delta = \frac{1 - \varepsilon}{1 - \varepsilon + \varepsilon} = 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

i.e. $\forall v \in F : \|u - v_\varepsilon\| \geq 1 - \varepsilon$, ce qui entraîne ce qu'on voulait : $d(u_\varepsilon, F) \geq 1 - \varepsilon$. ♦

Nota : Le lemme précédent est parfois appelé « lemme des éléments quasi-orthogonaux » Voyez-vous pourquoi ? (dessins !)

Application

Supposons que la boule unité fermée $B(0, 1]$ d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ soit précompacte. Pour $\varepsilon = \frac{1}{4}$, il existe un ensemble fini $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset B(0, 1]$ tel que l'on ait $\forall v \in B(0, 1] : d(v, A) \leq \frac{1}{4}$.

Soit $F = [A] = [\{a_1, \dots, a_n\}]$ le sous-espace vectoriel engendré par A : $\dim F < \infty$, donc F est complet, donc fermé dans E (chap. XII).

$$F \supset A \implies \forall v \in E : d(v, F) \leq d(v, A).$$

Si F n'est pas E entier, on peut appliquer le Lemme 2.1 ci-dessus :

$$\exists u \in E, \|u\| = 1 \text{ (donc } u \in B(0, 1]) : d(u, A) \geq d(u, F) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Comme $d(u, A) \leq \frac{1}{4}$, on arrive à une *contradiction*.

Donc $E = F$ et E est de dimension finie. ♦

On énonce :

Théorème 3.1. (TRÈS IMPORTANT)

Si la boule unité fermée d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est *précompacte* (*a fortiori* si elle est *compacte*), E est de dimension finie.
 Comme la réciproque est vraie (Corollaire 3.1), on a :
 $\dim(E) < \infty \iff B(0, 1]$ est précompacte $\iff B(0, 1]$ est compacte.

Commentaire : On a là une interaction remarquable entre l'algèbre et la topologie ...

Remarques : Le raisonnement ci-dessus marche aussi bien si l'on remplace la boule $B(0, 1]$ par la sphère $S(0, 1)$, d'où :

$$\dim(E) < \infty \iff S(0, 1) \text{ est précompacte [resp. compacte].}$$

A présent : $B(u, \rho] = u + \rho \cdot B(0, 1]$. Les translations et les homothéties $\neq 0$ sont bijectives et uniformément continues ainsi que leurs inverses, donc elles envoient les précompacts sur les précompacts. Par conséquent : si une boule $B(u, \rho]$ quelconque est précompacte, l'e.v.n. est de dimension finie. Si $B(u, \rho[$ est précompacte, son adhérence, qui est (dans les e.v.n. !) $B(u, \rho]$ est précompacte [Prop. 2.7], et donc $\dim(E) < \infty$.

Soit à présent $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. de dimension infinie, et soit K une partie précompacte de E : si K possédait un *point intérieur* u , on aurait une boule $B(u, \rho]$ contenue dans K , donc précompacte [Prop. 2.2], mais alors E serait de dimension finie ...

On peut énoncer :

Proposition 3.8.

Une partie *précompacte* (*a fortiori* une partie compacte) d'un e.v.n. de dimension infinie ne peut posséder *aucun point intérieur*.

C'est en ce sens précis qu'on peut dire que les compacts des e.v.n. de dimension infinie sont « plats », et relativement « peu nombreux », puisque cette « platitude » écarte de nombreux ensembles de la prétention à être précompacts.

Fin de la partie cours du Chapitre XIII

CORRIGÉ DES EXERCICES

✎ **Exercice 1.1.**

Soit $\rho > 0$ fixé, arbitraire. On veut prouver que $A \subset \bigcup_{u \in D} B(u, \rho[$. Soit $a \in A$ arbitraire ; comme $A \subset \text{adh}(D)$: $\exists a_\rho \in D$ tel que $d(a, a_\rho) < \rho$, ce qui se traduit par $a \in B(a_\rho, \rho[\implies a \in \bigcup_{u \in D} B(u, \rho[$. ♦

✎ **Exercice 2.1.**

Proposition 2.1 : Soit (E, d) précompact : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe A_1, \dots, A_n ($n = n_\varepsilon$) des parties de E telles que $\text{diam}(A_i) \leq \varepsilon$ pour $i = 1, \dots, n$ et : $E \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ [en fait, inévitablement, on a égalité, mais c'est l'inclusion qui nous intéresse].

Pour $i = 1, \dots, n$, on prend $a_i \in A_i$, et soit $F_\varepsilon = \{a_1, \dots, a_n\}$; pour tout $u \in E$, il existe un j (au moins), $1 \leq j \leq n$, tel que : $u \in A_j$, et on a : $d(u, F_\varepsilon) \leq d(u, a_j) \leq \text{diam}(A_j) \leq \varepsilon$, d'où (i). ♦

Supposons (i). Soit $\varepsilon > 0$; il existe $F_\varepsilon = \{u_1, \dots, u_n\}$ tel que $d(u, F_\varepsilon) \leq \varepsilon$ pour chaque $u \in E$. Considérons les boules $B(u_i, \varepsilon]$, et soit $u \in E : d(u, F_\varepsilon) = d(u, u_j)$ pour un j , $1 \leq j \leq n$ (cela parce que F_ε est un ensemble fini) et donc $d(u, u_j) \leq \varepsilon$, d'où : $u \in B(u_j, \varepsilon]$, et (ii). ♦

Supposons à présent (ii) : en prenant les boules de rayon $\frac{1}{2}\varepsilon$, on n'a qu'à prendre $A_i = B(u_i, \frac{1}{2}\varepsilon]$ qui vérifie $\text{diam}(A_i) \leq \varepsilon$. ♦

Remarquons une fois encore que les boules ouvertes et fermées sont interchangeable, au même titre que \leq et $<$.

Proposition 2.2 : immédiate, il suffit de remarquer que $A \subset E \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ entraîne que $A \cap A = A \subset A \cap \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i = \bigcup_{1 \leq i \leq n} (A \cap A_i)$, et que : $\text{diam}(A \cap A_i) \leq \varepsilon$. ♦

Exercice 2.2.

D'après le Lemme 2.1 du Chapitre XII, il existe $\Phi : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ (où $n = \dim_{\mathbb{K}}(E)$) linéaire, bijective, continue ainsi que son inverse Φ^{-1} .

Comme Φ et Φ^{-1} sont linéaires, la continuité implique la continuité uniforme. Donc, si A est précompact dans E , elle est bornée à cause de la Prop. 2.3. Réciproquement, si A est bornée dans $(E, \|\cdot\|)$: $\Phi^{-1}(A)$ est bornée dans \mathbb{K}^n car Φ^{-1} est linéaire continue [voir Chap.X].

Donc, Corollaire 2.1 : $\Phi^{-1}(A)$ est précompact dans \mathbb{K}^n .

D'après la Prop.2.8 : $\Phi[\Phi^{-1}(A)] = A$ est précompact dans $(E, \|\cdot\|)$. ♦

Exercice 2.3.

(E_i, d_i) précompact pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. Soit $E := \prod_{i=1}^{\infty} E_i$, muni de la distance :

$$d(u, v) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{d_i(u_i, v_i)}{1 + d_i(u_i, v_i)}, \text{ où } u = (u_1, \dots, u_i, \dots), \text{ et } v = (v_1, \dots, v_i, \dots).$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné, et soit I le plus petit entier vérifiant $\frac{1}{2^I} \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. (E_i, d_i) étant précompact, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$: il existe $F_{i, \varepsilon/2}$ dans E_i , une partie finie de E_i telle que pour tout $u_i \in E_i$ on a : $d_i(u_i, F_{i, \varepsilon/2}) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$. Pour tout $i > I$, fixons $a_i \in E_i$ arbitrairement.

Considérons le sous-ensemble de $E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$ suivant :

$$F_\varepsilon = F_{1, \varepsilon/2} \times F_{2, \varepsilon/2} \times \dots \times F_{I, \varepsilon/2} \times \{a_{I+1}\} \times \{a_{I+2}\} \times \dots$$

L'ensemble F_ε est fini avec : $\text{Card}(F_\varepsilon) = \prod_{1 \leq i \leq I} \text{Card}(F_{i, \varepsilon/2})$.

Soit maintenant $u \in E$ arbitraire ; on va démontrer qu'il existe $v_\varepsilon \in F_\varepsilon$ tel que $d(u, v_\varepsilon) \leq \varepsilon$, ce qui impliquera $d(u, F_\varepsilon) \leq \varepsilon$, i.e. le résultat cherché.

En effet, pour tout $i \leq I$, il existe $v_{i, \varepsilon} \in F_{i, \varepsilon/2}$ tel que :

$$d_i(u_i, F_{i, \varepsilon/2}) = d_i(u_i, v_{i, \varepsilon}) \leq \frac{1}{2}\varepsilon, \text{ où } u = (u_1, \dots, u_i, \dots).$$

On va prendre : $v_\varepsilon = (v_{1, \varepsilon}, v_{2, \varepsilon}, \dots, v_{I, \varepsilon}, a_{I+1}, a_{I+2}, \dots)$.

$$d(u, v_\varepsilon) = \sum_{i=1}^I \frac{1}{2^i} \times \frac{d_i(u_i, v_{i, \varepsilon})}{1 + d_i(u_i, v_{i, \varepsilon})} + \sum_{i \geq I+1} \frac{1}{2^i} \times \frac{d_i(u_i, a_i)}{1 + d_i(u_i, a_i)}.$$

Mais $\frac{1}{1 + d_i(u_i, v_{i, \varepsilon})} \leq 1$ et $\frac{d_i(u_i, a_i)}{1 + d_i(u_i, a_i)} \leq 1$, d'où :

$$\begin{aligned} d(u, v_\varepsilon) &\leq \sum_{i=1}^I \frac{1}{2^i} \times d_i(u_i, v_{i, \varepsilon}) + \sum_{i \geq I+1} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2}\varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{I+1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^I} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ puisque } I \text{ a été choisi tel que } \frac{1}{2^I} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 2.4.

Ecrivons que $f(I)$ est précompact (ce qu'on veut prouver) :

$\forall \varepsilon > 0, \exists F$ fini, $F \subset f(I), \forall u \in f(I) : d(u, F) \leq \varepsilon$, ce qui se traduit par :

$\forall \varepsilon > 0, \exists t_i \in [\alpha, \beta], 0 \leq i \leq n, \forall t \in [\alpha, \beta], \exists j \in \{1, \dots, n\} : d[f(t), f(t_j)] \leq \varepsilon$,

dont la négation s'écrit :

- (1) $\exists \varepsilon > 0, \forall t_i \in [\alpha, \beta]$ (suite finie $0 \leq i \leq n$), $\exists t \in [\alpha, \beta], \forall j \in \{1, \dots, n\} :$
 $d[f(t), f(t_j)] > \varepsilon.$

Supposons donc $f(I)$ **non** précompact, ce qui se traduit par la proposition (1) ci-dessus. On va essayer de trouver une contradiction avec l'hypothèse de départ, en se souvenant que les petits ruisseaux font les grandes rivières, ce qui s'appelle en mathématiques l'*axiome d'Archimède* :

$C \geq 0$ étant donné (moralement grand) et $\varepsilon > 0$ étant donné (moralement petit), il existe un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N \cdot \varepsilon > C$.

Amorçons l'appareil à accumuler les $\varepsilon \dots$

On prend $t_0 = \alpha$ et $t_1 = \beta$, et réécrivons (1) sous la forme suivante (on peut réordonner une suite finie en une suite strictement croissante) :

- (2) $\exists \varepsilon > 0, \forall t_0 < t_1 < \dots < t_n$ ($t_i \in [\alpha, \beta], n$ non fixé), $\exists t \in [\alpha, \beta] :$
 $\forall j \in \{1, \dots, n\}, d[f(t), f(t_j)] > \varepsilon > 0.$

Donc le $t \in [\alpha, \beta]$ trouvé ne coïncide pas avec l'un des t_j .

Dans notre cas particulier, il existe $t \in [\alpha, \beta], t_0 = \alpha < t < \beta = t_1$ tel que
 $d[f(t), f(t_0)] > \varepsilon$ et $d[f(t), f(t_1)] > \varepsilon.$

On réordonne en posant $t_0 = \alpha, t_1 = t, t_2 = \beta$.

D'où : $\sum_{0 \leq i \leq 1} d[f(t_{i+1}), f(t_i)] = d[f(t_1), f(t_0)] + d[f(t_2), f(t_1)] > \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$

On recommence avec les trois points obtenus $t_0 < t_1 < t_2$, et supposons que le t obtenu est entre t_0 et t_1 , on renumérote : $t_0 (= \alpha) < t_1 (= t) < t_2 (= t_1) < t_3 (= t_2) :$

$$\sum_{0 \leq i \leq 2} d[f(t_{i+1}), f(t_i)] = d[f(t_1), f(t_0)] + d[f(t_2), f(t_1)] + d[f(t_3), f(t_2)] \\ = d[f(t), f(\alpha)] + d[f(t_1), f(t)] + d[f(t_2), f(t_1)] > \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

A présent que le truc est compris, on peut faire un raisonnement par récurrence formalisé :

On suppose avoir obtenu un découpage $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ avec

$$\sum_{0 \leq i \leq n-1} d[f(t_{i+1}), f(t_i)] > n\varepsilon, \text{ et on applique (2) ; supposons que } t_j < t < t_{j+1} ;$$

on effectue une nouvelle numérotation : $t_0 = t_0, t_1 = t_1, \dots, t_j = t_j, t_{j+1} = t, t_{j+2} = t_{j+1}, \dots, t_{n+1} = t_n$ et on a :

$$\sum_{0 \leq i \leq n} d[f(t_{i+1}), f(t_i)] = \sum_{0 \leq i \leq j-1} d[f(t_{i+1}), f(t_i)] + d[f(t), f(t_j)] \\ + d[f(t_{j+2}), f(t)] + \sum_{j+1 \leq i \leq n} d[f(t_{i+1}), f(t_i)] ;$$

dans les deux sommes $\sum_{0 \leq i \leq j-1}$ et $\sum_{j+1 \leq i \leq n}$ on retrouve les termes de « l'ancienne » suite, et par conséquent on trouve comme facteurs de ε : j termes + 1 terme + 1 terme + $[n - (j + 1)]$ termes = $n + 1$ termes.

$$\text{D'où : } \sum_{0 \leq i \leq n} d[f(t_{i+1}), f(t_i)] > (n + 1)\varepsilon.$$

On continue ainsi jusqu'à obtenir l'entier N , et une contradiction avec l'hypothèse de départ. Par conséquent $f(I)$ est précompact. ♦

Exercice 3.1.

Si $u = (\xi_n), v = (\eta_n)$ sont dans K , et λ dans $[0, 1]$, le terme général de la somme $\lambda u + (1 - \lambda)v$ est $\theta_n = \lambda \xi_n + (1 - \lambda)\eta_n$, et

$$|\theta_n| \leq \lambda |\xi_n| + (1 - \lambda) |\eta_n| \leq \lambda \frac{1}{n} + (1 - \lambda) \frac{1}{n} = \frac{1}{n} ;$$

donc $\lambda u + (1 - \lambda)v \in K$ qui est convexe.

Remarquons que $0 \in K$. ♦

Comme ℓ^2 est complet [Chap. XI], il nous suffit (Prop. 3.5) de démontrer que K est fermé et précompact.

K est fermé dans ℓ^2 , car si une suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de K converge dans ℓ^2 vers u , on a, en notant $u_p = (\xi_1^p, \dots, \xi_n^p, \dots)$ et $u = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) :$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N} : |\xi_n| \leq |\xi_n - \xi_n^p| + |\xi_n^p| \leq |\xi_n - \xi_n^p| + \frac{1}{n}, \text{ et :} \\ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n - \xi_n^p|^2 = \|u - u_p\|^2 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé quelconque : $\lim_{p \rightarrow \infty} |\xi_n - \xi_n^p| = 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^* : |\xi_n| \leq \frac{1}{n}$, soit : $u \in K$. ♦

K est borné dans ℓ^2 car $(\|u\|_{\ell^2})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$, ceci pour tout $u \in K$. ♦

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, et soit $u \in K$ quelconque ; écrivons :

$$\|u\|_2^2 = \sum_{1 \leq n \leq N} |\xi_n|^2 + \sum_{N+1 \leq n} |\xi_n|^2 \leq \sum_{1 \leq n \leq N} |\xi_n|^2 + \sum_{N+1 \leq n} \frac{1}{n^2},$$

où N va être fixé indépendamment de $u \in K$ (c'est la clef de l'exercice !) :

$\sum_{N+1 \leq n} \frac{1}{n^2}$ est le reste d'une série convergente, et donc il existe un entier N tel que ce reste – qui tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$ – est $\leq \frac{1}{2}\varepsilon^2$. Fixons un tel N .

Posons : $\ell_N^2 := \{u = (\xi_n) \in \ell^2 / \forall n \geq N+1 : \xi_n = 0\}$; ℓ_N^2 est un sous-espace vectoriel de dimension N de ℓ^2 (exhibez une base de ℓ_N^2).

ℓ_N^2 est fermé [car complet, cf. Chap. XII] dans ℓ^2 , et donc $C = K \cap \ell_N^2$ est fermé et borné dans ℓ_N^2 : c'est un compact de ℓ_N^2 (Corol. 3.1). En particulier C est précompact, et $\varepsilon > 0$ étant fixé, il existe $v_1, \dots, v_{p(\varepsilon)}$ dans C tels que : $\forall v \in C$ il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\|v - v_i\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

Écrivons $v_i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_N^i, 0, 0, \dots)$.

Pour tout $u = (\xi_n)$ dans K on a : $u = v + w$, où $v \in \ell_N^2$:

$$u = (\xi_1, \dots, \xi_N, 0, 0, \dots) + (0, 0, \dots, 0, \xi_{N+1}, \xi_{N+2}, \dots)$$

et donc, pour ce choix de v , il existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\|v - v_j\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$.

D'où :

$$\begin{aligned} \|u - v_j\|_2^2 &= \sum_{n=1}^N |\xi_n - v_n^j|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n - 0|^2 = \|v - v_j\|_2^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n|^2 \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

et donc $\|u - v_j\|_2 \leq \varepsilon$.

En définitive, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on a trouvé $p = p_\varepsilon$ vecteurs v_1, \dots, v_p appartenant à K [en fait à $C \subset K$] tels que pour tout $u \in K$ il existe $j \in \{1, \dots, p_\varepsilon\}$ tel que $\|u - v_j\|_2 \leq \varepsilon$. C'est dire que K est une partie précompacte de ℓ^2 .

Finalement, K est bien une partie compacte de ℓ^2 . Nous démontrerons dans le Chapitre XIV que K est homéomorphe à $[-1, +1]^{\mathbb{N}^*}$. ♦

PROBLÈMES DE RÉVISIONS

PROBLÈME 1

L'isométrie $(c_0)' \approx \ell^1$

Soit $E = c_0$ l'espace vectoriel (réel) des suites $u = (\xi_k)$, $k = 1, 2, \dots$, de nombres réels convergents et de limite 0. On suppose E muni de la norme $\|u\|_\infty = \max_{k \geq 1} |\xi_k|$.

Soit $F = \ell^1$ l'espace vectoriel (réel) des suites $a = (\alpha_k)$, $k = 1, 2, \dots$, de nombres réels vérifiant $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$. On suppose F muni de la norme $\|a\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|$.

On note $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ [1 à la n -ième place, 0 ailleurs].

1) Démontrez que tout $u \in E$ s'écrit : $u = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$.

Soit $a \in F$; on note φ_a l'application définie sur E par : $\forall u \in E : \varphi_a(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$.

2) Démontrez que φ_a définit une forme linéaire continue sur E .

3) Démontrez que $\|\varphi_a\|' = \|a\|_1$ (E' dual topologique de E est muni de la norme $\|\psi\|' = \sup_{\|u\| \leq 1} |\psi(u)|$).

4) Démontrez que l'application $f : F \rightarrow E'$, $a \mapsto \varphi_a$ est une isométrie linéaire.

5) Démontrez que f est surjective.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 1

1) Soit $u = (\xi_k) \in E = c_0$. Puisque (ξ_k) tend vers 0, on a :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall k : k \geq N \implies |\xi_k| \leq \varepsilon$.

Considérons les sommes partielles : $u_n = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$, et pour $n \geq N$,

envisageons : $u - u_n = (0, 0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$.

$\forall k \geq n \geq N : |\xi_k| \leq \varepsilon \implies \sup_{k \geq n} |\xi_k| \leq \varepsilon$.

Donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n : n \geq N \implies \|u - u_n\|_\infty = \sup_{k \geq n} |\xi_k| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire que $\|u - u_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, soit : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$ dans $E = c_0$.

Par définition d'une série dans un e.v.n. : $u = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$. ♦

Remarque :

L'ensemble des vecteurs e_k est une famille totale de E , i.e. que $\text{adh}([e_1, \dots, e_k, \dots]) = E$.

2) Vérifions d'abord que $\varphi_a(u)$ a un sens pour tout $u \in E$.

$\forall n \geq 1 : \sum_{k=1}^n |\alpha_k \xi_k| \leq \sup_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \leq \sup_{k \geq 1} |\xi_k| \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| = \|u\|_\infty \cdot \|a\|_1$.

Donc la série de terme général $(\alpha_k \xi_k)$ est absolument convergente, donc convergente, et $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$ a un sens (i.e. définit un réel).

De plus : $|\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k| = |\varphi_a(u)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \xi_k| \leq \|u\|_\infty \cdot \|a\|_1$. ♦

Pour tous $u = (\xi_k)$, $v = (\eta_k)$ dans E et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\varphi_a(u+v) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\xi_k + \eta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \xi_k + \alpha_k \eta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \eta_k = \varphi_a(u) + \varphi_a(v),$$

et :

$$\varphi_a(\lambda u) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k (\lambda \xi_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k = \lambda \varphi_a(u). \text{ Cela d'après les règles opératoires usuelles sur les séries. } \blacklozenge$$

Par conséquent, pour tout $a \in F = \ell^1$, φ_a est une forme linéaire sur $E = c_0$. De plus $|\varphi_a(u)| \leq \|u\|_{\infty} \cdot \|a\|_1$ implique que $\|\varphi_a\|' = \sup_{\|u\|_{\infty} \leq 1} |\varphi_a(u)| \leq \|a\|_1$, et φ_a est continue, de norme $\|\varphi_a\|' \leq \|a\|_1$. \blacklozenge

3) Il nous reste à prouver que $\|\varphi_a\|' \geq \|a\|_1$. Ce qui serait bien serait de trouver $\hat{u} \in E$ tel que $\|\hat{u}\| \leq 1$ et tel que $\varphi_a(\hat{u}) = \|a\|_1$, puisqu'on aurait alors $\|\varphi_a\|' \geq \varphi_a(\hat{u}) = \|a\|_1$ pour tout v tel que $\|v\| \leq 1$ et donc $\|\varphi_a\|' \geq \|a\|_1$.

Mais on sait [Chapitre X] qu'on a relativement peu de chances de trouver un tel vecteur... S'il existait, on aurait $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k$; comme $|\xi_k| \leq 1$ on a $|\alpha_k \xi_k| \leq |\alpha_k|$, et on aurait donc : $0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (|\alpha_k| - \alpha_k \xi_k) \leq 0$, d'où pour tout k : $|\alpha_k| = \alpha_k \xi_k$.

On devrait par conséquent avoir : ξ_k quelconque si $\alpha_k = 0$ (mais $|\xi_k| \leq 1$), $\xi_k = +1$ si $\alpha_k > 0$, $\xi_k = -1$ si $\alpha_k < 0$. Il est clair que si $\alpha_k \neq 0$ pour une infinité d'indices k , on ne peut pas trouver un tel vecteur $\hat{u} = (\xi_k)$: celui-ci devrait avoir une infinité de $+1$ ou de -1 comme composantes, ce qui n'est guère compatible avec $\lim_{k \rightarrow \infty} (\xi_k) = 0$! On va donc « tronquer » un tel \hat{u} en prenant : $u_n = (\text{sgn}(\alpha_1), \text{sgn}(\alpha_2), \dots, \text{sgn}(\alpha_n), 0, 0, \dots)$, où l'on a posé : $\text{sgn}(t) = +1$ si $t > 0$, $\text{sgn}(t) = -1$ si $t < 0$ et $\text{sgn}(0) = 0$.

On peut écrire : $u_n = \sum_{k=1}^n \text{sgn}(\alpha_k) e_k$; $u_n \in E = c_0$, c'est clair, et $\|u_n\|_{\infty} \leq 1$.

On a donc pour tout n : $\|\varphi_a\|' \geq \varphi_a(u_n) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot \text{sgn}(\alpha_k) = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$.

Faisons tendre n vers l'infini ; en vertu du principe de prolongement des inégalités, on obtient :

$$\|\varphi_a\|' \geq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| = \|a\|_1. \blacklozenge$$

Remarque : Au passage on a démontré que les seules formes linéaires continues φ_a dont la norme $\|\varphi_a\|'$ est atteinte sur la sphère unité sont celles pour lesquelles a n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. Cela explique un contre-exemple du Chap. X où l'on avait pris $\alpha_k = 2^{-k}$.

4) Pour tous $a, b \in F = \ell^1$, tout $u \in E = c_0$, on a :

$$\varphi_{a+b}(u) = \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + \beta_k) \xi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi_k = \varphi_a(u) + \varphi_b(u).$$

Donc : $\varphi_{a+b} = \varphi_a + \varphi_b$, i.e. $f(a+b) = f(a) + f(b)$.

De même $\varphi_{\lambda a}(u) = \lambda \varphi_a(u)$ pour tout u , d'où $\varphi_{\lambda a} = \lambda \varphi_a$ et $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

$f : E \rightarrow E'$, $a \mapsto f(a) = \varphi_a$ est une application linéaire.

$\forall a \in F : \|f(a)\|' = \|\varphi_a\|' = \|a\|_1$. Donc f est une isométrie. \blacklozenge

5) Soit $\varphi \in E'$ arbitraire. Il nous faut prouver qu'il existe $\underline{a} \in F = \ell^1$ tel que $f(\underline{a}) = \varphi$. Soit

$u = (\xi_n) \in E$. D'après 1) : $u = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k$. Si l'on a $f(\underline{a}) = \varphi$ avec $\underline{a} = (\alpha_k)$, on doit avoir :

$\forall u \in E : [f(\underline{a})](u) = \varphi(u)$, soit :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k = \varphi(u) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k e_k\right) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi\left(\sum_{k=1}^n \xi_k \varphi(e_k)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi(e_k).$$

Faisant successivement $u = e_1, u = e_2, \dots$, on trouve qu'une condition nécessaire est que $\alpha_k = \varphi(e_k)$.

Il ne nous reste plus qu'à prouver que le seul vecteur \underline{a} possible, à savoir $\underline{a} = (\varphi(e_k))$ appartient bien à $F = \ell^1$.

Remarque : Qu'il n'y ait qu'un vecteur possible n'est pas étonnant puisque f est une isométrie, donc est injective.

Il nous faut donc montrer (et cela suffit) que $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| < \infty$.

Pour cela nous reprenons les vecteurs $u_n = \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn}(\alpha_k) e_k$ utilisés dans 3).

$\forall n = 1, 2, \dots, \varphi(u_n) = \sum_{k=1}^n \operatorname{sgn}(\alpha_k) \alpha_k = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|$, d'où : $\sum_{k=1}^n |\alpha_k| \leq \|\varphi\|' \cdot \|u_n\|_{\infty} \leq \|\varphi\|'$ qui est une constante.

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |\alpha_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \leq \|\varphi\|' < \infty$ et $(\alpha_k) \in \ell^1$.

En définitive : il existe $\underline{a} = (\varphi(e_k)) \in \ell^1$, unique, tel que $f(\underline{a}) = \varphi_{\underline{a}} = \varphi$. f est surjective. ♦

Finalement, f est une bijection linéaire et une isométrie de $F = \ell^1$ sur $E' = (c_0)'$.

Les e.v.n. $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ et $(E', \|\cdot\|')$ sont donc *isométriques*.

On peut dire que $(E', \|\cdot\|')$ [*a priori* « inconnu »] s'identifie à un e.v.n. déjà connu, ℓ^1 ; à condition toutefois de ne pas oublier comment est faite cette identification, à savoir par f définie

$$\text{par } [f(a)](u) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \xi_k.$$

Ce type de résultat, ramenant un e.v.n. « nouveau » : le dual topologique de E , à un e.v.n. déjà connu est extrêmement intéressant. Le lecteur pourra sans trop de peine démontrer qu'on a : $(\ell^1)'$ isométrique à ℓ^{∞} , et $(c)'$ isométrique à ℓ^1 [utiliser le vecteur $e_0 = (1, 1, \dots, 1, 1, \dots) \in c$].

Pour $p \in]1, \infty[$, on a : $(\ell^p)'$ isométrique à ℓ^q , où q est déterminé par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Remarquons que $(\ell^2)'$ s'identifie à ℓ^2 lui-même : on étudiera cela dans le Chap. XVIII.

Le dual de ℓ^{∞} est isométrique à un e.v.n. connu mais passablement compliqué, en tout cas $(\ell^{\infty})'$ n'est pas ℓ^1 .

On peut pratiquer de même avec les espaces de Lebesgue $L^p(X)$, mais c'est un peu plus compliqué, il faut faire un peu de théorie de la mesure. On sait aussi identifier l'e.v.n. $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}))'$, mais il faut connaître l'intégrale de Stieltjès.

Au vu de ces résultats, on peut se poser la question naturelle suivante : est-ce que tout espace de Banach est isométrique au dual d'un autre espace de Banach ? La réponse est NON : un contre-exemple est donné par l'espace de Lebesgue $L^1(0, 1)$. Mais pour vérifier cela il faut faire de l'analyse fonctionnelle plus élaborée que celle de ce cours.

PROBLÈME 2

Convergence d'une suite d'ensembles

1) Vérifiez l'inégalité suivante : si $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \gamma \geq 0$ et si $\alpha \leq \beta + \gamma$ on a :

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha} \leq \frac{\beta}{1 + \beta} + \frac{\gamma}{1 + \gamma}.$$

2) soit $(\alpha_k), k = 1, 2, \dots$ une suite de réels ≥ 0 . Démontrez que la série : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{\alpha_k}{1 + \alpha_k}$ est convergente.

3) Soit $(\delta_{k,n}), k = 1, 2, \dots$ et $n = 1, 2, \dots$, une famille de réels ≥ 0 indexée sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. On suppose que pour tout $k = 1, 2, \dots$ fixé : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_{k,n}) = 0$.

Démontrez que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{\delta_{k,n}}{1 + \delta_{k,n}} \right) = 0$.

Soit (E, d) un espace métrique séparable. On note $Q = \{a_1, a_2, \dots, a_k, \dots\}$ une partie dénombrable et partout dense dans (E, d) .

On note \mathcal{F} l'ensemble de toutes les parties fermées non vides de (E, d) . Pour tout $A \in \mathcal{F}$, tout $B \in \mathcal{F}$, on note :

$$\delta(A, B) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{\delta_k(A, B)}{1 + \delta_k(A, B)}, \text{ où : } \delta_k(A, B) := |d(a_k, A) - d(b_k, B)|.$$

4) Démontrez que δ est une distance sur \mathcal{F} .

5) Soit (A_n) , $n = 1, 2, \dots$, une suite d'éléments de \mathcal{F} , et soit $A \in \mathcal{F}$. Démontrez que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta(A_n, A) = 0$ est équivalent à : pour tout $u \in E$: $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u, A_n) = d(u, A)$.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 2

$$\begin{aligned} 1) \frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \frac{\beta}{1+\beta} + \frac{\gamma}{1+\gamma} &\iff \frac{\alpha}{1+\alpha} \leq \frac{\beta(1+\gamma) + \gamma(1+\beta)}{(1+\beta)(1+\gamma)} \\ &\iff \frac{\alpha(1+\beta)(1+\gamma) - (1+\alpha)[\beta(1+\gamma) + \gamma(1+\beta)]}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)} \leq 0 \\ &\iff \alpha(1+\beta+\gamma+\beta\gamma) - (1+\alpha)(\beta+\gamma+2\beta\gamma) \leq 0 \\ &\iff \alpha + \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\beta\gamma - \beta - \gamma - 2\beta\gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma - 2\alpha\beta\gamma \leq 0 \\ &\iff \alpha - \beta - \gamma - 2\beta\gamma - \alpha\beta\gamma \leq 0. \end{aligned}$$

Or $\alpha \leq \beta + \gamma$, donc $\alpha - \beta - \gamma - 2\beta\gamma - \alpha\beta\gamma \leq -2\beta\gamma - \alpha\beta\gamma \leq -2\beta\gamma - \alpha\beta\gamma \leq 0$. Ainsi l'inégalité de départ est vérifiée. ♦

2) Il s'agit d'une série à termes ≥ 0 . Pour tout k on a : $\frac{\alpha_k}{1+\alpha_k} \in [0, 1[$. Donc :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{\alpha_k}{1+\alpha_k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}, \text{ et cette dernière série est convergente. } \blacklozenge$$

3) Donnons-nous un $\varepsilon > 0$ arbitraire.

Pour tous $k \geq 1$ et pour tout $n \geq 1$ on a : $0 \leq \frac{\delta_{k,n}}{1+\delta_{k,n}} < 1$.

$\sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{\delta_{k,n}}{1+\delta_{k,n}} \leq \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ peut être réalisé en prenant ℓ assez grand puisque $\sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ est le reste d'une série convergente, et donc tend vers 0.

Soit ℓ_0 une valeur assez grande pour avoir l'inégalité ci-dessus. Considérons maintenant :

$\sum_{k=1}^{\ell_0-1} \frac{1}{2^k} \times \frac{\delta_{k,n}}{1+\delta_{k,n}}$. Pour $1 \leq k \leq \ell_0 - 1$ fixé, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} (\delta_{k,n}) = 0$. Donc pour tout $n \geq$ un certain N_k on a : $\delta_{k,n} \leq \frac{\varepsilon}{\ell_0 - 1}$.

Considérons $N_0 = \max\{N_1, \dots, N_{\ell_0}\}$ qui est fini.

$\forall k$ tel que $1 \leq k \leq \ell_0 - 1$, $\forall n \geq N_0$, on a : $\delta_{k,n} \leq \frac{\varepsilon}{\ell_0 - 1}$, et donc :

$$\sum_{k=1}^{\ell_0-1} \frac{1}{2^k} \times \frac{\delta_{k,n}}{1+\delta_{k,n}} < \sum_{k=1}^{\ell_0-1} \delta_{k,n} \leq (\ell_0 - 1) \frac{\varepsilon/2}{\ell_0 - 1} = \frac{\varepsilon}{2}. \text{ En effet : } \frac{1}{2^k} \times \frac{1}{1+\delta_{k,n}} < 1.$$

Finalement : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{\delta_{k,n}}{1+\delta_{k,n}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, sous la seule condition $n \geq N_0$. C'est dire

que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{\delta_{k,n}}{1+\delta_{k,n}} \right] = 0$. ♦

$$4) \delta(A, B) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{\delta_k(A, B)}{1 + \delta_k(A, B)}, \text{ avec } \delta_k(A, B) := |d(a_k, A) - d(a_k, B)|.$$

$\delta(A, B)$ a bien un sens d'après 2). $\delta(A, B) \geq 0$ et $\delta(A, B) = \delta(B, A)$ pour tous A, B dans \mathcal{F} sont trivialement vérifiées.

Inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \delta_k(A, B) &= |d(a_k, A) - d(a_k, B)| \leq |d(a_k, A) - d(a_k, C)| + |d(a_k, C) - d(a_k, B)| \\ &\leq \delta_k(A, C) + \delta_k(C, B) \text{ pour tous } A, B, C \text{ dans } \mathcal{F}. \end{aligned}$$

On peut appliquer 1) et on a pour tout k :

$$\frac{\delta_k(A, B)}{1 + \delta_k(A, B)} \leq \frac{\delta_k(A, C)}{1 + \delta_k(A, C)} + \frac{\delta_k(C, B)}{1 + \delta_k(C, B)}.$$

On multiplie par $\frac{1}{2^k} > 0$ et on somme :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{\delta_k(A, B)}{1 + \delta_k(A, B)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{\delta_k(A, C)}{1 + \delta_k(A, C)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{\delta_k(C, B)}{1 + \delta_k(C, B)},$$

soit : $\delta(A, B) \leq \delta(A, C) + \delta(C, B)$. ♦

Si $\delta(A, B) = 0$ on a (série à termes positifs) :

$$\forall k : \delta_k(A, B) = 0 \implies \forall k : |d(a_k, A) - d(a_k, B)| = 0 \implies \forall k : d(a_k, A) = d(a_k, B).$$

Les fonctions continues (contractantes) $f(x) = d(x, A)$ et $g(x) = d(x, B)$ vérifient $f(x) = g(x)$ pour $x \in Q$ avec Q dense dans E . D'après le principe d'extension des égalités, on a $\forall x \in E : d(x, A) = d(x, B)$.

Si $x \in A : d(x, A) = 0 = d(x, B) \implies x \in \text{adh}(B) = B \implies A \subset B$; de même pour l'inclusion inverse et donc $A = B$. ♦

δ est donc une distance sur \mathcal{F} .

5) a) Supposons que $\delta(A_n, A) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, i.e. que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \times \frac{|d(a_k, A_n) - d(a_k, A)|}{1 + |d(a_k, A_n) - d(a_k, A)|} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Puisque tous les termes sont ≥ 0 , cela implique que : $\forall k : d(a_k, A_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} d(a_k, A)$.

On veut : $\forall u \in E : d(u, A_n) \rightarrow d(u, A)$.

On a : pour tout entier k :

$$|d(u, A_n) - d(u, A)| \leq |d(u, A_n) - d(a_k, A_n)| + |d(a_k, A_n) - d(a_k, A)| + |d(a_k, A) - d(u, A)| \\ \leq d(u, a_k) + |d(a_k, A_n) - d(a_k, A)| + d(a_k, u).$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, comme Q est partout dense dans E , il existe k_0 tel que $d(u, a_{k_0}) \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ et ensuite $|d(a_{k_0}, A_n) - d(a_{k_0}, A)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ pour $n \geq$ à un certain $N(k_0)$. Donc pour tout $n \geq N(k_0) : |d(u, A_n) - d(u, A)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$. ♦

b) Réciproque : Si : $\forall u \in E, d(u, A_n) \rightarrow d(u, A)$ on a pour tout k :

$$\delta_k(A_n, A) = |d(a_k, A_n) - d(a_k, A)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Posant $\delta_{k,n} := \delta_k(A_n, A)$ on applique 3). ♦

PROBLÈME 3

Normes équivalentes

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel, et soit $A \in \mathcal{L}(E)$ tel que A^{-1} existe et $A^{-1} \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\forall u \in E : \|A^n(u)\| \leq C\|u\|.$$

$[A^0 = Id_E, A^1 = A, A^2 = A \circ A, \dots, A^n = A \circ A \circ \dots \circ A$ (n fois) et $A^{-2} = A^{-1} \circ A^{-1} = [A^{-1}]^2, \dots]$.

Pour tout $u \in E$, on pose : $\| \|u\| \| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(u)\|$.

1) Démontrez que $u \mapsto \| \|u\| \|$ est une norme sur E .

2) Démontrez que $u \mapsto \| \|u\| \|$ est équivalente à la norme $u \mapsto \|u\|$.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 3

1) $\forall u \in E : |||u|||$ est un réel ≥ 0 . En effet :

$$\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{Z} : 0 \leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(u)\| \leq C\|u\| < \infty. \spadesuit$$

• $|||0||| = 0$ puisque $\forall n \in \mathbb{Z} : A^n(0) = 0$. \spadesuit

• $|||u||| = 0 \implies \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(u)\| = 0 \implies \forall n \in \mathbb{Z} : \|A^n(u)\| = 0$, d'où pour $n = 0$: $\|u\| = 0 \implies u = 0$. \spadesuit

• $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : |||\lambda u||| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(\lambda u)\| = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|\lambda A^n(u)\|$ [A^n linéaire]
 $= \sup_{n \in \mathbb{Z}} |\lambda| \cdot \|A^n(u)\| = |\lambda| \cdot |||u|||$. \spadesuit

• $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall u \in E, \forall v \in E$:

$$\begin{aligned} \|A^n(u+v)\| &= \|A^n(u) + A^n(v)\| \leq \|A^n(u)\| + \|A^n(v)\| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(u)\| + \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(v)\| = |||u||| + |||v|||. \end{aligned}$$

$|||u||| + |||v|||$ majore $\|A^n(u+v)\|$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(u+v)\|$ est le plus petit des majorants, d'où : $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|A^n(u+v)\| = |||u+v||| \leq |||u||| + |||v|||$. \spadesuit

En définitive, $||| \cdot |||$ est une norme sur E .

2) On a déjà : $|||u||| \leq C\|u\|$.

Remarque : Pour $n = 0$ on a $\|Id_E(u)\| = \|u\| \leq C\|u\|$, et donc $C \geq 1$ nécessairement.

Ensuite : $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall v \in E : \|A^n(v)\| \leq C\|v\|$. Substituons $A^{-n}(u)$ à v (ce qui est loisible car A^{-n} est une bijection), il vient

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall u \in E : \|A^n(A^{-n}(u))\| \leq C\|A^{-n}(u)\|.$$

Mais : $A^n \circ A^{-n} = A^n \circ (A^{-1})^n = A^n \circ (A^n)^{-1} = Id_E$.

Donc, $\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{Z} : \|u\| \leq C\|A^{-n}(u)\|$, soit :

$$\forall u \in E, \forall m \in \mathbb{Z} : \|u\| \leq C\|A^m(u)\| \implies C^{-1}\|u\| \leq \|A^m(u)\|,$$

et finalement $\forall u \in E, \forall p \in \mathbb{Z}$:

$$C^{-1}\|u\| \leq \|A^p(u)\| \leq C\|u\| \implies C^{-1}\|u\| \leq |||u||| \leq C\|u\|.$$

Les normes $\| \cdot \|$ et $||| \cdot |||$ sur E sont équivalentes.

Nota : $C \geq 1 \implies \frac{1}{C} \leq 1 \implies \frac{1}{C^2} \leq 1 \implies \frac{1}{C} \leq C$, comme il se doit. \spadesuit

PROBLÈME 4*Espaces ultramétriques*

Soit (E, d) un espace métrique dont la distance d vérifie l'inégalité ultramétrique : $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall w \in E : d(u, v) \leq \max\{d(u, w), d(v, w)\}$.

La distance associée à un espace vectoriel normé réel $(E, \| \cdot \|)$ peut-elle vérifier cette inégalité ?

1) Démontrez que si $d(u, w) \neq d(v, w)$ on a : $d(u, v) = \max\{d(u, w), d(v, w)\}$.

Donnez une interprétation géométrique de ce résultat (en termes de « triangles » de sommets u, v, w).

2) Démontrez que toute boule ouverte $B(u, \rho[$ dans (E, d) est fermée, et que pour tout $v \in B(u, \rho[$ on a : $B(v, \rho[= B(u, \rho[$.

3) Démontrez que toute boule fermée $B(u, \rho]$ de (E, d) est ouverte, et que pour tout $v \in B(u, \rho]$ on a : $B(v, \rho] = B(u, \rho]$.

4) Démontrez que si deux boules de (E, d) ont un point commun l'une est contenue dans l'autre.

5) Soient deux boules ouvertes $B(u, \rho[$ et $B(v, \rho[$ de (E, d) distinctes contenues dans une boule fermée de rayon ρ . Démontrez que $d(B(u, \rho[, B(v, \rho]) = \rho$.

6) Soit (u_n) , $n \geq 1$, une suite de points de E . Démontrez que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0$ équivaut à : (u_n) est une suite de Cauchy. Donnez un contre-exemple dans \mathbb{R} usuel.

7) Soit (u_n) une suite de Cauchy qui n'est pas convergente vers $u \in E$. Démontrez qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que : $\exists N, \forall n : n \geq N \implies d(u_n, u) = \alpha$. Donnez un contre-exemple dans \mathbb{R} usuel.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 4

La réponse à la question 0 est NON. On ne peut pas avoir l'inégalité ultramétrique pour un e.v.n. sur \mathbb{R} . La raison est simple : la valeur absolue sur \mathbb{R} ne vérifie pas cette inégalité. En effet, $\forall r, s, t \in \mathbb{R} : |s - t| \leq \max\{|s - r|, |t - r|\}$ n'a pas lieu ; il suffit de prendre $s = -1, t = 2, r = \frac{1}{2}$, on devrait avoir : $3 \leq \max\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\} = \frac{3}{2} ! \blacklozenge$

On peut considérer des e.v.n. ultramétriques, à condition de considérer des corps munis d'une valeur absolue ultramétrique, par exemple \mathbb{Q} muni d'une valuation p -adique (voir fin du corrigé) puis complété [cf. Chap. XV].

Bien entendu les résultats obtenus pour de tels e.v.n. diffèrent beaucoup de ceux obtenus pour les e.v.n. réels ou complexes !

1) On a : $d(u, v) \leq \max\{d(u, w), d(v, w)\}$.

On suppose que $d(u, w) \neq d(v, w)$; prenons par exemple $d(u, w) > d(v, w)$. Si l'on prouve que $d(u, w) \leq d(u, v)$, on aura : $d(v, w) < d(u, w) \leq d(u, v)$, d'où : $\max\{d(u, w), d(v, w)\} = d(u, w) \leq d(u, v)$ et l'inégalité cherchée.

Mais : $d(u, w) \leq \max\{d(u, v), d(v, w)\}$;

si $d(u, v) < d(v, w)$ on a : $d(u, w) \leq \max\{d(u, v), d(v, w)\} = d(v, w)$ en contradiction avec l'hypothèse $d(u, w) > d(v, w)$. Donc : $d(u, v) > d(v, w)$ et $d(u, w) \leq d(u, v)$. Par conséquent : $d(u, v) = \max\{d(u, w), d(v, w)\}$.

Si l'on prend maintenant comme hypothèse $d(v, w) > d(u, w)$, on peut refaire la démonstration ci-dessus pour arriver au même résultat ; mais il suffit de remarquer que le changement de u en v et de v en u ne change rien au résultat. \blacklozenge

Que signifie ce résultat du point de vue géométrie métrique ?

Soient u, v, w considérés comme sommets d'un triangle (mais le mot angle n'a pas ici de signification !).

Si $d(v, w) \neq d(u, w)$ on vient de voir que nécessairement $d(u, v) = \max\{d(u, w), d(v, w)\}$: donc le triangle u, v, w est nécessairement « isocèle », et les deux côtés égaux sont nécessairement plus grands que le troisième côté. Si $d(v, w) = d(u, w)$ le triangle est isocèle et $d(u, v) \leq d(v, w)$ ($= d(u, w)$) : les deux côtés égaux sont \geq au troisième côté. En poursuivant l'analogie avec la géométrie du plan, on peut dire que seuls existent les triangles isocèles dont l'« angle » que font les deux côtés égaux est $< \pi/2$.

2) Soit $B(u, \rho] = \{v \in E / d(u, v) < \rho\}$ une boule ouverte.

Pour démontrer que $B(u, \rho]$ est fermée, nous allons prouver que $E \setminus B(u, \rho]$ est un ouvert.

Soit $w \in E \setminus B(u, \rho]$; considérons la boule $B(w, \rho]$ et montrons qu'elle est contenue dans $E \setminus B(u, \rho]$. Il faut donc montrer que si $v \in B(w, \rho]$ on a : $d(u, v) \geq \rho$.

$v \in B(w, \rho] \implies d(v, w) < \rho$ et $d(u, w) \geq \rho$, donc $d(v, w) \neq d(u, w)$ et d'après 1) : $d(u, v) = \max\{d(u, w), d(v, w)\} = d(u, w) \geq \rho$. \blacklozenge

Soit $v \in B(u, \rho]$: on va démontrer que $B(v, \rho] \subset B(u, \rho]$.

• $B(v, \rho] \subset B(u, \rho]$. Soit $w \in B(v, \rho]$; montrons que $w \in B(u, \rho]$, soit : $d(u, w) < \rho$. On a : $d(v, w) < \rho$ et $d(u, v) < \rho$, donc :

$$d(u, w) \leq \max\{d(u, v), d(v, w)\} < \rho. \blacklozenge$$

• $B(u, \rho] \subset B(v, \rho]$. Soit $w \in B(u, \rho]$: $d(u, w) < \rho$ et $d(u, v) < \rho$, d'où :

$$d(v, w) \leq \max\{d(v, u), d(u, w)\} < \rho. \blacklozenge$$

D'où, finalement, l'égalité cherchée. \blacklozenge

3) Démontrons que $B(u, \rho]$ est ouverte. L'autre question se traite comme 2) en remplaçant $< \rho$ par $\leq \rho$.

Soit $v \in B(u, \rho]$: démontrons que $B(v, \rho] \subset B(u, \rho]$ et on aura terminé.
Soit $w \in B(v, \rho]$: $d(v, w) < \rho$ et $d(u, v) \leq \rho$, donc :

$$d(u, w) \leq \max\{d(u, v), d(v, w)\} \leq \rho. \blacklozenge$$

4) La démonstration est la même que les boules soient ouvertes ou fermées. Soient donc $B(u, \rho]$ et $B(v, \sigma]$ telles que $B(u, \rho] \cap B(v, \sigma] \neq \emptyset$.

Supposons – pour fixer les idées – que $\rho \leq \sigma$.

Soit $w \in B(u, \rho] \cap B(v, \sigma]$: $d(u, w) < \rho \leq \sigma$ et $d(v, w) < \sigma$. On en déduit que :

$$d(u, v) \leq \max\{d(u, w), d(w, v)\} < \sigma.$$

Soit $x \in B(u, \rho]$ quelconque, on a $d(x, v) \leq \max\{d(x, u), d(u, v)\} < \sigma$ et $x \in B(v, \sigma]$. \blacklozenge

5) Soient $B(u, \rho]$ et $B(v, \rho]$, où les deux boules sont distinctes, contenues dans une boule fermée de rayon ρ .

On veut calculer $d(B(u, \rho], B(v, \rho]) = \inf_{x \in B(u, \rho]} \inf_{y \in B(v, \rho]} d(x, y)$ et démontrer que cette quantité vaut ρ .

Soit $w \in E$ tel que $B(u, \rho] \subset B(w, \rho]$, $B(v, \rho] \subset B(w, \rho]$ (hypothèse).

On a : $d(u, w) \leq \rho$ et $d(v, w) \leq \rho$, d'où : $d(u, v) \leq \max\{d(u, w), d(w, v)\} \leq \rho$.

Mais $d(B(u, \rho], B(v, \rho]) \leq d(u, v)$ car $u \in B(u, \rho]$ et $v \in B(v, \rho]$, et donc :

$$d(B(u, \rho], B(v, \rho]) \leq \rho. \blacklozenge$$

Montrons ensuite que $B(u, \rho] \cap B(v, \rho] = \emptyset$.

Si cette intersection n'était pas vide, on aurait d'après 4) (et sa démonstration) :

$B(u, \rho] \subset B(v, \rho]$ et $B(v, \rho] \subset B(u, \rho]$, soit $B(u, \rho] = B(v, \rho]$, alors que les boules sont distinctes, d'où le résultat. \blacklozenge

Soient à présent $x \in B(u, \rho]$ et $y \in B(v, \rho]$ quelconques. $d(x, u) < \rho$ et $d(y, v) \geq \rho$, d'où (par 1)) : $d(x, y) = \max\{d(x, u), d(u, y)\} = d(u, y) \leq \rho$. Par conséquent :

$$\inf_{y \in B(v, \rho]} d(x, y) = d(x, B(v, \rho]) \leq \rho \text{ et :}$$

$$d(B(u, \rho], B(v, \rho]) = \inf_{x \in B(u, \rho]} d(x, B(v, \rho]) \geq \rho.$$

Le résultat est démontré. \blacklozenge

6) On veut démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u_{n+1}) = 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, \forall q : q \geq p \geq N \implies d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.$$

La seconde propriété entraîne évidemment la première en faisant $p = n$ et $q = n + 1$.

Montrons la réciproque qui est fautive dans un espace métrique général.

Ecrivons que $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n : n \geq N \implies d(u_n, u_{n+1}) \leq \varepsilon$. En réitérant l'inégalité fondamentale [raisonnement par récurrence], on a pour $q \geq p$:

$$d(u_p, u_q) \leq \max\{d(u_{p+i}, u_{p+i+1}) \mid 0 \leq i \leq q - p + 1\}$$

et donc : $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n : q \geq p \geq N \implies d(u_p, u_q) \leq \varepsilon. \blacklozenge$

Un contre-exemple est fourni par la série harmonique : $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, mais : $u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$ ne tend pas vers 0. \blacklozenge

7) Ecrivons que (u_n) est de Cauchy et que (u_n) ne converge pas vers u :

(1) $\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N, \exists n : n \geq N$ et $d(u, u_n) > \varepsilon_0$,

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists P, \forall p, \forall q : q \geq p \geq P \implies d(u_p, u_q) \leq \varepsilon$.

On prend $\varepsilon = \varepsilon_0$ fourni par (1) et $N = P_0$ fourni par (2) :

(1) $\implies \exists n_0 : n_0 \geq P_0$ et $d(u, u_{n_0}) > \varepsilon_0$, et (2) entraîne : $n \geq n_0 \implies d(u_{n_0}, u_n) \leq \varepsilon_0$.

Donc pour tout $n \geq n_0$: $d(u, u_{n_0}) > \varepsilon_0$ et $d(u_{n_0}, u_n) \leq \varepsilon_0$.

D'où : $d(u, u_{n_0}) \neq d(u_{n_0}, u_n)$ et, donc, d'après 1) :

$$d(u_n, u) = \max\{d(u_n, u_{n_0}), d(u_{n_0}, u)\} = d(u, u_{n_0}) > \varepsilon_0.$$

En définitive : $\forall n \geq n_0, d(u_n, u) = d(u, u_{n_0})$.

La constante cherchée est $\alpha = d(u, u_{n_0}) > \varepsilon_0 > 0. \blacklozenge$

Ce résultat signifie que dans un espace ultramétrique une suite est : soit convergente, soit dépourvue de toute valeur d'adhérence.

Prenons dans \mathbb{R} : $u_n = (-1)^n$ et $u = 1. \forall n : d(u, u_{2n}) = 0, d(u, u_{2n+1}) = 2$.

Donnons un exemple non trivial de distance ultramétrique : les distances p -adiques sur \mathbb{Q} .

Soit p un nombre *premier*. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $v_p(n)$ = l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. On a : $v_p(m.n) = v_p(m) + v_p(n)$.

Soit $r = \pm \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$, où $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $v_p(r) = v_p(m) - v_p(n)$. On a : $v_p(r.s) = v_p(r) + v_p(s)$.

Pour $r, s \in \mathbb{Q}$ on pose : $d_p(r, r) = 0$ et si $r \neq s$: $d_p(r, s) = p^{-v_p(r-s)}$.

Il est facile de voir que d_p – pour tout p – est une distance ultramétrique sur \mathbb{Q} . Cette distance est très utilisée dans certaines recherches en théorie des nombres.

Remarque :

J'ai parfois eu la sensation que certains étudiants percevaient les propriétés « bizarres » des espaces ultramétriques comme si c'étaient des propriétés relevant d'une notion d'espace métrique généralisé.

Ces étudiants n'ont évidemment pas une bonne vision des espaces ultramétriques, puisqu'un espace ultramétrique est *d'abord* un espace métrique « ordinaire » !

L'impression d'étrangeté des propriétés vient de ce qu'on impose *davantage* à l'inégalité triangulaire, et que, de ce fait, certaines propriétés des distances familières ne peuvent plus avoir lieu.

C'est ainsi qu'on attend d'un triangle qu'il puisse avoir ses trois côtés inégaux, mais que cela n'est pas possible dans un espace ultramétrique, où un triangle est nécessairement isocèle.

Remarquons d'ailleurs que pour la distance discrète les triangles sont tous équilatéraux !

Fin du Chapitre XIII

CHAPITRE XIV

ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS (II)

Introduction

Le chapitre XIV termine la partie du cours consacrée aux *espaces métriques compacts*, et avec lui s'achève la partie la plus importante, la plus fondamentale, de la topologie des espaces métriques.

Nous reviendrons sur la topologie générale dans le chapitre XX (Connexités) pour des propriétés importantes qui n'ont d'ailleurs strictement rien à voir avec les espaces métriques, lesquels serviront simplement de cadre.

Dans la suite du cours, nous envisagerons des *applications* (XVI et XVII) et des *cas particuliers* (les espaces de Hilbert : chapitres XVIII, XIX).

Ce chapitre XIV contient le théorème fondamental sur les compacts métriques, à savoir que :

$$\begin{aligned} [\text{compact} = \text{précompact} \wedge \text{complet}] &\iff [\text{propriété de Bolzano-Weierstra\ss}] \\ &\iff [\text{propriété de Borel-Lebesgue}]. \end{aligned}$$

Ce résultat est assez difficile à prouver, mais nous l'avons soigneusement décortiqué de manière à le rendre compréhensible ; il faut travailler cette démonstration dont on trouve des morceaux ré-utilisables par-ci par-là.

Deux autres résultats fondamentaux sont le *théorème des fonctions continues sur un compact* et le *théorème de Heine*, de démonstration facile.

Le *théorème d'Ascoli-Arzelà* est de démonstration peu facile, mais ses très nombreuses applications dans divers domaines justifient l'effort à faire.

Bref, ce chapitre est assez délicat et demande du travail : il vous est accordé trois fois plus de temps que pour les autres chapitres . . .

De très nombreux exercices apportent des éclaircissements ou donnent des applications, certaines très jolies.

☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.2, **1.3**, **1.4**, **1.5**, 1.6, 1.9, 2.1, **2.7**, 2.9, **2.10**, **2.11**, 2.12, 3.1, 4.2, 4.3.

☞ Exercices complémentaires : 1.7, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.8, 2.13, 3.2, 4.1.

Quatre problèmes vous sont proposés.

Le premier problème, une Lecture-Problème, concerne une généralisation – importante du point de vue théorique – du théorème de Weierstraß : le *théorème de Stone-Weierstraß*. Ce résultat aurait pu faire partie du cours, mais son ancêtre, le théorème de Weierstraß-tout-seul, est le plus souvent suffisant au niveau des applications. Très détaillé, le problème est assez facile, mais certainement non trivial.

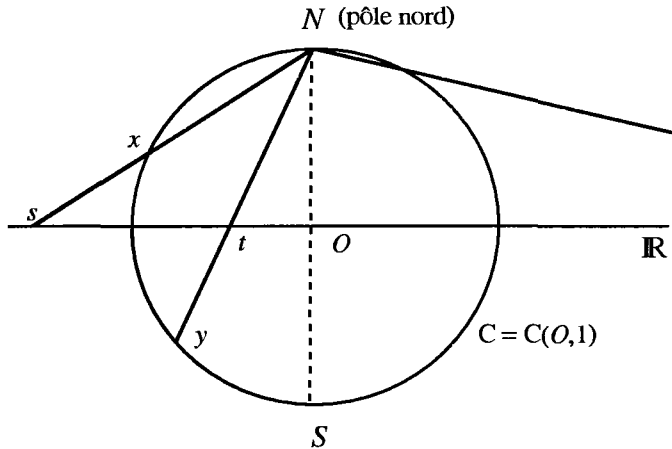
Le deuxième est consacré aux *espaces métriques à boules fermées compactes* ; le jeu consiste à prouver que ces espaces ressemblent furieusement à \mathbb{R}^n . Mais la dernière question montre qu'il y a d'autres espaces que \mathbb{R}^n qui satisfont la propriété. Toutefois,

généraliser un résultat de \mathbb{R}^n aux c -espaces n'est pas le bon chemin vers la médaille Fields ⁽¹⁾ ! Ce problème est assez facile.

Le troisième problème traite des applications linéaires *positives* ; il généralise les polynômes de Bernstein utilisés dans la démonstration du théorème de Weierstraß.

Le dernier problème porte sur les idéaux de l'algèbre des fonctions continues sur un compact.

BON MORAL ! BON TRAVAIL !



Projection stéréographique et compactifié d'Alexandrov

- $x = (\xi, \eta) \in C \setminus \{N\} \mapsto f(x) = s = \frac{\xi}{1 - \eta}$
 - $s \in \mathbb{R} \mapsto f^{-1}(s) = x = (\xi, \eta) = \left(\frac{2s}{1 + s^2}, \frac{s^2 - 1}{1 + s^2} \right)$
- et $f(N) = \omega, f^{-1}(\omega) = N$.

(1) Analogie en Mathématiques du prix Nobel. Pourquoi n'existe-t-il pas de prix Nobel de Mathématiques ? Une réponse plausible est que Nobel – industriel, inventeur de la dynamite – voulait récompenser uniquement des découvertes pratiques. Une autre explication, très folklorique, est que Nobel se serait vengé du trop grand intérêt d'un célèbre mathématicien suédois pour son épouse ... Mais Nobel n'était pas marié !

CHAPITRE XIV

ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS (II)

1. LE THÉORÈME FONDAMENTAL

Théorème 1.1. (FONDAMENTAL)

- Soit (E, d) un espace métrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- (1.1) (E, d) est **compact** [c'est-à-dire : précompact et complet],
 - (1.2) **Propriété de Bolzano-Weierstraß** : toute suite de points de E possède au moins une valeur d'adhérence,
 - (1.3) **Propriété de Borel-Lebesgue** : de tout recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de E par des parties ouvertes de (E, d) on peut extraire un recouvrement fini.

Démonstration : Voir la partie DÉMONSTRATIONS à la suite du Cours. ♦

Cette démonstration est assez longue, c'est la démonstration la plus longue de tout le cours, mais elle n'est pas très difficile à suivre. Il faut en retenir les grandes lignes et les arguments : ceux-ci sont « reproductibles » *mutatis mutandis* dans des exercices et problèmes. Un excellent problème d'entraînement consiste à prouver toutes les implications non démontrées, ce n'est pas très facile.

Commentaires :

1) La propriété de Bolzano-Weierstraß (1.2) devrait évoquer pour vous un théorème de D.E.U.G : « de toute suite bornée de réels on peut extraire une suite convergente dans \mathbb{R} » (même résultat dans \mathbb{R}^n , $n \geq 2$), théorème d'où elle tire d'ailleurs son nom (cf. Chap. III).

Le Th. 1.1 permet de retrouver aisément ce résultat : si (u_p) est une suite bornée dans \mathbb{R}^n , on peut l'inclure dans une boule fermée $B(z, \rho)$ laquelle est compacte puisque \mathbb{R}^n est de dimension finie [cf. Chap. XIII, Prop.3.7], et on applique (1.2).

La propriété (1.2) est équivalente [voir Chap.V, Exercice 2.1] à : *toute partie infinie de E possède au moins un point d'accumulation.*

2) La propriété de Borel-Lebesgue (1.3) ne faisant intervenir que les ouverts de (E, d) , il est désormais clair grâce au Th. 1.1 que **la notion d'espace métrique compact est topologique, i.e.** conservée par les homéomorphismes.

☞ *Deux espaces métriques homéomorphes sont simultanément compacts ou non compacts.*

La propriété (1.3) est prise comme *définition* des espaces topologiques compacts en topologie générale. Dans un espace topologique « général » (1.1) n'a pas de sens ; (1.2) en a un, mais (1.2) $\not\Rightarrow$ (1.3) et (1.3) $\not\Rightarrow$ (1.2) : il ne subsiste donc RIEN du Th. 1.1 en Topologie Générale !!!

3) L'expression « on peut extraire un recouvrement fini » dans (1.3) signifie qu'il existe J fini, $J \subset I$, tel que $E \subset \bigcup_{j \in J} U_j$. **Attention** : Il n'est nullement question ici de considérer des sous-ensembles finis des U_i !

Exemple 1.1. La droite *étendue* (ou : *achevée*) $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ munie de la distance $d(s, t) = |\text{Arc tan}(s) - \text{Arc tan}(t)|$ [cf. Chap. I, Exemple 1.6 et Chap. XI, Exemple 2.3] est un espace métrique compact, puisqu'elle est homéomorphe à $[-\pi/2, +\pi/2]$, partie compacte de \mathbb{R} usuel. Le sous-espace métrique \mathbb{R} de $\overline{\mathbb{R}}$, qui est homéomorphe à $]-\pi/2, +\pi/2[$ sous-espace métrique de $[-\pi/2, +\pi/2]$, est donc précompact, tandis que \mathbb{R} usuel, homéomorphe à $]-\pi/2, +\pi/2[$ usuel, n'est pas précompact : cela prouve à nouveau [Chap. XIII] que *la notion de précompacité n'est pas topologique*.

Exemple 1.2. On appelle *compactifié d'Alexandrov* de \mathbb{R} (ou : compactifié de \mathbb{R} par un point à l'infini) et on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\omega\}$ [où ω ne désigne aucun réel, ω est un symbole qui joue le rôle de $-\infty$ et $+\infty$ identifiés l'un à l'autre], un espace métrique compact homéomorphe au cercle unité $C = C(0, 1)$ de \mathbb{R}^2 (C compact de \mathbb{R}^2 comme fermé borné).

On procède comme suit.

Dans des axes orthonormés, on considère le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 1$, on note $N = (0, 1)$ (pôle nord) ; par une *projection stéréographique*, on établit d'abord une bijection – qui est en fait un homéomorphisme – entre \mathbb{R} (identifié à l'axe des x) et C privé du point N . En formules (vérifiez) :

$$x = (\xi, \eta) \in C \setminus \{N\} \mapsto f(x) = s = \frac{\xi}{1-\eta} \in \mathbb{R}$$

$$s \in \mathbb{R} \mapsto f^{-1}(s) = x = (\xi, \eta) = \left(\frac{2s}{1+s^2}, \frac{s^2-1}{1+s^2} \right) \in C \setminus \{N\}$$

Faites un dessin (cf. p. 304) !

On munit ensuite le cercle C de la distance géodésique : $d_g(x, y) =$ longueur du plus petit arc de cercle joignant x à y . d_g est équivalente à la distance euclidienne induite sur C , lequel est donc compact pour d_g [cf. Chap. I, Ex.2.1]. On transporte enfin d_g sur \mathbb{R} afin d'en faire un espace métrique en posant pour $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{d}(s, t) = d_g[f^{-1}(s), f^{-1}(t)] = d_g(x, y).$$

A présent, on étend f et f^{-1} par : $f(N) = \omega$ et $f^{-1}(\omega) = N$, et \tilde{d} à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant : $\tilde{d}(\omega, s) = d_g(N, f^{-1}(s)) = d_g(N, x)$.

C étant muni de sa distance géodésique pour lequel il est compact, et $\overline{\mathbb{R}}$ étant muni de \tilde{d} , les applications f et f^{-1} étendues sont deux homéomorphismes inverses l'un de l'autre.

Remarque : On peut expliciter $\tilde{d}(s, t)$ qui ressemble à la distance de $\overline{\mathbb{R}}$ de l'exemple 1.1 mais qui est définie par intervalles : c'est long.

A titre d'exemple, pour $s \in \mathbb{R} : \tilde{d}(s, \omega) = \pi + 2 \text{Arc tan}(s)$ si $s \in]-\infty, 0]$ et $\tilde{d}(s, \omega) = \pi - 2 \text{Arc tan}(s)$ si $s \in [0, +\infty[$; si $-1 \leq s \leq +1$ et $-1 \leq t \leq +1$: $\tilde{d}(s, t) = 2|\text{Arc tan}(s) - \text{Arc tan}(t)|$, etc. Calculez si vous voulez ...

\mathbb{R} induit par $\overline{\mathbb{R}}$ n'est pas complet (il est précompact) car les suites $s_n = n$ et $t_n = -n$ sont convergentes dans $\overline{\mathbb{R}}$ vers ω , et donc sont de Cauchy – non convergentes – dans \mathbb{R} induit. De la même manière que pour \mathbb{R} , on peut « compactifier » \mathbb{R}^n en lui adjoignant un seul « point à l'infini » ω . Ce point peut être représenté comme la limite de toutes les suite (u_n) d'éléments de \mathbb{R}^n telles que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\| = \infty$.

Une remarque à l'intention des enseignants des lycées et collèges : la fonction homographique $t \mapsto f(t) := \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$ est un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $\overline{\mathbb{R}}$ si l'on

étend f par $f(-\frac{\delta}{\gamma}) = \omega$ et $f(\omega) = \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \tilde{\mathbb{R}}$ est le domaine où l'homographie acquiert toute sa dignité...

☞ **Exercice 1.1.** (très facile) Que deviendrait la notion d'espace métrique compact si l'on remplaçait « ouvert » par « fermé » dans (1.3)? Démontrez à l'aide de (1.3) que $]0, 1]$ (usuel) n'est pas compact.

☞ **Exercice 1.2.** (très facile) Démontrez à l'aide de (1.2) que la boule unité fermée de $E = C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ n'est pas compacte. Ne cherchez pas un exemple compliqué!

Proposition 1.1.

La propriété (1.3) peut s'énoncer sous les formes *équivalentes* suivantes (dites propriétés « duales »):

(1.4) pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de parties fermées de (E, d) :

$$[\forall J \subset I, J \text{ fini} : \bigcap_{j \in J} F_j \neq \emptyset] \implies \bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset,$$

(1.5) pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de fermés de (E, d) telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe $J \subset I, J$ fini, tel que: $\bigcap_{j \in J} F_j = \emptyset$.

Commentaire :

La propriété entre crochets dans (1.4) s'appelle « *propriété d'intersection finie* », et c'est parfois (1.4) qui porte ce nom. Il est remarquable que (1.4) \iff (1.5) sont très proches de (1.3) et que, pourtant, des exercices sont évidents ou pas selon qu'on emploie telle ou telle caractérisation des compacts.

Quelle manière hypocrite pour dire que (1.4) et (1.5) sont à connaître !

☞ **Exercice 1.3.** (très facile) Démontrez la Proposition 1.1. Prouvez sur un exemple que (1.4) et (1.5) sont fausses pour un e.m. non compact.

Prouvez la « propriété de Cantor » suivante :

soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}, F_n \neq \emptyset$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, une suite de parties fermées d'un espace métrique compact, vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} : F_{n+1} \subset F_n$; dans ces conditions : $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ [encore une propriété des compacts qui sert assez souvent].

☞ **Exercice 1.4.** (peu difficile) Soit (E, d) un espace métrique compact, et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite monotone (*) de fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}$ continues. On suppose qu'il existe $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(u))_n = f(u)$ pour tout $u \in E$. Démontrez que $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n)_n = f$ dans l'espace de Banach $C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$.

(*) C'est la suite qui est monotone, i.e. que $\forall n : f_n \leq f_{n+1}$ ou bien $\forall n : f_{n+1} \leq f_n$; même si E est ordonné, il est possible qu'aucune des f_n ne soit monotone ! Donnez des contre-exemples prouvant la nécessité de toutes les hypothèses.

Indications :

- Première démonstration : $\varepsilon > 0$ fixé, soit $u \in E$; écrire que $(f_n(u))_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(u)$, que f et f_n sont continues en u , et considérer un recouvrement de E par des $B(u, \rho_u)$, $u \in E$, bien choisies.
- Seconde démonstration : considérez $F_n = \{u \in E / f(u) - f_n(u) \geq \varepsilon\}$ (dans le cas où (f_n) est croissante)...

Réécrivons, l'expérience prouve que ce n'est pas inutile, le Th. 1.1 dans le cadre des parties compactes d'un espace métrique :

Théorème 1.2.

Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie de E . Les propriétés suivantes sont toutes *équivalentes* :

(1.6) A est **compacte**, i.e. est *précompacte et complète*,

(1.7) toute suite de points de A possède une valeur d'adhérence (au moins) appartenant à A ,

(1.8) toute partie *infinie* de A possède un point d'accumulation (au moins) appartenant à A ,

- (1.9) de tout recouvrement $(U_i)_{i \in I}$ de A par des parties ouvertes dans $(A, d|_{A \times A})$ on peut extraire un recouvrement fini,
 (1.10) de tout recouvrement $(V_i)_{i \in I}$ de A par des parties ouvertes dans (E, d) on peut extraire un recouvrement fini,
 (1.11) pour toute famille $(F_i)_{i \in I}$ de parties fermées [dans $(A, d|_{A \times A})$ ou (E, d)] telle que $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, il existe $J \subset I$, J fini, tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

☞ **Exercice 1.5.** (très facile) Démontrez que (1.9) \iff (1.10).

Remarque : (IMPORTANTE)

Il convient de remarquer ici que *contrairement* aux notions d'ouverts, de fermés, etc. qui sont relatives à un sous-espace métrique donné [ce qu'il ne faut jamais perdre de vue !], la notion d'espace métrique compact est « intrinsèque ». On peut exprimer ce fait ainsi : $K \subset A \subset E$ est compacte dans $(E, d) \iff K$ est compacte dans $(A, d|_{A \times A})$. Vérifiez ! C'est ce qu'exprime l'équivalence entre (1.9) et (1.10).

Remarquez que, de même, pour la précompacité, on peut écrire :

A précompact $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists F$ fini $\subset E$ (au lieu de A), $\forall u \in A : d(u, F) \leq \varepsilon$.

☞ **Exercice 1.6.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique, et soit $(u_n)_{n \in S}$, $S \subset \mathbb{N}$, S infinie, une suite de points de E convergente de limite u dans (E, d) . Démontrez successivement à l'aide de (1.6), (1.7), (1.10) que le sous-ensemble

$$A := \{u_n / n \in S\} \cup \{u\}$$

de E est une partie compacte de (E, d) .

☞ **Exercice 1.7.** (assez facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soient A, B deux parties non vides de E .

- 1) Démontrez que si A est compact et B fermé : $A + B = \{a + b / a \in A, b \in B\}$ est fermé, non compact en général (donnez un exemple).
- 2) Démontrez que si A, B sont tous deux compacts : $A + B$ est compact.
- 3) Trouvez des exemples dans \mathbb{R} ou \mathbb{R}^2 prouvant que si A et B sont seulement fermés, $A + B$ n'est pas fermé en général.

☞ **Exercice 1.8.** Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit A une partie de E . Démontrez que : A est précompacte si et seulement si de toute suite $(a_n)_{n \in S}$ de points de A on peut extraire une suite de Cauchy.

Nota : ce résultat est en fait tout à fait général [on peut enlever l'hypothèse (E, d) complet] car, nous le verrons dans le prochain chapitre, on peut toujours « plonger » un espace métrique dans un espace métrique complet.

On aura donc une agréable symétrie entre la caractérisation (1.2) d'un compact et la caractérisation donnée ici d'un précompact.

Proposition 1.2. (IMPORTANTE)

Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie compacte de (E, d) . Si une suite $(a_n)_{n \in S}$ d'éléments de A n'admet qu'une seule valeur d'adhérence a : $(a_n)_{n \in S}$ est convergente de limite a .

Démonstration : Supposons que $(a_n)_{n \in S}$ ne converge pas vers a , ce qui revient d'ailleurs à dire qu'elle diverge :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in S, \exists n \in S : n \geq N \text{ et } d(a_n, a) > \varepsilon.$$

Cela équivaut à : $\exists \varepsilon > 0, \exists T \subset S$, T infini, $\forall n \in T : d(a_n, a) > \varepsilon$ (*).

Mais $(a_n)_{n \in T}$ – puisque A est compact – admet une valeur d'adhérence $b \in A$ [Th. 1.2 (1.7)] : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in R} (a_n) = b$ pour un $R \subset T$, R infini. Par hypothèse : $b = a$. Mais $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in R} (a_n) = a$ est en contradiction, puisque $R \subset T$, avec (*). D'où le résultat. ♦

Exemples 1.3. Le résultat ci-dessus est *faux* si A n'est pas compacte. Par exemple, dans \mathbb{R} , la suite s définie par : $s_{2n} = 0$ et $s_{2n+1} = n$ possède une seule valeur d'adhérence ($= 0$), mais n'est pas convergente.

Un autre exemple, avec une suite bornée ; dans ℓ^2 , on pose $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ [1 à la n -ème place, 0 ailleurs] ; considérons $a_{2n} = e_n$ et $a_{2n+1} = 0$; (a_n) n'a qu'une valeur d'adhérence, 0, mais elle ne converge pas car : $\|a_{2p} - a_{2q+1}\|_2 = 1$, $\|a_{2p} - a_{2q}\|_2 = \sqrt{2}$, $\|a_{2p+1} - a_{2q+1}\|_2 = 0$ pour tous $p \neq q$ entiers, et la suite n'est pas de Cauchy.

☞ **Exercice 1.9.** (facile) Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques ; on suppose (F, δ) compact.

Soit $f : E \rightarrow F$ une application dont le *graphe* $G = \{(u, f(u)) / u \in E\}$ est fermé dans $E \times F$. Démontrez que f est continue.

☞ **Exercice 1.10.** (assez difficile) Suite de l'Exercice 2.4 du Chap. XIII. On suppose ici, de plus, que (E, d) est un espace métrique complet. Démontrez que pour tout $t_0 \in [a, b]$ les limites $\lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} f(t)$ et $\lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} f(t)$ existent.

2. APPLICATIONS CONTINUES DÉFINIES SUR UN ESPACE MÉTRIQUE COMPACT

Théorème 2.1. (FONDAMENTAL)

Soit (E, d) un espace métrique **compact**, et soit (F, δ) un espace métrique. Soit $f : E \rightarrow F$ une application **continue sur E** .
Conclusion : $f(E)$ est une partie compacte de (F, δ) .

Commentaires :

1) Il est très fréquent, surtout en Topologie Générale, mais aussi dans le cadre des espaces métriques, qu'on démontre qu'un espace est compact en le présentant comme image par une application continue d'un espace qu'on sait compact.

2) Bien entendu, l'image *inverse* d'un compact par une application continue n'est pas compacte en général ! Prenez $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = 0$ (fonction constante) : $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$!

Les applications telles que $f^{-1}(K)$ est compact pour tout compact K sont dites *propres*.

Démonstration :

Soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement de $f(E)$ par des ouverts de (F, δ) : $f(E) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$. Posons $U_i = f^{-1}(V_i)$: les U_i sont des ouverts de (E, d) puisque f est continue sur E [cf. Chap. VII]. On a :

$$f^{-1}[f(E)] = E \subset f^{-1}(\bigcup_{i \in I} V_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V_i) = \bigcup_{i \in I} U_i,$$

et donc les U_i , $i \in I$, constituent un recouvrement ouvert de E , qui est compact : il existe par conséquent $J \subset I$, J fini, tel que $E \subset \bigcup_{j \in J} U_j$. On a :

$f(E) \subset f(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcup_{j \in J} f(U_j)$, mais $f(U_j) = f[f^{-1}(V_j)] = V_j \cap f(E) \subset V_j$ et, enfin : $f(E) \subset \bigcup_{j \in J} V_j$. Les $(V_j)_{j \in J \subset I}$ constituent un recouvrement ouvert fini de $f(E)$. Donc $f(E)$ est une partie compacte de (F, δ) . ♦

Nota : On peut avoir des $U_i = \emptyset$ qui correspondent à des V_i « ne servant à rien » car ne coupant pas $f(E)$.

Remarque : Bien entendu [cf. Th. 1.2, Exercice 1.5 et Remarque 1.1] on aurait pu aussi considérer des ouverts de $(f(E), d|_{f(E) \times f(E)})$; il convient de remarquer que $f : E \rightarrow F$ continue sur $E \iff f : E \rightarrow f(E)$ continue (évident).

☞ **Exercice 2.1.** (facile) Démontrez, pour vous entraîner, la variante du Th. 2.1 suivante en utilisant la caractérisation (1.7) du Th. 1.2 : soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, $A \subset E$ une partie compacte, $f : A \rightarrow F$ continue sur A ; alors $f(A)$ est une partie compacte de (F, δ) .

☞ **Exercice 2.2.** (facile) Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, on suppose que (E, d) est compact. Soit $f : E \rightarrow F$ une application injective et continue sur E . Démontrez que f est un homéomorphisme de E sur $f(E)$.

☞ **Exercice 2.3.** (difficile) Terminez l'Exercice 3.1 du Chap. XIII en prouvant que K et $[-1, +1]^{\mathbb{N}^*}$ sont homéomorphes. Cela justifie qu'on les appelle tous deux « cube de Hilbert » !

☞ **Exercice 2.4.** (assez facile)

a) Soit (E, d) un espace métrique compact, et soit $f : E \rightarrow E$ une isométrie [$\forall u, v \in E : d(f(u), f(v)) = d(u, v)$]. Démontrez que f est un homéomorphisme de E sur E .

Indication : Si $f(E) \neq E$, soit $u_1 \in E \setminus f(E)$, puis $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 1$; prouvez qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall p, q, p \neq q : d(u_p, u_q) \geq \alpha$.

b) Démontrez qu'une isométrie $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui possède un point fixe [i.e. $\exists x \in \mathbb{R}^n : f(x) = x$] est un homéomorphisme.

c) Trouvez une isométrie $f : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ non surjective [restez simple . . .].

☞ **Exercice 2.5.** (un peu difficile) Soit (E, d) un espace métrique compact, et soit $f : E \rightarrow E$ vérifiant : $d[f(u), f(v)] \geq d(u, v)$ pour tous u, v de E . Démontrez que f est une isométrie surjective.

Indications : Soient $u, v \in E$, on pose : $u_1 = f(u), v_1 = f(v)$ puis, pour $n \geq 1 : u_{n+1} = f(u_n), v_{n+1} = f(v_n)$, démontrez que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $m = m_\varepsilon$ tel que : $d(u, u_m) \leq \varepsilon$ et $d(v, v_m) \leq \varepsilon$; en déduire que $f(E)$ est partout dense et que f est isométrique ; concluez.

☞ **Exercice 2.6.** (assez facile) Soit (E, d) un espace métrique compact, et soit $f : E \rightarrow E$ une application continue sur E . Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante [i.e. $\forall n : F_{n+1} \subset F_n$] de parties fermées non vides de E . Prouvez que :

$$f\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f(F_n).$$

Théorème 2.2. (FONDAMENTAL)

Soit (E, d) un espace métrique **compact** (non vide), et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur (E, d) . Conclusions :

(2.1) $f(E)$ est **borné** dans $\mathbb{R} : \sup_{u \in E} |f(u)| < \infty,$

(2.2) il existe $\underline{u} \in E$ et $\bar{u} \in E$ tels que :

(2.2.1) $f(\underline{u}) = \inf_{u \in E} f(u) = \min_{u \in E} f(u),$

(2.2.2) $f(\bar{u}) = \sup_{u \in E} f(u) = \max_{u \in E} f(u).$

Vous connaissiez déjà ce résultat quand $E = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, le voilà considérablement étendu. C'est en quelque sorte le premier résultat de la théorie appelée optimisation. En termes d'optimisation [cf. Chap. I], les résultats ci-dessus s'énoncent :

(2.1) Les « fonctions valeur » $\mu(f, E) = \inf_{u \in E} f(u)$, et $\nu(f, E) = \sup_{u \in E} f(u)$ sont à valeur réelles,

(2.2) $\text{Argmin}(f, E) = \{u \in E / f(u) = \mu(f, E)\} \neq \emptyset,$
 $\text{Argmax}(f, E) = \{u \in E / f(u) = \nu(f, E)\} \neq \emptyset.$

Démonstration : D'après le Th. 2.1 : $f(E)$ est une partie compacte de \mathbb{R} , c'est-à-dire [cf. Chap. XIII] une partie bornée et fermée de \mathbb{R} .

Partie bornée s'écrit : $-\infty < \inf f(E) \leq \sup f(E) < +\infty$, ou $\text{diam}[f(E)] < \infty$.

Partie fermée implique, puisque $\inf f(E)$ et $\sup f(E)$ sont adhérents à $f(E)$ [cf. Chap. V, §2 *in fine*], que $\inf f(E) = \min f(E) \in f(E)$ et $\sup f(E) = \max f(E) \in f(E)$, d'où le résultat. ♦

☞ **Exercice 2.7.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique compact, et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur E . On suppose que pour tout $u \in E$ on a $f(u) > 0$. Démontrez qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $u \in E : f(u) \geq \alpha > 0$ (autrement dit que $\inf_{u \in E} f(u) > 0$).

Donnez un exemple simple prouvant que c'est faux si E n'est pas compact.

☞ **Exercice 2.8.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique, et soit $f : E \rightarrow E$ une application continue sur E .

a) Démontrez que $F = \{u \in E / f(u) = u\}$ est une partie fermée dans (E, d) .

b) Démontrez que si (E, d) est compact, et si $F = \emptyset$, il existe un $\gamma > 0$ tel que $\forall u \in E : d[u, f(u)] \geq \gamma$.

☞ **Exercice 2.9.** (facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , de dimension finie.

a) Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) f est continue sur E ,

(ii) $u \neq 0 \implies f(u) \neq 0$,

(iii) $\exists \alpha > 0, \forall \lambda \geq 0, \forall u \in E : f(\lambda \cdot u) = \lambda^\alpha \cdot f(u)$.

Soit $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ une autre fonction jouissant des mêmes propriétés, avec le même α pour (iii).

Démontrez qu'il existe $c > 0$ et $C > 0$ tels que $\forall u \in E :$

$$c \cdot |f(u)| \leq |g(u)| \leq C \cdot |f(u)|.$$

Application : retrouvez le Th. 2.2 du Chap. XII.

b) On suppose que $\dim(E) = n \geq 1$. Soient p ($1 \leq p \leq n$) vecteurs u_1, \dots, u_p de linéairement indépendants. Démontrez qu'il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\forall \lambda_1 \in \mathbb{R}, \dots, \forall \lambda_p \in \mathbb{R} : \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot u_i \right\|^2 \geq \beta \cdot \sum_{i=1}^p |\lambda_i|^2.$$

c) On suppose ici que E est préhilbertien, de produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ (toujours avec E de dimension finie). Soit $A : E \rightarrow E$ une application continue sur E vérifiant : $A(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot A(u)$ pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \geq 0$ (donnez un exemple).

Démontrez que si $(A(u) | u) > 0$ pour tout $u \in E, u \neq 0$, il existe $k > 0$ tel que : $\forall u \in E : (A(u) | u) \geq k \cdot \|u\|^2$.

Donnez un contre-exemple prouvant que ce résultat est faux quand E est de dimension infinie : voir Exercice 1.1 du Chap. X.

☞ **Exercice 2.10.** (assez facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} de dimension finie dont la norme vérifie :

$$(1) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : [\|u\| = \|v\| = 1 \text{ et } u \neq v] \implies \left\| \frac{1}{2}(u + v) \right\| < 1.$$

Donnez des exemples de normes sur \mathbb{R}^2 vérifiant ou ne vérifiant pas la propriété (1).

On considère la propriété :

$$(2) \quad \forall \varepsilon \in]0, 2], \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall u \in E, \forall v \in E :$$

$$[\|u\| = \|v\| = 1 \text{ et } \|u - v\| \geq \varepsilon] \implies \left\| \frac{1}{2}(u + v) \right\| \leq 1 - \alpha_\varepsilon.$$

Démontrez que (1) et (2) sont équivalentes.

Démontrez qu'un espace préhilbertien, même de dimension infinie, vérifie (2) [déterminez le meilleur α_ε possible].

Nota : Un e.v.n. de dimension quelconque qui vérifie (2) vérifie (1) [(2) est une « version uniforme » de (1)]; mais il existe des e.v.n. qui vérifient (1) et pas (2) (ce ne sont pas des espaces « naturels » !). La propriété (1) [resp. (2)] s'appelle *convexité stricte* [resp. *convexité uniforme*] de la norme.

☞ **Exercice 2.11.** (assez facile) Soit (E, d) un espace métrique, et soient A, B deux parties non vides de E .

Rappelons [cf. Chap. I] que $\alpha = d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$ est la distance entre A et B .

Examinez les propriétés suivantes (donnez une démonstration ou bien un contre-exemple) :

$$(1) \quad \alpha > 0,$$

$$(2) \quad \exists a \in A, \exists b \in B : d(A, B) = d(a, b),$$

dans chacune des situations suivantes :

$$(i) \quad A = \{a\} \text{ avec } a \notin B, B \text{ compacte,}$$

- (ii) $A = \{a\}$, $a \notin B$, B fermée,
- (iii) A compacte, B compacte, $A \cap B = \emptyset$,
- (iv) A compacte, B fermée, $A \cap B = \emptyset$,
- (v) A fermée, B fermée, $A \cap B = \emptyset$.

Reprendre ensuite tout l'exercice quand (E, d) est un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ de dimension finie.

Indication : Considérez pour $\rho > 0$: $V_\rho(A) = \{u \in E / d(u, A) \leq \rho\}$.

Examinez le cas (ii) dans la situation suivante :

(E, d) est un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ de dimension quelconque et B est contenue dans un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E .

Proposition 2.2.

Soit (K, δ) est un espace métrique **compact**, et soit (F, ϑ) un espace métrique **complet** : l'espace métrique $E = C_\infty(K, F) = \{f : K \rightarrow F / f \text{ continue sur } K\}$ muni de la distance uniforme $d_\infty(f, g) = \sup_{k \in K} \vartheta[f(k), g(k)]$ est **complet**.

Si (F, ϑ) est un **espace de Banach** $(F, \|\cdot\|)$ – sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} – E est un **espace de Banach** – sur \mathbb{K} – pour la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{k \in K} \|f(k)\|_F$.

Lorsque $(F, \|\cdot\|) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$, on note $E = C_{\mathbb{K}}(K)$ ou $\mathcal{C}(K)$ l'espace de Banach ci-dessus : c'est un espace de Banach « classique ».

Démonstration :

D'après le Th. 2.1, l'espace métrique $C_\infty(K, F)$ n'est autre que l'espace métrique $CB_\infty(K, F)$ qui est complet lorsque F l'est [cf. Chap. XI, Corol. 3.3]. ♦

Théorème 2.3. (Théorème de Heine ⁽²⁾) (FONDAMENTAL)

Soit (E, d) un espace métrique **compact**, et soit (F, δ) un espace métrique. Toute application $f : E \rightarrow F$ **continue** sur (E, d) est **uniformément continue** sur (E, d) .

Commentaires : Ce Th. est très intéressant même à un niveau très élémentaire : il n'est pas immédiat que $t \mapsto \sqrt{t}$, $t \mapsto t \cdot \sin(\frac{1}{t})$, $t \mapsto t \cdot \ln(t)$ sont uniformément continues sur $[0, 1]$ (après prolongement par 0 en 0 pour les deux dernières fonctions).

Par ailleurs ce Th. est fondamental dans les questions d'approximation (cf. les Exercices 2.12, 2.13 qui généralisent des résultats déjà connus de D.E.U.G, cf. Chap. IV).

Démonstration :

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi :

$$\neg[\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u \in E, \forall v \in E : d(u, v) \leq \eta \implies \delta(f(u), f(v)) \leq \varepsilon]$$

Soit : $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists u \in E, \exists v \in E : d(u, v) \leq \eta$ et $\delta(f(u), f(v)) > \varepsilon$.

On peut donc écrire :

$$(1) \exists \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in E, \exists v_n \in E : d(u_n, v_n) \leq \frac{1}{n} \text{ et } \delta(f(u_n), f(v_n)) > \varepsilon.$$

Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans l'espace métrique compact (E, d) : il existe $\hat{u} \in E$ et $S \subset \mathbb{N}^*$, S infinie, tels que : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n) = \hat{u}$ [cf. Th. 1.1]. Quant à la suite $(v_n)_{n \in S}$, elle tend aussi vers \hat{u} parce que :

$$d(\hat{u}, v_n) \leq d(\hat{u}, u_n) + d(u_n, v_n) \leq d(\hat{u}, u_n) + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

A présent, f est continue en $\hat{u} \in E$: $\varepsilon > 0$ étant donné par (1), on a :

$$(2) \exists \theta > 0, \forall w \in E : d(w, \hat{u}) \leq \theta \implies \delta(f(w), f(\hat{u})) \leq \frac{1}{4} \varepsilon.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (v_n) = \hat{u}$, il existe $N \in S$ tel que pour tout $n \in S$: $n \geq N \implies d(u_n, \hat{u}) \leq \theta$ et $d(v_n, \hat{u}) \leq \theta$; donc pour tout $n \in S$, $n \geq N$:

(2) Il s'agit du mathématicien Heinrich Eduard Heine, et non de l'écrivain poète Heinrich Heine.

$\delta(f(u_n), f(v_n)) \leq \delta(f(u_n), f(\hat{u})) + \delta(f(\hat{u}), f(v_n)) \leq \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon$, d'où une contradiction en rapprochant de (1) : $\varepsilon < \delta(f(u_n), f(v_n)) \leq \frac{1}{2}\varepsilon \implies 2 < 1 \dots$
 f est donc $\neg[\neg[\text{uniformément continue sur } (E, d)]] \iff f$ est uniformément continue sur (E, d) . ♦

☞ **Exercice 2.12.** (facile) Soit $[\alpha, \beta]$ un intervalle compact de \mathbb{R} et soit (E, d) un espace métrique. Démontrez que toute $f \in C_\infty([\alpha, \beta], E)$ peut être approchée à $\varepsilon > 0$ près, pour tout $\varepsilon > 0$, par une application en escalier [cf. Chap. IV].

☞ **Exercice 2.13.** (facile) Soit $[\alpha, \beta]$ un intervalle compact de \mathbb{R} et soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Démontrez que toute $f \in C_\infty([\alpha, \beta], E)$ peut être approchée à $\varepsilon > 0$ près, pour tout $\varepsilon > 0$, par une application affine par morceaux [cf. Chap. IV].

Remarque : Le Théorème de Weierstraß [Chap. IV] passe tel quel, à quelques remplacements de $|\cdot|$ par $\|\cdot\|$ près, pour des applications à valeurs dans un e.v.n. (vérifiez).

3. ENSEMBLES ÉQUICONTINUS THÉORÈME D'ARZELÀ-ASCOLI

Définition 3.1.

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, et soit $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications $f : E \rightarrow F$.

Une partie H de $\mathcal{F}(E, F)$ est dite **équicontinue en** $u \in E$ si :

$$(3.1) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v \in E, \forall f \in H : d(u, v) \leq \eta \implies \delta(f(u), f(v)) \leq \varepsilon.$$

| H est dite **équicontinue sur** E si elle est équicontinue pour tout $u \in E$.

Commentaires :

1) L'équicontinuité de H en $u \in E$ signifie tout simplement que les éléments de H sont tous continus au point u , MAIS, c'est le point crucial, avec le même $\eta > 0$, qui ne dépend donc que de $\varepsilon > 0$ et de $u \in E$, mais pas de $f \in H$.

2) Au lieu de «équicontinue», on rencontre parfois également *continue*.

Exemple 3.1. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des e.v.n. sur le même corps \mathbb{K} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Une partie H de $\mathcal{L}(E, F)$ est équicontinue (en un point $u \in E$, ou bien sur E , c'est pareil ici) si les normes $\|A\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ des $A \in H$ sont majorées par un même nombre $C > 0$: $\exists C$ réel $> 0, \forall A \in H : \|A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq C$.

Cela revient à dire que H est contenue dans une boule $B(0, C]$ de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemple 3.2. Dans le cadre de la définition, soient $k > 0$ et $\alpha > 0$ donnés. L'ensemble $H_{k, \alpha}$ des applications $f : E \rightarrow F$ höldériennes de constantes k et α , i.e. vérifiant :

$$(3.2) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : \delta(f(u), f(v)) \leq k[d(u, v)]^\alpha$$

est équicontinu sur E ; en effet on voit facilement qu'on peut prendre $\eta = \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^{1/\alpha}$.

Sur ces deux exemples, le $\eta > 0$ non seulement ne dépend pas de $f \in H$, mais ne dépend même pas de $u \in E$! on peut parler dans ce cas de partie *équi-uniformément continue sur* E .

☞ **Exercice 3.1.** (très facile) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ des e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et $f : E \rightarrow F$ une application uniformément continue sur E . Pour tout $a \in E$ on définit $f_a : E \rightarrow F$ par : $f_a(u) = f(u - a)$ pour tout $u \in E$. Démontrez que l'ensemble $A = \{f_a / a \in E\}$ est équicontinu sur E .

Le Théorème suivant, dû à Arzelà et Ascoli, caractérise de manière utile et agréable les parties *précompactes* de l'important espace métrique $C_\infty(K, F)$ où K est un espace métrique *compact*.

Cet espace des applications $K \rightarrow F$ continues sur le compact K , muni de la norme uniforme, est fondamental en analyse. Pour s'en persuader, il n'y a qu'à constater combien souvent intervient $\mathcal{C}([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ dans le présent cours . . .

Il est donc très intéressant de disposer d'un critère commode pour décider si une partie de $C_\infty(K, F)$ est précompacte ou pas.

Il existe des résultats similaires pour tous les autres « grands » espaces de l'Analyse : les L^p par exemple (voir la littérature).

D'autre part ce théorème sert pour démontrer des résultats fondamentaux comme le théorème d'existence des solutions d'équations différentielles de Péano [voir cours de calcul différentiel], le théorème dit « des familles normales de Montel » [cf. un cours sur les fonctions holomorphes], des théorèmes sur la structure des espaces de Distributions [cf. un cours de Maîtrise], etc.

Enfin ce théorème se généralise sous des aspects protéiformes dans la théorie des espaces vectoriels topologiques où il prend tout son poids, qui est grand.

Il vaut le coup !

Théorème 3.1. (d'Arzelà-Ascoli, ou de Ascoli-Arzelà) (FONDAMENTAL)

Soit (K, d) un espace métrique compact, et soit (F, δ) un espace métrique quelconque. On considère l'espace métrique $C_\infty(K_d, F_\delta)$ des applications $f : K \rightarrow F$ continues sur K_d , muni de la distance uniforme $d_\infty(f, g) = \sup_{k \in K} \delta(f(k), g(k))$. Soit H une partie de $C_\infty(K_d, F_\delta)$. On a :

H *précompacte* dans $C_\infty(K, F)$

$\iff \begin{cases} \text{(i) } H \text{ équicontinue sur } K, \text{ ET :} \\ \text{(ii) } \forall k \in K : H(k) = \{f(k) / f \in H\} \text{ est } \mathbf{précompact} \text{ dans } (F, \delta). \end{cases}$

Autre version : Si (F, δ) est un espace métrique *complet*, auquel cas $C_\infty(K_d, F_\delta)$ est complet [cf. Prop. 2.2], on a :

$\| \text{adh}(H) \text{ compacte dans } C_\infty(K, F)$

$\iff \begin{cases} \text{(j) } H \text{ équicontinue sur } K, \text{ ET :} \\ \text{(jj) } \forall k \in K : H(k) \text{ vérifie : } \text{adh}(H(k)) \text{ est } \mathbf{compacte} \text{ dans } (F, \delta). \end{cases}$

Démonstration : Voir partie DÉMONSTRATIONS. ♦

☞ **Exercice 3.2.** Soit $E = C_\infty([a, b], \mathbb{R})$. On se donne $K \in \mathcal{C}([a, b] \times [a, b], \mathbb{R})$, et on définit :

$$\forall f \in E, \forall s \in [a, b] : [A(f)](s) = \int_a^b K(s, t) \cdot f(t) dt.$$

On a [Chap. X, Exemple 2.6] : $A \in \mathcal{L}(E)$. Démontrez que si X est une partie bornée de E , l'adhérence de $A(X)$ est une partie compacte de E (on dit que A est un opérateur *compact*).

4. ESPACES MÉTRIQUES LOCALEMENT COMPACTS

Définition 4.1.

Un espace métrique (E, d) est dit *localement compact* si pour tout $u \in E$ il existe au moins un voisinage V_u de u qui est *compact*.

Rappelons qu'un voisinage de $u \in E$ [resp. de $A \subset E$] est une partie V de E qui contient un ouvert O de (E, d) telle que $u \in O$ [resp. $A \subset O$].

S'il existe un voisinage V_u de u compact, il existe une boule $B(u, \rho[\subset O \subset V_u$, et donc $B(u, \frac{1}{2} \rho] \subset B(u, \rho[\subset V_u$ est compacte comme fermée dans un compact.

Réciproquement, s'il existe une boule $B(u, \sigma]$ compacte, $V_u = B(u, \sigma]$ est un voisinage compact de u . On peut énoncer :

Définition 4.1. bis

Un espace métrique (E, d) est *localement compact* si pour tout $u \in E$ il existe $\rho > 0$ tel que $B(u, \rho]$ est compacte.

☞ cela n'implique nullement que *toutes* les boules fermées de E sont compactes ! Voir Exemple 4.3 ci-dessous.

Exemple 4.1. Dans tout e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$, sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , de dimension *finie*, toutes les boules $B(u, \rho]$ sont compactes. Donc tout e.v.n. de dimension finie est localement compact. En particulier, \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n , munis d'une norme quelconque sont localement compacts. Ce ne sont pas des compacts (car non bornés), sauf $\{0\}$ ($n = 0$).

Exemple 4.2. Si $(E, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. de dimension *infinie*, on sait (cf. Chap. XIII, § 3) qu'il ne peut pas exister de compact possédant un point intérieur, donc aucune boule n'est compacte. *Un e.v.n. de dimension infinie n'est jamais localement compact.*

Exemple 4.3. Soit E un ensemble arbitraire muni de la distance *discrète* δ . On sait que : E compact $\iff E$ est fini. Par contre (E, δ) est toujours localement compact, car $B(u, \frac{1}{2}] = \{u\}$ pour tout $u \in E$, et $\{u\}$ est compact. Notez que les boules fermées ne sont pas toutes compactes si E n'est pas fini : en effet, $B(u, 1] = E$ infini, donc non compact.

Exemple 4.4. Beaucoup d'espaces localement compacts intéressants sont fournis par les *variétés de dimension finie* (surfaces, groupes classiques, etc.). Vous verrez cela dans un cours de géométrie différentielle, en Maîtrise.

Il est clair que la notion d'espace localement compact est *topologique* : si l'on échange la distance d par une distance d' topologiquement équivalente, (E, d) et (E, d') sont simultanément localement compacts ou pas. La notion «passe» telle quelle aux espaces topologiques généraux [Déf. 4.1, et non Déf. 4.1 bis, bien sûr].

Toutefois, comme pour les compacts d'ailleurs, on ne donne en général la définition que pour les espaces topologiques *séparés*.

☞ **Exercice 4.1.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique localement compact, et soit A une partie compacte de E . Démontrez que pour tout voisinage V de A il existe un voisinage compact C de A tel que $C \subset V$.

☞ **Exercice 4.2.** Soit (E, d) un espace métrique localement compact, et soit A une partie de E . Démontrez que si A est un ouvert ou bien un fermé de (E, d) , le sous-espace métrique $(A, d|_{A \times A})$ est localement compact.

Théorème 4.1 (FONDAMENTAL, d'utilisation fréquente)

Soit (E, d) un espace métrique *localement compact*. Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(4.1) (E, d) est séparable,

(4.2) il existe une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de compacts de E telle que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$,

(4.3) il existe une suite d'ouverts $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant :

(4.3.1) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \text{adh}(U_n)$ est compacte,

(4.3.2) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \text{adh}(U_n) \subset U_{n+1}$,

(4.3.3) $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} U_n$.

(U_n) est appelée une *suite exhaustive d'ouverts à adhérence compacte*.

Exemple 4.5. $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(0, n]$ pour (4.2) ; pour (4.3) : $\mathbb{R}^n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B(0, n[$, $\text{adh}(B(0, n]) = B(0, n]$ est compacte, $\text{adh}[B(0, n] = B(0, n] \subset B(0, n + 1[$. Mais, dans un e.m. général, $B(v, n]$ n'est pas obligatoirement compacte, on ne peut donc pas fixer un \hat{u} et considérer $B(\hat{u}, n]$, c'est un peu plus compliqué . .

Démonstration : On va démontrer que (4.3) \implies (4.2) \implies (4.1) \implies (4.3).

(4.3) \implies (4.2) est évident, car $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \text{adh}(U_n)$. ♦

(4.2) \implies (4.1) $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n$ avec K_n compact. Tout espace métrique compact est séparable [Chap. XIII], et donc il existe pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ un $D_n \subset K_n$ qui est partout dense dans K_n .

Posons : $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n$. D est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables. D'autre part,

$K_n = \text{adh}(D_n) \implies E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \text{adh}(D_n) \subset \text{adh}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n) = \text{adh}(D)$
[démontrez, c'est très facile, que $\bigcup_{i \in I} \text{adh}(X_i) \subset \text{adh}(\bigcup_{i \in I} X_i)$]. E contenant une partie dénombrable partout dense est séparable. ♦

(4.1) \implies (4.3) : on suppose que E est séparable : soit $D := \{x_1, x_2, \dots, x_k, \dots\}$ une partie dénombrable et partout dense dans E .

On va prouver d'abord qu'il existe une suite de boules ouvertes B_n recouvrant E et telles que la boule fermée de même centre et même rayon soit compacte.

Soit en effet $u \in E$: il existe $\rho_u > 0$ tel que $B(u, \rho_u]$ est compacte car E est localement compact. Soit m un entier ≥ 1 tel que $m > \frac{2}{\rho_u}$.

Il existe (densité) $x_k \in D$ tel que $d(x_k, u) < \frac{1}{m}$, d'où : $u \in B(x_k, \frac{1}{m}[$.

Montrons que $B(x_k, \frac{1}{m}]$ est compacte ;

$v \in B(x_k, \frac{1}{m}] \implies d(u, v) \leq d(u, x_k) + d(x_k, v) < \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m} < \rho_u$,
d'où : $B(x_k, \frac{1}{m}] \subset B(u, \rho_u[\subset B(u, \rho_u]$; fermée dans un compact, $B(x_k, \frac{1}{m}]$ est compacte.

Avec les boules $B(x_k, \frac{1}{m}[$, où $k, m \in \mathbb{N}^*$, on peut donc constituer une suite $(B_n)_{n \geq 1}$ de boules ouvertes telles que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$ et telles que les boules fermées $B_{f,n}$ sont compactes.

On procède ensuite par récurrence pour construire les U_n satisfaisant à (4.3.1) et (4.3.2). Pour $n = 1$, on prend $U_1 := B_1$; $\text{adh}(U_1) = \text{adh}(B_1) \subset B_{f,1}$ est compacte car fermée dans le compact $B_{f,1}$.

Supposons à présent qu'on a construit U_1, U_2, \dots, U_n satisfaisant à (4.3.1) et (4.3.2). $\text{adh}(U_n)$ étant compact, on peut le recouvrir par une famille finie de boules ouvertes B_{i_1}, \dots, B_{i_p} . On pose : $U_{n+1} := \bigcup_{1 \leq k \leq p} B_{i_k} \cup B_{n+1}$; U_{n+1} est un ouvert comme réunion d'ouverts.

$\text{adh}(U_n) \subset \bigcup_{1 \leq k \leq p} B_{i_k} \subset \bigcup_{1 \leq k \leq p} B_{i_k} \cup B_{n+1} = U_{n+1}$.

$\text{adh}(U_{n+1}) \subset \overline{B_{f,n+1}} \cup \bigcup_{1 \leq k \leq p} \overline{B_{f,i_k}}$, d'où $\text{adh}(U_{n+1})$ est compacte car fermée dans un compact (réunion finie des compacts $B_{f,i}$).

Enfin, $B_n \subset U_n$ pour tout n , puisque $U_n = B_n \cup \dots$, d'où :

$$E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} B_n \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} U_n, \text{ i.e. (4.3.3). } \blacklozenge$$

☞ **Exercice 4.3.** (facile) Démontrez que le sous-espace métrique \mathbb{Q} de \mathbb{R} n'est pas localement compact. Déduisez-en que l'image d'un espace localement compact par une application continue n'est pas nécessairement localement compacte.

DÉMONSTRATIONS

Théorème 1.1.

Le cas $E = \emptyset$, sans intérêt, est écarté partout.

Schéma de la démonstration : (1.1) \implies (1.3) \implies (1.2) \implies (1.1).

(1.1) \implies (1.3). On raisonne par contradiction.

1^{er} point : Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E par des ouverts de (E, d) , et on suppose qu'on ne peut pas extraire de $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de E . E étant précompact, on peut recouvrir E par un nombre fini p_1 de boules ouvertes de rayon $\frac{1}{2}$: $E \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p_1} B(u_j^1, \frac{1}{2}[$, où $u_j^1 \in E$, $1 \leq j \leq p_1$.

Si chacune de ces boules pouvait être recouverte par un nombre fini d'ouverts U_i , il en serait de même pour E , ce qui n'est pas, par hypothèse.

Donc il existe, au moins, une de ces boules : $B_1 = B(u_1, \frac{1}{2}[$ [u_1 est l'un des u_j^1 , $1 \leq j \leq p_1$] qui ne peut pas être recouverte par un nombre fini d'ouverts U_i .

Ensuite, on peut recouvrir E par un nombre fini p_2 de boules de rayon $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$: $E \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p_2} B(u_j^2, \frac{1}{4}[$, $u_j^2 \in E$, $1 \leq j \leq p_2$. Ces boules recouvrant E recouvrent B_1 ; en particulier, certaines de ces boules coupent B_1 . Parmi les boules de rayon $\frac{1}{4}$ coupant B_1 , il en existe au moins une qui ne peut pas être recouverte par un nombre fini d'ouverts U_i : sinon B_1 pourrait être recouverte par un nombre fini de U_i , ce qui n'est pas.

Soit $B_2 = B(u_2, \frac{1}{4}[$, [u_2 est l'un des u_j^2 , $1 \leq j \leq p_2$] une de ces boules qui, donc :

(i) coupe B_1 ($B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$),

(ii) ne peut pas être recouverte par un nombre fini de U_i .

Supposons obtenue $B_n = B(u_n, \frac{1}{2^n}[$ qui, d'une part coupe B_{n-1} et, d'autre part ne peut pas être recouverte par un nombre fini de U_i . On a : $E \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p_{n+1}} B(u_j^{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}[$. Avec le même raisonnement que ci-dessus, parmi ces boules il en existe une au moins qui rencontre B_n et qui ne peut pas être recouverte par un nombre fini de U_i . Soit $B_{n+1} = B(u_{n+1}, \frac{1}{2^{n+1}}[$ cette boule.

On peut continuer indéfiniment ce processus.

2^e point : On va démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des centres des boules B_n est une suite de Cauchy. Soit v un point commun (il existe par construction) aux boules B_n et B_{n+1} , on a :

$$\forall n \geq 1 : d(u_n, u_{n+1}) \leq d(u_n, v) + d(v, u_{n+1}) < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On a donc, pour tout $n \geq 1$, tout $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} d(u_n, u_{n+p}) &\leq d(u_n, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + d(u_{n+(p-1)}, u_{n+p}) \\ &< \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p-2}} = \frac{1}{2^{n-1}} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p-2-(n-1)}} \right] \\ &< \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \times 2 = \frac{1}{2^{n-2}}, \text{ et donc :} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u_{n+p}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-2}} = 0, \text{ indépendamment de } p.$$

3^e point : On vient de prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans (E, d) complet par hypothèse : $(u_n)_n$ converge donc dans (E, d) vers $u \in E$.

$(U_i)_{i \in I}$ recouvre E et donc il existe un indice j au moins dans I tel que $u \in U_j$.

U_j étant ouvert, on peut trouver une boule $B(u, \rho) \subset U_j$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)_n = u$: il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$: $d(u, u_n) < \frac{\rho}{2}$, d'une part, et, d'autre part, il existe $M \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq M$: $\frac{1}{2^n} < \frac{\rho}{2}$.

Soit un $n \geq \max\{N, M\} : v \in B_n = B(u_n, \frac{1}{2^n}[\implies d(v, u_n) < \frac{1}{2^n}$, d'où : $d(v, u) \leq d(v, u_n) + d(u_n, u) < \frac{1}{2^n} + \frac{\rho}{2} < \frac{\rho}{2} + \frac{\rho}{2} = \rho$ et, par conséquent : $B_n \subset B(u, \rho[\subset U_j$ pour ce n choisi.

On arrive à une contradiction puisque B_n ne peut pas être recouverte par un nombre fini de $U_i, i \in I$. Donc : non (1.3) supposée est fautive et (1.3) est vraie. C.Q.F.D. ♦

(1.3) \implies (1.2). Soit $(u_n)_{n \in S}, S \subset \mathbb{N}, S$ infinie, une suite de points de E .

Considérons les ensembles fermés suivants : $F_n = \text{adh}\{u_p / p \in S \text{ et } p \geq n\}$, pour $n \in S$. $F = \bigcap_{n \in S} F_n$ est – on le sait [voir Chap.V] – l'ensemble (fermé comme intersection de fermés) des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in S}$.

On va donc démontrer que $F \neq \emptyset$.

Supposons le contraire, et posons $U_n := E \setminus F_n ; U_n$ est pour tout $n \in S$ une partie ouverte de (E, d) et on a :

$$\bigcup_{n \in S} U_n = \bigcup_{n \in S} (E \setminus F_n) = \bigcup_{n \in S} (\complement_E F_n) = \complement_E (\bigcap_{n \in S} F_n) = E \setminus F = E \setminus \emptyset = E.$$

Donc $(U_n)_{n \in S}$ est un recouvrement ouvert de E . On peut donc, par hypothèse, en extraire un recouvrement fini : soient U_{n_1}, \dots, U_{n_p} tels que $E \subset U_{n_1} \cup U_{n_2} \cup \dots \cup U_{n_p}$ (\subset ou si l'on veut).

On aurait alors :

$$\begin{aligned} \emptyset &= \complement_E E = \complement_E (U_{n_1} \cup U_{n_2} \cup \dots \cup U_{n_p}) = (\complement_E U_{n_1}) \cap \dots \cap (\complement_E U_{n_p}) \\ &= F_{n_1} \cap \dots \cap F_{n_p}, \end{aligned}$$

ce qui est une absurdité, car posant $N = \max\{n_1, \dots, n_p\} : \forall n \geq N : F_n \subset F_{n_k}$ pour $k = 1, \dots, p$, soit : $F_n \subset F_{n_1} \cap \dots \cap F_{n_p} = \emptyset$, et F_n n'est pas vide puisque S est infini. Par conséquent $F = \emptyset$ conduit à une contradiction et on a $F \neq \emptyset$. Q.E.D. ♦

(1.2) \implies (1.1).

1) E est complet : Soit $(u_n)_{n \in S}$ une suite de Cauchy de points de E . D'après l'hypothèse cette suite admet une valeur d'adhérence au moins et donc – d'après la Prop. 1.1, point (iv) du Chap. XI – cette suite converge dans E . E est donc complet. ♦

2) E est précompact : Supposons que E ne soit pas précompact : $\exists \varepsilon > 0, \forall F$ partie finie de $E, \exists u \in E : d(u, F) \geq \varepsilon$.

Construisons par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de la manière suivante : $u_1 \in E$ arbitraire. Prenons $F := \{u_1\} : \exists u \in E$ tel que $d(u, \{u_1\}) \geq \varepsilon$; on prend $u_2 := u$. Prenons $F := \{u_1, u_2\} : \exists v \in E$ tel que $d(v, \{u_1, u_2\}) \geq \varepsilon$; on prend $u_3 := v$. On a donc : $d(u_1, u_2) \geq \varepsilon, d(u_1, u_3) \geq \varepsilon, d(u_2, u_3) \geq \varepsilon$. On continue ainsi ... [écrivez très proprement la récurrence à titre d'entraînement].

Cette suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie par construction :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}^*, p \neq q : d(u_p, u_q) \geq \varepsilon ;$$

donc aucune suite extraite ne peut être une suite de Cauchy, donc aucune suite extraite ne peut être convergente, et donc – par définition – $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne peut pas avoir de valeur d'adhérence.

Cela est contraire à l'hypothèse (1.2), et donc l'hypothèse E non précompact est fautive. E est donc précompact. ♦

E complet et précompact est donc compact, ce qui termine la démonstration du Théorème 1.1. ♦

Théorème 3.1.

1) On suppose H précompact.

(i) $\forall k \in K : H(k) = \{f(k) / f \in H\}$ est précompact dans (F, δ) .

On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon = \{f_1, \dots, f_{p_\varepsilon}\} \subset H, \forall f \in H, \exists j \in \{1, \dots, p_\varepsilon\} :$

$$d_\infty(f, f_j) = d_\infty(f, A_\varepsilon) \leq \varepsilon \quad [d_\infty(f, A_\varepsilon) = \inf_{1 \leq i \leq p_\varepsilon} d_\infty(f, f_i)].$$

$$\forall k \in K : \delta(f(k), f_j(k)) \leq \sup_{h \in K} \delta(f(h), f_j(h)) = d_\infty(f, f_j) \leq \varepsilon.$$

Donc, pour tout $k \in K$ fixé :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon(k) = \{v_1 [= f_1(k)], \dots, v_{p_\varepsilon} [= f_{p_\varepsilon}(k)]\} \subset H(k),$$

$$\forall v \in H(k), \exists j \in \{1, \dots, p_\varepsilon\} : \delta(v, v_j) = \delta(f(k), f_j(k)) \leq \varepsilon,$$

et par conséquent $H(k)$ est précompact. ♦

(ii) H est équicontinue sur E .

Soient $\varepsilon > 0$ et $k \in K$ fixés ; écrivons que les $f_i \in A_\varepsilon \subset H \subset \mathcal{C}(K, F)$, $i = 1, \dots, p_\varepsilon$, sont tous continus en k :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_i > 0, \forall h \in K : d(k, h) \leq \eta_i \implies \delta(f_i(k), f_i(h)) \leq \varepsilon,$$

et soit $\eta = \min\{\eta_1, \dots, \eta_{p_\varepsilon}\}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall h \in K, \forall i \in \{1, \dots, p_\varepsilon\} : d(k, h) \leq \eta \implies \delta(f_i(k), f_i(h)) \leq \varepsilon.$$

Donc, pour tout h tel que $d(k, h) \leq \eta$, on a pour tout $f \in H$:

$$\delta(f(k), f(h)) \leq \delta(f(k), f_j(k)) + \delta(f_j(k), f_j(h)) + \delta(f_j(h), f(h)) \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon,$$

car par (i) les deux termes extrêmes sont $\leq d_\infty(f, f_j) \leq \varepsilon$, et on a prouvé ci-dessus que le terme central est $\leq \varepsilon$. Finalement, H est équicontinue pour tout $k \in K$ fixé, et H est équicontinue sur K . ♦

2) On suppose H équicontinue sur K , et que $H(k)$ est précompact pour tout $k \in K$.

• Écrivons que H est équicontinue pour tout $k \in K$:

$$(1) \forall k \in K, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{k, \varepsilon} > 0, \forall h \in K, \forall f \in H : d(h, k) \leq \eta_{k, \varepsilon}$$

$$\implies \delta(f(h), f(k)) \leq \frac{1}{4}\varepsilon, \text{ soit : } h \in B(k, \eta_{k, \varepsilon}) \implies \delta(f(h), f(k)) \leq \frac{1}{4}\varepsilon.$$

Les boules ouvertes $B(k, \eta_{k, \varepsilon})$ recouvrent K quand k parcourt K ; comme K est compact, on peut écrire :

$$(2) \exists k_1, \dots, \exists k_q \in K : E \subset \bigcup_{1 \leq i \leq q} B(k_i, \eta_{k_i, \varepsilon}).$$

• Ensuite – par hypothèse – pour $i = 1, \dots, q$: $H(k_i)$ est précompact dans (F, δ) .

Par conséquent : $A = H(k_1) \cup H(k_2) \cup \dots \cup H(k_q)$ est précompact dans (F, δ) [Chap. XIII, Prop.2.5]. On peut écrire :

$$(3) \forall \varepsilon > 0, \exists \{w_1, \dots, w_r\} \subset A; A \subset \bigcup_{1 \leq l \leq r} B(w_l, \frac{1}{4}\varepsilon).$$

• Considérons l'ensemble des q -uples (r_1, \dots, r_q) où chaque r_i varie entre 1 et r : il y a un nombre fini de tels q -uples : de façon précise, il y en a r^q [« combinatoire » de D.E.U.G, en principe, sinon raisonnement par récurrence].

Se donner un q -uple quelconque équivaut à se donner une application arbitraire $\chi : \{1, \dots, q\} \rightarrow \{1, \dots, r\}$, le q -uple s'écrivant $(\chi(1), \chi(2), \dots, \chi(q))$.

Considérons alors :

$$(4) H_\chi = \{f \in H / \forall i \in \{1, \dots, q\} : \delta(f(k_i), w_{\chi(i)}) \leq \frac{1}{4}\varepsilon\}.$$

a) On a : $H \subset \bigcup_\chi H_\chi$, $\chi \in \mathcal{F}(\{1, \dots, q\}, \{1, \dots, r\})$, $\text{Card}(\mathcal{F}) = r^q$.

En effet, soit $f \in H$; pour $i = 1, \dots, q$, on a :

$$f(k_i) \in H(k_i) \subset A \subset \bigcup_{1 \leq l \leq r} B(w_l, \frac{1}{4}\varepsilon), \text{ et pour } i \text{ fixé :}$$

$$f(k_i) \in B(w_{l_i}, \frac{1}{4}\varepsilon) \implies \delta(f(k_i), w_{l_i}) \leq \frac{1}{4}\varepsilon, \text{ d'où :}$$

$$f \in H_{(l_1, \dots, l_r)} = H_{(\chi(1), \dots, \chi(r))} \text{ pour un certain } \chi.$$

b) Démontrons que $\text{diam}(H_\chi) \leq \varepsilon$ (diamètre relatif à d_∞).

Soient $f, g \in H_\chi$ arbitraire. $\forall h \in K, \exists j, 1 \leq j \leq q : h \in B(k_j, \eta_{k_j, \varepsilon})$ par (2), d'où par (1) : $\delta(f(h), f(k_j)) \leq \frac{1}{4}\varepsilon$ et, par (1) aussi : $\delta(g(h), g(k_j)) \leq \frac{1}{4}\varepsilon$.

Mais (définition de H_χ) :

$$\delta(f(k_j), g(k_j)) \leq \delta(f(k_j), w_{\chi(j)}) + \delta(w_{\chi(j)}, g(k_j)) \leq \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \frac{1}{2}\varepsilon,$$

d'où, $\forall h \in K$:

$$\begin{aligned} \delta(f(h), g(h)) &\leq \delta(f(h), f(k_j)) + \delta(f(k_j), g(k_j)) + \delta(g(k_j), g(h)) \\ &\leq \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon = \varepsilon, \end{aligned}$$

soit : $d_\infty(f, g) = \sup_{h \in K} \delta(f(h), g(h)) \leq \varepsilon$, et enfin :

$$\text{diam}(H_X) = \sup_{f, g \in H_X} d_\infty(f, g) \leq \varepsilon. \blacklozenge$$

La démonstration du Th. 3.1 est terminée. \blacklozenge

Fin de la partie cours du Chapitre XIV

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ Exercice 1.1.

Du recouvrement $(F_u)_{u \in E}$ de E par les parties fermées $F_u = \{u\}$, on pourrait extraire un recouvrement fini de E par $\{u_1\}, \dots, \{u_n\}$, et donc $E \subset \{u_1, \dots, u_p\}$ serait fini. Les seuls « compacts » seraient les ensembles finis : la notion serait peu intéressante !

Pour $n \geq 1$: $] \frac{1}{n}, 1[$ est un recouvrement ouvert de $]0, 1[$: on ne peut pas en extraire un recouvrement fini $] \frac{1}{n_i}, 1[$, $i = 1, \dots, p$, car si $N = \max_{1 \leq i \leq p} \{n_i\}$ l'intervalle $]0, \frac{1}{N}[$ ne serait pas recouvert.

☞ Exercice 1.2.

On sait qu'une suite uniformément convergente de fonctions continues sur $[0, 1]$ a une limite continue [D.E.U.G, ou $C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ fermé dans $\mathcal{B}_\infty([0, 1], \mathbb{R})$, Chap.IV].

Pour obtenir l'exemple cherché, il suffit de considérer une suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction discontinue en un point au moins.

On prendra par exemple (f_n) définie par :

$$f_n(t) := 0 \text{ pour } t \in [\frac{1}{n}, 1], f_n(t) := -nt + 1 \text{ pour } t \in [0, \frac{1}{n}] \text{ (dessin !)}.$$

$\forall n \geq 1$: $f_n \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, et $\|f_n\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f_n(t)| = f_n(0) = 1$: $f_n \in B_\infty(0, 1]$;

supposons qu'il existe $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $S \subset \mathbb{N}^*$, S infini, tels que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} \|f - f_n\|_\infty = 0.$$

On aurait alors : $|f(t) - f_n(t)| \leq \max_{0 \leq s \leq 1} |f(s) - f_n(s)| = \|f - f_n\|_\infty$ pour tout $t \in [0, 1]$, soit $\forall t \in [0, 1]$: $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} f_n(t) = f(t)$. Or $\forall t \in]0, 1[$, $f_n(t) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq t \implies \lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} f_n(t) = 0$, et $f_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^* \implies \lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} f_n(0) = 1$. La fonction f valant 1 en 0 et 0 pour $t \in]0, 1[$ n'est pas continue sur $[0, 1]$, d'où une contradiction ; aucune suite extraite de (f_n) n'est convergente pour $\|\cdot\|_\infty$. Donc, la boule unité fermée $B_\infty(0, 1]$ de $C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$, qui contient la suite (f_n) n'admettant aucun point adhérent n'est pas compacte.

Remarque : d'après le Th. 2.1 du Chap. XIII, le résultat était prévisible !

Autre remarque : on aurait aussi pu démontrer que la suite (f_n) n'admet aucune suite extraite qui soit de Cauchy (donc aucune suite extraite convergente). En effet : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*$: $\|f_{n+p} - f_n\|_\infty = f_n(\frac{1}{n+p}) = 1 - \frac{n}{n+p}$ (dessin !) : pour n'importe quel choix de n , cette expression ne peut jamais être arbitrairement petite lorsque p est grand. \blacklozenge

☞ Exercice 1.3.

(1.4) \iff (1.5) car $[P \implies Q] \iff [\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)]$. \blacklozenge

(1.3) \implies (1.4) : Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés ayant la propriété d'intersection finie. Si $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$, posant $U_i := E \setminus F_i$, on a :

$$\mathcal{C}_E(\bigcap_I F_i) = \mathcal{C}_E \emptyset = E = \bigcup_I (\mathcal{C}_E F_i) = \bigcup_I U_i,$$

et donc $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E ; d'après (1.3), on peut en extraire un recouvrement fini $(U_j)_{j \in J}$, $J \subset I$, J fini :

$$E = \bigcup_J U_j \implies \mathcal{C}_E E = \emptyset = \mathcal{C}_E(\bigcup_J U_j) = \bigcap_J (\mathcal{C}_E U_j) = \bigcap_J F_j = \bigcap_J F_j :$$

impossible car J fini $\implies \bigcap_J F_j \neq \emptyset$. \blacklozenge

(1.4) \implies (1.3) : Supposons que $(U_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de E et que pour tout $J \subset I$, J fini : $(U_j)_{j \in J}$ n'est pas un recouvrement : $\mathcal{C}_E(\bigcup_J U_j) \neq \emptyset$.

On pose $F_i := E \setminus U_i$, $i \in I$. $\emptyset \neq \bigcup_E (\bigcup_J U_j) = \bigcap_J (\bigcup_E U_j) = \bigcap_J F_j$: les F_i , $i \in I$, possèdent donc la propriété d'intersection finie, d'où, par (1.4) : $\bigcap_I F_i \neq \emptyset$ et $\bigcap_I F_i = \bigcap_I (\bigcup_E U_i) = \bigcup_E (\bigcap_I U_i) = \bigcup_E \emptyset = \emptyset$: contradiction. ♦

Les propriétés (1.3) et (1.4) qui découlent l'une de l'autre par \bigcup_E et les lois de De Morgan sont dites *duales l'une de l'autre*.

Prenons $E := [0, +\infty[$ et $F_n := [n, +\infty[$ pour $n \geq 1$: $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ tandis que pour tout $N \geq 1$: $\bigcap_{n=1}^N F_n = [N, +\infty[\neq \emptyset$. ♦

Démonstration de la propriété de Cantor : Les F_n vérifient la propriété d'intersection finie : en effet pour tout $P \subset \mathbb{N}$, P fini, on a $\bigcap_{n \in P} F_n \neq \emptyset$, car $F_{\max(P)} \neq \emptyset$ et $F_{\max(P)} \subset F_n$ pour tout $n \in P$, puisque la suite est décroissante. Il ne reste plus qu'à appliquer la propriété (1.4) de la Prop. 1.1. ♦

Exercice 1.4. (c'est le Théorème de Dini)

Première démonstration : Supposons, pour fixer les idées, que $(f_n)_n$ est croissante : $\forall u \in E, \forall n \in \mathbb{N} : f_n(u) \leq f_{n+1}(u)$. Remarquons que pour tout $p \geq n$ on a pour tout $u \in E$: $f_n(u) \leq f_p(u)$ et, donc : $f_n(u) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} (f_p(u)) = f(u)$, cela pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe $N(u) \in \mathbb{N}$,

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N(u) \implies |f_n(u) - f(u)| = f(u) - f_n(u) \leq \frac{1}{3}\varepsilon.$$

Les fonctions f et $f_N(u)$ sont continues sur E , donc en u : $\exists \rho_1 = \rho_1(u) > 0, \forall v \in B(u, \rho_1[$: $|f(v) - f(u)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$, et $\exists \rho_2 = \rho_2(u) > 0, \forall v \in B(u, \rho_2[$: $|f_{N(u)}(v) - f_{N(u)}(u)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$.

On prend $\rho_u := \min\{\rho_1, \rho_2\}$; pour $v \in B(u, \rho_u[$: $|f(v) - f(u)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$ et $|f_{N(u)}(v) - f_{N(u)}(u)| \leq \frac{1}{3}\varepsilon$, de telle sorte que : $\forall v \in B(u, \rho_u[$:

$$\begin{aligned} |f(v) - f_{N(u)}(v)| &\leq |f(v) - f(u)| + |f(u) - f_{N(u)}(u)| + |f_{N(u)}(u) - f_{N(u)}(v)| \\ &\leq \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon + \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

$(B(u, \rho_u))_{u \in E}$ constitue un recouvrement ouvert de E compact : on peut en extraire un recouvrement fini $(B(u_i, \rho_{u_i}))_{i=1, \dots, p}$; soit $N = \max_{1 \leq i \leq p} \{N(u_i)\}$.

$\forall u \in E : u \in B(u_k, \rho_{u_k}[$, pour un $k \in \{1, \dots, p\}$ et on a, $\forall n \geq N$:

$$f(u) - f_n(u) \leq f(u) - f_N(u) \text{ [car } (f_n) \text{ croissante]} \leq f(u) - f_{N_k}(u) \leq \varepsilon,$$

et enfin : $\|f - f_n\|_{\infty} = \sup_{u \in E} (f(u) - f_n(u)) \leq \varepsilon$, le résultat. ♦

Seconde démonstration : Supposons encore (f_n) croissante, et soit $\varepsilon > 0$ fixé. Considérons les ensembles :

$$F_n := \{u \in E / f(u) - f_n(u) \geq \varepsilon\}.$$

$F_n = (f - f_n)^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ est, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une partie fermée dans E (f et f_n continues sur E). Il est clair, de plus, puisque (f_n) est croissante, qu'on a pour tout $n \in \mathbb{N} : F_{n+1} \subset F_n$.

Enfin $\bigcap_0^{\infty} F_n = \emptyset$, sinon il existe $\hat{u} \in F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on a : $f(\hat{u}) - f_n(\hat{u}) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est impossible à cause de $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(\hat{u})) = f(\hat{u})$.

Donc, par (1.5), il existe J fini, $J \subset \mathbb{N}$ tel que : $\bigcap_{n \in J} F_n = \emptyset$. Puisque $F_{n+1} \subset F_n$: $\bigcap_J F_n = F_{\max(J)} = \emptyset \implies F_n = \emptyset$ pour tout $n \geq \max(J)$, nombre fini. D'où le résultat, comme ci-dessus. ♦

Contre-exemples :

1) Si E n'est pas compact, $E :=]0, +\infty[$, $f_n(t) := \frac{t}{n+t}$ est décroissante. $\forall t \in E$ fixé : $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$, et (f_n) converge ponctuellement vers la fonction nulle (continue !). Mais la convergence n'est pas uniforme : $\sup_{t \in]0, \infty[} (\frac{t}{n+t} - 0) = 1$. ♦

2) Si (f_n) n'est pas monotone, $E := [0, 1]$, $f_n(t) := 0$ si $\frac{1}{n} \leq t \leq 1$, $f_n(0) := 0$, $f_n(\frac{1}{2n}) := 1$, f_n continue et affine par morceaux. La limite simple est la fonction nulle, la convergence n'est pas uniforme.

3) Si la limite n'est pas continue, $E := [0, 1]$, (f_n) comme dans l'Exercice 1.2. ♦

☞ **Exercice 1.5.**

Soit A compact : de tout recouvrement $(V_i)_{i \in I}$ par des ouverts de $(A, d_{|A \times A})$ on peut extraire un recouvrement fini (définition).

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de A par des ouverts de (E, d) : $W_i := U_i \cap A$ est, pour tout $i \in I$, un ouvert de $(A, d_{|A \times A})$ [voir : relativité des ouverts, Chap. VI], et

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i \implies A = A \cap A \subset A \cap \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap U_i) = \bigcup_{i \in I} W_i.$$

$(W_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de A par des ouverts de A ; on peut donc en extraire un recouvrement fini $(W_j)_{j \in J \subset I}$, J fini, de A .

$A \subset \bigcup_{j \in J} W_j$ et $W_j = A \cap U_j \subset U_j \implies A \subset \bigcup_{j \in J} U_j$. On a extrait de $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini de A , $(U_j)_{j \in J}$, par des ouverts de (E, d) . ♦

Réciproquement, soit $(V_i)_{i \in I}$ un recouvrement de A par des ouverts de $(A, d_{|A \times A})$: $V_i := A \cap O_i$ où les O_i sont des ouverts de (E, d) [cf. Chap. VI], et :

$A \subset \bigcup_{i \in I} (A \cap O_i) = A \cap \left(\bigcup_{i \in I} O_i \right) \implies A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$. On peut extraire du recouvrement $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini $(O_j)_{j \in J \subset I}$, J fini, et on a :

$A \subset \bigcup_{j \in J} O_j \implies A = A \cap A \subset A \cap \left(\bigcup_{j \in J} O_j \right) = \bigcup_{j \in J} (A \cap O_j) = \bigcup_{j \in J} V_j$: $(V_j)_{j \in J}$ est un recouvrement fini de A par des ouverts de $(A, d_{|A \times A})$. ♦

☞ **Exercice 1.6.**

$A := \{u_n / n \in S\} \cup \{u\}$, où $u = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n)$.

1) a) Démontrons que A est précompact.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies u_n \in B(u, \frac{1}{2}\varepsilon).$$

On a donc : $A \subset \{u_{n_1}\} \cup \{u_{n_2}\} \cup \dots \cup \{u_{n_p}\} \cup B(u, \frac{1}{2}\varepsilon)$, où n_k ($1 \leq k \leq p$) parcourt $S \cap \{1, 2, \dots, N-1\}$, et : $\text{diam}\{u_{n_1}\} = \dots = \text{diam}\{u_{n_p}\} = 0 < \varepsilon$, $\text{diam}(B(u, \frac{1}{2}\varepsilon)) \leq \varepsilon$, d'où le résultat. ♦

b) Démontrons que A est complet. Soit $(v_n)_{n \in T}$ une suite de Cauchy de points de A ($T \subset \mathbb{N}$, T infini). Les v_n sont : soit des u_p , $p \in S$, soit u , chacun de ces points pouvant se retrouver – a priori – un nombre fini ou infini de fois dans $(v_n)_{n \in T}$.

Deux points de A distincts : $u_{p_0} \neq u_{q_0}$ ($p_0, q_0 \in S$) où $u_{p_0} \neq u$, $u_{q_0} \neq u$, ne peuvent pas figurer simultanément une infinité de fois dans $(v_n)_{n \in T}$ car, sinon, la suite ne pourrait pas être une suite de Cauchy. Donc, si un terme de A : u_{p_0} , $p_0 \in S$, figure une infinité de fois dans $(v_n)_{n \in T}$, la suite est obligatoirement stationnaire, donc convergente, de limite ce point.

Sinon, au moins à partir d'un certain rang, la suite $(v_n)_{n \in T}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in S}$, à l'ordre des termes près, et à ceci près qu'elle peut contenir des termes égaux à u intercalés en nombre fini ou non : dans ce cas, de toute façon, en utilisant l'Exercice 2.3 du Chap. III, la suite $(v_n)_{n \in T}$ est convergente de limite $u \in A$.

Donc A est complet, et A précompact et complet est compact. ♦

2) Le raisonnement est à peu près le même que ci-dessus, sauf que dans le premier cas envisagé u_{p_0} et u_{q_0} sont deux valeurs d'adhérence distinctes de $(v_n)_{n \in T}$.

Dans le second cas la valeur d'adhérence est la limite u . ♦

3) Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de A . Il existe $\ell \in I$ tel que $u \in U_\ell$ qui est un ouvert : donc il existe $B(u, \rho] \subset U_\ell$.

$$\rho > 0 \text{ étant donné, } \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies u_n \in B(u, \rho] \subset U_\ell.$$

D'autre part u_{n_1}, \dots, u_{n_p} où $\{n_1, \dots, n_p\} = S \cap \{1, \dots, N-1\}$, appartiennent chacun à un U_{i_k} , et on a donc : $A \subset (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_p}) \cup U_\ell$, d'où un recouvrement fini de A par des U_i . ♦

☞ **Exercice 1.7.**

a) Soit $(c_n)_{n \in S}$, $c_n \in A + B$, $c_n := a_n + b_n$, où pour tout $n \in S$: $a_n \in A$ et $b_n \in B$, une suite convergente dans E , de limite $c \in E$.

$(a_n)_{n \in S}$ dans A compact implique qu'il existe $a \in A$ et $T \subset S$, T infini, tels que : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (a_n)_n = a$.

Mais alors :

$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (b_n)_n = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (c_n - a_n)_n = \lim(c_n) - \lim(a_n) = c - a$ existe ;

comme $b_n \in B$ pour tout $n \in T \subset S$, et comme B est un fermé de E : $c - a := b \in B$. D'où : $c = a + b \in A + B$. ♦

Soit $u \neq 0$ dans E , et soient $A := \{u\}$, $B := \{n.u / n \in \mathbb{N}^*\}$: A est un compact de E et B est un fermé de E . $A + B = \{(n+1).u / n \in \mathbb{N}^*\}$ est bien fermé, mais non borné, donc non compact. ♦

b) Si A et B sont compacts, on considère $(c_n)_{n \in S}$, $c_n := a_n + b_n$, $a_n \in A$, $b_n \in B$. A est compact, donc il existe $a \in A$ et $T \subset S$, T infini, tels que $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (a_n) = a$. B est aussi compact, donc il existe $b \in B$ et $R \subset T \subset S$, R infini, tels que $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in R} (b_n) = b$. D'où : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in R} (c_n) = \lim_R (a_n) + \lim_R (b_n) = a + b \in A + B$. $(c_n)_{n \in S}$ a une valeur d'adhérence $c := a + b$, et donc $A + B$ est compact. ♦

c) Dans \mathbb{R} prenons : $A := \{n + \frac{1}{n} / n \geq 2\}$ et $B := \{-n / n \geq 2\}$. Ces deux ensembles sont fermés dans \mathbb{R} (pourquoi ?).

Mais $A + B = \{n + \frac{1}{n} - m / n \text{ et } m \geq 2\}$ contient la suite $(n + \frac{1}{n}) - n = \frac{1}{n}$ qui tend vers $0 \notin A + B$ (car $n, m > 1$). $A + B$ n'est pas fermé dans \mathbb{R} .

Dans \mathbb{R}^2 on prend $A := \{(s, t) / s \geq 0 \text{ et } s.t = 1\}$ et $B := \{(0, t) / t \in \mathbb{R}\}$. Ces deux ensembles sont fermés dans \mathbb{R}^2 ; A est fermé car $A = \{(s, t) / s \geq 0\} \cap \{(s, t) / s.t - 1 = 0\}$ et $\{(s, t) / s.t - 1 = 0\} = \varphi^{-1}(\{0\})$ avec $\varphi(s, t) = s.t - 1$ continue.

Soit $(s, t) + (0, t') \in A + B$: $s \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$, $s.t = 1$, $t' \in \mathbb{R}$. $s > 0$ car si $s = 0$ on ne peut pas avoir $s.t = 1$. Donc : $(s, t) + (s', t') = (s, \frac{1}{s} + t')$ $\in C$, où $C = \{(s, t) / s > 0, t \in \mathbb{R}\}$. Réciproquement :

si $(s, t) \in C$, on peut écrire $(s, t) \in A + B$ car $(s, t) = (s, \frac{1}{s}) + (0, t - \frac{1}{s})$. Donc, $A + B = C$ qui n'est pas un fermé de \mathbb{R}^2 (c'est par contre un ouvert. et donc on peut parfaitement avoir : fermé + fermé = ouvert). ♦

Exercice 1.8.

Supposons A précompact. $\text{adh}(A)$ est fermé dans (E, d) complet, donc est complet ; d'autre part $\text{adh}(A)$ est précompact [Chap. XIII, Prop.2.7] : $\text{adh}(A)$ est donc compact. Soit alors $(a_n)_{n \in S}$ une suite de points de A : $\exists a \in \text{adh}(A)$, $\exists T \subset S$, T infini, tels que : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (a_n) = a$ [Th. 1.2 (1.7)]. Donc $(a_n)_{n \in T}$ est une suite de Cauchy dans $\text{adh}(A)$, donc dans A [Chap. XI, Prop. 1.1]. ♦

Supposons que de toute suite de points de A on puisse extraire une suite de Cauchy, et démontrons que cela entraîne la compacité de $\text{adh}(A)$. Soit $(b_n)_{n \in S}$ une suite de points de $\text{adh}(A)$. $\forall n \in S$, $\exists a_n \in A$ tel que $d(a_n, b_n) \leq \frac{1}{n}$ (A est dense dans $\text{adh}(A)$).

De la suite $(a_n)_{n \in S}$ de points de A on peut extraire $(a_n)_{n \in T}$, $T \subset S$, T infini, qui est une suite de Cauchy ; comme $\text{adh}(A)$ est complet : $(a_n)_{n \in T}$ converge vers $a \in \text{adh}(A)$. Mais : $d(b_n, a) \leq d(b_n, a_n) + d(a_n, a) \leq \frac{1}{n} + d(a_n, a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty, n \in T} 0$.

Par conséquent : de $(b_n)_{n \in S}$ on a extrait une suite convergente dans $\text{adh}(A)$, et $\text{adh}(A)$ est donc compact. D'où : $\text{adh}(A)$ est précompact, et donc également le sous-espace A . ♦

Exercice 1.9.

On va démontrer que pour toute suite $(u_n)_{n \in S}$ de points de E convergente dans (E, d) on a : $(f(u_n))_{n \in S}$ convergente dans (F, δ) [Chap. VII, Th. 1.1].

$(u_n)_{n \in S}$ étant donnée, avec $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n) = u$, on va démontrer que toute suite extraite convergente de $(f(u_n))_{n \in S}$ converge vers une même limite, à savoir $f(u)$, comme de juste. Il ne restera plus qu'à appliquer la Prop. 1.2.

Soit donc $(f(u_n))_{n \in T}$, $T \subset S$, T infini, convergente vers un $v \in F$. La suite de $E \times F$: $(u_n, f(u_n))_{n \in T}$ est donc convergente vers (u, v) dans l'espace métrique produit [muni de d_∞ , par exemple, cf. Chap. IX]. Mais, pour tout $n \in T$: $(u_n, f(u_n)) \in G$, qui est fermé, et donc :

$$(u, v) \in G = \{(w, f(w)) / w \in E\} \implies v = f(u). \quad \blacklozenge$$

Comparez avec l'Exercice 2.2 du Chap. VII.

Exercice 1.10.

On sait que $f(I)$ est précompact [Chap. XIII, Exercice 2.4] ; donc $\text{adh}(f(I))$ l'est aussi [Chap. XIII, Prop.2.7], et $\text{adh}(f(I))$ fermé dans un complet est complet [Chap. XI]. Donc $\text{adh}(f(I))$ est une partie compacte de (E, d) .

On va démontrer que, par exemple : $\lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} f(t)$ existe, ce qui revient à prouver que pour toute suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\tau_n < t_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tau_n) = t_0$, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(\tau_n))_n$ existe [cf. Chap. IX, §3]. D'après la Prop. 1.2, il nous suffit de prouver que $(f(\tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'a qu'une seule valeur d'adhérence : c'est pour pouvoir appliquer cette Prop. qu'on a démontré préalablement que $\text{adh}(f(I))$ est un compact.

Supposons, raisonnement par contradiction, que $(f(\tau_n))_{n \in \mathbb{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence distinctes a et b : il existe S et T parties infinies de \mathbb{N} telles que $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (f(\tau_n)) = a \neq b = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (f(\tau_n))$. Posons $\rho = \frac{1}{3}d(a, b) > 0$. Axiome d'Archimède : il existe N entier > 0 tel que $N\rho > C$ (C est la constante de l'énoncé). $\forall n \in S, n \geq N : f(\tau_n) \in B(a, \rho]$ et $\forall m \in T, m \geq M : f(\tau_m) \in B(b, \rho]$, donc : $d[f(\tau_n), f(\tau_m)] \geq \rho > 0$ si $n \in S, n \geq N$, et $m \in T, m \geq M$.

Il est clair qu'on va appliquer la même méthode que pour prouver que $f(I)$ est précompact dans l'Exercice 2.4 du Chap. XIII. On peut extraire de la suite $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $(\tau_n)_{n \in R}$, $R \subset \mathbb{N}$, R infini, qui est strictement croissante (on garde 0, puis le plus petit indice i tel que $\tau_i > \tau_0$, le plus petit indice j tel que $j > i$ et $\tau_j > \tau_i, \dots$, l'existence étant assurée à chaque fois par la convergence vers t_0 par valeurs strictement inférieures).

C'est sur cette suite extraite strictement croissante qu'on fait le raisonnement expliqué ci-dessus, i.e. qu'on prendra $S \subset R$ et $T \subset R$. On considère à présent la suite construite comme suit, ce qu'il est loisible de faire car S et T sont infinis :

$$\tau_{n_1} (n_1 \in S) < \tau_{n_2} (n_2 \in T) < \tau_{n_3} (n_3 \in S) \\ < \dots < \tau_{n_{2k}} (n_{2k} \in T) < \tau_{n_{2k+1}} (n_{2k+1} \in S) < \dots < t_0,$$

qu'on renumérote : $s_0 < s_1 < s_2 < \dots$ et on applique l'hypothèse faite sur f :

$$\sum_{i=0}^{N-1} d[f(s_{i+1}), f(s_i)] \leq C, \text{ d'une part, et } \geq N\rho \text{ [car } d[f(s_{i+1}), f(s_i)] \geq \rho].$$

Comme $N\rho > C$: contradiction ! ♦

On procéderait bien sûr de même pour la limite à droite.

Les applications $[\alpha, \beta] \rightarrow E$ vérifiant l'inégalité de l'énoncé portent le nom d'*applications à variation bornée* (on voit à peu près pourquoi d'après la définition même). Ces fonctions sont importantes en théorie de l'intégration (intégrale de Stieltjes).

Ce que nous venons de démontrer, c'est que – dans un cadre général – les applications à variation bornée sont des applications *régliées* (i.e. limites dans $\mathcal{B}_\infty([\alpha, \beta], E)$ d'une suite de fonctions en escalier). Mais il faudrait prouver que *f réglée* $\iff \forall t_0 \in [\alpha, \beta] : \lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} f(t)$ et $\lim_{t \rightarrow t_0, t > t_0} f(t)$ existent... Ce qui n'est pas spécialement difficile, mais il faut bien s'arrêter quelque part, même si l'on n'en a pas envie. Les applications à variations bornées définies ici sont bien les mêmes, quand $E = \mathbb{R}$, que celles définies dans le Chap. IV ; cela aussi resterait à prouver...

🔗 Exercice 2.1.

Soit $(v_n)_{n \in S}$ une suite de points de $f(A)$. Pour tout $n \in S$ il existe $u_n \in A$ (pas obligatoirement un seul) tel que $f(u_n) = v_n$. $(u_n)_{n \in S}$ est une suite dans A compact, donc il existe $u \in A$ et $T \subset S$, T infini, tels que : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (u_n) = u$. Puisque f est continue, d'après le Th. 1.1 du Chap. VII, on a : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (f(u_n))_n = f(u)$, soit : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (v_n)_n = f(u) \in f(A)$. Donc, de la suite $(v_n)_{n \in S}$ on a extrait une suite convergente dans $f(A)$, et $f(A)$ est compacte par le Th. 1.2 (1.7). ♦

🔗 Exercice 2.2.

Il suffit de prouver que $f^{-1} : f(E) \rightarrow E$ est continue, ce qui équivaut à : pour toute partie fermée G dans E , on a $(f^{-1})^{-1}(G) = f(G)$ est une partie fermée de $f(E)$.

Mais G fermée dans E compact est compacte [Prop.3.4 du Chap. XIII], et d'après le Th. 2.1 (ou bien l'Exercice ci-dessus) : $f(G)$ est compacte dans $f(E)$, donc fermée dans $f(E)$ [Prop.3.4 du Chap. XIII]. ♦

☞ **Exercice 2.3.**

Soit K le cube de Hilbert sous-espace métrique de $\ell_{\mathbb{R}}^2$, et soit C « l'autre » cube de Hilbert : $[-1, +1]^{\mathbb{N}^*}$, muni de la distance $d[(s_i)_i, (t_i)_i] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{|s_i - t_i|}{1 + |s_i - t_i|}$.

Soit $\varphi : C \rightarrow K$ l'application qui à $u = (s_1, s_2, \dots, s_i, \dots) \in C$ fait correspondre $v = \varphi(u) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots) \in K$, avec $\xi_i = \frac{1}{i} s_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$.

L'application est bien définie, car $\forall i : |\xi_i| = \frac{1}{i} |s_i| \leq \frac{1}{i}$, et $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2$ converge : $\varphi(u) \in K$.

Vérifions que φ est bijective.

$$\begin{aligned} \varphi(u) = \varphi(u') &\iff \varphi(s_1, \dots, s_i, \dots) = \varphi(s'_1, \dots, s'_i, \dots) \\ &\iff \forall i \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{i} s_i = \frac{1}{i} s'_i \iff \forall i \in \mathbb{N}^* : s_i = s'_i \text{ [}\frac{1}{i} \neq 0 \text{!]} \iff u = u' : \end{aligned}$$

donc φ est injective.

Soit $v = (\xi_1, \dots, \xi_i, \dots) \in K$, et posons $s_i = i \cdot \xi_i : |s_i| = i \cdot |\xi_i| \leq i \times \frac{1}{i} = 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, (définition de K !) et donc $u = (s_1, \dots, s_i, \dots) \in C$, et on a :

$$\varphi(u) = \left(\frac{1}{1} \cdot 1 \cdot \xi_1, \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \xi_2, \dots, \frac{1}{i} \cdot i \cdot \xi_i, \dots \right) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots) = v.$$

Donc φ est surjective.

Il est clair que : $\varphi^{-1} : v = (\xi_1, \dots, \xi_i, \dots) \in K \mapsto u = (1 \cdot \xi_1, 2 \cdot \xi_2, \dots, i \cdot \xi_i, \dots) = v \in C$.

D'après le résultat de l'Exercice précédent, si nous démontrons que φ^{-1} est continue, nous aurons terminé, car nous savons que K est compact. Nous aurions pu, d'ailleurs, nous dispenser de prouver que C est compact ; on aurait le résultat maintenant, en prouvant que C et K sont homéomorphes. Mais la démonstration de la compacité de C avait un intérêt pédagogique non négligeable.

Soit $v_0 = (\xi_i^0)_{i \in \mathbb{N}^*}$ quelconque ; on va démontrer que φ^{-1} est continue en v_0 , soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall v \in K : d_{\ell^2}(v, v_0) \leq \eta \implies d_C[\varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(v_0)] \leq \varepsilon, \text{ avec :}$$

$$d_{\ell^2}^2(v, v_0) = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^0|^2 \text{ et } d_C[\varphi^{-1}(v), \varphi^{-1}(v_0)] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{|i \cdot \xi_i - i \cdot \xi_i^0|}{1 + |i \cdot \xi_i - i \cdot \xi_i^0|}.$$

On a, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz relative aux séries :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \times \frac{|i \cdot \xi_i - i \cdot \xi_i^0|}{1 + |i \cdot \xi_i - i \cdot \xi_i^0|} &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i/2^i}{1 + i|\xi_i - \xi_i^0|} \times |\xi_i - \xi_i^0| \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2/2^{2i}}{(1 + i|\xi_i - \xi_i^0|)^2} \right]^{1/2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \xi_i^0|^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^{2i}} \right]^{1/2} \cdot d_{\ell^2}(v, v_0) = M \cdot d_{\ell^2}(v, v_0) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

si l'on prend : $\eta = \frac{\varepsilon}{M}$.

Nota : On a majoré $\frac{1}{(1 + i|\xi_i - \xi_i^0|)^2}$ par 1.

La série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i^2}{2^{2i}}$ qu'on a posé égale à $M^2 > 0$ est bien convergente car (par exemple), on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1 \text{ (j'ai calculé, un jour, que } M = \sqrt{\frac{20}{27}} \text{, mais je ne parierai pas } 10^9 \text{ \$ sur cela...)} \spadesuit$$

Finalement φ^{-1} est continue, et donc φ également d'après l'Exercice précédent : φ est un homéomorphisme de C sur K .

Du point de vue de la topologie générale, C et K sont deux objets identiques, d'où le même nom de « cube de Hilbert » donné à ces deux objets.

☞ **Exercice 2.4.**

a) Puisqu'une isométrie est injective, il suffit de prouver que f est surjective.

On va raisonner par contradiction et supposer que $f(E) \neq E$.

Soit alors $u_1 \in E \setminus f(E) \neq \emptyset$; on définit $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 1$. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$,

$p > q$:

$$\begin{aligned} d(u_p, u_q) &= d[f(u_{p-1}), f(u_{q-1})] = d(u_{p-1}, u_{q-1}) = d[f(u_{p-2}), f(u_{q-2})] \\ &= d(u_{p-2}, u_{q-2}) = \dots = d(u_{p-(q-1)}, u_1) = d[f(u_{p-q}), u_1]. \end{aligned}$$

E étant compact, $f(E)$ l'est aussi car f est continue sur E (isométrie), d'après le Th. 2.1. Donc $f(E)$ est fermé dans E [Prop. 3.4 du Chap. XIII], et $u_1 \notin f(E)$ donne $d(u_1, f(E)) = \alpha > 0$ [on sait que $d(u_1, f(E)) = 0 \iff u_1 \in \text{adh}(f(E)) = f(E)$: Chap. II]. Comme $f(u_{p-q}) \in f(E)$: $0 < \alpha \leq d[f(u_{p-q}), u_1]$ et, par conséquent : $d(u_p, u_q) \geq \alpha > 0$.

Donc, de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ on ne peut extraire aucune suite de Cauchy, et par conséquent, aucune suite convergente. Cela est en contradiction avec le fait que E est compact [Th. 1.1 (1.2)]. Donc $f(E) = E$, et f est bien surjective. ♦

b) $E = \mathbb{R}^n$ euclidien, par exemple, mais tout marche aussi bien avec $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. de dimension finie.

Soit x un point fixe de $f : x = f(x)$, et soit $B = B(x, \rho)$ une boule fermée de rayon ρ arbitraire. Soit $v \in B$: $d[f(v), x] = d[f(v), f(x)] = d(v, x) \leq \rho$, et donc, $f(v) \in B$. Donc, f applique le compact B dans lui-même, et par conséquent, d'après a) : f est un homéomorphisme de B sur B .

Soit à présent $u \in \mathbb{R}^n$ arbitraire ; on considère $B_u = B(x, d(x, u) + 1)$ qui contient u . D'après ce qui précède, il existe un antécédent u' de u dans B_u , soit $u' \in B_u$, tel que $f(u') = u$. f est donc surjective. ♦

Par exemple, toute application linéaire $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ possède un point fixe, puisque $A(0) = 0$. Donc les *isométries linéaires* $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont toutes *surjectives*.

Ce résultat est faux si l'on remplace \mathbb{R}^n par un e.v.n. de dimension infinie, comme le prouve l'exemple simple suivant.

c) Soit $f : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ définie ainsi :

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots).$$

f est une application *linéaire* (évident), *non surjective* puisque les suites de la forme $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ avec $\xi_1 \neq 0$ ne peuvent manifestement pas avoir d'antécédent.

$[\ell^\infty = f(\ell^\infty) \oplus [e_1]$, où $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$].

f est *isométrique* :

$$\begin{aligned} \|f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)\|_\infty &= \|(0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |\xi_n| \\ &= \|(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)\|_\infty. \end{aligned}$$

Exercice 2.5.

a) Soient u et v arbitraires dans E ; on pose : $u_1 = f(u)$, $v_1 = f(v)$, $u_{n+1} = f(u_n)$, $v_{n+1} = f(v_n)$ pour $n \geq 1$.

$(u_n)_n$ suite de points d'un espace métrique compact admet une valeur d'adhérence $u \in E$, i.e. qu'il existe $S \subset \mathbb{N}^*$, S infini, tel que : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n) = u$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} d(u, u_k) &\leq d[f(u), f(u_k)] = d(u_1, u_{k+1}) \leq d[f(u_1), f(u_{k+1})] = d(u_2, u_{k+2}) \\ &\leq \dots \leq d(u_{n-1}, u_{n+k-1}) \leq d[f(u_{n-1}), f(u_{n+k-1})] = d(u_n, u_{n+k}) \\ &\leq d(u_n, u) + d(u, u_{n+k}). \end{aligned}$$

Mais : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in S, \forall n \in S : n \geq N \implies d(u_n, u) \leq \frac{1}{2}\varepsilon$, d'où :

$$d(u, u_k) \leq d(u_n, u) + d(u, u_{n+k}) \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon, \text{ pour tout } n \in S \text{ avec } n \geq N, \text{ et tout } k \text{ tel que } n+k \in S.$$

Considérons maintenant $(v_n)_{n \in S}$: il existe (E compact) $T \subset S$, T infini, et $v \in E$, tels que : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (v_n) = v$, soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in T, \forall n \in T : n \geq M \implies d(v_n, v) \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

D'autre part, exactement comme ci-dessus avec u_n et u : $d(v, v_k) \leq d(v_n, v) + d(v, v_{n+k}) \leq \varepsilon$ pour tout $n \in T$, $n \geq M$ et tout k tel que $n+k \in T$.

Par conséquent, pour tout $n \in T$, $n \geq \max\{N, M\}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+k \in T$, on a les deux inégalités établies ci-dessus à la fois. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $m = m_\varepsilon$ (dépendant bien sûr aussi de u et v) tel que : $d(u, u_m) \leq \varepsilon$ et $d(v, v_m) \leq \varepsilon$. ♦

Remarquons que, du raisonnement effectué au début, on déduit aisément que $f(E)$ est partout dense dans E : soit en effet $u \in E$ et $\varepsilon > 0$ arbitraires ; il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $d(u, u_m) \leq \varepsilon$ et $u_m = f(u_{m-1}) \in f(E)$, d'où ce résultat utile plus loin. ♦

A présent, pour tous $u, v \in E$, et pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} d[f(u), f(v)] &= d(u_1, v_1) \leq d[f(u_1), f(v_1)] = d(u_2, v_2) \leq \dots \leq d(u_{m_\varepsilon}, v_{m_\varepsilon}) \\ &\leq d(u_{m_\varepsilon}, u) + d(u, v) + d(v, v_{m_\varepsilon}) \leq \varepsilon + d(u, v) + \varepsilon = d(u, v) + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui implique (ε arbitraire) : $d[f(u), f(v)] \leq d(u, v)$, et donc avec l'inégalité de départ :

$d[f(u), f(v)] = d(u, v)$. f est donc bien une isométrie de E dans E . ♦

b) On pourrait maintenant utiliser l'Exercice 2.6, mais c'est inutile car : $f(E)$ est partout dense, et, f étant continue sur E (isométrie) on a : $f(E)$ est compact dans E , donc fermé dans E ; par conséquent, $\text{adh}(f(E)) = E = f(E)$: f est bien surjective.

Une isométrie surjective de E sur E est clairement un homéomorphisme de E sur lui-même. ♦

Exercice 2.6.

On a toujours, sans hypothèse sur f , $F_n : f(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n)$; en effet :

$v \in f(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) \implies v = f(u)$ avec $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in F_n$, donc

$f(u) \in f(F_n)$, et donc : $f(u) = v \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n)$. ♦

Si E est compact et $(F_n)_n$ décroissante [$\forall n \in \mathbb{N}^* : F_{n+1} \subset F_n$], avec $\forall n \in \mathbb{N}^* : F_n \neq \emptyset$, on sait [cf. Exercice 1.3] que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$, et donc (pour f quelconque) :

$f(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) \neq \emptyset$ est contenu dans $\bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n)$ qui est $\neq \emptyset$ par conséquent.

Soit, à présent, $v \in \bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n) \neq \emptyset$. On veut démontrer que $v \in f(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n)$,

c'est-à-dire : $v = f(u)$ avec $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^* : v \in f(F_n)$, soit $v = f(u_n)$ avec $u_n \in F_n$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dans E compact admet [Th. 1.2 (1.7)] une valeur d'adhérence $u \in E$: il existe $S \subset \mathbb{N}^*$, S infini, tel que : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n)_n = u$. f étant continue : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (f(u_n))_n = f(u)$, et $f(u) = v$ puisque $f(u_n) = v$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Si l'on démontre que $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, on a fini.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé. Pour tout $n \geq p$ on a $-(F_n)$ étant décroissante $- u_n \in F_p$, en particulier pour tout $n \in S$, et puisque F_p est fermé : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n)_n = u \in F_p$.

Cela pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, d'où : $u \in \bigcap_{p=1}^{\infty} F_p$, et le résultat. ♦

Si E n'est pas compact, on trouve facilement un contre-exemple :

$E := [1, +\infty[$, $F_n := [n, +\infty[$, $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto c$ (fonction constante égale à c). $F_n \neq \emptyset$ et (F_n) est décroissante, f est continue. $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$, et $f(\emptyset) = \emptyset$, tandis que $f(F_n) = \{c\}$ et $\bigcap_{n=1}^{\infty} f(F_n) = \{c\} \neq \emptyset$. ♦

Exercice 2.7.

D'après le Th. 2.2 on a : il existe $a \in E$ tel que $\inf_{u \in E} f(u) = \min_{u \in E} f(u) = f(a) > 0$. Posons $\alpha = f(a)$; on a : $\forall u \in E : f(u) \geq \alpha > 0$. ♦

On peut donner comme contre-exemple :

$E := [1, +\infty[$ et $f(t) := \frac{1}{t} > 0$ pour tout $t \in E$; mais : $\inf_{t \in E} f(t) = 0$. ♦

Exercice 2.8.

a) Prenons $(u_n)_{n \in S}$ une suite de points de F convergente de limite u dans E : $f(u_n) = u_n$ pour tout $n \in S$; comme f est continue sur E :

$$\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (f(u_n))_n = f(u),$$

et donc : $f(u) = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n)_n = u$. Donc $u \in F$ qui est fermé dans E . ♦

b) Posons : $h(u) = d[u, f(u)]$: $h \geq 0$ et $-$ puisque $F = \emptyset$, i.e. $f(u) \neq u$ pour tout $u \in E$ $-$ on a : $h(u) > 0$ sur E compact. h composition d'applications continues est continue sur E , et donc, en appliquant l'Exercice précédent : $\exists \alpha > 0$ tel que : $h(u) = d[u, f(u)] \geq \alpha > 0$. ♦

☞ **Exercice 2.9.**

a) Posons : $h(u) := \left| \frac{g(u)}{f(u)} \right|$ pour $u \in S = S(0, 1) = \{u \in E / \|u\| = 1\}$.

f ne s'annulant pas sur S , la fonction h est continue sur S [en fait, elle est continue sur $E \setminus \{0\}$]. Comme $\dim(E) < \infty$, la sphère S est compacte (comme fermé borné), et donc h atteint effectivement ses bornes inférieure et supérieure sur S :

$$\exists u_0 \in S \text{ et } \exists u_1 \in S \text{ tels que : } \inf_{u \in S} h(u) = h(u_0) = \min_{u \in S} h(u) \\ \text{et : } \sup_{u \in S} h(u) = h(u_1) = \max_{u \in S} h(u).$$

$h(u_0) > 0$ car $g(u_0) \neq 0$: on pose $c := h(u_0)$ et $C := h(u_1)$.

On a donc pour tout $u \in S$: $c \leq h(u) \leq C$, soit : $c|f(u)| \leq |g(u)| \leq C|f(u)|$.

Pour $u = 0$: $f(0.u) = f(0) = 0^\alpha \cdot f(u) = 0$, de même pour g : la double inégalité subsiste pour $u = 0$.

Pour tout $u \in E \setminus \{0\}$: $\frac{u}{\|u\|} \in S$ et, donc : $c|f(\frac{u}{\|u\|})| \leq |g(\frac{u}{\|u\|})| \leq C|f(\frac{u}{\|u\|})|$, d'où :
 $c \left| \frac{1}{\|u\|^\alpha} f(u) \right| \leq \left| \frac{1}{\|u\|^\alpha} g(u) \right| \leq C \left| \frac{1}{\|u\|^\alpha} f(u) \right|$
 $\implies c|f(u)| \leq |g(u)| \leq C|f(u)|$ pour tout $u \in E \setminus \{0\}$.

Finalement, l'inégalité est valide pour tout $u \in E$. ♦

Application : On prend $f(u) := \|u\|$ et $g(u) := \| \|u\| \|$ deux normes quelconques sur E . Les propriétés sont vérifiées avec $\alpha = 1$. On retrouve le fait fondamental que, sur un e.v.n. de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. ♦

b) On définit sur \mathbb{K}^p les fonctions : $f(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \sum_{i=1}^p |\lambda_i|^2$ (carré de la norme euclidienne sur \mathbb{K}^p), et $g(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i \cdot u_i \right\|^2$; le résultat cherché est une simple application de a) avec $\alpha = 2$ (les propriétés de f et g sont vérifiées). ♦

c) (ii) est vérifiée, sinon pour un $u \neq 0$ on a $A(u) = 0$ et $(A(u)|u) = (0|u) = 0 \implies u = 0$. On applique a) aux fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}$: $f(u) := \|u\|^2$ et $g(u) := (A(u)|u)$; g est continue comme composée d'applications qui le sont, et :

$$\forall \lambda \geq 0 : g(\lambda.u) = (A(\lambda.u)|\lambda.u) = \lambda(A(u)|u) = \lambda^2 g(u) :$$

$\alpha = 2$ pour f et g . ♦

Exemple : $A \in \mathcal{L}(E)$. ♦

En dimension infinie, ce résultat est faux. Prenons $E = \ell_{\mathbb{R}}^2$ et $A \in \mathcal{L}(E)$ définie par : $A(u) = A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots) = (\frac{1}{1}\xi_1, \frac{1}{2}\xi_2, \frac{1}{3}\xi_3, \dots, \frac{1}{n}\xi_n, \dots)$.

On a : $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$ [Exercice 1.1 du Chap. X].

$$(A(u)|u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \xi_n \cdot \xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \xi_n^2 > 0 \text{ pour } u \neq 0.$$

Mais on n'a pas $(A(u)|u) \geq \alpha \|u\|^2$ pour un $\alpha > 0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \xi_n^2 \geq \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$ entraînerait : $\frac{1}{n} \geq \alpha > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: c'est impossible. ♦

☞ **Exercice 2.10.**

Ecrivons (1) et (2) [pour un e.v.n. quelconque] :

(1) $\forall u \in E, \forall v \in E : \|u\| = \|v\| = 1 \text{ et } u \neq v \implies \|\frac{1}{2}(u+v)\| < 1$,

(2) $\forall \varepsilon \in]0, 2], \exists \alpha_\varepsilon > 0, \forall u \in E, \forall v \in E : \|u\| = \|v\| = 1 \text{ et } \|u-v\| \geq \varepsilon \implies \|\frac{1}{2}(u+v)\| \leq 1 - \alpha_\varepsilon$.

Nous appellerons (1) propriété de *stricte convexité*, (SC), et (2) propriété de *convexité uniforme*, (UC).

Notons que $\|u\| = \|v\| = 1 \implies \|u-v\| \leq \|u\| + \|v\| = 2$, et $\|u - (-u)\| = 2$: cela pour expliquer $]0, 2]$ dans (2).

Notons aussi que $u \neq v$ peut s'écrire $\|u-v\| > 0$, ou $\|u-v\| \geq \varepsilon > 0$. et que $\|\frac{1}{2}(u+v)\| < 1$ peut s'écrire $\|\frac{1}{2}(u+v)\| \leq 1 - \alpha$, où $\alpha > 0$.

Après ces remarques triviales, (1) ressemble pas mal à (2) ...

Notons $S = S(0, 1)$ la sphère unité de E , et réécrivons (1) et (2) sous la forme :

(SC) $\forall \varepsilon \in]0, 2], \forall (u, v) \in S \times S, \exists \alpha = \alpha_{u,v,\varepsilon} > 0 :$

$$\|u-v\| \geq \varepsilon \implies \|\frac{1}{2}(u+v)\| \leq 1 - \alpha_{u,v,\varepsilon},$$

$$(UC) \quad \forall \varepsilon \in]0, 2], \exists \alpha = \alpha_\varepsilon, \forall (u, v) \in S \times S : \\ \|u - v\| \geq \varepsilon \implies \|\frac{1}{2}(u + v)\| \leq 1 - \alpha_\varepsilon.$$

Il est bien clair, avec cette nouvelle écriture, que (UC) \implies (SC) : (UC) est « uniforme » par rapport à u et v , c'est une propriété *a priori* plus exigeante (*a posteriori* aussi d'ailleurs !). Remarquons qu'il est possible d'envisager une propriété intermédiaire :

$$(LUC) \quad \forall \varepsilon \in]0, 2], \forall u \in S, \exists \alpha_{u,\varepsilon} > 0, \forall v \in S : \\ \|u - v\| \geq \varepsilon \implies \|\frac{1}{2}(u + v)\| \leq 1 - \alpha_{u,\varepsilon}.$$

(L pour « localement », cette notion est distincte des deux autres). Toutes ces notions relèvent de la géométrie des e.v.n, qui étudie la « forme » des boules et son incidence sur les propriétés des e.v.n. ♦

Après cet encart publicitaire (gratuit) au bénéfice des géomètres des e.v.n, revenons à notre exercice. (1) implique clairement que ne sont pas (SC) les e.v.n. qui contiennent un segment sur leur sphère unité, puisque dans ce cas on a $u, v \in S$ et $\frac{1}{2}(u + v) \in S$ (milieu du segment). Ainsi $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ et $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ ne sont pas (SC) [dessin !]. ℓ^1, ℓ^∞ (et L^1, L^∞) ne sont pas (SC) ; c_0 et $c, C_\infty(K, F)$ (K compact) non plus. Par contre, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ est (SC) pour $p \in]1, \infty[$, de même pour ℓ^p et L^p .

Le cas préhilbertien (réel pour simplifier) est facile à régler : on va prouver que $(E, (\cdot|\cdot))$ préhilbertien réel est (UC) quelle que soit sa dimension.

On part de l'identité du parallélogramme [Chap. II, (5. 9. 1)] :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 = 4 \text{ pour } u, v \in S \\ \implies \|\frac{1}{2}(u + v)\|^2 = 1 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2 \implies \|\frac{1}{2}(u + v)\| \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2}.$$

$$\text{Si } \|u - v\| \geq \varepsilon : \|\frac{1}{2}(u + v)\| \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2} = 1 - [1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}] ; \text{ donc :} \\ \alpha_\varepsilon = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}.$$

C'est la meilleure constante possible (on a procédé par équivalences).

Notons que ce sont les valeurs « petites » de ε qui sont intéressantes ; pour $\varepsilon \ll 1$ on a :

$$\alpha_\varepsilon \simeq 1 - (1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\varepsilon^2) = \frac{1}{8}\varepsilon^2. \quad \blacklozenge$$

Démontrons que si $\dim(E) < \infty$ on a :

$$(1) \iff (2), \text{ i.e. } (SC) \iff (UC), \text{ soit } (SC) \implies (UC).$$

Remarquons que $(u, v) \in S \times S, u \neq v$ peut s'écrire $(u, v) \notin \Delta$, où :

$\Delta := \{(w, w) / w \in S\}$ est la diagonale de $S \times S$; et $\|u - v\| \geq \varepsilon$ signifie que (u, v) n'appartient pas à la « diagonale épaissie » $\Delta_\varepsilon := \{(u, v) \in S \times S / \|u - v\| < \varepsilon\}$.

Soit $\varphi : S \times S \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \varphi(u, v) = \|u - v\|$; φ est continue car :

$$\| \|u - v\| - \|u_0 - v_0\| \| \leq \|u - v - (u_0 - v_0)\| \leq \|u - u_0\| + \|v - v_0\| \\ \leq 2 \max\{\|u - u_0\|, \|v - v_0\|\}.$$

Donc $\Delta_\varepsilon = \varphi^{-1}(]-\infty, \varepsilon])$ est un ouvert de $S \times S$. Son complémentaire dans $S \times S$: $D_\varepsilon := \{(u, v) \in S \times S / \|u - v\| \geq \varepsilon\}$ est fermé dans $S \times S$; comme $S \times S$ est compact (S est compacte car $\dim(E) < \infty$) : D_ε est compact.

Soit à présent $f : D_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(u, v) := 1 - \|\frac{1}{2}(u + v)\|$; $f(u, v) > 0$ sur D_ε par (1), et donc il existe (f continue, Th. 2.2) $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in D_\varepsilon$ tel que $\inf_{(u,v) \in D_\varepsilon} f(u, v) = f(u_\varepsilon, v_\varepsilon) > 0$. On pose : $\alpha_\varepsilon := f(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$.

$$\forall (u, v) \in D_\varepsilon : f(u, v) \geq \alpha_\varepsilon, \text{ soit } 1 - \|\frac{1}{2}(u + v)\| \geq \alpha_\varepsilon > 0.$$

Le résultat (SC) \implies (UC) lorsque $\dim(E) < \infty$ est démontré. ♦

Exercice 2.11.

Propriété (I)

Dans (v) la réponse est NON. Il suffit de considérer l'exemple simple :

$A := \{(s, t) / s \geq 1, t \geq 0, s.t = 1\}$ et $B := \{(s, 0) / s \geq 1\}$ [dessin !].

A et B sont fermés dans \mathbb{R}^2 euclidien ; $(s, t) \in A \cap B \iff t = 0, s \geq 1, s.t = 1$, impossible, donc $A \cap B = \emptyset$.

$$\forall n \geq 1 : \alpha \leq d[(n, \frac{1}{n}), (n, 0)] = \sqrt{(n - n)^2 + (\frac{1}{n} - 0)^2} = \frac{1}{n} \implies \alpha = 0. \quad \blacklozenge$$

Considérons maintenant le cas (iv) : A compacte, B fermée, $A \cap B = \emptyset$. $\forall a \in A : d(a, B) > 0$, sinon [Chap. I] $a \in \text{adh}(B) = B$, impossible puisque $A \cap B = \emptyset$.

Soit $f : A \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto f(a) = d(a, B)$.

f est continue sur A car $|f(a) - f(a')| = |d(a, B) - d(a', B)| \leq d(a, a')$ [Chap. II]. A est compact et f est > 0 sur A , donc, d'après l'Exercice 2.7, il existe $\beta > 0$ tel que $f(a) \geq \beta > 0$ pour tout $a \in A$.

Par conséquent : $\inf_{a \in A} f(a) = \inf_{a \in A} d(a, B) = d(A, B) = \alpha \geq \beta > 0$. ♦

La réponse à (1) est donc OUI dans les cas (i),(ii),(iii),(iv).

Propriété (2)

Cas (i). Considérons $g : B \rightarrow \mathbb{R}, b \mapsto g(b) = d(a, b)$; g est continue sur B car $|g(b) - g(b')| = |d(a, b) - d(a, b')| \leq d(b, b')$. Puisque B est compact, il existe d'après le Th. 2.2 un $\underline{b} \in B$ tel que $\inf_{b \in B} g(b) = \min_{b \in B} g(b) = g(\underline{b})$.

Et : $\inf_{b \in B} g(b) = \inf_{b \in B} d(a, b) = d(a, B) = d(\{a\}, B) = d(A, B) = \alpha = d(a, \underline{b})$.

La réponse à (2) dans le cas (i) est donc OUI. ♦

Cas (iii). On reprend la fonction f définie ci-dessus : $f(a) = d(a, B)$ qui est continue sur le compact A . Donc il existe $\hat{a} \in A$ tel que

$$\inf_{a \in A} f(a) = \min_{a \in A} f(a) = f(\hat{a}) = d(\hat{a}, B).$$

$\hat{a} \notin B$ puisque $A \cap B = \emptyset$.

Maintenant, d'après le cas (i), il existe $\underline{b} \in B$ tel que $d(\hat{a}, B) = d(\hat{a}, \underline{b}) = \alpha$.

Finalement, la réponse est OUI pour (2) dans le cas (iii). Le cas (i) en est un cas particulier, quand $A = \{a\}$. ♦

Cas (ii). La réponse à (2) est NON, ce qui n'est pas évident : on trouvera un très joli exemple dans le Chap. XVII. Voici un autre exemple plus simple.

Dans $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, on considère les suites $u_n = (0, 0, \dots, 0, 1 + \frac{1}{n}, 0, \dots)$, $n \geq 1$, et on pose :

$$A := \{u_n / n \geq 1\}. \|u_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n} \leq 2 : A \text{ est borné car } A \subset B(0, 2).$$

A est fermé car constitué seulement de points isolés ; en effet : $\forall p, q \geq 1, p < q :$

$$\|u_p - u_q\|_\infty = \|(0, \dots, 0, 1 + \frac{1}{p}, 0, \dots, 0, -(1 + \frac{1}{q}), 0, \dots)\|_\infty = 1 + \frac{1}{p} > 1 \text{ (on ne peut extraire de } A \text{ aucune suite de Cauchy, donc aucune suite convergente).}$$

Calculons, pour $0 = (0, \dots, 0, \dots) :$

$$d(0, A) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \|0 - u_n\|_\infty = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \|u_n\|_\infty = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \{1 + \frac{1}{n}\} = 1.$$

Mais il n'existe pas de suite u_n telle que $1 = \|0 - u_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$.

D'où le contre-exemple cherché. ♦

Cas (iv). La réponse à (2) est NON, car le résultat est déjà faux pour $A = \{a\}$.

A fortiori la réponse à (2) est NON dans le cas (v). ♦

Consignons les résultats obtenus dans un tableau où A et B désignent des fermés non vides d'intersection vide :

	(1) $d(A, B) > 0$	(2) $d(A, B) = d(a, b)$
(i) $A = \{a\}, B$ compact	OUI	OUI
(ii) $A = \{a\}, B$ fermé	OUI	NON
(iii) A compact, B fermé	OUI	OUI
(iv) A compact, B fermé	OUI	NON
(v) A fermé, B fermé	NON	NON

Cas où E est un e.v.n. de dimension finie.

On va démontrer dans cette situation que la réponse à (2) est OUI dans le cas (iv), et donc dans tous les cas, sauf (v).

Considérons les ensembles suivants, qui sont des «élargissements de A » [faire un dessin] :

$$\forall \rho > 0 : V_\rho(A) = \{u \in E / d(u, A) \leq \rho\}.$$

Si $u \in A : d(u, A) = 0$ et, donc : $A \subset V_\rho(A)$ ($V_\rho(A)$ est la boule fermée généralisée $B(A, \rho)$).

Soit $h : E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto h(u) = d(u, A)$; c'est une fonction continue (contractante !). On a : $V_\rho(A) = h^{-1}([0, \rho])$ qui est donc fermé. Dès que A est borné, il en est de même de $V_\rho(A)$; en

effet si $u, v \in V_\rho(A) : d(u, A) \leq \rho, d(v, A) \leq \rho$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $u_\varepsilon \in A, v_\varepsilon \in A$ tels que : $\|u - u_\varepsilon\| \leq d(u, A) + \varepsilon \leq \rho + \varepsilon, \|v - v_\varepsilon\| \leq d(v, A) + \varepsilon \leq \rho + \varepsilon$.

D'où : $d(u, v) \leq d(u, u_\varepsilon) + d(u_\varepsilon, v_\varepsilon) + d(v_\varepsilon, v) \leq \rho + \varepsilon + \text{diam}(A) + \rho + \varepsilon < \infty$.

Par conséquent, $V_\rho(A)$ est une partie compacte de E .

Remarque : Si $\dim(E) = \infty$, pour tout $\sigma < \rho : h^{-1}([0, \sigma]) \subset V_\rho(A)$ est un ouvert, et donc $V_\rho(A)$ qui possède des points intérieurs ne peut pas être compact [cf. Chap. XIII].

Prenons $\rho = d(A, B) + 1 = \alpha + 1$. $B \cap V_\rho(A) \neq \emptyset$, sinon $d(A, B)$ ne serait pas la distance de A à B . B fermé dans E et $V_\rho(A)$ fermé dans $E \implies B \cap V_\rho(A)$ est fermé dans E , donc dans $V_\rho(A)$, et, fermé dans le compact $V_\rho(A)$, c'est une partie compacte (de E , ou de $V_\rho(A)$, c'est pareil).

Soit à présent $b \in B$ tel que $b \notin V_\rho(A) : d(b, A) > d(A, B) + 1 > d(A, B)$, implique : $\alpha = d(A, B) = \inf_{b \in B} d(b, A) = \inf_{b \in B \cap V_\rho(A)} d(b, A)$: on est ainsi ramené au cas (iii). Donc la réponse à (2) est OUI pour (iv). ♦

Cas particulier : $\dim(E)$ est quelconque, mais B fermée est contenue dans F sous-espace de dimension finie de E , et on considère le cas (ii).

Soit $a \in E$ arbitraire. le raisonnement est le même que ci-dessus en considérant :

$$B \cap B(a, d(a, B) + 1) =: C \subset F.$$

C est compacte dans F , donc aussi dans E , et $d(a, B) = d(a, C)$, on conclut par (i). La réponse à (2) est OUI.

Une autre méthode aurait consisté à se placer dans le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par F et a , et à conclure par le cas $\dim(E) < \infty$. ♦

Remarque : On a des contre-exemples très simples en prenant pour espace métrique \mathbb{Q} muni de la distance induite par \mathbb{R} usuel.

(1), cas (i) : on prend $A :=]-\infty, \sqrt{2}[$ et $B :=]\sqrt{2}, +\infty[$; ce sont des parties fermées de \mathbb{Q} ($A =]-\infty, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$), telles que $A \cap B = \emptyset$; mais on a $d(A, B) = 0$.

(2), cas (ii) : $A := \{0\}$ et $B :=]\sqrt{2}, +\infty[$ sont des parties fermées de \mathbb{Q} . $d(0, B) = \sqrt{2}$, mais pour tout $t \in B$ on a : $d(0, t) = t > \sqrt{2}$.

Les exemples donnés dans le corrigé sont plus compliqués, mais ils se situent dans des e.v.n. (\mathbb{R}^2 et ℓ^∞) **complets**, et ils apportent donc plus ; ils sont en quelque sorte « optimaux ».

📌 Exercice 2.12.

Soit $f : [\alpha, \beta] \rightarrow E_d$ une application continue : d'après le Théorème de Heine, elle est uniformément continue. Soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall s, t \in [a, b] : |t - s| \leq \eta \implies d[f(s), f(t)] \leq \varepsilon.$$

On considère $C_\infty([\alpha, \beta], E_d)$ comme un sous-espace métrique de $B_\infty([\alpha, \beta], E_d)$, et on va démontrer en fait que $\mathcal{E}([\alpha, \beta], E_d)$ (fonctions en escalier) est dense par rapport à $C_\infty([\alpha, \beta], E_d)$.

Soit un découpage $t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \dots < t_n = \beta$ de $[\alpha, \beta]$, assez fin pour que $\max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i| \leq \eta$. On considère alors l'application en escalier suivante (qui dépend de ε via η , via la condition sur la taille du découpage) :

$g(t) := f(t_i)$ pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}[$, $i = 0, 1, \dots, n-1$, et $g(t) := f(t_{n-1})$ pour tout $t \in [t_{n-1}, t_n]$ (faire un dessin).

Soit $t \in [\alpha, \beta]$ arbitraire : t appartient à l'un des intervalles considérés, $[t_j, t_{j+1}[$ pour fixer les idées, et sur cet intervalle : $d[f(t), g(t)] = d[f(t), f(t_j)] \leq \varepsilon$, car $t - t_j \leq \eta$.

D'où : $d_\infty(f, g) = \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} d[f(t), g(t)] \leq \varepsilon$, et le résultat. ♦

📌 Exercice 2.13.

Même raisonnement que dans l'Exercice précédent, on écrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall s, t \in [\alpha, \beta] : |t - s| \leq \eta \implies d[f(s), f(t)] = \|f(s) - f(t)\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

On va prendre ici pour g l'application affine par morceaux continue joignant le point $(t_i, f(t_i))$ au point $(t_{i+1}, f(t_{i+1}))$ pour $0 \leq i \leq n-1$ [dessin !].

Sur $[t_i, t_{i+1}]$: $g(t) := ta + b$, où a, b sont des éléments de E à déterminer.

$f(t_i) = t_i a + b$ et $f(t_{i+1}) = t_{i+1} a + b$ donnent

$$a = \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i}, \text{ et } b = f(t_i) - t_i \times \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i}$$

D'où : $g(t) = (t - t_i) \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{t_{i+1} - t_i} + f(t_i)$ pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$.
 $\forall t \in [\alpha, \beta], \exists j, 0 \leq j \leq n - 1 : t \in [t_j, t_{j+1}]$ et, donc :
 $\|f(t) - g(t)\| = \left\| f(t) - f(t_j) - (t - t_j) \frac{f(t_{j+1}) - f(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \right\|$
 $\leq \|f(t) - f(t_j)\| + \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} \|f(t_{j+1}) - f(t_j)\| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$
 [on a majoré $\frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}$ par 1], et donc :
 $\|f - g\|_\infty = \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \|f(t) - g(t)\| \leq \varepsilon.$

Une autre façon de dire les choses consiste à dire que le sous-espace vectoriel des fonctions continues affines par morceaux $A([\alpha, \beta], E)$ est dense dans l'espace $C_\infty([\alpha, \beta], E)$. ♦

🔗 Exercice 3.1.

On va démontrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall f_a \in A$ (i.e. $\forall a \in E$), $\forall u, v \in E$:
 $\|u - v\| \leq \eta \implies \|f_a(u) - f_a(v)\| = \|f(u - a) - f(v - a)\| \leq \varepsilon,$
 c'est-à-dire que A est en fait équi-uniformément continu sur E .
 Ecrivons que f est uniformément continue sur E :
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \theta > 0, \forall u, v \in E : \|u - v\| \leq \theta \implies \|f(u) - f(v)\| \leq \varepsilon.$
 Mais $\|u - v\| \leq \theta \iff \|(u - a) - (v - a)\| \leq \theta \implies \|f(u - a) - f(v - a)\| \leq \varepsilon.$ Il suffit donc de prendre $\eta = \theta$ pour avoir le résultat cherché. ♦

🔗 Exercice 3.2.

On va appliquer le Th. d'Arzelà-Ascoli, version 2 puisque $E = C_\infty([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ est complet ; avec les notations du Th : $(E, d) := [\alpha, \beta], (F, \delta) := \mathbb{R}$ usuels, $H := A(X)$.

On va démontrer :

(i) $\forall s \in [\alpha, \beta] : [A(X)](s) = \{[A(f)](s) / f \in X\}$ est d'adhérence compacte dans \mathbb{R} soit - simplement : $\forall s \in [\alpha, \beta] : [A(X)](s)$ est borné dans \mathbb{R} , et
 (ii) : $A(X)$ est équicontinu sur $[\alpha, \beta]$.

(i) $\forall f \in X : \|f\|_\infty \leq M$, où M réel > 0 , car X est bornée.
 Donc, $\forall f \in X, \forall s \in [\alpha, \beta]$:

$$|[A(f)](s)| \leq \int_\alpha^\beta |K(s, t)| \cdot |f(t)| dt \leq \|f\|_\infty \cdot \int_\alpha^\beta |K(s, t)| dt \leq m \cdot M, \text{ où l'on a posé :}$$

$$m(s) := \int_\alpha^\beta |K(s, t)| dt = \text{réel} \geq 0. \spadesuit$$

En fait $m(s)$ est une fonction continue de $s \in [\alpha, \beta]$, et donc :

$$m(s) \leq \max_{\alpha \leq s' \leq \beta} m(s') = m < \infty.$$

$\{[A(f)](s) / f \in X\}$ est borné dans indépendamment de s , ce qui est plus que demandé. ♦

(ii) K continue sur $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$ compact est - Th. de Heine - uniformément continue, d'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (s, t) \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta], \forall (s', t') \in [\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta] : \\ |s - s'| \leq \eta \text{ et } |t - t'| \leq \eta \implies |K(s, t) - K(s', t')| \leq \varepsilon,$$

d'où l'on déduit :

$$|[A(f)](s) - [A(f)](s')| = \left| \int_\alpha^\beta [K(s, t) - K(s', t)] \cdot f(t) dt \right| \\ \leq \|f\|_\infty \cdot \int_\alpha^\beta |K(s, t) - K(s', t)| dt \leq \varepsilon \cdot M \cdot (\beta - \alpha), \text{ soit :}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall s \in [\alpha, \beta], \forall s' \in [\alpha, \beta], \forall f \in X : |[A(f)](s) - [A(f)](s')| \leq \varepsilon$, et donc $A(X)$ est équi-(uniformément)-continu. ♦

Finalement : $\text{adh}[A(X)]$ est une partie compacte de $E = C_\infty([\alpha, \beta], \mathbb{R})$. ♦

🔗 Exercice 4.1.

Pour tout $u \in A$, E étant localement compact, par définition, il existe un voisinage compact V_u de u . $(\text{int}(V_u))_{u \in A}$ constitue un recouvrement ouvert de A . A étant compact, il existe u_1, \dots, u_p (un nombre fini de points) tels que $(\text{int}(V_{u_i}))_{1 \leq i \leq p}$ est un recouvrement ouvert fini de A .

Posons $V := \bigcup_{1 \leq i \leq p} V_{u_i}$. V est compact comme réunion finie de compacts.

$U := \bigcup_{1 \leq i \leq p} \text{int}(V_{u_i})$ est un ouvert (réunion finie d'ouverts) qui contient A (recouvrement) et qui est contenu dans V (car $\text{int}(V_{u_i}) \subset V_{u_i}$).

Donc V est un voisinage compact de A . ♦

On en déduit, si l'on veut, que dans tout voisinage de A on peut trouver une boule généralisée $B(A, \rho]$ d'adhérence compacte.

En effet, d'après le Problème 1 du Chap. VI, il existe $\rho > 0$ tel que $B(A, \rho] \subset V$, et $\text{adh}(B(A, \rho]) \subset \text{adh}(V) = V$ est fermée dans V compact, donc compacte. ♦

Exercice 4.2.

Soit U un ouvert de E localement compact. Pour tout $u \in U$, il existe une boule fermée $B(u, \rho]$ compacte (cf. cours). U étant ouverte, il existe $\sigma \leq \rho$ tel que $B(u, \sigma] \subset U$.

$B(u, \sigma]$ fermée dans un compact est compacte, donc le sous-espace métrique $(U, d_{|U \times U})$ est localement compact. ♦

Soit maintenant F une partie fermée de E localement compact. Soit $v \in F$. Il existe un voisinage V de v compact. $W := V \cap F$ est un compact, car fermé dans le compact V ; W est un voisinage de v dans $(F, d_{|F \times F})$ par définition des voisinages induits (cf. ouverts d'un sous-espace). Donc $(F, d_{|F \times F})$ est localement compact. ♦

Exercice 4.3.

La solution, simple, se trouve dans le Problème 1 ci-après, 1) *in fine*. ♦

LECTURE – PROBLÈME

Le théorème de Stone-Weierstraß

I. Pour t appartenant à l'intervalle $[-1, +1]$, on pose : $P_0(t) = 0$ et, pour tout n entier ≥ 0 : $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}[t^2 - P_n^2(t)]$, où $P_n^2(t) = (P_n(t))^2$.

Démontrez que les P_n sont des polynômes à coefficients réels, en t^2 , sans terme constant, vérifiant : $P_n(t) \leq |t| \leq 1$ et $0 \leq P_n(t) \leq P_{n+1}(t)$ pour tout $t \in [-1, +1]$.

Démontrez que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{-1 \leq t \leq +1} |P_n(t) - |t|| \right] = 0$ (autrement dit, que la suite $(P_n)_n$ converge uniformément vers $t \mapsto |t|$ sur $[-1, +1]$, ou encore : $(P_n)_n$ converge vers $t \mapsto |t|$ dans l'espace de Banach $C_\infty([-1, +1], \mathbb{R})$).

II. Soit $E \neq \emptyset$ un ensemble, et soit \mathcal{B} l'ensemble des fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ bornées.

On munit l'espace vectoriel \mathcal{B} de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{u \in E} |f(u)|$ qui en fait un espace de Banach réel. Un sous-espace vectoriel \mathcal{A} de \mathcal{B} sera dit *stable* si :

$$\forall f \in \mathcal{A}, \forall g \in \mathcal{A} : f \cdot g \in \mathcal{A} \quad [\forall u \in E : (f \cdot g)(u) = f(u) \cdot g(u)].$$

D'autre part, si $f \in \mathcal{B}$, on définit $|f| \in \mathcal{B}$ par : $|f|(u) = |f(u)|$ pour tout $u \in E$.

Soit \mathcal{A} un sous-espace vectoriel stable de \mathcal{B} , et soit $f \in \mathcal{A}$. Démontrez que $|f|$ est limite pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ d'une suite d'éléments de \mathcal{A} .

III. Soit \mathcal{A} un sous-espace vectoriel stable de \mathcal{B} . Démontrez que l'adhérence $\text{adh}(\mathcal{A})$ de \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel stable de \mathcal{B} .

Démontrez que si $f, g \in \mathcal{A}$, on a : $\sup(f, g) \in \text{adh}(\mathcal{A})$ et $\inf(f, g) \in \text{adh}(\mathcal{A})$

[où : $\sup(f, g)(u) = \sup\{f(u), g(u)\}$ pour tout $u \in E$, pareil pour \inf].

Démontrez que si $f_1, \dots, f_p \in \mathcal{A}$, on a : $\sup(f_1, \dots, f_p) \in \text{adh}(\mathcal{A})$.

IV. Soit (E, d) un espace métrique compact. Soit \mathcal{C} le sous-espace vectoriel de \mathcal{B} constitué par les fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur E .

Soit \mathcal{A} un sous-espace vectoriel stable de \mathcal{B} contenu dans \mathcal{C} . On suppose que \mathcal{A} vérifie la propriété [P] suivante :

$$[P] \quad \forall \varepsilon > 0, \forall u \in E, \forall v \in E, \forall f \in \mathcal{C}, \exists g \in \mathcal{A} : \\ |g(u) - f(u)| < \varepsilon \text{ et } |g(v) - f(v)| < \varepsilon.$$

Démontrez que $\text{adh}(\mathcal{A}) = \mathcal{C}$.

Conseil : Soit $f \in \mathcal{C}$; $\forall \varepsilon > 0$ on cherche $g \in \text{adh}(\mathcal{A})$ telle que $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$; on part de $g_{u,v}$ donnée par [P] et on considère $U_{u,v} = \{w \in E / g_{u,v}(w) - f(w) < \varepsilon\}$, $V_{u,v} = \{w \in E / g_{u,v}(w) - f(w) > -\varepsilon\}$; $u, v \in U_{u,v}$ et $u, v \in V_{u,v}$; construisez d'abord $g_v \in \text{adh}(\mathcal{A})$, puis $g \in \text{adh}(\mathcal{A})$ en utilisant III.

V. Dans le même cadre que IV, démontrez que l'hypothèse [P] est une conséquence de l'hypothèse [Q] suivante :

$$[Q] \quad \text{la fonction } \mathbf{1} [\forall u \in E : \mathbf{1}(u) = 1] \text{ appartient à } \mathcal{A}, \text{ et :} \\ \forall u \in E, \forall v \in E, u \neq v, \exists f \in \mathcal{A} : f(u) \neq f(v).$$

VI. Soit K une partie compacte de \mathbb{R}^n , et soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur K . Démontrez que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme P , à n variables et à coefficients réels tel que : $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$.

VII. Soit (E, d) un espace métrique compact. Soit \mathcal{H} un ensemble de fonctions $E \rightarrow \mathbb{C}$ continues sur E telles que :

- $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, la fonction constante λ appartient à \mathcal{H} ,
- $\forall f \in \mathcal{H}, \forall g \in \mathcal{H} : f + g \in \mathcal{H}, f \cdot g \in \mathcal{H}, \bar{f} \in \mathcal{H}$,
[$\bar{f}(u) = \text{conjugué de } f(u) \text{ pour tout } u \in E$],
- $\forall u \in E, \forall v \in E, u \neq v, \exists f \in \mathcal{H} : f(u) \neq f(v)$.

Démontrez que : $\forall \varepsilon > 0, \forall f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{C}), \exists g \in \mathcal{H} : \|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

CORRIGÉ DE LECTURE – PROBLÈME

I. Comme pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a : $(|\alpha| - \beta)(|\alpha| + \beta) = |\alpha|^2 - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$, on a pour tout $t \in [-1, +1]$:

$$|t| - P_{n+1}(t) = |t| - P_n(t) - \frac{1}{2} [|t| - P_n(t)] [|t| + P_n(t)]. \\ = [|t| - P_n(t)] \left(1 - \frac{1}{2} [|t| + P_n(t)] \right). \spadesuit$$

On a $P_0(t) = 0 \leq |t|$; si l'on suppose que $P_n(t) \leq |t|$ pour tout $t \in [-1, +1]$, on a : $P_n(t) \leq |t| \leq 1$ et $|t| + P_n(t) \leq 2$; donc : $|t| - P_{n+1}(t) \geq [|t| - P_n(t)] [1 - \frac{1}{2}] = 0$ et $P_{n+1}(t) \leq |t|$, cela pour tout $t \in [-1, +1]$.

D'autre part, si $P_n(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, alors :

$$P_n(t) - \frac{1}{2} P_n^2(t) = P_n(t) [1 - \frac{1}{2} P_n(t)] \geq 0, \text{ et } P_{n+1}(t) \geq \frac{1}{2} t^2 \geq 0.$$

Ainsi, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [-1, 1], 0 \leq P_n(t) \leq |t| \leq 1$. \spadesuit

On a aussi : $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2} [t^2 - P_n^2(t)] \geq P_n(t)$, car $t^2 - P_n^2(t) \geq 0$; la suite (P_n) est croissante. \spadesuit

Toujours par récurrence, d'après $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2} [t^2 - P_n^2(t)]$, on a : P_n est pour tout n un polynôme en t^2 . Si P_n n'a pas de terme constant, on a $P_n(0) = 0$ et donc $P_{n+1}(0) = 0$. Les polynômes P_n n'ont pas de terme constant. \spadesuit

En résumé : les fonctions P_n définies par la relation de récurrence sont sur $[-1, +1]$ des restrictions de polynômes en t^2 sans terme constant. On a :

$$\forall t \in [-1, +1] : P_n(t) \leq |t| \leq 1, 0 \leq P_n(t) \leq P_{n+1}(t). \spadesuit$$

Pour tout $t \in [-1, +1]$ fixé, la suite $(P_n(t))_n$ est croissante et majorée (par 1) et donc est convergente dans \mathbb{R} vers $Q(t)$. Par prolongement des égalités, on a : $0 \leq Q(t) \leq 1$.

Faisant tendre n vers l'infini dans $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2} [t^2 - P_n^2(t)]$, on obtient :

$$Q(t) = Q(t) + \frac{1}{2} [t^2 - Q^2(t)] \iff Q^2(t) = t^2, \text{ d'où - puisque } Q(t) \geq 0 :$$

$$Q(t) = |t|. \spadesuit$$

Sur $[-1, +1]$ la suite (P_n) converge donc simplement (i.e. ponctuellement) vers Q :
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n(t)) = |t|$ pour tout t fixé dans $[-1, +1]$.

$[-1, +1]$ est compact, les P_n sont continus sur $[-1, +1]$ et convergent simplement vers Q continue sur $[-1, +1]$; comme la suite $(P_n)_n$ est croissante [$\forall t \in [-1, +1] : P_n(t) \leq P_{n+1}(t)$], ce qui n'implique pas que les P_n soient monotones ! Ils ne le sont d'ailleurs pas !, on peut appliquer le Th. de Dini [ce Chap. Exercice 1.4] et on a : $(P_n)_n$ converge uniformément vers Q sur $[-1, +1]$:

$$\sup_{-1 \leq t \leq +1} |P_n(t) - |t|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \blacklozenge$$

Remarque : Comme $|t| = \sqrt{t^2} = [1 - (1 - t^2)]^{1/2}$, on peut obtenir le même résultat en développant $(1 - u)^{1/2}$ en série de Taylor. C'est plus élémentaire (pas de Th. de Dini), mais plus technique (Analyse de L. Schwartz XXII, §7).

II. $f \in \mathcal{A}$ étant bornée sur E , il existe un réel $M > 0$ tel que $|f| \leq M$ ($\forall u \in E : |f(u)| \leq M$). La fonction $(\frac{1}{M})f$ appartient à \mathcal{A} car \mathcal{A} est stable pour la multiplication par les nombres réels, et on a : $\frac{1}{M}f(u) \in [-1, +1]$ pour tout $u \in E$.

Par ailleurs, les « polynômes » par rapport à une fonction de \mathcal{A} sans terme constant appartiennent à \mathcal{A} :

$f \in \mathcal{A} \implies f^2 \in \mathcal{A}, f^3 \in \mathcal{A}, \dots, f^n \in \mathcal{A}$, où $f^2 = f \cdot f$ [$f^2(u) = (f(u))^2$], cela par stabilité de la multiplication ; ensuite $\sum_{i=1}^n \lambda_i f^i \in \mathcal{A}$ si les λ_i sont des réels (stabilité pour la multiplication par les réels et pour l'addition).

Remarque : On aurait pu poser $f^0 = \mathbf{1}$, i.e. $f^0(u) = 1$ pour tout $u \in E$, et donc considérer des polynômes $\sum_{i=0}^n \lambda_i f^i$, mais on n'a pas nécessairement, par hypothèse, $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ (i.e. les fonctions constantes puisque $\lambda \mathbf{1}(u) = \lambda$).

Comme les polynômes obtenus dans **I** n'ont pas de terme constant, on peut considérer la composition $P_n \circ (\frac{1}{M}f)$ qui appartient à \mathcal{A} pour tout n : $\frac{1}{M}f : E \rightarrow [-1, +1]$ et $P_n : [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}$ peuvent être composés.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \sup_{u \in E} |P_n \circ (\frac{1}{M}f)(u) - |\frac{1}{M}f(u)|| &= \sup_{u \in E} |P_n(\frac{1}{M}f(u)) - |\frac{1}{M}f(u)|| \\ &\leq \sup_{-1 \leq t \leq +1} |P_n(t) - |t|| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Donc : $\|P_n \circ (\frac{1}{M}f) - \frac{1}{M}|f|\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \|M \cdot P_n \circ (\frac{1}{M}|f|) - |f|\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, avec pour tout n : $M \cdot P_n \circ (\frac{1}{M}f) \in \mathcal{A}$. D'où : $|f| \in \text{adh}(\mathcal{A})$. C.Q.F.D. \blacklozenge

III. On sait [Chap. V] que \mathcal{A} étant un sous-espace vectoriel, $\text{adh}(\mathcal{A})$ est aussi un sous-espace vectoriel ; et on a aussi vite fait de le démontrer à nouveau comme suit pour le produit. Soient $f, g \in \text{adh}(\mathcal{A})$: il existe des suites (f_n) et (g_n) d'éléments de \mathcal{A} telles que $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $\|g - g_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$;

$$\|f \cdot g - f_n \cdot g_n\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty \cdot \|g\|_\infty + \|f_n\|_\infty \cdot \|g - g_n\|_\infty,$$

et ce dernier terme tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$; donc : $f_n \cdot g_n \in \mathcal{A}$ pour tout n (stabilité) et $(f_n \cdot g_n) \rightarrow f \cdot g$ pour $\|\cdot\|_\infty$, donc : $f \cdot g \in \text{adh}(\mathcal{A})$. \blacklozenge

Il suffit ensuite de se souvenir [Chap. VII] que :

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}[f + g + |f - g|] \text{ et } \inf(f, g) = \frac{1}{2}[f + g - |f - g|].$$

Comme par **II** on a : $f \in \text{adh}(\mathcal{A}) \implies |f| \in \text{adh}[\text{adh}(\mathcal{A})] = \text{adh}(\mathcal{A})$, on a le résultat avec la stabilité de $\text{adh}(\mathcal{A})$. \blacklozenge

On procède ensuite par récurrence en remarquant que :

$$\sup(f_1, \dots, f_p) = \sup(\sup(f_1, \dots, f_{p-1}), f_p). \blacklozenge$$

IV. On sait [Chap. IV] que \mathcal{C} est fermé dans \mathcal{B} . On notera que \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel stable de \mathcal{B} (qui est lui-même stable). $\mathcal{A} \subset \mathcal{C} \implies \text{adh}(\mathcal{A}) \subset \text{adh}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Il nous faut prouver, donc, que $\mathcal{C} \subset \text{adh}(\mathcal{A})$.

Soit $f \in \mathcal{C}$ arbitraire, et soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Il nous suffit de trouver (« construire ») $g \in \text{adh}[\text{adh}(\mathcal{A})] = \text{adh}(\mathcal{A})$ telle que $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$; soit telle que $\forall w \in E : |g(w) - f(w)| < \varepsilon$. C'est-à-dire, finalement, telle que dans [P], mais indépendante de u et v .

Pour tous u, v de E (f et ε étant fixés), on sait par [P] qu'il existe $g_{u,v} \in \mathcal{A}$ telle que : $|g_{u,v}(u) - f(u)| < \varepsilon$ et $|g_{u,v}(v) - f(v)| < \varepsilon$.

Posons :

$$U_{u,v} := \{w \in E / g_{u,v}(w) - f(w) < \varepsilon\}, V_{u,v} := \{w \in E / g_{u,v}(w) - f(w) > -\varepsilon\}.$$

Comme $g_{u,v}$ et f sont continues sur E , ces ensembles sont [Chap. VII] *ouverts* dans E , et non vides car (très important) $u \in U_{u,v}$, $v \in U_{u,v}$, $u \in V_{u,v}$, $v \in V_{u,v}$.

Fixons v et faisons décrire E à u : les $U_{u,v}$ constituent un recouvrement ouvert de E , puisque $u \in E \implies u \in U_{u,v}$.

Du recouvrement ouvert $(U_{u,v})_{u \in E}$ on peut extraire – puisque E est compact – un recouvrement fini $(U_{u_i,v})_{i=1,\dots,n}$. $w \in E \implies w \in \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{u_i,v}$.

Donc, pour tout $w \in E$ on a : $g_{u_j,v}(w) - f(w) < \varepsilon$ pour un certain j .

Posons : $g_v := \inf_{1 \leq i \leq n} g_{u_i,v} : g_v \in \text{adh}(\mathcal{A})$ par III, et on a :

$$\forall w \in E : g_v(w) - f(w) \leq g_{u_j,v}(w) - f(w) < \varepsilon.$$

D'autre part : $V_{u_i,v} = \{w \in E / g_{u_i,v}(w) - f(w) > -\varepsilon\}$.

Donc pour $w \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{u_i,v}$ on a : $g_{u_i,v}(w) - f(w) > -\varepsilon$, pour $i = 1, \dots, n$, d'où :

$$g_v(w) - f(w) > -\varepsilon.$$

Posons : $W_v := \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{u_i,v}$; $v \in W_v$ puisque $v \in V_{u_i,v}$ pour tout $u \in E$.

Les W_v sont des ouverts comme intersection finie d'ouverts, et pour tout $v \in E$ on a $v \in W_v$. Donc $(W_v)_{v \in E}$ est un recouvrement ouvert de E compact. On peut donc extraire $(W_{v_j})_{j=1,\dots,m}$ recouvrement fini de E .

Pour tout $w \in \bigcup_{1 \leq j \leq m} W_{v_j} = E$, on a : $g_{v_j}(w) - f(w) > -\varepsilon$.

Posons : $g := \sup_{1 \leq j \leq m} g_{v_j} : g \in \text{adh}(\mathcal{A})$ par III, et :

$$g(w) - f(w) \geq g_{v_j}(w) - f(w) > -\varepsilon \text{ pour tout } w \in E.$$

Mais comme g_{v_j} vérifie pour tout j : $g_{v_j}(w) - f(w) < \varepsilon$, on a aussi : $g(w) - f(w) < \varepsilon$, pour tout $w \in E$.

Finalement : $|g(w) - f(w)| < \varepsilon$ pour tout $w \in E$, i.e. $\|g - f\|_\infty < \varepsilon$. ♦

V. Il suffit de prouver que [Q] \implies [P].

$1 \in \mathcal{A}$ signifie simplement que les fonctions constantes appartiennent à \mathcal{A} : $f(u) = c \in \mathcal{A}$.

Soient $f \in \mathcal{C}$, $\varepsilon > 0$, $u \in E$, $v \in E$ fixés.

Si $u = v \implies f(u) = f(v)$, on prend $g(w) = f(u) = \text{constante}$ ($g \in \mathcal{A}$) et : $|g(u) - f(u)| = 0 < \varepsilon$, $|g(v) - f(v)| = 0 < \varepsilon$.

Si $u \neq v$, soit $h \in \mathcal{A}$ telle que $h(u) \neq h(v)$ donnée par [Q]. Après quelques tâtonnements (recherche d'une fonction affine passant par deux points), on trouve que g définie en $w \in E$ par :

$$g(w) := f(u) + \frac{f(v) - f(u)}{h(v) - h(u)} [h(w) - h(u)] \text{ convient :}$$

$$|g(u) - f(u)| = \left| \frac{f(v) - f(u)}{h(v) - h(u)} [h(u) - h(u)] \right| = 0 < \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} |g(v) - f(v)| &= \left| f(u) + \frac{f(v) - f(u)}{h(v) - h(u)} [h(v) - h(u)] - f(v) \right| \\ &= |f(u) + (f(v) - f(u)) - f(v)| = 0 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Et, bien entendu : $g \in \mathcal{A}$ (stabilité de \mathcal{A}). ♦

VI. Les polynômes à n variables réelles à coefficients réels constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ contenant les constantes. Vérifions [Q] :

Si $(\xi_1, \dots, \xi_n) \neq (\eta_1, \dots, \eta_n)$, c'est qu'il existe k tel que $\xi_k \neq \eta_k$. Il suffit de considérer le polynôme $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k - \xi_k = P(x_1, \dots, x_n)$. ♦

VII. Soit $\mathcal{H}_r = \{f \in \mathcal{H} / \text{Im } f(u) = 0 \text{ pour tout } u \in E\}$ (\mathcal{H}_r est tout simplement l'ensemble des fonctions de \mathcal{H} qui sont à valeurs réelles).

\mathcal{H}_r est un sous-espace vectoriel stable de $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ (évident). Il suffit de vérifier la propriété [Q] :

si $u \neq v$, il existe $f \in \mathcal{H}$ telle que $f(u) \neq f(v)$. Mais alors $\text{Ré } f(u) \neq \text{Ré } f(v)$ ou $\text{Im } f(u) \neq \text{Im } f(v)$; or : $\text{Ré } f = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) \in \mathcal{H}_r$ et $\text{Im } f = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) \in \mathcal{H}_r$, d'où [Q].

Maintenant, soit $f \in \mathcal{C}(E, \mathbb{C})$: $f = f_1 + if_2 = \text{Ré } f + i \text{Im } f$ avec $f_1 \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ et $f_2 \in \mathcal{C}(E, \mathbb{R})$. Donc il existe $g_1 \in \mathcal{H}_r$ et $g_2 \in \mathcal{H}_r$ telles que $\|f_1 - g_1\|_\infty < \varepsilon$, $\|f_2 - g_2\|_\infty < \varepsilon$. D'où : $g = g_1 + ig_2 \in \mathcal{H}$ et

$$\|f - g\|_\infty = \|f_1 + if_2 - g_1 - ig_2\|_\infty \leq \|f_1 - g_1\|_\infty + \|f_2 - g_2\|_\infty < 2\varepsilon.$$

Le même raisonnement que dans VI prouve que pour tout $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{C})$, et pour $\varepsilon > 0$ donné quelconque, il existe un polynôme de n variables à coefficients complexes P tel que $\|f - P\|_\infty < \varepsilon$. ♦

Les résultats prouvés dans ce problème portent le nom de *Théorème de Stone-Weierstraß*. C'est une généralisation remarquable du Th. de Weierstraß donné dans le Chap. IV. On remarquera que le Th. de W. peut être généralisé aux fonctions $K \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) en adaptant la démonstration en termes de polynômes de Bernstein à n variables.

On énonce souvent le résultat ainsi :

Soit (E, d) un espace métrique compact, et soit $C = C(E, \mathbb{R})$ l'algèbre de Banach des fonctions continues $E \rightarrow \mathbb{R}$, munie de $\| \cdot \|_\infty$.

Toute sous-algèbre \mathcal{A} de C qui contient les fonctions constantes et qui sépare les points de E [i.e. $\forall u, v \in E, u \neq v, \exists f \in \mathcal{A} : f(u) \neq f(v)$] est partout dense dans C .

« En gros » : si une sous-algèbre n'est pas trop pauvre en fonctions, elle est partout dense dans C . Pour $C = C(E, \mathbb{C})$, il faut ajouter que $\bar{f} \in \mathcal{A}$ dès que $f \in \mathcal{A}$, sinon le résultat serait faux (cf. livre de L. Schwartz).

Remarque : Pour E , un espace topologique séparé suffit (on ne s'est jamais servi de la distance !).

PROBLÈME 1

Espaces métriques à boules fermées compactes

On dit qu'un espace métrique (E, d) est un c -espace si toutes ses boules fermées sont compactes.

1) A quelle condition un espace vectoriel normé (réel ou complexe) est-il un c -espace ? Même question pour un ensemble muni de la distance discrète. Démontrez que \mathbb{R}^n muni de la distance $\frac{d}{1+d}$, où d est la distance euclidienne, n'est pas un c -espace ; conclusion ?

Les sous-espaces métriques \mathbb{Z} et \mathbb{Q} de \mathbb{R} usuel sont-ils des c -espaces ?

2) Démontrez qu'un espace métrique (E, d) est un c -espace si et seulement si toute partie fermée bornée de E est compacte.

3) Démontrez que (E, d) est un c -espace si et seulement si de toute suite bornée $(u_n)_n$ de points de E on peut extraire une suite $(u_n)_{n \in S}$ convergente dans (E, d) .

4) Soit (E, d) un c -espace : démontrez que (E, d) est localement compact, complet et séparable.

5) Soit (E, d) un c -espace, et soit A une partie fermée de (E, d) . Démontrez que le sous-espace métrique $(A, d|_{A \times A})$ est un c -espace. L'hypothèse « A fermé » est-elle indispensable ?

6) Soit (E, d) un c -espace, et soit $(u_n)_n$ une suite de points de E . Démontrez que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

[P1] pour toute partie compacte K de (E, d) , il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$ on a : $u_n \notin K$,

[P2] $\forall a \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} d(a, u_n) = \infty$,

[P3] $\exists a \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} d(a, u_n) = \infty$.

Une suite $(u_n)_n$ possédant ces propriétés sera dite « tendre vers l'infini ».

7) Soient (E, d) et (F, δ) deux c -espaces, et soit $f : E \rightarrow F$ une application continue sur E . Démontrez que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

[Q1] pour toute partie compacte K de (F, δ) , on a : $f^{-1}(K)$ est compact dans (E, d) [on dit que f est *propre*],

[Q2] pour toute suite $(u_n)_n$ de points de E « tendant vers l'infini », la suite $(f(u_n))_n$ de points de F « tend vers l'infini ».

8) Soit (E, d) un c -espace, et soit $A \neq \emptyset$ une partie fermée de E , soit $u \in E$ tel que $u \notin A$. Démontrez qu'il existe $a \in A$ tel que $d(u, A) = d(u, a)$. Soit $B \neq \emptyset$ une partie compacte de E : démontrez qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(A, B) = d(a, b)$.

9) (difficile) Soit (E, d) un espace localement compact et séparable. On considère une suite d'ouverts (U_n) donnée par le Th. 4.1 (4.3), et on pose $K_n = \text{adh}(U_n)$.

Démontrez qu'il existe une fonction continue $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie $f(u) \leq n$ pour $u \in K_n$ et $f(u) \geq n$ pour $u \notin K_n$.

Indication :

$$\text{Considérez } g_n(u) := \frac{d(u, K_{n-1})}{d(u, K_{n-1}) + d(u, E \setminus U_n)}, \text{ puis : } f(u) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(u).$$

On pose ensuite : $\delta(u, v) = d(u, v) + |f(u) - f(v)|$. Démontrez que δ est une distance topologiquement équivalente à d , et que (E, δ) est un c -espace.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 1

1) Une remarque évidente : un c -espace (toutes les boules fermées compactes) est localement compact (tout point est centre d'une boule fermée compacte).

Dans un e.v.n. (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) de dimension finie, les compacts sont les fermés bornés, et donc toutes les boules fermées sont compactes [Chap. XIII] ; donc un e.v.n. de dimension finie est un c -espace. Par contre dans un e.v.n. de dimension infinie, une boule fermée n'est jamais compacte [Chap. XIII] : un tel espace n'est jamais localement compact, et donc jamais un c -espace.

Finalement :

un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est localement compact $\iff E$ est un c -espace $\iff \dim(E) < \infty$. \blacklozenge

Soit E un ensemble muni de la distance discrète δ . $\forall u \in E : B(u, \frac{1}{2}) = \{u\}$ compacte ; donc (E, δ) est localement compact.

Par contre $B(u, 3) = E$, et E est compact $\iff E$ est fini (car seules les suites stationnaires sont convergentes, et donc si E est infini, on peut toujours construire des suites sans suite extraite convergente).

Donc, (E, δ) est localement compact, mais (E, δ) est un c -espace $\iff E$ est fini. \blacklozenge

Considérons le cas $n = 1$, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $d(s, t) = \frac{|s-t|}{1+|s-t|}$. On sait déjà que d est une distance [Chap. II], elle est à valeurs dans $[0, 1[$.

$d(s_n, s) = \frac{|s_n - s|}{1 + |s_n - s|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff |s_n - s| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et donc d et $|\cdot|$ sont topologiquement équivalentes. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et (\mathbb{R}, d) sont *homéomorphes*.

$\forall t \in \mathbb{R} : d(0, t) = \frac{|t|}{1+|t|} \leq 1 \implies B_d(0, 1) = \mathbb{R}$. Si (\mathbb{R}, d) était compact, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ homéomorphe le serait aussi, ce qui n'est pas. Donc $B_d(0, 1)$ n'est pas compacte, et (\mathbb{R}, d) n'est pas un c -espace.

On conclut que la notion de c -espace n'est pas topologique. \blacklozenge

Le sous-espace métrique \mathbb{Z} de \mathbb{R} est un c -espace car ses boules fermées sont finies, donc compactes. Par contre \mathbb{Q} n'est même pas localement compact ; soit en effet $B(0, s) = [-s, s] \cap \mathbb{Q}$, $s \in \mathbb{Q}$, $s > 0$, une boule fermée de \mathbb{Q} ; cette boule n'est pas compacte puisque non complète (considérez un irrationnel i de $[-s, s]$ et une suite de rationnels de $B(0, s)$ convergente dans \mathbb{R} vers i). \blacklozenge

2) Si tout fermé borné est compact, les boules fermées sont compactes, et (E, d) est un c -espace.

Réciproquement, si (E, d) est un c -espace, soit $A \subset E$ fermé et borné : il existe une boule $B(u, \rho)$, compacte, qui contient A : A fermé dans un compact est compact (cours). \blacklozenge

3) Si (E, d) est un c -espace, soit $(u_n)_n$ une suite bornée : il existe une boule fermée $B(v, \rho)$ qui contient toute la suite ; cette boule étant compacte, on peut [propriété de Weierstraß des compacts, XIV, Th. 1.1] extraire de $(u_n)_n$ une suite $(u_n)_{n \in S}$ convergente.

Réciproquement, soit A une partie fermée bornée de E , et soit $(u_n)_n$ une suite de points de A ; $(u_n)_n$ est bornée, et donc on peut extraire une suite $(u_n)_{n \in S}$ convergente vers $u \in E$; comme A est fermé, $u \in A$.

Donc A est compact [propriété de Weierstraß], et d'après 2) (E, d) est un c -espace. ♦

4) Que (E, d) c -espace $\implies (E, d)$ localement compact est évident, et a été déjà dit dans la question 1). ♦

Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy : $(u_n)_n$ est donc bornée (cours) ; par 3) on peut donc en extraire une suite $(u_n)_{n \in S}$ convergente. Mais une suite de Cauchy qui a un point adhérent est convergente [XI, Prop. 1.1 (iv)]. Donc (E, d) est complet. ♦

On peut écrire : $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(u, n)$ où $u \in E$ est arbitraire ; en effet, si $v \in E$, on a $d(u, v) \leq p$, où p est un certain entier, d'où $v \in B(u, p)$.

$B(u, n]$ est compacte donc séparable [XIII, Prop. 9]. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $D_n \subset B(u, n]$, D_n dénombrable et partout dense. Prenons $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$.

D est dénombrable comme réunion dénombrable d'ensembles dénombrables.

Soient $\varepsilon > 0$ et $v \in E$: $v \in B(u, p]$ pour un certain p , et donc il existe $w \in D_p$ tel que $d(v, w) \leq \varepsilon$; mais $w \in D_p \implies w \in D$, et le résultat : (E, d) est séparable. ♦

5) Soit (u_n) une suite bornée de A . Comme E est un c -espace, il existe $(u_n)_{n \in S}$ qui converge vers $u \in E$; comme A est fermé, $u \in A$. Donc, A est un c -espace, par 3). ♦

L'hypothèse de fermeture est indispensable : $]0, 1]$ muni de la distance induite par \mathbb{R} usuel n'est pas un c -espace puisque $(\frac{1}{n})_n$ bornée n'y a pas de limite. ♦

6) On va démontrer que [P2] \implies [P3] \implies [P1] \implies [P2].

[P2] \implies [P3] est trivial. ♦

Démontrons que [P3] \implies [P1]. Par contradiction. Soit K un compact.

Si $\neg[\exists N, \forall n : n \geq N \implies u_n \notin K]$, on a : $[\forall N, \exists n : n \geq N \text{ et } u_n \in K]$; c'est dire qu'il existe $(u_n)_{n \in S}$, une suite extraite, telle que $u_n \in K$ pour tout $n \in S$. D'après la propriété de Weierstraß, il existe $(u_n)_{n \in T}$, $T \subset S$ infini, telle que $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (u_n) = u \in K$.

On aurait alors, puisque $x \mapsto d(a, x)$ est continue : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} d(a, u_n) = d(a, u)$, ce qui est impossible d'après l'hypothèse $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, u_n) = \infty$ (on ne peut pas extraire une suite convergente vers un réel d'une suite tendant vers l'infini !). ♦

Démontrons que [P1] \implies [P2].

$\forall a \in E$ fixé, $B(a, p]$, $p \in \mathbb{N}^*$, est compact. Donc il existe $N(p)$ tel que $\forall n \geq N$ on a : $u_n \notin B(a, p] \implies d(a, u_n) > p$. C'est dire que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a, u_n) = \infty$. ♦

7) [Q1] \implies [Q2]

Soit $(u_n)_n$ une suite possédant la propriété [P1], et prouvons que $(f(u_n))_n$ possède cette propriété. Soit K un compact de F : $f^{-1}(K)$ est donc compact dans E . Donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n \notin f^{-1}(K)$ pour tout $n \geq N$. Mais alors $f(u_n) \notin K$ pour tout $n \geq N$, et $(f(u_n))_n$ a la propriété [P1]. ♦

[Q2] \implies [Q1]

Soit K compact dans F . K est donc fermé dans F , et comme f est continue : $f^{-1}(K)$ est fermé dans E . D'après 2), si $f^{-1}(K)$ est borné, on a terminé.

Si $f^{-1}(K)$ n'est pas borné, il existe $a \in E$ et une suite (u_n) , $u_n \in f^{-1}(K)$, telle que [P3], mais alors $(f(u_n))_n$ vérifie [P3] et $f(u_n) \in K$ est impossible. ♦

8) $u \notin A \implies d(u, A) = \alpha > 0$, car A est fermé. $C = B(u, \alpha + 1) \cap A$ [C est non vide, par définition de $d(u, A) = \alpha$] est fermé et borné, donc compact.

$\inf_{v \in A} d(u, v) = d(u, A) = \inf_{v \in C} d(u, v)$,
car si $v \in A \setminus C$ on a : $d(u, v) \geq \alpha + 1 > \alpha$.

Enfin, $v \in C \mapsto d(u, v)$ est continue sur le compact C , et donc atteint son *minimum* sur C : $\exists a \in C : d(u, a) = \min_{v \in C} d(u, v) = d(u, A)$ [cf. XIV, Exercice 2.11]. ♦

Bien sûr, si $u \in A : d(u, A) = 0 = d(u, u)$. ♦

Si $A \cap B \neq \emptyset$, tout $u \in A \cap B$ vérifie $d(A, B) = 0 = d(u, u)$.

On supposera que $A \cap B = \emptyset$.

Tout $u \in B$ vérifie $d(u, A) \neq 0$; la fonction $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto d(u, A)$ est continue sur le compact B (elle est contractante) : donc, il existe $b \in B$ tel que :

$$\min_{u \in B} d(u, A) = d(b, A) = \inf_{u \in B} d(u, A) = d(A, B) > 0 \text{ (car } b \notin A).$$

D'après ce qui précède, $d(b, A) = d(b, a)$ pour un certain $a \in A$, et donc $d(A, B) = d(a, b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$. ♦

9) K_0 n'étant pas défini, on pose $K_0 = \{w\}$ où $w \in \text{int}(K_1) \supset U_1 \neq \emptyset$.

Soit $g_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$g_n(u) := \frac{d(u, K_{n-1})}{d(u, K_{n-1}) + d(u, E \setminus U_n)}$$

Comme $K_{n-1} \subset U_n$, $K_{n-1} \cap (E \setminus U_n) = \emptyset$, et K_{n-1} , $E \setminus U_n$ étant fermés, g_n est bien définie et continue sur E entier. $\forall u \in E : 0 \leq g_n(u) \leq 1$, et $g_n(u) = 0$ pour tout $u \in K_{n-1}$, $g_n(u) = 1$ pour tout $u \notin U_n$, en particulier pour tout $u \notin K_n = \text{adh}(U_n)$.

Pour tout $u \in E$, posons : $f(u) := \sum_{n=1}^{\infty} g_n(u)$. Pour tout $u \in E$ fixé, la somme est en fait finie, puisque (K_n) est un recouvrement croissant de E : soit K_p le plus petit élément de (K_n) tel que $u \in K_p$, on a $g_n(u) = 0$ pour tout $n > p$.

Le raisonnement montre qu'on a davantage : la somme est finie sur chaque K_n . Donc, sur chaque K_n , la fonction f est continue (somme finie de fonctions continues). Comme (K_n) recouvre E , la fonction f est continue sur E (pour $u \in E$, $B(u, \rho)$ est dans un K_n , etc.).

La fonction f , par construction, vérifie $f(u) \leq n$ pour $u \in K_n$ et $f(u) \geq n$ pour $u \notin K_n$ (faire un dessin !). ♦

On pose, pour tous $u, v \in E : \delta(u, v) := d(u, v) + |f(u) - f(v)|$.

δ est somme d'une distance et d'une semi-distance, c'est donc une semi-distance ; mais $\delta(u, v) = 0 \implies d(u, v) = 0 \implies u = v$. Donc δ est une distance. ♦

Démontrons que δ est topologiquement équivalente à d , i.e. que $Id_E : E_d \rightarrow E_\delta, u \mapsto u$, est un homéomorphisme.

• : $Id_E : E_\delta \rightarrow E_d$ est continue car :

$$d(u, v) \leq \delta(u, v) \implies [\delta(u, v) \leq \varepsilon \implies d(u, v) \leq \varepsilon].$$

• $Id_E : E_d \rightarrow E_\delta$ est continue car si $u \in E$ est fixé, soit $\varepsilon > 0 : f$ étant continue en u , $\exists \eta > 0, \forall v \in E : d(u, v) \leq \eta \implies |f(u) - f(v)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$; il suffit donc de prendre $\eta_0 \leq \min\{\frac{1}{2}\varepsilon, \eta\}$ pour que $d(u, v) \leq \eta_0 \implies \delta(u, v) \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. ♦

Démontrons enfin que les boules fermées correspondantes à la distance δ sont compactes. Soit $B = B_\delta(u_0, \rho)$ une boule fermée relative à la distance δ .

$$\forall u \in B : d(u, u_0) + |f(u) - f(u_0)| \leq \rho$$

$$\implies f(u) - f(u_0) \leq d(u, u_0) + |f(u) - f(u_0)| \leq \rho \implies f(u) \leq f(u_0) + \rho ;$$

soit p un entier tel que $f(u_0) + \rho < p$; on a : $f(u) < p \implies u \in K_p$ (propriété de f) ; B est fermée pour δ dans K_p compact (les compacts pour δ et d sont les mêmes), donc B est compact. ♦

PROBLÈME 2

Le théorème de Bohman-Korovkin

Soit S un espace métrique compact ayant deux points au moins. On note $E := \mathcal{C}(S)$ l'espace vectoriel des fonctions $S \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur S . E sera normé par

$$\|f\| = \|f\|_\infty = \sup_{s \in S} |f(s)|.$$

On suppose qu'il existe g_1, \dots, g_p et f_1, \dots, f_p appartenant à E et vérifiant :

$$(i) \forall (s, t) \in S \times S : \sum_{k=1}^p g_k(t) \cdot f_k(t) \geq 0,$$

$$(ii) \sum_{k=1}^p g_k(t) \cdot f_k(s) = 0 \iff t = s.$$

Soit $L_n : E \rightarrow E$ une suite d'applications linéaires et positives, i.e. vérifiant :

$$[f \geq 0 (\iff \forall s \in S : f(s) \geq 0)] \implies L_n(f) \geq 0.$$

On suppose que : $\forall k, 1 \leq k \leq p : \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f_k) - f_k\| = 0$.

On considère les fonctions du type $\varphi := \sum_{k=1}^p \alpha_k f_k$ où $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

1) Démontrez qu'on peut choisir α_k de telle sorte que φ soit > 0 sur S entier.

Indication : Prendre $t \neq t'$ et $\alpha_k = g_k(t) + g_k(t')$.

Dans la suite on notera $\widehat{\varphi}$ une telle fonction (de type φ et > 0 sur S) ; démontrez que $\frac{1}{\widehat{\varphi}} \in E$.

2) Démontrez que pour tout φ du type défini ci-dessus on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(\varphi) - \varphi\| = 0$.

3) Démontrez que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in S} \{ [L_n(\sum_{k=1}^p g_k(s) f_k)](s) \} = 0$.

4) $\mathbf{1}_S$ désignant la fonction de E définie par $\mathbf{1}_S(s) = 1$ pour tout $s \in S$, démontrez qu'il existe une certaine constante C (ne dépendant pas de n) telle que : $\|L_n(\mathbf{1}_S)\| \leq C$.

Indication : Utilisez une fonction $\widehat{\varphi}$ (voir plus haut).

5) Soit $f_s \in E$, $s \in S$, une famille de fonctions telle que :

(1) La fonction $(s, t) \in S \times S \mapsto f_s(t)$ est continue,

(2) $\forall s \in S : f_s(s) = 0$.

Démontrez que : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in S} [L_n(f_s)](s) = 0$.

Indications : soit $D := \{(s, s) / s \in S\}$ et soit $\varepsilon > 0$.

$\forall s \in S, \exists V(s, s)$ voisinage de (s, s) tel que $(s, t) \in V(s, s) \implies |f_s(t) - f_s(s)| < \varepsilon$.

On pose $U := \bigcup_{s \in S} V(s, s)$ et $T := S \times S \setminus U$.

On pose : $\mu := \min_{(s,t) \in T} \{ \sum_{k=1}^p g_k(s) f_k(t) \}$ et $M := \max_{(s,t) \in T} |f_s(t)|$.

Démontrez alors que $\forall (s, t) \in S \times S : |f_s(t)| \leq \varepsilon + \frac{M}{\mu} \sum_{k=1}^p g_k(s) f_k(t)$ et enfin

que : $\sup_{s \in S} |[L_n(f_s)](s)| \leq (C + \frac{M}{\mu}) \varepsilon$

(on prouvera que si $f, g \in E$ vérifient $f \leq g$ on a : $L_n(f) \leq L_n(g)$).

6) On veut prouver que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\| = 0$ pour tout $f \in E$.

Soit $f \in E$; on pose pour $s \in S : f_s := f - \frac{f(s)}{\widehat{\varphi}(s)} \cdot \widehat{\varphi}$, et on applique 5). On majore ensuite $\|L_n(f) - f\|$. Concluez.

7) Démontrez que si $S \subset \mathbb{R}^n$ on peut prendre, pour $s = (s_1, \dots, s_n)$ et $t = (t_1, \dots, t_n) : g_1(t) = \|t\|^2, f_1(s) = 1$; pour $2 \leq k \leq n+1 : g_k(t) = -2t_{k-1}, f_k(s) = s_{k-1} ; g_{n+2}(t) = 1, f_{n+2}(s) = \|s\|^2$. Que trouve-t-on quand $n = 1$? Est-ce que cela vous rappelle quelque chose ? Quoi ?

Remarque : Les questions découlent les unes des autres ; si vous ne parvenez pas à démontrer la question N , admettez le résultat et démontrez $N + 1$.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 2

1) Soient t et t' dans S tels que $t \neq t'$; on prend : $\alpha_k := g_k(t) + g_k(t')$, il vient :

$$\forall s \in S : \varphi(s) = \sum_{k=1}^p [g_k(t) + g_k(t')] f_k(s) = \sum_{k=1}^p g_k(t) f_k(s) + \sum_{k=1}^p g_k(t') f_k(s).$$

Ces deux quantités sont ≥ 0 d'après (i) et donc, $\varphi(s) = 0$ si et seulement si $s = t$ et $s = t'$, d'après (ii), ce qui est impossible. ♦

Soit $\widehat{\varphi}$ une telle fonction, telle que $\widehat{\varphi} > 0$ sur S :

il est clair que $\inf_{s \in S} \widehat{\varphi}(s) = \min_{s \in S} \widehat{\varphi}(s) > 0$, parce que $\widehat{\varphi}$ est continue sur un compact. La fonction $\frac{1}{\widehat{\varphi}}$ définie par $(\frac{1}{\widehat{\varphi}})(s) = \frac{1}{\widehat{\varphi}(s)}$ appartient à E car elle est continue sur S (cours). ♦

$$\begin{aligned} 2) \|L_n(\varphi) - \varphi\| &= \|L_n(\sum_{k=1}^p \alpha_k f_k) - \sum_{k=1}^p \alpha_k f_k\| = \|\sum_{k=1}^p \alpha_k [L_n(f_k) - f_k]\| \\ &\leq \sum_{k=1}^p |\alpha_k| \cdot \|L_n(f_k) - f_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ par hypothèse. } \diamond \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3) \sup_{s \in S} \left\{ \left[L_n \left(\sum_{k=1}^p g_k(s) f_k \right) \right](s) \right\} &= \sup_{s \in S} \left\{ \sum_{k=1}^p g_k(s) [L_n(f_k)](s) \right\} \\
&= \sup_{s \in S} \left\{ \sum_{k=1}^p g_k(s) [L_n(f_k) - f_k + f_k](s) \right\} \\
&\leq \sup_{s \in S} \left\{ \sum_{k=1}^p g_k(s) [L_n(f_k) - f_k](s) \right\} + \sup_{s \in S} \sum_{k=1}^p g_k(s) f_k(s).
\end{aligned}$$

Le second terme est nul d'après (ii), et on a :

$$\begin{aligned}
\sup_{s \in S} \left\{ \left[L_n \left(\sum_{k=1}^p g_k(s) f_k \right) \right](s) \right\} &\leq \sum_{k=1}^p \sup_{s \in S} g_k(s) \cdot \sup_{s \in S} \{ L_n(f_k)(s) - f_k(s) \} \\
&\leq \sum_{k=1}^p \|g_k\| \cdot \|L_n(f_k) - f_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ par hypothèse. } \blacklozenge
\end{aligned}$$

$$4) \forall s \in S : \mathbf{1}_S(s) = 1 = \frac{1}{\widehat{\varphi}(s)} \widehat{\varphi}(s) \leq \left\| \frac{1}{\widehat{\varphi}} \right\| \|\widehat{\varphi}\|, \text{ d'où :}$$

$$\|L_n(\mathbf{1}_S)\| \leq \left\| \frac{1}{\widehat{\varphi}} \right\| \|L_n(\widehat{\varphi})\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{\widehat{\varphi}} \right\| \|\widehat{\varphi}\| \text{ par 2), et puisque tout est } > 0 :$$

$$\forall s \in S : \left\| \frac{1}{\widehat{\varphi}} \right\| \|L_n(\widehat{\varphi})\| \leq \left\| \frac{1}{\widehat{\varphi}} \right\| \|\widehat{\varphi}\|, \text{ et : } \|L_n(\mathbf{1}_S)\| \leq \left\| \frac{1}{\widehat{\varphi}} \right\| \cdot \|L_n(\widehat{\varphi})\| \leq \left\| \frac{1}{\widehat{\varphi}} \right\| \cdot \|\widehat{\varphi}\|. \text{ (Ce dernier terme n'est pas 1 !)} \blacklozenge$$

5) Soit $f_s, s \in S$, dans E vérifiant (1) et (2) de l'énoncé. Soit $D := \{(s, s) / s \in S\}$, et soit $\varepsilon > 0$.

Par (1) : $\forall s \in S, \varepsilon > 0$ étant donné, $\exists V(s, s)$ un voisinage ouvert de (s, s) dans $S \times S$ tel que : $(s, t) \in V(s, s) \implies |f_s(t) - f_s(s)| \stackrel{(2)}{=} |f_s(t)| < \varepsilon$.

Soit $U := \bigcup_{s \in S} V(s, s)$: c'est un ouvert de $S \times S$; $T := S \times S \setminus U$ fermé dans un compact (le produit de deux compacts est compact) est compact. On pose :

$$\mu := \min_{(s,t) \in T} \left\{ \sum_{k=1}^p g_k(s) f_k(t) \right\} \text{ et } M = \max_{(s,t) \in T} |f_s(t)|.$$

μ est > 0 car $T \cap D = \emptyset$ (on prend sur un compact le *minimum* d'une fonction continue > 0).

• si $(s, t) \in U$: $(s, t) \in V(s_1, s_1)$ pour un $s_1 \in S$ et, donc : $|f_s(t)| < \varepsilon$,

• si $(s, t) \in T$: $|f_s(t)| \leq \frac{M}{\mu} \mu \leq \frac{M}{\mu} \sum_{k=1}^p g_k(s) f_k(t)$, et, premier résultat :

$$\forall (s, t) \in S \times S : |f_s(t)| \leq \varepsilon + \frac{M}{\mu} \sum_{k=1}^p g_k(s) f_k(t).$$

$$\text{Soit : } |f_s| \leq \varepsilon \cdot \mathbf{1}_S + \frac{M}{\mu} \sum_{k=1}^p g_k(s) f_k.$$

Puisque L_n est linéaire et positive, on a :

$$f \leq g \implies g - f \geq 0 \implies L_n(g - f) \geq 0 \implies L_n(g) - L_n(f) \geq 0 \implies L_n(f) \leq L_n(g),$$

i.e. que L_n est croissante sur E . On a donc :

$$|L_n(f_s)| \leq \varepsilon \cdot L_n(\mathbf{1}_S) + \frac{M}{\mu} \sum_{k=1}^p g_k(s) L_n(f_k) \text{ et, par conséquent :}$$

$$\sup_{s \in S} \| [L_n(f_s)](s) \| \leq \varepsilon \|L_n(\mathbf{1}_S)\| + \frac{M}{\mu} \sup_{s \in S} \sum_{k=1}^p g_k(s) [L_n(f_k)](s).$$

Le premier terme est majoré par C de 4) et dans le second le sup est $\leq \varepsilon$ d'après la question 3).

On a en définitive :

$$\sup_{s \in S} \| [L_n(f_s)](s) \| \leq (C + \frac{M}{\mu}) \varepsilon. \blacklozenge$$

6) Soit $f \in E$. On pose pour $s \in S$: $f_s := f - \frac{f(s)}{\widehat{\varphi}(s)} \widehat{\varphi}$.

$$(2) \quad f_s(s) = f(s) - \frac{f(s)}{\widehat{\varphi}(s)} \widehat{\varphi}(s) = 0,$$

$$(1) \quad (s, t) \in S \times S \mapsto f_s(t) \text{ est continue (évident).}$$

D'après la question 5) : $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in S} \{ [L_n(f_s)](s) \} = 0$. D'où :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in S} [L_n(f) - \frac{f(s)}{\widehat{\varphi}(s)} L_n(\widehat{\varphi})](s) = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - f\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in S} [L_n(f) - f](s)$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in S} [L_n(f) - \frac{f(s)}{\widehat{\varphi}(s)} L_n(\widehat{\varphi})](s) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{s \in S} \left\{ \frac{f(s)}{\widehat{\varphi}(s)} [L_n(\widehat{\varphi})](s) - f(s) \right\};$$

le premier terme majorant tend vers 0 d'après ce qui précède, le second également d'après la question 2). La démonstration est terminée. ♦

7) Avec les fonctions proposées, on a :

$\sum_{k=1}^{n+2} g_k(t) f_k(s) = \|t\|^2 - 2(t_1 s_1 + \dots + t_n s_n) + \|s\|^2 = \|t - s\|^2$ et les propriétés (i) et (ii) sont évidentes.

Pour $n = 1$: $g_1(t) = t^2$, $f_1(s) = 1$; $g_2(t) = -2t$, $f_2(s) = s$; $g_3(t) = 1$, $f_3(s) = s^2$.

Ces fonctions font penser à la démonstration du Théorème de Weierstraß par la méthode des polynômes de Bernstein.

Si une suite (L_n) d'applications linéaires et positives vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f_k) - f_k\| = 0$ pour un certain nombre fini de fonctions f_k , le même résultat vaut pour toute fonction $f \in E$: c'est assez magique ! Autrement dit (L_n) converge vers Id_E « en un certain sens » plus faible que $\|L_n - Id_E\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$; mais cette notation est à justifier : L_n appartient-il à $\mathcal{L}(E)$? Voir ci-dessous.

Le résultat prouvé ici est le Th. de Bohman-Korovkin qui généralise un résultat antérieur de Korovkin. ♦

Pour être complet, on va démontrer que si $L : E \rightarrow E$ est linéaire et positif on a bien $L \in \mathcal{L}(E)$, i.e. qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\forall f \in E : \|L(f)\| \leq \lambda \|f\|$.

Soit en effet $f \in E$ et soient les fonctions :

$g : u \mapsto \|f\| + f(u)$ et $h : u \mapsto \|f\| - f(u)$; ces deux fonctions sont ≥ 0 pour tout $u \in S$, et on a donc : $g = \|f\| \cdot \mathbf{1} + f \geq 0$, $h = \|f\| \cdot \mathbf{1} - f \geq 0$.

D'après 5) on a donc :

$L(g) = \|f\| \cdot L(\mathbf{1}) - L(f) \geq 0$ et $L(h) = \|f\| \cdot L(\mathbf{1}) - L(f) \geq 0$, d'où l'on tire :

$$-\|f\| \cdot L(\mathbf{1}) \leq L(f) \leq \|f\| \cdot L(\mathbf{1}),$$

soit :

$\forall s \in S : -\|f\| \cdot L(\mathbf{1})(s) \leq L(f)(s) \leq \|f\| \cdot L(\mathbf{1})(s) \implies |L(f)(s)| \leq \|f\| \cdot L(\mathbf{1})(s)$.

C'est-à-dire : $\|L(f)\| \leq \|f\| \cdot \|L(\mathbf{1})\|$. Donc L est continue et $\|L\| \leq \|L(\mathbf{1})\|$. ♦

PROBLÈME 3

Le théorème de la place des zéros

Soit S un espace métrique compact (le résultat vaut pour un espace topologique compact (séparé) quelconque). Soit $E = \mathcal{C}(S)$ l'espace vectoriel des fonctions $S \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur S ; on munit E de la norme uniforme : $\|f\|_\infty = \max_{s \in S} |f(s)|$. E est un anneau pour les lois usuelles ($(f \cdot g)(s) = f(s) \cdot g(s)$).

Pour $f \in E$, on note : $Z_f := \{s \in S / f(s) = 0\}$,

et pour $X \subset E$: $Z_X := \bigcap_{f \in X} Z_f$.

Soit I un idéal fermé de E , et soit $g \in E$ telle que $Z_I \subset Z_g$. Rappelons que I idéal de E signifie : I est un sous-groupe additif de E et $[\forall f \in I, \forall g \in E : f \cdot g \in I]$.

On se propose de démontrer que $g \in I$.

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ fixé, arbitraire. On pose :

$U := \{s \in S / |g(s)| < \varepsilon\}$ et $T := \{s \in S / |g(s)| > \varepsilon\}$.

1) Soit $t \in T$. Démontrez qu'il existe $h_{(t)} \in I$ telle que $h_{(t)}(t) \neq 0$.

2) Démontrez qu'il existe h_1, \dots, h_N dans I telles que : $\forall t \in T, \exists i, 1 \leq i \leq N : h_i(t) \neq 0$.

3) On pose : $h := h_1^2 + \dots + h_N^2$ ($h_i^2 = h_i \cdot h_i$) ; Démontrez que $h \in I$ et que $h(t) > 0$ pour tout $t \in T$.

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n := \frac{nh}{1 + nh}$. Démontrez qu'on a $f_n \in I$. Démontrez que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur T vers la fonction constante égale à 1. En déduire que $g \in I$.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 3

1) On a : $Z_I \subset Z_g \subset U$, $U \cup T = S$ et $U \cap T = \emptyset$; U est ouvert dans S et T est fermé dans S , donc compact.

Soit $t \in T$. On a donc : $t \notin Z_I$, et donc : $\exists h_{(t)} \in I$ telle que $h_{(t)}(t) \neq 0$. En effet, $t \in S \setminus Z_I = \bigcup_{f \in I} (S \setminus Z_f) = \bigcup_{f \in I} \{s \in S / f(s) \neq 0\}$. ♦

2) A cause de la continuité de $h_{(t)}$, il existe un voisinage ouvert $V(t)$ tel que :

$$s \in V(t) \implies h_{(t)}(s) \neq 0.$$

On recouvre T compact par les $(V(t))_{t \in T}$ et on peut donc en extraire un recouvrement fini : $V(t_1), \dots, V(t_N)$, recouvrement auquel correspondent les fonctions $h_{(t_1)}, \dots, h_{(t_N)}$ du type trouvé dans 1). On notera : $h_i := h_{(t_i)}$.

Par définition, les h_i vérifient : pour tout $t \in T$, il existe i , $1 \leq i \leq N$, tel que $h_i(t) \neq 0$, puisque $t \in V(t_i)$ pour un certain i (recouvrement). ♦

3) Soit la fonction : $h := h_1^2 + \dots + h_N^2$. On a :

(i) $h \in I$; en effet I est un idéal de E et $h_i \in I \implies h_i^2 \in I$, et I est stable pour $+$.

(ii) $h \geq 0$; c'est bien évident.

(iii) $\forall t \in T : h(t) \neq 0$; en effet, pour $t \in T$ donné, il existe un i , $1 \leq i \leq N$, tel que $t \in V(t_i)$ sur lequel $h_i \neq 0$, d'où : $h(t) \geq h_i^2(t) > 0$.

$h|_T : T \rightarrow \mathbb{R}$ atteint son *minimum* sur le compact T :

$\exists t_0 \in T : \min_{t \in T} h(t) = h(t_0) \leq h(t)$ pour tout $t \in T$, et $h(t_0) > 0$ par (iii). ♦

4) Considérons la suite de fonctions : $f_n := \frac{nh}{1+nh}$, $n = 1, 2, \dots$

$1+nh > 0$ sur S entier car $h \geq 0$, d'où : $\frac{1}{1+nh} \in E$ (propriétés des fonctions continues), et $nh = h + \dots + h \in I$, d'où (I idéal) : $f_n = nh \times \frac{1}{1+nh} \in I$.

On a : $\sup_{t \in T} \left| \frac{nh}{1+nh} - 1 \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. En effet :

$$\forall t \in T : \left| \frac{nh}{1+nh} - 1 \right| = \frac{1}{1+nh(t)} \leq \frac{1}{1+nh(t_0)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \text{ car } h(t_0) > 0.$$

Donc la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur T vers la fonction $\mathbf{1}_T$ constante égale à 1. ♦

Comme $g \in E$ et $f_n \in I : g \cdot f_n \in I$ (I idéal), et on a : $(g \cdot f_n)$ converge uniformément sur T vers g . En effet :

$$\sup_{t \in T} |(g \cdot f_n)(t) - g(t)| \leq \sup_{t \in T} |g(t)| \cdot \sup_{t \in T} |f_n(t) - 1| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

car g est bornée sur T . Donc, pour n assez grand, on a :

$$\sup_{t \in T} |(g \cdot f_n)(t) - g(t)| \leq \varepsilon. \quad \blacklozenge$$

Voyons ce qui se passe sur U :

$$\begin{aligned} \sup_{s \in U} |(g \cdot f_n)(s) - g(s)| &\leq \sup_{s \in U} |(g \cdot f_n)(s)| + \sup_{s \in U} |g(s)| \\ &\leq \sup_{s \in U} |(g \cdot f_n)(s)| + \varepsilon, \text{ par définition de } U. \end{aligned}$$

Mais on a : $0 \leq f_n = \frac{nh}{1+nh} \leq 1$, d'où $|(g \cdot f_n)(s)| \leq |g(s)| \leq \varepsilon$ sur U . Donc :

$$\sup_{s \in U} |(g \cdot f_n)(s) - g(s)| \leq 2\varepsilon. \quad \blacklozenge$$

Considérons maintenant la boule $B(g, 2\varepsilon)$ (boule correspondant à la norme $\|\cdot\|_\infty$), $0 < \varepsilon < 1$ arbitraire. Si l'on prouve qu'il existe $k_\varepsilon \in I \cap B(g, 2\varepsilon)$, on aura $g \in \text{adh}(I) = I$ (I fermé).

En procédant comme expliqué dans les questions 1) à 3), et en réunissant les deux résultats ci-dessus, comme $S = T \cup U : \sup_{s \in S} |(g \cdot f_n)(s) - g(s)| \leq 2\varepsilon$ pour $n \geq N_\varepsilon$.

Il suffit donc de prendre $k_\varepsilon = g \cdot f_n \in I$, pour $n \geq N_\varepsilon : \|k_\varepsilon - g\|_\infty \leq 2\varepsilon$, et c'est fini. ♦

Le nom donné à ce résultat provient de sa ressemblance formelle avec un théorème d'algèbre (concernant les polynômes à n indéterminées) très connu de Hilbert : le *Nullstellensatz*.

Fin du Chapitre XIV

CHAPITRE XV

COMPLÉTÉ D'UN ESPACE MÉTRIQUE d'un e.v.n. et d'un espace préhilbertien

Introduction

Ce chapitre XV porte sur l'intéressante/importante notion d'*espace métrique complété*. On y démontre que tout espace métrique – moralement non complet – est *isométrique* (donc « s'identifie ») à une partie partout dense d'un espace métrique *complet* (qui est le *complété*).

Une grande partie de ce chapitre consiste à construire effectivement (mais de manière abstraite) cet espace, qui, à une isométrie près, est unique. On précise ensuite le résultat lorsque (E, d) est un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ puis un espace préhilbertien $(E, (\cdot|\cdot))$.

Le prototype de cette « complétion » est la construction effective (par Cantor) de \mathbb{R} à partir de \mathbb{Q} : **attention** toutefois au fait qu'on ne peut pas parler d'espace métrique si l'on ne suppose pas que \mathbb{R} est connu !!!

Il faut adapter la démonstration de ce chapitre en considérant \mathbb{Q} non pas comme un espace métrique, mais comme un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ à *valeurs rationnelles*, ce qui permet de définir des suites de Cauchy de rationnels, de construire le complété, le « futur » \mathbb{R} , et d'étendre $|\cdot|$ à \mathbb{R} .

Cela marche même si $|\cdot|$ n'est pas la valeur absolue usuelle (corps p -adiques) . . .

Ce chapitre a donc des répercussions à un niveau élémentaire, ce qui devrait intéresser en premier lieu les étudiants qui enseignent déjà dans le secondaire, ou qui pensent y enseigner un jour. Mais par ailleurs :

- La notion de complété est extrêmement satisfaisante sur le plan théorique et intellectuel : elle répond de manière simple, et en quelque sorte définitive, à un problème qui se pose naturellement (exemple de *problème universel*),
- Les mathématiciens dits « appliqués » construisent sans cesse de nouveaux espaces pour « bien poser » leurs problèmes (équations aux dérivées partielles, entre autres . . .) ; un des procédés utilisés est la complétion.

Le problème (dont nous dirons quelques mots) de l'interprétation concrète d'un complété est difficile mais plein d'intérêt.

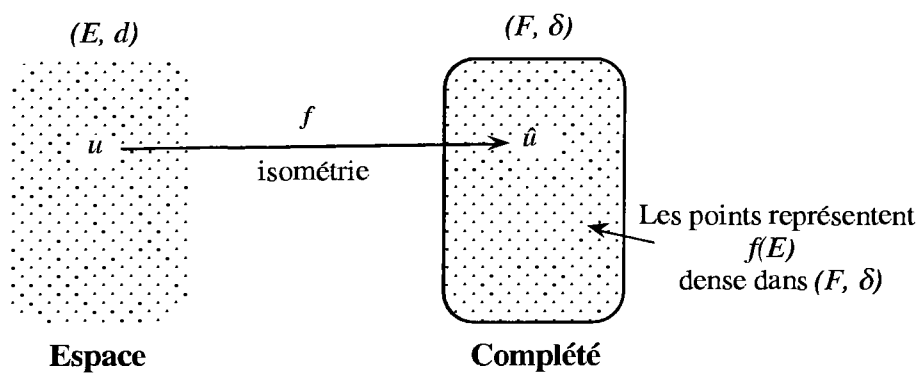
De ce chapitre, il est nécessaire de retenir les trois théorèmes, et de savoir les expliquer. Il n'est pas nécessaire de retenir le détail des démonstrations qui sont d'ailleurs très simples : les étapes sont naturelles et les vérifications aisées.

☞ **Exercices indispensables** : 2.1, 2.2, 2.3.

☞ Exercice complémentaire : 1.1

Vous trouverez en Annexe les propriétés de \mathbb{R} .

BON TRAVAIL !



CHAPITRE XV

COMPLÉTÉ D'UN ESPACE MÉTRIQUE d'un e.v.n. et d'un espace préhilbertien

En 1850 la notion mathématique de nombre réel, et surtout celle d'*ensemble des nombres réels* reste encore un peu trouble, en dépit des éclaircissements apportés par Cauchy aux environs de 1820.

Vers 1870, avec des méthodes diverses, et indépendamment les uns des autres, Bolzano, Weierstrass, Dedekind, Méray, Cantor *construisent* effectivement l'ensemble des réels en « complétant » celui des rationnels.

La méthode due à Cantor (1871) a été adaptée vers 1920 par Hausdorff qui a démontré qu'on pouvait toujours « plonger » un espace métrique *arbitraire* dans un espace métrique *complet*.

C'est cette méthode de *complétion* que nous allons vous exposer.

1. COMPLÉTÉ D'UN ESPACE MÉTRIQUE

Théorème 1.1. (FONDAMENTAL) :

Soit (E, d) un espace métrique *quelconque*.

Il existe un espace métrique (F, δ) **complet** qui contient un sous-espace métrique :

- (i) *isométrique* à (E, d) ,
- (ii) *partout dense* dans (F, δ) .

De plus : deux espaces métriques (F_1, δ_1) et (F_2, δ_2) possédant ces propriétés sont *isométriques*.

Définition 1.1.

L'espace métrique (F, δ) porte le nom de **complété de** (E, d) . Il est *unique* à une isométrie surjective près.

Démonstration :

La démonstration est longue, mais sans difficulté aucune : c'est une suite de vérifications simples. Il est recommandé de la lire avant de passer à la suite du cours ; d'ailleurs vous mourrez probablement d'envie de savoir comment on peut fabriquer (F, δ) , non ?

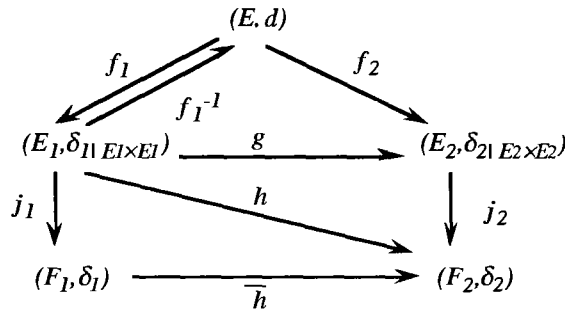
Une remarque préalable : on prend \mathbb{N} comme ensemble d'indexation des suites considérées, mais on aurait aussi bien pu prendre $S \subset \mathbb{N}$, S infini.

1) Unicité : En admettant provisoirement l'existence, soient (F_1, δ_1) et (F_2, δ_2) deux espaces métriques complétés de (E, d) . (E, d) est donc *isométrique*, par une *isométrie surjective* f_1 , à un sous-espace métrique $(E_1, d_{|E_1 \times E_1})$ de (F_1, δ_1) , sous-espace métrique partout dense dans (F_1, δ_1) . Soit j_1 l'injection naturelle $u \mapsto u$ de E_1 dans F_1 . (F_1, δ_1) , par définition, est *complet*. Même chose pour (F_2, δ_2) , E_2 , f_2 et j_2 .

On va démontrer qu'il existe une *isométrie surjective* entre F_1 et F_2 .

Considérons $g : E_1 \rightarrow E_2$ définie par $g := f_2 \circ f_1^{-1}$: c'est une isométrie surjective.

Considérons ensuite $h := j_2 \circ g$ qui est une isométrie (mais *non* surjective !) de E_1 dans F_2 . h isométrie est uniformément continue sur E_1 , et on se trouve dans les conditions d'application du Th. 1.1 du Chap. XII : il existe un *prolongement* \bar{h} de h qui est uniformément continu de F_1 dans F_2 .



Comme h est une isométrie, il en est de même de \bar{h} ; en effet, soient u, v dans F_1 : il existe $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite convergente dans F_1 de points de E_1 de limite u (à cause de la densité de E_1 dans F_1) ; de même pour $(v_n)_n$ et v .

$\forall n \in \mathbb{N} : \delta_2[\bar{h}(u_n), \bar{h}(v_n)] = \delta_2[h(u_n), h(v_n)] = \delta_1(u_n, v_n)$, et comme δ_1, δ_2 , et h sont continus, en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$, on obtient :

$$\delta_2[\bar{h}(u), \bar{h}(v)] = \delta_1(u, v).$$

\bar{h} est donc une isométrie de F_1 sur son image $\bar{h}(F_1) \subset F_2$.

F_1 étant complet, il en est de même de l'espace métrique isométrique $\bar{h}(F_1)$.

$\bar{h}(F_1)$ complet dans F_2 est donc fermé dans F_2 [Chap. XI, Th. 1.1].

Démontrons que $j_2(E_2)$ qui est partout dense dans F_2 est contenu dans $\bar{h}(F_1)$: $h(E_1) = j_2 \circ g(E_1)$, $g(E_1) = E_2$ car g est bijective, et donc : $h(E_1) = j_2(E_2)$; par conséquent : $j_2(E_2) = h(E_1) = \bar{h}(E_1) \subset \bar{h}(F_1)$.

On en déduit : $\text{adh}_{F_2}[j_2(E_2)] = F_2 \subset \text{adh}_{F_2}[\bar{h}(F_1)] = \bar{h}(F_1)$, soit : $\bar{h}(F_1) = F_2$, et \bar{h} est surjective. Finalement, \bar{h} est une isométrie surjective de F_1 sur F_2 , et ces deux espaces métriques sont donc «égaux». ♦

2) Construction de (F, δ) :

a) Une relation d'équivalence sur les suites de Cauchy d'éléments de E .

Soit \mathcal{E} l'ensemble de toutes les suites de Cauchy d'éléments de E . Deux suites de Cauchy $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E seront dites *équivalentes* si l'on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} (d(u_n, v_n))_n = 0$. Notons \sim cette relation. C'est une relation d'équivalence sur l'ensemble E :

- $(u_n)_n \sim (u_n)_n$ car $d(u_n, u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 - $(u_n)_n \sim (v_n)_n \implies (v_n)_n \sim (u_n)_n$ car $d(v_n, u_n) = d(u_n, v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
 - $(u_n)_n \sim (v_n)_n$ et $(v_n)_n \sim (w_n)_n \implies (u_n)_n \sim (w_n)_n$
- car $d(u_n, w_n) \leq d(u_n, v_n) + d(v_n, w_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, w_n) = 0$ si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} d(v_n, w_n) = 0$. ♦

b) L'ensemble quotient $F = \mathcal{E} / \sim$

Notons F l'ensemble-quotient \mathcal{E} / \sim de l'ensemble \mathcal{E} par la relation d'équivalence \sim . On divise ainsi \mathcal{E} en sous-ensembles \bar{u}, \bar{v}, \dots appelés *classes d'équivalence* qui sont disjoints deux à deux, et dont la réunion est \mathcal{E} .

Un élément d'une classe, appelé *représentant de la classe*, est donc une suite de Cauchy de points de E , et deux éléments $(u_n)_n, (v_n)_n$ de \mathcal{E} sont dans une même classe si et seulement si $(u_n)_n \sim (v_n)_n \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n) = 0$.

Remarques : Si dans une classe \bar{u} il y a un représentant convergent vers $u \in E$, tout autre élément de la classe converge également vers u , soit :

Si deux suites de \mathcal{E} sont convergentes de limites respectives u, v , avec $u \neq v$, elles sont dans des classes différentes.

Si dans une classe il y a un représentant divergent, tous les autres représentants sont divergents. Bien entendu, les suites de Cauchy divergentes ne sont pas toutes dans une même classe ! ♦

c) *Plongement de E dans $F = \mathcal{E} / \sim$:*

Soit $u \in E$; posons $u_n = u$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui définit une suite de Cauchy convergente de limite u . Soit $\bar{u} \in F$ la classe à laquelle appartient la suite définie ci-dessus. Sont dans \bar{u} toutes les suites de Cauchy convergentes et de limite u .

L'application $f : E \rightarrow F, u \in E \mapsto \bar{u} \in F$, associe donc à $u \in E$ l'ensemble de toutes les suites de Cauchy convergentes et de limite u . C'est une application injective, car si $u \neq v$ on a clairement $\bar{u} = f(u) \neq \bar{v} = f(v)$: une suite convergente vers u ne peut pas converger vers $v \neq u$!

On peut donc, grâce à f , « identifier » E au sous-ensemble $f(E)$ de F , avec lequel il est en bijection. ♦

d) *Distance sur $F = \mathcal{E} / \sim$:*

Soient \bar{u} et \bar{v} deux éléments de F . Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ des représentants de \bar{u} et \bar{v} respectivement. La suite $(d(u_n, v_n))_n$ est une suite de Cauchy de nombres réels positifs ou nuls car : $|d(u_{n+p}, v_{n+p}) - d(u_n, v_n)| \leq d(u_{n+p}, u_n) + d(v_{n+p}, v_n)$ ⁽¹⁾, et $(u_n)_n, (v_n)_n$ sont des suites de Cauchy.

Comme \mathbb{R} est complet, la suite $(d(u_n, v_n))_n$ est convergente dans \mathbb{R} (et de limite positive ou nulle) : on notera $\delta(\bar{u}, \bar{v})$ sa limite.

Vérifions que $\delta(\bar{u}, \bar{v})$ ne dépend que de \bar{u} et \bar{v} , c'est-à-dire ne dépend pas des représentants choisis pour définir ce nombre.

Soient $(u'_n)_n$ et $(v'_n)_n$ deux autres représentants de \bar{u} et \bar{v} respectivement :

$|d(u_n, v_n) - d(u'_n, v'_n)| \leq d(u_n, u'_n) + d(v_n, v'_n)$ [inégalité du quadrilatère encore] a pour limite 0 lorsque $n \rightarrow \infty$, car $(u_n) \sim (u'_n)$ et $(v_n) \sim (v'_n)$.

Nous avons donc défini ainsi une fonction $\delta : F \times F = (\mathcal{E} / \sim) \times (\mathcal{E} / \sim) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\delta(\bar{u}, \bar{v}) \geq 0$ pour tous \bar{u}, \bar{v} de F . ♦

e) *δ est une distance sur F :*

• $\forall \bar{u}, \bar{v} \in F : \delta(\bar{v}, \bar{u}) = \delta(\bar{u}, \bar{v})$ est vérifié car $d(v_n, u_n) = d(u_n, v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• si $\bar{u} \neq \bar{v}$, et si $(u_n), (v_n)$ sont des représentants respectifs, les deux suites (u_n) et (v_n) ne sont pas équivalentes, et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, v_n) \neq 0$, soit $\delta(\bar{u}, \bar{v}) \neq 0$.

• Inégalité triangulaire.

On prend des représentants de $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, et : $d(u_n, v_n) \leq d(u_n, w_n) + d(w_n, v_n)$ pour tout n donne à la limite : $\delta(\bar{u}, \bar{v}) \leq \delta(\bar{u}, \bar{w}) + \delta(\bar{w}, \bar{v})$.

δ est une distance sur F . ♦

(1) C'est l'inégalité du quadrilatère dans un espace métrique :

$|d(x, y) - d(z, t)| \leq |d(x, y) - d(x, z)| + |d(x, z) - d(z, t)| \leq d(y, z) + d(x, t)$, obtenue en utilisant deux fois la seconde inégalité triangulaire (dessin !).

f) Relation entre d et δ , et l'isométrie de E dans F :

Soient u et v dans E , et soient \bar{u} et \bar{v} leur classe dans F . Un représentant de \bar{u} sera $(u, u, u, \dots, u, \dots)$, et un représentant de \bar{v} sera $(v, v, v, \dots, v, \dots)$. On aura donc :

$$\delta[f(u), f(v)] = \delta(\bar{u}, \bar{v}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (d(u, v))_n = d(u, v).$$

Autrement dit δ induit sur $f(E) \times f(E)$ la distance d , ou encore : f est une isométrie de E sur $f(E)$. ♦

g) $f(E)$ (isométrique à E) est partout dense dans F :

Soit en effet $\bar{u} \in F$, et soit $(u_n)_n$ un représentant de \bar{u} : $(u_0, u_1, \dots, u_n, \dots)$.

Considérons la suite d'éléments de $f(E)$ suivante :

$$\bar{v}_0 = f(u_0) = (u_0, u_0, \dots, u_0, \dots) = \bar{u}_0 \in f(E),$$

$$\bar{v}_1 = f(u_1) = (u_1, u_1, \dots, u_1, \dots) = \bar{u}_1 \in f(E), \dots,$$

$$\bar{v}_k = f(u_k) = (u_k, u_k, \dots, u_k, \dots) = \bar{u}_k \in f(E), \text{ etc,}$$

et démontrons que $\lim_{k \rightarrow \infty} (\bar{v}_k)_k = \bar{u}$, soit : $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(\bar{u}, \bar{v}_k) = 0$; mais :

$$\delta(\bar{u}, \bar{v}_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(u_m, u_k), \text{ d'où : } \lim_{k \rightarrow \infty} \delta(\bar{u}, \bar{v}_k) = \lim_{m \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty} d(u_m, u_k) = 0,$$

puisque $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy. Donc $\bar{u} \in \text{adh}_F[f(E)]$, et $f(E)$ est partout dense dans F . ♦

h) Ne pas oublier le principal : (F, δ) est complet :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de F : démontrons qu'elle est convergente. Pour tout n , puisque $f(E)$ est partout dense dans F , on peut trouver un $v_n \in E$ tel que : $\delta(\bar{u}_n, f(v_n)) \leq \frac{1}{n+1}$.

La suite des $f(v_n)$ est également une suite de Cauchy dans F :

$$\begin{aligned} \delta[f(v_{n+p}), f(v_n)] &\leq \delta[f(v_{n+p}), \bar{u}_{n+p}] + \delta(\bar{u}_{n+p}, \bar{u}_n) + \delta[\bar{u}_n, f(v_n)] \\ &\leq \frac{1}{n+p+1} + \delta(\bar{u}_{n+p}, \bar{u}_n) + \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ car } (\bar{u}_n) \text{ est de Cauchy.} \end{aligned}$$

Puisque f est une isométrie : $(v_n)_n$ est une suite de Cauchy d'éléments de E .

Soit $\bar{v} \in F$ la classe à laquelle appartient la suite de Cauchy $(v_n)_n$.

Exactement comme dans l'étape g) précédente, on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{v}_n)_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(v_n))_n = \bar{v}.$$

Mais alors : $\delta(\bar{u}_n, \bar{v}) \leq \delta[\bar{u}_n, f(v_n)] + \delta[f(v_n), \bar{v}] \leq \frac{1}{n+1} + \delta[f(v_n), \bar{v}] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$,
et (\bar{u}_n) est convergente de limite \bar{v} .

En définitive (F, δ) est un espace métrique complet. ♦

Commentaires :

1) Bien sûr, si (E, d) est déjà un espace métrique complet, «le» complété de (E, d) s'identifie à l'espace (E, d) lui-même. A une isométrie surjective près. A moins d'éprouver un plaisir pervers à écrire $(u, u, u, \dots, u, \dots)$ à la place de u !

2) Il est parfois facile d'obtenir un complété : supposons que (E, d) , espace métrique non complet, soit un sous-espace métrique d'un espace métrique plus grand (F, d) qui – lui – est complet : «le» complété de (E, d) sera simplement obtenu en prenant l'adhérence de E dans (F, d) .

En effet, $\text{adh}(E)$ est une partie fermée de (F, d) complet, donc est une partie complète de (F, d) [Chap. XI, Th. 1.1], et E est bien partout dense dans l'espace métrique $(\text{adh}(E), d|_{\text{adh}(E) \times \text{adh}(E)})$.

Par exemple, $E = (\mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R}), d_\infty)$ (fonctions polynômes) n'est pas un espace complet [Chap. XI, Exercice 1.5] : son adhérence dans l'espace de Banach $\mathcal{B}_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ est «le» complété de E . Ensuite, la connaissance préalable de l'espace $\mathcal{C}_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ et du Th. de Weierstraß [Chap. IV] nous permettent d'interpréter «le» complété de

$\mathcal{P}_\infty([0, 1], \mathbb{R})$: c'est l'espace de Banach $\mathcal{C}_\infty([0, 1], \mathbb{R})$. De la même façon, le complété de $\mathcal{A}_\infty(0, 1], \mathbb{R})$ [cf. Chap. IV] est $\mathcal{C}_\infty([0, 1], \mathbb{R})$.

Considérons $\mathcal{E}_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ (*fonctions en escalier*) : c'est par définition que son complété (qui est son adhérence dans $\mathcal{B}_\infty([0, 1], \mathbb{R})$) est l'espace $\mathcal{R}_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ des *fonctions réglées*. Une *interprétation concrète* du complété consisterait – par exemple – à démontrer que $f \in \mathcal{B}_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ est dans $\mathcal{R}_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ si et seulement si $\lim_{t \rightarrow s, t < s} f(t)$ et $\lim_{t \rightarrow s, t > s} f(t)$ existent pour tout $s \in]0, 1[$.

3) Mais – en général – on ne sait pas trouver un « sur-espace » intéressant, comme on l'a fait ci-dessus, d'un espace non complet, et le complété est alors un objet à peu près complètement abstrait donné par la construction de la démonstration du Th. 1.1. On peut tout de même travailler un peu sur le complété en revenant à l'espace de départ grâce aux conditions (i) et (ii) du Th. 1.1. Mais si l'espace non complet considéré est intéressant pour une raison quelconque (par exemple si c'est le « bon » espace pour poser un certain type de problèmes importants) on (on = les mathématiciens) fait tout pour trouver une réalisation « concrète » des éléments du complété.

Par exemple, on sait [Chap. XI, Exemple 1.1] que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ n'est pas complet. La théorie de l'intégration lui donne un complété concret qui est l'espace de Banach $L^1(0, 1)$ [*espace de Lebesgue*]. Cet espace est d'autant plus concret que l'utilisateur est familier avec la théorie de l'intégrale au sens de Lebesgue . . .

Remarquez bien que $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ n'est pas directement un sous-espace vectoriel de $L^1(0, 1)$: il faut associer à chaque fonction continue la classe qui la représente dans $L^1(0, 1)$ [à savoir l'ensemble des fonctions qui ne diffèrent de f que sur un ensemble de mesure nulle].

En fait, historiquement, la théorie de l'intégrale de Lebesgue n'a pas été inventée pour donner un complété à $\mathcal{C}_1([0, 1], \mathbb{R})$! Mais il s'est avéré que donner une interprétation du complété de cet espace revient à faire la théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Un autre exemple qu'on ne pourra pas développer parce que les connaissances nécessaires ne vous seront données qu'en Maîtrise.

Dans la théorie des équations différentielles, on est naturellement amené à considérer des espaces comme le suivant :

$$E = \{ f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R} / f' \text{ existe et est continue sur }]0, 1[, \\ \int_0^1 |f(t)|^2 dt < \infty \text{ et } \int_0^1 |f'(t)|^2 dt < \infty \}$$

qui est un espace préhilbertien réel pour le produit scalaire :

$$(f|g) = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt + \int_0^1 f'(t) \cdot g'(t) dt.$$

Cet espace n'est pas complet.

La théorie des *Distributions* généralise la notion de dérivée de telle façon qu'on peut interpréter l'espace de Hilbert complété de E comme un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert $L^2(0, 1)$. Le complété étant muni du même produit scalaire que ci-dessus, mais avec des dérivées généralisées.

Ces espaces sont appelés *espaces de Sobolev*.

4) En reprenant l'Exercice 1.8 du Chap. XIV, *mutatis mutandis*, on peut énoncer en toute généralité :

un espace métrique (E, d) est précompact si et seulement si de toute suite de points de (E, d) on peut extraire une suite de Cauchy.

5) Si d et d' sont des distances équivalentes sur E , les espaces métriques (E, d) et (E, d') ont le même complété F sur lequel les distances δ et δ' sont équivalentes : revenir à la démonstration du Th. 1.1.

☞ **Exercice 1.1.** (assez facile) Soit (E, d) un espace métrique. On considère l'espace métrique $G = (\mathcal{B}(E, \mathbb{R}), d_\infty)$. Soit $a \in E$ fixé. Pour tout $u \in E$, on considère la fonction $f_u : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_u(v) = d(u, v) - d(v, a)$ pour tout $v \in E$.

Démontrez que $f_u \in G$, et que l'application $\Phi : E \rightarrow G, u \mapsto f_u$ est une isométrie. Déduisez-en une construction du complété différente de celle donnée dans le cours. Pourquoi ne nous sommes nous pas contenté de cette méthode plus rapide ? (répondre après la suite du cours).

2. COMPLÉTÉ D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ

Théorème 2.1. (FONDAMENTAL)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Soit d la distance associée à sa norme : $d(u, v) = \|u - v\|$. Soit (F, δ) l'espace métrique complété de l'espace métrique (E, d) .

Il existe sur F une structure *unique* d'espace vectoriel sur \mathbb{K} , et une norme $\|\cdot\|$ telle que $\|\bar{u} - \bar{v}\| = \delta(\bar{u}, \bar{v})$ pour tous $\bar{u}, \bar{v} \in F$.

$(E, \|\cdot\|)$ est *linéairement isométrique* à un sous-espace vectoriel *partout dense* de l'espace de Banach $(F, \|\cdot\|)$.

Définition 2.1.

$(F, \|\cdot\|)$ est appelé l'**espace de Banach complété** de l'e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$.

Démonstration : Puisque E est un espace vectoriel sur \mathbb{K} , il en est de même de \mathcal{E} [on reprend les notations du Th. 1.1], avec les opérations :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } \lambda(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

Si la relation \sim sur \mathcal{E} est compatible avec la structure vectorielle de \mathcal{E} , à savoir si :

$$[(u_n)_n \sim (u'_n)_n \text{ et } (v_n)_n \sim (v'_n)_n \implies (u_n + v_n)_n \sim (u'_n + v'_n)_n] \text{ et } \\ [\forall \lambda \in \mathbb{K} : (u_n)_n \sim (u'_n)_n \implies (\lambda u_n)_n \sim (\lambda u'_n)_n],$$

on sait [cours de D.E.U.G.] que l'ensemble quotient $\mathcal{E}/\sim = F$ peut être muni d'une structure d'*espace vectoriel* sur \mathbb{K} en posant :

$$\bar{u} + \bar{v} = \text{la classe à laquelle appartient } (u_n + v_n)_n, \\ \lambda \cdot \bar{u} = \text{la classe à laquelle appartient } (\lambda u_n)_n.$$

Effectuons les vérifications nécessaires :

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(u_n + v_n, u'_n + v'_n) = \|(u_n + v_n) - (u'_n + v'_n)\| \leq \|u_n - u'_n\| + \|v_n - v'_n\| \\ \leq d(u_n, u'_n) + d(v_n, v'_n), \text{ d'où :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d(u_n + v_n, u'_n + v'_n))_n = 0. \blacklozenge$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(\lambda u_n, \lambda u'_n) = \|\lambda u_n - \lambda u'_n\| = |\lambda| \cdot \|u_n - u'_n\| = |\lambda| d(u_n, u'_n), \text{ d'où :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (d(\lambda u_n, \lambda u'_n))_n = 0. \blacklozenge$$

On sait de plus que l'application naturelle $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\sim = F$ est une application *linéaire* (et *surjective*).

Soit \mathcal{F} le sous-espace vectoriel de \mathcal{E} constitué par les suites de la forme (u, u, \dots, u, \dots) , où $u \in E$ (stabilité évidente des opérations).

Considérons la restriction $\pi|_{\mathcal{F}}$ — qui est une application linéaire — d'une part, et, d'autre part, l'application $\varphi : E \rightarrow \mathcal{F}$, $u \mapsto (u, u, \dots, u, \dots)$ manifestement linéaire.

La composée $\pi|_{\mathcal{F}} \circ \varphi$ est l'application $f : E \rightarrow \mathcal{E}/\sim$ qui est donc linéaire.

A présent, on a une distance δ sur F espace vectoriel sur \mathbb{K} . On sait [Chap. II, Exercice 1.2] que $\delta(\bar{u}, \bar{0}) = \|\bar{u}\|$ définit une norme sur F si l'on a :

$$\forall \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in F : \delta(\bar{u} + \bar{w}, \bar{v} + \bar{w}) = \delta(\bar{u}, \bar{v}) \text{ et } \forall \lambda \in \mathbb{K} : \delta(\lambda \bar{u}, \lambda \bar{v}) = |\lambda| \delta(\bar{u}, \bar{v}).$$

Or, en prenant des représentants, et en considérant la distance d qui est liée à la norme de E , on a :

$$\delta(\bar{u} + \bar{w}, \bar{v} + \bar{w}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (d(u_n + w_n, v_n + w_n))_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (d(u_n, v_n))_n = \delta(\bar{u}, \bar{v}),$$

et : $\delta(\lambda \bar{u}, \lambda \bar{v}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (d(\lambda u_n, \lambda v_n))_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (|\lambda| d(u_n, v_n))_n = |\lambda| \delta(\bar{u}, \bar{v}).$

Donc $\bar{u} \mapsto \|\bar{u}\|$ est une *norme* sur F , qu'on peut calculer en prenant un représentant $(u_n)_n$:

$$\|\bar{u}\| = \delta(\bar{u}, \bar{0}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (d(u_n, 0))_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|)_n.$$

En particulier, pour tout $u \in E$: $\|\bar{u}\| = \lim_{n \rightarrow \infty} (\|u\|)_n = \|u\|.$

On a donc muni (F, δ) d'une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} et d'une norme $\|\cdot\|$ associée à la distance δ pour laquelle (F, δ) est complet. Donc, $(F, \|\cdot\|)$ est un *espace de Banach* sur \mathbb{K} . ♦

$f : E \rightarrow F$ est une application *linéaire, bijective sur* $f(E) = (\pi|_{\mathcal{F}} \circ \varphi)(E)$, et le sous-espace vectoriel $f(E)$ est partout dense dans (F, δ) .

f est une *isométrie*, car pour tout $u \in E$:

$$\|\|f(u)\|\| = \delta(f(u), \bar{0}) = \delta(f(u), f(0)) = d(u, 0) = \|u\|.$$

La structure d'espace de Banach ainsi construite est *unique*, car s'il y en avait une autre : somme, produit par un scalaire et norme qui sont des opérations continues coïncideraient avec la première sur $f(E)$ partout dense, et donc coïncideraient sur F tout entier.

En effet, on a déjà vu que pour $u \in E$: $\|\bar{u}\| = \|u\|$, et on a aussi pour $u, v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$: $\overline{u + v} = \overline{u} + \overline{v} =$ classe de $(u + v, \dots, u + v, \dots)$ et $\lambda \bar{u} = \overline{\lambda u} =$ classe de $(\lambda u, \dots, \lambda u, \dots)$.

Le Théorème 2.1 est donc démontré. ♦

Remarque : Les applications $(u, v) \mapsto u + v$, $u \mapsto \lambda u$ ($\lambda \in \mathbb{K}$ fixé), et $u \mapsto \|u\|$ sont uniformément continues, et le restent si l'on compose avec l'isométrie f : on aurait donc aussi pu utiliser le Th. 1.1 du Chap. XII pour obtenir directement un prolongement de ces applications à F .

Le procédé est plus rapide et plus élégant, mais nous avons préféré rester élémentaire dans ces questions de complétion qui sont en relation avec l'enseignement secondaire.

Commentaires :

En procédant exactement comme nous l'avons fait dans les Th. 1.1 et 2.1, on peut *construire* \mathbb{R} à partir de \mathbb{Q} : « en gros » $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ est le complété de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$. Il faut bien sûr prolonger la *multiplication* et la *relation d'ordre* aux classes, et vérifier qu'on obtient bien un *corps commutatif totalement ordonné et archimédien* ; il sera évidemment complet.

☞ *Il y a tout de même un petit problème* : c'est qu'on ne peut pas définir une « vraie » distance, ou une « vraie » norme, sur \mathbb{Q} si l'on suppose que \mathbb{R} n'existe pas encore . . . Mais ce n'est pas tragique, on définit $|r|$ pour $r \in \mathbb{Q}$, et on étend $|\cdot|$ au cours de la construction.

Rappelons qu'on construit \mathbb{Z} à partir de \mathbb{N} par symétrisation, \mathbb{Q} à partir de \mathbb{Z} par passage au corps des fractions (deux opérations purement algébriques). On passe ensuite de \mathbb{R} à \mathbb{C} par extension quadratique (opération algébrique). Il n'y a que le passage de \mathbb{Q} à \mathbb{R} qui nécessite de l'analyse, *i.e.* de la topologie. \mathbb{R} étant ainsi construit par complétion, on peut passer ensuite à une interprétation concrète grâce à une représentation p -adique, décimale par exemple ($p = 9$).

Tout cela est bien détaillé dans le livre de C. Pisot et M. Zamansky « Mathématiques Générales », tome 2 : Analyse, Dunod éd., par exemple, et dans d'autres livres destinés au D.E.U.G. ou aux classes préparatoires.

On peut aussi construire \mathbb{R} par le procédé des « coupures de Dedekind », qui ne présente pas l'avantage de donner l'idée générale de complétion.

En tout cas, vous pouvez constater que la construction des nombres réels n'est pas du tout une évidence ! On peut pardonner au méticuleux Cauchy de s'être parfois un peu mélangé les pinceaux . . .

Exemple 2.1. L'espace de Banach complété de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme : $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{1/p}$, $p \in [1, +\infty[$, est l'espace de Lebesgue $L^p(0, 1)$. $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ s'interprète comme un sous-espace vectoriel de $L^p(0, 1)$ par l'application : $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mapsto (\text{classe de } f) \in L^p(0, 1)$, où la classe de f est l'ensemble : $\{f + h / h \text{ Lebesgue-mesurable et } h = 0 \text{ p.p. sur } (0, 1) \text{ pour la mesure de Lebesgue}\}$. f est l'unique représentant continu de (classe de f).

☞ **Exercice 2.1.** (facile) Démontrez que dans les espaces vectoriels normés c_0 et ℓ^p (avec $1 \leq p < \infty$), le sous-espace vectoriel des suites nulles à partir d'un certain rang (rang non fixé, dépendant de chaque suite) est partout dense. Conclusion en termes de complété ?

☞ **Exercice 2.2.** (assez facile) On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont continues sur \mathbb{R} et telles que $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$, et on note $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur \mathbb{R} telles que $f(t) = 0$ pour tout $t \notin K_f$, où K_f est une partie compacte de \mathbb{R} .

Démontrez que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est le complété de $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme.

Indication : Considérez les fonctions $\varphi_n = \max\{f, \frac{1}{n}\}$, $\psi_n = \max\{-f, \frac{1}{n}\}$, et enfin : $f_n = \varphi_n - \psi_n$.

☞ **Exercice 2.3.** (facile) Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ un e.v.n. et $(G, \|\cdot\|_G)$ un espace de Banach tous deux sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Démontrez que les e.v.n. $\mathcal{L}(E, G)$ et $\mathcal{L}(F, G)$ [où F est le complété de E] sont linéairement isométriques.

Vous étudierez en Maîtrise une autre méthode élégante pour compléter un e.v.n. Cette méthode consiste à prouver que tout e.v.n. E sur \mathbb{K} est isométrique à un sous-espace G de son bidual $E'' := (E')'$. Comme E'' est complet (c'est $\mathcal{L}(E', \mathbb{K})$, où \mathbb{K} est complet), il suffit de considérer $F := \text{adh}(G)$ pour avoir un complété.

La difficulté réside dans la construction de l'*isométrie* χ entre E et $G = \chi(E)$ (c'est un corollaire du Théorème de Hahn-Banach).

3. COMPLÉTÉ D'UN ESPACE PRÉHILBERTIEN

Théorème 3.1.

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Il existe une structure *unique* d'espace préhilbertien réel sur l'espace de Banach complété $(F, |||\cdot|||)$, notée $(F, \langle \cdot | \cdot \rangle)$, telle que pour tout $\bar{u} \in F : |||\bar{u}|||^2 = \langle \bar{u} | \bar{u} \rangle$.
 $(E, (\cdot|\cdot))$ est *linéairement isométrique* à un sous-espace vectoriel *partout dense* de l'espace de Hilbert $(F, \langle \cdot | \cdot \rangle)$.
 $(F, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ s'appelle l'*espace de Hilbert complété* de l'espace préhilbertien $(E, (\cdot|\cdot))$.

Remarque :

Nous démontrerons dans le Chap. XVIII que cet espace de Hilbert complété n'est autre que le dual topologique $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ de $(E, (\cdot|\cdot))$, et nous préciserons alors le produit scalaire sur le complété.

Démonstration :

On va procéder rapidement en utilisant le résultat de la Lecture du Chap. II.

Dans $(E, (\cdot|\cdot))$ on a l'identité du parallélogramme :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \text{ pour tous } u, v \in E.$$

Soient $\bar{u}, \bar{v} \in F$, et prenons des représentants $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|u_n + v_n\|^2 + \|u_n - v_n\|^2 = 2\|u_n\|^2 + 2\|v_n\|^2,$$

et donc, à la limite quand $n \rightarrow \infty$:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n + v_n\|)\right)^2 + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n - v_n\|)\right)^2 = 2\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n\|)\right)^2 + 2\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\|v_n\|)\right)^2,$$

soit : $|||\bar{u} + \bar{v}|||^2 + |||\bar{u} - \bar{v}|||^2 = 2|||\bar{u}|||^2 + 2|||\bar{v}|||^2$.

On sait par la Lecture du Chap. II que sous cette condition on a :

$$\psi(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{4} (|||\bar{u} + \bar{v}|||^2 - |||\bar{u} - \bar{v}|||^2),$$

qu'on notera $\langle \bar{u} | \bar{v} \rangle$, est un produit scalaire sur F tel que $|||\bar{u}|||^2 = \langle \bar{u} | \bar{u} \rangle$.

En passant à des représentants :

$$\begin{aligned} \langle \bar{u} | \bar{v} \rangle &= \frac{1}{4} \left(\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n + v_n\|)\right)^2 - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n - v_n\|)\right)^2 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} (\|u_n + v_n\|^2 - \|u_n - v_n\|^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n | v_n). \end{aligned}$$

En particulier, pour $u, v \in E : \langle u | v \rangle = \langle f(u) | f(v) \rangle = (u | v)$.

Il n'y a pas d'autre produit scalaire possible sur F faisant de F un espace de Hilbert réel, car continu et coïncidant avec $(\cdot|\cdot)$ sur $f(E) \times f(E)$ partout dense dans $F \times F$, il coïnciderait partout avec celui que l'on vient de donner. Le Th. 3.1 est démontré. ♦

Fin de la partie cours du Chapitre XV

CORRIGÉ DES EXERCICES
☞ Exercice 1.1

Pour $u \in E$, $f_u : E \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par : $\forall v \in E : f_u(v) = d(u, v) - d(v, a)$, où a est fixé une fois pour toutes.

$\forall v \in E : |f_u(v)| = |d(u, v) - d(v, a)| \leq d(u, a)$ [seconde inégalité triangulaire], d'où : $\sup_{v \in E} |f_u(v)| \leq d(u, a) : f_u$ est bornée sur E .

$$\forall u \in E : f_u \in G := \mathcal{B}(E, \mathbb{R}).$$

Démontrons que $\Phi : E \rightarrow G, u \mapsto f_u$, où G est muni de : $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$, est une isométrie.

$$\begin{aligned} \forall u, v, w \in E : |f_u(w) - f_v(w)| &= |(d(u, w) - d(w, a)) - (d(v, w) - d(w, a))| \\ &= |d(u, w) - d(v, w)| \leq d(u, v). \end{aligned}$$

D'où :

$$d_\infty(f_u, f_v) = d_\infty(\Phi(u), \Phi(v)) = \sup_{w \in E} |[f_u(w)](w) - [f_v(w)](w)| \leq d(u, v).$$

D'autre part, en faisant $w = u$ ci-dessus :

$$\begin{aligned} f_u(u) - f_v(u) &= d(u, u) - d(u, a) - d(u, v) + d(u, a) = -d(u, v) \\ \implies |f_u(u) - f_v(u)| &= |-d(u, v)| = d(u, v) \\ \implies d_\infty(f_u, f_v) &= \sup_{w \in E} |f_u(w) - f_v(w)| \geq |f_u(u) - f_v(u)| = d(u, v). \end{aligned}$$

Finalement, pour tous $u, v \in E : d_\infty(\Phi(u), \Phi(v)) = d(u, v)$, et Φ est une isométrie (non surjective !) de E dans $\mathcal{B}_\infty(E, \mathbb{R})$.

A présent : $\mathcal{B}_\infty(E, \mathbb{R})$ est un espace complet puisque \mathbb{R} est complet [Chap. XI] et donc [Th. 1.1 du Chap. XI] : $F := \text{adh}(\Phi(E))$ [adhérence dans $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$, au sens de d_∞] est un espace métrique complet. Ainsi, E est isométrique à un sous-espace partout dense d'un espace métrique complet. On a donc construit un modèle, différent de celui du cours, d'espace métrique complété de E . ♦

Remarquons que le complété $F = \text{adh}(\Phi(E))$ se trouve dans un espace de Banach, $G = \mathcal{B}_\infty(E, \mathbb{R})$, quelle que soit la nature de E ; mais si E est un e.v.n. on n'a pas $\Phi(E)$ sous-espace vectoriel de G (Φ n'est pas précisément linéaire ! ...).

Et donc pour que le complété soit un espace de Banach, il faudra trouver autre chose !

La méthode, plus longue, du cours n'a pas été choisie au hasard ...

☞ Exercice 2.1

• Soit $E = c_0$ muni de la norme $\|u\|_\infty = \max_{n \in \mathbb{N}^*} |\xi_n|$, où $u = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n)_n = 0$. Soit G le sous-espace vectoriel suivant :

$$G = \{u \in E / \exists N = N(u) \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq N \implies \xi_n = 0\}.$$

On considère l'e.v.n. $(G, \|\cdot\|_\infty)$. Nous allons démontrer que G est partout dense dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, ce qui prouvera, compte-tenu du fait que E est un espace de Banach [Chap. XI], que le complété F s'identifie à E .

Soit $u \in E, u = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$; considérons la suite d'éléments de G : $u_n = (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, 0, \dots)$. On va voir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_\infty = 0$; en effet :

$$\|u - u_n\|_\infty = \max_{k \in \mathbb{N}^*, k \geq n+1} |\xi_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ puisque } \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n) = 0. \spadesuit$$

• Soit $E = \ell^p = \{u = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}^*} / \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty\}$ muni de la norme :

$$\|u\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right)^{1/p}, \text{ où } p \in [1, +\infty[\text{ [cf. Chap. II et Chap. XI].}$$

On considère le sous-espace G défini ci-dessus, et on note G_p l'e.v.n. $(G, \|\cdot\|_p)$.

On a : le complété de G_p s'identifie à ℓ^p ; en effet, avec les mêmes notations que ci-dessus :

$$(\|u - u_n\|_p)^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\xi_k|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ car le reste d'une série convergente tend vers } 0 \spadesuit$$

📌 **Exercice 2.2**

Il est clair que si $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, on a $f \in C_0(\mathbb{R})$: en effet, si f est nulle en dehors d'un compact de \mathbb{R} , i.e. d'un fermé borné de \mathbb{R} , elle est nulle en dehors d'un intervalle $[-M, +M]$, $M > 0$, et donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$.

D'autre part, si $f \in C_0(\mathbb{R})$, en dehors d'un intervalle $[-P, +P]$, $P > 0$, on a $|f(t)| \leq 1$, et f continue sur $[-P, +P]$ y est bornée. Donc f est bornée sur \mathbb{R} : $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On a donc : $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C_0(\mathbb{R})$, qui est lui-même un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ [et même de $\mathcal{CB}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, cf. Chap. XI].

Puisque $\mathcal{B}_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est un espace de Banach [Chap. XI], il suffit de prouver que $C_0(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathcal{B}_{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ pour démontrer que $C_0(\mathbb{R})$ est lui-même un espace de Banach pour la norme uniforme.

Soit donc $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $C_0(\mathbb{R})$ uniformément convergente vers $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; démontrons que $f \in C_0(\mathbb{R})$. On sait déjà que f est continue sur \mathbb{R} [Chap. IV].

$\|f_n - f\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f_n(t) - f(t)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n : n \geq N \implies \forall t \in \mathbb{R} : |f_n(t) - f(t)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Soit $n \geq N$: $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f_n(t) = 0$, soit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists T \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} : |t| \geq T \implies |f_n(t)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon. \text{ D'où :}$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists T \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} :$

$$|t| \geq T \implies |f(t)| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t)| \leq \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon. \spadesuit$$

Si nous prouvons maintenant que $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ est partout dense dans $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$, nous aurons démontré que le complété de l'e.v.n. $(\mathcal{K}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ est [ou mieux : s'identifie à] l'espace de Banach $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$.

Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$, et on considère comme suggéré dans l'énoncé les fonctions :

$$\varphi_n := \max\left\{f, \frac{1}{n}\right\}, \psi_n := \max\left\{-f, \frac{1}{n}\right\}, f_n := \varphi_n - \psi_n.$$

Dressons le tableau suivant pour tout $n \geq 1$ fixé et tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, tableau dans lequel sont envisagés tous les cas pour $f(t)$:

	$\varphi_n(t)$	$\psi_n(t)$	$f_n(t)$	$ f(t) - f_n(t) $
$f(t) \geq \frac{1}{n}$	$f(t)$	$\frac{1}{n}$	$f(t) - \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$
$-\frac{1}{n} \leq f(t) \leq \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	0	0
$f(t) \leq -\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$-f(t)$	$f(t) + \frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \frac{1}{n} \implies \|f - f_n\|_{\infty} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - f_n(t)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La suite $(f_n)_n$ approche uniformément f .

On s'aperçoit sur le tableau que pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $|f(t)| \leq \frac{1}{n}$ on a $f_n(t) = 0$.

Or, puisque $\lim_{|t| \rightarrow \infty} f(t) = 0$, pour $n \geq 1$ fixé, on a :

$$\exists T \geq 0, \forall t \in \mathbb{R} : |t| \geq T \implies |f(t)| \leq \frac{1}{n}.$$

Donc f_n est nulle en dehors d'un intervalle $[-T, T]$ ($T = T_{f,n}$, bien sûr), et donc : $f_n \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$, car f_n est continue sur \mathbb{R} parce que φ_n et ψ_n le sont.

On a en effet :

$f_n = \max\left\{f, \frac{1}{n}\right\} - \max\left\{-f, \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{2}\left[f + \frac{1}{n} + |f - \frac{1}{n}|\right] - \frac{1}{2}\left[-f + \frac{1}{n} + |f + \frac{1}{n}|\right]$, continue sur \mathbb{R} [formule : $\max\{\alpha, \beta\} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + |\alpha - \beta|)$]. Faites un dessin soigné de type sinusôïde irrégulière pour f , représentant φ_n, ψ_n et f_n ! En couleurs !

Remarque : Le procédé de troncature utilisé ici est d'usage fréquent en analyse, et il convient de bien le comprendre. En conclusion, et en abrégé : complété de $\mathcal{K}(\mathbb{R}) = C_0(\mathbb{R})$ pour la norme uniforme. On peut se poser la même question pour $\mathcal{K}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}) \dots$

☞ Exercice 2.3

Il n'y a en fait rien à faire, sinon se rappeler l'existence du Th. 1.2 du Chap. XI, en remplaçant E_0 par E , et E par F . On remarquera en particulier un fait intéressant : c'est que le dual (topologique !) d'un e.v.n. E et le dual de son complété sont – à une isométrie linéaire surjective près – essentiellement le même espace.

Fin du Chapitre XV

ANNEXE

PROPRIÉTÉS DES NOMBRES RÉELS

Le corps des nombres réels est un ensemble noté \mathbb{R} muni de deux lois de composition internes $(s, t) \mapsto s + t$, $(s, t) \mapsto st$ [ou : $s.t$, ou $s \times t$], et d'une relation binaire $s \leq t$ [notée aussi : $t \geq s$], vérifiant les propriétés (ou : axiomes) suivantes :

[R I] \mathbb{R} est un corps commutatif :

$$(R I 1) \forall r, s, t \in \mathbb{R} : r + (s + t) = (r + s) + t,$$

$$(R I 2) \forall s, t \in \mathbb{R} : s + t = t + s,$$

$$(R I 3) \text{ il existe un élément de } \mathbb{R} \text{ noté } 0 \text{ qui vérifie } \forall r \in \mathbb{R} : r + 0 = r,$$

$$(R I 4) \forall r \in \mathbb{R}, \exists s \in \mathbb{R} : r + s = 0; \text{ on note } : s := -r,$$

$$(R I 5) \forall r, s, t \in \mathbb{R} : r.(s.t) = (r.s).t,$$

$$(R I 6) \forall s, t \in \mathbb{R} : s.t = t.s,$$

$$(R I 7) \text{ il existe un élément de } \mathbb{R} \text{ noté } 1 \text{ qui n'est pas } 0 \text{ et qui vérifie } \forall r \in \mathbb{R} : 1.r = r,$$

$$(R I 8) \forall r \in \mathbb{R}, r \neq 0, \exists s \in \mathbb{R} : r.s = 1; \text{ on note } s := r^{-1} \text{ ou } \frac{1}{r},$$

$$(R I 9) \forall r, s, t \in \mathbb{R} : r.(s + t) = r.s + r.t.$$

[R II] \mathbb{R} est un corps totalement ordonné :

$$(R II 1) \forall r, s, t \in \mathbb{R} : [r \leq s \text{ et } s \leq t] \implies r \leq t,$$

$$(R II 2) [r \leq s] \text{ et } [s \leq r] \implies r = s,$$

$$(R II 3) \forall r, s \in \mathbb{R} : [r \leq s] \text{ ou } [s \leq r] \text{ est vrai,}$$

$$(R II 4) \forall r, s, t \in \mathbb{R} : s \leq t \implies r + s \leq r + t,$$

$$(R II 5) \forall r, s \in \mathbb{R} : r \geq 0 \text{ et } s \geq 0 \implies r.s \geq 0.$$

[R III] \mathbb{R} est un corps ordonné archimédien :

(R III 1) $\forall s, t \in \mathbb{R}$ tels que $s > 0$ [i.e. $s \geq 0$ et $s \neq 0$] et $t \geq 0$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n.s \geq t$ [axiome d'Archimède].

[R IV] \mathbb{R} vérifie l'axiome des segments emboîtés : pour toute suite $([s_n, t_n])_{n \in \mathbb{N}^*}$ de segments tels que pour tout n on a : $s_n \leq s_{n+1}$ et $t_n \geq t_{n+1}$: $\bigcap_{n \geq 1} [s_n, t_n] \neq \emptyset$.

Quelques propriétés

1. Tout intervalle ouvert $]s, t[$, avec $s < t$, contient une infinité de nombres rationnels.

2. \mathbb{Q} est dénombrable ; \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

3. Principe des inégalités à ε près : si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $s \leq t + \varepsilon$, on a $s \leq t$; ce qu'on peut aussi exprimer par : si $s \leq r$ pour tout $r > t$, on a : $s \leq t$. En particulier, si pour tout $\varepsilon > 0$ on a $0 \leq s \leq \varepsilon$: $s = 0$.

4. Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Si A est majoré, i.e. s'il existe un réel M tel que $\forall a \in A : a \leq M$, l'ensemble de ses majorants est un intervalle fermé de la forme $[b, +\infty[$ et a donc un plus petit élément, β , qui est appelé la *borne supérieure de l'ensemble* A .

On note : $\beta := \sup(A)$.

De même, si A est minoré, l'ensemble des minorants a un plus grand élément α qu'on note $\alpha := \inf(A)$.

Si A est borné, i.e. à la fois minoré et majoré, A admet une borne inférieure et une borne supérieure. Evidemment : $\inf(A) \leq \sup(A)$. Bien entendu, et c'est là une source d'erreur fréquente, $\sup(A)$ peut être dans A ou bien ne pas y être : $A = [0, 1]$, $\sup(A) = 1 \in A$, $B = [0, 1[$, $\sup(B) = 1 \notin B$.

Lorsque $\sup(A) \notin A$, beaucoup d'étudiants se sentent démunis, perdus ... Alors qu'il suffit de raisonner « à ε près », sans problème. On utilise pour cela la caractérisation suivante :

$$\beta = \sup(A) \iff 1) \forall a \in A : a \leq \beta \text{ ET } 2) \forall \varepsilon > 0, \exists a = a_\varepsilon \in A : \beta - \varepsilon < a_\varepsilon [\leq \beta],$$

ou en termes de suites :

$$\left| \begin{array}{l} \beta = \sup(A) \iff \forall a \in A : a \leq \beta \text{ ET } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A : \beta - \frac{1}{n} < a_n [\leq \beta] \\ \text{De même, pour la borne inférieure :} \\ \alpha = \inf(A) \iff \forall a \in A : a \geq \alpha \text{ ET } \forall \varepsilon > 0, \exists a = a_\varepsilon : [\alpha \leq] a_\varepsilon < \alpha + \varepsilon \\ \text{ou } \iff \forall a \in A : a \geq \alpha \text{ ET } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists a_n \in A : [\alpha \leq] a_n < \alpha + \frac{1}{n}. \end{array} \right.$$

Exemple :

Soient $A, B \subset \mathbb{R}$, tous deux majorés. Alors : $A + B = \{a + b / a \in A \text{ et } b \in B\}$ est majoré et $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Preuve : Posons $\alpha := \sup(A)$ et $\beta := \sup(B)$.

Pour tout $u \in A + B : u = a + b \leq \alpha + \beta$, et $A + B$ est majoré par $\alpha + \beta$. Comme $\sup(A + B)$ est le plus petit des majorants, on a : $\sup(A + B) \leq \alpha + \beta$.

A présent, soit $\varepsilon > 0$ fixé arbitraire. Il existe $a_\varepsilon \in A$ et $b_\varepsilon \in B$ tels que $\alpha - \varepsilon < a_\varepsilon$ et $\beta - \varepsilon < b_\varepsilon$, d'où : $\alpha + \beta < a_\varepsilon + b_\varepsilon + 2\varepsilon \leq \sup(A + B) + 2\varepsilon$, puisque $a_\varepsilon + b_\varepsilon \in A + B$. Comme l'inégalité a lieu pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\alpha + \beta \leq \sup(A + B)$.

Réunissant les deux inégalités obtenues, on a l'égalité cherchée. ♦

Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ (E ensemble quelconque $\neq \emptyset$) une fonction majorée, i.e. telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(E) \subset]-\infty, M]$. La borne supérieure de f sur E est $\sup_{u \in E} f(u) = \sup f(E)$.

$$\begin{aligned} \beta = \sup_{u \in E} f(u) &\iff \forall u \in E : f(u) \leq \beta \text{ ET } \forall \varepsilon > 0, \exists u = u_\varepsilon \in E : \beta - \varepsilon < f(u) \\ &\iff \forall u \in E : f(u) \leq \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists u_n \in E : \beta - \frac{1}{n} < f(u_n) [\leq \beta]. \end{aligned}$$

Clairement, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = \beta : (u_n)$ est appelée une *suite maximisante*. Si $E = E_d$ est un espace métrique, on peut se préoccuper de la convergence éventuelle de (u_n) .

Si (u_n) converge vers $\hat{u} \in E$, et si $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = x \implies \limsup_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq f(x)$

[f semi-continue supérieurement], on a :

$$\lim(\beta - \frac{1}{n}) = \beta \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(u_n) \leq f(\hat{u}) \leq \beta \text{ et donc } f(\hat{u}) = \beta;$$

f atteint son sup en \hat{u} .

Par exemple : supposons que $d(A, B) = 0$ [$A, B \subset E_d$ métrique].

$$d(A, B) = \inf_{(a,b) \in A \times B} d(a, b).$$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_n, b_n) \in A \times B : 0 \leq d(a_n, b_n) \leq d(A, B) + \varepsilon = \varepsilon$.

La suite (a_n, b_n) vérifie donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} d(a_n, b_n) = 0$.

Fin de l'annexe au Chapitre XV

CHAPITRE XVI

ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS : APPLICATIONS I POINTS FIXES

Introduction

Le chapitre XVI ne contient qu'un seul théorème, mais il est *fondamental* : c'est le théorème d'existence et d'unicité d'un *point fixe* [$f(\hat{u}) = \hat{u}$] pour les applications *strictement contractantes* d'un espace métrique *complet* dans lui-même.

Non seulement l'énoncé du théorème doit être très bien connu, mais *aussi sa démonstration* – qui est simple – comme vous le constaterez en étudiant le cours et en faisant des exercices.

Comme ce résultat se prête à de nombreuses applications directes, à des variantes intéressantes, à des exercices instructifs, l'auteur de ces lignes a vu un peu grand... bien qu'il ait renoncé (la mort dans l'âme) à parler d'équations différentielles.

Que chacun prenne ce qu'il veut et/ou peut dans ce chapitre, en fonction de ses propres critères (intérêt, temps, courage, ...).

Qu'il soit bien clair en tout cas que le cours à connaître c'est le théorème des contractions et sa démonstration. Choisissez vous-mêmes quelques applications et quelques exercices à chercher.

Vous avez le matériel, ce qui est l'essentiel ; faites-en bon usage.

La littérature fourmille de théorèmes de point fixes « de type métrique complet » (comme celui de ce chapitre) : il va de soi que ces théorèmes n'ont d'intérêt que s'ils ont des applications, ou s'ils englobent un grand nombre de théorèmes antérieurs. Beaucoup de ces résultats ne répondent pas aux critères ci-dessus ...

☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 2.2, 2.4, 2.5.

☞ **Exercices complémentaires** : 1.5, 1.6, 2.1, 2.3, 4.1, 4.2.

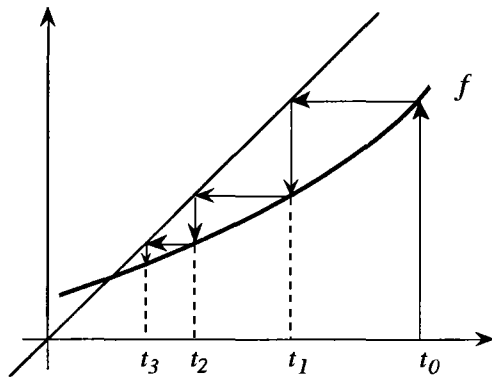
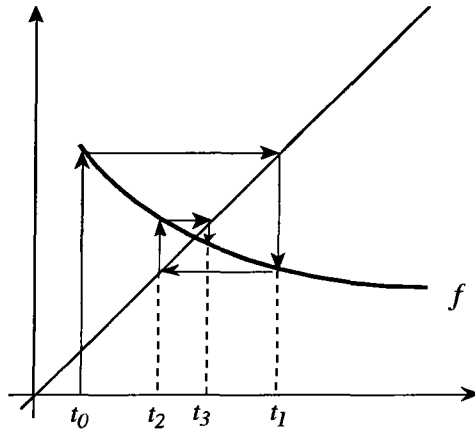
Nous proposons une Lecture dans laquelle nous montrons comment on peut appliquer le théorème de Brouwer (énoncé, mais non démontré ici) pour obtenir des résultats puissants. Peut-être que cela donnera à certains lecteurs l'envie d'aller plus loin dans cette direction ...

Le théorème de Brouwer est le prototype de nombreux autres qui appartiennent à la famille des théorèmes de points fixes de nature topologique (*i.e.* relevant de la *topologie algébrique*).

Les problèmes de convergence d'itérés de fonctions sont devenus très à la mode depuis une vingtaine d'années, à cause des fractales, de la théorie du chaos, ...

Voici les coordonnées d'un livre très simple, très élémentaire et très agréable sur ces questions : *A first course in discrete dynamical systems* de R. A. Holmgren, Springer-Verlag éditeur.

BON TRAVAIL !



3.1

CHAPITRE XVI

ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

APPLICATIONS I : POINTS FIXES

1. POINT FIXE D'UNE APPLICATION

Définition 1.1.

Soit A une application d'un ensemble E dans lui-même. On appelle **point fixe** de A tout point $\hat{u} \in E$ tel que : $A(\hat{u}) = \hat{u}$.
S'il existe un tel \hat{u} , on dit que A possède un point fixe.

Exemples 1.1.

1) $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], t \mapsto f(t) = t$; tout point de $[0, 1]$ est point fixe de f . Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1], t \mapsto f_n(t) = (1 - \frac{1}{n})t, n$ entier ≥ 2 : f_n n'a qu'un seul point fixe : $t = 0$.

Remarquons que $\|f - f_n\|_\infty = \sup_{t \in [0, 1]} |t - (1 - \frac{1}{n})t| = \frac{1}{n}$: la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, 1]$. Le nombre des points fixes n'est pas « stable », même pour une « bonne » approximation.

2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(t) = t + 1$ n'a aucun point fixe. La simplicité d'une application ne lui donne pas de point fixe . . .

Rappelons qu'étant donnés deux espaces métriques $(E, d), (F, \delta)$ et une application $A : E \rightarrow F$, nous avons [dans le Chap. I] introduit la terminologie suivante :

A est **lipschitzienne** de constante $k \geq 0$ sur E si :

$$(1.1) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : \delta[A(u), A(v)] \leq k.d(u, v),$$

(1.2) si $k = 1$: on dit que A est **contractante** (ou : est une **contraction**) sur E ,

(1.3) si $k < 1$: on dit que A est **strictement contractante** (ou : est une **contraction stricte**) sur E .

Si A vérifie :

(1.4) $\forall u \in E, \forall v \in E, u \neq v : \delta[A(u), A(v)] < d(u, v)$, on dit qu'elle est **contractive** sur E .

On a les implications évidentes suivantes :

$$(1.5) \quad \begin{aligned} & [A \text{ strictement contractante sur } E] \implies [A \text{ contractive sur } E] \implies \\ & [A \text{ contractante sur } E] \implies [A \text{ lipschitzienne de constante } 1 \text{ sur } E] \implies \\ & [A \text{ uniformément continue sur } E] \implies [A \text{ continue sur } E] \end{aligned}$$

Exemples 1.2. Soit $A : E \rightarrow E$, où E est un espace métrique. Si A est contractante sur E , elle peut avoir des points fixes ou ne pas en avoir, en avoir une infinité : voir les exemples 1) et 2) de Exemples 1.1.

Une application contractive peut ne pas avoir de point fixe : $E := [1, +\infty[, f(t) := t + \frac{1}{t}$;
 $|f(t) - f(s)| = |(t - s) + \frac{s - t}{st}| = |t - s| \cdot (1 - \frac{1}{st}) < |t - s|$ pour $s \neq t$, mais f n'a aucun point fixe sur E (vérifiez).

Proposition 1.1.

Soit (E, d) un espace métrique et soit $A : E \rightarrow E$. Si A est contractive sur E , elle ne peut avoir qu'un seul point fixe.

Corollaire :

|| Une application strictement contractante a un point fixe unique, s'il existe.

Démonstration :

Soient \hat{u} et \hat{v} des points fixes distincts, on a : $d(\hat{u}, \hat{v}) = d[A(\hat{u}), A(\hat{v})] < d(\hat{u}, \hat{v})$, contradiction. ♦

✎ **Exercice 1.1.** (facile) Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue sur $[0, 1]$. Prouvez que f a un point fixe au moins.

Etendez le résultat à $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, $a < b$.

✎ **Exercice 1.2.** (facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit $A \in \mathcal{L}(E)$. Vérifiez que A est une contraction [resp. contraction stricte] si et seulement si $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq 1$ [resp. < 1].

✎ **Exercice 1.3.** (facile) Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $]a, b[$. Vérifiez que f est une contraction [resp. contraction stricte] si et seulement si :

$$\sup_{a < t < b} |f'(t)| \leq 1, \text{ [resp. } < 1].$$

Application : soit $\alpha > 0$; sur quelles parties de \mathbb{R} la fonction $f(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{\alpha}{t})$ est-elle une contraction ? Une contraction stricte ?

✎ **Exercice 1.4.** (très facile) Soit $(G, *)$ un groupe, et soit $A : G \rightarrow G$. Soit $v \in G$ fixé. Démontrez que la résolution de l'équation «trouvez $u \in G$ tel que $A(u) = v$ » est équivalente à la recherche d'un point fixe.

✎ **Exercice 1.5.** (assez difficile) Soit (E, d) un espace métrique *compact*, et soit $A : E \rightarrow E$ une application contractive. Démontrez que A possède un point fixe (d'ailleurs unique, d'après la Prop. 1.1).

Indication : raisonnement par contradiction, considérez $u \mapsto d(u, A(u))$, puis $b = A(a)$ et $A(b)$.

✎ **Exercice 1.6.** (facile) Soit $E = c_0$ muni de $\|\cdot\|_\infty$ (suites de réels tendant vers 0, avec la norme uniforme [cf. (4.2) dans le Chap. II]) et soit $F = B(0, 1]$.

On définit $A : F \rightarrow F$ par : $A(u) = A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (1, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$.

Démontrez que A est une isométrie affine qui ne possède pas de point fixe. Notez que A n'est pas surjective.

2. LE THÉORÈME DU POINT FIXE DES CONTRACTIONS STRICTES

Théorème 2.1. (FONDAMENTAL) *Théorème du point fixe des contractions strictes*

Soit E un espace métrique *complet*, soit F une partie *fermée* de E , et soit $A : F \rightarrow E$ une application *strictement contractante* de constante $k \in [0, 1[$ telle que $A(F) \subset F$. On a :

(2.1) *Existence et unicité* : il existe $\hat{u} \in F$ unique point fixe de A , i.e. tel que $A(\hat{u}) = \hat{u}$.

(2.2) *Algorithme de calcul ou convergence des itérations* : la suite (u_n) de points de F telle que $u_{n+1} = A(u_n)$ où $u_0 \in F$ est arbitrairement choisi [stabilité] est convergente de limite \hat{u} .

Remarque : Notant $A^0 = Id_E$, $A^1 = A$, $A^2 = A \circ A$, ..., $A^{n+1} = A \circ A^n$ (itérés de A), on a : $u_{n+1} = A^{n+1}(u_0)$.

(2.3) *Estimations de l'erreur* : pour tout $n \geq 0$, on a :

$$(2.3.1) \text{ Estimation a priori : } d(u_n, \hat{u}) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_0, u_1).$$

$$(2.3.2) \text{ Estimation a posteriori : } d(u_{n+1}, \hat{u}) \leq \frac{k}{1-k} d(u_n, u_{n+1}).$$

(2.4) *Vitesse de convergence* : $d(u_{n+1}, \hat{u}) \leq k \cdot d(u_n, \hat{u})$ [convergence dite *linéaire*].

Commentaires :

1) Ce résultat est parfois appelé simplement *théorème de point fixe des contractions* ; on trouve également dans la littérature : *th. des approximations successives*, *th. de Banach*, *th. de Banach-Picard*, *th. de Banach-Caccioppoli*, ...

2) On énonce souvent ce théorème sous la forme simplifiée : *toute application strictement contractante d'un espace métrique complet dans lui-même possède un point fixe unique*.

3) *a priori* (pas d'accent sur le a !) signifie : en fonction des données seulement (ou d'une fonction simple des données), ici $u_0 \in F$ arbitraire et $u_1 = A(u_0)$.

a posteriori signifie qu'on connaît les termes de la suite jusqu'à u_{n+1} , et donc qu'on a calculé $u_1 = A(u_0)$, $u_2 = A(u_1)$, ..., $u_{n+1} = A(u_n)$. Cette estimation est meilleure que la précédente (mais demande plus de travail !).

4) Ce théorème est indissociable de sa démonstration, d'ailleurs simple, car celle-ci est souvent « ré-utilisable par morceaux ».

5) Ce résultat représente en quelque sorte un « idéal » du point de vue de l'analyse numérique. En effet, on a l'existence et l'unicité, et un algorithme (méthode de calcul simple (et stable) donne la solution unique. De plus on dispose de deux majorations (*a priori* et *a posteriori*) de l'erreur et de la vitesse de convergence.

On dispose assez rarement de tous ces renseignements ...

Démonstration :

Nous allons démontrer que la suite (u_n) est de Cauchy en deux (petites) étapes.

Étape 1 : Soit $u_0 \in F$, arbitraire, et la relation $u_{n+1} = A(u_n)$.

Puisque $A(F) \subset F$, on a (par récurrence) : $u_n \in F$ pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$. Puisque F est fermé dans E , la limite – si elle existe – sera dans F . Comme F est complet (fermé dans un complet), il suffit de démontrer que (u_n) est de Cauchy.

$$\begin{aligned} d(u_{n+1}, u_n) &= d[A(u_n), A(u_{n-1})] \leq k \cdot d(u_n, u_{n-1}) = k \cdot d[A(u_{n-1}), A(u_{n-2})] \\ &\leq k \cdot k \cdot d(u_{n-1}, u_{n-2}) = k^2 \cdot d[A(u_{n-2}), A(u_{n-3})] \leq k^3 \cdot d(u_{n-2}, u_{n-3}) \dots \end{aligned}$$

Continuant ainsi, on arrive à : $d(u_{n+1}, u_n) \leq k^n \cdot d(u_1, u_0) = k^n \cdot d(A(u_0), u_0)$. ♦

Étape 2 : On utilise à répétition l'inégalité triangulaire :

$\forall p$ entier ≥ 0 :

$$\begin{aligned} d(u_{n+p}, u_n) &\leq d(u_{n+p}, u_{n+p-1}) + d(u_{n+p-1}, u_{n+p-2}) + \dots + d(u_{n+1}, u_n) \\ &\leq k^{n+p-1} \cdot d(u_1, u_0) + k^{n+p-2} \cdot d(u_1, u_0) + \dots + k^n \cdot d(u_1, u_0) \text{ [Étape 1]} \\ &\leq k^n \cdot (1 + k + k^2 + \dots + k^{p-1}) \cdot d(u_1, u_0) \\ &\leq k^n \frac{1 - k^p}{1 - k} d(u_1, u_0) \leq \frac{k^n}{1 - k} d(u_1, u_0). \text{ ♦} \end{aligned}$$

Par conséquent : $\lim_{n \rightarrow \infty, p \rightarrow \infty} d(u_{n+p}, u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_{n+p}, u_n) = 0$, et (u_n) est convergente de limite $\hat{u} \in F$.

Dans une troisième étape on va prouver que \hat{u} est un point fixe de A .

Étape 3 :

$$\begin{aligned} d[\hat{u}, A(\hat{u})] &\leq d(\hat{u}, u_{n+1}) + d[u_{n+1}, A(\hat{u})] = d(\hat{u}, u_{n+1}) + d[A(u_n), A(\hat{u})] \\ &\leq d(\hat{u}, u_{n+1}) + k \cdot d(u_n, \hat{u}), \text{ d'où à la limite quand } n \rightarrow \infty, d(\cdot, \hat{u}) \text{ étant} \end{aligned}$$

continue :

$$\begin{aligned} d[\hat{u}, A(\hat{u})] &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(\hat{u}, u_{n+1}) + k \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, \hat{u}) = d(\hat{u}, \hat{u}) + k \cdot d(\hat{u}, \hat{u}) = 0, \text{ d'où} \\ d[\hat{u}, A(\hat{u})] &= 0 \text{ et } A(\hat{u}) = \hat{u}. \text{ ♦} \end{aligned}$$

Nota : On aurait aussi pu dire que $u_{n+1} = A(u_n)$ et A continue impliquent, par prolongement des égalités $\hat{u} = A(\hat{u}) \dots$

D'après la Prop. 1.1, A ne peut avoir qu'un seul point fixe, et donc \hat{u} calculé par l'algorithme itératif est l'unique point fixe de A . (2.1) et (2.2) sont donc prouvés.

Pour démontrer (2.3.1) il suffit de reprendre l'inégalité prouvée dans l'Etape 2 : $d(u_{n+p}, u_n) \leq k^n \frac{1-k^p}{1-k} d(u_1, u_0)$ et de faire tendre p vers l'infini, n étant fixé, il vient : $d(\hat{u}, u_n) \leq \frac{k^n}{1-k} d(u_1, u_0)$. ♦

Pour (2.4) et (2.3.2) :

$$d(u_{n+1}, \hat{u}) = d[A(u_n), A(\hat{u})] \leq k \cdot d(u_n, \hat{u}) \leq k \cdot [d(u_n, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, \hat{u})] \text{ d'où : } \\ (1-k) \cdot d(u_{n+1}, \hat{u}) \leq k \cdot d(u_n, u_{n+1}). \text{ ♦}$$

Commentaires :

1) Il va sans dire qu'en *analyse numérique* on a tout intérêt à ne pas prendre u_0 au hasard ; si le problème permet de cerner un peu \hat{u} il faut profiter de cette information ! D'autre part les estimations d'erreur montrent à l'évidence que k doit être aussi petit que possible, ce qui signifie qu'il faut majorer $d[A(u), A(v)]$ aussi finement que possible.

2) L'hypothèse de complétion est essentielle. Par exemple, considérer $E =]0, 1]$ et $f(t) = t$. Cette condition est très raisonnable, les autres théorèmes de point fixe imposant plutôt de la compacité, condition beaucoup plus difficile à remplir.

3) Ce théorème a un champ d'applications très vaste, et il rend encore bien des services à l'heure actuelle, tant en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées.

Par exemple, il sert à démontrer en calcul différentiel le *théorème d'inversion locale* et donc le *théorème des fonctions implicites*, deux théorèmes fondamentaux de la géométrie différentielle ...

Il donne aussi le résultat *d'existence et d'unicité* le plus élémentaire de la théorie des équations différentielles (théorème de Cauchy-Picard, ou de Cauchy-Lipschitz) avec une méthode de calcul approché de la solution (*méthode des approximations successives*).

Il est aussi à la base de la *méthode de Newton* pour calculer les solutions d'équations non linéaires, etc.

4) La vitesse de convergence « linéaire » de l'algorithme du point fixe n'est pas très bonne, ce qui explique que cet algorithme n'est guère utilisé dans la pratique car on dispose de méthodes de calcul plus performantes.

5) (*facultatif*) Le théorème de Caristi [voir le Problème-Lecture du Chap. XI] donne le résultat d'existence (2.1) (mais il ne donne pas les autres résultats du Th. 2.1 !).

Rappelons que ce th. dit que : toute application $T : E \rightarrow E$, où E est complet, vérifiant (*) $\forall u \in E : f[T(u)] \leq f(u) - d(u, T(u))$, où f est une fonction $E \rightarrow \mathbb{R}$ bornée inférieurement et semi-continue inférieurement

[i.e. $\forall (u_n) \rightarrow u : f(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$], admet un point fixe au-moins.

Soit A strictement contractante, et prenons $f(u) := \frac{1}{1-k} d[u, A(u)]$. f vérifie les hypothèses voulues, et A vérifie (*) (facile, vérifiez). Donc A possède un point fixe.

☞ **Exercice 2.1.** (très facile) Soit (E, d) un espace métrique complet, et soient $A, B : E \rightarrow E$ des contractions strictes vérifiant $A \circ B = B \circ A$. Démontrez que A et B possèdent un point fixe (unique) commun.

☞ **Exercice 2.2.** (assez facile) Soit (E, d) un espace métrique complet, et soient $A, B : E \rightarrow E$ des contractions strictes de constantes respectives $k_A, k_B \in]0, 1[$.

On suppose que : $\exists \varepsilon > 0, \forall u \in E : d[A(u), B(u)] \leq \varepsilon$. Démontrez que les points fixes \hat{a} et \hat{b} de A et B , respectivement, vérifient : $d(\hat{a}, \hat{b}) \leq \frac{\varepsilon}{1-k}$, où $k = \max\{k_A, k_B\}$.

☞ **Exercice 2.3.** (difficulté moyenne) Soit (E, d) un espace métrique complet, et soient $A, A_n : E \rightarrow E$. On suppose que les A_n sont des contractions strictes de même constante $k \in]0, 1[$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n(u) = A(u)$ pour tout $u \in E$. On considère l'algorithme suivant : $u_0 \in E$ est arbitraire, $u_{n+1} = A_n(u_n)$ pour tout $n \geq 0$. Démontrez que (u_n) est convergente de limite \hat{u} , le point fixe de A .

Indication :

On sera amené à utiliser le lemme suivant (à démontrer) : si $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 0$ (suite de réels), la suite de terme général $\beta_n = \sum_{p=0}^n k^p \cdot \alpha_{n-p}$ est convergente, de limite 0.

Nota : cet exercice établit un autre résultat de *stabilité* de l'algorithme (2.2) (par rapport à l'application A).

☞ **Exercice 2.4.** (assez facile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. réel de dimension finie, et soit $K \neq \emptyset$ une partie convexe, fermée, bornée de E . Soit $A : K \rightarrow K$ une application contractante.

Pour $w \in K$ fixé, et $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, on pose : $A_n(u) := (1 - \frac{1}{n})A(u) + \frac{1}{n}w$ pour tout $u \in K$. Démontrez que A possède un point fixe au moins dans K .

☞ **Exercice 2.5.** (assez difficile) Soit (X, δ) un espace métrique, et soit (E, d) un espace métrique complet. On se donne une application $A : X \times E \rightarrow E$ continue sur $X \times E$, vérifiant :

$$\exists \lambda \in]0, 1[, \forall x \in X, \forall u \in E, \forall v \in E : d(A(x, u), A(x, v)) \leq \lambda \cdot d(u, v).$$

Démontrez qu'il existe une application $h : X \rightarrow E$ continue et bornée sur X , et une seule, telle que $\forall x \in X : A(x, h(x)) = h(x)$.

3. QUELQUES APPLICATIONS DU THÉORÈME DU POINT FIXE

3.1. Méthode des approximations successives

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction strictement contractante de constante $k \in]0, 1[$.

On aura cette condition si, par exemple, f est dérivable sur $[a, b]$ avec :

$0 < |f'(t)| \leq k < 1$ pour tout $t \in [a, b]$ (théorème des accroissements finis).

D'après le Théorème 2.1, la suite : $t_0 \in [a, b]$ arbitraire, $t_1 = f(t_0), t_2 = f(t_1), \dots, t_{n+1} = f(t_n), \dots$ est convergente vers la solution unique \hat{t} de l'équation $f(t) = t$ sur l'intervalle $[a, b]$.

Deux situations distinctes se présentent suivant que $0 < f'(t) < 1$ ou bien que $-1 < f'(t) < 0$. Dans le premier cas la suite des itérés est monotone : croissante si t_0 a été pris à gauche du point fixe t , décroissante si t_0 a été pris à droite du point fixe t . Dans le second cas deux termes consécutifs de la suite encadrent la solution cherchée.

Il est recommandé au lecteur de *dessiner* ces deux situations en axes orthonormés, en utilisant la première bissectrice pour construire les itérés (voir p. 362).

Soit à présent l'équation $g(t) = 0$, où $t \in [a, b]$, g vérifiant : $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$, g dérivable sur $[a, b]$, et : $\exists c, \exists C$ réels tels que : $0 < c \leq g'(t) \leq C$ pour $a \leq t \leq b$.

Posons : $f(t) := t - \lambda \cdot g(t)$, où $\lambda \neq 0$ est à choisir au mieux ultérieurement.

L'équation proposée $g(t) = 0$ équivaut à la recherche d'un point fixe pour f .

On a : $f'(t) = 1 - \lambda \cdot g'(t)$, d'où : $1 - \lambda \cdot C \leq f'(t) \leq 1 - \lambda \cdot c$.

On peut jouer sur λ , jusqu'ici arbitraire, de manière à assurer la convergence de la méthode des approximations successives du Th. 2.1, et on dispose ainsi d'une méthode pour trouver une valeur approchée de la solution de l'équation $g(t) = 0$.

Si vous disposez d'une calculatrice vous pouvez vous amuser à mettre en œuvre le procédé.

3.2. Résolution de systèmes linéaires

On se propose de résoudre le système linéaire $M.X = B$, à n équations et n inconnues (M est une matrice carrée $n \times n$ donnée, B une matrice colonne donnée, X est la matrice colonne cherchée).

Posons $A := I - M$, où I est la matrice unité, et $g(X) := A.X + B$. La résolution de $M.X = B$ est équivalente à la recherche d'un point fixe de g ; en effet :

$$g(X) = X \iff A.X + B = X \iff X - A.X = B \iff M.X = B.$$

Bien entendu, le fait que g soit ou bien ne soit pas une contraction stricte va dépendre du choix de la distance qu'on mettra sur \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n).

Pour $X = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ et $Y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, prenons d'abord sur \mathbb{R}^n la distance $d_\infty(X, Y) = \max_{1 \leq i \leq n} |\xi_i - \eta_i|$. Notons : $A = (a_{i,j})$, $1 \leq i, j \leq n$.

On a :

$$\begin{aligned} d_\infty[g(X), g(Y)] &= d_\infty(A.X + B, A.Y + B) = \max_{1 \leq i \leq n} |A.(X - Y)_i| \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}(\xi_j - \eta_j) \right| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |\xi_j - \eta_j| \right] \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right] \cdot \max_{1 \leq j \leq n} |\xi_j - \eta_j| = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right] \cdot d_\infty(X, Y), \end{aligned}$$

et donc g sera une contraction stricte lorsque $A = I - M$ vérifie :

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \left[\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right] < 1.$$

Nota : pour la norme $\|\cdot\|_{1,\infty}$, cf. Chap.II, Exemple 3.1.

Le lecteur vérifiera que si l'on prend sur \mathbb{R}^n la distance $d_1(X, Y) = \sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|$, on tombe sur la condition suffisante : $\|A\|_{\infty,1} = \max_{1 \leq j \leq n} \left[\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \right] < 1$, et enfin que si l'on prend $d_2(X, Y) = \left(\sum_{i=1}^n |\xi_i - \eta_i|^2 \right)^{1/2}$, on tombe sur la condition :

$$\|A\|_{2,2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|^2 < 1.$$

Dès que l'une de ces conditions suffisantes (et nullement nécessaires) est vérifiée, on peut appliquer la méthode des approximations successives : $X_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitraire, $X_1 = g(X_0), \dots, X_{n+1} = g(X_n), \dots$

Bien entendu g n'est pas « obligée » d'être strictement contractante ! La méthode ne peut « marcher » à coup sûr que si elle l'est. Les § 3.1 et 3.2 ne sont donnés qu'à titre d'exemples d'applications du Th. 2.1.

Au point de vue analyse numérique, à l'heure actuelle, on utilise généralement d'autres méthodes plus performantes (rapidité, coût).

3.3. Résolution d'une équation intégrale

Soit $[a, b]$, $a < b$, un intervalle compact dans \mathbb{R} . On considère l'espace de Banach $E = C_\infty([a, b], \mathbb{R})$. On se donne $\varphi \in E$ et une fonction appelée *noyau* $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur son domaine de définition. On suppose donné, enfin, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Le problème qu'on se propose de résoudre (au moins partiellement) est le suivant, appelé *équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce, non homogène* [ce type d'équation est issu de la physique mathématique] :

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver une fonction } t \mapsto u(t) \text{ dans } E \text{ telle que :} \\ \forall t \in [a, b] : u(t) = \lambda \cdot \int_a^b K(t, s) \cdot u(s) ds + \varphi(t) \end{array} \right.$$

Remarque : Il peut sembler étonnant de chercher *a priori* la solution dans E : pourquoi pas ailleurs ?

Mais la résolution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ pose le même problème ... les solutions ne seront pas les mêmes selon qu'on résout dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} !

Définissons une application A , manifestement *affine*, par :

$$[A(u)](t) = \lambda \cdot \int_a^b K(t, s) \cdot u(s) ds + \varphi(t), \text{ pour } u \in E.$$

D'après les propriétés élémentaires des intégrales dépendant d'un paramètre [cf. cours de D.E.U.G. ou cours de calcul différentiel], puisque K est continue sur $[a, b] \times [a, b]$, et puisque $\varphi \in E$, on a : $A(u) \in E$. A applique E dans E .

Calculons $d_\infty[A(u), A(v)] = \max_{a \leq t \leq b} |[A(u)](t) - [A(v)](t)|$

$$\begin{aligned} d_\infty[A(u), A(v)] &= \max_{a \leq t \leq b} \left| \lambda \int_a^b K(t, s) \cdot u(s) ds + \varphi(t) - \lambda \int_a^b K(t, s) \cdot v(s) ds - \varphi(t) \right| \\ &= \max_{a \leq t \leq b} \left| \lambda \cdot \int_a^b [K(t, s) \cdot (u(s) - v(s))] ds \right|. \end{aligned}$$

Puisque K est continue sur le compact $[a, b] \times [a, b]$, il existe M réel > 0 tel que $|K(t, s)| \leq M$ pour $(t, s) \in [a, b] \times [a, b]$, et donc :

$$\begin{aligned} d_\infty[A(u), A(v)] &\leq |\lambda| \max_{a \leq t \leq b} \left(\int_a^b |K(t, s)| \cdot |u(s) - v(s)| ds \right) \\ &\leq |\lambda| \cdot M \cdot \max_{a \leq t \leq b} |u(s) - v(s)| \int_a^b ds = |\lambda| \cdot M \cdot (b - a) \cdot \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

L'application affine A est donc une contraction stricte si (condition suffisante, non nécessaire) l'on a la condition : $|\lambda| \cdot M \cdot (b - a) < 1$, c'est-à-dire si $|\lambda|$ est « assez petit » :

$$\left| \lambda \right| < \frac{1}{M \cdot (b - a)}$$

Le Théorème 2.1. permet d'énoncer : *l'équation intégrale admet une solution $u \in E$ unique, si $|\lambda| < \frac{1}{M \cdot (b - a)}$.*

On peut bien sûr se demander ce qu'il en est lorsque $|\lambda| \geq \frac{1}{M \cdot (b - a)}$...

Les problèmes posés par les équations intégrales ont grandement contribué aux progrès de l'analyse fonctionnelle (on peut même dire que les équations intégrales ont fondé l'A. F.) ; cela continue aujourd'hui avec les équations intégrales non linéaires, avec des noyaux K très irréguliers ou singuliers ($\frac{1}{t-s}$, par ex.), etc.

Partant de $u_0 \in E$ arbitraire (par exemple $u_0 = 0$), les approximations successives s'écrivent ici : $\forall t \in [a, b], u_{n+1}(t) = \lambda \int_a^b K(t, s) \cdot u_n(s) ds + \varphi(t)$.

4. VARIANTES DU THÉORÈME FONDAMENTAL ET APPLICATIONS

4.1 Applications dont un itéré est strictement contractant

Il peut arriver qu'une application ne soit pas une contraction stricte, mais qu'un de ses itérés $A^N = A \circ A \circ \dots \circ A$ (N fois) soit une contraction stricte.

Exemple 4.1. $E = C_\infty([a, b], \mathbb{R})$, $a < b$. On définit $A : E \rightarrow E$ par :

$$\forall f \in E, \forall t \in [a, b] : [A(f)](t) = \int_a^t f(s) ds.$$

$A \in \mathcal{L}(E)$ et (Chap.X) : $\|A\| = b - a$, qui n'est pas < 1 [cf. Exercice 1.2] si $b - a \geq 1$.

☞ **Exercice 4.1.** (pas si facile . . .) Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\forall f \in E, \forall t \in [a, b] : [A^n(f)](t) = \int_a^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds.$$

Déduisez-en que : $\|A^n\| = \frac{(b-a)^n}{n!}$. Donc il existe un entier N tel que A^N est une contraction stricte.

☞ **Exercice 4.2.** (suite, facile, de l'exercice 4.1) On fait $a = 0$ et $b = 1$. Démontrez que l'équation suivante :

$$\forall t \in [0, 1] : f(t) - \int_0^t f(s) ds = g(t),$$

où f est l'inconnue et où g est donnée, a une solution et une seule :

$$f(t) = g(t) + e^t \int_0^t e^{-s} \cdot g(s) ds.$$

Dans une telle situation, le résultat suivant est utilisable :

Proposition 4.1.

Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $A : E \rightarrow E$ une application telle que pour un entier $N \geq 1$ l'application $B = A^N$ est une contraction stricte : A possède un point fixe et un seul.

Démonstration :

Supposons que $\hat{u} \in E$ est un point fixe de $A : \hat{u} = A(\hat{u})$; on a :

$$A^2(\hat{u}) = A[A(\hat{u})] = A(\hat{u}) = \hat{u}, A^3(\hat{u}) = A[A^2(\hat{u})] = A(\hat{u}) = \hat{u}, \text{ etc.}$$

Et donc \hat{u} est un point fixe de $B = A^N$. Comme B admet un point fixe unique, A admet un point fixe au plus. Voilà pour l'unicité.

Quant à l'existence, soit \hat{u} le point fixe de B , qui existe par le Th. 2.1 : $\hat{u} = B(\hat{u})$. On a : $B(A(\hat{u})) = A^N \circ A(\hat{u}) = A \circ A^N(\hat{u}) = A \circ B(\hat{u}) = A(\hat{u})$ (les puissances de A commutent entre elles). Donc $A(\hat{u}) = \hat{u}$, puisque B n'a qu'un point fixe. ♦

Application à la résolution d'une équation intégrale

Dans le même cadre que le § 3.3, avec les mêmes notations, on considère l'équation [équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce, non homogène] :

<p>Trouver une fonction $t \mapsto u(t)$ dans E telle que :</p> $\forall t \in [a, b] : u(t) = \lambda \cdot \int_a^t K(t, s) \cdot u(s) ds + \varphi(t)$

☞ Bien remarquer qu'ici la borne supérieure de l'intégrale est t et non plus b comme dans le § 3.3, ce « détail » va tout changer . . .

Comme dans 3.3 :

$$|[A(u)](t) - [A(v)](t)| = |\lambda| \cdot \left| \int_a^t K(t, s) \cdot [u(s) - v(s)] ds \right| \leq |\lambda| \cdot M \cdot (t - a) \cdot \|u - v\|_\infty,$$

d'où :

$$\begin{aligned} |[A^2(u)](t) - [A^2(v)](t)| &= |\lambda| \cdot \left| \int_a^t K(t, s) \cdot [[A(u)](s) - [A(v)](s)] ds \right| \\ &\leq |\lambda| \cdot M \int_a^t |\lambda| M (s - a) \|u - v\|_\infty ds = |\lambda|^2 M^2 \frac{(t - a)^2}{2} \|u - v\|_\infty, \end{aligned}$$

et par récurrence on obtient :

$$\begin{aligned} |[A^n(u)](t) - [A^n(v)](t)| &\leq |\lambda|^n M^n \frac{(t - a)^n}{n!} \|u - v\|_\infty \\ &\leq |\lambda|^n M^n \frac{(b - a)^n}{n!} \|u - v\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc : $\|A^n(u) - A^n(v)\|_\infty \leq |\lambda|^n M^n \frac{(b - a)^n}{n!} \|u - v\|_\infty$, et il est maintenant clair que pour toute valeur du paramètre λ il est possible de choisir n assez grand pour assurer la condition : $\frac{[|\lambda| M (b - a)]^n}{n!} < 1$.

En définitive, A^n est une contraction stricte, et la Prop. 4.1 permet de conclure : pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'équation intégrale proposée possède une solution unique dans E .

4.2 Applications dont une restriction est strictement contractante

Il advient fréquemment que $A : E \rightarrow E$ ne soit pas une contraction stricte sur E entier, mais seulement sur une partie de E . On peut dans ce cas faire appel au résultat suivant (voir une application dans le cours de calcul différentiel) :

Proposition 4.2.

Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $F = B(a, \rho[$ une boule ouverte de E . Soit $A : F \rightarrow E$ une contraction stricte de constante $k \in]0, 1[$ (F étant muni de d induite).

Sous l'hypothèse : $d[A(a), a] \leq \rho(1 - k)$, il existe $\hat{u} \in F$ unique tel que : $A(\hat{u}) = \hat{u}$.

Démonstration : Considérons la suite : $u_0 = a, u_1 = A(u_0) = A(a), u_2 = A(u_1), \dots, u_{n+1} = A(u_n), \dots$: cela n'a de sens – puisque A n'est définie que sur F – que si $u_n \in F$ pour tout n . Vérifions qu'il en est bien ainsi, par récurrence.

$u_0 = a \in F = B(a, \rho[; u_1 = A(a) \implies d(u_1, a) = d[A(a), a] < \rho(1 - k) < \rho$, à cause de l'hypothèse faite ;

supposons que $u_n \in F$ et prouvons qu'alors $u_{n+1} \in F$. On a :

$d(u_{n+1}, a) \leq d(u_{n+1}, u_n) + d(u_n, u_{n-1}) + \dots + d(u_2, u_1) + d(u_1, a)$; mais :

$d(u_2, u_1) = d[A(u_1), A(u_0)] \leq k \cdot d(u_1, a), \dots,$

$d(u_{n+1}, u_n) = d[A(u_n), A(u_{n-1})] \leq k \cdot d(u_n, u_{n-1}) \leq k^2 \cdot d(u_{n-1}, u_{n-2}) \leq \dots \leq k^n \cdot d(u_1, a)$, d'où :

$d(u_{n+1}, a) \leq (k^n + k^{n-1} + \dots + k^2 + k + 1) \cdot d(u_1, a) < \frac{1}{1 - k} \rho(1 - k) = \rho$ et

$u_{n+1} \in F$. Donc la suite (u_n) est bien définie. En suivant pas à pas la démonstration du Th. 2.1, on démontre que (u_n) est de Cauchy, donc convergente dans E vers $\hat{u} \in E$.

L'estimation *a priori* (2.3.1) donne : $d(\hat{u}, a) \leq \frac{1}{1 - k} d[A(a), a] \leq \frac{1}{1 - k} \rho(1 - k) = \rho$, et donc $\hat{u} \in F$.

Comme dans la démonstration du Th. 2.1, on démontre que \hat{u} est (l'unique) point fixe de A . ♦

5. LE THÉORÈME DE BROUWER

Si vous essayez d'étendre le résultat de l'Exercice 1.1 à $f : B \rightarrow B$, où B est la boule unité fermée euclidienne de \mathbb{R}^2 , et où f est continue sur B , vous éprouverez sans aucun doute de sérieuses difficultés... en dépit du fait qu'il existe des démonstrations élémentaires. Mais le résultat est vrai :

Théorème 5.1. (Théorème de Brouwer)

|| $S \neq \emptyset$ désignant une partie *convexe* et *compacte* d'un e.v.n. de *dimension finie*,
|| toute application *continue* $A : S \rightarrow S$ admet un point fixe au moins.

Ici, on n'a pas en général unicité ! [cf. Exemples 1.1, 1)] Le résultat se généralise (même énoncé) à un e.v.n. de dimension quelconque (Théorème de *Schauder*), mais on ne peut pas remplacer « compact » par « fermé et borné » !

La démonstration du théorème de Brouwer est très facile si l'on connaît un peu (vraiment très peu) de *topologie algébrique*, branche des mathématiques qui est le véritable cadre de ce résultat. Les démonstrations élémentaires sont assez techniques. Nous ne démontrerons pas ce résultat ici.

Fin de la partie cours du Chapitre XVI

LECTURE

Un résultat d'existence pour les équations non linéaires

On va donner une application du Théorème de Brouwer : un résultat d'existence de solution (une au moins) pour une équation non linéaire. On se place dans \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne (\cdot, \cdot) .

|| Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application continue sur \mathbb{R}^n , vérifiant la condition (appelée *coercivité*) :

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \frac{(u|f(u))}{\|u\|} = +\infty.$$

|| **Conclusion** : f est *surjective*.

Démonstration :

Soit $w \in \mathbb{R}^n$ fixé ; on va démontrer qu'il existe un $\hat{u} \in \mathbb{R}^n$ au moins tel que $f(\hat{u}) = w$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\|w\| < \alpha$. La condition de coercivité donne : $\alpha > 0$ étant fixé, $\exists \rho > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n : \|u\| \geq \rho \implies (u|f(u)) \geq \alpha \|u\|$.

On considère l'application $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par : $g(u) := u - f(u) + w$, puis l'application $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par :

$$h(u) := g(u) \text{ si } \|g(u)\| \leq \rho, \quad h(u) := \rho \frac{g(u)}{\|g(u)\|} \text{ si } \|g(u)\| > \rho.$$

Soit $C = B(0, \rho) = \{u \in \mathbb{R}^n / \|u\| \leq \rho\}$, ensemble convexe et compact. g est continue sur \mathbb{R}^n puisque f l'est.

Soit d'autre part l'application : $\Pi(u) := P_C(u) = u$ si $\|u\| \leq \rho$, et $\rho \frac{u}{\|u\|}$, si $\|u\| > \rho$; Π est la *projection radiale* sur C (dessin !), elle est contractante [cf. Chap. XVII, Exercice 2.3] et donc continue sur \mathbb{R}^n .

A présent : $h = \Pi \circ g$ est continue sur \mathbb{R}^n . D'autre part, h applique \mathbb{R}^n dans C , et donc C dans C . D'après le Théorème de Brouwer h admet un point fixe $\hat{u} \in C$. On va démontrer que $\|g(\hat{u})\| > \rho$ est impossible, donc que $\|g(\hat{u})\| \leq \rho$, d'où $\hat{u} = h(\hat{u}) = g(\hat{u}) = \hat{u} - f(\hat{u}) + w \implies f(\hat{u}) = w$, ce qui est le résultat cherché.

Supposons donc que $\|g(\hat{u})\| > \rho$: on aurait $h(\hat{u}) = \rho \frac{g(\hat{u})}{\|g(\hat{u})\|} = \hat{u}$, et donc : $\|\hat{u}\| = \rho$.

On en déduirait que : $(\hat{u}|h(\hat{u})) = (\hat{u}|\hat{u}) = \|\hat{u}\|^2 = \rho^2$, d'une part, et, d'autre part :

$$\begin{aligned} (\hat{u}|h(\hat{u})) &= \rho(\hat{u}|\frac{g(\hat{u})}{\|g(\hat{u})\|}) = \rho(\hat{u}|\frac{\hat{u} - f(\hat{u}) + w}{\|g(\hat{u})\|}) = \rho \times \frac{\|\hat{u}\|^2 - (\hat{u}|f(\hat{u})) + (\hat{u}|w)}{\|g(\hat{u})\|} \\ &\leq \rho \times \frac{\rho^2 - \alpha\|\hat{u}\| + (\hat{u}|w)}{\|g(\hat{u})\|} \leq \rho \times \frac{\rho^2 - \alpha\rho + \rho\|w\|}{\|g(\hat{u})\|} \end{aligned}$$

Soit : $\rho^2 \leq \rho \times \frac{\rho^2 - \alpha\rho + \rho\|w\|}{\|g(\hat{u})\|} \implies \|g(\hat{u})\| \leq \rho - \alpha + \|w\| < \rho - \alpha + \alpha = \rho$ et donc $\|g(\hat{u})\| < \rho$: contradiction !

Cette démonstration est jolie, n'est-ce pas ?

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ Exercice 1.1

On pose : $g(t) = f(t) - t$; g est continue sur $[0, 1]$ car $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto t$ sont continues sur $[0, 1]$. $g(0) = f(0) \geq 0$ (puisque f est à valeurs dans $[0, 1]$!), et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ (puisque f est à valeurs dans $[0, 1]$!). Donc d'après le Th. des valeurs intermédiaires [D.E.U.G. ou Chap. XX] il existe $\hat{t} \in [0, 1]$ tel que $g(\hat{t}) = 0$, i.e. tel que $f(\hat{t}) = \hat{t}$, et donc \hat{t} est un point fixe de f . ♦
Pour un intervalle $[a, b]$, la démonstration est exactement la même, *mutatis mutandis*.

Mais on peut aussi généraliser de la manière suivante : on considère les deux applications affines inverses l'une de l'autre $\theta : [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $t \mapsto (b-a)t + a$ et $\theta^{-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$, $t \mapsto \frac{t-a}{b-a}$ [cf. la démonstration du Théorème de Weierstraß, Chap. IV].

$h = \theta^{-1} \circ f \circ \theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ a un point fixe $\hat{t} \in [0, 1]$, et donc $\hat{s} = \theta(\hat{t}) \in [a, b]$, est point fixe de f : $f(\hat{s}) = f(\theta(\hat{t})) = \theta \circ h(\hat{t}) = \theta(\hat{t}) = \hat{s}$. ♦

☞ Exercice 1.2

Supposons que $\|A\| \leq 1$ [resp. < 1].

$\forall u, v \in E$: $\|A(u) - A(v)\| = \|A(u - v)\| \leq \|A\| \cdot \|u - v\|$, et donc en posant $k := \|A\|$: A est une contraction [resp. une contraction stricte]. ♦

Réciproquement, si $\forall u, v \in E$: $\|A(u) - A(v)\| \leq k \cdot \|u - v\|$, avec $k \in [0, 1]$ ou $k \in [0, 1[$, on aura avec $v = 0$,

$\forall u \in E$: $\|A(u)\| \leq k\|u\| \implies \|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|A(u)\| \leq k$, et le résultat. ♦

☞ Exercice 1.3

Supposons que $\sup_{a < t < b} |f'(t)| = k \leq 1$ [resp. < 1], et soient $s, t \in]a, b[$. D'après le th. des accroissements finis : $f(t) - f(s) = (t - s) \cdot f'(\xi)$ avec $\xi \in]s, t[$; d'où : $|f(t) - f(s)| = |f'(\xi)| \cdot |t - s| \leq k|t - s|$, et f est contractante [resp. strictement contractante]. ♦

Réciproque : $\forall t \in]a, b[$, $\forall \eta$ tel que $t + \eta \in]a, b[$: $|f(t + \eta) - f(t)| \leq k|\eta|$, et pour $\eta \neq 0$: $|\frac{f(t + \eta) - f(t)}{\eta}| \leq k \implies \lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} |\frac{f(t + \eta) - f(t)}{\eta}| = |f'(t)| \leq k$. ♦

f est dérivable sur \mathbb{R}^* et $f'(t) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\alpha}{t^2}\right)$. D'après ce qui précède, il suffit d'étudier les cas où $|f'(t)| \leq 1$ [resp. < 1].

i) si $1 - \frac{\alpha}{t^2} \geq 0 \iff |t| \geq \sqrt{\alpha}$: $|f'(t)| \leq 1 \iff -\frac{\alpha}{2t^2} \leq \frac{1}{2}$, vrai $\forall t \in \mathbb{R}^*$.

$$\text{ii) si } 1 - \frac{\alpha}{t^2} \leq 0 \iff |t| \leq \sqrt{\alpha} : |f'(t)| \leq 1 \iff \frac{\alpha}{2t^2} \leq \frac{3}{2} \iff |t| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{3}.$$

Donc f est une contraction [resp. une contraction stricte] si et seulement si $|t| \geq \frac{\sqrt{\alpha}}{3}$ [resp. $|t| > \frac{\sqrt{\alpha}}{3}$]. Les points fixes de f sont manifestement $\pm\sqrt{\alpha}$ quelle que soit la valeur de $\alpha > 0$.

Il est recommandé de poursuivre l'étude de cet exemple en appliquant le Th. de point fixe des contractions strictes lorsque cela est possible (ne pas oublier S.V.P. la condition $f : E \rightarrow E$), en suivant sur un dessin le cheminement des itérés selon le choix du point de départ arbitraire. ♦

Exercice 1.4

Notons e l'élément neutre de G (le cas intéressant est celui où G est le groupe additif d'un espace vectoriel, auquel cas $e = 0$ et u^{-1} se note $-u$).

Supposons que $A(\hat{u}) = v$:

$$A(\hat{u}) * v^{-1} = v * v^{-1} = e \implies A(\hat{u}) * v^{-1} * \hat{u} = e * \hat{u} = \hat{u};$$

posant $B(u) = A(u) * v^{-1} * u$, on a $B(\hat{u}) = \hat{u}$: \hat{u} est solution d'un problème de point fixe.

Réciproquement, si $B(\hat{u}) = \hat{u}$:

$$\begin{aligned} A(\hat{u}) * v^{-1} * \hat{u} = \hat{u} &\implies A(\hat{u}) * v^{-1} * \hat{u} * \hat{u}^{-1} = \hat{u} * \hat{u}^{-1} = e \\ &\implies A(\hat{u}) * v^{-1} * e = e \implies A(\hat{u}) = v. \end{aligned}$$

En définitive, toute équation peut être transformée en un problème de point fixe et réciproquement. ♦

Exercice 1.5

Il n'y a qu'un point fixe au plus puisque A est contractive. D'autre part A est continue sur E .

Considérons la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto d(u, A(u))$: f est continue sur E comme composée $u \mapsto (u, A(u)) \mapsto d(u, A(u))$.

Supposons qu'il n'y ait pas de point fixe : dans ce cas $f(u) > 0$ pour tout $u \in E$ et, plus précisément, il existe $a \in E$ tel que $\inf_{u \in E} f(u) = f(a) = d(a, A(a)) > 0$.

Considérons $b = A(a)$ et $A(b) = A(A(a)) = A^2(a)$: puisque $a \neq A(a)$ et A contractive, on a : $d(b, A(b)) = d(A(a), A(A(a))) < d(a, A(a)) = \inf_{u \in E} d(u, A(u))$, une impossibilité par définition de la borne inférieure. Contradiction !

Donc il existe un point fixe pour A . ♦

Exercice 1.6

Soit $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, \dots) : e_1 \in c_0$, et posons :

$$B(u) = B(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots).$$

Il est clair que B est une application linéaire de c_0 dans lui-même. On a : $A(u) = e_1 + B(u)$ pour tout $u \in E$, et A est bien une application affine.

$\forall u \in E : \|B(u)\|_\infty = \|(0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)\|_\infty = \|(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)\|_\infty = \|u\|_\infty$: B est une isométrie, et donc A en est une aussi car $A(u) - A(v) = B(u) - B(v) = B(u - v)$. En particulier, si $\|u\|_\infty \leq 1 : \|A(u)\|_\infty \leq 1$, et A applique F dans F . A et B sont injectives, comme isométries, mais ne sont pas surjectives de c_0 sur c_0 : $e_1 \in c_0$ n'a pas d'antécédent dans c_0 pour B , et $2e_1 \in c_0$ n'a pas d'antécédent pour A .

Supposons que $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$ est un point fixe de A :

$\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n, \dots) = A(\hat{u}) = (1, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots)$, ce qui donne : $u_1 = 1, u_2 = u_1 = 1, \dots, u_n = 1$ pour tout n , mais la suite $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ n'appartient pas à c_0 (elle tend vers 1, pas vers 0 !).

A n'a donc pas de point fixe dans F (par contre B en a un qui est 0). ♦

Exercice 2.1

Soit \hat{u} l'unique point fixe de A : $(B \circ A)(\hat{u}) = B(A(\hat{u})) = B(\hat{u})$ d'une part, et $(B \circ A)(\hat{u}) = (A \circ B)(\hat{u}) = A(B(\hat{u}))$ d'autre part. Donc $B(\hat{u})$ est un point fixe de A , et comme A n'a qu'un point fixe : $B(\hat{u}) = \hat{u}$. ♦

Exercice 2.2

Soit \hat{a} le point fixe de l'application A . D'après le Th. 2.1, le point fixe \hat{b} de l'application B est la limite de la suite : $\hat{a}, B(\hat{a}), B^2(\hat{a}), \dots, B^n(\hat{a}), \dots$ et on a la majoration *a priori* (2.3.1) : $d(\hat{a}, B^n(\hat{a})) \leq \frac{k_B^n}{1-k_B} d(B(\hat{a}), \hat{a})$.

On a donc : $d(\hat{a}, B^n(\hat{a})) \leq \frac{1}{1-k_B} d(B(\hat{a}), \hat{a}) = \frac{1}{1-k_B} d(B(\hat{a}), A(\hat{a})) \leq \frac{\varepsilon}{1-k_B}$.

En faisant tendre n vers l'infini : $d(\hat{a}, \hat{b}) \leq \frac{\varepsilon}{1-k_B}$; exactement de la même manière, en interchangeant les rôles de A et B , de \hat{a} et de \hat{b} , on a aussi : $d(\hat{a}, \hat{b}) \leq \frac{\varepsilon}{1-k_A}$.

Donc : $d(\hat{a}, \hat{b}) \leq \min\left\{\frac{\varepsilon}{1-k_A}, \frac{\varepsilon}{1-k_B}\right\} \cdot \varepsilon = \frac{\varepsilon}{1-k}$, avec $k = \max\{k_A, k_B\}$. ♦

Exercice 2.3

Commençons par démontrer que A est nécessairement une contraction stricte de constante k . $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} d[A(u), A(v)] &\leq d[A(u), A_n(u)] + d[A_n(u), A_n(v)] + d[A_n(v), A(v)] \\ &\leq d[A(u), A_n(u)] + k \cdot d(u, v) + d[A_n(v), A(v)]. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire : $\exists N_1$ [resp. N_2] dans \mathbb{N} , $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_1$ [resp. N_2] $\implies d[A(u), A_n(u)] \leq \varepsilon$ [resp. $d[A_n(v), A(v)] \leq \varepsilon$].

Donc, $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\}$: $d[A(u), A(v)] \leq k \cdot d(u, v) + 2\varepsilon$.

L'inégalité ayant lieu pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $d[A(u), A(v)] \leq k \cdot d(u, v)$, et A est strictement contractante de constante k . ♦

Appelons \hat{u} le point fixe unique de A (Th. 2.1).

$$\begin{aligned} d(u_{n+1}, \hat{u}) &= d[A_n(u_n), A(\hat{u})] \leq d[A_n(u_n), A_n(\hat{u})] + d[A_n(\hat{u}), A(\hat{u})] \\ &\leq k \cdot d(u_n, \hat{u}) + d[A_n(\hat{u}), A(\hat{u})]. \end{aligned}$$

Posons : $e_n := d[A_n(\hat{u}), A(\hat{u})]$; on a :

$$d(u_{n+1}, \hat{u}) \leq k \cdot [k \cdot d(u_{n-1}, \hat{u}) + e_{n-1}] + e_n = k^2 \cdot d(u_{n-1}, \hat{u}) + k \cdot e_{n-1} + e_n \leq \dots$$

$$\text{Par récurrence on obtient : } d(u_{n+1}, \hat{u}) \leq k^{n+1} \cdot d(u_0, \hat{u}) + \sum_{p=0}^n k^p \cdot e_{n-p}.$$

Le premier terme majorant tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ car $k \in]0, 1[$, et le second tend vers 0 également à cause du lemme restant à prouver et de $\lim_{n \rightarrow \infty} (e_n) = 0$.

On aura donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \hat{u}$. ♦

Démontrons enfin le lemme (il est dû à *Toeplitz*) :

$$(\beta_n) = \left(\sum_{p=0}^n k^p \cdot \alpha_{n-p} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \text{ si } k \in]0, 1[\text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 0.$$

N désignant un entier « moralement grand » à déterminer ultérieurement, on peut écrire pour tout $n \geq N + 1$:

$$\beta_n = \alpha_n + k\alpha_{n-1} + \dots + k^{n-N}\alpha_N + k^{n-N+1}\alpha_{N-1} + \dots + k^n\alpha_0, \text{ d'où :}$$

$$|\beta_n| \leq [|\alpha_n| + k|\alpha_{n-1}| + \dots + k^{n-N}|\alpha_N|] + \max_{0 \leq j \leq N-1} |\alpha_j| \cdot [k^{n-N+1} + \dots + k^n].$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n) = 0$, il existe un N_1 tel que pour tout $n \geq N_1$ on a $|\alpha_n| \leq \varepsilon$.

Donc pour $n \geq N_1$ on a :

$$|\beta_n| \leq \varepsilon[1 + k + \dots + k^{n-N}] + \|(\alpha_n)_n\|_{\infty} \cdot k^n \cdot k^{-N+1} \cdot [1 + k + \dots + k^{N-1}].$$

D'autre part il existe un N_2 , éventuellement plus grand que le précédent, auquel cas on prendra $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$, tel que pour tout $n \geq N$ on a $k^n \leq \varepsilon$. Pour ce N et pour tout $n \geq N$, on a :

$$|\beta_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-k} + \frac{\varepsilon \cdot k^{-N+1}}{1-k} \|(\alpha_n)_n\|_{\infty} \text{ et, donc : } \lim_{n \rightarrow \infty} (\beta_n) = 0. \text{ ♦}$$

Remarque : En modifiant un peu la démonstration on peut, à la place de (k^n) considérer $(\gamma_n) \in \ell^1$; on obtient : l'opération de convolution des suites envoie $\ell^1 \times c_0$ dans c_0 .

« Moralité » : on peut dans l'algorithme du point fixe remplacer à chaque « pas » l'application A par une application A_n « plus simple » telle que

$$\forall u \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n(u)) = A(u),$$

les A_n étant uniformément strictement contractantes (*i.e.* de même constante k).

La première condition est très raisonnable (il faut bien qu'il y ait un rapport entre les A_n et A !), mais la seconde est plus sévère car il se trouve le plus souvent dans la pratique que les A_n sont des contractions strictes de constante $k_n \in]0, 1[$ vérifiant – fâcheusement – $\lim_{n \rightarrow \infty} (k_n) = 1$. Cela n'empêche pas l'exercice d'être instructif!

☞ Exercice 2.4

Pour tout $n \geq 2$, tout $u \in K$, on a : $A(u) \in K$, $w \in K$, $(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = 1$, et donc, puisque K est convexe : $A_n(u) \in K$.

Par conséquent l'application A_n envoie K dans lui-même.

$$\begin{aligned} \forall u, v \in K : \|A_n(u) - A_n(v)\| &= \|(1 - \frac{1}{n})A(u) + \frac{1}{n}w - (1 - \frac{1}{n})A(v) - \frac{1}{n}w\| \\ &= (1 - \frac{1}{n}) \cdot \|A(u) - A(v)\| \leq (1 - \frac{1}{n}) \cdot \|u - v\|, \end{aligned}$$

puisque A est une contraction.

Donc, pour tout $n \geq 2$: A_n est une contraction stricte de constante $k_n = 1 - \frac{1}{n} \in]0, 1[$.

E étant un e.v.n. de dimension finie est un espace de Banach, et K étant fermé dans E , K est complet.

D'après le Th. 2.1, pour tout $n \geq 2$, A_n admet un point fixe unique $\hat{u}_n \in K$.

K fermé et borné dans E e.v.n. de dimension finie $\implies K$ est compact [Chap. XIV].

Donc de la suite (\hat{u}_n) on peut extraire une suite convergente dans K : il existe $\hat{u} \in K$ et $S \subset \mathbb{N}$, S infini, tels que : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (\hat{u}_n) = \hat{u}$.

Puisque A est continue (contraction) : $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (A(\hat{u}_n)) = A(\hat{u})$.

A présent on a : $A_n(\hat{u}_n) = \hat{u}_n = (1 - \frac{1}{n})A(\hat{u}_n) + \frac{1}{n}w$ pour tout $n \geq 2$, d'où en faisant tendre n vers l'infini, $n \in S$, on obtient : $\hat{u} = A(\hat{u})$. Q.E.D.

Remarque :

Ce résultat [toute contraction $K \rightarrow K$, où $K \subset E$ (de Banach) est convexe, fermé, borné, a nécessairement un point fixe au moins] s'étend, sans grande difficulté (mais avec des connaissances de Maîtrise) à E espace de Hilbert, mais aussi à des espaces de Banach comme ℓ^p ou L^p où $1 < p < +\infty$. Par contre, il est faux pour $E = c_0$ [cf. Exercice 1.6]. Pour certains espaces de Banach appartenant à une certaine classe [les « espaces de Banach réflexifs et strictement convexes »], la question n'est pas résolue ; c'est ce qu'on appelle une « question ouverte » ou une « conjecture ».

☞ Exercice 2.5

L'énoncé suggère d'introduire l'espace métrique $F = \mathcal{CB}_\infty(X, E)$ des applications continues et bornées sur X , à valeurs dans E : ce sera l'espace où l'on cherche l'inconnue h . Bien sûr F est muni de la distance $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$ [cf. Chap. I, (3.22)]. Par ailleurs, pour $f \in F$, écrivons :

$$\forall x \in X : f(x) = A(x, f(x)) = [\Phi(f)](x) \iff \Phi(f) = f \iff f \text{ est un point fixe de } \Phi.$$

Le problème posé se ramène donc au suivant : trouver le point fixe $h \in F$ de l'application $\Phi : F \rightarrow F$ définie par $[\Phi(f)](x) = A(x, f(x))$ pour tout $f \in F$ et tout $x \in X$.

Il nous faut vérifier que $\forall f \in F : \Phi(f) \in F$; on verra alors que le Th. du point fixe des applications strictement contractantes s'applique à Φ , et on aura gagné.

$\Phi(f) : X \rightarrow E$, $x \mapsto [\Phi(f)](x) = A(x, f(x))$ est continue sur X comme composition d'applications continues : $x \mapsto (x, x) \mapsto (x, f(x)) \mapsto A(x, f(x))$.

$\forall f \in F : \Phi(f)$ est bornée ; fixons en effet $x \in X$ et $v \in E$:

$$\begin{aligned} d([\Phi(f)](x), A(x, v)) &\leq \sup_{x \in X} d([F(f)](x), A(x, v)) \\ &\leq \sup_{x \in X} d(A(x, f(x)), A(x, v)) \leq \lambda \cdot \sup_{x \in X} d(f(x), v) < \infty, \end{aligned}$$

car f est bornée sur X . Finalement, $\Phi(f) \in F$ pour tout $f \in F$, et donc Φ applique F dans F . ♦

L'espace F est complet car $F = \mathcal{CB}_\infty(X, E)$ est complet si E l'est [Chap. XI].

Il ne nous reste plus qu'à prouver que Φ est une contraction stricte sur F , et on pourra conclure.

$$\begin{aligned} \forall f, g \in F : d_\infty(\Phi(f), \Phi(g)) &= \sup_{x \in X} d(A(x, f(x)), A(x, g(x))) \\ &\leq \lambda \cdot \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) = \lambda \cdot d_\infty(f, g). \quad \spadesuit \end{aligned}$$

☞ **Exercice 4.1**

$[A^2(f)](t) = \int_a^t [A(f)](s) ds = \int_a^t \left[\int_a^s f(u) du \right] ds = \iint_T f(u) dud s$, où T est le domaine compact délimité par le triangle de sommets (a, a) , (a, t) , (t, t) , i.e. $a \leq u \leq s$, $a \leq s \leq t$. On intègre (théorème de Fubini) en faisant varier s entre u et t (u étant fixé) puis en faisant varier u entre a et t , il vient :

$$[A^2(f)](t) = \int_a^t \left[\int_u^t f(u) ds \right] du = \int_a^t [f(u) \cdot s]_u^t du = \int_a^t (t-u)f(u) du.$$

On raisonne ensuite par récurrence, avec la même méthode de calcul que ci-dessus, pour parvenir à : $[A^n(f)](t) = \int_a^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u) du$.

$$\begin{aligned} |[A^n(f)](t)| &\leq \int_a^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} |f(u)| du \leq \|f\|_\infty \int_a^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} du \\ &\leq \|f\|_\infty \frac{(t-a)^n}{n!} \leq \|f\|_\infty \frac{(b-a)^n}{n!}. \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \|A^n(f)\|_\infty \leq \frac{(b-a)^n}{n!} \|f\|_\infty \text{ et } \|A^n\| \leq \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

D'autre part : $\|A\| \geq \|A(\mathbf{1})\|_\infty$ ($\mathbf{1}$ fonction constante égale à 1) et :

$$[A^n(\mathbf{1})](t) = \int_a^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} du = \frac{(t-a)^n}{n!} \text{ D'où :}$$

$$\|A^n(\mathbf{1})\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |[A^n(\mathbf{1})](t)| = \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

$$\text{Ainsi : } \|A^n\| = \frac{(b-a)^n}{n!}.$$

Par conséquent, $\|A^n\|$ est aussi petit qu'on le désire (en particulier < 1) pour n assez grand. ♦

☞ **Exercice 4.2**

Résolution de l'équation de Volterra particulière $(Id_E - A)(f) = g$.

Calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N [A^n(f)](t) &= \sum_{n=1}^N \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds = \int_0^t \sum_{n=1}^N \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s) ds \\ &= \int_0^t \left(1 + \frac{t-s}{1!} + \frac{(t-s)^2}{2!} + \dots + \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} \right) f(s) ds, \end{aligned}$$

et le terme entre parenthèses tend vers e^{t-s} quand $N \rightarrow \infty$, d'où l'idée de considérer l'application

$$\text{définie par : } [B(f)](t) = \int_0^t e^{t-s} f(s) ds.$$

Il est facile de vérifier que $B \in \mathcal{L}(E)$.

$$\begin{aligned} \left| [B(f)](t) - \sum_{n=1}^N [A^n(f)](t) \right| &\leq \int_0^t \left| e^{t-s} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(t-s)^n}{n!} \right| |f(s)| ds \\ &\leq \|f\|_\infty \sup_{s \in [0,1]} \left| e^{t-s} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(t-s)^n}{n!} \right| \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \|B(f) - \sum_{n=1}^N A^n(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \sup_{r \in [0,1]} \left| e^r - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{r^n}{n!} \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

$$\text{On a, en fait, obtenu : } \|B - \sum_{n=1}^N A^n\|_{\mathcal{L}(E)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0, \text{ et donc : } B = \sum_{n=1}^{\infty} A^n.$$

$$\text{Par conséquent : } \sum_{n=0}^{\infty} A^n = Id_E + B, \text{ d'une part, et, d'autre part : } \sum_{n=0}^{\infty} A^n = (Id_E - A)^{-1},$$

comme on peut le vérifier rapidement dans le Chap. XII [on avait $\|A\| < 1$, ici $\|A^n\| = \frac{1}{n!}$].

Donc l'équation dans E : $(Id_E - A)(f) = g$ a pour solution unique :

$$f = (Id_E - A)^{-1}(g) = (Id_E + B)(g), \text{ soit : } f(t) = g(t) + \int_0^t e^{t-s} g(s) ds.$$

Vérifions qu'il en est bien ainsi :

$$\begin{aligned}
 g(t) + \int_0^t e^{t-s} g(s) ds - \int_0^t \left[g(s) + \int_0^s e^{s-x} g(x) dx \right] ds \\
 = g(t) + e^t \int_0^t e^{-s} g(s) ds - \int_0^t \left[g(s) + e^s \int_0^s e^{-x} g(x) dx \right] ds = g(t) ?
 \end{aligned}$$

On simplifie par $g(t)$, et on dérive par rapport à t , il vient :

$$e^t \int_0^t e^{-s} g(s) ds + e^t \cdot e^{-t} g(t) - g(t) - e^t \int_0^t e^{-x} g(x) dx = 0 ?$$

Qui est bien vérifié, l'expression étudiée est donc constante, et comme elle est nulle pour $t = 0$, la vérification est terminée. ♦

Fin du Chapitre XVI

CHAPITRE XVII

ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS : APPLICATIONS II PROJECTIONS

Introduction

Voici le chapitre XVII, qui traite de la notion *de meilleure approximation d'un point* $u \in E$ *par rapport à une partie* $A, \emptyset \neq A \subset E$, d'un espace métrique E .

Le problème, en toute généralité, se pose ainsi :

$A \subset E$ ($A \neq \emptyset$), $u \in E$ donnés ; on pose : $d(u, A) = \rho \geq 0$;

$\mathcal{P}_A(u) = \text{Argmin}(d(\cdot, u), A) = \{a \in A / d(u, a) = \rho\}$.

$\mathcal{P}_A(u) \neq \emptyset$? $\mathcal{P}_A(u)$ est un singleton ? Pour un u particulier ? Pour tout $u \in E$?

On spécialise ensuite le problème : espace métrique \rightarrow e.v.n. \rightarrow espace préhilbertien, d'une part, et : partie quelconque \rightarrow partie convexe complète, d'autre part, jusqu'à obtenir une notion satisfaisante qui englobe en la généralisant la notion classique de *projection*, et un théorème fondamental.

Beaucoup de problèmes purement mathématiques ou – au contraire – concrets se résolvent par l'application d'un théorème de meilleure approximation = projection.

On a là un exemple de problème d'*optimisation*, particulièrement riche.

Les lecteurs qui manquent vraiment de temps, ou dont le niveau d'énergie est au plus bas, peuvent sans inconvénient majeur (mais c'est quand même dommage) commencer au §3, *i.e.* à la situation *espace préhilbertien (réel) et partie convexe complète*.

Mais, bien entendu, les lecteurs qui n'ont pas de raison impérative pour « couper au plus court » ont intérêt à étudier le chapitre entier. La démonstration du Th. 3.1 est à connaître, car « ré-utilisable par morceaux » [*cf.* Chap. XXI].

Le problème des meilleures approximations dans les e.v.n. constitue un sujet de recherches actuelles, et il existe des problèmes ouverts (= non résolus) de formulation assez élémentaire (mais dont la solution n'est probablement pas élémentaire du tout !).

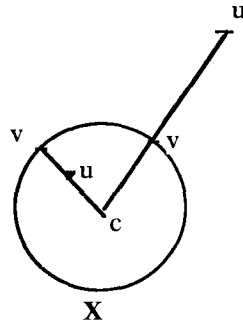
🔪 **Exercices indispensables** : 2.1, 3.1, 3.3, 3.4, 3.6, 4.1, 4.2, 4.3, 4.4.

🔪 Exercices importants : 1.1, 2.2, 2.3, 2.4, 3.5, 4.5, 4.6.

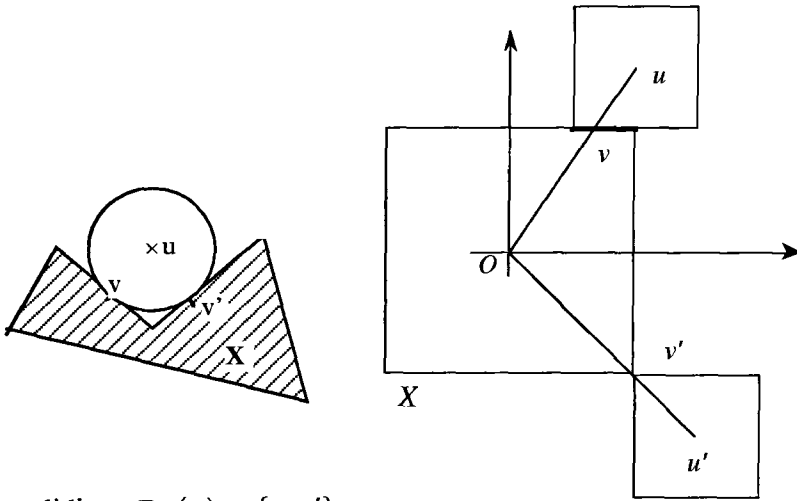
Nous proposons un problème consacré à la construction d'une suite itérative convergente vers un point de l'intersection d'un nombre fini de convexes. C'est un problème important en mathématiques appliquées. Ce problème est relativement facile.

Espérons – suivant la formule consacrée – que les lecteurs éprouveront autant de plaisir à lire ces lignes que leur auteur en a eu à les écrire (quoique, sur la fin . . .).

BON TRAVAIL !



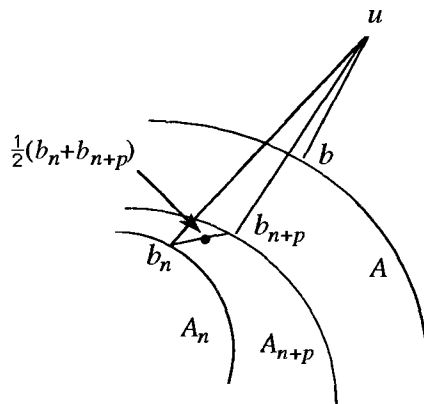
Exemple 1.1. 4)



Dans \mathbb{R}^2 euclidien : $\mathcal{P}_X(u) = \{v, v'\}$.

Dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, avec $X = B_\infty(0, 1]$,
 $\mathcal{P}_X(u')$ est le singleton $\{v'\}$

$\mathcal{P}_X(u)$ est représenté par le bord épais commun



Exercice 3.1

CHAPITRE XVII

ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS APPLICATIONS II : PROJECTIONS

1. MEILLEURE APPROXIMATION DANS UN ESPACE MÉTRIQUE

Soit (E, d) un espace métrique, et soit A une partie non vide de E .

Rappelons [Chap. I] que pour tout $u \in E$ on note :

$$d(u, A) = \inf\{d(u, a) / a \in A\} = \inf_{a \in A} d(u, a)$$

la distance du point u à l'ensemble A .

Définition 1.1.

| Pour tout $u \in E$ donné, le sous-ensemble de A noté et défini comme suit :

$$(1.1) \quad \mathcal{P}_A(u) := \{a \in A / d(u, a) = d(u, A)\} \\ = \{a \in A / \forall b \in A : d(u, a) \leq d(u, b)\}.$$

| s'appelle *l'ensemble des points de meilleure approximation de u par rapport à A* . On dit aussi que $\mathcal{P}_A(u)$ est la *projection* de u sur A .

En termes d'optimisation [voir Chap.I, §3] : $d(u, A)$ est la valeur du problème (de minimisation) $\inf_{a \in A} f_u(x)$, où $f_u(x) = d(u, x)$, pour u fixé, et $\mathcal{P}_A(u) = \text{Argmin}(f_u, A)$ est l'ensemble des solutions du problème.

Exemples 1.1.

1) Si $u \in A : \mathcal{P}_A(u) = \{u\}$. Si $u \in \text{adh}(A) \setminus A : \mathcal{P}_A(u) = \emptyset$, car $d(u, A) = 0$ [Chap. I, Déf. 3.2] et si $a \in A$ vérifie $d(u, a) = 0$, on a : $a = u \in A$, contradiction. De ces deux résultats on déduit que : $\mathcal{P}_A(u) = \{u\} \iff u \in A$.

(1.2) ☞ *Afin d'éviter que $\mathcal{P}_A(u)$ soit systématiquement vide pour certains u , on supposera dans toute la suite que A est un fermé de E .*

2) Nous avons démontré dans l'Exercice 2.11 du Chap. XIV que si $A \neq \emptyset$ est compact on a $\mathcal{P}_A(u) \neq \emptyset$ pour tout $u \in E \setminus A$, et donc, d'après 1) ci-dessus, dans ce cas on a : $\mathcal{P}_A(u) \neq \emptyset$ pour tout $u \in E$. Nous avons également prouvé que si $A \neq \emptyset$ est seulement fermé on pouvait fort bien avoir $\mathcal{P}_A(u) = \emptyset$ pour certains $u \in E$.

3) Dans \mathbb{R}^3 euclidien, la projection orthogonale usuelle d'un point sur une droite ou sur un plan est la projection définie ici.

4) Dans \mathbb{R}^2 euclidien, soit $C = C(O, r)$ un cercle de centre $O : \mathcal{P}_C(O) = C$ entier, et pour tout $u \neq O : \mathcal{P}_C(u) = \{v\}$, où v est l'intersection avec le cercle C de la demi-droite issue de O et passant par u [dessin !].

5) Dans un espace métrique muni de la distance discrète : si $u \in A$, on a : $\mathcal{P}_A(u) = \{u\}$, et si $u \in E \setminus A$, on a : $\mathcal{P}_A(u) = A$.

Définition 1.2.

L'application $\mathcal{P}_A : E \rightarrow 2^E, u \mapsto \mathcal{P}_A(u) \subset E$, est appelée la **multi-application de meilleure approximation par rapport à A** , ou **projection sur A** .

Si $\mathcal{P}_A(u) \neq \emptyset$ pour tout $u \in E$, on dit que la multi-application (ou : *application multivoque*) est *propre*.

☞ **Exercice 1.1.** (très facile) Démontrez que si A est fermé dans E , il en est de même de $\mathcal{P}_A(u)$ pour tout $u \in E$.

La Proposition simple suivante permettra de bien se représenter $\mathcal{P}_A(u)$, en particulier en faisant des dessins (nombreux !) dans \mathbb{R}^2 (voir p. 380).

Proposition 1.1.

Soit A une partie *fermée* non vide de l'espace métrique (E, d) , et soit $u \in E \setminus A$.

Posons $\rho = \rho(A, u) = d(u, A) > 0$. On a :

$$(1.3) \quad \mathcal{P}_A(u) = A \cap B(u, \rho) = A \cap S(u, \rho).$$

Corollaire : $\mathcal{P}_A(u)$ est toujours un *borné* de E .

Démonstration : Soit $v \in \mathcal{P}_A(u) : v \in A$ et $d(u, v) = d(u, A) = \rho$. Donc : $v \in S(u, \rho)$; comme $S(u, \rho) \subset B(u, \rho) : \mathcal{P}_A(u) \subset A \cap S(u, \rho) \subset A \cap B(u, \rho)$.

Réciproquement, si $v \in A \cap B(u, \rho) : v \in A$ et $d(u, v) \leq \rho$; d'où : $\rho = d(u, A) = \inf_{a \in A} d(u, a) \leq d(u, v) \leq \rho$, et $v \in \mathcal{P}_A(u)$. ♦

Puisque $\mathcal{P}_A(u) \subset B(u, \rho)$, $\mathcal{P}_A(u)$ est un *borné*. ♦

Conséquence graphique : dans \mathbb{R}^2 normé, la boule $B(u, \rho]$ est $\rho \cdot B(u, 1]$. On place la boule fermée unité au centre u , puis on « l'agrandit » ou on « la rétrécit » jusqu'à ce qu'elle touche A (tangence) : l'ensemble des points de contact est justement $\mathcal{P}_A(u)$.

Le mieux est de faire quelques essais personnels !

2. MEILLEURE APPROXIMATION DANS UN e.v.n.

On prend maintenant comme espace métrique un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ sur $K = \mathbb{R}$ ou bien $K = \mathbb{C}$.

Rappelons qu'une partie A de E est dite *convexe* [Chap. II, §6] si elle est vide ou si : $\forall u \in A, \forall v \in A, \forall \lambda \in [0, 1] : \lambda u + (1 - \lambda)v \in A$.

Une fonction $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ *définie sur une partie convexe A* est dite *convexe* (sur A) si elle vérifie : $\forall u \in A, \forall v \in A, \forall \lambda \in [0, 1] : f[\lambda u + (1 - \lambda)v] \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v)$.

Exemples 2.1. On sait que les fonctions $E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \|u\|$ et $u \mapsto d(u, A)$, où A est convexe non vide, sont des fonctions convexes : voir les exemples 6.1 et 6.3 du Chapitre II.

☞ **Exercice 2.1.** (facile) Démontrez que la fonction $E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto \frac{1}{2}\|u\|^2$ est convexe.

Proposition 2.1.

Si A est convexe, pour tout $u \in E : \mathcal{P}_A(u)$ est *convexe*.

Démonstration : Si $\mathcal{P}_A(u) = \emptyset$, c'est un convexe par définition. Supposons que $\mathcal{P}_A(u) \neq \emptyset$, et soient $v, w \in \mathcal{P}_A(u), \lambda \in [0, 1]$. On a :

$d(u, v) = \|u - v\| = d(u, A) = d(u, w) = \|u - w\|$; $\lambda v + (1 - \lambda)w \in A$ (convexité de A) et

$$\begin{aligned} d[u, \lambda v + (1 - \lambda)w] &= \|u - [\lambda v + (1 - \lambda)w]\| = \|\lambda u + (1 - \lambda)u - \lambda v - (1 - \lambda)w\| \\ &\leq \lambda \|u - v\| + (1 - \lambda)\|u - w\| = \lambda d(u, A) + (1 - \lambda)d(u, A) = d(u, A). \end{aligned}$$

D'où : $d[u, \lambda v + (1 - \lambda)w] = d(u, A)$ et, donc : $\lambda v + (1 - \lambda)w \in \mathcal{P}_A(u)$. ♦

Nota :

On aurait pu aussi se souvenir que f_u (cf. p.1) étant convexe, on a :

$$\mathcal{P}_A(u) = \text{Argmin}(f_u, A) \text{ est convexe.}$$

☞ **Exercice 2.2.** (assez délicat) Soit A une partie convexe (fermée), soit $u \in E \setminus A$, et on suppose que $\mathcal{P}_A(u) \neq \emptyset$. Soit $v \in \mathcal{P}_A(u)$ et soit $w := \lambda u + (1 - \lambda)v$, où λ est un réel ≥ 0 : $\lambda \in [0, +\infty[$. Démontrez que $v \in \mathcal{P}_A(w)$.

Revenons à $\mathcal{P}_A(u)$ dans le cadre d'un e.v.n. en rappelant que dans le Chap. XIV, Exercice 2.1, nous avons démontré l'intéressant résultat suivant : Si $A \neq \emptyset$ est une partie fermée contenue dans un sous-espace vectoriel F de dimension finie de E , on a : $\mathcal{P}_A(u) \neq \emptyset$ pour tout $u \in E$.

En particulier (car $\dim(F) < \infty \implies F$ fermé dans E) : $\mathcal{P}_F(u) \neq \emptyset$ pour tout $u \in E$.

L'exemple suivant (dans \mathbb{R}) : $A =]-\infty, -1] \cup [+1, +\infty[$, $\mathcal{P}_A(0) = \{-1, +1\}$, prouve qu'en ce qui concerne l'unicité ($\mathcal{P}_A(u) = \{v\}$, un singleton), on n'a guère de chance d'avoir le moindre résultat en dehors des parties convexes.

Mais même si A est convexe, on n'a pas pour autant unicité !

Par exemple, dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, prenez $A = B((0, 0), 1]$:

$$\mathcal{P}_A((0, 2)) = B((0, 0), 1] \cap B((0, 2), 1] = \{(x, 1) / -1 \leq x \leq +1\}.$$

L'unicité dépend aussi de la « forme » des boules (existence ou pas de parties plates).

Donnons une définition et un résultat souvent invoqués dans ces questions.

Définition 2.1.

On dit qu'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ est *strictement convexe* si sa norme vérifie la propriété suivante :

$$(2.1) \quad \forall u \in E, \forall v \in E, u \neq v : \|u\| = \|v\| = 1 \implies \|u + v\| < 2.$$

Exemples 2.2.

Les e.v.n. suivants, munis de leur norme naturelle, sont strictement convexes : les espaces préhilbertiens, les ℓ^p (et L^p) pour $1 < p < \infty$.

Ne sont pas strictement convexes : $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, c_0 , c , ℓ^1 (et L^1), ℓ^∞ (et L^∞), $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$, ...

Démontrons par exemple qu'un espace préhilbertien est s.c. Cela résulte de l'identité du parallélogramme [Chap. II, (5.9)] : $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$; si $\|u\| = \|v\| = 1$: $\|u + v\|^2 = 4 - \|u - v\|^2 < 4$ si $u \neq v$, d'où le résultat.

Proposition 2.2.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. strictement convexe, et soit $A \neq \emptyset$ une partie convexe fermée de E . Pour tout $u \in E$, $\mathcal{P}_A(u)$ est soit \emptyset , soit réduit à un seul point.

Démonstration : Soit $u \in E \setminus A$ et soient $v, w \in \mathcal{P}_A(u)$, $v \neq w$:

$$\|u - v\| = \|u - w\| = d(u, A) = \rho > 0.$$

Considérons le milieu $\frac{1}{2}(u + v)$ du segment joignant v à w .

$\|u - \frac{1}{2}(v + w)\| = \|\frac{1}{2}(u - v) + \frac{1}{2}(u - w)\| \leq \frac{1}{2}\rho + \frac{1}{2}\rho = \rho$, d'une part, $\geq \rho$ d'autre part car A est convexe, et donc $\frac{1}{2}(v + w) = \frac{1}{2}v + (1 - \frac{1}{2})w \in A$. Donc : $\frac{1}{2}(v + w) \in \mathcal{P}_A(u)$.

D'après la Proposition 1.1, on a par conséquent : $v, w, \frac{1}{2}(v + w) \in S(u, \rho)$, ce qui nous fait aboutir à une contradiction, car en posant : $x := \frac{1}{\rho}(u - v)$, $y := \frac{1}{\rho}(u - w)$,

on aurait : $\|x\| = \|y\| = 1, x \neq y$, et $\frac{1}{2}\|x+y\| = \frac{1}{2\rho}\|2u - (v+w)\| = 1$, impossible puisque E est strictement convexe. Donc : $v = w$. ♦

☞ **Exercice 2.3.** (très facile) Soit $A = B(0, 1]$ et soit $u \in E \setminus A$. Démontrez que $\frac{u}{\|u\|}$ (projection radiale de u) appartient à $\mathcal{P}_A(u)$, mais en général $\mathcal{P}_A(u)$ n'est pas réduit à un seul point [dessin !].

Exemple 2.3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) et soit $\varphi \in E' \setminus \{0\}$. Prenons $A := \text{Ker}(\varphi)$ et $u \in E \setminus A$. On a :

$$v \in \mathcal{P}_A(u) \iff \exists \hat{u} \in E : \|\hat{u}\| = 1, |\varphi(\hat{u})| = \|\varphi\|', v = u - \frac{\varphi(u)}{\|\varphi\|'} \hat{u}.$$

☞ En particulier, on voit que si φ n'atteint pas sa norme sur la sphère unité, on a $\mathcal{P}_A(u) = \emptyset$ pour tout $u \in E \setminus A$. Cela en dépit du fait que A est un hyperplan fermé, i.e. un ensemble de structure plutôt simple . . .

En effet, si $v = u - \frac{\varphi(u)}{\|\varphi\|'} \hat{u}$, où : $\|\hat{u}\| = 1, \varphi(u) = \|\varphi\|'$, on a :

$$\varphi(v) = \varphi(u) - \frac{\varphi(u)}{\|\varphi\|'} \times \varphi(\hat{u}) = \varphi(u) - \frac{\varphi(u)}{\|\varphi\|'} \times \|\varphi\|' = \varphi(u) - \varphi(u) = 0,$$

soit : $v \in \text{Ker}(\varphi) = A$. De plus : $\|v - u\| = \frac{|\varphi(u)|}{\|\varphi\|'} \times \|\hat{u}\| = \frac{|\varphi(u)|}{\|\varphi\|'} = d(u, A)$ [formule d'Ascoli, établie dans le Chap. X, (1.15)]. ♦

Réciproquement, si $v \in \mathcal{P}_A(u) : \varphi(v) = 0$, et $0 \neq \|u - v\| = d(u, A) = \frac{|\varphi(u)|}{\|\varphi\|'}$ [loc.cit.].

Posons : $w := u - v, \|w\| = \frac{|\varphi(v+w)|}{\|\varphi\|'} = \frac{|\varphi(w)|}{\|\varphi\|'} \implies |\varphi(\frac{w}{\|w\|})| = \|\varphi\|'$.

Prenons : $\hat{u} := \frac{w}{\|w\|} ; \|\hat{u}\| = 1$ et $\|\varphi\|' = |\varphi(\frac{w}{\|w\|})| = |\varphi(\hat{u})|$.

Enfin,

$$v = u - w = u - \|w\| \frac{w}{\|w\|} = u - \frac{|\varphi(w)|}{\|\varphi\|'} \hat{u} = u - \frac{|\varphi(u-v)|}{\|\varphi\|'} \hat{u} = u - \frac{|\varphi(u)|}{\|\varphi\|'} \hat{u}. \quad \blacklozenge$$

Pour avoir un exemple où $\mathcal{P}_A(u) = \emptyset$ pour tout $u \in E \setminus A$, il nous suffit de considérer un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ et une forme linéaire $\varphi \in E'$ telle que φ n'atteint pas sa norme sur $S(0, 1)$. Prenez par exemple $E = c_0$ normé par $\|\cdot\|_\infty$ et φ de l'Exemple 2.7 dans le Chap. X.

On peut aussi prendre $(L^1(0, 1), \|\cdot\|_1)$ et $\varphi(f) = \int_0^1 t.f(t) dt$; on peut trouver aussi des exemples dans $(\ell^1, \|\cdot\|_1), C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$, etc. Mais on n'en trouvera pas dans ℓ^p ou L^p pour $1 < p < \infty$ (vous verrez pourquoi en Maîtrise).

Dans les exemples ci-dessus A est très simple mais il lui manque une qualité : il n'est pas borné . . . D'où l'exemple suivant :

☞ **Exercice 2.4.** On prend $E = C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$ et pour A le sous-ensemble de E suivant :

$$A = \left\{ f \in E / f \geq 0, f \text{ décroît sur } [0, 1], 1 \leq f(0) \leq 2 \text{ et } : \int_0^1 f(t) dt = f(0) - 1 \right\}.$$

Par exemple $t \mapsto -2t + 2$ est dans A .

Démontrez que A est une partie convexe, complète, bornée de E . Démontrez que $d(0, A) = 1$ et que $\mathcal{P}_A(0) = \emptyset$.

Les problèmes mis en évidence dans les § 1,2 donnent son intérêt au § suivant.

3. PROJECTION SUR UN CONVEXE COMPLET D'UN ESPACE PRÉHILBERTIEN

Théorème 3.1. (FONDAMENTAL)

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace **préhilbertien** réel, et soit $A \neq \emptyset$ une partie **convexe** et **complète** de E . Rappelons que, pour tout $u \in E$ fixé, on note :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_A(u) &:= \{a \in A / d(u, a) = d(u, A)\} \\ &= \{a \in A / \forall b \in A : d(u, a) \leq d(u, b)\} \\ &= \text{Argmin}(f_u, A), \text{ où } f_u(v) = d(u, v). \end{aligned}$$

(3.1) **Existence** : pour tout $u \in E$ on a $\mathcal{P}_A(u) \neq \emptyset$.

(3.2) **Unicité** : pour tout $u \in E$, $\mathcal{P}_A(u)$ est un singleton : $\mathcal{P}_A(u) = \{v_u\}$.

On note : $v_u = \mathcal{P}_A(u)$, et ce point est appelé la **projection de u sur A** .

(3.3) **Application projection** : ce qui précède permet de considérer l'application $P_A : E \rightarrow E$, $u \mapsto P_A(u) =$ le point unique du singleton $\mathcal{P}_A(u) = \{v_u\}$.

Cette application est appelée la **projection sur** le convexe complet A .

(3.4) **Caractérisations géométriques de la projection** : pour tout $u \in E$, on a $v = P_A(u)$ si et seulement si :

$$(3.4.1) \quad v \in A \text{ et, } \forall a \in A : (u - v | a - v) \leq 0 \text{ [« l'angle } (vu, va) \text{ est obtus »]}$$

$$(3.4.2) \quad v \in A \text{ et, } \forall a \in A : (u - a | v - a) \geq 0 \text{ [« l'angle } (au, av) \text{ est aigu »]}$$

(3.5) L'application projection $E \rightarrow E$, $u \mapsto P_A(u)$ est une **contraction** :

$$\forall u \in E, \forall u' \in E : \|P_A(u) - P_A(u')\| \leq \|u - u'\|.$$

Commentaires :

1) Les réalisations les plus fréquentes des hypothèses du Théorème 3.1 sont les suivantes :

(3.6) $(E, (\cdot|\cdot))$ est un **espace de Hilbert** réel et A est une partie (convexe et) **fermée** de E ,

(3.7) $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien réel et A est une partie (convexe et) **fermée contenue dans un sous-espace vectoriel de dimension finie** de E .

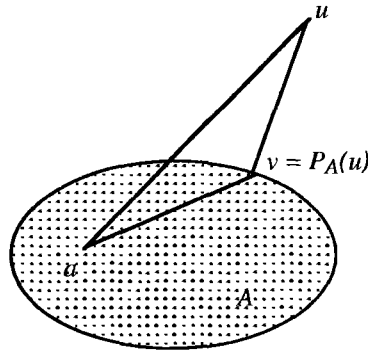
Sous ces hypothèses, en effet, A est complète.

2) Les résultats (3.1,2,3) (3.5) s'étendent tels quels aux espaces préhilbertiens complexes [voir Chap. II, § 5.2]. (3.4.1) et (3.4.2) s'étendent aussi au cas complexe, en ajoutant simplement *Ré* (partie réelle) devant les produits scalaires.

3) Les résultats (3.1,2,3) s'étendent à des espaces de Banach autres que les espaces préhilbertiens, comme ℓ^p , L^p pour $1 < p < \infty$, $p \neq 2$. Mais la démonstration relève d'autres arguments que ceux utilisés ici.

(3.4.1,2) peuvent se généraliser aussi, d'une certaine manière ... Par contre (3.5) *caractérise* les espaces préhilbertiens, résultat élémentaire démontré seulement en 1967 ... En fait, si la projection radiale sur la boule unité fermée est contractante, l'espace est préhilbertien.

4) Un bon moyen mnémotechnique pour retenir (3.4;1,2) est de faire un *dessin* montrant l'angle aigu et l'angle obtus :



Il est à noter que la caractérisation (3.4.1) est en général plus utile que (3.4.2).

5) La projection \mathcal{P}_A n'est pas en général une application linéaire ! Regardez la projection sur la boule unité $B(0, 1]$! Elle le sera lorsque A est un sous-espace vectoriel (fermé) de E , et cette propriété ne s'étend pas aux espaces de Banach non préhilbertiens.

Démonstration du théorème :

Soit $u \in E$ fixé. On pose : $d := d(u, A) = \inf_{a \in A} d(u, a)$.

Étape 1 : Par définition de la borne inférieure, pour tout n entier ≥ 1 , il existe $a_n \in A$ tel que : $d \leq \|u - a_n\| \leq d + \frac{1}{n}$. Il existe donc une suite $(a_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de A vérifiant : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u - a_n\|) = d$. Une telle suite est dite *suite minimisante* [parce qu'elle donne des solutions approchées au problème de minimisation $\inf_{a \in A} \|u - a\|$; il existe en général une infinité de telles suites]. ♦

Étape 2 : On va démontrer que toute suite minimisante est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$ donné, arbitraire. Rappelons que dans un espace préhilbertien on a l'identité de la médiane [Chap.II, formule (5.10)] :

$$\forall x, y, z \in E : 4\|z - \frac{1}{2}(x + y)\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x - z\|^2 + 2\|y - z\|^2.$$

Faisons dans cette identité : $z := u, x := a_n, y := a_m$.

On a : $4\|u - \frac{1}{2}(a_n + a_m)\|^2 + \|a_n - a_m\|^2 = 2\|a_n - u\|^2 + 2\|a_m - u\|^2$.
 $a_n \in A$ et $a_m \in A$ implique, puisque A est convexe :

$$\frac{1}{2}(a_n + a_m) = \frac{1}{2}a_n + (1 - \frac{1}{2})a_m \in A.$$

Donc : $\|u - \frac{1}{2}(a_n + a_m)\| \geq \inf_{a \in A} \|u - a\| = d$, d'où :

$$\|a_n - a_m\|^2 \leq 2\|a_n - u\|^2 + 2\|a_m - u\|^2 - 4d^2.$$

Comme la suite $(\|a_n - u\|)$ converge vers d , il existe un rang N tel que pour tous $n, m \geq N$ on a : $\|a_n - u\| \leq d + \varepsilon, \|a_m - u\| \leq d + \varepsilon$. On a par conséquent :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}^* : n \geq N \text{ et } m \geq N \implies$

$$\|a_n - a_m\|^2 \leq 2(d + \varepsilon)^2 + 2(d + \varepsilon)^2 - 4d^2 = 8d\varepsilon + 4\varepsilon^2 = 4(2d + \varepsilon)\varepsilon,$$

et la suite (a_n) est de Cauchy. ♦

Étape 3 : (a_n) est une suite de Cauchy dans A partie complète de E : (a_n) est donc convergente vers un élément $a \in A$;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - u) = a - u \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (\|a_n - u\|) = \|a - u\| ;$$

mais $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|a_n - u\|) = d$ [suite minimisante], d'où (unicité de la limite) : $\|a - u\| = d$.

Le point $a \in A$ appartient donc à $\mathcal{P}_A(u)$. (3.1) est prouvé. ♦

Étape 4 : D'après l'Exemple 2.2 et la Proposition 2.2, on a unicité de la meilleure approximation, i.e. que $\mathcal{P}_A(u)$ est un singleton.

Mais donnons une autre démonstration : supposons qu'existent $a \in A$ et $b \in A$ tels que $\|u - a\| = \|u - b\| = d$. La suite construite comme suit est (trivialement !) une suite minimisante : $a_1 = a, a_2 = b, a_3 = a, \dots, a_{2n} = b, a_{2n+1} = a, \dots$

Donc – étape 2 – cette suite est convergente, et comme les deux suites extraites $(a_{2n})_n$ et $(a_{2n+1})_n$ convergent vers b et a respectivement, on a nécessairement $a = b$. On a donc bien (3.2). ♦

Étape 5 :

Supposons que $v = P_A(u)$, i.e. que v vérifie : $v \in A$ et $\forall a \in A : \|u - v\| \leq \|u - a\|$. Soit $a \in A$ arbitraire, et soit $n \in \mathbb{N}^* : \frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})v = v + \frac{1}{n}(a - v) \in A$ car A est convexe. D'où :

$$\begin{aligned} \forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N}^* : \|u - v\|^2 &\leq \|u - (v + \frac{1}{n}(a - v))\|^2 \implies \\ \|u - v\|^2 &\leq \|u - v\|^2 - 2(u - v | \frac{1}{n}(a - v)) + \|\frac{1}{n}(a - v)\|^2 \\ &\leq \|u - v\|^2 - \frac{2}{n}(u - v | a - v) + \frac{1}{n^2}\|a - v\|^2 \end{aligned}$$

D'où : $0 \leq -2(u - v | a - v) + \frac{1}{n}\|a - v\|^2$ et $(u - v | a - v) \leq \frac{1}{2n}\|a - v\|^2$. En faisant tendre n vers ∞ , il vient : $\forall a \in A : (u - v | a - v) \leq 0$. i.e. l'inégalité dans (3.4.1). ♦

Étape 6 : Supposons que $v \in A$ et que $\forall a \in A : (u - v | a - v) \leq 0$. $\forall a \in A : (u - a + a - v | a - v) \leq 0 \implies (u - a | a - v) + \|a - v\|^2 \leq 0 \implies (u - a | a - v) \leq 0$, soit : $(u - a | v - a) \geq 0$. i.e. l'inégalité dans (3.4.2). ♦

Étape 7 : Soit $v \in A$ vérifiant $\forall a \in A : (u - a | v - a) \geq 0$. Soit $a \in A$ arbitraire, et soit $n \in \mathbb{N}^*$ arbitraire. On a : $\frac{1}{n}a + (1 - \frac{1}{n})v = v + \frac{1}{n}(a - v) \in A$ (A convexe), et donc : $(u - [v + \frac{1}{n}(a - v)] | v - [v + \frac{1}{n}(a - v)]) \geq 0$

$$\text{Soit : } (u - v - \frac{1}{n}(a - v) | (-\frac{1}{n})(a - v)) = -\frac{1}{n}(u - v - \frac{1}{n}(a - v) | a - v) \geq 0$$

C'est-à-dire : $-\frac{1}{n}(u - v | a - v) + \frac{1}{n^2}\|a - v\|^2 \geq 0$ et $\frac{1}{n}\|a - v\|^2 \geq (u - v | a - v)$.

Faisant tendre n vers ∞ , il vient : $(u - v | a - v) \leq 0$ pour tout $a \in A$, i.e. l'inégalité dans (3.4.1). On a donc prouvé que : (3.4.1) \iff (3.4.2). ♦

Étape 8 : Supposons qu'on ait (3.4.1). $v \in A$ et $\forall a \in A : (u - v | a - v) \leq 0$. Soit : $(u - v | a - u + u - v) \leq 0 \implies (u - v | a - u) + \|u - v\|^2 \leq 0$ et donc $\|u - v\|^2 \leq -(u - v | a - u) = (u - v | u - a)$.

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz [Chap.II (5.8)] :

$$\|u - v\|^2 \leq \|u - v\| \cdot \|u - a\|.$$

Si $v = u$, c'est que $u \in A$, et le problème est réglé, sinon : $\|u - v\| \leq \|u - a\|$ pour tout $a \in A$, et $v = P_A(u)$. ♦

Les étapes 5 à 8 ont prouvé que $v = P_A(u) \iff (3.4.1) \iff (3.4.2)$.

Étape 9 : P_A est contractante.

Soient u et u' dans E , et soient $P_A(u)$, $P_A(u')$ leur projection respective sur A . D'après (3.4.1), on a :

$$\forall a \in A : (u - P_A(u) | a - P_A(u)) \leq 0 \text{ et } (u' - P_A(u') | a - P_A(u')) \leq 0.$$

Faisons $a = P_A(u')$ dans la première de ces deux inégalités, et $a = P_A(u)$ dans la seconde. Il vient :

$$(u - P_A(u) | P_A(u') - P_A(u)) \leq 0 \text{ et } (u' - P_A(u') | P_A(u) - P_A(u')) \leq 0.$$

D'où : $([u - P_A(u)] - [u' - P_A(u')] | P_A(u') - P_A(u)) \leq 0$.

Soit : $(u - u' | P_A(u') - P_A(u)) + \|P_A(u') - P_A(u)\|^2 \leq 0$;

et : $\|P_A(u') - P_A(u)\|^2 \leq (u' - u | P_A(u') - P_A(u)) \leq \|u - u'\| \cdot \|P_A(u') - P_A(u)\|$ [inégalité de Cauchy-Schwarz : II (5.8)], d'où le résultat cherché. ♦

Remarque : Nous ne saurions trop recommander au lecteur de connaître la démonstration ci-dessus, au moins dans ses grandes lignes : elle est « ré-utilisable par morceaux ».

A vrai dire, on ne sait expliciter la projection \mathcal{P}_A que pour un nombre assez restreint d'ensembles A : cela limite l'utilisation pratique (en analyse numérique, notamment) de projections dans les algorithmes. Mais l'outil théorique est fondamental, voir en théorie de la mesure le théorème de Radon-Nikodym, les probabilités conditionnelles, etc.

Donnons tout de même quelques exemples de calcul explicite de projections.
 Dans ce qui suit E est un espace préhilbertien.

Exemple 3.1. $A = B(a, \rho]$. Il est facile de vérifier qu'on a $\mathcal{P}_A(u) = u$ si $u \in A$, et si $u \notin A : \mathcal{P}_A(u) = a + \rho \frac{u-a}{\|u-a\|}$.

Nota : A n'est pas nécessairement complète ...

Exemple 3.2. Soient $c \in E \setminus \{0\}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ fixés, et soit $A := \{a \in E / (c|a) = \gamma\}$ (A est un *hyperplan non nécessairement complet*).

$\mathcal{P}_A(u) = u$ si $u \in A$, et si $u \notin A : \mathcal{P}_A(u) = u - \frac{(c|u) - \gamma c}{\|c\|^2} c$.

En effet, posons : $v := u - \frac{(c|u) - \gamma c}{\|c\|^2} c$.

On a : $(c|v) = (c|u) - \frac{(c|u) - \gamma}{\|c\|^2} (c|c) = (c|u) - (c|u) + \gamma = \gamma \implies v \in A$.

Et : $\|u - v\| = \frac{|(c|u) - \gamma|}{\|c\|^2} \|c\| = \frac{|(c|u) - \gamma|}{\|c\|} = d(u, A)$, d'après la formule d'Ascoli [Chap. X, (1.15)] appliquée à la forme linéaire $\varphi(u) = (c|u)$.

φ est évidemment linéaire, et

$|\varphi(u)| = |(c|u)| \leq \|c\| \cdot \|u\| \implies \|\varphi\|' = \sup_{\|u\|=1} |\varphi(u)| \leq \|c\|$, comme on a $\|\varphi\|' \geq \varphi\left(\frac{c}{\|c\|}\right) = (c|\frac{c}{\|c\|}) = \|c\|$, il vient $\|\varphi\|' = \|c\|$.

Exemple 3.3. On prend $E = \ell^2$ et

$$A := \{a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots) \in E / \forall n \in \mathbb{N}^* : \alpha_n \geq 0\}.$$

Pour $u = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \in \ell^2$, considérons la suite dite *partie positive* de u , notée $u^+ = (\xi_1^+, \xi_2^+, \dots, \xi_n^+, \dots)$ où : $\xi_n^+ = \xi_n$ si $\xi_n \geq 0$ et $\xi_n^+ = 0$ si $\xi_n \leq 0$.

Vérifiez que pour tout $u \in E$ on a : $\mathcal{P}_A(u) = u^+$ (utilisez (3.4.1)). On a le même résultat, *mutatis mutandis*, avec $E := L^2(a, b)$ ou $E := C_2([a, b], \mathbb{R})$ (vérifiez).

Exemple 3.4. $E = \mathbb{R}^n$ euclidien. $A = \prod_{1 \leq i \leq n} [\alpha_i, \beta_i]$, où $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}, \alpha_i \leq \beta_i$ pour $i = 1, 2, \dots, n$. Pour $u = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, notons : $\mathcal{P}_A(u) = (\eta_1, \dots, \eta_n)$.

On a : $\forall i = 1, \dots, n : \eta_i = \min\{\max\{\xi_i, \alpha_i\}, \beta_i\}$. Vérifiez [dessin pour $n = 2$!].

☞ **Exercice 3.1.** (assez facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel. Soit $(A_n), n \in \mathbb{N}^*$, une suite de parties convexes fermées non vides de E . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^* : A_n \subset A_{n+1}$ (suite croissante pour \subset). On pose : $A := \text{adh}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n\right)$.

Soit $u \in E$ arbitraire ; on pose : $d_n := d(u, A_n)$ et $d := d(u, A)$. Démontrez que $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n) = d$,

puis que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{P}_{A_n}(u)) = \mathcal{P}_A(u)$.

Indication : Inspirez-vous de la démonstration du Th. 3.1. (voir dessin p. 380).

☞ **Exercice 3.2.** Même cadre que l'exercice précédent, mais on suppose cette fois que $\forall n \in \mathbb{N}^* : A_{n+1} \subset A_n$ (suite décroissante pour \subset), et on pose $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$.

Si $A \neq \emptyset$, on a les mêmes résultats de convergence que ci-dessus (mais la preuve est un peu différente).

Soit $E = C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^* :$

$$A_n := \{f \in E / f(0) = 1, \forall t \in [0, \frac{1}{n}] : 0 \leq f(t) \leq 1, \forall t \in [\frac{1}{n}, 1] : f(t) = 0\}.$$

Démontrez que A_n est convexe, fermé, borné, et que la suite (A_n) est décroissante. Démontrez que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$.

☞ **Exercice 3.3.** (assez facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel, et soit $A \neq \emptyset$ une partie convexe et fermée de E . Démontrez les inégalités suivantes (Id_E est l'application identique sur E) : $\forall u, u' \in E$:

$$(u - u' | P_A(u) - P_A(u')) \geq 0 \text{ et } (u - u' | (Id_E - P_A)(u) - (Id_E - P_A)(u')) \geq 0.$$

$$\|P_A(u) - P_A(u')\|^2 \leq \|u - u'\|^2 - \|(Id_E - P_A)(u) - (Id_E - P_A)(u')\|^2.$$

$$\forall a \in A : \|P_A(u) - u\|^2 \leq \|u - a\|^2 - \|P_A(u) - a\|^2.$$

☞ **Exercice 3.4.** (facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soient a, b deux points distincts de E . On pose : $A := [a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b / \lambda \in [0, 1]\}$.

1) Démontrez, grâce à deux arguments différents, que pour tout $u \in E$ fixé il existe un $\hat{u} \in A$ et un seul tel que $d(u, A) = \|u - \hat{u}\|$.

2) Justifiez la formule : $d^2(u, A) = \min_{0 \leq \lambda \leq 1} \|u - [\lambda a + (1 - \lambda)b]\|^2$. Déterminez $d(u, A)$ et $P_A(u)$ en discutant suivant les valeurs possibles de $(u|a - b)$.

3) Donnez une interprétation géométrique des résultats obtenus.

☞ **Exercice 3.5.** (facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel, et soient A, B deux parties convexes, fermées, non vides de E .

Soit $u \in E$. On pose : $a := P_A(u)$ et $b := P_B(u)$. Soient $v \in A$ et $w \in B$ arbitraires.

1) Démontrez qu'on a les deux inégalités : $0 \leq (a - u | v - a)$ et $0 \leq (u - b | b - w)$.

2) Déduisez de 1) les inégalités suivantes :

$$0 \leq (a - b | v - b) - \|a - b\|^2 + (u - b | b - w - v + a), \text{ et :}$$

$$\|a - b\|^2 \leq \|a - b\| \cdot \|v - b\| + \|u - b\| \cdot \|b - v\| + \|u - b\| \cdot \|a - w\|.$$

3) On suppose qu'il existe deux constantes réelles $C > 0$ et $\alpha > 0$ telles que : $\|b - v\| \leq C$, $\|a - w\| \leq C$, $\|u - b\| \leq \alpha$.

$$\text{Démontrez que : } \|a - b\| \leq \frac{C + \sqrt{C^2 + 8\alpha C}}{2}.$$

☞ **Exercice 3.6.** (facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel. Soit $A \neq \emptyset$ une partie convexe fermée de E , et soit $u \in E \setminus A$. On pose : $\hat{u} = \frac{u - P_A(u)}{\|u - P_A(u)\|}$.

Démontrez que : $\sup_{a \in A} (\hat{u} | a) \leq (\hat{u} | P_A(u)) < (\hat{u} | u)$.

Déduisez-en qu'il existe un hyperplan fermé $H_{\varphi, \alpha} = \{v \in E / \varphi(v) = \alpha\}$, où $\varphi \in E'$, $\|\varphi\|' = 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tel que A est entièrement d'un côté de l'hyperplan et u est de l'autre côté.

4. PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN SOUS-ESPACE VECTORIEL COMPLET

Compléments sur l'orthogonalité [cf. Chap. II, Déf. 5.5 et 5.6]

Proposition 4.1.

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soit $u \in E \setminus \{0\}$.

L'ensemble $H_u = \{v \in E / v \perp u\}$ est un hyperplan fermé dans E .

Démonstration : $H_u = \{v \in E / (u|v) = 0\} = \{v \in E / \varphi_u(v) = 0\} = \text{Ker}(\varphi_u)$, où φ_u est la forme linéaire continue $E \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \varphi_u(v) = (u|v)$ [voir l'Exemple 3.2]. Par conséquent, cf. Chap. X, H_u est un hyperplan fermé. ♦

Proposition 4.2.

Pour tout $A \subset E$, $A \neq \emptyset$: A^\perp est un sous-espace vectoriel fermé de E .

Démonstration : $A^\perp = \{v \in E / \forall u \in A : (v|u) = 0\} = \bigcap_{u \in A} H_u$ (H_u de la Prop. ci-dessus). D'où le résultat, puisque toute intersection de sous-espaces vectoriels [resp. de fermés] est un sous-espace vectoriel [resp. un fermé]. ♦

Proposition 4.3.

Pour tout $A \neq \emptyset$, $A \subset E$, soit $F := [A]$ (espace vectoriel engendré par A).
On a : $A^\perp = F^\perp$. On a aussi : $A^\perp = (\text{adh}(A))^\perp$.

Démonstration : $A \subset F \implies F^\perp \subset A^\perp$ (évident). Soit $u \in A^\perp$, montrons que $u \in F^\perp$. Soit $v \in F : v = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$ où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $v_i \in A$, avec I fini ; on a :
 $(u|v) = (u|\sum_{i \in I} \lambda_i v_i) = \sum_{i \in I} \lambda_i (u|v_i) = 0$ car $(u|v_i) = 0$ pour tout $i \in I$. ♦

Ensuite, $A \subset \text{adh}(A) \implies [\text{adh}(A)]^\perp \subset A^\perp$. Soit $u \in A^\perp$ et soit $v \in \text{adh}(A) : v = \lim(v_n)$, avec $v_n \in A$ pour tout n ; $(u|v) = (u|\lim(v_n)) = \lim(u|v_n)$, car $x \mapsto (u|x)$ est continue, donc $(u|v) = 0$, car $(u|v_n) = 0$ pour tout n . En conclusion, A et $\text{adh}(A)$ ont même orthogonal. ♦

Théorème 4.1. (TRÈS UTILE)

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soit F un sous-espace vectoriel complet de E . Soit $u \in E$ quelconque. $v = P_F(u)$ est caractérisé par :
 v est l'unique point de F tel que $u - v$ est orthogonal à F , soit :

$$(4.1) \quad \boxed{v \in F \text{ et } (u - v|x) = 0 \text{ pour tout } x \in F}$$

Démonstration : Soit $v = P_F(u)$.

D'après le Th. 3.1, on a : $v \in F$ et $\forall x \in F : (u - v|x - v) \leq 0$. Changant x en $v + x$, puis x en $v - x$ (on peut, car $v + x \in F$, $v - x \in F$), il vient : $\forall x \in F : (u - v|v + x - v) = (u - v|x) \leq 0$ et $(u - v|v - x - v) = -(u - v|x) \leq 0$, d'où : $\forall x : (u - v|x) = 0$.

On peut écrire (Chap. II, Déf. 5.6) : $u - v \in F^\perp$. ♦

La réciproque est immédiate d'après le Th. 3.1 (3.4.1) : soit $v \in F$ tel que $(u - v|x) = 0$ pour tout $x \in F$, en particulier $(u - v|v) = 0$; on en déduit, par addition, que $\forall x \in F : (u - v|x - v) = 0$ [$\implies (u - v|x - v) \leq 0$!]. ♦

On peut d'ailleurs aussi revenir à la définition de la projection ; $\forall x \in F :$
 $\|u - x\|^2 = \|(u - v) + (v - x)\|^2 = \|u - v\|^2 + 2(u - v|v - x) + \|v - x\|^2$
 $= \|u - v\|^2 + \|v - x\|^2$ (car $v - x \in F \implies u - v \perp v - x$).

D'où : $\|u - x\|^2 \geq \|u - v\|^2$. ♦

☛ **Exercice 4.1.** (assez facile) Avec les notations du Th. 4.1, soit $A \subset F$ une partie convexe fermée dans F . Notons $P_A^F : F \rightarrow F$ la projection sur A dans F .

Démontrez que pour tout $u \in E$ on a : $P_A(u) = (P_A^F \circ P_F)(u)$ [transitivité des projections].

Ce résultat reste-t-il vrai si F n'est pas un sous-espace vectoriel ?

Théorème 4.2. (FONDAMENTAL)

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soit $F \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel complet de E .

(4.2) L'application $P_F : E \rightarrow E$, d'image F , est linéaire et continue, de norme 1 :

$$\|P_F\|_{\mathcal{L}(E)} = 1.$$

(4.3) $\text{Ker}(P_F) = P_F^{-1}(\{0\}) = F^\perp$ et $F^{\perp\perp} = F$.

(4.4) $E = F \oplus F^\perp$ (somme directe algébrique).

Si F^\perp est complet : $E = F \oplus_{\text{top}} F^\perp$ (somme directe topologique), et pour tout $u \in E : \|u\|^2 = \|P_F(u)\|^2 + \|P_{F^\perp}(u)\|^2$.

Démonstration :

(4.2) Pour tous $u, v \in E$ et pour tous $x \in F$ on a, d'après le Th. 4.1 : $(u - P_F(u)|x) = 0$ et $(v - P_F(v)|x) = 0$. Donc, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$(\alpha u + \beta v - \alpha P_F(u) - \beta P_F(v)|x) = \alpha(u - P_F(u)|x) + \beta(v - P_F(v)|x) = 0$, et d'autre part : $\alpha P_F(u) + \beta P_F(v) \in F$, car F est un sous-espace vectoriel. Donc, d'après le Th.4.1 : $\alpha P_F(u) + \beta P_F(v) = P_F(\alpha u + \beta v)$, et P_F est linéaire ; $P_F \in L(E)$. ♦

D'après le Th. 3.1 (3.5), on a pour tout $u \in E$: $\|P_F(u) - P_F(0)\| \leq \|u - 0\|$, et $P_F(0) = 0$ car $0 \in F$. Donc : $\|P_F(u)\| \leq \|u\|$ et P_F est continue, de norme $\|P_F\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{\|u\| \leq 1} \|P_F(u)\| \leq 1$. Mais pour tout $u \in F$ tel que $\|u\| = 1$ on a $P_F(u) = u$ et $\|P_F\| \geq \|P_F(u)\| = \|u\| = 1$. D'où : $\|P_F\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$. ♦

(4.3) $u \in \text{Ker}(P_F) \iff P_F(u) = 0 \iff u - 0 = u$ orthogonal à F (Th. 4.1), soit : $u \in F^\perp$. Donc : $\text{Ker}(P_F) = F^\perp$. ♦

Soit u orthogonal à F^\perp (i.e. $u \in F^{\perp\perp}$). D'après le Th. 4.1, on a : $u - P_F(u) \in F^\perp$ (vrai pour tout $u \in E$, pas parce que $u \in F^{\perp\perp}$!), d'où : $(u - P_F(u)|P_F(u)) = 0$, car $P_F(u) \in F$ et $(u|u - P_F(u)) = 0$ (car $u \in F^{\perp\perp}$ et $u - P_F(u) \in F^\perp$). On en déduit : $(u - P_F(u)|u - P_F(u)) = 0 = \|u - P_F(u)\|^2 \implies u = P_F(u) \implies u \in F$. On a donc : $F^{\perp\perp} \subset F$, et comme on a toujours $F \subset F^{\perp\perp}$ [cf. Chap.II, Prop. 5.6] : $F = F^{\perp\perp}$. ♦

(4.4) Tout $u \in E$ peut s'écrire : $u = P_F(u) + [u - P_F(u)]$, avec $P_F(u) \in F$ et $u - P_F(u) \in F^\perp$. D'autre part, on a $F \cap F^\perp = \{0\}$, car si $u \in F \cap F^\perp$: $(u|u) = \|u\|^2 = 0 \implies u = 0$. Par conséquent : $E = F \oplus F^\perp$, somme directe algébrique. ♦

$u = P_F(u) + [u - P_F(u)]$ et $u - P_F(u) \perp P_F(u)$ impliquent [Th. de Pythagore, Chap.II (5.16)] : $\|u\|^2 = \|P_F(u)\|^2 + \|u - P_F(u)\|^2 = \|(Id_E - P_F)(u)\|^2$. ♦

Si la projection P_{F^\perp} existe (F^\perp complet n'est pas conséquence de F complet), on a : $u - P_F(u) \in F^\perp$, soit : $(u - P_F(u)|x) = 0$ pour tout $x \in F$, et donc (Th. 4.1) : $P_{F^\perp}(u) = u - P_F(u) = (Id_E - P_F)(u)$, soit : $P_{F^\perp} = Id_E - P_F$. D'où, dans ce cas : $\|u\|^2 = \|P_F(u)\|^2 + \|P_{F^\perp}(u)\|^2$. ♦

Terminologie : On dit qu'une somme directe algébrique $E = F \oplus G$ est *topologique* si l'une des applications $E \rightarrow F, u = v + w \mapsto v$, ou bien $E \rightarrow G, u = v + w \mapsto w$, est continue (l'autre l'est alors aussi !). Ici $u \mapsto P_F(u)$ et $u \mapsto (Id_E - P_F)(u)$ sont continues, et donc la somme directe algébrique $E = F \oplus F^\perp$ est topologique, ce qu'on notera $E = F \oplus_{\text{top}} F^\perp$. ♦

Corollaire 4.1.

Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace **de Hilbert** $(E, (\cdot|\cdot))$ réel, on a :
 $F^{\perp\perp} = \text{adh}(F)$.
Conséquence : pour tout sous-espace vectoriel F : $F^{\perp\perp\perp} = F^\perp$.
Autre conséquence : pour toute partie $A \neq \emptyset$ de E , on a : $A^{\perp\perp} = \text{adh}([A])$ (i.e. le plus petit sous-espace vectoriel fermé engendré par A).

On a la caractérisation suivante, très souvent utilisée :

(4.5) A est **totale** dans $E \iff [\forall u \in A : (u|v) = 0 \implies v = 0]$

Démonstration : En effet, $\text{adh}(F)$ est complet, et on peut appliquer (4.3) du Th. 4.2 : $(\text{adh}(F))^{\perp\perp} = \text{adh}(F)$. Mais : $F \subset \text{adh}(F) \implies F^{\perp\perp} \subset (\text{adh}(F))^{\perp\perp} = \text{adh}(F)$, et d'autre part, $F^{\perp\perp}$ étant fermé (Prop. 4.2), $F \subset F^{\perp\perp} \implies \text{adh}(F) \subset F^{\perp\perp}$. ♦

On en déduit que si F est un sous-espace vectoriel :

$$F^{\perp\perp\perp} = (F^{\perp\perp})^{\perp} = [\text{adh}(F)]^{\perp} = F^{\perp} \text{ (Prop. 4.3). } \blacklozenge$$

$$\text{adh}[A] = [F]^{\perp\perp} = A^{\perp\perp} \text{ (Prop. 4.3). } \blacklozenge$$

Dire qu'une partie A de E est totale dans E , c'est dire que : $\text{adh}([A]) = E$. Mais $\text{adh}([A]) = E \iff A^{\perp} = \{0\}$, d'après ce qui précède et la Prop. 4.3. $A^{\perp} = \{0\} \iff \{v \in E / (u|v) = 0\} = \{0\}$ pour tout $u \in A$, d'où (4.5). \blacklozenge

☞ **Exercice 4.2.** (très facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel, et soit F un sous-espace vectoriel fermé de E . Démontrez que pour tous $u, v \in E$ on a : $(P_F(u)|v) = (u|P_F(v))$.

On dit que P_F est *symétrique*, ou *auto-adjointe* [cf. Chap. XVIII].

☞ **Exercice 4.3.** (facile) Calculez : $\inf \left\{ \int_{-1}^1 |t^3 - \alpha t^2 - \beta t - \gamma|^2 dt / \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$.

Indication : Le résultat est $\frac{8}{175}$.

☞ **Exercice 4.4.** (facile) Soient $(E, (\cdot|\cdot)_E)$ et $(F, (\cdot|\cdot)_F)$ deux espaces de Hilbert réels. On munit $E \times F$ des opérations habituelles : pour u, u' dans E , pour v, v' dans F , et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $(u, v) + (u', v') = (u + u', v + v')$, $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$. On définit pour tous $(u, v) \in E \times F$ et $(u', v') \in E \times F$: $[(u, v)|(u', v')]_{E \times F} = (u|u')_E + (v|v')_F$.

Expliquez – en 10 lignes *maximum* – pourquoi $E \times F$ muni de $[(\cdot|\cdot)]_{E \times F}$ est un espace de Hilbert.

Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire continue. On pose :

$$G(A) = \{(u, Au) / u \in E\} \text{ [notation : } Au = A(u)\text{].}$$

Démontrez que $G(A)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $E \times F$.

Soient $u_0 \in E$ et $v_0 \in F$ fixés. On pose pour tout $u \in E$:

$$f(u) = \|u - u_0\|^2 + \|Au - v_0\|^2.$$

Démontrez qu'il existe $\hat{u} \in E$ unique tel que $f(\hat{u}) \leq f(u)$ pour tout $u \in E$.

☞ **Exercice 4.5.** (difficile) Soit E un espace de Hilbert réel, de dimension quelconque et soit $A \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant : $\text{adh}[A(B(0, 1])]$ est une partie compacte de E . Démontrez que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $B \in \mathcal{L}(E)$ telle que $\dim[B(E)] = \dim[\text{Im}(B)] < \infty$ et $\|A - B\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \varepsilon$.

☞ **Exercice 4.6.** (assez difficile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel, et soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}(E)$ l'ensemble des parties fermées, bornées, non vides, de E . On munit \mathcal{B} de la distance de Hausdorff [voir Chap. I, Exercice 3.8] :

$$h(A, B) = \sup_{u \in E} |d(u, A) - d(u, B)|.$$

On considère une application $\Phi : E \rightarrow 2^E$ (ensemble des parties de E) vérifiant : $\forall u \in E : \Phi(u)$ est une partie convexe, fermée, bornée, non vide, de E , et :

$\exists \alpha \in]0, 1[, \forall u, v \in E : h[\Phi(u), \Phi(v)] \leq \alpha \|u - v\|$. Démontrez qu'il existe $\hat{u} \in E$ tel que $\hat{u} \in \Phi(\hat{u})$.

Indication : Envisager l'algorithme : $u_0 \in E$ arbitraire, $u_{n+1} = P_{\Phi(u_n)}(u_n)$.

Fin de la partie cours du Chapitre XVII

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ Exercice 1.1

Soit $(a_n), n \in \mathbb{N}$, une suite convergente de points de $\mathcal{P}_A(u)$, de limite a . On veut démontrer que $a \in \mathcal{P}_A(u)$. Comme $a_n \in A$ pour tout n et A fermé, on a $a \in A$. Reste à prouver que $d(u, a) = d(u, A)$. Comme la fonction $v \mapsto d(u, v)$ est continue (c'est la seconde inégalité triangulaire qui permet de l'affirmer), on a : $d(u, a) = d(u, \lim(a_n)) = \lim(d(u, a_n)) = d(u, A)$, puisque $d(u, a_n) = d(u, A)$ pour tout n . On a donc : $a \in \mathcal{P}_A(u)$. \blacklozenge

Exercice 2.1

Il suffit de démontrer que $u \mapsto \|u\|^2$ est convexe, i.e. que :

$$\forall u \in E, \forall v \in E, \forall \lambda \in [0, 1] : \|\lambda u + (1 - \lambda)v\|^2 \leq \lambda \|u\|^2 + (1 - \lambda)\|v\|^2.$$

Mais $\|\lambda u + (1 - \lambda)v\| \leq \lambda \|u\| + (1 - \lambda)\|v\|$ donne :

$$\begin{aligned} \|\lambda u + (1 - \lambda)v\|^2 &\leq (\lambda \|u\| + (1 - \lambda)\|v\|)^2 \\ &\leq \lambda^2 \|u\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\|u\| \cdot \|v\| + (1 - \lambda)^2 \|v\|^2. \end{aligned}$$

L'inégalité bien connue $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, où a et b réels, permet d'écrire :

$$2\lambda(1 - \lambda)\|u\| \cdot \|v\| \leq \lambda(1 - \lambda)(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

D'où : $\|\lambda u + (1 - \lambda)v\|^2 \leq [\lambda^2 + \lambda(1 - \lambda)] \cdot \|u\|^2 + [(1 - \lambda)^2 + \lambda(1 - \lambda)] \cdot \|v\|^2$, et $\lambda^2 + \lambda(1 - \lambda) = \lambda$, $(1 - \lambda)^2 + \lambda(1 - \lambda) = (1 - \lambda)(1 - \lambda + \lambda) = 1 - \lambda$, d'où le résultat cherché. ♦

Exercice 2.2

Ce résultat, qui peut paraître trivial *a priori*, ne l'est pas tellement que cela . . .

Distinguons deux cas suivant que $0 \leq \lambda \leq 1$ (w est « entre » u et v) ou $\lambda \geq 1$ (w est « après » u). Faites un dessin !

1^{er} cas : $0 \leq \lambda \leq 1$.

$$\|w - u\| = \|\lambda u + (1 - \lambda)v - u\| = (1 - \lambda)\|u - v\|, \text{ et}$$

$$\|w - v\| = \|\lambda u + (1 - \lambda)v - v\| = \lambda\|u - v\|. \text{ D'où :}$$

$$\|w - u\| + \|w - v\| = [(1 - \lambda) + \lambda]\|u - v\| = \|u - v\|.$$

Par conséquent, pour tout $a \in A$:

$$\|w - v\| = \|u - v\| - \|w - u\| \leq \|u - a\| - \|u - w\| \leq \|(u - a) - (u - w)\| = \|w - a\|, \text{ soit : } v \in \mathcal{P}_A(w). \text{ On peut remarquer que la convexité de } A \text{ n'intervient pas dans ce cas. } \blacklozenge$$

2^e cas : $\lambda \geq 1$.

$$\forall a \in A : w = \lambda u + (1 - \lambda)v \implies \|v - w\| = \lambda\|u - v\| \leq \lambda\|u - a\| = \|\lambda u - \lambda a\| = \|\lambda u + (1 - \lambda)v - (1 - \lambda)v - \lambda a\| = \|w - [\lambda a + (1 - \lambda)v]\|.$$

Soit $b \in A$ arbitraire. Puisque A est convexe : $a' = \frac{1}{\lambda}b + (1 - \frac{1}{\lambda})v \in A$, car $0 < \frac{1}{\lambda} \leq 1$. On a donc, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \|v - w\| &\leq \|w - [\lambda(\frac{1}{\lambda}b + (1 - \frac{1}{\lambda})v) + (1 - \lambda)v]\| \\ &\leq \|w - b - (\lambda - 1)v - (1 - \lambda)v\| = \|w - b\|, \text{ et on a à nouveau } v \in \mathcal{P}_A(w). \blacklozenge \end{aligned}$$

Exercice 2.3

$\mathcal{P}_A(u)$ n'est pas en général réduit à un seul point : il suffit de considérer $E := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ et $A := B_\infty(0, 1]$; soit $u = (0, 2)$. On a : $\mathcal{P}_A(u) = \{(s, 1) / -1 \leq s \leq +1\}$ (dessin !). Montrons que la projection radiale appartient à $\mathcal{P}_A(u)$.

$$\text{Soit } u \notin A, \text{ i.e. } \|u\| > 1. \left\|u - \frac{u}{\|u\|}\right\| = \|u\| \cdot \left|1 - \frac{1}{\|u\|}\right| = \|u\| \frac{\|u\| - 1}{\|u\|} = \|u\| - 1.$$

Pour tout $a \in A$, i.e. tel que $\|a\| \leq 1$: $\|u\| - \|a\| \geq \|u\| - 1$, d'où :

$$\left\|u - \frac{u}{\|u\|}\right\| \leq \|u\| - \|a\| \leq \|u - a\|. \blacklozenge$$

Exercice 2.4

Soient $f, g \in A$, et soit $\lambda \in [0, 1]$. Il est clair que $\lambda f + (1 - \lambda)g$ est ≥ 0 , décroissante, et telle que $1 \leq \lambda f(0) + (1 - \lambda)g(0) \leq 2$. En outre :

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\lambda f(t) + (1 - \lambda)g(t)] dt &= \lambda \int_0^1 f(t) dt + (1 - \lambda) \int_0^1 g(t) dt \\ &= \lambda[f(0) - 1] + (1 - \lambda)[g(0) - 1] = [\lambda f + (1 - \lambda)g](0) - 1. \end{aligned}$$

Donc A est convexe. ♦

Comme E est un espace de Banach (l'indice ∞ désigne la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$), il nous suffit de vérifier que A est fermé dans E pour savoir que A est complet.

Soit (f_n) une suite de points de A convergente vers f (au sens de la convergence uniforme). Avec la seule convergence simple, on a $f \geq 0$, f décroissante, et $1 \leq f(0) \leq 2$ (principe de prolongement des inégalités). La convergence uniforme nous permet de permuter limite et intégration (cours de D.E.U.G.) :

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(0) - 1] = f(0) - 1.$$

Montrons que A est borné dans E . Soit $f \in A : 0 \leq f(0) \leq 2$ et f décroissante, donc $|f(t)| = f(t) \leq 2$ pour tout $t \in [0, 1]$, et donc : $\|f\|_\infty = \max_{0 \leq t \leq 1} |f(t)| \leq 2$.
 $\forall f, g \in A : \|f - g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \leq 4 \implies \text{diam}(A) \leq 4$. ♦

Démontrons que $d(0, A) = 1$.
 $d(0, A) = \inf_{f \in A} \|0 - f\|_\infty = \inf_{f \in A} \|f\|_\infty \geq \inf_{f \in A} f(0) \geq 1$ car $f(0) \geq 1$ pour tout f dans A .

Considérons ensuite les fonctions $f_n, n \geq 2$, définies par :

$$f_n(t) := -\frac{(n+1)^2}{2n}t + \frac{n+1}{n} \text{ pour } t \in [0, \frac{2}{n+1}], f_n(t) := 0 \text{ pour } t \in [\frac{2}{n+1}, 1]$$

(Dessin ! Ces fonctions ont été obtenues . . . par tâtonnement !)

$f_n \geq 0$. f_n décroît sur $[0, 1]$, $f_n(0) = 1 + \frac{1}{n} \in [1, 2]$, et enfin :

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{2} \times \frac{2}{n+1} \times \frac{n+1}{n} = \frac{1}{n} = (1 + \frac{1}{n}) - 1 = f_n(0) - 1.$$

Donc $\forall n \geq 2 : f_n \in A$.

$\|f_n\|_\infty = f_n(0) = 1 + \frac{1}{n}$, et on a donc : $\forall n \geq 2 :$

$$1 \leq d(0, A) \leq \|0 - f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n} \implies d(0, A) = 1. \spadesuit$$

Il nous reste à prouver que la situation [$f \in A$ et $d(0, A) = \|f\|_\infty = 1$] est impossible. En effet $\|f\|_\infty = 1$ et $f(0) \geq 1$ impliquent que $f(0) = 1$.

Mais alors : $\int_0^1 f(t) dt = f(0) - 1 = 1 - 1 = 0$, et comme f est ≥ 0 continue, f est nécessairement nulle sur $[0, 1]$ [cf. Exercice 3.1 du Chap. II], en contradiction avec $\|f\|_\infty = 1$. Terminé. ♦

📖 **Exercice 3.1**

Faites un dessin, c'est le moment ou jamais ! Puisque pour tout $n \geq 1 : A_n \subset A_{n+1}$ on a - c'est évident - pour tout $n \geq 1 : d_n \geq d_{n+1}$, et puisque $A_n \subset A$, on a aussi : $d_n \geq d$.

En résumé : $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq d_{n+1} \geq \dots \geq d$.

Donc la suite (d_n) est décroissante et minorée (par $d \geq 0$) : par conséquent elle est convergente vers une limite $\delta = \inf\{d_n / n \geq 1\}$ vérifiant $\delta \geq d$.

Démontrons que $\delta \leq d$: soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. $P_A(u) \in A = \text{adh}(\bigcup_{n \geq 1} A_n)$ implique qu'il existe $w \in \bigcup_{n \geq 1} A_n$ tel que $\|P_A(u) - w\| \leq \varepsilon$ (par définition de l'adhérence), et il existe un entier N tel que $w \in A_N$ (définition de \cup) ; pour tout $n \geq N$ on a (la suite d'ensembles est croissante) : $w \in A_n$. Donc, pour tout $n \geq N :$

$$d_n = d(u, A_n) \leq \|u - w\| \leq \|u - P_A(u)\| + \|P_A(u) - w\| = d + \|P_A(u) - w\| \leq d + \varepsilon.$$

Donc, en faisant $n \rightarrow \infty : \delta \leq d + \varepsilon$. Cela étant vrai pour tout $\varepsilon > 0 : \delta \leq d$.

On a bien : $\lim_{n \rightarrow \infty} (d_n) = d$. ♦

Ensuite, comme dans la démonstration du Th. 3.1 (d'où l'indication donnée, et l'évidence procurée par un (bon) dessin : voir p. 380) on utilise l'identité de la médiane [Chap. II (5.10)]. Posons $b_n := P_{A_n}(u)$.

$$\forall n \geq 1, \forall p \geq 0 : \|b_{n+p} - b_n\|^2 = 2\|b_{n+p} - u\|^2 + 2\|b_n - u\|^2 - 4\|\frac{1}{2}(b_{n+p} + b_n) - u\|^2.$$

On a $b_n \in A_n$, d'où $b_n \in A_{n+p}$ pour tout p car la suite (A_n) est croissante ; $b_{n+p} \in A_{n+p}$ et comme A_{n+p} est convexe : $\frac{1}{2}(b_{n+p} + b_n) \in A_{n+p}$; on en déduit que :

$$\|\frac{1}{2}(b_{n+p} + b_n) - u\| \geq d(u, A_{n+p}) = d_{n+p}. \text{ On obtient :}$$

$$\|b_{n+p} - b_n\|^2 \leq 2(d_{n+p})^2 + 2(d_n)^2 - 4(d_{n+p})^2 = 2(d_n^2 - d_{n+p}^2) \leq 2(d_n + d_{n+p}) \cdot (d_n - d_{n+p}) \leq 2(d_1 + d_1) \cdot (d_n - d_{n+p}).$$

Par conséquent, la suite (b_n) est une suite de Cauchy dans E complet : il existe $b \in E$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = b$. Comme $b_n \in A_n \subset A$ pour tout $n : b \in \text{adh}(A) = A$.

A présent : $\lim(\|u - b_n\|) = \lim(d_n) = d$ d'une part, et $\lim(\|u - b_n\|) = \|u - b\|$ d'autre part, et on a donc : $\|u - b\| = d = d(u, A)$.

$b \in A$ et $\|u - b\| = d(u, A) \implies b = P_A(u)$. ♦

Application : Soit E un espace de Hilbert séparable et soit (e_1, \dots, e_n, \dots) une famille totale dans E [cf. Chap. IV]. Posons : $E_n := [e_1, \dots, e_n]$. On a : $E = \text{adh}(\bigcup_{n \geq 1} E_n)$, et donc, d'après ce qui précède : $\forall u \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} (P_{E_n}(u)) = P_E(u) = u$.

L'utilisation de ce résultat est fréquente en analyse numérique et appartient aux méthodes d'approximation « de type Galerkin ».

Exercice 3.2

Cette fois-ci la suite (d_n) est croissante et majorée par d :

$$d_1 \leq \dots \leq d_n \leq d_{n+1} \leq \dots \leq d.$$

Soit $\delta = \lim(d_n) \leq d$. On a : $\lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} (d_m - d_n) = 0$. On applique l'inégalité de la médiane comme dans l'Ex. ci-dessus (le raisonnement est à adapter un peu) et on obtient $\lim(b_n) = b$. Comme les A_n sont fermés, $b \in A_n$ pour tout n , et donc $b \in A$.

$\|u - b\| = \lim(\|u - b_n\|) = \delta$, et $b \in A \implies \|u - b\| \geq d \geq \delta \implies d = \delta$.

On en déduit immédiatement que $b = P_A(u)$. ♦

Remarque : Si l'on n'impose pas la condition « C_n borné », il est facile de trouver un exemple de suite décroissante de convexes fermés telle que $\bigcap_{n \geq 1} C_n = \emptyset$; il suffit de prendre $E := \mathbb{R}$ et $C_n := [n, +\infty[$.

Il est facile de voir que les A_n sont convexes, fermés et bornés : procédez comme dans l'Exercice 2.4.

Soit $f \in \bigcap_{n \geq 1} A_n : \forall n \geq 1 : f \in A_n \implies \forall n \geq 1 : f(\frac{1}{n}) = 0$, d'où, puisque f est continue : $f(0) = 0$, en contradiction avec $f(0) = 1$. ♦

Exercice 3.3

Juste avant la fin de la démonstration du Théorème 3.1 (Etape 9), on a obtenu :

$$\forall u, u' \in E : \|P_A(u) - P_A(u')\|^2 \leq (u - u' | P_A(u) - P_A(u')),$$

ce qui prouve que : $\forall u, u' \in E : (u - u' | P_A(u) - P_A(u')) \geq 0$. ♦

$\forall u, u' \in E :$

$$\begin{aligned} (u - u' | (Id_E - P_A)(u) - (Id_E - P_A)(u')) &= (u - u' | u - P_A(u) - u' + P_A(u')) \\ &= \|u - u'\|^2 - (u - u' | P_A(u) - P_A(u')). \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$(u - u' | P_A(u) - P_A(u')) \leq \|u - u'\| \cdot \|P_A(u) - P_A(u')\| \leq \|u - u'\|^2$, car P_A est contractante [Th. 3.1 (3.5)], d'où le résultat.

Les applications $B : E \rightarrow E$ (linéaires ou non) qui vérifient :

$$\forall u, u' \in E : (u - u' | B(u) - B(u')) \geq 0$$

sont dites *monotones*. ♦

Partons de la première inégalité que nous écrivons :

$$2\|P_A(u) - P_A(u')\|^2 \leq 2(u - u' | P_A(u) - P_A(u')) + \|u - u'\|^2 - \|u - u'\|^2.$$

D'où :

$$\|P_A(u) - P_A(u')\|^2 \leq \|u - u'\|^2 - [\|u - u'\|^2 - 2(u - u' | P_A(u) - P_A(u')) + \|P_A(u) - P_A(u')\|^2]$$

$$\|P_A(u) - P_A(u')\|^2 \leq \|u - u'\|^2 - \|(u - P_A(u)) - (u' - P_A(u'))\|^2. \quad \blacklozenge$$

Partons de la seconde caractérisation de la projection sur un convexe fermé [Th.3.1 (3.4.2)] :

$\forall u \in E, \forall a \in A :$

$$\begin{aligned} 0 \leq (P_A(u) - a | u - a) &= (P_A(u) - a | u - P_A(u)) + (P_A(u) - a | P_A(u) - a) \\ &= -(a - P_A(u) | u - P_A(u)) + \|P_A(u) - a\|^2, \end{aligned}$$

mais $(a - P_A(u) | u - P_A(u)) \leq 0$ [Th.3.1 (3.4.1)], d'où :

$$(*) \quad \forall u \in E, \forall a \in A : \|P_A(u) - a\|^2 \leq (P_A(u) - a | u - a).$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \|P_A(u) - u\|^2 &= \|P_A(u) - a + a - u\|^2 = \|P_A(u) - a\|^2 - 2(P_A(u) - a | u - a) + \|a - u\|^2 \\ &\leq \|P_A(u) - a\|^2 - 2\|P_A(u) - a\|^2 + \|a - u\|^2, \text{ [par (*)]} \end{aligned}$$

d'où enfin : $\|P_A(u) - u\|^2 \leq \|u - a\|^2 - \|P_A(u) - a\|^2$. ♦

Exercice 3.4

1) Il existe $\hat{u} \in A$ unique tel que $d(u, A) = \|u - \hat{u}\|$; c'est $\hat{u} = P_A(u)$ en appliquant le Th.3.1. A est convexe, et complet car compact ; en effet A est homéomorphe à $[0, 1]$ par l'homéomorphisme affine $f : \mathbb{R} \rightarrow E, \lambda \mapsto f(\lambda) = \lambda a + (1 - \lambda)b = \lambda(a - b) + b$.

On peut donc aussi raisonner en termes de compacité (Chap. XIV), l'unicité provenant alors du fait que E est strictement convexe. ♦

2) $d(u, A) = \inf_{x \in A} \|u - x\|$, d'où :
 $[d(u, A)]^2 = (\inf_{x \in A} \|u - x\|)^2 = \inf_{x \in A} \|u - x\|^2 = \inf_{\lambda \in [0,1]} \|u - [\lambda a + (1 - \lambda)b]\|^2$, à condition de justifier la permutation de $\inf_{x \in A}$ et du passage au carré.

Lemme : Soit $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive, où Y est un ensemble quelconque ; on a :
 $(\inf_{y \in Y} g(y))^2 = \inf_{y \in Y} (g(y))^2$.

En effet, notant $\mu = \inf_{y \in Y} g(y)$:

$$\forall y \in Y : 0 \leq \mu \leq g(y) \implies 0 \leq \mu^2 \leq (g(y))^2 \implies \mu^2 \leq \inf_{y \in Y} (g(y))^2.$$

D'autre part, pour tout entier $n \geq 1 : \exists y_n \in Y : 0 \leq \mu \leq g(y_n) \leq \mu + \frac{1}{n}$, d'où :

$$0 \leq \inf_{y \in Y} (g(y))^2 \leq (g(y_n))^2 \leq \mu^2 + \frac{2\mu}{n} + \frac{1}{n^2} \implies \inf_{y \in Y} (g(y))^2 \leq \mu^2, \text{ et le résultat (évidemment faux si } g \text{ n'est pas positive !). } \blacklozenge$$

A présent on peut écrire :

$$\begin{aligned} d^2(u, A) &= \min_{0 \leq \lambda \leq 1} \|u - [\lambda a + (1 - \lambda)b]\|^2 \\ &= \|u - b\|^2 + \min_{0 \leq \lambda \leq 1} \{\lambda^2 \|a - b\|^2 - 2\lambda[(u|a - b) - (a|b) + \|b\|^2]\} \end{aligned}$$

(détaillez ce calcul sans subtilité).

Posons $\alpha := \alpha(u) = \|b\|^2 - (a|b) + (u|a - b)$.

$$d^2(u, A) = \|u - b\|^2 + \min_{0 \leq \lambda \leq 1} \{\lambda^2 \|a - b\|^2 - 2\lambda\alpha\}.$$

Posons : $g(\lambda) := \lambda^2 \|a - b\|^2 - 2\lambda\alpha$; $g'(\lambda) = 2\lambda \|a - b\|^2 - 2\alpha$ s'annule en une seule valeur : $\lambda_0 = \lambda_0(u) = \frac{\alpha}{\|a - b\|^2}$, et on a : $g(\lambda_0) = -\frac{\alpha^2}{\|a - b\|^2} \leq 0$. Observons aussi que $g(\lambda) = 0 \iff \lambda = 0$ ou $\lambda = \frac{2\alpha}{\|a - b\|^2} = 2\lambda_0$.

Il y a trois cas à considérer suivant la position de λ_0 par rapport à $[0, 1]$: faites les trois figures représentant $g(\lambda)$!

1^{er} cas : $\lambda_0 \leq 0 \iff \alpha \leq 0 \iff (u|a - b) \leq -\|b\|^2 + (a|b)$.
 $d^2(u, A) = \|u - b\|^2$ et donc : $P_A(u) = b$. ♦

2^{ème} cas : $\lambda_0 \geq 1 \iff \frac{\alpha}{\|a - b\|^2} \geq 1 \iff (u|a - b) \geq \|a\|^2 - (a|b)$.
 $d^2(u, A) = \|u - a\|^2$ (détaillez ce calcul) et donc $P_A(u) = a$. ♦

3^{ème} cas : $0 \leq \lambda_0 \leq 1 \iff 0 \leq \frac{\alpha}{\|a - b\|^2} \leq 1 \iff -\|b\|^2 + (a|b) \leq (u|a - b) \leq \|a\|^2 - (a|b)$.

$$d^2(u, A) = \|u - b\|^2 - \frac{[\|b\|^2 - (a|b) + (u|a - b)]^2}{\|a - b\|^2}.$$

$$P_A(u) = \lambda_0 a + (1 - \lambda_0)b = \frac{[\|b\|^2 - (a|b) + (u|a - b)]}{\|a - b\|^2} a + \frac{[\|a\|^2 - (a|b) - (u|a - b)]}{\|a - b\|^2} b.$$

3) Appelons H l'hyperplan fermé $H = \{v \in E / (v|a - b) = 0\}$: il passe par 0 et est orthogonal à $a - b$.

Soient $H_a := \{v \in E / (v|a - b) = \|a\|^2 - (a|b)\} = a + H$, et

$H_b := \{v \in E / (v|a - b) = -\|b\|^2 + (a|b)\} = b + H$ [dessinez ces hyperplans parallèles !].

Chaque hyperplan définit deux demi-espaces :

$H_a^- = \{v \in E / (v|a - b) \leq \|a\|^2 - (a|b)\}$, H_a^+ avec \geq au lieu de \leq , de même pour H_b^-, H_b^+ .

Les résultats du 2) s'interprètent ainsi :

1^{er} cas : Si $u \in H_b^-$: $d(u, A) = \|u - b\|$ et $P_A(u) = b$.

2^{ème} cas : Si $u \in H_a^+$: $d(u, A) = \|u - a\|$ et $P_A(u) = a$.

3^{ème} cas : Si $u \in H_a^- \cap H_b^+$:

$d(u, A)$ est la distance de u à la droite $D_{a,b} = \{\lambda a + (1 - \lambda)b / \lambda \in \mathbb{R}\}$ passant par a et b , et $P_A(u)$ est la projection de u sur $D_{a,b}$. [tout cela est parfaitement clair sur une figure !]. ♦

🔗 **Exercice 3.5**

Faites un dessin !

1) On écrit simplement la caractérisation (3.4.1) du Th. 3.1 :

$$\forall v \in A : (u - P_A(u)|v - P_A(u)) \leq 0, \forall w \in B : (u - P_B(u)|w - P_B(u)) \leq 0,$$

d'où les inégalités cherchées : $(a - u|v - a) \geq 0$ et $(u - b|b - w) \geq 0$. ♦

2) On ajoute les deux inégalités du 1) : $0 \leq (a - u|v - a) + (u - b|b - w)$

Soit :

$$0 \leq (a - u|v - a) + (u - b|v - a) - (u - b|v - a) + (u - b|b - w);$$

$$0 \leq (a - u + u - b|v - a) - (u - b|v - a) + (u - b|b - w);$$

$$0 \leq (a - b|v - b + b - a) + (u - b|b - w - v + a);$$

$$0 \leq (a - b|v - b) - \|a - b\|^2 + (u - b|b - v) + (u - b|a - w). \quad \blacklozenge$$

D'où : $\|a - b\|^2 \leq (a - b|v - b) + (u - b|b - v) + (u - b|a - w)$;

$$\text{et donc : } \|a - b\|^2 \leq |(a - b|v - b)| + |(u - b|b - v)| + |(u - b|a - w)|,$$

et en appliquant trois fois l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|a - b\|^2 \leq \|a - b\| \cdot \|v - b\| + \|u - b\| \cdot \|b - v\| + \|u - b\| \cdot \|a - w\|. \quad \blacklozenge$$

3) On a : $\|a - b\|^2 \leq C\|a - b\| + \alpha C + \alpha C$, soit : $\|a - b\|^2 - C\|a - b\| - 2\alpha C \leq 0$.

Posant $x := \|a - b\| \geq 0$, on a : $x^2 - Cx - 2\alpha C \leq 0$; pour que cette inégalité ait lieu, il faut et il suffit que x soit compris entre les deux racines du trinôme du second degré :

$$x' = \frac{C - \sqrt{C^2 + 8\alpha C}}{2} < 0, \quad x'' = \frac{C + \sqrt{C^2 + 8\alpha C}}{2} > 0. \quad \text{D'où :}$$

$$0 \leq \|a - b\| \leq \frac{C + \sqrt{C^2 + 8\alpha C}}{2}. \quad \blacklozenge$$

Exercice 3.6

(Th. de séparation de Hahn-Banach pour les espace de Hilbert)

D'après la caractérisation (3.4.1) (Th. 3.1), on a : $\forall a \in A : (u - P_A(u)|a - P_A(u)) \leq 0$.

D'où, $\forall a \in A : \left(\frac{u - P_A(u)}{\|u - P_A(u)\|} | a \right) \leq \left(\frac{u - P_A(u)}{\|u - P_A(u)\|} | P_A(u) \right)$

Donc : $\forall a \in A : (\hat{u}|a) \leq (\hat{u}|P_A(u)) \implies \sup_{a \in A} (\hat{u}|a) \leq (\hat{u}|P_A(u))$.

D'autre part :

$$(\hat{u}|u - P_A(u)) = \left(\frac{u - P_A(u)}{\|u - P_A(u)\|} | u - P_A(u) \right) = \frac{\|u - P_A(u)\|^2}{\|u - P_A(u)\|} = \|u - P_A(u)\| > 0 \text{ car}$$

$u \notin A \iff u \neq P_A(u)$; d'où : $(\hat{u}|u) > (\hat{u}|P_A(u))$, et on a la double inégalité cherchée. ♦

Posons $\alpha := (\hat{u}|P_A(u))$, et considérons la forme linéaire φ définie par $\varphi(v) := (\hat{u}|v)$. On sait (pour l'avoir vu plusieurs fois) que $\varphi \in E'$ et que $\|\varphi\|' = \|\hat{u}\|$ d'où : $\|\varphi\|' = 1$.

Considérons l'hyperplan $H_{\varphi, \alpha} = \{v \in E / \varphi(v) = \alpha\}$; $H_{\varphi, \alpha}$ est fermé [Chap. X] et détermine les demi-espaces $H_{\varphi, \alpha}^+ = \{v \in E / \varphi(v) \leq \alpha\}$ (fermé) et $H_{\varphi, \alpha}^- = \{v \in E / \varphi(v) > \alpha\}$ (ouvert) d'intersection vide.

L'inégalité démontrée ci-dessus nous dit que : $u \in H_{\varphi, \alpha}^-$ et $A \subset H_{\varphi, \alpha}^+$; on dit que $H_{\varphi, \alpha}$ sépare u de A . ♦

Exercice 4.1

[Faites un dessin !] Notons $v := P_F(u)$, $w := P_A(u)$, et $z := P_A^F(v)$. On veut démontrer que $z = w$.

$\forall a \in A : \|u - a\|^2 = \|(u - v) + (v - a)\|^2 = \|u - v\|^2 + \|v - a\|^2$, car d'après le Th. 4.1 on a $u - v \in F^\perp$, et $v - a \in F$, on applique le Th. de Pythagore.

Comme $z = P_A^F(v)$, $\forall a \in A : \|v - z\| \leq \|v - a\|$; d'où :

$$\forall a \in A : \|u - z\|^2 \geq \|u - v\|^2 + \|v - z\|^2 = \|u - z\|^2,$$

cette dernière égalité résultant du Th. de Pythagore ($u - v \in F^\perp$ et $v - z \in F$).

Donc, $z \in A$ et $\forall a \in A : \|u - z\| \leq \|u - a\| \implies z = P_A(u)$. ♦

Ce résultat ne se généralise pas si F est simplement un convexe : prenez pour F une boule du plan et pour A une boule dans F non concentrique à F [dessin !]. ♦

Exercice 4.2

D'après le Th. 4.1, pour tout $x \in F$:

$$(1) \quad (u - P_F(u)|x) = 0 \quad \text{et} \quad (2) \quad (v - P_F(v)|x) = 0.$$

Faisons $x = P_F(v)$ dans (1) et $x = P_F(u)$ dans (2) : $(u|P_F(v)) = (P_F(u)|P_F(v))$ et

$$(v|P_F(u)) = (P_F(v)|P_F(u)) = (P_F(u)|P_F(v)) = (u|P_F(v)). \quad \blacklozenge$$

☞ **Exercice 4.3**

On considère l'espace $E = C_2([-1, +1], \mathbb{R})$ qui est préhilbertien, non complet, pour le produit scalaire $(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$.

On note h la fonction $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t^3$.

Soit F le sous-espace vectoriel de E constitué par les fonctions polynômes de degré ≤ 2 . Ce qu'on a à calculer, c'est $[d(h, F)]^2 = \inf(\|h - q\|_2)^2$. l'inf étant pris sur tous les polynômes $q(t) = at^2 + bt + c$.

Comme F est complet, il existe $p \in F$ unique tel que $p = P_F(h)$ [Th. 3.1, ou argument de compacité [Chap. XIV, Exercice 2.10]. On notera : $p(t) := \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

D'après le Th. 4.1 on doit avoir : $h - p \perp F$, i.e. $(h - p|q) = 0$ pour tout $q \in F$. On va déterminer p en écrivant cette orthogonalité :

$$\int_{-1}^1 (t^3 - \alpha t^2 - \beta t - \gamma)(at^2 + bt + c) dt = 0 \text{ pour tout } q \in F [q(t) = at^2 + bt + c].$$

$$\iff \forall a, b, c \in \mathbb{R} : (\frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{3}\gamma)a + (\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\beta)b - (\frac{1}{3}\alpha + \gamma)c = 0$$

$$\iff \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{3}\gamma = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}\beta = \frac{1}{3}\alpha + \gamma = 0 \iff \alpha = \gamma = 0, \beta = \frac{3}{5}.$$

Donc : $p(t) = [P_F(h)](t) = \frac{3}{5}t$. Le *minimum* cherché (c'est bien un *minimum*) est par conséquent :

$$[d(h, F)]^2 = (\|h - p\|_2)^2 = \int_{-1}^1 |t^3 - \frac{3}{5}t|^2 dt = \frac{1}{7} - \frac{6}{25} + \frac{3}{25} = \frac{8}{175} \cdot \blacklozenge$$

☞ **Exercice 4.4**

$E \times F$ muni des opérations usuelles rappelées est un espace vectoriel (cours D.E.U.G.).

$((u, v), (u', v')) \mapsto [(u, v)|(u', v')]_{E \times F} = (u|u')_E + (v|v')_F$ est clairement bilinéaire et symétrique. $(\|(u, v)\|_{E \times F})^2 = \|u\|_E^2 + \|v\|_F^2$ est l'une des normes usuelles sur un produit (Chap. II), donc l'application ci-dessus est définie positive : c'est un produit scalaire. Donc $(E \times F, [(\cdot, \cdot)]_{E \times F})$ est un espace préhilbertien.

Le produit de deux e.v.n. complets est complet et donc $(E \times F, [(\cdot, \cdot)]_{E \times F})$ est un *espace de Hilbert* réel. \blacklozenge

Soient $(u, Au) \in G(A), (u', Au') \in G(A), \lambda \in \mathbb{R}$.

$$(u, Au) + (u', Au') = (u + u', Au + Au') = (u + u', A(u + u')) \in G(A),$$

$\lambda(u, Au) = (\lambda u, \lambda Au) = (\lambda u, A(\lambda u)) \in G(A)$: donc $G(A)$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.

Soit (u_n, Au_n) une suite de points de $G(A)$ convergente vers (u, v) dans $E \times F$. On a donc (Chap. IX) :

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$ et (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (Au_n) = v$;

mais A continu, d'où : (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (Au_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)) = Au$;

(ii) et (iii) $\implies v = Au$ (unicité de la limite). Donc $(u, v) = (u, Au) \in G(A)$, qui est fermé. \blacklozenge

$$f(u) = \|u - u_0\|^2 + \|Au - v_0\|^2 = \|(u, Au) - (u_0, v_0)\|_{E \times F}^2 = d_{E \times F}^2((u_0, v_0), (u, Au)) ;$$

et donc écrire que $\hat{u} \in E$ vérifie : $\forall u \in E : f(\hat{u}) \leq f(u)$ équivaut à :

$$d_{E \times F}^2((u_0, v_0), (\hat{u}, A\hat{u})) \leq d_{E \times F}^2((u_0, v_0), (u, Au)) \text{ pour tout } u \in E, \text{ ce qui équivaut à :}$$

$$\forall (u, Au) \in G(A) : d_{E \times F}((u_0, v_0), (\hat{u}, A\hat{u})) \leq d_{E \times F}((u_0, v_0), (u, Au)).$$

Mais cela signifie que $(\hat{u}, A\hat{u}) \in G(A)$ est tel que la distance dans $E \times F$ de (u_0, v_0) à $(\hat{u}, A\hat{u})$ réalise le *minimum* de la distance de (u_0, v_0) à $(u, Au) \in G(A)$.

$$\text{Soit : } d_{E \times F}((u_0, v_0), (\hat{u}, A\hat{u})) = d_{E \times F}((u_0, v_0), G(A)).$$

Comme $G(A)$ est un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert, d'après le Th. 4.1 $(\hat{u}, A\hat{u})$ existe et est donné par la projection, au sens de $[(\cdot, \cdot)]_{E \times F}$ de (u_0, v_0) sur $G(A)$: $(\hat{u}, A\hat{u}) = P_{G(A)}(u_0, v_0)$.

D'après ce même théorème, $(\hat{u}, A\hat{u})$ est aussi caractérisé par : $\forall (u, Au) \in G(A) : [(u_0, v_0) - (\hat{u}, A\hat{u})|(u, Au) - (\hat{u}, A\hat{u})] = 0$ ce qui équivaut à :

$$\forall u \in E : (u_0 - \widehat{u} | \widehat{u} - u)_E + (v_0 - A\widehat{u} | A(u - \widehat{u}))_F = 0.$$

D'où l'existence de $\widehat{u} \in E$ minimisant f sur E . ♦

Remarque :

On peut aller plus loin en cherchant à expliciter \widehat{u} ; pour cela on a besoin de calcul différentiel : on résout $Df(u) = 0$, ce qui donne \widehat{u} par $B\widehat{u} = w$, où $B \in \mathcal{L}(E)$, et on démontre que B est inversible grâce au Th. de Lax-Milgram (Voir Problème II, Chap. XVIII).

Exercice 4.5

Ecrivons que $\text{adh}[A(B(0, 1])]$ est précompact : pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, il existe a_1, a_2, \dots, a_n dans E tels que $\text{adh}[B(0, 1)] \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(a_i, \varepsilon)$ [cf. Chap. XIII].

Considérons le sous-espace de dimension finie $F = \{a_1, \dots, a_n\}$, ainsi que l'orthogonal $G = F^\perp : E = F \oplus G ; \forall u \in E : u = P_F(u) + P_G(u)$ [Th. 4.2].

Donc, $\forall u \in E : A(u) = P_F(A(u)) + P_G(A(u)) = (P_F \circ A)(u) + (P_G \circ A)(u)$.
 $P_F \circ A \in \mathcal{L}(E)$ et $\dim(P_F \circ A)(E) \leq n$. On prendra $B := P_F \circ A$.

$$A(u) = B(u) + (P_G \circ A)(u), \text{ entraîne :} \\ \|A(u) - B(u)\| = \|P_G(A(u))\| = \|A(u) - P_F(A(u))\| = d(A(u), F).$$

A présent, $\forall u \in B(0, 1] : A(u) \in A(B(0, 1]) \subset \bigcup_{1 \leq i \leq n} B(a_i, \varepsilon)$, donne :

$$\exists j, 1 \leq j \leq n : A(u) \in B(a_j, \varepsilon) \implies \|A(u) - a_j\| \leq \varepsilon. \\ d(A(u), F) = \inf_{v \in F} \|A(u) - v\| \leq \inf_{v \in F} (\|A(u) - a_j\| + \|a_j - v\|) \leq \varepsilon + d(a_j, F) = \varepsilon, \text{ car } a_j \in F.$$

En définitive, pour tout $u \in B(0, 1]$:

$$\|A(u) - B(u)\| \leq \varepsilon \text{ et, donc } \|A - B\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{u \in B(0, 1]} \|A(u) - B(u)\| \leq \varepsilon. \spadesuit$$

Un opérateur (linéaire ou pas) qui transforme la boule unité en un ensemble d'adhérence compacte est dit *compact*. Le résultat ci-dessus exprime que pour E espace de Hilbert, pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$ compact, il existe une suite (A_n) , $A_n \in \mathcal{L}(E)$, d'opérateurs de rang fini ($\dim(\text{Im}(A_n)) < \infty$) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A - A_n\|_{\mathcal{L}(E)} = 0$.

Pendant presque cinquante ans, on n'a pas su (*conjecture de Banach*, ou *conjecture d'approximation*) si le résultat subsistait pour E espace de Banach (ce résultat était d'autant plus intéressant qu'il était lié au problème de l'existence d'une base de Schauder pour tout Banach séparable).

Vers 1972 on a prouvé que la conjecture était fautive, d'abord avec des e.v.n. compliqués *ad hoc*, et finalement avec $E = \mathcal{L}(\ell^2)$.

Exercice 4.6

On considère, comme indiqué, l'algorithme : $u_0 \in E$ choisi arbitrairement, et pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = P_{\Phi(u_n)}(u_n);$$

u_{n+1} est bien défini car E est de Hilbert et $\Phi(u_n)$ est un *convexe fermé non vide* : on peut donc envisager la *projection* sur cet ensemble.

Remarque : si $\Phi(u)$ est réduit à un seul point pour tout $u \in E$, cet algorithme n'est autre que celui des itérés successifs de Φ du Chap. XVI ; on va d'ailleurs s'inspirer de ce qui a été fait dans le Chap. XVI.

$$\text{Notons d'abord que } \|u_1 - u_0\| = \|P_{\Phi(u_0)}(u_0) - u_0\| = d(u_0, \Phi(u_0)).$$

$$\text{Ensuite pour tout } n \geq 0 : \|u_{n+1} - u_n\| = \|P_{\Phi(u_n)}(u_n) - u_n\| = d(u_n, \Phi(u_n)).$$

D'où : $\|u_{n+1} - u_n\| = d(u_n, \Phi(u_n)) = d(u_n, \Phi(u_n)) - d(u_n, \Phi(u_{n-1}))$, ce dernier terme étant nul, puisque $u_n = P_{\Phi(u_{n-1})}(u_{n-1}) \in \Phi(u_{n-1})$

Donc :

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \sup_{u \in E} |d(u, \Phi(u_n)) - d(u, \Phi(u_{n-1}))| = h[\Phi(u_n), \Phi(u_{n-1})] \\ \leq \alpha \cdot \|u_n - u_{n-1}\|.$$

Grâce à cette inégalité, on peut écrire :

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq \alpha \cdot \|u_n - u_{n-1}\| \leq \alpha^2 \cdot \|u_{n-1} - u_{n-2}\| \leq \dots \leq \alpha^n \cdot \|u_1 - u_0\|, \text{ d'où :}$$

$\forall p, q \in \mathbb{N}^*, p > q :$

$$\begin{aligned} \|u_p - u_q\| &\leq \|u_p - u_{p-1}\| + \|u_{p-1} - u_{p-2}\| + \dots + \|u_{q+2} - u_{q+1}\| + \|u_{q+1} - u_q\| \\ &\leq \alpha^{p-1} \|u_1 - u_0\| + \alpha^{p-2} \|u_1 - u_0\| + \dots + \alpha^q \|u_1 - u_0\| \\ &\leq \alpha^q (1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{p-1-q}) d(u_0, \Phi(u_0)) \\ &< \frac{\alpha^q}{1 - \alpha} d(u_0, \Phi(u_0)) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Donc, la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy dans E complet : elle converge vers un point \hat{u} dont nous allons vérifier qu'il répond à la question posée.

$$\begin{aligned} d(u_n, \Phi(\hat{u})) - d(u_n, \Phi(u_n)) &\leq h[\Phi(\hat{u}), \Phi(u_n)] \leq \alpha \|\hat{u} - u_n\| \\ \implies d(u_n, \Phi(\hat{u})) &\leq \|u_n - u_{n+1}\| + \alpha \|\hat{u} - u_n\|, \end{aligned}$$

et on fait tendre n vers l'infini en utilisant la continuité de $v \mapsto d(v, \Phi(\hat{u}))$; il vient : $d(\hat{u}, \Phi(\hat{u})) = 0$, soit : $\hat{u} \in \text{adh}[\Phi(\hat{u})] = \Phi(\hat{u})$, i.e. le résultat cherché. \blacklozenge

Ce résultat est un *Théorème de point fixe* pour une *multi-application* (application à valeurs ensembliste). On trouve des applications de ce type de résultat en économie mathématique, par exemple.

PROBLÈME

Algorithme pour trouver un point dans une intersection

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace euclidien (espace de Hilbert de dimension finie réel). Soient C_1, C_2, \dots, C_N (N entier ≥ 2) des parties convexes fermées de E telles que : $C := \bigcap_{1 \leq i \leq N} C_i$ est non vide.

Le problème consiste à construire une suite de points de E dont la limite appartient à C .

Soit $u_0 \in E$ arbitraire ; supposons construits u_1, u_2, \dots, u_n ; on détermine u_{n+1} ainsi : $\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$ on considère $u_n^i = P_{C_i}(u_n)$, et on pose :

$$u_{n+1} = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} u_n^i.$$

1) Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, N\}, \forall c \in C_i : [d(u_n, C_i)]^2 \leq \|c - u_n\|^2 - \|u_n^i - c\|^2.$$

2) Observez que pour tout $v \in E$ on peut écrire : $u_{n+1} - v = \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{N} (u_n^i - v)$ et

déduisez-en que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall v \in E : \|u_{n+1} - v\|^2 \leq \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} \|u_n^i - v\|^2.$$

3) Démontrez qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall c \in C : \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} [d(u_n, C_i)]^2 \leq \|c - u_n\|^2 - \|u_{n+1} - c\|^2.$$

4) Démontrez que pour tout $c \in C$ la suite $(\|u_n - c\|)$ est convergente dans \mathbb{R} . Déduisez-en que : $\forall i \in \{1, \dots, N\} : \lim_{n \rightarrow \infty} (d(u_n, C_i)) = 0$.

5) Démontrez qu'on peut extraire de la suite (u_n) une sous-suite convergente vers un $\hat{u} \in C$.

6) Démontrez que si $\lim_{n \in S} (u_n) = \hat{u}$ et $\lim_{n \in T} (u_n) = \tilde{u}$ on a : $\hat{u} = \tilde{u}$ (S et T désignent deux parties infinies de \mathbb{N}).

Indication : considérez $\alpha = \lim (\|u_n - \hat{u}\|^2 - \|u_n - \tilde{u}\|^2)$.

Déduisez des résultats ci-dessus que (u_n) est convergente dans E et que sa limite est une solution du problème posé.

CORRIGÉ DU PROBLÈME

1) En utilisant la dernière inégalité de l'Exercice 3.3, on obtient :

$$d^2(u_n, C_i) = \|u_n - P_{C_i}(u_n)\|^2 \leq \|u_n - c\|^2 - \|P_{C_i}(u_n) - c\|^2 = \|u_n - c\|^2 - \|u_n^i - c\|^2. \spadesuit$$

$$2) u_{n+1} - v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_n^i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (u_n^i - v).$$

L'inégalité cherchée exprime que $w \mapsto \|w\|^2$ est convexe, et donc que :

$$w = \sum_{i=1}^p \lambda_i w_i, \text{ avec } \lambda_i \in]0, 1[, \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \implies \|w\|^2 \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \|w_i\|^2.$$

Démontrons cela. $\|\lambda u + (1 - \lambda)v\| \leq \lambda\|u\| + (1 - \lambda)\|v\|$, donne :

$$\begin{aligned} \|\lambda u + (1 - \lambda)v\|^2 &\leq \lambda^2\|u\|^2 + 2\lambda(1 - \lambda)\|u\| \cdot \|v\| + (1 - \lambda)^2\|v\|^2 \\ &\leq \lambda^2\|u\|^2 + \lambda(1 - \lambda)(\|u\|^2 + \|v\|^2) + (1 - \lambda)^2\|v\|^2 \\ &\leq [\lambda^2 + \lambda(1 - \lambda)]\|u\|^2 + [(1 - \lambda)^2 + \lambda(1 - \lambda)]\|v\|^2 \\ &\leq \lambda\|u\|^2 + (1 - \lambda)\|v\|^2 : \end{aligned}$$

$w \mapsto \|w\|^2$ est bien convexe.

Montrons par récurrence que $\|w\|^2 \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \|w_i\|^2$.

L'inégalité est vraie pour $p = 2$: on vient de le prouver ; supposons-la vraie pour p , et démontrons-la pour $p + 1$.

Soient donc $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1} \in]0, 1[$ tels que $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i = 1$, et soient w_1, \dots, w_p, w_{p+1} ; on a à

montrer que : $\left\| \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i w_i \right\|^2 \leq \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i \|w_i\|^2$. Écrivons :

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_{p+1} w_{p+1} = (1 - \lambda_{p+1}) \left[\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{p+1}} w_1 + \dots + \frac{\lambda_p}{1 - \lambda_{p+1}} w_p \right] + \lambda_{p+1} \cdot w_{p+1}.$$

Puisque $(1 - \lambda_{p+1}) + \lambda_{p+1} = 1$, $\lambda_{p+1} \in]0, 1[$, d'après ce qui précède :

$$\|\lambda_1 \cdot w_1 + \dots + \lambda_{p+1} \cdot w_{p+1}\|^2 \leq (1 - \lambda_{p+1}) \left\| \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{p+1}} w_1 + \dots + \frac{\lambda_p}{1 - \lambda_{p+1}} w_p \right\|^2 + \lambda_{p+1} \cdot \|w_{p+1}\|^2.$$

On applique l'hypothèse de récurrence au premier terme :

$$\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{p+1}} = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p} > 0 \text{ et } \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{p+1}} + \dots + \frac{\lambda_p}{1 - \lambda_{p+1}} = \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_p}{\lambda_1 + \dots + \lambda_p} = 1$$

$$\text{D'où : } \left\| \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{p+1}} w_1 + \dots + \frac{\lambda_p}{1 - \lambda_{p+1}} w_p \right\|^2 \leq \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{p+1}} \|w_1\|^2 + \dots + \frac{\lambda_p}{1 - \lambda_{p+1}} \|w_p\|^2,$$

d'où finalement en simplifiant par $1 - \lambda_{p+1}$, et en ajoutant le dernier terme :

$$\|\lambda_1 \cdot w_1 + \dots + \lambda_{p+1} \cdot w_{p+1}\|^2 \leq \lambda_1 \|w_1\|^2 + \dots + \lambda_{p+1} \|w_{p+1}\|^2. \spadesuit$$

Une remarque intéressante : l'inégalité de convexité ci-dessus vaut pour n'importe quelle fonction convexe (*inégalité de convexité généralisée, ou inégalité de Jensen*).

3) Puisque $c \in C = \bigcap_{1 \leq i \leq N} C_i$, l'inégalité du 1) est valide pour tout i : on somme sur i et

$$\text{on divise par } N, \text{ il vient : } \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d^2(u_n, C_i) \leq \|c - u_n\|^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|u_n^i - c\|^2.$$

Mais d'après 2) : $-\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|u_n^i - c\|^2 \leq -\|u_{n+1} - c\|^2$, d'où le résultat voulu :

$$0 \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d^2(u_n, C_i) \leq \|c - u_n\|^2 - \|u_{n+1} - c\|^2. \spadesuit$$

4) On a donc pour tout $c \in C$: $\|u_{n+1} - c\|^2 \leq \|u_n - c\|^2$, c'est-à-dire : $\|u_{n+1} - c\| \leq \|u_n - c\|$; pour tout $c \in C$ fixé, donc, la suite $(\|u_n - c\|)$ est décroissante et minorée (par 0 !) : elle converge dans \mathbb{R} vers un $\lambda(c) \geq 0$.

Reprenons maintenant l'inégalité obtenue dans 3) :

$$0 \leq \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq N} d^2(u_n, C_i) \leq \|u_n - c\|^2 - \|u_{n+1} - c\|^2 ; \text{ comme on vient de montrer que}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|u_n - c\|^2 - \|u_{n+1} - c\|^2) = \lambda^2(c) - \lambda^2(c) = 0, \text{ on a :}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^N d^2(u_n, C_i) \right) = 0.$$

La sommation s'étendant à un nombre fini et fixe (par rapport à n) de termes tous ≥ 0 , on a nécessairement :

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} : \lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, C_i) = 0. \spadesuit$$

5) Fixons un $c_0 \in C$. Pour tout $n \in \mathbb{N} : \|u_n\| \leq \|u_n - c_0\| + \|c_0\|$, et donc $\|u_n\| \leq K =$ constante, puisque la suite $\|u_n - c_0\|$ est convergente donc bornée. La suite (u_n) est bornée. Soit B une boule fermée contenant la suite (u_n) . Comme E est de dimension finie, B est compacte. Appliquant la propriété de Weierstraß des parties compactes, de la suite (u_n) on peut extraire une suite $(u_n)_{n \in S}$ ($S \subset \mathbb{N}$, S infinie) convergente vers un $\hat{u} \in E$. \spadesuit

6) Pour tout i , $1 \leq i \leq N$, la fonction $u \mapsto d(u, C_i)$ est continue (elle est contractante), donc : la suite $(d(u_n, C_i))_{n \in S}$ converge vers $d(\hat{u}, C_i)$, et elle converge aussi vers 0 d'après 4) ; d'après l'unicité de la limite : $d(\hat{u}, C_i) = 0$, pour tout i , et par conséquent, puisque C_i est fermé : $u \in C_i$, cela pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, et donc : $\hat{u} \in \bigcap_{1 \leq i \leq N} C_i = C$. \spadesuit

Supposons qu'on ait aussi $\lim_{n \in T} (u_n) = \tilde{u}$ ($T \subset \mathbb{N}$, T infinie). Comme ci-dessus on a $\tilde{u} \in C$. Le nombre $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} (\|u_n - \hat{u}\|^2 - \|u_n - \tilde{u}\|^2)$ existe dans \mathbb{R} car on a vu que, pour tout $c \in C$, $\lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} \|u_n - c\|^2$ existe.

$$\|u_n - \hat{u}\|^2 - \|u_n - \tilde{u}\|^2 = \|u_n\|^2 - 2(u_n|\hat{u}) + \|\hat{u}\|^2 - \|u_n\|^2 + 2(u_n|\tilde{u}) - \|\tilde{u}\|^2$$

et donc : $\alpha = \|\hat{u}\|^2 - \|\tilde{u}\|^2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty, n \in \mathbb{N}} (u_n|\hat{u} - \tilde{u})$.

Le théorème sur la limite d'une suite extraite nous permet d'écrire :

$$\alpha = \|\hat{u}\|^2 - \|\tilde{u}\|^2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty, n \in S} (u_n|\hat{u} - \tilde{u}) = \|\hat{u}\|^2 - \|\tilde{u}\|^2 - 2(\hat{u}|\hat{u} - \tilde{u})$$

$$= -\|\hat{u}\|^2 - \|\tilde{u}\|^2 + 2(\hat{u}|\tilde{u}),$$

et aussi :

$$\alpha = \|\hat{u}\|^2 - \|\tilde{u}\|^2 - 2 \lim_{n \rightarrow \infty, n \in T} (u_n|\hat{u} - \tilde{u}) = \|\hat{u}\|^2 - \|\tilde{u}\|^2 - 2(\hat{u}|\hat{u} - \tilde{u})$$

$$= \|\hat{u}\|^2 + \|\tilde{u}\|^2 - 2(\hat{u}|\tilde{u}).$$

On tire de ces deux égalités : $-\|\hat{u}\|^2 - \|\tilde{u}\|^2 + 2(\hat{u}|\tilde{u}) = \|\hat{u}\|^2 + \|\tilde{u}\|^2 - 2(\hat{u}|\tilde{u})$
soit : $2(\|\hat{u}\|^2 + \|\tilde{u}\|^2 - 2(\hat{u}|\tilde{u})) = 0 = 2\|\hat{u} - \tilde{u}\|^2 \implies \tilde{u} = \hat{u}$.

Conclusion : il n'y a qu'une valeur d'adhérence.

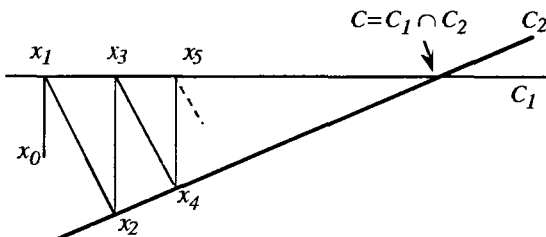
Plaçons la suite (u_n) dans une boule fermée, donc compacte : on peut alors appliquer la Prop. 1.2 du Chap. XIV, et (u_n) n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence est convergente. Puisque la limite est, on l'a vu, dans C , le problème est terminé. \spadesuit

Exemple d'application :

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice $N \times N$ inversible ; on considère le système linéaire : $A.X = B$, où $B \in \mathbb{R}^N$, $B = (\beta_i)$ est donnée, et où X est l'inconnue. Soit A_i la i -ème ligne de A et soit ${}^t A_i$ le vecteur (colonne) transposé. Il est facile de se convaincre que chercher X , c'est chercher le point de $C = \bigcap_{1 \leq i \leq N} C_i$, où $C_i = \{Y \in \mathbb{R}^N / ({}^t A_i|Y) = \beta_i\}$ (intersection de N hyperplans). Faites un dessin dans le plan pour bien comprendre la méthode. On voit facilement (faites-le !) que : $P_{C_i}(Z) = Z + \frac{\beta_i - ({}^t A_i|Z)}{\|A_i\|^2} \cdot {}^t A_i$, ce qui permet de faire fonctionner l'algorithme étudié dans le problème.

Cette méthode de résolution des systèmes linéaires s'appelle la *méthode de Cimmino* ; on dispose à l'heure actuelle de méthodes *beaucoup plus* performantes.

Le dessin ci-dessous suggère une autre méthode, plus simple, mais moins rapide, de résolution des systèmes linéaires : c'est la *méthode de Kaczmarz*.



$$x_0 \in \mathbb{R}^2 \text{ est arbitraire, } x_{2n+1} = P_{C_1}(x_{2n}) \text{ et } x_{2n} = P_{C_2}(x_{2n-1}).$$

La suite (x_n) converge vers c , avec $\{c\} = C_1 \cap C_2$.

Fin du Chapitre XVII

CHAPITRE XVIII

ESPACES DE HILBERT (réels) I AUTOUR DU THÉORÈME DE F. RIESZ

Introduction

Je pense (par expérience) que le chapitre que vous avez devant vous, le XVIII, vous séduira par son aspect algébrique, ses formules, son côté abstrait.

Un seul théorème, mais fondamental, dû à F. Riesz : si $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace de Hilbert réel, étant donnée une forme linéaire continue $\varphi \in E'$, il existe un vecteur $a = a_\varphi \in E$ – et un seul – tel que $\varphi(u) = (u | a)$ pour tout $u \in E$.

Voilà qui est bien commode pour manipuler les formes linéaires continues qui sont ainsi « représentées » par des vecteurs de E .

De plus, $\varphi \mapsto a_\varphi$ est *linéaire* et *isométrique*.

« En gros », donc, un espace de Hilbert et son dual topologique, « c'est pareil ». Mais on n'a pas toujours intérêt à dire que « c'est pareil », pas seulement par prudence . . .

Une seule notion nouvelle : celle d'*adjoint* d'une application linéaire qui généralise la notion vue en D.E.U.G. (en principe) pour les espaces euclidiens, *i.e.* les espaces de Hilbert de dimension finie.

Il convient de prendre garde au fait que beaucoup de résultats de ce chapitre (comme du précédent) ne sont valides que pour les espaces de Hilbert, et *ne le sont pas* pour les espaces préhilbertiens non complets : cela tient systématiquement au fait que dans ce dernier cas la projection sur un sous-espace vectoriel fermé (fusse un hyperplan !) n'existe pas nécessairement [autrement dit qu'il est possible que $F^\perp = \{0\}$ avec F sous-espace fermé $\neq E$].

Le chapitre se termine sur le « fameux » lemme de Lax-Milgram, qui n'est qu'un avatar du Théorème de Riesz.

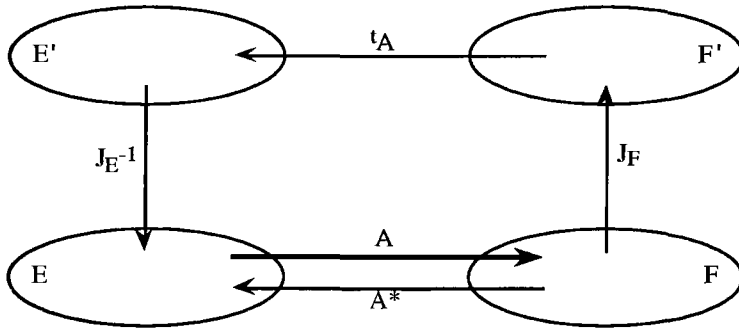
En résumé, le chapitre est facile, et il n'y a que peu de choses à apprendre, mais il y a quelques précautions à prendre.

☞ **Exercices indispensables** : 1.2, 1.4, 2.1, 2.2, 2.3.

☞ Exercices complémentaires : 1.1, 1.3, 1.5.

Il y a deux problèmes : le premier introduit l'intéressante notion de *noyau reproduisant*, il est assez facile ; le second, facile, prouve un résultat d'existence et d'unicité pour un problème de « contrôle optimal abstrait ».

BON TRAVAIL !



Exercice 2.1. Adjoint et transposée

E, F espaces de Hilbert réels.

$A : E \rightarrow F$; ${}^tA : F' \rightarrow E'$ définie par ${}^tA(\psi) = \psi \circ A$.

J_E et J_F sont les *isométries de Riesz* de E et F respectivement.

$$A^* = J_E^{-1} \circ {}^tA \circ J_F \text{ et } {}^tA = J_E \circ A^* \circ J_F^{-1}.$$

CHAPITRE XVIII

ESPACES DE HILBERT (réels) I

AUTOUR DU THÉORÈME DE F. RIESZ

1. L'APPLICATION DE DUALITÉ

LE THÉORÈME DE F. RIESZ

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel.

Pour toute $u \in E$ fixé, considérons la fonction $\varphi_u : E \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $v \in E$ fait correspondre le réel $\varphi_u(v) = (v|u)$.

φ_u est une forme linéaire sur E ; en effet :

- $\forall v \in E, \forall w \in E : \varphi_u(v+w) = (v+w|u) = (v|u) + (w|u) = \varphi_u(v) + \varphi_u(w)$,
- $\forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \varphi_u(\lambda \cdot v) = (\lambda \cdot v|u) = \lambda \cdot (v|u) = \lambda \cdot \varphi_u(v)$.

Donc : $\varphi_u \in E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, cela pour tout u fixé dans E .

φ_u est continue, en effet d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall v \in E : |\varphi_u(v)| = |(v|u)| \leq \|v\| \cdot \|u\|.$$

Donc $\varphi_u \in E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, et : $\|\varphi_u\|' = \sup_{v \in E, \|v\|=1} |\varphi_u(v)| \leq \|u\|$; si $u = 0$:

$$\varphi_u = 0, \text{ et si } u \neq 0 : \varphi_u\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{1}{\|u\|} \varphi_u(u) = \frac{1}{\|u\|} (u|u) = \frac{1}{\|u\|} \|u\|^2 = \|u\|.$$

Par conséquent : $\|\varphi_u\|' = \|u\|$ pour tout $u \in E$.

On peut donc définir une application de E dans E' que nous noterons J ou J_E :

$$(1.1) \quad J : E \rightarrow E', u \in E \mapsto \varphi_u \in E'$$

J est une application linéaire, en effet :

- $\forall u \in E, \forall u' \in E, \forall v \in E :$

$$\begin{aligned} [J(u+u')](v) &= \varphi_{u+u'}(v) = (v|u+u') = (v|u) + (v|u') = \varphi_u(v) + \varphi_{u'}(v) \\ &= [J(u)](v) + [J(u')](v) = [J(u) + J(u')](v), \end{aligned}$$

soit : $J(u+u') = J(u) + J(u')$, et :

- $\forall u \in E, \forall v \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned} [J(\lambda \cdot u)](v) &= \varphi_{\lambda \cdot u}(v) = (v|\lambda \cdot u) = \lambda \cdot (v|u) = \lambda \cdot \varphi_u(v) = \lambda \cdot [J(u)](v) \\ &= [\lambda \cdot J(u)](v), \end{aligned}$$

soit : $J(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot J(u)$.

Comme on a : $\|J(u)\|' = \|\varphi_u\|' = \|u\|$ pour tout $u \in E$, J est une **isométrie linéaire**

Résumons ce qui précède dans le :

Théorème 1.1. (TRÈS IMPORTANT)

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel. Il existe une application $J : E \rightarrow E'$ définie par :

$$\forall u \in E, \forall v \in E : [J(u)](v) = (v|u)$$

qui est linéaire et isométrique. J est appelée l'**application de dualité** de E (ou : l'**isométrie de F. Riesz** de E).

Terminologie et notations :

Afin d'alléger la terminologie, on appellera **opérateur** tout élément de $\mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont des e.v.n. sur le même corps : un opérateur est donc une application

linéaire et continue. Par ailleurs, pour $A \in L(E, F)$ et $u \in E$ on notera $Au = A(u)$. Rappelons aussi que pour $u \in E$ et $\varphi \in E'$ on note $\varphi(u) = \langle u, \varphi \rangle$.

Propriétés de l'application de dualité :

- 1) $\forall u \in E : \langle u, Ju \rangle = [J(u)](u) = (u|u) = \|u\|^2$.
- 2) *Symétrie* : $\forall u \in E, \forall v \in E :$
 $\langle v, Ju \rangle = [J(u)](v) = (u|v) = (v|u) = [J(v)](u) = \langle u, Jv \rangle$.
- 3) *Monotonie* : $\forall u \in E, \forall v \in E :$
 $\langle u - v, Ju - Jv \rangle = \langle u - v, J(u - v) \rangle = \|u - v\|^2 \geq 0$ [par 1)], et > 0 si $u \neq v$.
- 4) *J comme différentielle* : Posons pour $u \in E : Q(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 ;$

$\forall u \in E, \forall h \in E :$

$$Q(u + h) = \frac{1}{2}\|u + h\|^2 = \frac{1}{2}\|u\|^2 + (u|h) + \frac{1}{2}\|h\|^2 = Q(u) + \langle h, Ju \rangle + \frac{1}{2}\|h\|^2$$

Soit : $Q(u + h) - Q(u) = \langle h, Ju \rangle + \|h\|\varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h) = \frac{1}{2}\|h\|$ vérifie $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Cela signifie (cours de calcul différentiel ou Chap. IX) que Q est différentiable au sens de Fréchet sur E , et qu'on a : $DQ(u) = Ju$ pour tout $u \in E$, soit $DQ = J$.

5) Si E est complexe, on peut aussi envisager J , mais J est alors *antilinéaire* [$J(\lambda.u) = \bar{\lambda}.J(u)$]; si l'on veut avoir J linéaire, il faut remplacer le dual par l'*anti-dual* E'_a constitué des formes antilinéaires. La situation est plus compliquée, mais pas plus difficile.

☞ **Exercice 1.1.** (très facile) Soit $(E, \| \cdot \|)$ un e.v.n. réel et soit E' son dual topologique. On suppose qu'il existe une application linéaire $K : E \rightarrow E'$ telle que $\forall u \in E : [K(u)](u) = \|u\|^2$. Démontrez qu'il existe sur E un produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ tel que $\forall u \in E : \|u\|^2 = (u|u)$ [autrement dit E est préhilbertisable par $(\cdot|\cdot)$ dont la norme associée est la norme de E].

Indication : Se reporter à la Lecture du Chap. II.

Théorème 1.2 (Théorème de F. Riesz) (FONDAMENTAL)

|| L'application de dualité J est *surjective* si et seulement si $(E, (\cdot|\cdot))$ est *complet*, c'est-à-dire est un *espace de Hilbert*.

Commentaires :

1) L'intérêt de ce Th. est double : d'une part, si $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace de Hilbert, les espaces E et E' sont isométriques en tant qu'espaces de Banach, et donc « identifiables ». D'autre part on a un **Théorème de représentation des formes linéaires continues qui s'énonce** :

$$\forall \varphi \in E', \exists a [= a(\varphi)] \in E \text{ unique tel que } \forall u \in E : \varphi(u) = (u|a)$$

2) Nous avons déjà rencontré un lemme dû à Frigyes (*i.e.* Frédéric, gy = dié en hongrois) Riesz dans le Chap. XIII. Il existe un autre théorème de F. Riesz qui « interprète » le dual de $C_\infty([a, b], \mathbb{R})$: voir un cours de calcul intégral. Enfin le Th. de Fisher-Riesz affirme que $L^2(a, b)$ est complet.

Démonstration :

- Si J est surjective, les espaces vectoriels normés $(E, \| \cdot \|)$ et $(E', \| \cdot \|')$ (où $\| \cdot \|'$ est la norme naturelle) sont (linéairement) isométriques, et comme $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ est complet pour $\| \cdot \|'$ [parce que \mathbb{R} l'est, cf. Chap. XI, Th.3.2], $(E, \| \cdot \|)$ est complet. ♦
- Réciproquement, supposons que $(E, (\cdot|\cdot))$ est complet. On va prouver que tout $\varphi \in E'$ s'écrit $\varphi_u = J\hat{u}$ pour un certain $\hat{u} \in E$; \hat{u} sera nécessairement *unique* puisque J est injective (c'est une isométrie).

Si $\varphi = 0$, le vecteur $\hat{u} = 0$ convient : $\varphi = \varphi_0 = J(0)$.

Supposons donc $\varphi \neq 0$. Considérons l'hyperplan fermé $F = \text{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ [Chap. X]. Puisque E est complet, F est complet dans E [Chap. XI]. On peut donc appliquer le Théorème de projection orthogonale [Chap. XVII, Th. 4.2] : $E = F \oplus F^\perp$, où $\dim(F^\perp) = 1$; $F^\perp = [a]$, où $a \in F^\perp$, $a \neq 0$. a pourra être déterminé ainsi : soit $b \in E \setminus F$ (b existe car $\varphi \neq 0$), on prend : $a := b - P_F(b)$.

Donc tout $v \in E$ va s'écrire : $v := w + \lambda a$, où $w \in F$. D'où :
 $(v|a) = (w|a) + \lambda(a|a) = \lambda\|a\|^2$, car $(w|a) = 0$, ce qui permet d'écrire :

$$v = w + \frac{(v|a)}{\|a\|^2} \cdot a, \text{ et on a :}$$

$$\varphi(v) = \varphi(w) + \frac{(v|a)}{\|a\|^2} \cdot \varphi(a) = (v|\hat{u}), \text{ en prenant } \hat{u} := \frac{\varphi(a)}{\|a\|^2} a.$$

On a donc bien $\varphi = J(\hat{u}) = \varphi_{\hat{u}}$. ♦

☞ **Exercice 1.2.** (facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel, et soit $C \neq \emptyset$ une partie convexe et fermée de E . On se donne $\varphi \in E'$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$. $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrez que la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto f(u) = \varphi(u) + \lambda\|u\|^2 + \alpha$ atteint son *minimum* sur C en un point unique.

☞ **Exercice 1.3.** (assez difficile) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. réel et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Rappelons qu'on dit que f est différentiable au point $u \in E$ s'il existe $\varphi \in E'$ telle que pour tout $h \in E$: $f(u+h) - f(u) - \langle h, \varphi \rangle = \|h\| \cdot \varepsilon(h)$, où $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$; on appelle φ la différentielle de f au point u , et on note : $\varphi = Df(u)$.

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soit $C \neq \emptyset$ une partie convexe et complète de E . On pose : $g(u) = \frac{1}{2}[d(u, C)]^2$. Démontrez les inégalités :

$$\forall u \in E, \forall h \in E : 0 \leq g(u+h) - g(u) - (u - P_C(u)|h) \leq \frac{1}{2}\|h\|^2,$$

où P_C est la projection sur C au sens du Chap. XVII, et déduisez-en $Dg(u)$ pour tout $u \in E$.

Démontrez qu'il existe une fonction $p : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : $Dp(u) = J[P_C(u)]$ pour tout $u \in E$.

Conséquences du Théorème de F. Riesz

1) Dans le cas où $(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace de Hilbert réel, on peut munir de façon naturelle l'espace de Banach dual topologique $(E', \|\cdot\|')$ d'un produit scalaire $(\cdot|\cdot)'$ qui en fait un espace de Hilbert tel que $\forall \varphi \in E' : \|\varphi\|'^2 = (\varphi|\varphi)'$. Soient en effet $\varphi, \psi \in E'$, et soit J l'application de dualité de $(E, (\cdot|\cdot))$.

Il existe, grâce au Th. de Riesz, $u \in E$ unique tel que $J(u) = \varphi$, et $v \in E$ unique tel que $J(v) = \psi$. On posera : $(\varphi|\psi)' = (u|v) = (J^{-1}(\varphi)|J^{-1}(\psi))$.

Il est facile de vérifier que $(\cdot|\cdot)'$ est un produit scalaire sur E' satisfaisant la relation : $(\varphi|\varphi)' = \|\varphi\|'^2$.

On a le jeu de **formules** suivant qui permet de passer de E à E' , des produits scalaires à la dualité :

(1.2) Posons : $J(u) := \varphi$, $J(v) := \psi$ i.e. $u = J^{-1}(\varphi)$, $v = J^{-1}(\psi)$; on a :

$$\begin{aligned} \varphi(v) &= \langle v, \varphi \rangle = \langle v, Ju \rangle = [J(u)](v) = (u|v) = (v|u) = [J(v)](u) \\ &= \psi(u) = \langle u, \psi \rangle = \langle u, Jv \rangle = (\varphi|\psi)' = (J(u)|J(v))' = (J^{-1}(\varphi)|J^{-1}(\psi)) \end{aligned}$$

2) Si $(E, (\cdot|\cdot))$ n'est pas complet, considérons le sous-espace vectoriel : $G = \text{adh}(J(E))$ de l'espace de Banach $(E', \|\cdot\|')$. G est complet car fermé dans un complet [voir Chap. XI], et $J(E)$ isométrique à E est *partout dense* dans G .

☞ Donc $(G, \|\cdot\|'_G)$ est une réalisation du **complété** \hat{E} de E .

On sait que \hat{E}' est isométrique à E' [Chap. XV], et d'après le Th. de Riesz : \hat{E} est isométrique à \hat{E}' , donc à E' . Par conséquent $\text{adh}[J(E)]$ est isométrique à E' , et donc $J(E)$ est une *partie partout dense* de E' .

On peut munir $J(E)$ d'un produit scalaire comme dans 1) et prolonger ce produit scalaire à E' , ce qui revient à prendre : $\varphi \in E'$, $\psi \in E'$, $\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n)$, $\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} J(v_n) : (\varphi|\psi)' = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n|v_n) \dots$ et à faire les vérifications nécessaires.

Exemple 1.1.

1) Prenons $E = \ell^2(\mathbb{R})$. $u = (\xi_n)$, $v = (\eta_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$: $(u|v) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot \eta_n$. Toute forme linéaire continue $\varphi \in E'$ s'écrit $\varphi(u) = (u|a)$ pour tout $u \in E$, pour un $a \in E$, $a = (\alpha_n)$, soit : $\varphi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \xi_n$, d'après le Th. de Riesz.

2) Le résultat serait faux avec le sous-espace F de $E = \ell^2$ suivant :

$$F = \{u = (\xi_n) \in \ell^2 / \exists N = N(u) \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^* : n \geq N \implies \xi_n = 0\}$$

qui n'est pas complet (il n'est pas fermé dans ℓ^2 : vérifiez-le). En effet, la forme linéaire continue sur F : $\varphi(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\xi_i}{i}$ (la somme est en fait finie) ne s'écrit pas $\varphi(u) = (u|a)$ où $a \in F$, car il faudrait que $a = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots) \notin F$.

☞ **Exercice 1.4.** (difficulté moyenne) Soit $E = L^2(-1, +1)$ muni de son produit scalaire $(f|g) = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$. C'est un espace de Hilbert [Th. de Fisher-Riesz, cours de Calcul Intégral].

Démontrez que $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto \varphi(f) = \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt$ appartient à E' , et calculez $\|\varphi\|'$. Déterminez $J^{-1}(\varphi)$.

Soit $F = \text{Ker}(\varphi)$. Décrivez F^\perp . Calculez la projection sur F de la fonction $t \mapsto t$.

Soit \mathcal{C} le sous-espace de E constitué par les classes admettant un représentant continu. Prouvez que $P_F(f) \notin \mathcal{C}$ pour tout $f \in \mathcal{C} \setminus F$.

☞ **Exercice 1.5.** (assez facile) Soit $E = C_2([-1, +1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t) \cdot g(t) dt$. E n'est pas complet, comme vous pourrez vous en assurer avec la suite de fonctions suivantes : $f_n(t) := \min\{n, |t|^{-1/4}\}$.

On considère φ de l'Exercice 1.4 : démontrez que $\varphi \in E'$ et calculez $\|\varphi\|'$.

Démontrez que $J^{-1}(\varphi)$ n'existe pas. Démontrez que la fonction $t \mapsto t$ n'a pas de projection sur $F = \text{Ker}(\varphi)$, et que - en fait - $F^\perp = \{0\}$.

☞ **Attention donc aux formules du Chap. XVII suivant le Th. 4.2 : elles ne sont valides que dans les espaces de Hilbert !!!**

Remarque 1.1. L'isométrie canonique $\chi : E \rightarrow E''$ et les espaces de Banach réflexifs

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On définit $\chi = \chi_E : E \rightarrow E'' = (E')'$ par : $[\chi(u)](\varphi) = \varphi(u)$ pour tout $u \in E$ et tout $\varphi \in E'$. En suivant ce qui a été fait pour J pas à pas, on démontre [faites-le en exercice !] que $\chi(u) \in E''$, puis que χ est linéaire et continue, avec $\|\chi(u)\|'' \leq \|u\|$.

En fait, χ est une **isométrie**, mais on ne dispose pas dans ce cours du théorème permettant de le démontrer [le Théorème de prolongement de Hahn-Banach].

Admettons que χ est effectivement une isométrie.

Alors, χ permet de classer les e.v.n. en deux catégories : les e.v.n. pour lesquels χ est **surjective**, qui sont dits **réflexifs**, et les e.v.n. pour lesquels χ n'est pas surjective, qui sont dits **non-réflexifs**.

Comme $E'' = \mathcal{L}(E', \mathbb{K})$ est complet [Chap. XI], si χ est surjective E est nécessairement complet. Donc les e.v.n. non complets ne sont jamais réflexifs.

On démontre que les espaces de Banach classiques suivants : ℓ^1 , c_0 , c , ℓ^∞ , $C([a, b], \mathbb{R})$, $L^1(a, b)$, $L^\infty(a, b)$ ne sont pas réflexifs.

Par contre, les espaces ℓ^p , $L^p(a, b)$, $1 < p < \infty$, sont des espaces réflexifs.

Par ailleurs, tout e.v.n. de dimension finie est réflexif [prouvez-le !].

On va démontrer que tout espace de Hilbert réel $(E, (\cdot|\cdot))$ est réflexif (c'est d'ailleurs vrai aussi pour les Hilbert complexes).

A cette fin, on va démontrer que $\chi = J' \circ J$, où J [resp. J'] est l'application de dualité de E [resp. E']. En effet, $\forall u \in E, \forall \varphi \in E'$:

$$[(J' \circ J)(u)](\varphi) = [J'(J(u))](\varphi) = \langle \varphi, J'(J(u)) \rangle = (J(u)|\varphi)' = \langle u, \varphi \rangle = [\chi(u)](\varphi)$$

[cf. Formules (1.2)].

Comme J, J' sont surjectives (Th. 1.2), et comme le produit de composition de deux surjections est une surjection, on a χ surjective, et $(E, (\cdot|\cdot))$ est réflexif.

La notion de réflexivité est très importante [cf. un cours d'analyse de Maîtrise] car les espaces réflexifs possèdent beaucoup de bonnes propriétés que ne possèdent pas les espaces qui ne le sont pas.

Remarques 1.2.

Certains auteurs interprètent le Th. 1.2 en posant carrément $E' = E$ et $J = Id_E$. Cette manière de procéder me semble bien imprudente, surtout lorsqu'on s'adresse à des débutants, mais il y a des raisons plus fondamentales pour ne se méfier de ce point de vue :

1) Par exemple, on trouve très souvent l'argumentation suivante : « comme E' c'est E , E'' c'est E' , et donc E'' c'est E ; par conséquent E est réflexif », ce qui amène inmanquablement à penser que E est réflexif ssi il existe une isométrie linéaire de E sur E'' , ce qui est faux ! C'est χ qui doit être surjective, pas une quelconque isométrie (il existe des contre-exemples). Il y a donc risque d'ambiguïté, pour le moins . . .

2) Ensuite, ce n'est pas toujours une bonne chose que d'identifier un espace de Hilbert à son dual. Il vaut parfois mieux, et c'est très courant dans la théorie des équations aux dérivées partielles (E.D.P.), identifier E' à un tout autre espace que E , par une isométrie qui n'est pas J .

Un exemple très académique (faute de matériel on ne peut pas donner un exemple tiré des E.D.P.) : $E = \{u = (\xi_n) \in \ell^2 / \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \xi_n^2 < \infty\}$ muni du produit scalaire $(u|v) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \xi_n \cdot \eta_n$.

Plutôt qu'identifier E' à E (qui est un espace « petit »), il est tout à fait préférable d'établir une isométrie entre E' et $F := \{a = (\alpha_n) \in \ell^2 / \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \alpha_n^2 < \infty\}$ muni du produit scalaire $(a|b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \alpha_n \cdot \beta_n$, qui est un espace « grand ». Voir Chap. XIX Problème 5.

Moralité : Au niveau de la Licence, considérez E et E' comme tout à fait distincts, et utilisez J et J^{-1} pour passer sans aucun risque de E à E' et *vice versa*.

2. OPÉRATEUR ADJOINT D'UN OPÉRATEUR

Définition 2.1.

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ et $(F, [\cdot|\cdot])$ des espaces préhilbertiens réels, et soit $A \in L(E, F)$ [notez bien L et non \mathcal{L} pour le moment]. On dit que A possède un **adjoint** s'il existe une application $B : F \rightarrow E$ telle que :

$$(2.1) \quad \boxed{\forall u \in E, \forall v \in F : [A(u)|v] = (u|B(v))}$$

Exemple 2.1. Prenons $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ euclidiens. $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ s'exprime dans les bases canoniques par sa matrice $(a_{i,j})$, où $1 \leq i \leq m$ (lignes) et $1 \leq j \leq n$ (colonnes). A possède un adjoint B dont la matrice dans les bases canoniques est $(b_{k,l})$, $1 \leq l \leq n$, $1 \leq k \leq m$, avec $b_{k,l} = a_{l,k}$.

La matrice de B est la *matrice transposée* de la matrice de A .

Exemple 2.2. $E = F = \ell^2$. On considère les applications linéaires :

$$u = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \mapsto A(u) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \text{ et} \\ u \mapsto B(u) = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots).$$

On a : $A, B \in \mathcal{L}(\ell^2)$. Il est facile de constater [do it !] que B est un adjoint de A , et que A est un adjoint de B .

Exemple 2.3. Soit E un espace préhilbertien, et soit F un sous-espace vectoriel complet de E . La projection P_F possède un adjoint qui est P_F elle-même [Chap. XVII, Exercice 4.2].

Exemple 2.4. Soit E un espace préhilbertien réel ; on prend $F = \mathbb{R}$, et on considère une forme linéaire φ continue ($\varphi \in E'$). Si φ possède un adjoint B , on doit avoir :

$$\forall u \in E, \forall \lambda \in F = \mathbb{R} : (\varphi(u)|\lambda)_{\mathbb{R}} = \varphi(u) \cdot \lambda = (u|B(\lambda))_E.$$

En particulier, pour $\lambda = 1$, on doit avoir, $\forall u \in E$:

$$\varphi(u) = (u|B(1)) \Leftrightarrow \langle u, \varphi \rangle = \langle u, J[B(1)] \rangle \Rightarrow \varphi = J[B(1)] \Rightarrow B(1) = J^{-1}(\varphi).$$

Par conséquent φ possède un adjoint si et seulement si $J^{-1}(\varphi)$ existe. Quand il existe, c'est l'application linéaire continue $\mathbb{R} \rightarrow E$, $\lambda \mapsto \lambda \cdot J^{-1}(\varphi)$, qu'on identifie parfois à $J^{-1}(\varphi)$ [par l'isométrie $E \approx \mathcal{L}(\mathbb{R}, E)$] [Chap. X].

Propriétés des adjoints

(2.2) S'il existe un adjoint, il est *unique*. En effet, supposons que $\forall u \in E, \forall v \in F$:

$$[A(u)|v] = (u|B_1(v)) = (u|B_2(v)). \text{ On en déduit :}$$

$\forall u \in E, \forall v \in F : (u|B_1(v) - B_2(v)) = 0$, soit en faisant $u := B_1(v) - B_2(v)$:

$$\|B_1(v) - B_2(v)\|^2 = 0 \text{ pour tout } v \in F, \text{ d'où :}$$

$$\forall v \in F : B_1(v) = B_2(v), \text{ soit : } B_1 = B_2. \blacklozenge$$

On notera A^ l'adjoint de A quand il existe.*

(2.3) Si A^* existe : $A^* \in L(F, E)$. En effet, $\forall u \in E, \forall v, v' \in F, \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$:

$$[Au|\lambda v + \lambda' v'] = (u|A^*(\lambda v + \lambda' v')) = [Au|\lambda v] + [Au|\lambda' v']$$

$$= \lambda[Au|v] + \lambda'[Au|v'] = \lambda(u|A^*v) + \lambda'(u|A^*v') = (u|\lambda A^*v + \lambda' A^*v').$$

D'où : $(u|A^*(\lambda v + \lambda' v') - \lambda A^*v - \lambda' A^*v') = 0$, et cela $\forall u, \forall v, v', \forall \lambda, \lambda'$, d'où le résultat en faisant $u := A^*(\lambda v + \lambda' v') - \lambda A^*v - \lambda' A^*v'$. \blacklozenge

(2.4) Si A^* existe : $(A^*)^*$ existe aussi, et $(A^*)^* = A$.

En effet, si $B = (A^*)^*$ existe on doit avoir : $\forall u \in E, \forall v \in F : (A^*v|u) = [v|Bu]$, mais : $(A^*v|u) = (u|A^*v) = [Au|v] = [v|Au]$ et donc $B = A$. \blacklozenge

(2.5) Si $A \in L(E, F)$ et $B \in L(E, F)$ sont tels que A^* et B^* existent, on a : $(A+B)^*$ existe et $(A+B)^* = A^* + B^*$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda \cdot A)^*$ existe et $(\lambda \cdot A)^* = \lambda \cdot A^*$. La démonstration est laissée au lecteur. \blacklozenge

(2.6) Si $A \in L(E, F)$ et $B \in L(F, G)$ possèdent un adjoint, il en est de même de $B \circ A$, et on a la formule : $(B \circ A)^* = A^* \circ B^*$. Démonstration laissée au lecteur. \blacklozenge

(2.7) $Id_E^* = Id_E$: c'est évident. \blacklozenge

(2.8) Soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire *bijective* : $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Si A et A^{-1} possèdent un adjoint : A^* est inversible, et on a : $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
En effet :

$$\begin{aligned} [A \circ A^{-1}(v)|v'] &= [Id_F v|v'] = (A^{-1}v|A^*v') = [v|(A^{-1})^* \circ A^*v'], \\ (A^{-1} \circ A(u)|u') &= (Id_E u|u') = [Au|(A^{-1})^*u'] = (u|A^* \circ (A^{-1})^*u'), \end{aligned}$$

pour tous $u, u' \in E$, pour tous $v, v' \in F$.

On a donc : $(A^{-1})^* \circ A^* = Id_F$ et $A^* \circ (A^{-1})^* = Id_E$, soit : $(A^*)^{-1}$ existe et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ [cf. Chap. X, Annexe]. ♦

Remarque :

A propos de la propriété (2.8), on rappelle que $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et A^{-1} existe, impliquent $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$, mais pas $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

Proposition 2.1.

|| Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ et si A^* existe : $A^* \in \mathcal{L}(F, E)$, et on a :

$$(2.9) \quad \|A^*\|_{\mathcal{L}(F, E)} = \|A\|_{\mathcal{L}(E, F)}.$$

Démonstration :

$\forall u \in E, \forall v \in F$: $[Au|v] = (u|A^*v)$ et donc, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$(u|A^*v) \leq \|Au\| \cdot \|v\| \leq \|A\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|$.
On fait $u = A^*v$: $\|A^*v\|^2 \leq \|A\| \cdot \|A^*v\| \cdot \|v\|$, d'où pour tout v tel que $A^*v \neq 0$, [i.e. tels que $v \notin \text{Ker}(A^*)$], mais les éléments de $\text{Ker}(A^*)$ nous importent peu pour calculer la norme de A^* ! : $\|A^*v\| \leq \|A\| \cdot \|v\|$, et donc A^* est continu de norme $\|A^*\|_{\mathcal{L}(F, E)} \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Si l'on change A en A^* dans la démonstration, on obtient : $\|A\| \leq \|A^*\|$, d'où l'égalité cherchée. ♦

Théorème 2.1 (IMPORTANT)

|| Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un *espace de Hilbert* réel, et soit $(F, [\cdot|\cdot])$ un espace préhilbertien réel.
|| **Toute application linéaire continue** $A \in \mathcal{L}(E, F)$ **possède un adjoint** A^* .

Démonstration :

Pour tout $v \in F$ fixé, considérons la fonction $E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall u \in E$: $\psi_v(u) := [Au|v]$; ψ_v est linéaire, c'est évident, et continue :

$$|\psi_v(u)| = |[Au|v]| \leq \|Au\| \cdot \|v\| \leq \|A\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|.$$

ψ_v est donc un élément de E' , et comme E est complet on peut appliquer le Th. de Riesz, Th. 2.2 ; il existe $a_v \in E$ tel que pour tout $u \in E$: $\psi_v(u) = (u|a_v)$.

Considérons ensuite, pour tout $v \in F$: $B(v) = a_v \in E$. Eu égard à l'unicité de a_v , on définit ainsi une application $B : F \rightarrow E, v \mapsto a_v$, et on a : $\forall u \in E, \forall v \in F$: $\psi_v(u) = [Au|v] = (u|Bv)$, d'où le résultat : $B = A^*$ existe. On sait, d'autre part, d'après (2.3) et la Proposition 2.1, qu'on a $B \in \mathcal{L}(F, E)$. ♦

Formulaire des adjoints

soient E, F, G des espaces de Hilbert réels ; $A, B \in \mathcal{L}(E, F)$, $\lambda \in \mathbb{R}$:
 A^*, B^* existent et sont dans $\mathcal{L}(F, E)$, et on a :

$$A^{**} = (A^*)^* = A ; (A + B)^* = A^* + B^* ; (\lambda A)^* = \lambda A^* ; (Id_E)^* = Id_E.$$

Si $C \in \mathcal{L}(F, G)$: $(C \circ A)^* = A^* \circ C^*$

Si A^{-1} existe et est continu, $(A^*)^{-1}$ existe et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Proposition 2.2. (SOUVENT UTILE)

|| Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ et $(F, [\cdot|\cdot])$ des *espaces de Hilbert* réels, et soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$.
 || On a les formules suivantes :

$$(2.10) \quad \text{Ker}(A) = [\text{Im}(A^*)]^\perp$$

$$(2.11) \quad \text{adh}[\text{Im}(A)] = [\text{Ker}(A^*)]^\perp$$

$$(2.12) \quad \text{Ker}(A^*) = [\text{Im}(A)]^\perp$$

$$(2.13) \quad \text{adh}[\text{Im}(A^*)] = [\text{Ker}(A)]^\perp$$

Démonstration :

(2.10) : $u \in \text{Ker}(A) \Rightarrow Au = 0 \Rightarrow \forall v \in F : [Au|v] = 0 \Rightarrow \forall v \in F : (u|A^*v) = 0$.
 D'où : $\forall w \in \text{Im}(A^*) : (u|w) = 0 \Rightarrow u \in [\text{Im}(A^*)]^\perp$. ♦

Réciproquement, si $u \in [\text{Im}(A^*)]^\perp$:
 $\forall v \in \text{Im}(A^*) : (u|v) = 0 \Rightarrow \forall w \in F : (u|A^*w) = 0 \Rightarrow \forall w \in F : [Au|w] = 0$
 D'où : $Au = 0$ et $u \in \text{Ker}(A)$. ♦

En utilisant le Corollaire 4.1 du Chap. XVII :

(2.10) $\Rightarrow [\text{Ker}(A)]^\perp = [\text{Im}(A^*)]^\perp = \text{adh}[\text{Im}(A^*)]$, soit (2.13). ♦

Appliquant (2.10) et (2.13) à $B = A^*$, on obtient (2.12) et (2.11). ♦

☞ **Exercice 2.1.** (très facile) Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ et $(F, [\cdot|\cdot])$ des espaces de Hilbert réels, et soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrez que $A^* = J_E^{-1} \circ {}^t A \circ J_F$, où ${}^t A$ est la transposée de A : voir l'Annexe du Chap. X et le dessin p. 404.

Démontrez que $\|{}^t A\| = \|A\|$.

Notez que si E, F sont simplement des e.v.n. on a toujours $\|{}^t A\| \leq \|A\|$; en fait il y a égalité, mais on ne dispose pas ici du résultat nécessaire pour le prouver (Th. de Hahn-Banach, cf. cours de Maîtrise).

Le résultat suivant est très souvent utile, notamment dans la théorie des équations aux dérivées partielles avec conditions aux limites (*problèmes aux limites*).

Faute des espaces de Hilbert adéquats (les espaces de Sobolev), nous ne pourrons pas donner d'application dans ce domaine.

Ce résultat peut être considéré comme un exercice, il serait rappelé dans un énoncé d'examen qui l'utiliserait.

Théorème 2.2 (Lemme de Lax-Milgram, 1954)

|| Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel, et soit $A \in \mathcal{L}(E, E')$, où E' est le dual topologique de E . On suppose qu'il existe α réel > 0 tel que :
 $\forall u \in E : \langle u, Au \rangle \geq \alpha \|u\|^2$
 [hypothèse dite de *coercivité*, ou d'*ellipticité*].
 || Conclusion : A est un *homéomorphisme* (linéaire) de E sur E' , et on a :
 $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(E', E)} \leq \frac{1}{\alpha}$.

Remarque : Le résultat est vrai à des changements de notations près si l'on remplace E' par E , et si l'on prend $A \in \mathcal{L}(E)$, $(Au|u) \geq \alpha \|u\|^2$.

Démonstration :

A est injectif car : $Au = 0 \Rightarrow 0 = \langle u, Au \rangle \geq \alpha \|u\|^2 \Rightarrow \|u\| = 0 \Rightarrow u = 0$. ♦

$\text{Im}(A)$ est partout dense dans E' , car d'après la Prop. 2.2 on a : $\text{adh}[\text{Im}(A)] = E'$ équivaut à $\text{Ker}(A^*) = \{0\}$.

Supposons que $A^*\varphi = 0$, et écrivons que $\varphi = Jv$ (Th. de Riesz) ; on a :

$$\alpha \|v\|^2 \leq \langle v, Av \rangle = (Av|Jv)' = (Av|\varphi)' = (v|A^*\varphi) = 0 \Rightarrow v = 0.$$

D'où : $\varphi = Jv = 0$. ♦

Démontrons maintenant que $\text{Im}(A)$ est complet dans E' : $\text{Im}(A)$ sera donc fermé dans E' , et avec le résultat ci-dessus on aura : $\text{Im}(A) = \text{adh}[\text{Im}(A)] = E'$, i.e. A surjective.

Soit $\varphi \in A(E)$, posons $u = J^{-1}\varphi$:

$\alpha \cdot \|u\|^2 = \alpha \cdot \|A^{-1}(\varphi)\|^2 \leq \langle u, Au \rangle = \langle A^{-1}\varphi, \varphi \rangle \leq \|\varphi\|' \cdot \|A^{-1}(\varphi)\|$, d'où si $\varphi \neq 0$: $\|A^{-1}(\varphi)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\varphi\|'$, valide si $\varphi = 0$.

On en conclut que $A^{-1} : A(E) \rightarrow E$ est continu sur $A(E)$.

Par conséquent $A \in \mathcal{I}_{\text{som}}(E, A(E))$ et d'après le Corollaire de la Prop. 2.3 du Chap. XI, $A(E)$ est complet comme E .

Finalement A est une bijection linéaire continue de E sur E' .

L'inégalité $\|A^{-1}(\varphi)\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\varphi\|'$, valide pour $\varphi \in \text{Im}(A) = E'$, montre que A^{-1} est continu, et donc A est un homéomorphisme linéaire de E sur E' . De plus : $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(E', E)} \leq \frac{1}{\alpha}$. ♦

☞ **Exercice 2.2.** (facile) Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ et $(F, [\cdot|\cdot])$ des espaces de Hilbert réels et $A \in \mathcal{L}(E, F)$ une application *surjective*. Soit $w \in F$ fixé ; on pose :

$$C = \{u \in E \mid A(u) = w\}.$$

Vérifiez que C est un convexe fermé non vide. On admet (c'est vrai, avec un Th. de Maîtrise) que $(A \circ A^*)^{-1}$ existe et est dans $\mathcal{L}(F)$, et on pose : $D = A^* \circ (A \circ A^*)^{-1}$. On a : $D \in \mathcal{L}(F, E)$ et $A \circ D = \text{Id}_F$; on dit que D est l'*inverse à droite orthogonal* de A .

Démontrez que pour tout $u \in E$: $P(u) = u - D(Au - w)$ est la projection de u sur C .

Déterminez $P_{\text{Ker}(A)}(u)$ et $d(u, \text{Ker}(A))$.

☞ **Exercice 2.3.** Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ et $(F, [\cdot|\cdot])$ des espaces de Hilbert réels et soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$ une application *injective* et d'*image fermée*. On admet (Th. de Maîtrise) qu'il existe $\gamma > 0$ tel que $\forall u \in E : \|A(u)\| \geq \gamma \|u\|$.

Démontrez que $(A^* \circ A)^{-1}$ existe dans $\mathcal{L}(E)$.

On pose : $G = (A^* \circ A)^{-1} \circ A^*$. Vérifiez que $G \in \mathcal{L}(F, E)$ et $G \circ A = \text{Id}_E$; on dit que G est l'*inverse à gauche orthogonal* de A .

Démontrez que pour tout $v \in F$, $G(v)$ est l'unique élément de E qui rend *minimum* sur E la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto f(u) = \|v - A(u)\|$.

Fin de la partie cours du Chapitre XVIII

CORRIGÉ DES EXERCICES
Exercice 1.1.

$\forall u, v \in E : [K(u \pm v)](u \pm v) = \|u \pm v\|^2$, donne :

$$\|u \pm v\|^2 = [Ku]u \pm [Kv]v \pm [Kv]u + [Ku]v = \|u\|^2 \pm [Ku]v \pm [Kv]u + \|v\|^2$$

soit : $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$, c'est-à-dire l'identité du parallélogramme [Chap. II, (5.9)].

On sait [cf. la Lecture du Chap. II] que *cette identité caractérise les e.v.n. préhilbertisables* [caractérisation de Jordan-von Neumann] : de manière précise, dans le cas d'un espace réel, $g(u, v) = \frac{1}{4}[\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2]$ est un produit scalaire sur E tel que $g(u, u) = \|u\|^2$ (la norme associée à g est la norme initiale). $g(\cdot, \cdot) = (\cdot | \cdot)$ est le produit scalaire cherché. ♦

Conclusion : si E est un e.v.n. réel admettant une application de dualité, i.e. une application $J : E \rightarrow E'$ telle que $\forall u \in E : \|Ju\|' = \|u\|$ et $\langle u, Ju \rangle = \|u\|^2$, ou bien J est linéaire et E est un espace préhilbertien, ou bien J est une application *non linéaire*.

Exercice 1.2.

D'après le Th. de Riesz, il existe $a \in E$ unique tel que $\forall u \in E : \varphi(u) = (u|a)$. Ensuite :
 $f(u) = \lambda\|u\|^2 + (u|a) + \alpha = \lambda\|u + \frac{1}{2\lambda}a\|^2 - \frac{1}{4\lambda}\|a\|^2 + \alpha$, d'où :
 $\inf_{u \in C} f(u) = \lambda \inf_{u \in C} \|u - (\frac{-1}{2\lambda})a\|^2 - \frac{1}{4\lambda}\|a\|^2 + \alpha = \lambda \cdot [d(\frac{-1}{2\lambda}a, C)]^2 - \frac{1}{4\lambda}\|a\|^2 + \alpha$.

Par conséquent, $\inf_{u \in C} f(u) = \min_{u \in C} f(u)$ est effectivement atteinte en un point unique de C qui est : $c = P_C(\frac{-1}{2\lambda}a)$ où P_C désigne la projection, ou meilleure approximation, sur le convexe complet C [Chap. XVII]. ♦

Exercice 1.3.

$$g(u) = \frac{1}{2}[d(u, C)]^2 = \frac{1}{2}\|u - P_C(u)\|^2. \text{ Donc :}$$

$$g(u + h) = \frac{1}{2} \inf_{w \in C} \|u + h - w\|^2 \leq \frac{1}{2} \|u + h - P_C(u)\|^2 \text{ [en faisant } w = P_C(u)\text{]} \\ \leq \frac{1}{2} \|u - P_C(u)\|^2 + (u - P_C(u)|h) + \frac{1}{2} \|h\|^2$$

D'où : $g(u + h) - g(u) \leq (u - P_C(u)|h) + \frac{1}{2} \|h\|^2$, c'est-à-dire :

$$g(u + h) - g(u) - \langle h, J(u - P_C(u)) \rangle \leq \|h\| \left(\frac{1}{2} \|h\| \right). \quad \blacklozenge$$

Pour l'autre inégalité : $\forall w \in C$:

$$\frac{1}{2} \|u + h - w\|^2 - \frac{1}{2} \|u - P_C(u)\|^2 = \frac{1}{2} \|u + h - w\|^2 + \frac{1}{2} \|u - P_C(u)\|^2 - \|u - P_C(u)\|^2.$$

Mais $A := \frac{1}{2} \|u + h - w\|^2 + \frac{1}{2} \|u - P_C(u)\|^2 \geq \|u + h - w\| \cdot \|u - P_C(u)\|$ [car $\alpha\beta \leq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$], pour tous réels α, β .

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$A \geq (u + h - w|u - P_C(u)) = (u + h|u - P_C(u)) - (w|u - P_C(u))$$

Utilisons la caractérisation des projections :

$$\forall w \in C : (u - P_C(u)|w - P_C(u)) \leq 0 \implies (w|u - P_C(u)) \leq (P_C(u)|u - P_C(u)).$$

$$\text{Et donc : } A \geq (u + h|u - P_C(u)) - (P_C(u)|u - P_C(u))$$

On a donc, en se basant sur le fait qu'il y a de bonnes chances pour que l'on ait :

$$Dg(u) = J(u - P_C(u)), \forall u \in C :$$

$$\frac{1}{2} \|u + h - w\|^2 - \frac{1}{2} \|u - P_C(u)\|^2 - (u - P_C(u)|h)$$

$$\geq (u + h|u - P_C(u)) - (P_C(u)|u - P_C(u)) - \|u - P_C(u)\|^2 - (u - P_C(u)|h)$$

$$\geq (u + h - P_C(u) - (u - P_C(u)) - h|u - P_C(u)) = (0|u - P_C(u)) = 0, \text{ d'où :}$$

$$\frac{1}{2} \inf_{w \in C} \|u + h - w\|^2 - \frac{1}{2} \|u - P_C(u)\|^2 - (u - P_C(u)|h) \geq 0, \text{ soit :}$$

$$g(u + h) - g(u) - \langle h, J(u - P_C(u)) \rangle \geq 0. \quad \blacklozenge$$

Les deux inégalités obtenues nous permettent de conclure que g est différentiable en tout point $u \in E$ et que $Dg(u) = J(u - P_C(u))$, soit $Dg = J \circ (Id_E - P_C)$. ♦

Enfin, d'après le résultat ci-dessus et 4) des propriétés de l'application de dualité, posons : $p(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}[d(u, C)]^2$: $Dp(u) = J(u) - J(u - P_C(u)) = J(P_C(u))$, soit aussi : $P_C(u) = J^{-1}(Dp(u))$. ♦

Exercice 1.4.

$\varphi(f) = \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt$ est bien définie sur $L^2(-1, +1)$ car on a : $f \in L^2(-1, +1) \implies f \in L^1(-1, +1) \implies f \in L^1(-1, 0)$ et $f \in L^1(0, +1)$. $\varphi \in E^*$ résulte de la linéarité de l'intégrale.

Quant à la continuité :

$$\begin{aligned} |\varphi(f)| &\leq \left| \int_{-1}^0 f(t) dt \right| + \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_{-1}^0 |f(t)| dt + \int_0^1 |f(t)| dt \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(t)| dt \leq \left(\int_{-1}^1 |f(t)| dt \right)^{1/2} \left(\int_{-1}^1 dt \right)^{1/2} = \sqrt{2} \cdot \|f\|_{L^2(-1, +1)}. \end{aligned}$$

Donc φ est continue, de norme $\|\varphi\|' \leq \sqrt{2}$.

D'autre part $\|\varphi\|' \geq \varphi(f)$ pour tout $f \in L^2$, $\|f\|_{L^2} \leq 1$. Il suffit de considérer la fonction g valant $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ sur $]0, 1[$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sur $]-1, 0[$: $\|g\|_{L^2} = 1$ et $\varphi(g) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, et on a donc : $\|\varphi\|' = \sqrt{2}$. ♦

On cherche $h = J^{-1}(\varphi)$ qui existe, unique, d'après le Th. de Riesz.

Ecrivons que $\varphi(f) = (f|h)$ pour tout $f \in L^2(-1, +1)$:

$$\varphi(f) = \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t) \cdot h(t) dt + \int_0^1 f(t) \cdot h(t) dt = (f|h).$$

Il est clair que la fonction h valant $+1$ sur $]-1, 0[$ et -1 sur $]0, +1[$ convient, et comme il n'y en a qu'une, c'est la fonction cherchée. Plus exactement, la classe de h dans $L^2(-1, +1)$ est le vecteur cherché. Autrement dit, $J^{-1}(\varphi)$ est l'élément de $L^2(-1, +1)$ dont un représentant quelconque vaut $+1$ p.p. sur $(-1, 0)$ et -1 p.p. sur $(0, 1)$. ♦

Notons, en vue de l'Exercice 1.5, qu'il n'y a pas de représentant continu dans $J^{-1}(\varphi)$.

Remarquons qu'on a bien : $\|\varphi\|' = \sqrt{2} = \left(\int_{-1}^1 (h(t))^2 dt \right)^{1/2} = \|h\|_{L^2(-1, +1)}$.

$F = \text{Ker}(\varphi)$ est un hyperplan fermé de E (φ continue). Th. 4.2 Chap. XVII : F^\perp est de dimension 1 ; il suffit donc d'avoir un élément non nul de F^\perp pour les avoir tous (ils seront proportionnels).

On sait que : $\varphi(f) = (f|h)$ pour tout $f \in E$ et, donc : $\forall g \in F : (g|h) = \varphi(g) = 0$.

Donc $h = J^{-1}(\varphi) \neq 0$ appartient à F^\perp [ce qu'on sait bien si l'on connaît la démonstration du Th. de Riesz !].

On a donc pour tout $f \in E$: $f = g + \lambda \cdot h$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $g \in F$. Soit [Th. 4.2, Chap. XVII] : $f = P_F(f) + P_{F^\perp}(f)$.

$f - \lambda \cdot h = g \implies \varphi(f - \lambda \cdot h) = 0 = \varphi(f) - \lambda \cdot \varphi(h)$ et on a :

$$\varphi(h) = (h|h) = \|h\|^2 = \|\varphi\|'^2 = 2, \text{ d'où : } \lambda = \frac{1}{2}\varphi(f).$$

Soit enfin : $P_F(f) = f - \frac{1}{2}\varphi(f) \cdot h$, et : $P_{F^\perp}(f) = \frac{1}{2}\varphi(f) \cdot h$.

Calculons ainsi la projection de la fonction $j(t) = t$.

$$P_F(j)(t) = j(t) - \frac{1}{2}\varphi(j) \cdot h(t) = t - \frac{1}{2} \left[\int_{-1}^0 t dt - \int_0^1 t dt \right] \cdot h(t) = t + \frac{1}{2}h(t).$$

Soit $P_F(j) = t + \frac{1}{2}$ pour $t \in (-1, 0)$ et $t - \frac{1}{2}$ pour $t \in (0, 1)$. Dessinez un représentant de $P_F(j)$. Il n'y a pas de représentant continu dans la classe $P_F(j)$. ♦

Plus généralement, si $f \in C \setminus F$, comme on a : $P_F(f) = f - \frac{1}{2}\varphi(f) \cdot h$, si l'on avait $P_F(f) \in C$, on aurait : $P_F(f) - f \in C = -\frac{1}{2}\varphi(f) \cdot h$ où $h \notin C$, ce qui serait absurde, puisque $\varphi(f) \neq 0$. ♦

Exercice 1.5.

Il suffit bien sûr de démontrer que $C_2([0, 1], \mathbb{R})$ n'est pas complet (pour simplifier un peu les notations) ; on connaît d'ailleurs déjà ce résultat (cf. voir Chap. XI).

On considère la suite de fonctions $f_n(t) = \min\{n \cdot t^{-1/4}\}$ [Dessinez le graphe des f_n]. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$, on a :

$$\begin{aligned} \|f_m - f_n\|^2 &= \int_0^{1/m^4} (m-n)^2 dt + \int_{1/m^4}^{1/n^4} (t^{-1/4} - n)^2 dt + \int_{1/n^4}^1 (t^{-1/4} - t^{-1/4})^2 dt \\ &= (m-n)^2 \times \frac{1}{m^4} + \int_{1/m^4}^{1/n^4} (t^{-1/2} - 2nt^{-1/4} + n^2) dt \\ &< \frac{(m-n)^2}{m^4} + \int_{1/m^4}^{1/n^4} (t^{-1/2} + n^2) dt = \frac{(m-n)^2}{m^4} + \left[2\sqrt{t} + n^2 t\right]_{1/m^4}^{1/n^4} \\ &\leq -\frac{1}{m^2} + \frac{3}{n^2} - \frac{2n}{m^3} < \frac{3}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

La suite $(f_n)_n$ est donc une suite de Cauchy de fonctions de $E = C_2([0, 1], \mathbb{R})$.

Posons $f(t) = t^{-1/4} : f \notin C([0, 1], \mathbb{R})$, mais $f \in L^2(0, 1)$, et on a :

$$\|f - f_n\|_{L^2(0,1)}^2 = \int_0^{1/n^4} (t^{-1/4} - n)^2 dt < \int_0^{1/n^4} (t^{-1/2} + n^2) dt = \frac{3}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Donc $(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ dans $L^2(0, 1)$. Si $(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$ dans E , on aurait (f_n) tend vers f et g dans $L^2(0, 1)$ avec $f \neq g$ puisque $f \notin C$ et $g \in C$. C'est absurde et $C_2([0, 1], \mathbb{R})$ n'est par conséquent pas complet. ♦

φ est continue, la démonstration étant la même que dans l'Exercice 1.4, et on a : $\|\varphi\|' \leq \sqrt{2}$. Mais ici φ n'atteint pas sa norme sur les $f \in C([-1, +1], \mathbb{R})$ tels que $\|f\|_2 \leq 1$ [nous ne le prouverons pas, faites-le si vous voulez] : la fonction g de l'Exercice 1.4 ne convient pas puisque discontinue en 0 ; mais il suffit de prendre $g_n = g$ sur $[-1, -\frac{1}{n}]$ et sur $[\frac{1}{n}, 1]$, g_n linéaire entre $-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$: on a $\varphi(g_n) \geq \sqrt{2} - \varepsilon_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (\varepsilon_n) = 0$, et donc $\|\varphi\|' = \sqrt{2}$. ♦

On voit bien que $h = J^{-1}(\varphi)$ ne peut pas exister dans $C([-1, +1], \mathbb{R})$ en se reportant à l'Ex. 1.4 : h devrait être discontinue en 0. Encore faut-il le démontrer.

Il faudrait avoir $h \in C([-1, +1], \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall f \in C([-1, +1], \mathbb{R}) : \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = \int_{-1}^0 f(t).h(t) dt + \int_0^1 f(t).h(t) dt,$$

$$\text{soit : } \int_{-1}^0 [1 - h(t)].f(t) dt = \int_0^1 [1 + h(t)].f(t) dt.$$

Faisons *successivement* : $f(t) = 1 - h(t)$ pour $t \in [-1, -\frac{1}{n}]$, $f(t) = 0$ pour $t \in [0, 1]$ et f linéaire entre $-\frac{1}{n}$ et 0 puis : $f(t) = 0$ pour $t \in [-1, 0]$, $f(t) = 1 + h(t)$ pour $t \in [\frac{1}{n}, 1]$ et f linéaire entre 0 et $\frac{1}{n}$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-1/n} [1 - h(t)]^2 dt + \int_{-1/n}^0 [1 - h(t)].\alpha_n(t) dt &= 0, \text{ et} \\ \int_0^{1/n} [1 + h(t)].\beta_n(t) dt + \int_{1/n}^1 [1 + f(t)]^2 dt &= 0, \end{aligned}$$

où α_n et β_n sont les fonctions linéaires envisagées. On peut faire tendre n vers l'infini, et il vient :

$$\int_{-1}^0 [1 - h(t)]^2 dt = 0 \Rightarrow h(t) = 1 \text{ sur } [-1, 0] \text{ et } \int_0^1 [1 + h(t)]^2 dt = 0 \Rightarrow h(t) = -1 \text{ sur } [0, 1] :$$

contradiction puisque $h(0)$ prend deux valeurs distinctes en 0.

Conclusion : J n'est pas surjective, ce qui prouve à nouveau que $C_2([-1, +1], \mathbb{R})$ n'est pas complet. ♦

Si $j(t) := t$ admettait une projection sur $F : j - P_F(j) \neq 0 (j \notin F)$ serait dans F^\perp .

Posons $k := j - P_F(j)$ et considérons la forme linéaire $\psi : f \in E \mapsto \psi(f) := (f|k)$. $\psi \neq 0$ car $\psi(k) = \|k\|^2 \neq 0$ et $\psi(f) = 0$ pour tout $f \in F$. Donc ψ est une équation de l'hyperplan F , et par conséquent ψ et φ sont proportionnelles [cf. Chap.X] :

$\exists \mu \neq 0, \mu \in \mathbb{R}$, tel que : $\psi = \mu \cdot \varphi$. Mais alors pour tout $f \in E$: $\varphi(f) = (f | \frac{k}{\mu})$ et $J^{-1}(\varphi)$ existerait, et on a démontré qu'il n'en était rien.

Contradiction : $P_F(j)$ n'existe pas.

En fait, la démonstration prouve que $F^\perp = \{0\}$. ♦

Donc si $[\text{Ker}(\varphi)]^{\perp\perp} = \text{adh}(\text{Ker}(\varphi))$ était vrai, on aurait :

$\{0\}^\perp = E = \text{adh}[\text{Ker}(\varphi)] = \text{Ker}(\varphi)$, soit : $\varphi = 0$, ce qui est absurde. ♦

Remarque : C'est un bon exercice que de prouver directement que :

$$g \in F \text{ et } \forall f \in F, \int_{-1}^1 [t - g(t)] \cdot f(t) dt = 0 \text{ est impossible.}$$

Exercice 2.1.

On veut démontrer que $A^* = J_E^{-1} \circ {}^t A \circ J_F$, soit :

$\forall u \in E, \forall v \in F$: $[Au|v] = (u | J_E^{-1} \circ {}^t A \circ J_F(v))$. Mais ce dernier terme est égal à $\langle u, {}^t A \circ J_F(v) \rangle_{E, E'} = \langle Au, J_F(v) \rangle_{F, F'} = [Au|v]$ [voir les formules (1.2)]. ♦

${}^t A = J_E \circ A^* \circ J_F^{-1}$: il est clair que ${}^t A : F' \rightarrow E'$ est linéaire, et $\|{}^t A\| = \|A^*\|$, car J_E et J_F^{-1} sont des isométries, d'où, par (2.9) : $\|{}^t A\| = \|A\|$. ♦

Exercice 2.2.

Si $(A \circ A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(F)$, on a $D = A^* \circ (A \circ A^*)^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

$A \circ D = (A \circ A^*) \circ (A \circ A^*)^{-1} = Id_F$. ♦

$C \neq \emptyset$ puisque A est surjectif. C est convexe fermé comme image inverse du convexe fermé $\{w\}$.

Précisons sa nature. Soit $\bar{u} \in C \iff A\bar{u} = w$;

$\forall u \in C : Au = A\bar{u} = w \implies A(u - \bar{u}) = 0 \implies u - \bar{u} \in \text{Ker}(A) \implies u \in \bar{u} + \text{Ker}(A)$.

Réciproquement, si $v \in \bar{u} + \text{Ker}(A), v = \bar{u} + x$ où $x \in \text{Ker}(A)$, d'où :

$Av = A\bar{u} + Ax = w + 0 = w \implies v \in C$.

Donc $C = \bar{u} + \text{Ker}(A)$ est le translaté par \bar{u} du sous-espace vectoriel $\text{Ker}(A)$, c'est une variété affine. ♦

Pour $u \in E$, considérons le point $P(u) := u - D(A(u) - w)$:

$A(Pu) = Au - A \circ D(Au - w) = Au - Id_F(Au - w) = Au - Au + w = w$ et donc $Pu \in C$.

Démontrons que : $\forall v \in C : (u - Pu|v - Pu) \leq 0$ [cf. Chap. XVII (3.4.1)]. En effet, $\forall v \in C$:

$(u - Pu|v - Pu) = (u - u + A^* \circ (A \circ A^*)^{-1}(Au - w)|v - u + A^* \circ (A \circ A^*)^{-1}(Au - w))$

$= ((A \circ A^*)^{-1}(Au - w)|Av - Au + A \circ A^* \circ (A \circ A^*)^{-1}(Au - w))$ [car $A^{**} = A$]

$= [(A \circ A^*)^{-1}(Au - w)|w - Au + Au - w] = 0$

[pourquoi = 0 au lieu simplement de ≤ 0 ? Parce que C est affine, cf. Th. 4.2 Chap. XVIII].

On a donc bien : $Pu = P_C(u)$ est la projection de u sur C :

$$P_C(u) = u - A^* \circ (A \circ A^*)^{-1}(Au - w).$$

Par conséquent : $d(u, C) = \|u - P_C(u)\| = \|A^* \circ (A \circ A^*)^{-1}(Au - w)\|$. ♦

En particulier, faisant $w = 0$, on obtient : $P_{\text{Ker}(A)}(u) = u - A^* \circ (A \circ A^*)^{-1} \circ A(u)$ et $d(u, \text{Ker}(A)) = \|A^* \circ (A \circ A^*)^{-1} \circ A(u)\|$.

On a aussi : $P_{\text{Ker}(A)^\perp}(u) = u - P_{\text{Ker}(A)}(u) = A^* \circ (A \circ A^*)^{-1} \circ A(u)$.

Ecrivez $d(u, \text{Ker}(A)^\perp)$. ♦

Notez que P_C est une application affine, elle est linéaire ssi $w = 0$.

Exercice 2.3.

Si $A \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective et d'image fermée, le Th. de Banach-Schauder (cours de Maîtrise) prouve qu'il existe $\gamma > 0$ tel que : $\forall u \in E : \|Au\| \geq \gamma \|u\|$ (cela exprime que $A^{-1} : \text{Im}(A) \rightarrow E$ est continue).

On en déduit que $(u | A^* \circ A(u)) = [Au|Au] = \|Au\|^2 \geq \gamma^2 \|u\|^2$, i.e. que $A^* \circ A$ est coercive : on déduit du Th. de Lax-Milgram [Th. 2.2] que $A^* \circ A$ est un homéomorphisme linéaire de E sur E , en particulier que $(A^* \circ A)^{-1}$ existe et est dans $\mathcal{L}(E)$. Par conséquent $G = (A^* \circ A)^{-1} \circ A^*$ est bien défini et appartient à $\mathcal{L}(F, E)$. ♦

$G \circ A = (A^* \circ A)^{-1} \circ A^* \circ A = Id_E$, d'où le nom d'inverse à gauche de A . ♦

Pour tout $v \in F$ fixé, considérons $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(u) = \|v - Au\|$.

$$\inf_{u \in E} \|v - Au\| = \inf_{w \in \text{Im}(A)} \|v - w\| = d(v, \text{Im}(A)).$$

Considérons le point $y = A(Gv) = A \circ (A^* \circ A)^{-1} \circ A^*(v) \in \text{Im}(A)$. Nous allons prouver que y est la projection de v sur $\text{Im}(A)$ [elle existe et est unique : Chap. XVIII].

$\forall w = Ax \in \text{Im}(A)$:

$$\begin{aligned} [v - A(Gv) | w - A(Gv)] &= [v - A(Gv) | Ax - A(Gv)] \\ &= (A^*v - A^* \circ A \circ G(v) | x - Gv) \\ &= (A^*v - A^* \circ A \circ (A^* \circ A)^{-1} \circ A^*(v) | x - Gv) \\ &= (A^*v - A^*v | x - Gv) = 0. \end{aligned}$$

D'où : $A(Gv) = A \circ G(v) = P_{\text{Im}(A)}(v)$ rend *minimum* f sur E :

$$\inf_{u \in E} \|v - Au\| = d(v, \text{Im}(A)) = \|v - A \circ G(v)\|.$$

On en déduit $P_{\text{Im}(A)^\perp}$ et $d(v, \text{Im}(A)^\perp)$ (écrivez cela). ♦

La propriété démontrée est à la base de la *méthode des moindres carrés* utilisée en particulier en statistiques.

PROBLÈME 1**Noyaux reproduisants de Aronszajn – Bergman**

Soit $A \neq \emptyset$ un ensemble, et soit $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel de toutes les fonctions $A \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert réel, où E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$. On note $\| \cdot \|$ la norme de E .

On dit que $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ admet un noyau reproduisant (N.R.) s'il existe une fonction $K : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

- (i) $\forall a \in A$: la fonction $K(a, \cdot) : A \rightarrow \mathbb{R}, b \mapsto [K(a, \cdot)](b) := K(a, b)$ appartient à E ,
 (ii) $\forall u \in E, \forall a \in A : u(a) = \langle u | K(a, \cdot) \rangle$.

On suppose que E possède un N.R. K .

1) Démontrez que :

- $\forall a \in A : K(a, a) \geq 0$,
- $\forall a, b \in A : K(a, b) = K(b, a)$,
- $\forall a, b \in A : |K(a, b)| \leq \|K(a, \cdot)\| \cdot \|K(b, \cdot)\|$,
- $\forall u \in E, \forall a \in A : |u(a)| \leq \sqrt{K(a, a)} \cdot \|u\|$.

On se donne un entier $n \geq 1$ et $a_1, \dots, a_n \in A$. Démontrez que l'application $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} K(a_i, a_j) \cdot \xi_i \cdot \eta_j$ [où $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ et $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$] est bilinéaire, symétrique, positive.

2) Soit (u_n) une suite d'éléments de E , et soit $u \in E$. On suppose que :

$$(*) \quad \forall v \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n | v \rangle = \langle u | v \rangle.$$

Démontrez que : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(a)) = u(a)$ pour tout $a \in A$.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$. Démontrez que sur toute partie $B \neq \emptyset$ de A telle que $\sup_{b \in B} K(b, b) < \infty$ on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sup_{b \in B} |u_n(b) - u(b)|] = 0$.

3) On suppose (dans cette question et la suivante seulement) que A est un espace métrique (A, d) . On suppose que l'application $g : a \in A \mapsto K(a, \cdot) \in E$ est continue, que la condition (*) est vérifiée, et que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| < \infty$. Démontrez que pour toute partie compacte $C \neq \emptyset$ de A on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} [\sup_{b \in C} |u_n(b) - u(b)|] = 0$.

4) On suppose que A est un espace métrique (A, d) et que tous les éléments de E sont continus sur A . Démontrez que l'ensemble des $K(a, \cdot)$ où $a \in B, B$ partout dense dans A , est une famille totale dans E . En déduire que si A est séparable, E l'est aussi.

5) Soient $a_1, \dots, a_p \in A$ et soient $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$, donnés.

On suppose que $\det(K(a_i, a_j)) \neq 0$ ($1 \leq i, j \leq p$). Soit ξ_1, \dots, ξ_n la solution unique du système linéaire $p \times p$:

$$\sum_{k=1}^p K(a_i, a_k) \cdot \xi_k = \beta_i, \text{ où } 1 \leq i \leq p.$$

Soit $U := \{u \in E / \forall i \in \{1, \dots, p\} : u(a_i) = \beta_i\}$, et soit $v := \sum_{k=1}^p \xi_k \cdot K(a_k, \cdot)$.

Démontrez que : $v \in U$ et que $\|v\| = \inf\{\|u\| / u \in U\}$.

Cas particulier : soit $a \in A$ tel que $K(a, a) \neq 0$. Soit $V := \{u \in E / u(a) = 1\}$, et soit $w := \frac{1}{K(a, a)} \cdot K(a, \cdot)$. Démontrez que $\|w\| = \inf\{\|u\| / u \in V\}$.

On ne suppose plus que E admette nécessairement un N.R.

6) Démontrez que si E admet un N.R. celui-ci est *unique*. Démontrez que E admet un N.R. si et seulement si :

$\forall a \in A$: la forme linéaire $\delta_a : u \in E \mapsto u(a)$ est continue sur E .

Démontrez que si E admet un N.R. celui-ci est donné par : $K(a, b) = \delta_a(J^{-1}(\delta_b))$, où J est l'isométrie linéaire de F Riesz.

7) On suppose que $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ admet un N.R. K . Démontrez que si F est un sous-espace vectoriel fermé de E muni du produit scalaire induit, $(F, \langle \cdot | \cdot \rangle|_F)$ admet un N.R. noté H .

Démontrez que pour tout $u \in E$ la fonction $A \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto \langle u | H(a, \cdot) \rangle$ est la projection de u sur F .

Soit $G := F^\perp$, et soit L son N.R. Démontrez que $K = H + L$.

8) On suppose que E admet un N.R. K et est séparable. Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de E . Démontrez que pour tous $a, b \in A$ on a, la série étant convergente :

$$K(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(a) \cdot e_n(b).$$

CORRIGÉ DU PROBLÈME 1

1) • $\forall a \in A : K(a, \cdot) : A \rightarrow \mathbb{R}, b \mapsto K(a, b)$, appartient à E , par (i), et on a :

$$\begin{aligned} [K(a, \cdot)](a) &= K(a, a) \text{ d'une part,} \\ &= \langle K(a, \cdot) | K(a, \cdot) \rangle \text{ d'autre part, d'après (ii),} \\ &= \|K(a, \cdot)\|^2 \text{ par définition de la norme associée à un produit scalaire.} \end{aligned}$$

Donc : $K(a, a) \geq 0$. ♦

• $\forall a, b \in A : K(b, a) = [K(b, \cdot)](a) \stackrel{(ii)}{=} \langle K(b, \cdot) | K(a, \cdot) \rangle = \langle K(a, \cdot) | K(b, \cdot) \rangle$ (symétrie du produit scalaire) $\stackrel{(ii)}{=} [K(a, \cdot)](b) = K(a, b)$. ♦

• $\forall a, b \in A : K(a, b) = [K(a, \cdot)](b) \stackrel{(ii)}{=} \langle K(a, \cdot) | K(b, \cdot) \rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|K(a, b)| \leq \|K(a, \cdot)\| \cdot \|K(b, \cdot)\|$. ♦

• $\forall u \in E, \forall a \in A : u(a) \stackrel{(ii)}{=} \langle u | K(a, \cdot) \rangle$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|u(a)| \leq \|u\| \cdot \|K(a, \cdot)\|$, et d'après la première égalité montrée : $\|K(a, \cdot)\| = \sqrt{K(a, a)}$.

D'où : $|u(a)| \leq \sqrt{K(a, a)} \cdot \|u\|$. ♦

L'application $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq n} K(a_i, a_j) \cdot \xi_i \cdot \eta_j$, où $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$

et $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, est clairement bilinéaire. D'après le second résultat ci-dessus, on a $K(a_i, a_j) = K(a_j, a_i)$ et donc f est symétrique.

$$f(x, x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} K(a_i, a_j) \cdot \xi_i \cdot \xi_j = \sum_{1 \leq i, j \leq n} [K(a_i, \cdot)](a_j) \cdot \xi_i \cdot \xi_j$$

$$\stackrel{(ii)}{=} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \langle K(a_i, \cdot) | K(a_j, \cdot) \rangle \cdot \xi_i \cdot \xi_j = \|\xi_1 \cdot K(a_1, \cdot) + \dots + \xi_n \cdot K(a_n, \cdot)\|^2 \geq 0 \text{ (on a}$$

utilisé la symétrie du produit scalaire). ♦

2) • Soient donc (u_n) et u tels que $(\langle u_n | v \rangle) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle u | v \rangle$ pour tout $v \in E$.

$\forall a \in A : K(a, \cdot) \in E$ par (i), et donc : $(\langle u_n | K(a, \cdot) \rangle) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle u | K(a, \cdot) \rangle$, et d'après (ii) :

$$(u_n(a)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(a). \quad \blacklozenge$$

• On suppose ici que $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$ dans E . On a $u_n - u \in E$, et en appliquant la quatrième

propriété de 1) il vient : $|(u_n - u)(a)| = |u_n(a) - u(a)| \leq \sqrt{K(a, a)} \cdot \|u_n - u\|$.

Donc, pour toute partie $B \neq \emptyset$ de A telle que $k := \sup_{b \in B} K(b, b) < \infty$:

$$|u_n(a) - u(a)| \leq k \cdot \|u_n - u\| \implies \sup_{a \in A} |u_n(a) - u(a)| \leq k \cdot \|u_n - u\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \blacklozenge$$

3) On suppose ici que A est un espace métrique, que $g : A \rightarrow E, a \mapsto K(a, \cdot)$ est continue, que $(\langle u_n | v \rangle) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle u | v \rangle$, pour tout $v \in E$, et que $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\| < \infty$.

En fait cette dernière condition est superflue, d'après un théorème démontré en Maîtrise.

Soit $M' := \max\{M, \|u\|\}$. Soit $C \neq \emptyset$ un compact de A . Soit $\varepsilon > 0$.

L'image de C par g continue est compacte (Chap. XIV, th. 2.1), donc précompacte. Il existe donc $c_1, \dots, c_p \in C$ tels que :

$$\forall c \in C, \exists i, 1 \leq i \leq p : \|f(c) - f(c_i)\| = \|K(c, \cdot) - K(c_i, \cdot)\| \leq \frac{\varepsilon}{4M'}.$$

D'après 2), première question, on a : $(u_n(c_i)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u(c_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Il existe donc $N_0 := \max\{N_1, \dots, N_p\}$ tel que :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_0 \implies |u_n(c_i) - u(c_i)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc : $\forall c \in C, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_0 \implies$

$$\begin{aligned} |u_n(c) - u(c)| &\leq |u_n(c) + u_n(c_i) - u_n(c_i) - u(c_i)| + |u_n(c_i) - u(c_i)| \\ &\leq |\langle u_n | K(c, \cdot) \rangle + \langle u_n | K(c_i, \cdot) \rangle - \langle u | K(c_i, \cdot) \rangle - \langle u | K(c, \cdot) \rangle| + |u_n(c_i) - u(c_i)| \\ &\leq |\langle u_n - u | K(c, \cdot) - K(c_i, \cdot) \rangle| + |u_n(c_i) - u(c_i)| \\ &\leq_{(C-S)} \|K(c, \cdot) - K(c_i, \cdot)\| \cdot \|u_n - u\| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4M'} (\|u_n\| + \|u\|) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{4M'} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit : $\sup_{c \in C} |u_n(c) - u(c)| \leq \varepsilon$. ♦

4) Soit $M := \{K(a, \cdot) / a \in B\} \subset E$, où $\text{adh}(B) = E$. On sait que M est totale (i.e. $\text{adh}([M]) = E$, où $[M]$ est l'espace vectoriel engendré par M) dans E de Hilbert si et seulement si : $\{u \in E \text{ vérifie } \langle u | K(a, \cdot) \rangle = 0 \text{ pour tout } a \in B\}$ implique $u = 0$ (Chap. XVII, Corol. 4.1). Or : $\langle u | K(a, \cdot) \rangle = 0 \stackrel{(ii)}{=} u(a)$ pour tout $u \in B$ implique $u(b) = 0$ pour tout $b \in A$ puisque les $u \in E$ sont continus sur A et puisque $\text{adh}(B) = A$, soit $u = 0$. ♦

Si $\{a_1, \dots, a_n, \dots\}$ est une suite partout dense dans A , $\{K(a_n, \cdot) / n \in \mathbb{N}^*\}$ est une famille dénombrable totale dans E , et E est séparable (cf. Chap IV, Prop. 1.1). ♦

5) Le p -uple (ξ_1, \dots, ξ_p) existe et est unique puisque, d'après la condition $\det(K(a_i, a_j)) \neq 0$, le système linéaire $p \times p$ considéré est de Cramer.

On a : $v \in U$; en effet : $v(a_i) = \sum_{k=1}^p \xi_k \cdot [K(a_k, \cdot)](a_i) = \sum_{k=1}^p \xi_k \cdot K(a_k, a_i) = \beta_i$ ($1 \leq i \leq p$) par définition de ξ_k .

Posons $U_0 := \{u \in E / \forall i \in \{1, \dots, p\} : u(a_i) = 0\}$; il est clair que U_0 est un sous-espace vectoriel de E . On a : $U = v + U_0$; en effet :

si $u \in U : u = v + (u - v)$ et $(u - v)(a_i) = u(a_i) - v(a_i) = \beta_i - \beta_i = 0$ ($1 \leq i \leq p$), et donc $u \in v + U_0$; si $u \in v + U_0 : u = v + w$ où $w \in U_0$, d'où : $u(a_i) = v(a_i) + w(a_i) = 0 + \beta_i = \beta_i$ ($1 \leq i \leq p$) et $u \in U$.

Donc U est une *variété linéaire*, i.e. un translaté de sous-espace vectoriel ; en particulier U est un ensemble convexe.

Soit (u_n) une suite de points de U convergente vers $w \in E$.

Pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, d'après 2) seconde question : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n(a_i)) = w(a_i)$ et donc $w(a_i) = \beta_i$. Par conséquent U est fermé dans E .

Puisque E est un espace de Hilbert, on a existence d'une projection sur U , pour tout $u \in E$. Si l'on prouve que $v \in U$ est la projection de 0 (l'origine de E) sur U , on aura le résultat cherché puisqu'alors $\|0 - v\| = \|v\| \leq \|0 - w\| = \|w\|$ pour tout $w \in U$.

On utilise la caractérisation de l'angle obtus (Chap. XVII, th. 3.1), soit à prouver que : $\langle 0 - v | w - v \rangle \leq 0$ pour tout $w \in U$, ce qui équivaut à : $\forall w \in U : \langle v | w \rangle \geq \|v\|^2$.

Mais, $\forall w \in U : \langle v | w \rangle = \sum_{k=1}^p \xi_k \cdot \langle K(a_k, \cdot) | w \rangle \stackrel{(ii)}{=} \sum_{k=1}^p \xi_k \cdot w(a_k) = \sum_{k=1}^p \xi_k \cdot \beta_k$, et :

$$\|v\|^2 = \langle v | v \rangle = \sum_{k=1}^p \xi_k \cdot \langle K(a_k, \cdot) | v \rangle = \sum_{k=1}^p \xi_k \cdot v(a_k) = \sum_{k=1}^p \xi_k \cdot \beta_k,$$

d'où : $\langle v | w \rangle = \|v\|^2$, C.Q.F.D.

Remarque : on trouve une égalité et non une simple inégalité parce que U est un translaté d'espace vectoriel (cf. Chap. XVII, (4.1)).

Autre remarque : si l'on prouve simplement que $v \in U$ et que $\|v\|^2 = \langle v | w \rangle$ pour tout $w \in U$, on a gagné, car alors $\|w\|^2 \leq_{(C-S)} \|v\| \cdot \|w\|$, d'où $v = 0$ ou $\|v\| \leq \|w\|$. Mais cette démonstration serait assez « parachutée » et on ne saurait pas pourquoi $\|v\|$ est *minimum*. ♦

Cas où $n = 1$. L'unique équation s'écrit (pour $\beta_1 := 1$) : $K(a, a) \cdot \xi = 1$ où $K(a, a) \neq 0$, et $v = \xi \cdot K(a, \cdot) = \frac{1}{K(a, a)} \cdot K(a, \cdot) = w$. ♦

6) • Supposons que E admet deux N.R. K_1 et K_2 .

$\forall u \in E, \forall a \in A : K_1(a, \cdot) \in E$ et $K_2(a, \cdot) \in E$ par (i), et :

$$\langle u | K_1(a, \cdot) - K_2(a, \cdot) \rangle = \langle u | K_1(a, \cdot) \rangle - \langle u | K_2(a, \cdot) \rangle \stackrel{(ii)}{=} u(a) - u(a) = 0$$

$$\implies \forall a \in A : K_1(a, \cdot) = K_2(a, \cdot) \text{ [car } \forall u \in E : \langle u | w \rangle = 0 \implies w = 0, \text{ faire } u := w].$$

Donc $\forall a, b \in A : [K_1(a, \cdot)](b) = [K_2(a, \cdot)](b) \implies K_1(a, b) = K_2(a, b)$ et $K_1 = K_2$. ♦

• Supposons que E admet un N.R. K . δ_a est évidemment une forme linéaire sur E (que E admette ou non un N.R. !).

$\forall a \in A, \forall u \in E : |\delta_a(u)| = |u(a)| \leq_1 \sqrt{K(a, a)} \cdot \|u\|$, et donc δ_a est continue, de norme $\|\delta_a\|' \leq \sqrt{K(a, a)}$. ♦

La norme de δ_a est d'ailleurs égale à $\sqrt{K(a, a)}$. Soit en effet la fonction v définie par

$$v(b) = \frac{K(a, b)}{\sqrt{K(a, a)}} ; v \in E \text{ par (i) et parce que } E \text{ est un espace vectoriel.}$$

$$\|v\|^2 = \langle v | v \rangle = \frac{\langle K(a, \cdot) | K(a, \cdot) \rangle}{K(a, a)} \stackrel{(i)}{=} \frac{\|K(a, \cdot)\|^2}{K(a, a)} = \frac{K(a, a)}{K(a, a)} = 1.$$

$$\|\delta_a\|' = \sup_{\|w\| \leq 1} |\delta_a(w)| \geq \delta_a(v) = v(a) = \frac{K(a, a)}{\sqrt{K(a, a)}} = \sqrt{K(a, a)}. \text{ ♦}$$

• Supposons, réciproquement, que $\delta_a \in E'$ pour tout $a \in A$. Soit $J : E \rightarrow E'$ l'isométrie linéaire surjective de F. Riesz (Chap. XVIII). Notons : $v_a := J^{-1}(\delta_a)$.

$$\forall u \in E : [J(v_a)](u) \stackrel{\text{définition de } J}{=} \langle v_a | u \rangle = \delta_a(u) = u(a).$$

Par comparaison avec (ii), on est amené à poser : $K(a, \cdot) = v_a = J^{-1}(\delta_a) \in E$ (soit (i)).

Vérifions (ii) : $u(a) = \delta_a(u) = [(J \circ J^{-1})(\delta_a)](u) \stackrel{\text{déf. } J}{=} \langle J^{-1}(\delta_a) | u \rangle = \langle u | K(a, \cdot) \rangle$. ♦

• On a :

$$\begin{aligned} K(a, b) &= [K(\cdot, b)](a) = \langle K(\cdot, b) | K(\cdot, a) \rangle = \langle J^{-1}(\delta_a) | J^{-1}(\delta_b) \rangle = \delta_a(J^{-1}(\delta_b)) \\ &= \delta_b(J^{-1}(\delta_a)). \text{ ♦} \end{aligned}$$

7) F fermé dans E complet est complet (Chap. XI), et donc F muni du produit scalaire induit est un espace de Hilbert. D'après 6), $(F, \langle \cdot | \cdot \rangle|_F)$ admet un N.R. que nous notons H . ♦

Par définition de H (propriété (i)) : $H(a, \cdot) \in F$ pour tout $a \in A$.

Soit $F^\perp := \{u \in E / \forall v \in F : \langle u | v \rangle = 0\}$ (l'orthogonal de F). On sait que : $E = F \oplus F^\perp$ (Chap. XVII, th. 4.2) et que $u \in E$ s'écrit : $u = P_F(u) + P_{F^\perp}(u)$.

Soit $u \in E$ fixé, et soit $t : A \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto \langle u | H(a, \cdot) \rangle$.

$$\begin{aligned} \forall a \in A : t(a) &= \langle u | H(a, \cdot) \rangle = \langle P_F(u) + P_{F^\perp}(u) | H(a, \cdot) \rangle \\ &= \langle P_F(u) | H(a, \cdot) \rangle + \langle P_{F^\perp}(u) | H(a, \cdot) \rangle \\ &= \langle P_F(u) | H(a, \cdot) \rangle + 0 \text{ (par définition de } F^\perp) \stackrel{(ii)}{=} P_F(u)(a). \end{aligned}$$

Donc $t = P_F(u)$ est la projection de u sur F . ♦

$\forall a \in A : (H + L)(a, \cdot) = H(a, \cdot) + L(a, \cdot) \in F + F^\perp = E$, soit (i) pour $H + L$ et E .

Soit $u \in E$. Soient $t : A \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto \langle u | H(a, \cdot) \rangle$ la projection de u sur F et $s : A \rightarrow \mathbb{R}, a \mapsto \langle u | L(a, \cdot) \rangle$ la projection de u sur $G = F^\perp$. Donc $t + s = P_F(u) + P_{F^\perp}(u) = u$:

$$\forall a \in A : (t + s)(a) = u(a) = t(a) + s(a) = \langle u | H(a, \cdot) \rangle + \langle u | L(a, \cdot) \rangle = \langle u | H(a, \cdot) + L(a, \cdot) \rangle$$

D'où : $u(a) = \langle u | (H + L)(a, \cdot) \rangle$, soit (ii) pour $H + L$ (et E). Donc $H + L$ est un N.R. pour E et comme il y a unicité (première question de 6)) du N.R., on a : $K = H + L$. ♦

8) Pour tous $u, v \in E$, on a [Chap. XIX, Th. 1.1, formule (1.8)] :

$$\langle u | v \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u | e_n \rangle \cdot \langle v | e_n \rangle \text{ (série convergente)}$$

On a donc : $\forall a, b \in A : K(a, b) \stackrel{(i)}{=} \langle K(a, \cdot) | K(b, \cdot) \rangle$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \langle K(a, \cdot) | e_n \rangle \cdot \langle K(b, \cdot) | e_n \rangle \stackrel{(ii)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} e_n(a) \cdot e_n(b). \text{ ♦}$$

La notion de noyau reproduisant est due à N. Aronszajn (1950), et un exemple célèbre de N.R. est dû à S. Bergman (1950). Le N.R. de ℓ^2 est trivial, et $L^2(0, 1)$ n'en admet pas. Le fait d'avoir pris des espaces réels ne simplifie pas la recherche d'un exemple simple et intéressant (d'habitude, on fait appel aux fonctions holomorphes, à la transformation de Fourier, . . .) : il faudrait faire appel, par exemple, aux espaces de Sobolev réels. Bref, on ne donnera pas ici d'exemple explicite. Le livre de L. Maté (cf. Bibliographie) est riche en exemples et en applications, mais ce livre est peu courant dans les bibliothèques françaises.

PROBLÈME 2

Un problème de contrôle optimal abstrait

On suppose connus quelques éléments de calcul différentiel.

Soient $(E, (\cdot|\cdot))$ et $(F, [\cdot|\cdot])$ des espaces de Hilbert réels. On pose $P = E \times F \times \mathbb{R}$. On se donne : $S \in \mathcal{L}(E)$, $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $\varphi \in E'$, $u_0 \in E$, $v_0 \in F$, $\alpha_0 \in \mathbb{R}$; on suppose qu'il existe $c > 0$ tel que : $\forall u \in E : (Su|u) \geq c\|u\|^2$.

On considère la fonction $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall u \in E : \Phi(u) = \|Su - u_0\|_E^2 + \|Au - v_0\|_F^2 + |\varphi(u) - \alpha_0|^2.$$

On pose enfin : $G = G(S, A, \varphi) = \{(Su, Au, \varphi(u)) \in P / u \in E\}$.

P étant muni de sa structure d'espace vectoriel habituelle, on pose pour $p = (u, v, \lambda)$, $p' = (u', v', \lambda')$ dans $P : \{p|p'\} := \{(u, v, \lambda)|(u', v', \lambda')\} = (u|u') + [v|v'] + \lambda.\lambda'$, et : $\|p\|^2 := \{p|p\}$. Il est clair que $(P, \{ \cdot | \cdot \})$ est un espace de Hilbert (vérifiez).

Démontrez que G est un sous-espace vectoriel fermé de P .

1) Démontrez qu'il existe $\hat{u} \in E$ unique tel que : $\forall u \in E : \Phi(\hat{u}) \leq \Phi(u)$.

Vérifiez qu'on a :

$$\forall u \in E : (S\hat{u} - u_0|S(\hat{u} - u)) + [A\hat{u} - v_0|A(\hat{u} - u)] + (\varphi(\hat{u}) - \alpha_0) \cdot \varphi(\hat{u} - u) = 0.$$

2) Calculez $D\Phi(u).h$ pour tous $u, h \in E$. Exprimez $D\Phi(u)$.

Démontrez que \hat{u} est un point critique de Φ .

3) Démontrez que s'il existe $\hat{a} \in E$ tel que $D\Phi(\hat{a}) = 0$, on a :

$$\Lambda \hat{a} = S^*u_0 + A^*v_0 + \varphi^*(\alpha_0), \text{ où } \Lambda \in \mathcal{L}(E).$$

Calculez $D^2\Phi(u).(h, k)$ pour $u, h, k \in E$; déduisez-en que si \hat{a} existe, il correspond à un *minimum* local. Démontrez que \hat{a} existe et est unique; déduisez-en \hat{u} .

CORRIGÉ DU PROBLÈME 2

G est un sous-espace vectoriel de P , en effet si $(Su, Au, \varphi(u))$ et $(Su', Au', \varphi(u'))$ sont dans G , et si $\mu \in \mathbb{R}$:

$$(Su, Au, \varphi(u)) + (Su', Au', \varphi(u')) = (S(u+u'), A(u+u'), \varphi(u+u')) \in G,$$

$$\mu(Su, Au, \varphi(u)) = (S(\mu u), A(\mu u), \varphi(\mu u)) \in G. \spadesuit$$

Si $(Su_n, Au_n, \varphi(u_n))$ converge vers (u, v, λ) dans P , on a : $\lim Su_n = u$, $\lim Au_n = v$, $\lim \varphi(u_n) = \lambda$. D'après le Th. de Lax-Milgram, S^{-1} existe et est dans $\mathcal{L}(E)$. On peut donc écrire (continuité) : $\lim S^{-1}(Su_n) = \lim(u_n) = S^{-1}u$, on pose $S^{-1}u = w$; $\lim Su_n = Sw$, $\lim Au_n = Aw$, $\lim \varphi(u_n) = \varphi(w)$, et donc : $(u, v, \lambda) = (Sw, Aw, \varphi(w)) \in P$. Donc G est un fermé de P . \spadesuit

1) On écrit que :

$$\Phi(u) = \| (Su - u_0, Au - v_0, \varphi(u) - \alpha_0) \|^2 = \| (Su, Au, \varphi(u)) - (u_0, v_0, \alpha_0) \|^2. \text{ Donc :}$$

$\forall u \in E : \Phi(\hat{u}) \leq \Phi(u)$, s'écrit :

$$\| (S\hat{u}, A\hat{u}, \varphi(\hat{u})) - (u_0, v_0, \alpha_0) \| \leq \| (Su, Au, \varphi(u)) - (u_0, v_0, \alpha_0) \|, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$(S\hat{u}, A\hat{u}, \varphi(\hat{u})) \in G \text{ vérifie : } d_P((u_0, v_0, \alpha_0), G) = \| (u_0, v_0, \alpha_0) - (S\hat{u}, A\hat{u}, \varphi(\hat{u})) \|$$

ou encore : $q := (S\hat{u}, A\hat{u}, \varphi(\hat{u})) \in G$ réalise la distance de $p_0 = (u_0, v_0, \alpha_0)$ à G . Comme G est un sous-espace vectoriel (en particulier un convexe !) fermé de l'espace de Hilbert P , on sait que q existe et est unique [cf. Chap. XVII]. \spadesuit

On sait (*loc.cit.*) que $q \in G$ vérifie $d(p_0, G) = \|q - p_0\| \iff q \in G$ et $\forall p \in G : \{p_0 - q|p - q\} = 0$ (caractérisation de la projection orthogonale sur un sous-espace fermé).

En écrivant $\{\cdot|\cdot\}$ en fonction de $(\cdot|\cdot)$ et de $[\cdot|\cdot]$, on trouve l'égalité demandée. ♦

2) Avec $D\|\cdot\|^2(u).h = 2(u|h)$ et la règle de composition des différentielles, on trouve :

$$D\Phi(u).h = 2(Su - u_0|Sh) + 2[Au - v_0|Ah] + 2(\varphi(u) - \alpha_0).\varphi(h). \blacklozenge$$

$$D\Phi(u).h = 2(S^*(Su - u_0)|h) + 2(A^*(Au - v_0)|h) + 2(\varphi^*(\varphi(u) - \alpha_0)|h) \\ = 2\langle h, J_E[S^*(Su - u_0)] \rangle + 2\langle h, J_E[A^*(Au - v_0)] \rangle + 2\langle h, J_E[\varphi^*(\varphi(u) - \alpha_0)] \rangle,$$

d'où :

$$D\Phi(u) = 2J_E[S^*(Su - u_0) + A^*(Au - v_0) + \varphi^*(\varphi(u) - \alpha_0)]. \blacklozenge$$

On a vu que \hat{u} vérifie : $\forall u \in E$:

$$(S\hat{u} - u_0|S(\hat{u} - u) + [A\hat{u} - v_0|A(\hat{u} - u)] + (\varphi(\hat{u}) - \alpha_0).\varphi(\hat{u} - u) = 0.$$

Donc en posant $h := \hat{u} - u$, on obtient (cf. $D\Phi(u).h$ calculé ci-dessus) : $D\Phi(\hat{u}).h = 0$ pour tout $h \in E$, soit : $D\Phi(\hat{u}) = 0$, et donc \hat{u} est un point critique de Φ . ♦

3) $D\Phi(u) = 0 \iff S^*(Su - u_0) + A^*(Au - v_0) + \varphi^*(\varphi(u) - \alpha_0) = 0$

$$\iff [S^* \circ S + A^* \circ A + \varphi^* \circ \varphi](u) = S^*u_0 + A^*v_0 + \varphi^*(\alpha_0).$$

Posant $\Lambda := S^* \circ S + A^* \circ A + \varphi^* \circ \varphi$, et $U_0 := S^*u_0 + A^*v_0 + \varphi^*(\alpha_0) \in E$, on a : $\hat{a} \in E$ vérifie $D\Phi(\hat{a}) = 0 \iff \hat{a}$ est solution de l'équation $\Lambda\hat{a} = U_0$, où $\Lambda \in \mathcal{L}(E)$ ($\Lambda \in \mathcal{L}(E)$ est évident) ; on a vu que \hat{u} est un point critique, et donc que c'est une solution de cette équation. ♦

$D^2\Phi(u).(h, k)$ est la différentielle au point u , en (h, k) , de la fonction $u \mapsto D\Phi(u).h$ avec h constant, d'où : $D^2\Phi(u).(h, k) = 2(Sk|Sh) + 2[Ak|Ah] + 2\varphi(k).\varphi(h)$.

Donc : $D^2\Phi(u).(h, h) = 2\|Sh\|_E^2 + 2\|Ah\|_F^2 + 2(\varphi(h))^2 \geq 2\|Sh\|^2 \geq 2c^2\|h\|^2$ {en effet : $c\|u\|^2 \leq (Su|u) \leq \|Su\|.\|u\| \implies \|Su\| \geq c\|u\|$, pour tout $u \in E$ }.

En particulier, pour \hat{a} point critique, $D^2\Phi(\hat{a}).h.h \geq 2c^2\|h\|^2$, d'où [cours de calcul différentiel] : \hat{a} correspond à un *minimum* local. \hat{u} correspond, lui, à un *minimum* global.

Démontrons que Λ est un opérateur *coercif* :

$$(\Lambda u|u) = (S^* \circ Su|u) + (A^* \circ Au|u) + (\varphi^* \circ \varphi(u)|u)$$

$$= \|Su\|_E^2 + \|Au\|_F^2 + (\varphi(u))^2 \geq \|Su\|^2 \geq 2c^2\|u\|^2.$$

On peut donc appliquer le lemme de Lax-Milgram : Λ^{-1} existe, dans $\mathcal{L}(E)$, et $\|\Lambda^{-1}\| \leq \frac{1}{2c^2}$.

Par conséquent : \hat{a} existe, est unique, et est donné par : $\hat{a} = \Lambda^{-1}(U_0)$. \hat{a} est donc égal à \hat{u} .

En définitive : \hat{u} dont on a prouvé l'existence dans 1) est égal à $\Lambda^{-1}(U_0)$, il correspond à un *minimum* global. ♦

Fin du Chapitre XVIII

CHAPITRE XIX

ESPACES DE HILBERT (réels) II BASES HILBERTIENNES

Introduction

Ce chapitre XIX traite des *bases orthonormales* (ou : *bases hilbertiennes*) dans un espace préhilbertien (réel). On généralise ainsi, mais il y a quelques précautions à prendre, les bases orthogonales des espaces euclidiens, dont vous connaissez l'intérêt.

L'essentiel du cours réside dans le résultat de convergence en moyenne quadratique (*i.e.* au sens de L^2) des séries trigonométriques.

Relire un cours de D.E.U.G. sur la convergence ponctuelle et sur la convergence uniforme de ces séries nous semble d'une impérieuse nécessité.

Nous avons choisi de traiter la question des bases orthonormales dans les espaces préhilbertiens éventuellement *non complets*, alors que beaucoup d'exposés se limitent aux espaces de Hilbert ; mais – en revanche – nous nous sommes limité sans regret ni remords aux espaces *séparables* (ce qui ne veut nullement dire que tous les espaces de Hilbert intéressants sont séparables !).

Le second point est justifié dans le cours. En ce qui concerne le premier point, nous avons voulu tenir compte du fait que les étudiants ne disposent que d'un nombre restreint d'espaces de Hilbert : ℓ^2 et L^2 en fait (plus des exemples académiques) ; et pour ce qui est de L^2 , nous ne nous faisons pas d'illusion sur la sympathie des étudiants à l'égard de la mesure de Lebesgue . . . (de plus, en T.E, la théorie de la mesure est en seconde année . . .).

Une cause d'erreur grave est à signaler : certains auteurs (peu nombreux) appellent base orthonormale toute famille orthonormale maximale (*cf.* cours), que l'espace soit complet ou non. C'est fâcheux, il faut faire attention.

Nous avons déjà dit que, pour des raisons de simplicité d'écriture, nous privilégions les espaces de Hilbert réels. Le présent chapitre s'étend sans aucune difficulté aux espaces préhilbertiens complexes.

Mais dans le chapitre précédent, il y a un problème : l'isométrie de Riesz est alors anti-linéaire et non linéaire ; on peut pallier cet "inconvéient" en considérant l'anti-dual (formes anti-linéaires continues) à la place du dual. Dans le chapitre XVII, les caractérisations des projections seraient plus compliquées, il faudrait ajouter des Ré (partie réelle) dans les inégalités qui – sinon – seraient dépourvues de sens (inégalités entre nombres complexes !).

☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 2.1.

☞ Exercices complémentaires : 1.5, 1.6, 2.2, 2.3.

Sept problèmes (les espaces de Hilbert se prêtent bien aux problèmes-devoirs . . . et aux problèmes d'examens . . .) sont proposés.

Le premier problème introduit une classe très vaste d'opérateurs linéaires continus qui est intéressante à considérer lorsqu'on cherche des exemples d'opérateurs possédant telle ou telle propriété.

Le second problème concerne les opérateurs de Hilbert-Schmidt qui constituent un idéal important de l'algèbre $\mathcal{L}(\ell^2)$. Un autre idéal important est celui des opérateurs « à trace » ou « nucléaires » : ils feront l'objet d'un autre problème, un jour . . .

Le troisième problème étudie les opérateurs dits «de décalage», des opérateurs importants dans la théorie des opérateurs.

Le quatrième problème est purement technique, et destiné à votre entraînement.

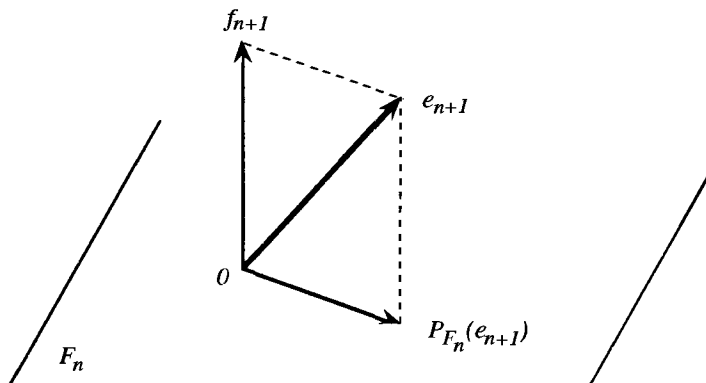
Le cinquième problème étudie un espace de Hilbert de suites, son dual, son isométrie de Riesz.

Le sixième problème est un joli contre-exemple dans les espaces non complets.

Ces six problèmes sont plutôt faciles.

Le septième et dernier problème décrit la base hilbertienne de Haar.

BON TRAVAIL !



$$F_n = [e_0, \dots, e_n] = [f_0, \dots, f_n]$$

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

$$f_{n+1} = e_{n+1} - P_{F_n}(e_{n+1})$$

CHAPITRE XIX

ESPACES DE HILBERT (réels) II

BASES HILBERTIENNES

1. BASE HILBERTIENNE (OU BASE ORTHONORMALE)

D'UN ESPACE PRÉHILBERTIEN (réel) SÉPARABLE

Définition 1.1.

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soit I un ensemble quelconque. Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite *orthogonale* [sous entendu : dans $(E, (\cdot|\cdot))$] si :

$$(1.1) \quad 1) \forall i \in I : e_i \neq 0 \quad \text{ET} \quad 2) \forall i \in I, \forall j \in I : i \neq j \implies (e_i|e_j) = 0.$$

La famille $(e_i)_{i \in I}$ est dite *orthonormale* [dans $(E, (\cdot|\cdot))$] si, de plus :

$$(1.2) \quad \forall i \in I : \|e_i\| = 1.$$

Commentaire :

Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale, la famille $(f_i)_{i \in I}$, avec $f_i = \frac{e_i}{\|e_i\|}$, est orthonormale.

☞ **Exercice 1.1.** (très facile) Démontrez que les vecteurs d'une famille orthogonale sont linéairement indépendants.

Exemples 1.1.

1) Soit $E = \ell_{\mathbb{R}}^2 = \ell^2$. $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ [1 à la n -ème place, 0 ailleurs], $n \in \mathbb{N}$ ou bien $n \in \mathbb{N}^*$, suivant l'ensemble d'indexation des suites de ℓ^2 . On sait déjà que la famille (qui est ici une suite) $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [resp. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$] est orthonormale.

2) Soit T un réel > 0 . On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}_{\#}^T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues, périodiques de période T . Il est intéressant de noter que $\mathcal{C}_{\#}^T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ s'identifie de façon naturelle à $\{f \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}) / f(0) = f(T)\}$. On peut aussi considérer l'espace de Lebesgue $F = L^2((0, T), \mathbb{R})$.

On munit ces espaces vectoriels du produit scalaire : $(f|g) = \int_0^T f(t) \cdot g(t) dt$ [vérifiez que c'est bien un produit scalaire] qui en fait des espaces préhilbertiens.

La famille (suite) de fonctions suivante est *orthogonale* (on a posé $\omega = \frac{2\pi}{T}$, quantité qu'on appelle *pulsation*) :

$$t \mapsto 1, t \mapsto \cos(\omega t), t \mapsto \sin(\omega t), t \mapsto \cos(2\omega t), t \mapsto \sin(2\omega t), \dots, \\ t \mapsto \cos(n\omega t), t \mapsto \sin(n\omega t), \dots$$

Cette suite *n'est pas orthonormale*, car :

$$\|1\|^2 = T, \quad \|\cos(n\omega t)\|^2 = \|\sin(n\omega t)\|^2 = \frac{T}{2}.$$

☞ **Exercice 1.2.** (très facile) Vérifiez ces résultats.

Définition 1.2.

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille *orthonormale* dans E . Pour tout $u \in E$, on appelle i -ème *coordonnée de u par rapport à $(e_i)_{i \in I}$* , ou i -ème *coefficient de Fourier de u par rapport à $(e_i)_{i \in I}$* , le nombre réel :

$$(1.3) \quad \boxed{\xi_i = \xi_i(u) = (u|e_i)}$$

☞ **Exercice 1.3.** (très facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel de dimension finie n (on dit plutôt un *espace euclidien* !), et soit (e_1, e_2, \dots, e_n) une base de E orthonormale. Établissez les formules suivantes :

$$\forall u = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot e_i \in E, \forall v = \sum_{i=1}^n \eta_i \cdot e_i \in E : \xi_i = (u|e_i), \eta_i = (v|e_i),$$

$$(u|v) = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \eta_i, \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

☞ **Exercice 1.4.** (facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthonormale de E . Soit $J \subset I$, J fini. Démontrez que :

$$\left\| u - \sum_{j \in J} \xi_j(u) \cdot e_j \right\| \leq \left\| u - \sum_{j \in J} \alpha_j \cdot e_j \right\|$$

quel que soit $u \in E$ et quels que soient les réels α_j , $j \in J$, où ξ_j est le j -ème coefficient de Fourier de u . Donnez une interprétation géométrique de ce résultat.

Nous allons maintenant démontrer que, sous des hypothèses convenables, on peut avoir dans le cadre des espaces préhilbertiens des formules similaires à celles – classiques – de l'Exercice 1.3.

Faute de temps et d'espace, nous ne définirons pas dans ce cours les sommes $\sum_{i \in I}$ pour un ensemble d'indexation I quelconque : cela existe pourtant, c'est la *théorie des familles sommables*. Nous nous contenterons ici de $I = \mathbb{N}$ (ou \mathbb{N}^*) et de la notion de *série* [cf. Chap. XII, §3]. Les démonstrations sont adaptées à la notion de famille sommable : il suffirait de remplacer les \sum_0^N ou \sum_1^N par $\sum_{i \in J}$, $J \subset I$, J fini.

Proposition 1.1. (IMPORTANTE)

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ [ou \mathbb{N}^*] une suite orthonormale dans E . Pour tout $u \in E$, la série dont le terme général est le carré du n -ième coefficient de Fourier est convergente [soit : $(\xi_n(u))_n \in \ell^2$], et on a l'*inégalité de Bessel* :

$$(1.4) \quad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n)^2 \leq \|u\|^2}$$

Remarque 1.1.

En particulier, on a : $\forall u \in E : \lim_{n \rightarrow \infty} (\xi_n(u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} ((u|e_n))_n = 0$. La suite des coefficients de Fourier converge (rapidement !) vers 0.

Démonstration : Pour tout entier positif N , on a :

$$0 \leq \left\| u - \sum_{n=0}^N \xi_n \cdot e_n \right\|^2 = \|u\|^2 - 2(u| \sum_{n=0}^N \xi_n \cdot e_n) + \left\| \sum_{n=0}^N \xi_n \cdot e_n \right\|^2$$

$$= \|u\|^2 - 2 \sum_{n=0}^N \xi_n \cdot (u|e_n) + \sum_{n=0}^N \xi_n^2 \cdot \|e_n\|^2 = \|u\|^2 - 2 \sum_{n=0}^N \xi_n^2 + \sum_{n=0}^N \xi_n^2$$

$$= \|u\|^2 - \sum_{n=0}^N \xi_n^2 \implies \sum_{n=0}^N \xi_n^2 \leq \|u\|^2.$$

Cette inégalité prouve que la série à termes réels ≥ 0 est convergente (sommes partielles majorées par une constante par rapport à N), et le prolongement des inégalités à la limite quand $N \rightarrow \infty$ donne : $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2 \leq \|u\|^2$. ♦

En général, l'inégalité de Bessel n'est pas une égalité, mais le cas où il y a égalité n'est pas non plus exceptionnel : il faut pour cela que la suite $(e_n)_n$ soit suffisamment « étouffée », de manière précise que : $\text{adh}(\{e_n / n \in \mathbb{N}\}) = E$, ce qui signifie que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ doit être *totale* [cf. Chap. IV].

Mais on sait que l'existence d'une suite totale équivaut à : l'espace métrique $(E, (\cdot|\cdot))$ est *séparable* [Chap. IV, Prop. 1.1]. Donc, nous ne pourrions avoir de suite satisfaisant au Th. ci-dessous que si l'espace préhilbertien $(E, (\cdot|\cdot))$ est séparable.

Pour lever cette restriction, il faudrait acquérir la notion de famille sommable : peut-être que cela vous donnera envie de l'étudier ?

Il existe effectivement des espaces préhilbertiens et de Hilbert qui *ne sont pas* séparables : on peut, par exemple, construire un ℓ^2 constitué de familles indexées par \mathbb{R} , au lieu de suites indexées par \mathbb{N} (mais pour ce faire il faut la notion de famille sommable ...).

L'espace de Besicovitch fournit un exemple non académique.

Toutefois la restriction apportée ne sera pas très grave : les espaces préhilbertiens et de Hilbert de la pratique courante sont tous séparables (ce ne serait pas vrai pour les e.v.n ! Penser à $\ell^\infty, L^\infty \dots$).

Théorème 1.1. (FONDAMENTAL)

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite **orthonormale**. Les quatre assertions suivantes sont toutes *équivalentes* :

(1.5) La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **totale** dans E , soit : $\text{adh}(\{e_n / n \in \mathbb{N}\}) = E$,

(1.6) Pour tout $u \in E$, on a l'**égalité de Parseval** :

$$\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n)^2$$

(1.7) Pour tout $u \in E$, la **série de vecteurs** de terme général $\xi_n \cdot e_n = (u|e_n) \cdot e_n$ est **convergente**, et sa somme est u :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n) \cdot e_n$$

(série appelée **développement de u en série de Fourier**).

(1.8) Pour tous $u \in E, v \in E$, on a : la série de terme général $\xi_n(u) \cdot \xi_n(v) = (u|e_n) \cdot (v|e_n)$ est **convergente**, et sa somme est $(u|v)$:

$$(u|v) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(u) \cdot \xi_n(v) = \sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n) \cdot (v|e_n)$$

On est amené à poser une définition :

Définition 1.3.

Si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'une (i.e. toutes !) des propriétés (1.5), (1.6), (1.7), (1.8), on dit que $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **base hilbertienne**, ou une **base orthonormale** de $(E, (\cdot|\cdot))$.

Exemple 1.2. Les $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ constituent une base hilbertienne de l'espace de Hilbert $\ell^2 = \ell^2_{\mathbb{R}}$. On l'appelle la **base canonique** (ou : **naturelle**) de cet

espace. Les e_n constituent aussi une base hilbertienne du sous-espace *non complet* de $\ell^2 : \ell_0^2 = \{u = (\xi_n)_n \in \ell^2 / \exists N(u), \forall n : n \geq N \implies \xi_n = 0\}$.

Remarque 1.2. (IMPORTANTE ; source d'erreurs)

La série dans (1.7) *n'est pas* normalement convergente [cf. Chap. XII, §3] en général. Par exemple, dans $E = \ell^2 : u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$ définit bien un vecteur de E , mais la série de terme général $\frac{1}{n} \|e_n\| = \frac{1}{n}$ n'est pas convergente (série harmonique).

Remarque 1.3.

Si l'on a une suite $(e_n)_n$ orthogonale mais *non* orthonormale, on applique le Th. 1.1. après avoir « normalisé », i.e. considéré la suite $\frac{e_n}{\|e_n\|}$

Remarque 1.4.

Si $(e_n)_n$ *n'est pas* totale dans $(E, (\cdot|\cdot))$, considérons le sous-espace vectoriel fermé : $F = \text{adh}(\{(e_n / n \in \mathbb{N})\})$. Pour les éléments de F , on aura les égalités du Th. 1.1, puisque $(e_n)_n$ est totale dans F par définition, mais on ne les aura pas pour les éléments de $E \setminus F$.

☞ **Important** : Mais supposons que E est un espace de Hilbert (ou bien que F est complet).

Pour tout $u \in E$ on aura : $u = P_F(u) + (u - P_F(u))$, $u - P_F(u) \in F^\perp$ [Chap. XVII, Th.4.2]. D'où : $\xi_n(u) = (u|e_n) = (P_F(u)|e_n) + (u - P_F(u)|e_n) = (P_F(u)|e_n)$, puisque $(u - P_F(u)|e_n) = 0$. Par conséquent, pour tous $u, v \in E$ on aura les égalités :

$$(1.9) \quad \boxed{\begin{aligned} \|P_F(u)\|^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n)^2 ; P_F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n) \cdot e_n \\ (P_F(u)|P_F(v)) &= \sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n) \cdot (v|e_n) \end{aligned}}$$

Démonstration du Théorème 1.1. :

On va démontrer que (1.5) \implies (1.6) \implies (1.7) \implies (1.5) et que (1.6) \Leftrightarrow (1.8).

(1.8) \implies (1.6) : Il suffit de faire $v = u$ dans (1.8). ♦

(1.6) \implies (1.7) : Puisque $\sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n)^2 = \|u\|^2$, et d'après l'inégalité de Bessel (1.4), on

$$a : \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : N \geq N_0 \implies 0 \leq \|u\|^2 - \sum_{n=0}^N (u|e_n)^2 \leq \varepsilon^2.$$

A présent :

$$\begin{aligned} \|u - \sum_{n=0}^N (u|e_n) \cdot e_n\|^2 &= \|u\|^2 - 2(u | \sum_{n=0}^N (u|e_n) \cdot e_n) + \sum_{n=0}^N (u|e_n)^2 \|e_n\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2 \sum_{n=0}^N (u|e_n)^2 + \sum_{n=0}^N (u|e_n)^2 = \|u\|^2 - \sum_{n=0}^N (u|e_n)^2 \leq \varepsilon^2. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N} : N \geq N_0 \implies \|u - \sum_{n=0}^N (u|e_n) \cdot e_n\| \leq \varepsilon ;$$

c'est dire que $\sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n) \cdot e_n$ existe et a pour somme u . ♦

$$(1.7) \implies (1.5) : \forall u \in E : u = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^N (u|e_n) \cdot e_n \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} (u_N)_N,$$

où $u_N \in \{e_0, e_1, \dots, e_N\}$. C'est dire que la suite $(e_n)_n$ est totale. ♦

(1.5) \Rightarrow (1.6) : Soient $u \in E$ et $\varepsilon > 0$ arbitraires. Il existe, puisque $(e_n)_n$ est totale, $v = \sum_{n \in S} \lambda_n \cdot e_n$, où $S \subset \mathbb{N}$, S finie, λ_n réels, tel que : $\|u - v\| \leq \varepsilon$.

Soit $F = [\{e_n / n \in S\}]$ qui est de dimension finie, et donc complet.

On peut [Chap. XVII] envisager la projection $P_F(u)$ de u sur F :

$$\|u - P_F(u)\| \leq \|u - v\| \leq \varepsilon \text{ (car } v \in F\text{)}.$$

Le vecteur $u - P_F(u)$ est orthogonal à e_n pour tout $n \in S$: $\forall n \in S$:

$$(u - P_F(u)|e_n) = 0 \Rightarrow \forall n \in S : (P_F(u)|e_n) = (u|e_n) \Rightarrow P_F(u) = \sum_{n \in S} \xi_n(u) \cdot e_n$$

[cf. l'Exercice 1.4].

On a par conséquent : $0 \leq \|u - \sum_{n \in S} \xi_n(u) \cdot e_n\|^2 \leq \varepsilon^2$, et :

$$\|u - \sum_{n \in S} \xi_n(u) \cdot e_n\|^2 = \|u\|^2 - 2 \sum_{n \in S} \xi_n(u|e_n) + \sum_{n \in S} \xi_n^2 = \|u\|^2 - \sum_{n \in S} \xi_n^2.$$

Donc, d'après l'inégalité de Bessel (1.4) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2 \leq \|u\|^2 \leq \sum_{n \in S} \xi_n^2 + \varepsilon^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2 + \varepsilon^2. \text{ Cela étant vrai pour tout } \varepsilon > 0 :$$

$$\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2. \blacklozenge$$

(1.6) \Rightarrow (1.8) : Soient $u, v \in E$. Posons $\xi_n = (u|e_n)$ et $\eta_n = (v|e_n)$. Par Cauchy-Schwarz, $\forall N \in \mathbb{N}$: $(\sum_{n=0}^N |\xi_n \cdot \eta_n|)^2 \leq \sum_{n=0}^N \xi_n^2 \sum_{n=0}^N \eta_n^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n^2 \sum_{n=0}^{\infty} \eta_n^2 = \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$: $\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \cdot \eta_n$ est donc une série absolument convergente de réels, donc convergente.

Utilisons ensuite l'identité (de polarisation) [Chap. II, (5.9.2)] :

$$(u|v) = \frac{1}{4} [\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2] = \frac{1}{4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n + \eta_n)^2 - \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n - \eta_n)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n^2 + 2\xi_n \cdot \eta_n + \eta_n^2 - \xi_n^2 + 2\xi_n \cdot \eta_n - \eta_n^2) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \cdot \eta_n. \blacklozenge$$

Définition 1.4.

Une famille *orthonormale* $(e_i)_{i \in I}$ d'un espace préhilbertien réel $(E, (\cdot|\cdot))$ est dite *maximale* si :

$$(1.10) \quad [\forall i \in I : (u|e_i) = 0] \implies u = 0.$$

Grâce à la notion de maximalité, on a le complément au Théorème 1.1. suivant, complément très important car il fournit le critère le plus pratique ; malheureusement, il n'est valide que dans les espaces préhilbertiens complets, *i.e.* dans les *espaces de Hilbert*.

Théorème 1.2. (FONDAMENTAL)

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un *espace de Hilbert* réel. Les assertions équivalentes (1.5) à (1.8) du Théorème 1.1. sont équivalentes à :

la suite $(e_n)_n$ est maximale.

Démonstration : Si $(e_n)_n$ vérifie (1.7) du Th. 1.1., et si $(u|e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u = \sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n) \cdot e_n = 0$; donc la suite est maximale. \blacklozenge

Réciproquement, supposons que $(e_n)_n$ est maximale, et soit F l'espace vectoriel qu'engendrent les e_n , $n \in \mathbb{N}$. Si $\text{adh}(F) \neq E$, il existe [Chap. XVII, Th. 4.2] un $u \neq 0$, tel que $u \in [\text{adh}(F)]^\perp$: mais alors $(u|e_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc, par la maximalité, $u = 0$, contradiction ! Donc $\text{adh}(F) = E$ et la suite $(e_n)_n$ est totale, soit (1.5) du Th. 1.1. \blacklozenge

Remarque : Seule l'implication $[(e_n) \text{ maximale} \implies (e_n) \text{ totale}]$ utilise le fait que E est complet . . . Mais c'est justement le résultat intéressant.

☞ **Exercice 1.5.** (facile) Justifiez l'adjectif « maximale » en prouvant qu'une famille orthonormale $(e_i)_{i \in I}$ est maximale si et seulement si toute famille orthonormale contenant cette famille lui est égale.

☞ **Exercice 1.6.** Soit $E = \ell^2$, les suites étant indexées sur \mathbb{N}^* . Soit $(e_n)_{n \geq 1}$, sa base naturelle. On considère le vecteur $u = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots)$ et F le sous-espace vectoriel engendré par u et par $(e_n)_{n \geq 2}$. Démontrez que dans F la suite $(e_n)_{n \geq 2}$, est maximale, mais n'est pas une base hilbertienne de F .

Remarque 1.5. (IMPORTANTE)

Dans (1.7) du Th. 1.1, on a : $u = \sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n) \cdot e_n$.

Nous voudrions insister sur le fait que u ne peut pas s'écrire avec d'autres « coordonnées » dans la base hilbertienne $(e_n)_n$ que ses coefficients de Fourier ; cette unicité justifie davantage encore le terme de « base » utilisé. Supposons en effet que $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \cdot e_n$, et posons : $u_N = \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot e_n$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, p fixé, pour tout $N \geq p$, on a : $(u_N|e_p) = (\sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot e_n|e_p) = \sum_{n=0}^N \lambda_n \cdot (e_n|e_p) = \lambda_p$ et, donc :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (u_N|e_p) = \lambda_p = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} u_N | e_p \right) = (u|e_p). \text{ Soit : } \lambda_p = (u|e_p) \text{ pour tout } p \in \mathbb{N}.$$

☞ Il faut bien noter que les notions de *base algébrique* et de *base hilbertienne* sont complètement disjointes lorsque l'espace est de dimension infinie : déjà, la notion de « somme infinie » n'a aucun sens en algèbre . . .

Par exemple la base hilbertienne canonique $(e_n)_n$ de ℓ^2 n'est pas une base algébrique de ℓ^2 (c'est, par contre, une base algébrique du sous-espace ℓ_0^2).

On démontre d'autre part – en analyse fonctionnelle de Maîtrise – qu'un *espace de Banach* de dimension infinie ne peut pas admettre une base algébrique dénombrable.

2. EXISTENCE DE BASES HILBERTIENNES

Nous examinerons seulement le cas des espaces préhilbertiens *séparables*, ce qui ne présente que peu d'inconvénients du point de vue pratique.

C'est un cas très favorable, car on peut **construire** effectivement une base hilbertienne, grâce à la méthode simple développée ci-après.

Théorème 2.1. (FONDAMENTAL)

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soient $e_0, e_1, e_2, \dots, e_n, \dots$ des vecteurs de E **linéairement indépendants**, en nombre fini ou infini. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, soit F_n le sous-espace vectoriel engendré par e_0, e_1, \dots, e_n .

On pose : $f_0 = e_0$ et $f_{k+1} = e_{k+1} - P_{F_k}(e_{k+1})$ pour tout $k \geq 0$.

(2.1) La famille $(f_0, f_1, \dots, f_n, \dots)$ est orthogonale.

(2.2) (f_0, f_1, \dots, f_n) est une base algébrique orthogonale de F_n .

Démonstration :

$f_0 = e_0$ engendre F_0 . Supposons que (f_0, \dots, f_n) est une base orthogonale de F_n . $f_{n+1} = e_{n+1} - P_{F_n}(e_{n+1})$ est $\neq 0$ car $e_{n+1} \notin F_n$, et on sait [Chap. XVII, Th.4.2] que $f_{n+1} \in F_n^\perp$. En conséquence $(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})$ est une famille orthogonale dans F_{n+1}

(donc libre : voir Exercice 1.1), et $e_{n+1} = f_{n+1} + P_{F_n}(e_{n+1})$, où $P_{F_n}(e_{n+1}) \in F_n$: $(f_0, f_1, \dots, f_{n+1})$ est donc une base orthogonale de F_{n+1} . ♦

On dit que $(f_n)_n$ est déduite de $(e_n)_n$ par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Méthode pratique :

Supposons construits f_0, f_1, \dots, f_n . On écrit : $f_{n+1} = e_{n+1} + \sum_{j=0}^n \lambda_j \cdot f_j$.

Pour $i = 0, 1, \dots, n$, on doit avoir : $(f_{n+1}|f_i) = 0$, soit :

$$(e_{n+1}|f_i) + \sum_{j=0}^n \lambda_j \cdot (f_j|f_i) = 0 = (e_{n+1}|f_i) + \lambda_i \|f_i\|^2,$$

d'où l'on tire $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, et donc f_{n+1} . Et on recommence pour f_{n+2} ..

A titre d'exemple, orthogonalisez $t \mapsto 1, t \mapsto t, t \mapsto t^2, t \mapsto t^3, \dots$ dans l'espace préhilbertien $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ doté de $(f|g) = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) dt$. Vous arrêtez dès que vous êtes fatigué(e).

☞ **Exercice 2.1.** Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel, et soient u_1, u_2, \dots, u_n des vecteurs de E , n entier quelconque. On pose [*déterminant de Gram*] :

$$G(u_1, u_2, \dots, u_n) = \det[(u_i|u_j)] \text{ (avec : } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n).$$

1) Démontrez que $G(u_1, \dots, u_n) \geq 0$ et que $G(u_1, \dots, u_n) > 0$ si et seulement si les u_i sont linéairement indépendants.

2) On suppose que les u_i sont linéairement indépendants ; soit : $F = [(u_1, \dots, u_n)]$. Démontrez que la distance de $u \in E$ à F est :

$$d(u, F) = \sqrt{\frac{G(u, u_1, u_2, \dots, u_n)}{G(u_1, \dots, u_n)}}.$$

Théorème 2.2. (FONDAMENTAL)

|| Tout espace préhilbertien réel $(E, (\cdot|\cdot))$ **séparable** possède une base hilbertienne.
|| Celle-ci est finie si $\dim(E) < \infty$, dénombrable si $\dim(E) = \infty$.

Démonstration :

Il existe une famille *totale* et *libre* dans E [cf. Chap. IV et Chap. XII, Exercice 1.3], famille qui est une *suite* si $\dim(E) = \infty$ et un *n-uple* si $\dim(E) < \infty$.

On orthogonalise la famille grâce au Th. 2.1 : la famille orthogonale obtenue engendre le même sous-espace vectoriel que la famille initiale [d'après (2.2) du Th. 2.1]. Il suffit ensuite de « normaliser » en divisant les vecteurs de la famille orthogonale par leur norme. ♦

Le théorème suivant nous dit que, dans une certaine mesure, les espaces de Hilbert réels séparables ne sont finalement que des « copies » de \mathbb{R}^n euclidien s'ils sont de dimension finie, et de ℓ^2 s'ils sont de dimension infinie.

Il existe un résultat similaire pour les espaces de Hilbert non séparables, et aussi pour les espaces de Hilbert complexes.

Ce résultat ne signifie nullement que les espaces de Hilbert séparables autres que ℓ^2 sont sans intérêt ! La nature (suites de réels, fonctions, mesures, distributions, ...) des éléments d'un espace de Hilbert a également son importance !

Ce problème est à rapprocher de celui de la « réalisation » d'un complété, ou de celui de l'« identification » d'un espace de Hilbert à son dual, etc. [cf. Chap. XV, XVIII].

Théorème 2.3. (FONDAMENTAL)

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace préhilbertien réel *séparable*.

- Si $\dim(E) = n < \infty$: $(E, (\cdot|\cdot))$ est linéairement isométrique à \mathbb{R}^n euclidien.
- Si $\dim(E) = \infty$: $(E, (\cdot|\cdot))$ est linéairement isométrique à un sous-espace vectoriel partout dense de l'espace de Hilbert $\ell_{\mathbb{R}}^2$.

Si E est *complet* (i.e. est un espace de Hilbert) : $(E, (\cdot|\cdot))$ est linéairement isométrique à $\ell_{\mathbb{R}}^2$.

Démonstration : Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $(E, (\cdot|\cdot))$: elle existe d'après le Th. 2.2. Considérons l'application $f : E \rightarrow \ell^2$ qui à $u \in E$ fait correspondre la suite $(\xi_n(u))_{n \in \mathbb{N}}$, soit $((u|e_n))_{n \in \mathbb{N}}$, de ses coefficients de Fourier par rapport à la base hilbertienne choisie. Puisqu'on sait que $(\xi_n(u))_n \in \ell^2$, cette application est bien définie [f dépend du choix d'une base, ce n'est pas une application « naturelle » ou « canonique » comme le sont $J : E \rightarrow E'$ ou $\chi : E \rightarrow E''$ du Chap. XVIII].

f est évidemment *linéaire*, et on sait [Th. 1.1] que $\|u\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (u|e_n)^2$, soit : $\|f(u)\|_{\ell^2} = \|u\|$ pour tout $u \in E$. Donc f est une *isométrie linéaire*.

$f(e_n) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, et par conséquent $f(E)$ contient la base naturelle de ℓ^2 ; donc l'espace vectoriel $f(E)$ contient un sous-espace vectoriel partout dense dans ℓ^2 , il est par conséquent lui-même un sous-espace vectoriel partout dense de ℓ^2 .

Si $(E, (\cdot|\cdot))$ est complet : $f(E)$ isométrique à E l'est aussi, et donc $f(E)$ est fermé dans ℓ^2 . Donc, dans ce cas : $\text{adh}[f(E)] = f(E) = \ell^2$; f est donc surjective. ♦

Théorème 2.4. (TRÈS IMPORTANT)

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un *espace de Hilbert* réel *séparable*, et soit $(e_n)_n$ une *base hilbertienne* de E . Pour toute suite $(\xi_n)_n \in \ell_{\mathbb{R}}^2$, il existe $u \in E$ *unique* tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : (u|e_n) = \xi_n.$$

Autrement dit : *toute suite de ℓ^2 est la suite des coefficients de Fourier d'un vecteur u unique de E .*

Démonstration :

Evidente ; avec les notations de la démonstration du Th. 2.3 : $u = f^{-1}((\xi_n)_n)$. ♦

Commentaires :

Le Th. 2.4 constitue une réciproque partielle de (1.7) du Th 1.1.

Dans le cadre des séries de Fourier classiques, ce Th. porte le nom de Th. de Fisher-Riesz.

Remarque 2.1.

Le résultat est évidemment faux pour un espace non complet.

Prenons $E = \ell_0^2 = \{u = (\xi_n)_n \in \ell^2 / \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq N \implies \xi_n = 0\}$; la suite $(\frac{1}{n})_n$ appartient à ℓ^2 , mais il n'existe évidemment pas de $u \in \ell_0^2$ dont les coordonnées sont $\frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$!

☞ **Exercice 2.2.** (facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel séparable de dimension infinie. Démontrez qu'une base hilbertienne de E ne peut pas être une base algébrique. Cas où $(E, (\cdot|\cdot))$ est non complet ?

☞ **Exercice 2.3.** (facile) Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert séparable. En utilisant le Th. 2.2, donnez une nouvelle démonstration du Th. de F. Riesz [les Th. 1.1 et 1.2 du Chap. XVIII].

3. APPLICATIONS

3.1. Séries trigonométriques

Il s'agit ici de la théorie des séries de Fourier au sens classique, c'est-à-dire du développement d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique de période T par rapport à la suite orthogonale constituée par les lignes trigonométriques de période T (cf. l'Exemple 1.2 et l'Exercice 1.2) :

$$(3.1) \quad 1, \cos(\omega t), \sin(\omega t), \cos(2\omega t), \sin(2\omega t), \dots, \cos(n\omega t), \sin(n\omega t), \dots$$

Soit $E = C_{\#}^T(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues, périodiques de période T .

On peut identifier E à $\widehat{E} = \{f \in C([0, T], \mathbb{R}) / f(0) = f(T)\}$ qui est un hyperplan de $C([0, T], \mathbb{R}) : \widehat{E} = \text{Ker}(\delta_0 - \delta_T)$, où $\delta_t(f) = f(t)$.

Via cette identification, on peut munir E des normes habituelles de $C([0, T], \mathbb{R})$, par exemple $\|\cdot\|_{\infty}$ et $\|\cdot\|_2$ associée au produit scalaire $(f|g) = \int_0^T f(t).g(t) dt$.

$f \in E$ étant donnée, on sait [Th. de Weierstraß « trigonométrie », Chap. IV] que pour tout $\varepsilon > 0$ donné il existe $N \in \mathbb{N}$ et des réels $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N$ tels que :

$$(3.2) \quad \forall t \in \mathbb{R} : \left| f(t) - \alpha_0 - \sum_{k=1}^N [\alpha_k \cdot \cos(k\omega t) + \beta_k \cdot \sin(k\omega t)] \right| \leq \varepsilon.$$

Cela implique que le sous-espace vectoriel F engendré par la suite (3.1) dans E est partout dense dans E muni de la norme uniforme $\|f\|_{\infty} = \max_{0 \leq t \leq T} |f(t)|$.

On peut donc écrire : $\forall f \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists P \in F : \|f - P\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

Maintenant : $\forall f \in E : \|f\|_2^2 = \int_0^T [f(t)]^2 dt \leq T \cdot \|f\|_{\infty}^2 \implies \|f\|_2 \leq \sqrt{T} \|f\|_{\infty}$.

Donc : $\forall f \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists P \in F : \|f - P\|_2 \leq \sqrt{T} \|f - P\|_{\infty} \leq \sqrt{T} \cdot \varepsilon$.

Soit : F est partout dense dans E pour la norme $\|\cdot\|_2$, ce qui équivaut à : la suite (3.1) est totale dans l'espace préhilbertien E muni de la norme $\|\cdot\|_2$.

Finalement (Th. 1.1 et Définition 1.3) : la suite (3.1) *normalisée* est une suite *orthonormale et totale* de $(E, \|\cdot\|_2)$:

$$\left\| \begin{array}{l} (3.3) \quad \sqrt{\frac{1}{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega t), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega t), \dots, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(n\omega t), \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(n\omega t), \dots \\ \text{est une } \mathbf{base \textit{ hilbertienne}} \text{ de } E = C_{\#}^T(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \text{ muni du produit scalaire :} \\ (f|g) = \int_0^T f(t).g(t) dt, \text{ qui en fait un espace préhilbertien.} \end{array} \right.$$

Ecrivons les coefficients de Fourier de $f \in E$ par rapport à cette base :

$$\left\| \begin{array}{l} (3.4) \quad \alpha_0 = \alpha_0(f) = (f | \sqrt{\frac{1}{T}} \cdot) = \sqrt{\frac{1}{T}} \int_0^T f(t) dt ; \\ \alpha_n = \alpha_n(f) = (f | \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(n\omega \cdot)) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T f(t) \cdot \cos(n\omega t) dt \text{ pour } n \geq 1, \\ \text{et : } \beta_n = \beta_n(f) = (f | \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(n\omega \cdot)) = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T f(t) \cdot \sin(n\omega t) dt. \end{array} \right.$$

D'après le Th. 1.1, tout $f \in E$ s'écrit, la série étant convergente pour $\|\cdot\|_2$:

$$\left\| (3.5) \quad f = \sqrt{\frac{1}{T}} \alpha_0 \cdot + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(n\omega \cdot) + \beta_n \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(n\omega \cdot)] \right.$$

La formule de Parseval s'écrit : $\|f\|_2^2 = \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n^2 + \beta_n^2)$.

Remarque 3.1.

Les formules ci-dessus se présentent souvent sous un aspect un peu différent dans la littérature. Par exemple, en posant : $\alpha'_0 = \sqrt{T}\alpha_0$, $\alpha'_n = \sqrt{\frac{T}{2}}\alpha_n$, $\beta'_n = \sqrt{\frac{T}{2}}\beta_n$, on obtient :

$$\alpha'_0 = \int_0^T f(t) dt, \alpha'_n = \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \beta'_n = \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt, \text{ et :}$$

$$f = \frac{1}{T}\alpha'_0 + \frac{2}{T} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n \cos(n\omega \cdot) + \beta'_n \sin(n\omega \cdot) \right],$$

$$\|f\|_2^2 = \frac{1}{T}\alpha_0'^2 + \frac{2}{T} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n'^2 + \beta_n'^2).$$

On peut passer d'un système d'écriture à un autre en multipliant le produit scalaire $(f|g)$ ci-dessus par une constante > 0 .

Le problème du développement en série trigonométrique d'une fonction continue T -périodique se trouve ainsi réglé, du point de vue du produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ et de la norme $\|\cdot\|_2$.

Nous allons maintenant prouver que \widehat{E} est partout dense dans $C([0, T], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g) = \int_0^T f(t) \cdot g(t) dt$. Bien sûr, on n'a pas un résultat de ce type pour la norme uniforme (!) : cf. Chap. V.

Soit $f \in C([0, T], \mathbb{R})$. On considère f_n définie ($n \geq 1$) par : $f_n(t) := f(t)$ si $\frac{1}{n} \leq t \leq T$, et : $f_n(t) := n[f(\frac{1}{n}) - f(T)] \cdot t + f(T)$ si $0 \leq t \leq \frac{1}{n}$ [dessin !].

Clairement (on a tout fait pour ça), on a $f_n \in \widehat{E}$ pour tout n .

$\forall t \in [0, \frac{1}{n}] :$

$$|f(t) - f_n(t)| \leq |f(t)| + |f_n(t)| \leq |f(t)| + n \cdot [|f(\frac{1}{n})| + |f(T)|] \times \frac{1}{n} + |f(T)| \leq 4\|f\|_{\infty}$$

(majoration brutale, mais qui suffit).

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_2^2 &= \int_0^T (f(t) - f_n(t))^2 dt = \int_0^{1/n} (f(t) - f_n(t))^2 dt \\ &\leq 16 \cdot \|f\|_{\infty} \cdot \int_0^{1/n} dt = \frac{16}{n} \times \|f\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Enfinement, (3.3) est une base hilbertienne de $C_2([0, T], \mathbb{R})$.

On notera qu'il est facile de faire avec $f \in C([0, T], \mathbb{R})$ une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est T -périodique : on la reproduit telle qu'elle est sur $]0, T[$ sur les intervalles $]kT, (k+1)T[$, $k \in \mathbb{Z}$, les valeurs en kT étant arbitraires (les coefficients de Fourier, donnés par des intégrales, ne dépendent pas de la valeur de la fonction en 0 et T). Bien sûr, ce prolongement par périodicité ne peut être choisi continu que si $f(0) = f(T)$.

Complément : $C([0, T], \mathbb{R})$ est partout dense dans l'espace de Hilbert $L^2(0, T)$ (cours de calcul intégral), et donc (3.3) est une base hilbertienne de $L^2(0, T)$.

Remarque 3.2.

Considérons une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et T -périodique. La série de Fourier associée à $f : \sqrt{\frac{1}{T}}\alpha_0 + \sqrt{\frac{2}{T}} \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(n\omega \cdot) + \beta_n \sin(n\omega \cdot)]$ ne converge pas en général vers f pour les notions de convergence habituelles.

Non seulement elle ne converge pas uniformément, mais elle ne converge même pas ponctuellement en général !

On démontre d'ailleurs qu'il existe des fonctions continues dont la série de Fourier diverge en tout point d'un ensemble non dénombrable de \mathbb{R} (cet ensemble est toutefois de mesure nulle).

Par contre, pour la norme préhilbertienne $\| \cdot \|_2$, tout marche très bien, comme on vient de le voir. La question de savoir si cela sert à quelque chose se pose . . . La réponse mathématique est satisfaisante, il ne reste plus au mathématicien qu'à s'occuper des autres convergences qui marchent moins bien (*analyse harmonique*).

Pour le physicien, la réponse est tout à fait satisfaisante. Supposons en effet que f est une fonction du temps t et représente l'amplitude d'un phénomène vibratoire. $\|f\|_2$ est, à un coefficient près, l'énergie transportée. Donc, approcher f au sens de la norme $\| \cdot \|_2$, c'est simplement garder les termes de grande énergie et négliger ceux de petite énergie. Comme l'énergie est en général ce qu'on sait mesurer, l'approximation a une interprétation expérimentale intéressante.

Exemple 3.1. On considère la fonction définie par $f(0) = 0$, $f(t) = \frac{1}{2}(\pi - t)$ pour $0 < t < 2\pi$, qu'on prolonge sur \mathbb{R} en une fonction périodique de période 2π .

Déterminez la série de Fourier associée à f : on trouve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nt)$.

On démontre que $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(nt)$ (convergence *ponctuelle*) pour tout $t \in \mathbb{R}$ [voir un cours de D.E.U.G.]. Appliquant l'égalité de Parseval, vous trouverez la fameuse égalité : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

3.2. Polynômes orthogonaux

Soit I un intervalle fermé de \mathbb{R} . I pourra être borné ou non. On considère une fonction $\Pi : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue et > 0 sur $\text{int}(I)$, vérifiant la condition :

$$(3.6) \quad \forall n \in \mathbb{N} : \int_I |t|^n \cdot \Pi(t) dt < \infty.$$

La fonction Π est appelée un *poids sur I* .

Exemples classiques de poids :

(i) $I = [-1, +1]$, $\Pi(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, où α et β sont des réels > -1 ;

(ii) $I = \mathbb{R}$, $\Pi(t) = \exp(-t^2)$;

(iii) $I = [0, +\infty[$, $\Pi(t) = \exp(-t)$.

I et Π étant fixés, soit E l'ensemble des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur I et vérifiant :

$$(3.7) \quad \int_I (f(t))^2 \Pi(t) dt < \infty.$$

Il n'est pas difficile de vérifier (faites-le !) que E est un espace vectoriel réel et que :

$(f|g) = \int_I f(t) \cdot g(t) \cdot \Pi(t) dt$ est un produit scalaire sur E .

$(E, (\cdot|\cdot))$ est un espace préhilbertien réel *non complet* (son complété est $L^2_\mu(I, \mathbb{R})$, où μ est la mesure Πdt).

Pour tout I et tout Π vérifiant les propriétés imposées, E contient la suite de fonctions linéairement indépendantes suivantes : $t \mapsto 1$, $t \mapsto t$, $t \mapsto t^2$, $t \mapsto t^3$, . . . , $t \mapsto t^n$, . . .

On peut appliquer à cette suite le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, et on obtient des polynômes $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ appelés *polynômes orthogonaux associés au poids Π sur l'intervalle I* .

Exemples classiques de polynômes orthogonaux :

Pour les poids donnés précédemment :

(i) les polynômes s'appellent les polynômes de *Jacobi* ; dans les cas particuliers $\alpha = \beta = 0$ et $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, on parle plutôt des polynômes de *Legendre* et de *Chebyshev* (ou : Tchébychef) respectivement ;

(ii) polynômes de *Hermite* ;

(iii) polynômes de *Laguerre*.

Tous ces polynômes interviennent de manière naturelle, soit dans des questions mathématiques (approximation), soit dans des questions de physique.

Par exemple l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique conduit aux polynômes de Hermite, et pour l'atome d'hydrogène aux polynômes de Legendre.

Les sujets d'examen de D.E.U.G. utilisent beaucoup les polynômes orthogonaux . . .

Proposition 3.1.

Si I est borné, la suite $\left(\frac{P_n}{\|P_n\|}\right)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de E .

Démonstration :

Toute fonction continue sur I est limite uniforme de polynômes [Th. de Weierstraß, Chap. IV]. Donc la suite $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ est totale dans $C_\infty(I, \mathbb{R})$, et donc dans E muni de $\|\cdot\|_\infty$.

Mais $\|f\|_E^2 = \int_I (f(t))^2 \Pi(t) dt \leq \|f\|_\infty^2 \left(\int_I \Pi(t) dt\right)$, et donc la suite est totale dans $(E, (\cdot|\cdot))$. On utilise ensuite le procédé de Gram-Schmidt. ♦

Le résultat n'est plus exact en général lorsque I n'est pas borné (cela dépend de Π), mais on démontre qu'il reste vrai pour les polynômes classiques (ii) et (iii).

Nous n'étudierons pas davantage ici les polynômes orthogonaux, malgré leur grand intérêt.

Fin de la partie cours du Chapitre XIX**CORRIGÉ DES EXERCICES****Exercice 1.1.**

Supposons que $\sum_{i \in J} \lambda_i \cdot e_i = 0$, où $J \subset I$, J fini. On a :

$$0 = \left\| \sum_{i \in J} \lambda_i \cdot e_i \right\|^2 = \sum_{i \in J} \lambda_i^2 \cdot \|e_i\|^2 + \sum_{j \in J} \sum_{\substack{k \in J \\ k < j}} \lambda_j \lambda_k \cdot (e_j | e_k) = \sum_{i \in J} \lambda_i^2 \cdot \|e_i\|^2$$

D'où : $\forall i \in J : \lambda_i \cdot \|e_i\| = 0$, et $e_i \neq 0 \implies \forall i \in J : \lambda_i = 0$. ♦

Exercice 1.2.

On a à démontrer que : $\forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m :$

$$\int_0^T \cos(m\omega t) \cos(n\omega t) dt = \int_0^T \sin(m\omega t) \sin(n\omega t) dt = \int_0^T \cos(m\omega t) \sin(n\omega t) dt = 0.$$

Il suffit de calculer en utilisant les formules :

$$\cos(m\omega t) \cos(n\omega t) = \frac{1}{2} [\cos((m-n)\omega t) + \cos((m+n)\omega t)],$$

$$\sin(m\omega t) \sin(n\omega t) = \frac{1}{2} [\cos((m-n)\omega t) - \cos((m+n)\omega t)],$$

$$\cos(m\omega t) \sin(n\omega t) = \frac{1}{2} [\sin((m-n)\omega t) + \sin((m+n)\omega t)].$$

$$\begin{aligned} \text{Ensuite : } \int_0^T 1^2 dt &= T, \text{ et : } \int_0^T \cos^2(m\omega t) dt + \int_0^T \sin^2(m\omega t) dt = \int_0^T dt = T, \\ \int_0^T \cos^2(m\omega t) dt - \int_0^T \sin^2(m\omega t) dt &= \int_0^T \cos(2m\omega t) dt = 0, \text{ d'où :} \\ \forall m \in \mathbb{N}^* : \int_0^T \cos^2(m\omega t) dt &= \int_0^T \sin^2(m\omega t) dt = \frac{T}{2}. \blacklozenge \end{aligned}$$

📌 **Exercice 1.3.**

$u = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i$ donne pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

$$(u|e_k) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot e_i | e_k \right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (e_i | e_k) = \lambda_k \implies u = \sum_{i=1}^n (u|e_i) \cdot e_i. \blacklozenge$$

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^n (u|e_i)^2 \cdot \|e_i\|^2 + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i < j} (u|e_i) \cdot (u|e_j) \cdot (e_i | e_j) = \sum_{i=1}^n (u|e_i)^2. \blacklozenge$$

$$(u|v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \cdot \eta_j (e_i | e_j) = \sum_{i=1}^n \xi_i \cdot \eta_i. \blacklozenge$$

📌 **Exercice 1.4.**

Pour toute famille finie $(\alpha_i)_{i \in J}$ de réels, on a :

$$\begin{aligned} \|u - \sum_{i \in J} \alpha_i \cdot e_i\|^2 &= \|u\|^2 - 2 \sum_{i \in J} \alpha_i \cdot (u|e_i) + \sum_{i \in J} \alpha_i^2 \\ &= \|u\|^2 - 2 \sum_{i \in J} \alpha_i \cdot \xi_i(u) + \sum_{i \in J} \alpha_i^2 + \sum_{i \in J} (\xi_i(u))^2 - \sum_{i \in J} (\xi_i(u))^2 \\ &= \|u\|^2 - \sum_{i \in J} (\xi_i(u))^2 + \sum_{i \in J} (\alpha_i - \xi_i(u))^2 \\ &\geq \|u\|^2 - \sum_{i \in J} (\xi_i(u))^2 = \|u\|^2 - 2 \sum_{i \in J} \xi_i(u) \cdot (u|e_i) + \sum_{i \in J} (\xi_i(u))^2 \\ &\geq \|u - \sum_{i \in J} \xi_i(u) \cdot e_i\|^2, \text{ d'où le résultat cherché.} \end{aligned}$$

Il y a égalité si et seulement si $\sum_{i \in J} (\alpha_i - \xi_i(u))^2 = 0$, i.e. $\forall i \in J : \alpha_i = \xi_i(u)$. \blacklozenge

Ce résultat n'a vraiment rien de miraculeux ; en effet, soit F le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les $e_i, i \in J$. Soit $u \in E$, et cherchons $v = P_F(u) \in F$.

$v = \sum_{i \in J} \lambda_i \cdot e_i$ et on a (Chap. XVII) : $(u - v|e_k) = 0$ pour tout $k \in J$, soit :

$$(u|e_k) = \sum_{i \in J} \lambda_i (e_i | e_k) = \lambda_k. \text{ Donc : } v = P_F(u) = \sum_{i \in J} \xi_i(u) \cdot e_i.$$

L'inégalité cherchée n'est par conséquent rien d'autre que l'inégalité de définition de la projection : $\|u - P_F(u)\| \leq \|u - w\|$ pour tout $w \in F$ (i.e. $w = \sum_{i \in J} \alpha_i \cdot e_i$). \blacklozenge

📌 **Exercice 1.5.**

Soit $(e_i)_{i \in I}$ telle que toute famille orthonormale la contenant lui est égale, et soit $u \in E$ tel que $(u|e_i) = 0$ pour tout $i \in I$.

Si $u \neq 0$, la famille $\{e_i / i \in I\} \cup \left\{ \frac{u}{\|u\|} \right\}$ est orthonormale, contient $(e_i)_{i \in I}$, et ne lui est pas identique [$\frac{u}{\|u\|}$ ne peut pas être un e_k , sinon $(e_k|e_k) = 0!$] : on arrive donc à une contradiction. \blacklozenge

Si $\forall i \in I : (u|e_i) = 0 \implies u = 0$, soit S une famille orthonormale contenant $(e_i)_{i \in I}$. Soit $u \in S, u \neq e_i$, pour tout $i \in I$: $(u|e_i) = 0$ pour tout $i \in I$, car S est orthonormale, d'où $u = 0$. Impossible, puisque 0 n'est jamais dans une famille orthonormale. \blacklozenge

📌 **Exercice 1.6.**

$(e_n)_{n \geq 2}$ est une suite orthonormale dans $F = [\{u, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots\}]$. Ce n'est pas une base hilbertienne de F , d'après la Remarque 1.5. Mais prouvons-le directement :

Dans E , on a : $(u|e_1) = 1$, et si l'on avait $u = \sum_{n=2}^{\infty} (u|e_n) \cdot e_n$, on aurait $(u|e_2) = 0$, d'où une contradiction.

[écrire, avec plus de précautions, $u = \lim_{N \rightarrow \infty} (u_N)$, $u_N = \sum_{n=2}^N (u|e_n) \cdot e_n$]

Démontrons maintenant que $(e_n)_{n \geq 2}$ est maximale dans F . Soit $v \in F$, et on suppose que $(v|e_n) = 0$ pour tout $n \geq 2$: il faut démontrer que $v = 0$.

Ecrivons : $v = \sum_{i \in I} \lambda_i \cdot e_i + \lambda \cdot u$, où $I \subset \{2, 3, \dots, n, \dots\}$ est un ensemble fini.

$$\forall i \in I : (v|e_i) = \lambda_i + \lambda \cdot (u|e_i) = \lambda_i + \frac{\lambda}{i}.$$

Soit k tel que $k > \max(I) : (v|e_k) = 0 = \frac{\lambda}{k}$. D'où : $\lambda = 0$. Et donc : $\forall i \in I : \lambda_i = 0$. Donc $v = 0$. ♦

Exercice 2.1.

1) Si u_1, \dots, u_n ne sont pas indépendants, on peut trouver des réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ non tous nuls et tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0$. On a alors, pour $i = 1, 2, \dots, n$: $\lambda_1 (u_i|u_1) + \lambda_2 (u_i|u_2) + \dots + \lambda_n (u_i|u_n) = 0$. En notant C_1, C_2, \dots, C_n les colonnes de la matrice $((u_i|u_j))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$, on a donc $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \dots + \lambda_n C_n = 0$ et le déterminant G est nul, puisque ses colonnes sont liées. ♦

Si u_1, \dots, u_n forment une famille libre, soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale de $[u_1, \dots, u_n]$.

Ecrivons que pour $i = 1, \dots, n : u_i = \sum_{k=1}^n \alpha_i^k \cdot e_k$. On a donc :

$$(u_i|u_j) = \left(\sum_{k=1}^n \alpha_i^k \cdot e_k \middle| \sum_{\ell=1}^n \alpha_j^\ell \cdot e_\ell \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n \alpha_i^k \cdot \alpha_j^\ell \cdot (e_k|e_\ell) = \sum_{h=1}^n \alpha_i^h \cdot \alpha_j^h.$$

On peut donc écrire : $G(u_1, \dots, u_n) = \det((u_i|u_j))_{1 \leq i, j \leq n} = \det\left(\sum_{h=1}^n \alpha_i^h \cdot \alpha_j^h\right)$ [ce déterminant est symétrique], où i est l'indice de ligne et j celui de colonne.

Rappelons d'autre part la formule de multiplication de deux matrices (carrées) :

$$B = (\beta_j^i), C = (\gamma_j^i), 1 \leq i, j \leq n; D = B \cdot C = (\delta_j^i) : \delta_j^i = \sum_{h=1}^n \beta_h^i \cdot \gamma_j^h.$$

Considérons la matrice A des composantes de (u_1, \dots, u_n) dans la base $(e_1, \dots, e_n) : A = (\alpha_j^i)$ [i est l'indice de ligne, j celui de colonne].

Nota : écrivez les matrices sous forme de tableaux carrés, vous y verrez bien mieux.

On s'aperçoit que :

$G(u_1, \dots, u_n) = \det({}^t A \cdot A) = \det({}^t A) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(A) = [\det(A)]^2 > 0$ (car A est inversible). ♦

2) $F = [\{u_1, \dots, u_n\}]$ est de dimension finie, donc complet, et on peut donc projeter [Chap. XVII] tout $u \in E$ sur F .

Ecrivons $v = P_F(u)$. On a : $d(u, F) = \delta = \|u - v\|$. v est aussi le seul point de F tel que $u - v$ est orthogonal à F [Chap. XVII, Th. 4.2], et donc à tous les u_i :

$$(u - v|u_i) = 0 = \left(u - \sum_{k=1}^n \xi_k \cdot u_k \middle| u_i \right) = (u|u_i) - \sum_{k=1}^n \xi_k \cdot (u_k|u_i),$$

cela pour tout $i = 1, \dots, n$.

On a là un système linéaire à n équations et à n inconnues :

$$\begin{cases} (u_1|u_1)\xi^1 + (u_2|u_1)\xi^2 + \dots + (u_n|u_1)\xi^n = (u|u_1) \\ (u_1|u_2)\xi^1 + (u_2|u_2)\xi^2 + \dots + (u_n|u_2)\xi^n = (u|u_2) \\ \dots \quad \dots \\ (u_1|u_n)\xi^1 + (u_2|u_n)\xi^2 + \dots + (u_n|u_n)\xi^n = (u|u_n) \end{cases}$$

Ce système est de Cramer puisque son déterminant est $G(u_1, \dots, u_n) > 0$.

On obtient donc ξ^i ($1 \leq i \leq n$) par la formule de Cramer [pensez aussi à cette formule pour la méthode pratique dans le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt] :

$$\xi^i = \frac{K(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n)}{G(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n)}$$

où K est le déterminant de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} (u_1|u_1) & (u_2|u_1) & \cdots & (u_{i-1}|u_1) & (u|u_1) & (u_{i+1}|u_1) & \cdots & (u_n|u_1) \\ (u_1|u_2) & (u_2|u_2) & \cdots & (u_{i-1}|u_2) & (u|u_2) & (u_{i+1}|u_2) & \cdots & (u_n|u_2) \\ & & \cdots & & & & \cdots & \\ (u_1|u_n) & (u_2|u_n) & \cdots & (u_{i-1}|u_n) & (u|u_n) & (u_{i+1}|u_n) & \cdots & (u_n|u_n) \end{pmatrix}$$

On obtient la formule explicite suivante pour $v = P_F(u)$:

$$v = \sum_{i=1}^n \frac{K(u_1, u_2, \dots, u_{i-1}, u, u_{i+1}, \dots, u_n)}{G(u_1, \dots, u_n)} \cdot u_i$$

D'autre part : $\delta^2 = [d_n^2(u, F)]^2 = \|u - v\|^2 = (u - v|u - v) = (u - v|u)$ [car $u - v \perp v$].

D'où : $\delta^2 = (u|u) - \sum_{j=1}^n \xi^j (u_j|u)$, et on a le système linéaire suivant à $(n+1)$ équations et

$(n+1)$ inconnues $[\delta^2, \xi^1, \dots, \xi^n]$:

$$\begin{cases} \delta^2 + \sum_{j=1}^n \xi^j (u_j|u) = (u|u) \\ 0 \cdot \delta^2 + \sum_{j=1}^n \xi^j (u_j|u_i) = (u|u_i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

On résout ce système par la formule de Cramer pour déterminer δ^2 : δ^2 est le quotient des déterminants :

$$\begin{vmatrix} (u|u) & (u_1|u) & \cdots & (u_n|u) \\ (u|u_1) & (u_1|u_1) & \cdots & (u_n|u_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (u|u_n) & (u_1|u_n) & \cdots & (u_n|u_n) \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 1 & (u_1|u) & \cdots & (u_n|u) \\ 0 & (u_1|u_1) & \cdots & (u_n|u_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & (u_1|u_n) & \cdots & (u_n|u_n) \end{vmatrix}$$

Le déterminant du numérateur (à gauche) n'est autre que $G(u, u_1, u_2, \dots, u_n)$. Quant au déterminant du dénominateur, on le développe suivant sa première colonne, et on trouve sa valeur : $G(u_1, u_2, \dots, u_n)$. D'où le résultat cherché :

$$\delta^2 = \frac{G(u, u_1, \dots, u_n)}{G(u_1, \dots, u_n)} \cdot \diamond$$

Remarques :

1) Le déterminant $G(u_1, \dots, u_n)$ est appelé *déterminant de Gram*.

2) La détermination de $v = P_F(u)$ n'était pas nécessaire pour l'exercice ; son intérêt apparaît dans la méthode pratique pour le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

3) On peut dans 2), comme dans 1), prendre une base orthonormale de F , la démonstration est plus élégante ; mais le rustique a son charme aussi.

Exercice 2.2.

Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de E . Puisque $(\frac{1}{n})_n$ appartient à ℓ^2 , on peut (Th. 2.4)

considérer le vecteur : $u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$.

Si $(e_n)_n$ était une base algébrique, on aurait aussi : $u = \sum_{\ell \in L} \lambda_\ell \cdot e_\ell$, où $L \subset \mathbb{N}^*$, L fini.

Soit alors $k \in \mathbb{N}^*$, $k > \max(L)$:

$$\frac{1}{k} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n | e_k \right) = (u | e_k) = \left(\sum_{\ell \in L} \lambda_\ell \cdot e_\ell | e_k \right) = 0, \text{ ce qui est absurde. } \diamond$$

Exercice 2.3.

Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de E , base qui existe grâce au Th.2.2. Soit φ une forme linéaire continue sur E . On veut démontrer qu'il existe un vecteur $\hat{u} \in E$ tel que $\|\hat{u}\| = \|\varphi\|'$ et tel que $\varphi(u) = (u|\hat{u})$ pour tout $u \in E$.

Posons $\alpha_n = \varphi(e_n)$ pour $n \geq 1$. On va prouver que la suite $(\alpha_n)_n$ est de carré sommable ;

pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a : $\varphi\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot e_n\right) = \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot \varphi(e_n) = \sum_{n=1}^N \alpha_n^2$ d'une part, et :

$$\varphi\left(\sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot e_n\right) \leq \|\varphi\|' \cdot \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot e_n \right\| \text{ d'autre part.}$$

Mais $\left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \implies \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \cdot e_n \right\| = \sqrt{\sum_{1 \leq n \leq N} \alpha_n^2}$, et on obtient par conséquent : $\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \leq \|\varphi\|' \sqrt{\sum_{1 \leq n \leq N} \alpha_n^2}$, et donc : $\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \leq \|\varphi\|'^2$. Ainsi, la série $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ est convergente, de somme $\leq \|\varphi\|'^2$.

D'après le Th. 2.4, on peut donc considérer le vecteur : $\hat{u} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cdot e_n$.

Soit à présent un vecteur $u \in E$ arbitraire : $u = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot e_n$.

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot e_n\right) = \varphi\left(\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \xi_n \cdot e_n\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \varphi\left(\sum_{n=1}^N \xi_n \cdot e_n\right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \xi_n \cdot \varphi(e_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \xi_n \cdot \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \cdot \alpha_n = (u|\hat{u}),$$
 d'après (1.8) du Th. 1.1.

On a : $\|\hat{u}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leq \|\varphi\|'^2$, d'où : $\|\hat{u}\| \leq \|\varphi\|'$, et,

$\forall u \in E : |\varphi(u)| = |(u|\hat{u})| \leq \|u\| \cdot \|\hat{u}\| \implies \|\varphi\|' \leq \|\hat{u}\|$. D'où : $\|\varphi\|' = \|\hat{u}\|$. ♦

Cette démonstration du Th. de Riesz en termes de base hilbertienne est la démonstration historique.

PROBLÈME 1

Une riche famille d'opérateurs

Soient $(E, (\cdot|\cdot)_E)$, $(F, (\cdot|\cdot)_F)$ des espaces de Hilbert réels, de dimension infinie, séparables. Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ [resp. $(f_n)_n$] une famille orthonormale de E [resp. F]. Pour tout $u \in E$, tout $v \in F$, on définit $v \otimes u : E \rightarrow F$ par : $(v \otimes u)(x) = (x|u) \cdot v$ pour tout $x \in E$.

1) Démontrez que $v \otimes u \in \mathcal{L}(E, F)$, et calculez sa norme. Décrivez $\text{Im}(v \otimes u)$ et $\text{Ker}(v \otimes u)$. Déterminez $(v \otimes u)^*$, l'adjoint de $v \otimes u$. Quelles relations existe-t-il entre $\text{Im}(v \otimes u)$, $\text{Im}(v \otimes u)^*$, $\text{Ker}(v \otimes u)$, $\text{Ker}(v \otimes u)^*$? Si $u \in E$, $u' \in E$, $v \in F$, $v' \in F$, vérifiez que : $(v \otimes u) \circ (u' \otimes v') = (v \otimes u') \circ (u \otimes v')$.

2) Soit $(\lambda_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels bornée. On pose pour tout $x \in E$:

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot (f_n \otimes e_n)(x).$$

Démontrez qu'on définit ainsi $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Calculez $\|A\|$. Déterminez A^* .

3) On suppose que $\lambda_n \neq 0$ pour tout n .

Démontrez que A est injective si et seulement si (e_n) est une base hilbertienne de E . Démontrez que $\text{Im}(A)$ est partout dense dans F si et seulement si (f_n) est une base hilbertienne de F .

4) On suppose qu'il existe α et β réels tels que $0 < \alpha \leq |\lambda_n| \leq \beta$ pour tout n . A quelle(s) condition(s) A^{-1} existe-t-il, avec $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$? Déterminez A^{-1} .

CORRIGÉ DU PROBLÈME 1

1) $\forall u \in E, \forall v \in F, \forall x \in E, \forall x' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mu \in \mathbb{R} :$

$$\begin{aligned} (v \otimes u)(\lambda x + \mu x') &= (\lambda x + \mu x'|u)v = [\lambda(x|u) + \mu(x'|u)]v = \lambda(x|u)v + \mu(x'|u)v \\ &= \lambda(v \otimes u)(x) + \mu(v \otimes u)(x'). \end{aligned}$$

Donc $v \otimes u$ est une application linéaire ; $v \otimes u \in \mathcal{L}(E, F)$. ♦

$\forall x \in E : \|(v \otimes u)(x)\| = \|(x|u)v\| = |(x|u)| \cdot \|v\| \leq \|x\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|$ [Cauchy-Schwarz] ; donc $v \otimes u$ est continue, de norme $\|v \otimes u\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \|u\| \cdot \|v\|$; $v \otimes u \in \mathcal{L}(E, F)$.

D'autre part :

$$\|v \otimes u\| \geq \|(v \otimes u)\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\| = \left|\left(\frac{u}{\|u\|} | u\right)\right| \cdot \|v\| = \frac{\|u\|^2}{\|u\|} \|v\| = \|u\| \cdot \|v\|. \text{ D'où :}$$

$$\|v \otimes u\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|u\| \cdot \|v\|.$$

Cela si $u \neq 0$; mais si $u = 0$, ou si $v = 0$, on a : $v \otimes u = 0$ de norme nulle, et la formule donnant $\|v \otimes u\|$ reste valide. ♦

Si $u = 0$ ou si $v = 0$, $v \otimes u = 0$, et : $\text{Im}(v \otimes u) = \{0\}$, $\text{Ker}(v \otimes u) = E$.

Si u et v sont $\neq 0$: $x \mapsto (x|u) = \varphi(x)$ est une forme linéaire non nulle, donc surjective sur \mathbb{R} , et par conséquent : $\text{Im}(v \otimes u) = [v]$; $v \otimes u$ est un opérateur (= application linéaire continue) de rang 1.

Si $v \neq 0$, $(v \otimes u)(x) = 0 = (x|u)v \iff (x|u) = 0 \iff x \in [u]^\perp = \text{Ker}(\varphi)$.

Donc : $\text{Ker}(v \otimes u) = u^\perp = \text{Ker}(\varphi)$; $\text{Im}(v \otimes u)$ de dimension 1 est un fermé de F , $\text{Ker}(v \otimes u) = \text{Ker}(\varphi)$ où φ est continue est un hyperplan fermé de E . Dans tous les cas, $\text{Im}(v \otimes u)$ et $\text{Ker}(v \otimes u)$ sont des fermés. ♦

L'adjoint $(v \otimes u)^*$ existe car $v \otimes u$ est linéaire continu et E, F sont des espaces de Hilbert [Chap. XVIII] ; $\forall x \in E, \forall y \in F$:

$$((v \otimes u)(x)|y) = (x|(v \otimes u)^*(y)) = ((x|u)v|y) = (x|u) \cdot (v|y) = ((v|y)u|x)$$

D'où : $(v \otimes u)^*(y) = (v|y) \cdot u = (u \otimes v)(y) \implies (v \otimes u)^* = u \otimes v$.

Donc : $(v \otimes u)^*$ existe, et est égal à : $u \otimes v \in \mathcal{L}(F, E)$. ♦

D'après ce qui précède, si $u \neq 0$ et $v \neq 0$: $\text{Im}(u \otimes v) = [u]$, $\text{Ker}(u \otimes v) = [v]^\perp$; on a donc :

$$\begin{aligned} \text{Ker}(v \otimes u)^* &= [v]^\perp = \text{Im}(v \otimes u)^\perp, \\ \text{adh}[\text{Im}(v \otimes u)^*] &= \text{adh}[u] = [u] = \text{Ker}(v \otimes u)^\perp = [u]^{\perp\perp}, \\ \text{Ker}(v \otimes u) &= [u]^{\perp\perp} = \text{Im}(v \otimes u)^{\perp\perp}, \\ \text{adh}[\text{Im}(v \otimes u)] &= \text{adh}([v]) = [v] = \text{Ker}(v \otimes u)^{\perp\perp} = [v]^{\perp\perp}. \end{aligned}$$

On retrouve, dans un cas bien particulier, les égalités du Chap. XVIII, Prop. 2.2. ♦

$\forall y \in F$:

$$\begin{aligned} (v \otimes u) \circ (u' \otimes v')(y) &= (v \otimes u)((y|v')u') = (y|v')(v \otimes u)(u') = (y|v')(u'|u)v \\ &= (u'|y|v')u)v = (v \otimes u')((y|v')u) = (v \otimes u') \circ (u \otimes v')(y) \end{aligned}$$

D'où : $(v \otimes u) \circ (u' \otimes v') = (v \otimes u') \circ (u \otimes v')$. ♦

$$2) Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x|e_n)f_n. \text{ Pour tout entier } N \geq 1, \text{ posons } A_N x = \sum_{n=1}^N \lambda_n(x|e_n)f_n.$$

$Ax = \lim_{N \rightarrow \infty} (A_N x)$, si cette limite existe.

Puisque $\lambda_n f_n \otimes e_n$ est linéaire pour tout n , d'après 1), A_N est linéaire pour tout N .

D'après le Th. 1.1, Ax existe si et seulement si $(\lambda_n(x|e_n))_n \in \ell^2$, i.e. si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2(x|e_n)^2 < \infty$.

Mais : $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2(x|e_n)^2 \leq \sup_{n \geq 1} \{\lambda_n^2\} \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)^2$, et $\sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n)^2 \leq \|x\|^2$ [inégalité de Bessel].

Donc : $\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2(x|e_n)^2 \leq \sup_{n \geq 1} \{\lambda_n^2\} \cdot \|x\|^2$, et la série est convergente.

Donc $Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x|e_n)f_n$ existe (la série est convergente dans E normé) pour tout $x \in E$.

A est linéaire car $Ax = \lim_{N \rightarrow \infty} (A_N x)$, A_N est linéaire, et on applique le principe de prolongement des égalités.

$\|Ax\|^2 \leq \sup_{n \geq 1} \lambda_n^2 \cdot \|x\|^2 = (\sup_{n \geq 1} |\lambda_n|)^2 \cdot \|x\|^2$ [égalité rencontrée plusieurs fois], ce qui prouve que A est continue, $A \in \mathcal{L}(E, F)$, de norme :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \sup_{n \geq 1} |\lambda_n|. \text{ ♦}$$

D'autre part : $Ae_p = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(e_p|e_n)f_n = \lambda_p e_p$ pour tout $p \geq 1$ [A admet les valeurs propres

λ_p , et e_p est vecteur propre associé à λ_p], d'où : $\|A\| \geq \|Ae_p\| = |\lambda_p|$ (car $\|e_p\| = 1$) pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Ainsi $\|A\| \geq \sup_{n \geq 1} |\lambda_n|$, et en définitive : $\|A\| = \sup_{n \geq 1} |\lambda_n|$. ♦

$$A_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n (f \otimes e_n) \implies A_N^* = \sum_{n=1}^N \lambda_n (f_n \otimes e_n)^* = \sum_{n=1}^N \lambda_n (e_n \otimes f_n), \text{ par 1).}$$

$$\text{A la limite : } A^* = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (e_n \otimes f_n), \text{ et : } \forall y \in F : A^*y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (y|f_n) e_n.$$

Nota : $\|A^*\| = \sup_{n \geq 1} |\lambda_n| = \|A\|$. ♦

$$3) Ax = 0 \Leftrightarrow \|Ax\|^2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 (x|e_n)^2 = 0 \Leftrightarrow (x|e_n) = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

Donc : A injective $\Leftrightarrow [Ax = 0 \implies x = 0]$
 $\Leftrightarrow [\forall n \in \mathbb{N}^* : (x|e_n) = 0 \implies x = 0] \Leftrightarrow (e_n)_n$ est maximale
 $\Leftrightarrow (e_n)_n$ est totale $\Leftrightarrow (e_n)_n$ est une base hilbertienne.

Cela compte tenu des Th. 1.1 et 1.2, et du fait que $(e_n)_n$ est une suite orthonormale. ♦

$Ae_p = \lambda_p f_p$ pour tout $p \geq 1$, et donc : $f_p \in \text{Im}(A)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$. Donc : $\text{Im}(A)$ partout dense dans $F \Leftrightarrow (f_n)_n$ est totale dans $F \Leftrightarrow (f_n)_n$ est une base hilbertienne de F . ♦

4) Une condition nécessaire pour que $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ existe est que A soit injective et surjective, donc, d'après ce qui précède, que $(e_n)_n$ et $(f_n)_n$ soient des bases hilbertiennes de E et F respectivement. On suppose qu'il en est ainsi.

Puisque $0 < \alpha \leq |\lambda_n|$ pour tout n , on a : $|\frac{1}{\lambda_n}| \leq \frac{1}{\alpha}$, et $(\frac{1}{\lambda_n})$ est bornée. On peut donc, d'après 1), considérer l'application linéaire continue suivante :

$$\forall y \in F : B(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (e_n \otimes f_n)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (y|f_n) e_n.$$

B est l'inverse cherché ; en effet : $\forall y \in F$:

$$\begin{aligned} (A \circ B)(y) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot (f_n \otimes e_n) \right) \circ \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} (e_m \otimes f_m) \right) (y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_m} (f_n \otimes e_n) \circ (e_m \otimes f_m)(y) \\ &\quad \text{[on applique la formule de composition de 1)]} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda_m} (f_m|y) (e_m|e_n) f_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (y|f_n) f_n = y = Id_F(y) \end{aligned}$$

[car $(f_n)_n$ est une base hilbertienne et Th. 1.1].

De même, $\forall x \in E$:

$$\begin{aligned} (B \circ A)(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (e_n \otimes f_n) \right) \circ \left(\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (f_m \otimes e_m) \right) (x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m}{\lambda_n} (e_n \otimes f_n) \circ (f_m \otimes e_m)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x|e_n) e_n = x = Id_E(x) \text{ [car } (e_n)_n \\ &\text{est une base hilbertienne].} \end{aligned}$$

Donc, B est l'application linéaire inverse de A , et B est continue. Finalement, si $(\frac{1}{\lambda_n})$ est bornée, si (e_n) et (f_n) sont des bases hilbertiennes :

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot (f_n \otimes e_n) \text{ possède un inverse continu } A^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (e_n \otimes f_n). \text{ ♦}$$

Remarque : Nous n'avons pas démontré qu'une condition *nécessaire* pour que A existe est que (λ_n) soit bornée, mais c'est vrai (th. de Maîtrise). Les opérateurs de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \cdot (f_n \otimes e_n)$ sont très nombreux, et peuvent fournir de nombreux exemples ou contre-exemples, mais ils ne remplissent pas $\mathcal{L}(E, F)$ [même si l'on s'autorisait à indexer sur I quelconque au lieu de \mathbb{N}^*].

PROBLÈME 2**Opérateurs de Hilbert-Schmidt**

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel séparable de dimension infinie. Soient $(e_n)_n$ et $(f_m)_m$ [n, m entiers ≥ 1] deux bases hilbertiennes de E . Soit enfin $A : E \rightarrow E$ une application linéaire continue.

1) Démontrez les égalités suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(f_m)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{m=1}^{\infty} (A(e_n)|f_m)^2 \right] = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (A^*(f_m)|e_n)^2 \right]$$

la valeur commune pouvant être $+\infty$ (donnez un exemple).

Recommandation : Ecrivez d'abord des égalités et inégalités avec des sommes finies, et ne passez à la limite qu'ensuite, avec précautions.

2) On définit $\sigma(A) \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ par : $[\sigma(A)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2$.

Démontrez que $\sigma(A)$ ne dépend pas de la base hilbertienne choisie pour le définir [autrement dit : que $\sigma(A)$ ne dépend que de A].

3) Démontrez que pour tout $A \in \mathcal{L}(E)$ on a : $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \sigma(A)$.

4) On définit : $\mathcal{H}(E) = \{A \in \mathcal{L}(E) / \sigma(A) < +\infty\}$. Démontrez que $\mathcal{H}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ non réduit à $\{0_E\}$ (l'application nulle).

Démontrez que $\sigma : A \mapsto \sigma(A)$ définit une norme sur $\mathcal{H}(E)$.

5) Démontrez que $A \in \mathcal{H}(E)$ si et seulement si $A^* \in \mathcal{H}(E)$, et que $\sigma(A^*) = \sigma(A)$.

Soit $A \in \mathcal{H}(E)$ et soit $B \in \mathcal{L}(E)$: démontrez que $B \circ A \in \mathcal{H}(E)$, et que : $\sigma(B \circ A) \leq \|B\|_{\mathcal{L}(E)} \cdot \sigma(A)$.

Déduisez-en que $A \circ B \in \mathcal{H}(E)$, et que $\sigma(A \circ B) \leq \|B\|_{\mathcal{L}(E)} \cdot \sigma(A)$.

Démontrez que si $A, B \in \mathcal{H}(E)$, on a : $\sigma(A \circ B) \leq \sigma(A) \cdot \sigma(B)$.

6) Démontrez que l'e.v.n. $(\mathcal{H}(E), \sigma)$ est complet.

7) Pour $A, B \in \mathcal{H}(E)$, on pose : $[A|B] = \sum_{n=1}^{\infty} (A(e_n)|B(e_n))$, où $(e_n)_n$ est une base hilbertienne. Démontrez que $[A|B]$ ne dépend pas de la base hilbertienne $(e_n)_n$ choisie.

Démontrez que $(A, B) \in \mathcal{H}(E) \times \mathcal{H}(E) \mapsto [A|B]$ est un produit scalaire sur $\mathcal{H}(E)$ tel que $[A|A] = (\sigma(A))^2$.

Vérifiez que pour $A, B \in \mathcal{H}(E)$ et pour $C \in \mathcal{L}(E)$ on a : $[A^*|B^*] = [A|B]$, $[C \circ A|B] = [A|C^* \circ B]$, $[A \circ C|B] = [A|B \circ C^*]$.

8) Soit $(\alpha_n)_n$ une suite bornée de réels. On pose, pour tout $u \in E$:

$$A(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (u|e_n) f_n \text{ [voir le Problème 1].}$$

A quelle condition a-t-on $A \in \mathcal{H}(E)$? Dans ce cas, calculez $\sigma(A)$. Déduisez de ces résultats que les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}$ et σ ne sont pas équivalentes.

$\mathcal{H}(E)$ est-il fermé dans $\mathcal{L}(E)$?

CORRIGÉ DU PROBLÈME 2

1) Introduisons les projecteurs orthogonaux (M, N entiers ≥ 1) :

$$P_N : E \rightarrow E_N = \{e_1, \dots, e_N\}, P_N(u) := \sum_{k=1}^N (u|e_k) e_k, \text{ et}$$

$$Q_M : E \rightarrow E_M = [\{f_1, \dots, f_M\}], Q_M(u) := \sum_{k=1}^M (u|f_k) f_k.$$

Posons d'autre part :

$$\alpha_{n,m} = (A(e_n)|f_m) = (e_n|A^*(f_m)) = (A^{**}(e_n)|f_m) = (A^*(e_n)|A^*(f_m))$$

[définition de A^* et formule $A^{**} = A$].

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \|Q_M[A(e_n)]\|^2 &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M (A(e_n)|f_m)^2 = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \alpha_{n,m}^2 = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \alpha_{n,m}^2 \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (A^*(f_m)|e_n)^2 = \sum_{m=1}^M \|P_N[A^*(f_m)]\|^2 \leq \sum_{m=1}^M \|A^*(f_m)\|^2. \end{aligned}$$

On fait tendre M puis N (dans cet ordre) vers $+\infty$:

$$\sum_{n=1}^N \|A(e_n)\|^2 \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \alpha_{n,m}^2 = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \alpha_{n,m}^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(f_m)\|^2, \text{ d'où :}$$

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{n,m}^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,m}^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(f_m)\|^2.$$

En refaisant le calcul ci-dessus « à l'envers » :

$$(2) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(f_m)\|^2 \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,m}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{n,m}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2.$$

Par conséquent, si l'une des quatre sommes (de série) est finie, il en est de même des trois autres, et elles sont toutes égales. De même, si l'une est égale à $+\infty$, les trois autres aussi.

Finalement :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} (A(e_n)|f_m)^2 \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (A^*(f_m)|e_n)^2 \right) = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(f_m)\|^2,$$

nombre tous réels ou $+\infty$. ♦

Les sommes peuvent être $+\infty$: prendre $A = Id_E$. ♦

$$2) \text{ Ecrivons : } \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (A^*(e_n)|A^*(f_m))^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A(f_m)\|^2, [\text{car } A = A^{**}]:$$

on voit que la somme $\sigma(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2$, finie ou pas, ne dépend pas de la base particulière choisie pour la calculer. ♦

Remarque :

Cela n'a rien d'étonnant ; on a besoin d'une base pour calculer $\sigma(A)$, mais cette valeur ne dépend que de A . Il y a une analogie avec le déterminant ou la trace (en dimension finie) d'une application linéaire qui sont calculés à l'aide de la matrice représentant l'application linéaire dans une base donnée, mais qui sont des invariants, liés à A seulement.

3) Soit $u \in E$ avec $\|u\| = 1$. On peut poser $e_1 = u$ et prolonger en une base hilbertienne $(e_n)_{n \geq 1}$ (voir existence des bases hilbertiennes dans le cours). Alors :

$$\|A(u)\|^2 = \|A(e_1)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \sigma(A)^2. \text{ Donc, pour tout } u \in E \text{ tel que } \|u\| = 1 :$$

$$\|A(u)\| \leq \sigma(A).$$

On en conclut que : $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{\|u\|=1} \|A(u)\| \leq \sigma(A)$. ♦

Remarque : On aurait pu procéder ainsi : $u = \sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n) e_n$, donne :

$$\begin{aligned} \|A(u)\|^2 &= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n) A(e_n) \right\|^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |(u|e_n)| \cdot \|A(e_n)\| \right)^2 \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n)^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \|u\|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \|u\|^2 \sigma(A)^2 \end{aligned}$$

(la 2^e inégalité est l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans ℓ^2 , puis on a appliqué l'identité de Parseval).

4) Soit $\mathcal{H}(E) = \{A \in \mathcal{L}(E) / \sigma(A) < +\infty\}$. Soit $(e_n)_{n \geq 1}$ une base hilbertienne de E permettant de calculer $\sigma(A)$ par $\sigma(A)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2$. Il est clair que si $A \in \mathcal{H}(E)$ et si $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda A \in \mathcal{H}$ car $\sigma(\lambda A)^2 = |\lambda|^2 \sigma(A)^2 < \infty$. ♦

Soient $A, B \in \mathcal{H}; \forall N \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{n=1}^N \|(A+B)(e_n)\|^2 \right]^{1/2} &\leq \left[\sum_{n=1}^N (\|A(e_n)\| + \|B(e_n)\|)^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\sum_{n=1}^N \|A(e_n)\|^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{n=1}^N \|B(e_n)\|^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|B(e_n)\|^2 \right]^{1/2} = \sigma(A) + \sigma(B). \end{aligned}$$

(l'avant dernière inégalité provient de l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne de \mathbb{R}^N).
Faisant $N \rightarrow \infty$, on obtient : $\sigma(A+B) \leq \sigma(A) + \sigma(B) < \infty$, et donc $A+B \in \mathcal{H}$. ♦

Remarque : On peut aussi raisonner ainsi : une base hilbertienne (e_n) étant choisie, $A \in \mathcal{H}$ signifie $(\|A(e_n)\|) \in \ell^2$, et $\sigma(A) = \|(\|A(e_n)\|_E)\|_{\ell^2}$... ce qui revient à considérer qu'un espace de Hilbert séparable s'identifie - via le choix d'une base - à ℓ^2 .

Clairément $0_E \in \mathcal{H}$, et $\sigma(0_E) = 0$.

Donc $\mathcal{H}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. Evidemment, $\mathcal{H}(E)$ contient toutes les applications linéaires de rang fini. ♦

σ est une fonction $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$, vérifiant $\sigma(\lambda A) = |\lambda|\sigma(A)$, $\sigma(A+B) \leq \sigma(A) + \sigma(B)$, $\sigma(0) = 0$, on vient de le voir.

D'autre part : $\sigma(A) = 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = 0 \implies \forall n \in \mathbb{N}^* : A(e_n) = 0$;

$A \in \mathcal{L}(E)$ nulle sur tous les éléments d'une base hilbertienne (donc d'une famille totale) est nulle : $A = 0_E$.

Donc σ est une norme sur $\mathcal{H}(E)$. ♦

$$\text{5) } \sigma(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^*(f_m)\|^2, \text{ d'où : } A \in \mathcal{H} \implies A^* \in \mathcal{H} \text{ et } \sigma(A^*) = \sigma(A)$$

(fini ou ∞).

Soient $A \in \mathcal{H}$ et $B \in \mathcal{L}(E)$:

$$\|(B \circ A)(e_n)\| \leq \|B\|_{\mathcal{L}(E)} \cdot \|A(e_n)\| \implies \sum_{n=1}^{\infty} \|(B \circ A)(e_n)\|^2 \leq \|B\|_{\mathcal{L}(E)}^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2$$

d'où : $B \circ A \in \mathcal{H}$, et : $\sigma(B \circ A) \leq \|B\|_{\mathcal{L}(E)} \cdot \sigma(A)$. ♦

A présent : $A^* \in \mathcal{H}$, d'après ce qui précède, et $B^* \in \mathcal{L}(E) \implies B^* \circ A^* \in \mathcal{H}$, puis :
 $(B^* \circ A^*)^* = A^{**} \circ B^{**} = A \circ B \in \mathcal{H}$, et $\sigma(A \circ B) \leq \|B\|_{\mathcal{L}(E)} \cdot \sigma(A)$.

$\mathcal{H}(E)$ est un idéal bilatère (i.e. à droite et à gauche) de l'anneau $\mathcal{L}(E)$. C'est aussi une sous-algèbre. ♦

Nota : Ce n'est pas en identifiant \mathcal{H} à ℓ^2 qu'on peut trouver les propriétés « multiplicatives » de \mathcal{H} ... Se méfier des grands théorèmes de structure, et ne pas leur faire dire ce qu'ils n'ont jamais dit !

Si $A, B \in \mathcal{H}(E)$: $\sigma(A \circ B) \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E)} \cdot \sigma(B) \leq \sigma(A) \cdot \sigma(B)$, par 3). σ est une norme multiplicative d'algèbre (non unitaire). ♦

6) Démontrons que l'e. v.n. $(\mathcal{H}(E), \sigma)$ est un espace de Banach. Soit (A_k) une suite de Cauchy d'éléments de \mathcal{H} relativement à la norme σ .

L'inégalité $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \sigma(A)$ prouve que (A_k) est aussi une suite de Cauchy pour la norme (induite sur \mathcal{H}) $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}$. Comme E est complet (Hilbert), il en est de même de $\mathcal{L}(E)$: donc (A_k) converge dans $(\mathcal{L}(E), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)})$ vers un $A \in \mathcal{L}(E)$. Il nous reste à prouver que $A \in \mathcal{H}$ et que $\sigma(A_k - A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

(A_k) de Cauchy pour $\sigma \implies (A_k)$ bornée pour σ : $\exists M$ réel > 0 , $\forall k : \sigma(A_k) \leq M$.

Soit (e_n) une base hilbertienne. $\sigma(A_k)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|A_k(e_n)\|^2 \leq M^2$.

Donc, $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall N \in \mathbb{N}^* : \sum_{n=1}^N \|A_k(e_n)\|^2 \leq M^2$; la continuité de $\|\cdot\|^2$ (pour $\|\cdot\|$) et le fait

que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k(v)\| = \|A(v)\|$ pour tout $v \in E$ permet de déduire que :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* : \sum_{n=1}^N \|A(e_n)\|^2 \leq M^2 \implies \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 \leq M^2, \text{ et donc } A \in \mathcal{H}.$$

Ensuite : $\lim_{p \rightarrow \infty, q \rightarrow \infty} \sigma(A_p - A_q) = 0 \implies \lim_{p \rightarrow \infty} \sigma(A_p - A) = 0$, et, donc : $\lim_{k \rightarrow \infty} (A_k) = A$ pour la norme σ . ♦

7) Il est facile de vérifier, à l'aide de ce qui précède, que :

$$(A, B) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H} \mapsto [A|B] := \sum_{n=1}^{\infty} (A(e_n)|B(e_n))$$

définit un produit scalaire sur \mathcal{H} , tel que $[A|A] = \sigma(A)^2$.

L'identité de polarisation : $[A|B] = \frac{1}{4}([\sigma(A+B)]^2 - [\sigma(A-B)]^2)$ permet de voir que $[A|B]$ ne dépend pas de la base hilbertienne choisie pour le définir. ♦

$$\begin{aligned} [A^*|B^*] &= \frac{1}{4}([\sigma(A^* + B^*)]^2 - [\sigma(A^* - B^*)]^2) = \frac{1}{4}([\sigma(A+B)^*]^2 - [\sigma(A-B)^*]^2) \\ &= \frac{1}{4}([\sigma(A+B)]^2 - [\sigma(A-B)]^2) = [A|B], \text{ car } \sigma(A^*) = \sigma(A). \end{aligned}$$

Les autres égalités sont triviales en partant de la définition de $[\cdot|\cdot]$. ♦

8) $A(u) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (u|e_m) f_m$; et donc :

$$\begin{aligned} A(e_n) &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (e_n|e_m) f_m = \alpha_n f_n \implies \|A(e_n)\| = |\alpha_n|. \text{ D'où :} \\ A \in \mathcal{H} &\iff \sum_{n=1}^{\infty} \|A(e_n)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \iff (\alpha_n)_n \in \ell^2, \text{ et :} \\ \sigma(A) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 \right)^{1/2} = \|(\alpha_n)_n\|_{\ell^2}. \end{aligned}$$

Conséquence : les normes $\sigma(\cdot)$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}$ ne sont pas équivalentes sur \mathcal{H} , car on sait (Problème 1) que $\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = \|(\alpha_n)_n\|_{\ell^\infty}$, et les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur ℓ^2 .

\mathcal{H} n'est pas fermé dans $\mathcal{L}(E)$. Soit en effet $B(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} (u|e_n) e_n$;

$B \in \mathcal{L}(E)$ car $(\frac{1}{\sqrt{n}}) \in \ell^\infty$, mais $B \notin \mathcal{H}$ car $(\frac{1}{\sqrt{n}}) \notin \ell^2$; $B_N(u) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}} (u|e_n) e_n$ définit $B_N \in \mathcal{H}$, car B_N est de rang fini, et $\lim_{N \rightarrow \infty} (B_N) = B$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E)}$.

On peut aussi écrire que $Id_E(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (u|e_n) e_n$: l'argumentation est la même. ♦

Les éléments de $\mathcal{H}(E)$ sont appelés *opérateurs* (i.e. applications linéaires continues) de *Hilbert-Schmidt*.

PROBLÈME 3

Opérateurs de décalage

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel, de dimension infinie, séparable, et soit $(e_1, e_2, \dots, e_n, \dots)$ une base hilbertienne de cet espace.

1) Démontrez qu'en posant $A(e_n) = e_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, on définit un unique $A \in \mathcal{L}(E)$. Démontrez que A est une isométrie. Caractérisez $\text{Im}(A)$ et démontrez que c' est un fermé de E .

2) Déterminez $B = A^*$ (l'adjoint de A). Calculez $\|B\|$. Étudiez $\text{Ker}(B)$ et $\text{Im}(B)$. Démontrez que $E = \text{Ker}(B) \oplus \text{Im}(A)$. Calculez $A \circ B$ et $B \circ A$.

3) Pour tout k entier ≥ 1 , on considère les applications linéaires continues $A_k = A^k = A \circ A \circ \dots \circ A$ [k fois], et $B_k = B^k$. Étudiez pour A_k et B_k les mêmes propriétés que pour A et B dans 1) et 2).

4) Étudiez pour tout $u \in E$ la convergence des suites $(A_k(u))$ et $(B_k(u))$.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 3

1) Soit $u \in E : u = \sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n)e_n$. Si $A \in \mathcal{L}(E)$, A est déterminé de façon unique par :

$$A(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n)A(e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n)e_{n+1} = \lim_{N \rightarrow \infty} [(u|e_1)e_2 + \cdots + (u|e_N)e_{N+1}]$$

Réciproquement, $A(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N (u|e_n)e_{n+1}$ (en norme dans E) définit un opérateur linéaire

$$A, \text{ et : } \|A(u)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (u|e_n)^2 = \|u\|^2.$$

A est donc une isométrie linéaire de E dans E : A est par conséquent continue de norme 1 et injective, $\text{Ker}(A) = \{0\}$. ♦

Remarque : Si l'on identifie E à ℓ^2 à l'aide de la base hilbertienne $(e_n)_n$, A opère de la façon suivante sur ℓ^2 :

$$A(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots).$$

Soit φ définie par $\varphi(u) = (u|e_1) : \varphi \in E'$, et :

$\text{Ker}(\varphi) = \text{adh}([(e_2, e_3, \dots, e_n, \dots)]) = \text{Im}(A) = \{u \in E / (u|e_1) = 0\}$; φ est continue et $\text{Im}(A)$ est fermé dans E . ♦

2) $B = A^* \iff \forall u \in E, \forall v \in E : (A(u)|v) = (u|B(v))$. Pour tout $n \geq 1$, on doit donc avoir ; $(A(e_n)|v) = (e_n|B(v)) = (e_{n+1}|v)$.

Donc : $(B(v)|e_1) = (v|e_2), \dots, (B(v)|e_n) = (v|e_{n+1}), \dots \implies$

$$\forall v \in E : B(v) = \lim_{N \rightarrow \infty} [(v|e_2)e_1 + \cdots + (v|e_N)e_{N+1}] = \sum_{n=2}^{\infty} (v|e_n)e_{n-1}.$$

Autrement dit : $B(e_1) = 0$ et $B(e_n) = e_{n-1}$ pour $n \geq 2$. ♦

Remarque : Si l'on identifie E à ℓ^2 , via $(e_n)_n$, B opère de la façon suivante sur ℓ^2 :

$$B(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots).$$

$B \in \mathcal{L}(E)$ (cours : $A \in \mathcal{L}(E) \implies A^* \in \mathcal{L}(E)$). $B(v) = 0 \iff v = \lambda e_1$, où $\lambda \in \mathbb{R} : \text{Ker}(B) = [e_1]$ est fermé dans E car de dimension finie 1. Clairement B est surjective : $\text{Im}(B) = E$.

$$\|B(v)\|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} (v|e_n)^2 = \|v\|^2 - (v|e_1)^2 \leq \|v\|^2 ; \text{ donc } \|B\| \leq 1.$$

Soit $K = \{v \in E / \|v\| = 1 \text{ et } (v|e_1) = 0\}$; $\forall v \in K : \|B(v)\| = \|v\|$, la norme - atteinte sur $B(0, 1]$ - vaut donc 1 : $\|B\| = 1$.

Nota : on pouvait s'y attendre, puisque $\|A^*\| = \|A\|$ (cours).

Notons que B est une isométrie sur $[e_1]^\perp$ (isométrie dite « partielle »).

$e_1 \notin \text{Ker}(\varphi) \implies E = \text{Ker}(\varphi) \oplus [e_1]$ (cours) = $\text{Im}(A) \oplus \text{Ker}(B)$. ♦

$$\begin{aligned} (A \circ B)(v) &= A\left(\sum_{n=2}^{\infty} (v|e_n)e_{n-1}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} (v|e_n)e_n = v - (v|e_1)e_1 \\ &= (Id_E - P_{[e_1]})(v) = P_{[e_1]^\perp}(v), \end{aligned}$$

où $P_{[e_1]}$ (resp. $P_{[e_1]^\perp}$) est la projection orthogonale sur $[e_1]$ (resp. $[e_1]^\perp$) :

$$A \circ B = P_{[e_1]^\perp}. \quad \blacklozenge$$

$$(B \circ A)(v) = B\left(\sum_{n=1}^{\infty} (v|e_n)e_{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (v|e_n)e_n = v = Id_E(v) : B \circ A = Id_E. \quad \blacklozenge$$

B est inverse à gauche de A ($\iff A$ inverse à droite de B), mais A n'a pas d'inverse à droite.

3) Il est facile de voir que : $A_k(v) = \sum_{n=1}^{\infty} (v|e_n)e_{n+k}$, et que : $B_k(v) = \sum_{n=k+1}^{\infty} (v|e_n)e_{n-k}$. Soit,

en identifiant E à ℓ^2 via $(e_n)_n$:

$$A_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (0, \dots, 0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) \text{ [} k \text{ fois 0 au début]}, \text{ et :}$$

$$B_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (\xi_{k+1}, \xi_{k+2}, \dots, \xi_n, \dots).$$

$$\|A_k(v)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (v|e_n)^2 = \|v\|^2 : A_k \text{ est une isométrie.}$$

$\text{Im}(A_k) = \text{Ker}(\varphi_1) \cap \cdots \cap \text{Ker}(\varphi_k)$ où $\varphi_i(u) = (u|e_i)$; intersection finie de fermés, $\text{Im}(A_k)$ est fermé. ♦

B_k est surjective (évident) et $\text{Ker}(B_k) = [(e_1, \dots, e_k)]$ de dimension finie donc fermé. ♦

$E = \text{Ker}(B_k) \oplus \text{Im}(A_k) = [(e_1, \dots, e_k)] \oplus \text{adh}([(e_{k+1}, \dots)])$ (facile). ♦

$B_k \circ A_k = Id_E$ (facile) et $A_k \circ B_k = Id_E - P_{[e_1, \dots, e_k]} = P_{[e_1, \dots, e_k]}^\perp$ (facile). ♦

$B_1 = B$ est l'adjoint de $A = A_1$. Prouvons par récurrence que B_k est l'adjoint de A_k . Si $B_k = A_k^*$, on a : $\forall u \in E, \forall v \in E$:

$$\begin{aligned} (A_{k+1}(u)|v) &= (A_k \circ A(u)|v) = (A(u)|A_k^*(v)) = (A(u)|B_k(v)) \\ &= (u|A^* \circ B_k(v)) = (u|B \circ B_k(v)) = (u|B_{k+1}(v)), \end{aligned}$$

d'où : $B_{k+1} = A_{k+1}^*$ (on aurait aussi pu appliquer directement la formule donnant l'adjoint d'une composée). ♦

4) $\forall u \in E : \|B_k(u)\|^2 = \sum_{n=k+1}^{\infty} (u|e_n)^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$: le reste d'une série convergente tend vers 0. ♦

$$\begin{aligned} \|A_{k+p}(u) - A_k(u)\|^2 &= \|A_{k+p}(u)\|^2 - 2(A_{k+p}(u)|A_k(u)) + \|A_k(u)\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2(A_p(u)|A_k^* \circ A_k(u)) + \|u\|^2 = 2\|u\|^2 - 2(A_p(u)|u) \text{ (car} \\ &A_k^* \circ A_k = Id_E) \text{ quantité qui ne tend pas vers 0 quand } k \rightarrow \infty, \text{ sauf si } u = 0. \end{aligned}$$

$(A_k(u))$ n'est donc convergente que si $u = 0$. On vient en fait de montrer que l'application $* : A \mapsto A^*$ n'est pas continue pour une certaine topologie dont nous ne parlerons pas ici. ♦

Les applications A_k, B_k sont appelées (on voit bien pourquoi) « opérateurs de décalage ».

PROBLÈME 4

Un calcul de distance

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel séparable, et soit $(e_n)_{n \geq 1}$, une base hilbertienne de E . On pose : $A = \{(1 + \frac{1}{p})e_p / p \text{ entier } \geq 1\}$ et $A_n = A \cup \{-e_n\}$, pour n entier ≥ 1 .

1) Soit $u \in E$. Démontrez que $d(u, A) \leq \sqrt{\|u\|^2 + 1}$, et en déduire que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u, A_n) = d(u, A)$.

On considère à présent le sous-espace métrique F de E défini par :

$$F := \{0\} \cup A \cup \{-e_n / n \text{ entier } \geq 1\}.$$

2) Déterminez la boule $U = B(0, 1]$ relative à l'espace métrique F . Calculez $d(A_n, U)$ et $d(A, U)$. A-t-on $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, U) = d(U, A)$?

CORRIGÉ DU PROBLÈME 4

$$1) \forall p \geq 1 : d(u, A) \leq \|u - (1 + \frac{1}{p})e_p\| = \sqrt{\|u\|^2 - 2(1 + \frac{1}{p})(u|e_p) + (1 + \frac{1}{p})^2}.$$

Faisons tendre p vers l'infini. On a $\lim_{p \rightarrow \infty} (u|e_p) = 0$ (coefficients de Fourier), et en vertu du

principe de prolongement des inégalités : $d(u, A) \leq \sqrt{\|u\|^2 + 1}$. ♦

On sait [Exercice 3.3 du chap. I] que $d(u, X \cup Y) = \min\{d(u, X), d(u, Y)\}$. Donc :

$$\begin{aligned} d(u, A_n) &= \min\{d(u, \{-e_n\}), d(u, A)\} = \min\{\|u - (-e_n)\|, d(u, A)\} \\ &= \min\{\|u + e_n\|, d(u, A)\}. \end{aligned}$$

$$\|u + e_n\| = \sqrt{\|u\|^2 + 2(u|e_n) + 1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sqrt{\|u\|^2 + 1}.$$

D'autre part il est facile de vérifier [car $\min\{s, t\} = \frac{1}{2}[s + t - |s - t|]$ que si $(\alpha_n) \rightarrow \alpha$ et $(\beta_n) \rightarrow \beta$ on a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \min\{\alpha_n, \beta_n\} = \min\{\alpha, \beta\}$.

Donc : $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u, A_n) = \min\{\sqrt{\|u\|^2 + 1}, d(u, A)\}$, et d'après ce qui précède :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(u, A_n) = d(u, A). \quad \blacklozenge$$

2) $U = B_F(0, 1) = \{u \in F / d(u, 0) = \|u\| \leq 1\} = \{0\} \cup \{-e_n / n \geq 1\}$.

Bien remarquer que F étant un sous-espace métrique, sa distance est la distance induite par celle de E , i.e. $d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u - v | u - v)}$.

En particulier, on a dans F : $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u, A_n) = d(u, A)$ comme dans E .

$d(A_n, U) = 0$ pour tout n car $-e_n \in A_n \cap U$.

Toujours d'après l'Exercice 3.3 du Chap. I : $d(A, U) = \min\{d(\{0\}, A), d(\{-e_n / n \geq 1\}, A)\}$.

$$d(\{0\}, A) = \inf_{p \geq 1} \|(1 + \frac{1}{p})e_p\| = \inf_{p \geq 1} (1 + \frac{1}{p}) = 1.$$

$$\begin{aligned} d(\{-e_n / n \geq 1\}, A) &= \inf_{n \geq 1} \inf_{p \geq 1} \|e_n + (1 + \frac{1}{p})e_p\| \\ &= \inf_{n \geq 1} \inf_{p \geq 1} \sqrt{1 + 2(1 + \frac{1}{p})(e_n | e_p) + (1 + \frac{1}{p})^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Si } n = p, \text{ on a : } \inf_{p \geq 1} \sqrt{1 + 2(1 + \frac{1}{p}) + (1 + \frac{1}{p})^2} = 2,$$

$$\text{et si } n \neq p : \inf_{p \geq 1} \sqrt{1 + (1 + \frac{1}{p})^2} = \sqrt{2},$$

donc $d(\{-e_n / n \geq 1\}, A) = \min\{\sqrt{2}, 2\} = \sqrt{2}$.

Finalement : $d(A, U) = \min\{1, \sqrt{2}\} = 1$. On n'a donc pas $\lim_{n \rightarrow \infty} d(A_n, U) = d(A, U)$. ♦

PROBLÈME 5

Un espace de Hilbert et son dual

On rappelle que ℓ^2 est l'espace de Hilbert des suites de réels $x = (\xi_n)_{n \geq 1}$, vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty$; le produit scalaire est : $(x|y) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \eta_n$, et la norme associée est :

$\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2}$. La famille (e_n) , $n \geq 1$, où $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ [1 à la n -ième place, 0 ailleurs] est une base hilbertienne de ℓ^2 .

Soit E l'ensemble des suites de réels $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (\xi_n)_n$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2}{n^2} < \infty$, i.e. telles que $(\frac{\xi_n}{n})_n \in \ell^2$.

1) Démontrez que $\ell^2 \subset E$, et donnez un exemple de suite de E n'appartenant pas à ℓ^2 . Démontrez que E est un espace vectoriel réel. Pour $x = (\xi_n) \in E$, $y = (\eta_n) \in E$, on pose : $[x|y] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n \eta_n}{n^2}$, et $[[x]] = \sqrt{[x|x]}$.

2) a) Démontrez que $(E, [\cdot|\cdot])$ est un espace préhilbertien réel. Sur ℓ^2 , les normes $\|\cdot\|$ et $[[\cdot]]$ sont-elles équivalentes ?

b) On définit $V : \ell^2 \rightarrow E$ par $V((\xi_n)) = (n \cdot \xi_n)_n$. Démontrez que V est une isométrie linéaire surjective. Déduisez-en que $(E, [\cdot|\cdot])$ est un espace de Hilbert réel.

Soit $F \subset \ell^2$ l'ensemble des suites $x = (\xi_n)$ telles que $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \xi_n < \infty$.

Pour $x \in F$, $y \in F$, on pose : $\{x|y\} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \cdot \xi_n \eta_n$, et : $\{\{x\}\} = \sqrt{\{x|x\}}$.

On définit $U : F \rightarrow \ell^2$ par : $U((\xi_n)) = (n \cdot \xi_n)_n$.

3) a) Démontrez que $(F, \{\cdot|\cdot\})$ est un espace de Hilbert réel et que U est une isométrie linéaire surjective.

b) Démontrez que $(\frac{1}{n}e_n)$ est une base orthonormale de $(F, \{\cdot|\cdot\})$.

4) a) Démontrez qu'il existe une isométrie linéaire surjective du dual topologique F' de F sur E .

Indications : à $a = (\alpha_n) \in E$, faites correspondre φ telle que $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n$ pour tout $x = (\xi_n) \in F$; et posez $f(a) = \varphi$. Inversement, à $\varphi \in F'$, faites correspondre $g(\varphi) = (\varphi(e_n)) \in E$ [utilisez 3) b)]

b) Exprimez l'isométrie de Riesz $J : F \rightarrow F'$, ainsi que son inverse, en fonction des applications U, V, f, g .

CORRIGÉ DU PROBLÈME 5

1) $(\xi_n) \in \ell^2 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty$; donc $\ell^2 \subset E$. ♦

La suite $x_0 = (1, 1, \dots, 1, 1, \dots)$ n'appartient pas à ℓ^2 (!), mais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, et donc $x_0 \in E$. ♦

L'ensemble de toutes les suites, i.e. des applications $\mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$, est un espace vectoriel réel S ; il suffit donc de prouver que E est un sous-espace vectoriel de cet espace S .

Soient $x = (\xi_n)$ et $y = (\eta_n)$ dans E . Montrons que $x + y = (\xi_n + \eta_n) \in E$, i.e. que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi_n + \eta_n)^2}{n^2} < \infty.$$

Mais, pour tous réels :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a| \cdot |b| + b^2 \leq a^2 + 2\frac{a^2 + b^2}{2} + b^2 = 2(a^2 + b^2), \text{ d'où :}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi_n + \eta_n)^2}{n^2} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2}{n^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2}{n^2} < \infty, \text{ ce qui est le résultat cherché. ♦}$$

Trivialement, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (\xi_n) \in E : \lambda(\xi_n) = (\lambda\xi_n) \in E$. ♦

$$2) \text{ a) Soient } (\xi_n) \in E, (\eta_n) \in E : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n \eta_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n} \times \frac{\eta_n}{n} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2}{n^2}} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2}{n^2}} < \infty$$

[on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les séries], et

$$[(\xi_n) | (\eta_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n \eta_n}{n^2} \text{ définit donc bien un réel. ♦}$$

$$\forall x, y, z \in E : [x + y | z] = [x | z] + [y | z] \text{ est évident (propriétés des réels et de } \sum_{n=1}^{\infty} \text{). ♦}$$

$$\forall x, y \in E : [y | x] = [x | y] \text{ est aussi évident. ♦}$$

$$[x | x] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2}{n^2} = 0 \implies \forall n \geq 1 : \frac{\xi_n}{n^2} = 0 \implies \forall n \geq 1, \xi_n = 0, \text{ d'où : } x = 0. \text{ ♦}$$

On vient de vérifier que $[\cdot | \cdot]$ est un produit scalaire sur E , et $(E, [\cdot | \cdot])$ est un espace préhilbertien. ♦

Sur le sous-espace vectoriel ℓ^2 de E , les normes $\|\cdot\|$ et $[[\cdot]]$ ne sont pas équivalentes. En effet, on a : $[[x]]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n^2}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 = \|x\|^2$, soit, $\forall x \in \ell^2 : [[x]] \leq \|x\|$; mais supposons qu'il

existe $C > 0$ tel que $\forall x \in \ell^2 : \|x\| \leq C[[x]]$. Soit $x_p = (1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots) \in \ell^2$ [$p \geq 1$, p fois le nombre 1, puis 0].

$$\forall p, \text{ on aurait : } \|x_p\|^2 = p \leq C[[x_p]]^2 = C \sum_{n=1}^p \frac{1^2}{n^2} \leq C \frac{\pi^2}{6}, \text{ ce qui est impossible. ♦}$$

b) On pose $V((\xi_n)) := (n\xi_n)$ pour tout $(\xi_n) \in \ell^2$. V est bien à valeurs dans E , car si $(\xi_n) \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\xi_n)^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 < \infty$. ♦

Que V est linéaire est évident. ♦

V est isométrique car

$$\forall x = (\xi_n) \in \ell^2 : [[V((\xi_n))]]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n\xi_n)^2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 = \|(\xi_n)\|^2, \text{ soit } [[V(x)]] = \|x\|. \text{ ♦}$$

V est surjective : en effet, si $(\eta_n) \in E$, considérons la suite définie par $\zeta_n := \frac{\eta_n}{n}$; $(\zeta_n) \in \ell^2$ car $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_n^2}{n^2} < \infty$, et $V((\zeta_n)) = (n \cdot \frac{\eta_n}{n}) = (\eta_n)$. ♦

Puisque ℓ^2 est un espace de Hilbert (i.e. est complet, c'est du cours), et puisque ℓ^2 est isométrique à E (V bijection linéaire et isométrie), E est complet, et est donc un espace de Hilbert. ♦

3) a) Remarquons que F est un sous-ensemble de ℓ^2 , car si $(\xi_n) \in F$:

$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n^2 < \infty$. On démontre ensuite, *mutatis mutandis* dans 1) et 2), que F est un sous-espace vectoriel de E (ou de ℓ^2 , comme on veut), et que $(F, \{\cdot\})$ est un espace préhilbertien. Notons que les normes $\{\{\cdot\}\}$ et $\|\cdot\|$ sur F ne sont pas équivalentes (montrez-le).

De manière similaire à ce qui a été fait dans 2), on démontre que :

$U : F \rightarrow \ell^2$, $(\xi_n) \mapsto U((\xi_n)) := (n\xi_n)$ est bien définie, linéaire, surjective, isométrique. Par conséquent, $(F, \{\cdot\})$ est un espace de Hilbert. ♦

b) Clairement, $\frac{e_n}{n} \in F$, et $\{\frac{e_p}{p} | \frac{e_q}{q}\} = 0$ pour $p \neq q$. $\{\{\frac{e_p}{p}\}\} = \sqrt{\frac{p^2}{p^2}} = 1$. Donc, la famille $(\frac{e_n}{n})$ est orthonormale. ♦

Démontrons qu'elle constitue une base orthonormale de F .

Soit $x = (\xi_n) \in F \iff \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n^2 < \infty$.

$$\{(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) - (\xi_1, \dots, \xi_n, 0, \dots)\}^2 = \{(0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \dots)\}^2 = \sum_{p=n+1}^{\infty} p^2 \xi_p^2,$$

et ce dernier terme tend vers 0, quand $n \rightarrow \infty$, comme reste d'une série convergente.

On peut donc écrire : $x = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$, où la série est convergente au sens de la norme $\{\{\cdot\}\}$,

soit : $x = \sum_{n=1}^{\infty} (n\xi_n) \times \frac{e_n}{n}$, où $(n\xi_n) = (\{x | \frac{e_n}{n}\}) \in \ell^2$ (coefficient de Fourier).

Finalement, $(\frac{e_n}{n})$ est une base orthonormale (ou : base hilbertienne) de l'espace de Hilbert $(F, \{\cdot\})$. ♦

4) a) Démontrons qu'il existe une isométrie linéaire surjective « naturelle » de F' sur E , ce qui nous permettra d'« identifier » ces deux e.v.n.

Soit $a = (\alpha_n) \in E$, et posons pour tout $x = (\xi_n) \in F$: $\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n$.

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\alpha_n}{n})(n\xi_n) \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n^2} < \infty$ (inégalité de Cauchy-Schwarz pour les séries) : donc $\varphi(x) \in \mathbb{R}$.

Il est facile de voir que φ est linéaire.

L'inégalité ci-dessus montre que : $|\varphi(x)| \leq [[a]] \cdot \{\{x\}\}$, c'est-à-dire que φ est continue de norme $\leq [[a]]$. En d'autres termes : $\varphi \in F'$.

On peut donc définir une application $f : E \rightarrow F'$, $a \mapsto f(a) := \varphi = \varphi_a$. Il est facile de voir que f est linéaire.

Soit maintenant $\varphi \in F'$. On a vu dans 3) b) que tout $x \in F$ s'écrit, d'une manière unique :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \frac{e_n}{n}, (\zeta_n) \in \ell^2. \text{ On a } (\varphi \text{ continue}) : \varphi(x) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \frac{e_n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \varphi\left(\frac{e_n}{n}\right).$$

Posons $\alpha_n := \varphi\left(\frac{e_n}{n}\right)$. Montrons que $(\alpha_n) \in E$:

$$|\alpha_n| \leq \|\varphi\|' \{\{\frac{e_n}{n}\}\} = \|\varphi\|' \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{n^2} \leq \|\varphi\|'^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty.$$

On a donc défini une application $g : F' \rightarrow E$, $\varphi \mapsto a := (\alpha_n)$, où $\alpha_n = \varphi\left(\frac{e_n}{n}\right)$.

Il est aisé de prouver que f et g sont deux applications inverses l'une de l'autre (alors g est linéaire). Reste à prouver que f ou g est isométrique, et on aura terminé.

$\|f(a)\|' = \|\varphi_a\|' \leq [[a]]$, on l'a vu.

D'autre part :

$$\|\varphi_a\|' = \sup_{x \in F, x \neq 0} \frac{|\varphi_a(x)|}{\{\{x\}\}} \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n\right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n^2\right)^{-1/2} \text{ pour tout } x \in F \setminus \{0\}.$$

Ecrivons que l'on a : $(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n) (\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n^2)^{-1/2} = [[a]] = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{n^2}}$ si et seulement si l'on a : $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \xi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n} n \xi_n = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n^2}$.

On voit qu'il suffit de prendre $\xi_n := \frac{\alpha_n}{n^2}$ pour assurer cette égalité ;

$$(\xi_n) \in F \text{ car : } \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{\alpha_n}{n^2}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{n^2} \leq \|\varphi\|' \times \frac{\pi^2}{6}.$$

Finalement, $\|f(a)\|' = [[a]]$, et f est une isométrie. ♦

b) Déterminons l'isométrie de Riesz $J : F \rightarrow F'$ en utilisant les applications U, V, f, g . Considérons l'application $K := V \circ U : F \rightarrow \ell^2 \rightarrow E, (\xi_n) \mapsto (n^2 \xi_n)$.

$\forall y = (\eta_n) \in F : (f[K(x)])(y) = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \xi_n) \eta_n = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \xi_n \eta_n = \{x|y\} = [J(x)](y)$ (par définition de J et pour le premier =, voir a)).

Soit : $J = f \circ K = f \circ V \circ U$. Evidemment : $J^{-1} = U^{-1} \circ V^{-1} \circ f^{-1} = U^{-1} \circ V^{-1} \circ g$. ♦

Si l'on part de l'espace de Hilbert $(F, \{|\cdot|\}) \subset \ell^2$, on voit qu'on est obligé de sortir de ℓ^2 pour trouver un espace de Hilbert assez grand, $(E, \{|\cdot|\})$, qui soit isométrique à F' ; et on voit que l'isométrie de Riesz est une application relativement « compliquée » (en gros, c'est $(\xi_n) \mapsto (n^2 \xi_n)$).

Il est plutôt imprudent de dire qu'un espace de Hilbert est « égal » à son dual . . .

PROBLÈME 6

Un contre-exemple sur la projection orthogonale

Soit $(E, (\cdot|\cdot))$ un espace de Hilbert réel séparable, de dimension infinie. Soit $(e_0, e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots)$ une base hilbertienne de E , c'est-à-dire une suite orthonormale et totale de E . On considère les sous-espaces vectoriels suivants de E :

$$F = \left\{ u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n / \forall n \text{ pair} : \lambda_n = 0 \right\},$$

$$G = \left\{ u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n / \forall n \text{ impair} : \lambda_n = 0 \right\}.$$

1) a) Démontrez que F et G sont fermés dans E et sont orthogonaux. Donnez une base hilbertienne de F et de G .

On note $[e_0] = \mathbb{R} \cdot e_0$ le sous-espace vectoriel engendré par e_0 .

b) Démontrez qu'on a les résultats suivants, où les sommes directes \oplus sont topologiques :

$$E = F \oplus G \oplus [e_0], F^\perp = G \oplus [e_0], G^\perp = F \oplus [e_0], (F \oplus G)^\perp = [e_0], [e_0]^\perp = F \oplus G, ([e_0] \oplus F)^\perp = G, ([e_0] \oplus G)^\perp = F.$$

2) a) Explicitiez les projections orthogonales $P_{[e_0]}, P_F, P_G, P_{F \oplus G}$ par leur valeur sur $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n$.

On pose : $w = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$.

b) Calculez : $d(w, [e_0]), d(w, F), d(w, G)$.

(On rappelle que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$)

Vérifiez que $d^2(w, F) + d^2(w, G) = \|w\|^2 + 1$.

On pose : $H = [w, e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots]$ (espace vectoriel engendré par les vecteurs entre crochets), et $X = F \cap H, Y = G \cap H$.

3) a) Démontrez que tout vecteur u de H s'écrit :

$$u = \lambda_0 e_0 + \sum_{n=1}^p \lambda_n e_n + \lambda_0 \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n,$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda_n \in \mathbb{R}$. Démontrez que H est partout dense dans E .

b) Déterminez $\text{adh } X$ et $\text{adh } Y$ par rapport à E et à F .

Déterminez l'orthogonal par rapport à l'espace préhilbertien H des espaces X et Y .

Démontrez que $d^2(w, X) + d^2(w, Y) > \|w\|^2$. Ce résultat contredit-il un théorème du cours ? Pourquoi ?

CORRIGÉ DU PROBLÈME 6

1) a) On applique à l'espace préhilbertien F le Théorème 1.1 du Chap. XIX, point (1.5) \iff point (1.7) : F est l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par $(e_1, e_3, \dots, e_{2n+1}, \dots)$. Donc F est fermé. De plus $(e_1, e_3, \dots, e_{2n+1}, \dots)$ est une base hilbertienne de F . De même $G = \text{adh}([e_2, e_4, \dots, e_{2n}, \dots])$ est fermé, et $(e_2, e_4, \dots, e_{2n}, \dots)$ est une base hilbertienne de G . \blacklozenge

Par conséquent F et G sont des espaces de Hilbert, car fermés dans E complet. \blacklozenge

D'après le même Théorème, point (1.8), si $u \in F$ et $v \in G$: $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2n+1} e_{2n+1}$, et $v = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n} e_{2n}$, d'où : $(u|v) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \mu_n = 0$ car si n pair $\lambda_n = 0$ et si n impair $\mu_n = 0$.

Donc F et G sont des sous-espaces orthogonaux de E . \blacklozenge

b) Puisque $(e_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de E , tout $u \in E$ s'écrit de manière unique :

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n = \lambda_0 e_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2n+1} e_{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} e_{2n},$$

où $\lambda_0 e_0 \in [e_0]$, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2n+1} e_{2n+1} \in F$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} e_{2n} \in G$.

D'autre part $[e_0] \cap F = \{0\} = [e_0] \cap G = F \cap G$. Donc : $E = [e_0] \oplus F \oplus G$, et cette somme est directe topologique d'après le Théorème 4.2 du Chap. XVII ($[e_0], F, G$ sont complets). \blacklozenge

D'après ce même Théorème, on a les résultats suivants concernant les orthogonaux :

$$F^\perp = [e_0] \oplus G; \quad G^\perp = [e_0] \oplus F; \quad (F \oplus G)^\perp = [e_0]; \quad [e_0]^\perp = F \oplus G; \quad ([e_0] \oplus F)^\perp = G; \quad ([e_0] \oplus G)^\perp = F. \quad \blacklozenge$$

2) a) Soit $u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n$. D'après les formules (1.9) du Chap. XIX on a immédiatement :

$$P_{[e_0]}(u) = \lambda_0 e_0; \quad P_F(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_{2n+1} e_{2n+1}; \quad P_G(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{2n} e_{2n}; \quad P_{F \oplus G}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n. \quad \blacklozenge$$

$$b) \quad w = e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n.$$

$$[d(w, [e_0])]^2 = \|w - P_{[e_0]}(w)\|^2 = \|e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n - e_0\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(on a appliqué l'égalité de Parseval et la définition de la projection).

$$\text{Donc } d(w, [e_0]) = \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

$$\begin{aligned} [d(w, G)]^2 &= \|w - P_G(w)\|^2 = \left\| e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} e_{2n} \right\|^2 = \left\| e_0 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} e_{2n+1} \right\|^2 \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } d(w, G) = \sqrt{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}} = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{8}}. \quad \blacklozenge$$

$$\begin{aligned}
 [d(w, F)]^2 &= \|w - P_F(w)\|^2 = \|e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} e_n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} e_{2n+1}\|^2 = \|e_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} e_{2n}\|^2 \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = 1 + \frac{1}{4} \times \frac{\pi^2}{6}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } d(w, F) = \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{24}}.$$

$$\text{D'autre part : } \|w\|^2 = \|e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n\|^2 = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{\pi^2}{6}.$$

Finalemnt :

$$d^2(w, [e_0]) + d^2(w, F) + d^2(w, G) = \frac{\pi^2}{6} + 1 + \frac{\pi^2}{8} + 1 + \frac{\pi^2}{24} = 2 + 2\frac{\pi^2}{6} = 2\|w\|^2.$$

$$d^2(w, F) + d^2(w, G) = 1 + 1 + \frac{\pi^2}{6} = 1 + \|w\|^2. \blacklozenge$$

3) a) Soit $u \in H$, u s'écrit :

$$u = \lambda w + \sum_{n=1}^p \mu_n e_n = \lambda e_0 + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n + \sum_{n=1}^p \mu_n e_n = \lambda e_0 + \lambda \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n + \sum_{n=1}^p (\frac{\lambda}{n} + \mu_n) e_n.$$

Il suffit de poser $\lambda = \lambda_0$ et $\lambda_n = \frac{\lambda}{n} + \mu_n$ pour $1 \leq n \leq p$. \blacklozenge

Puisque E est un espace de Hilbert, d'après le Corollaire 4.1 du Chap. XVII :

$$H \text{ dense dans } E \iff (\forall u \in H : (u|v) = 0) \implies v = 0).$$

Soit donc $v = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n \in E$.

$$\forall u \in H : (u|v) = 0 \implies \forall n \geq 1 : (e_n|v) = \xi_n = 0 \implies v = \alpha e_0.$$

Faisant $u = w \in H : (w|v) = (e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n | \alpha e_0) = 0 = \alpha$. D'où $v = 0$. Donc H est dense dans E . En particulier $H^\perp = \{0\}$. \blacklozenge

b) Puisque X contient tous les e_{2n+1} (c'est le sous-espace engendré par ces vecteurs), X est dense dans F qui est l'espace fermé engendré par ces vecteurs ; d'ailleurs, comme F est fermé dans $E : \text{adh}_E(X) = \text{adh}_F(X) = F$. De la même façon : $\text{adh}_E(Y) = \text{adh}_G(Y) = G$. Par contre, $\text{adh}_H(X) = \text{adh}_E(X) \cap H = F \cap H = X$; et $\text{adh}_H(Y) = Y$. \blacklozenge

Notons $(X^\perp)_H$ l'orthogonal de X par rapport à l'espace préhilbertien (non complet !) H ; $u \in (X^\perp)_H \iff \forall x \in X : (u|x) = 0$.

$$\text{Comme } u \in H, \text{ on peut l'écrire } u = \lambda e_0 + \sum_{n=1}^p \lambda_n e_n + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\lambda}{n} e_n.$$

En faisant $x = e_1, e_2, \dots, e_{2n+1}, \dots$, il vient :

$$(u|e_1) = 0 = \lambda_1, \dots, (u|e_{2k+1}) = 0 = \lambda_{2k+1} \text{ pour } 2k+1 \leq p; \text{ pour } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } p+k \text{ impair, on a } (u|e_{p+k}) = 0 = \frac{\lambda}{p+k} \implies \lambda = 0.$$

Donc $u = \sum_{2 \leq 2n \leq p} \lambda_{2n} e_{2n} \in Y$. La réciproque est évidente, et donc : $(X^\perp)_H = Y$. De même : $(Y^\perp)_H = X$. Par conséquent, X et Y sont deux sous-espaces vectoriels de H qui sont mutuellement orthogonaux dans cet espace. \blacklozenge

Le calcul de $d(w, X)$ est facile car on sait que $d(w, X) = d(w, \text{adh}_E(X))$ [formule (3.14) du Chapitre I] ; on a donc : $d^2(w, X) + d^2(w, Y) = 1 + \|w\|^2$ comme cela a été calculé dans 2) b). On a donc en particulier $d^2(w, X) + d^2(w, Y) > \|w\|^2$.

Cela peut sembler contradictoire avec les résultats sur les espaces mutuellement orthogonaux donnés par le Théorème 4.2 du Chap. XVII, en particulier avec la formule

$$\|w\|^2 = \|P_X(w)\|^2 + \|P_{X^\perp}(w)\|^2 = \|w - P_{X^\perp}(w)\|^2 + \|w - P_X(w)\|^2 \dots$$

En fait il n'y a (heureusement !) pas de contradiction : on vient simplement de montrer, par un exemple, que le Th. en question ne peut pas être étendu à des sous-espaces non complets.

Notons d'ailleurs que les projections $P_X(w)$ et $P_{X^\perp}(w)$ du Th. n'existent pas. \blacklozenge

Ce contre-exemple est dû à Michel Valadier (Univ. de Montpellier).

PROBLÈME 7

La base hilbertienne de Haar

Soit E l'ensemble des fonctions $u : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ qui sont : bornées, réglées (i.e. limite uniforme de fonctions en escalier), continues à droite en tout point de $[0, 1[$.

Nota : si $u \in E$, l'intégrale $\int_0^1 u(t) dt$ existe car u est intégrable au sens des fonctions réglées et bornées, ou bien car u est intégrable au sens de Riemann. La connaissance de l'intégrale de Lebesgue n'est pas nécessaire. Mais le cadre le plus naturel du problème serait l'espace de Hilbert $L^2(0, 1)$.

1) Démontrez que la fonction $(u, v) \in E \times E \mapsto (u|v) := \int_0^1 u(t) \cdot v(t) dt$ est un produit scalaire sur E . On notera $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire. Démontrez que l'espace préhilbertien $(E, (\cdot|\cdot))$ n'est pas un espace de Hilbert.

Indication : on peut utiliser le « sinus des topologues » $w : t \mapsto \sin(1/t)$.

On définit une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E de la manière suivante :

u_0 est la fonction constante égale à 1 sur $[0, 1[$.

Pour $n \geq 1$, soit r le plus grand entier ≥ 0 tel que $2^r \leq n$ [i.e. que r est défini par : $2^r \leq n < 2^{r+1}$], et soit $k := n - 2^r$ ($0 \leq k \leq 2^r - 1$). u_n est définie par :

$$\begin{cases} u_n(t) := \frac{2^r}{2} & \text{pour } t \in \left[\frac{2k}{2^{r+1}}, \frac{2k+1}{2^{r+1}} \right[, \\ u_n(t) := -\frac{2^r}{2} & \text{pour } t \in \left[\frac{2k+1}{2^{r+1}}, \frac{2k+2}{2^{r+1}} \right[, \\ u_n(t) := 0 & \text{partout ailleurs dans } [0, 1[\end{cases}$$

2) Démontrez que $(u_n)_{n \geq 0}$ est un système orthonormal dans $(E, (\cdot|\cdot))$.

Indication : il convient de bien comprendre comment sont construites les u_n , avant d'effectuer tout calcul. N'hésitez pas à dessiner, les uns au dessous des autres, les graphes (très simples) des u_n jusqu'à $n = 15$ (i.e. $r = 0, 1, 2, 3$)...

3) Soit, pour tout $n \geq 0$ fixé, F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par u_0, u_1, \dots, u_n . Démontrez que pour tout $v \in E$, et pour tout n , il existe $v_n \in F_n$ unique tel que : $\|v - v_n\| = \inf_{w \in F_n} \|v - w\|$.

4) Pour tout $n \geq 0$, démontrez qu'il existe un découpage de $[0, 1[$ en $n+1$ intervalles disjoints, de la forme $[a, b[$, recouvrant $[0, 1[$, tels que dans chacun de ces intervalles toute fonction w de F_n soit constante.

Réciproquement, démontrez que toute fonction v constante sur ces intervalles appartient à F_n .

Indication : regardez bien les graphes des u_n .

5) Soit $v \in E$ et soit $v_n \in F_n$ donnée par 3). Démontrez que dans chaque intervalle $[a, b[$ où toutes les fonctions de F_n sont constantes, on a : $v_n(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b v(t) dt$.

6) Démontrez que si $v : [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur l'intervalle fermé $[0, 1]$ on a : $v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (v|u_n) \cdot u_n(t)$, où la série est uniformément convergente dans $[0, 1[$. Déduisez-en que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est totale dans $(E, (\cdot|\cdot))$, i.e. que (u_n) est une base hilbertienne de E . On admettra que l'ensemble des restrictions à $[0, 1[$ des fonctions continues sur $[0, 1]$ est partout dense dans $(E, (\cdot|\cdot))$.

CORRIGÉ DU PROBLÈME 7

1) Puisque u et v sont réglées et bornées sur $[0, 1[$, l'intégrale $\int_0^1 u(t) \cdot v(t) dt$ a un sens et définit un nombre réel (même argument avec l'intégrale de Riemann, si vous préférez celle-ci).

La fonction $(u, v) \mapsto (u|v)$ est bilinéaire parce que l'intégrale (au sens des fonctions réglées ou au sens de Riemann) est linéaire :

$$(u_1 + u_2|v) = \int_0^1 [u_1(t) + u_2(t)] \cdot v(t) dt = \int_0^1 u_1(t) \cdot v(t) dt + \int_0^1 u_2(t) \cdot v(t) dt = (u_1|v) + (u_2|v),$$

etc. La symétrie est évidente.

$\forall u \in E : (u|u) = \int_0^1 [u(t)]^2 dt \geq 0$ est une propriété de l'intégrale.

$(u|u) = 0 \implies u = 0$ sur $[0, 1[$ n'est pas évident. Mais il suffit de recopier la solution de l'Exercice 3.1 du Chapitre II en changeant l'intervalle $[0, 1]$ en $[0, 1[$ et en considérant des fonctions continues à droite sur $[0, 1[$ au lieu de fonctions continues :

$$\forall t_0 \in [0, 1[, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall t \in [0, 1[: t \in [t_0, t_0 + \eta] \implies |u(t) - u(t_0)| \leq \varepsilon \dots$$

Finalement, $(u, v) \mapsto (u|v)$ est un produit scalaire sur E qui fait de E l'espace préhilbertien $(E, (\cdot|\cdot))$. ♦

Cet espace préhilbertien n'est pas un espace de Hilbert, i.e. n'est pas complet.

Considérons en effet la fonction $w : t \mapsto \sin(\frac{1}{t})$ définie et continue sur $]0, 1[$. La suite $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$, est positive et tend vers 0, mais $(\sin(n))$ n'a pas de limite quand $n \rightarrow \infty$ (Chap. IV, Lecture). Donc w ne peut pas être prolongée en $t = 0$ par une fonction continue à droite : $w \notin E$ pour n'importe quelle valeur donnée en $t = 0$, par exemple $w(0) := 0$.

Considérons la suite de fonctions : $w_n(t) := 0$ pour $t \in [0, 1/n[$, $w_n(t) := w(t)$ pour $t \in [1/n, 1[$: $w_n \in E$ pour tout $n \geq 2$.

Cette suite est de Cauchy dans $(E, (\cdot|\cdot))$. Soient en effet $q > p$:

$$\begin{aligned} \|w_p - w_q\|^2 &= \int_0^1 [w_p(t) - w_q(t)]^2 dt \\ &= \int_0^{1/q} [0 - 0]^2 dt + \int_{1/q}^{1/p} [0 - w(t)]^2 dt + \int_{1/p}^1 [w(t) - w(t)]^2 dt \\ &= \int_{1/q}^{1/p} [w(t)]^2 dt \leq \int_{1/q}^{1/p} 1 dt = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \xrightarrow{p, q \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Supposons que (w_n) soit convergente vers $v \in E : \int_0^1 [w_n(t) - v(t)]^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

On aurait : $\int_0^{1/n} [v(t)]^2 dt + \int_{1/n}^1 [w(t) - v(t)]^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Mais v bornée $\implies \int_0^{1/n} [v(t)]^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'où : $\int_{1/n}^1 [w(t) - v(t)]^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, et : $\int_0^1 [w(t) - v(t)]^2 dt = 0$. D'après la démonstration du fait que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire : $v(t) = w(t)$ pour tout $t \in [0, 1[$: d'où $v \notin E$, une contradiction.

Il existe donc dans E une suite de Cauchy non convergente, et E n'est pas complet. ♦

2) Dessinez les graphes de u_0, u_1, \dots, u_{15} les uns au-dessous des autres, cela prend cinq minutes et vous aidera beaucoup pour y voir clair.

Cela donne en particulier l'idée de poser : $u_n = u_{2^r+k} = u_{r,k}$, où r entier ≥ 0 est déterminé par $2^r \leq n < 2^{r+1}$ et où $k = n - 2^r$ ($0 \leq k \leq 2^r - 1$). On divise la difficulté en considérant $u_{r,k}$ pour r constant, puis en faisant varier r .

Il est facile de voir que les u_n sont normés :

$$\begin{aligned} \|u_0\|^2 &= \int_0^1 1 dt = 1, \text{ et pour } n \geq 1 : \\ \|u_n\|^2 &= \int_0^1 [u_n(t)]^2 dt = 0 + \int_{\frac{2k+1}{2^{r+1}}}^{\frac{2k+1}{2^r}} (2^{r/2})^2 dt + \int_{\frac{2k+1}{2^{r+1}}}^{\frac{2k+2}{2^{r+1}}} (-2^{r/2})^2 dt + 0 \\ &= \left[\frac{2k+2}{2^{r+1}} - \frac{2k+1}{2^{r+1}} \right] \cdot 2^r = 1. \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Démontrons que $(u_p|u_q) = \int_0^1 u_p(t) \cdot u_q(t) dt = 0$ pour $q > p$.

On notera : $\Sigma(u_n) := \{t \in [0, 1[\mid u_n(t) \neq 0\}$. $\Sigma(u_n)$ est constitué par deux intervalles consécutifs.

Si $p = 2^r + k$ et $q = 2^r + h$ ($0 \leq k < h < 2^r$), on a $u_p(t) \cdot u_q(t) = 0$ sur $[0, 1[$ et donc $(u_p|u_q) = 0$; en effet $\Sigma(u_p) \cap \Sigma(u_q) = \emptyset$.

Supposons donc que $p = 2^r + k$ ($0 \leq k < 2^r$) et $q = 2^s + h$ ($0 \leq h < 2^s$) avec $r \neq s$. $2^r \leq p < 2^{r+1}$ et $2^s \leq q < 2^{s+1} \implies 2^r \leq p < q < 2^{s+1} \implies r < s + 1$, soit : $r \leq s$; $r = s$ étant déjà traité, on suppose que $r < s$. Notons bien que les points de subdivision du découpage en 2^{r+1} parties égales sont contenus dans les points de subdivision du découpage en 2^{s+1} parties égales.

Si $\Sigma(u_q)$ est contenu dans un intervalle où u_p est constante, on a $(u_p|u_q) = 0$; en effet :

- si $u_p(t) = 0$ sur cet intervalle, on a $u_p(t) \cdot u_q(t) = 0$ sur $[0, 1[$,
- si $u_p(t) = 2^{r/2} : (u_p|u_q) = 2^{r/2} \int_{\frac{2h}{2^{s+1}}}^{\frac{2h+1}{2^{s+1}}} u_q(t) dt = 0$.
- si $u_p(t) = -2^{r/2} : (u_p|u_q) = -2^{r/2} \int_{\frac{2h+1}{2^{s+1}}}^{\frac{2h+2}{2^{s+1}}} u_q(t) dt = 0$.

Il reste à voir qu'on a bien épuisé tous les cas possibles et que donc $(u_p|u_q) = 0$ pour tous p, q avec $p < q$. Les seuls cas qui pourraient paraître « litigieux » sont les suivants :

- a) $\frac{2k+1}{2^{r+1}}$ est au milieu de $\Sigma(u_q)$, b) $\frac{2k}{2^{r+1}}$ ou $\frac{2k+2}{2^{r+1}}$ est au milieu de $\Sigma(u_q)$.

Mais ces trois cas sont impossibles, pour la même raison ; voyons par exemple le premier : on aurait $\frac{2k+1}{2^{r+1}} = \frac{2h+1}{2^{s+1}} \implies 2h+1 = 2^{s-r}(2k+1)$ et comme $s > r$, on aurait : entier impair = entier pair, impossible. Sur le dessin recommandé des graphes les uns au-dessous des autres, il est bien clair que ces cas sont exclus. Si $q > p : \Sigma(u_q)$ est toujours contenu dans un intervalle où u_p est constante. ♦

3) F_n est un sous-espace vectoriel de dimension finie $\leq n+1$, et donc est un espace complet pour la norme induite (Chap. XII, Th. 2.2). Par conséquent, pour tout $n \geq 0$, tout $v \in E$ admet une projection orthogonale (meilleure approximation) unique v_n sur F_n (Chap. XVII, Th. 3.1) :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall v \in E, \exists v_n \in F_n, \forall w \in F_n : \|v - v_n\| \leq \|v - w\|. \blacklozenge$$

Remarque : les $u_p, 0 \leq p \leq n$, sont linéairement indépendantes puisque orthogonales (Chap. XIX, Exercice 1.1), et donc $\dim(F_n) = n+1$.

4) Soit $n = 2^r + k$ fixé. Les 2^{r+1} intervalles de longueur $\frac{1}{2^{r+1}}$ du découpage en 2^{r+1} parties égales répondent presque à la question, mais ils sont trop nombreux.

Considérons les intervalles de longueur $\frac{1}{2^{r+1}}$, jusqu'à $[\frac{2k}{2^{r+1}}, \frac{2k+1}{2^{r+1}}[$: au-dessus de chacun de ces intervalles, toutes les fonctions u_0, \dots, u_n sont constantes (revenir au dessin !).

Sur $[\frac{2k}{2^{r+1}}, \frac{2k+1}{2^{r+1}}[$, u_n est constante, ainsi que les u_p pour $0 \leq p \leq n-1$. De même sur $[\frac{2k+1}{2^{r+1}}, \frac{2k+2}{2^{r+1}}[$.

Ensuite, ou bien il n'y pas d'intervalle ($k = 2^r - 1$), ou bien il y en a un nombre pair $\neq 0$. Si l'on regroupe ces intervalles par groupes de 2 (contigus), on s'aperçoit que les u_p ($0 \leq p \leq n$) sont constantes au-dessus des intervalles ainsi regroupés.

S'il n'y a pas d'intervalle après $[\frac{2k+1}{2^{r+1}}, \frac{2k+2}{2^{r+1}}[$, on prend les $n+1 = 2^{r+1}$ intervalles du découpage (cas où $k = 2^r - 1$).

On est ainsi conduit à considérer les $(n+1)$ intervalles suivants (qui dépendent de n) :

$$I_0 = [0, \frac{1}{2^{r+1}}[, I_1 = [\frac{1}{2^{r+1}}, \frac{2}{2^{r+1}}[, \dots, I_{2k-1} = [\frac{2k-1}{2^{r+1}}, \frac{2k}{2^{r+1}}[, I_{2k} = [\frac{2k}{2^{r+1}}, \frac{2k+1}{2^{r+1}}[, \\ I_{2k+1} = [\frac{2k+1}{2^{r+1}}, \frac{2k+2}{2^{r+1}}[, I_{2k+2} = [\frac{2k+2}{2^{r+1}}, \frac{2k+3}{2^{r+1}}[, I_{2k+3} = [\frac{2k+3}{2^{r+1}}, \frac{2k+4}{2^{r+1}}[, \dots, I_{n-1} = [\frac{2^{r+1}-4}{2^{r+1}}, \frac{2^{r+1}-2}{2^{r+1}}[, \\ I_n = [\frac{2^{r+1}-2}{2^{r+1}}, 1[.$$

Les $n - 2k - 1$ derniers intervalles pouvant s'écrire :

$$I_{2k+2} = [\frac{k+1}{2^r}, \frac{k+2}{2^r}[, I_{2k+3} = [\frac{k+2}{2^r}, \frac{k+3}{2^r}[, \dots, I_n = [\frac{2^r-1}{2^r}, 1[.$$

On a donc trouvé $n+1$ intervalles au-dessus desquels les fonctions u_0, \dots, u_n sont constantes.

Si $w \in F_n : w = \sum_{i=0}^n \alpha_i u_i, \alpha_i \in \mathbb{R}$, on aura donc w constante sur chaque intervalle

$I_j, 0 \leq j \leq n$. ♦

Réciproquement, soit χ_i ($0 \leq i \leq n$) la fonction caractéristique de l'intervalle I_i (i.e. la fonction qui vaut 1 sur I_i et 0 sur $[0, 1[\setminus I_i$). Soit G_n le sous-espace vectoriel de E des fonctions qui sont constantes sur chaque I_i ($0 \leq i \leq n$). F_n est un sous-espace vectoriel de G_n . Mais les fonctions caractéristiques sont linéairement indépendantes et en nombre $n+1$, et donc $\dim(G_n) = n+1$. Par conséquent : $G_n = F_n$, ce qui établit le résultat voulu. ♦

5) Soit v_n la projection de v sur F_n . Notons pour simplifier : $I_i := [a_i, b_i[$ (I_i, a_i, b_i dépendent bien entendu de n). I_i est l'un des intervalles trouvés ci-dessus, de longueur $\frac{1}{2^{r+1}}$ ou bien $\frac{1}{2^r}$. v_n est constante, elle vaut $v_n(a_i)$, au-dessus de ces intervalles ($v_n \in F_n$). On veut déterminer v_n i.e. la valeur de ces constantes. On a :

$$\|v - v_n\|^2 = \int_0^1 (v - v_n)^2 dt = \sum_{i=0}^n \int_{a_i}^{b_i} (v - v_n)^2 dt$$

(les intervalles sont contigus et disjoints, et leur réunion est $[0, 1[$).

Posons $\xi_i := \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} v(t) dt$:

$$\begin{aligned} \|v - v_n\|^2 &= \sum_{i=0}^n \left[\int_{a_i}^{b_i} [v(t)]^2 dt - 2 \int_{a_i}^{b_i} v(t) \cdot v_n(t) dt + \int_{a_i}^{b_i} [v_n(t)]^2 dt \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left[\int_{a_i}^{b_i} [v(t)]^2 dt - 2v_n(a_i) \int_{a_i}^{b_i} v(t) dt + [v_n(a_i)]^2 \int_{a_i}^{b_i} dt \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left[\int_{a_i}^{b_i} [v(t)]^2 dt - 2v_n(a_i) \cdot (b_i - a_i) \cdot \xi_i + [v_n(a_i)]^2 \cdot (b_i - a_i) \right] \\ &= \sum_{i=0}^n \left[\int_{a_i}^{b_i} [v(t)]^2 dt + (b_i - a_i) \cdot (v_n(a_i) - \xi_i)^2 - (b_i - a_i) \cdot \xi_i^2 \right]. \end{aligned}$$

Il est clair qu'en prenant $v_n(a_i) := \xi_i$ on minimise le terme de droite (ce qui prouve l'existence de v_n , indépendamment de 3)). La valeur de v_n sur $[a_i, b_i[$ est la *valeur moyenne* de v sur cet intervalle. Finalement :

$$v_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} v(t) dt \cdot u_i. \blacklozenge$$

6) On a, puisque $(u_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base orthonormale de F_n :

$$\forall t \in [0, 1[: v_n(t) = \sum_{i=0}^n (v|u_i) \cdot u_i(t).$$

On veut : $v(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (v|u_n) \cdot u_n(t)$ uniformément par rapport à $t \in [0, 1[$. C'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall t \in [0, 1[: |v(t) - v_n(t)| \leq \varepsilon.$$

Mais v est continue sur $[0, 1]$, donc uniformément continue :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall s, t \in [0, 1] : |s - t| \leq \eta \implies |v(s) - v(t)| \leq \varepsilon.$$

Prenons N tel que $\frac{1}{2N} \leq \eta$. Soit $n \geq N$. Soit $t \in [0, 1[$: il existe i avec $0 \leq i \leq n$ tel que $t \in I_i(n)$ (un intervalle de la question 4)). Au-dessus de cet intervalle $I_i(n) = [a_i, b_i[$, la fonction v_n vaut (par 5)) : $\xi_i = \frac{1}{b_i - a_i} \int_{a_i}^{b_i} v(t) dt$, et donc il existe (théorème de la moyenne) $\theta_i \in I_i(n)$ tel que $v_n(t) = v(\theta_i)$.

On a : $|v(t) - v_n(t)| = |v(t) - v(\theta_i)| \leq \varepsilon$. Et la démonstration est terminée. \blacklozenge

Ce qu'on a prouvé, c'est que pour toute fonction v continue sur $[0, 1]$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n : n \geq N \implies \|v - v_n\|_{\infty} = \sup_{t \in [0, 1]} |v(t) - v_n(t)| \leq \varepsilon.$$

Et cela implique que pour toute fonction v continue sur $[0, 1]$:

$$\|v - v_n\|^2 = \int_0^1 |v(t) - v_n(t)|^2 dt \leq \|v - v_n\|_{\infty}^2 \leq \varepsilon^2, \text{ soit : } \|v - v_n\| \leq \varepsilon.$$

Soit : $v = \sum_{n=0}^{\infty} (v|u_n) \cdot u_n$ où la série est convergente dans l'e.v.n. $(E, (\cdot))$.

Soit G le sous-espace vectoriel de E constitué par les restrictions à $[0, 1[$ des fonctions continues sur $[0, 1]$. On vient de montrer, d'après le Th. 1.1 du Chap. XIX, que la famille $(u_n)_{n \geq 0}$ est totale dans G (muni du produit scalaire induit par E). Comme G est partout dense dans E (résultat admis), $(u_n)_{n \geq 0}$ est aussi totale dans E (évident). Donc, d'après le Th. 1.1 invoqué ci-dessus, tout $w \in E$ s'écrit : $w = \sum_{n=0}^{\infty} (w|u_n) \cdot u_n$ où la série converge dans $(E, (\cdot))$.

Autrement dit, $(u_n)_{n \geq 0}$ est une base hilbertienne de E . \blacklozenge

Nota : que G est partout dense dans E résulte de la densité de G dans l'espace $L^2(0, 1)$ (cours sur l'intégrale de Lebesgue). Mais on peut aussi démontrer ce résultat de manière élémentaire. La famille $(u_n)_{n \geq 0}$ est appelée le *système orthonormal et total de Haar*.

Ce type de base, convenablement modifié, donne naissance à des « bases d'ondelettes », une théorie qui fait l'objet de nombreux travaux actuels.

CHAPITRE XX

CONNEXITÉ(S)

Introduction

Ce vingtième chapitre aurait plus naturellement eu sa place comme dixième chapitre, puisqu'il traite d'un sujet de topologie générale : la *connexité* (et non la « connexion » !).

Cette notion vous sera surtout utile dans les modules de calcul différentiel, d'analyse complexe, et par conséquent peu important sa place dans le module de topologie et d'analyse fonctionnelle.

D'avoir renvoyé l'étude de la connexité en fin du cours présente un avantage pratique : ce chapitre vient tout à fait à point pour vous faire réviser les notions de topologie, à peu de temps de l'examen final.

Le sujet est plutôt facile (au niveau auquel nous voulons le placer) ; voilà un chapitre de tout repos (enfin, presque).

On a coutume de dire qu'*intuitivement* la connexité étudie le nombre de morceaux dont est fait un *ensemble*, ce qui est assez juste pour les sous-ensembles pas trop compliqués de \mathbb{R}^2 normé, d'où la possibilité de dessins, dont vous ne devez surtout pas vous priver.

Mais il me semble que même l'idée intuitive de connexe doit intégrer obligatoirement l'intervention de la topologie.

On dira donc plutôt que *la connexité étudie le nombre de morceaux dont est fait un espace topologique*.

En effet un ensemble peut fort bien être connexe (= d'un seul tenant) pour une topologie, et ne pas l'être pour une autre topologie.

Faire très attention lorsqu'on travaille avec une topologie induite !

Rappelez-vous que si vous dessinez une ligne continue sur une feuille de papier, cette ligne ne sera plus continue si vous la regardez avec une loupe grossissant 20 fois.

J'ai introduit (ce qui n'a rien d'original à l'heure actuelle) deux notions de connexité : la *connexité par arcs* et la *connexité* « ordinaire ».

La connexité par arcs peut apparaître comme plus concrète si l'on oublie (il faut parfois le faire) l'existence d'arcs « effroyables », comme la « courbe » due à Peano $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ qui est continue et surjective (*i.e.* qu'elle passe par *tous* les points du carré) ; la notion est tout de même bien commode, et s'avérera utile plus tard [groupe fondamental et simple connexité]. La notion de connexité par arcs dépend elle aussi de manière essentielle de la topologie choisie [à cause de la *continuité* d'un arc, bien sûr], il ne faut pas le perdre de vue.

☞ **Exercices indispensables** : 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, **1.5**, 2.1 (première partie), 2.2 (cas réel), 3.1, 3.2.

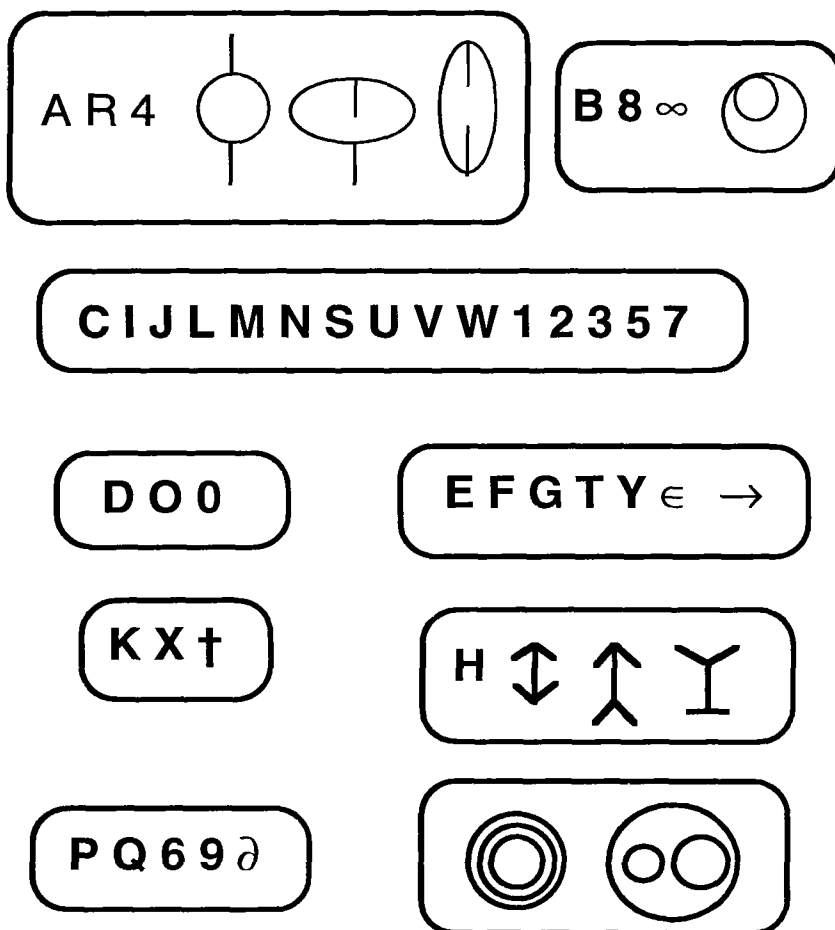
☞ Exercices complémentaires : 2.1 (le contre-exemple), 2.2 (cas complexe).

Un problème/lecture introduit la notion de *groupe fondamental* (ou : *groupe de Poincaré*) et à la notion d'*espace simplement connexe*.

BON TRAVAIL !

Dessins (= espaces topologiques) homéomorphes

Attention ! Il n'existe pas, en général, d'homéomorphisme de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 transformant une figure en une autre ⁽¹⁾ ... Il y a simplement homéomorphisme d'une figure sur une autre, pour deux figures dans une même classe. Vous pouvez examiner de la même manière les lettres grecques (il faudra ajouter des classes nouvelles), ou d'autres objets à votre convenance.



(1) Un homéomorphisme $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformant une figure F en une autre F' s'appelle une isotopie de F sur F' .

Une isotopie réalise un homéomorphisme de F sur F' , mais un homéomorphisme de F sur F' ne se prolonge pas nécessairement en une isotopie

CHAPITRE XX

CONNEXITÉS

1. CONNEXITÉ PAR ARCS

Définition 1.1.

Soit (E, d) un espace métrique.

On appelle **arc** [on dit aussi : *chemin*] toute application $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$ continue sur $[0, 1]$.

On dit que l'arc est **simple** si sa restriction à $]0, 1[$ est *injective*.

$u = \varphi(0)$ est appelé l'**origine** de l'arc, et $v = \varphi(1)$ son **extrémité** ; on dit que φ joint $u = \varphi(0)$ à $v = \varphi(1)$.

Si $\varphi(0) = \varphi(1) = u$, l'arc φ est appelé un *lacet basé en u* .

Le sous-ensemble $\varphi([0, 1])$ de E est appelé l'**image** [ou aussi la *trajectoire*] de l'arc φ .

Nota : Bien entendu $[0, 1]$ est supposé muni de sa distance usuelle $d(s, t) = |s - t|$ induite par celle de \mathbb{R} usuel.

Exemple 1.1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soient $u, v \in E$. $\varphi : [0, 1] \rightarrow E, t \mapsto \varphi(t) = (1 - t) \cdot u + t \cdot v = u + t \cdot (v - u)$ est un arc joignant u à v ; son image est un *segment* dans E .

☞ **Exercice 1.1.** (facile) Soit (E, d) un espace métrique.

a) Soit $f : [\alpha, \beta] \rightarrow E$ ($\alpha < \beta$) une application continue sur $[\alpha, \beta]$. Déterminez un arc φ d'origine $u = f(\alpha)$ et d'extrémité $v = f(\beta)$.

b) Soient u, v dans E , et soit φ un arc joignant u à v : déterminez un arc ψ joignant v à u .

c) Soient u, v, w dans E , et soient φ un arc joignant u à v , ψ un arc joignant v à w : déterminez un arc χ joignant u à w .

d) Même exercice avec des points u, v, w, x et des arcs φ, ψ, χ .

Définition 1.2.

Soit (E, d) un espace métrique. On dit que (E, d) est **connexe par arcs** si pour tous u, v dans E il existe un arc $\varphi = \varphi_{u,v}$ joignant u à v .

Une partie A de E est dite **connexe par arcs** si le sous-espace métrique $(A, d|_{A \times A})$ est connexe par arcs.

☞ Dans la définition d'une partie connexe par arcs A , l'**image entière** d'un arc joignant deux points de A *doit être contenue* dans A !

Exemple 1.2. Soit (E, d) un espace métrique, et soit $u \in E : \{u\}$ est une partie connexe par arcs de E ; on prend $\varphi(t) = u$ pour tout $t \in [0, 1]$ comme arc.

\emptyset sera considéré comme une partie connexe par arcs.

Exemple 1.3. Toute partie *convexe* C d'un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$ (sur \mathbb{R} ou \mathbb{C}) est connexe par arcs. En effet, pour tous u, v dans C on a $(1 - t) \cdot u + t \cdot v \in C$ quel que soit $t \in [0, 1]$, et l'arc $\varphi(t) = u + t \cdot (v - u)$ convient.

☞ Ne confondez pas *connexe* et *convexe* ! La notion de convexe n'a de sens que dans un espace vectoriel.

Sont donc connexes par arcs : $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$, les intervalles de \mathbb{R} ($] \alpha, \beta[,] \alpha, \beta], [\alpha, \beta[, [\alpha, \beta],] - \infty, \alpha[,] - \infty, \alpha],] \alpha, +\infty[, [\alpha, +\infty[$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), les pavés (= produits d'intervalles) de \mathbb{R}^n .

Tout e.v.n. et ses sous-espaces vectoriels, les translatés de ces sous-espaces, les boules ouvertes et fermées sont connexes par arcs.

Les demi-espaces $F = \{u \in E / \varphi(u) < \alpha\}$ – où $\varphi \in E^*$ et où $\alpha \in \mathbb{R}$ – d'un e.v.n. réel sont connexes par arcs (de même si $<$ est remplacé par $\leq, >, \geq$).

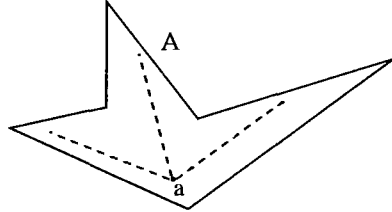
Exemple 1.4. Dans un e.v.n. $(E, \|\cdot\|)$, on dit qu'une partie A est **étoilée** s'il existe un point $a \in A$ tel que pour tout $u \in A$ le segment d'extrémités a et u est contenu dans A :

$$\exists a \in A, \forall u \in A, \forall t \in [0, 1] : a + t.(u - a) \in A.$$

On dit alors que A est **étoilée par rapport à a** .

Par exemple, un convexe est étoilé par rapport à *chacun* de ses points. Une croix $+$ est étoilée par rapport au point d'intersection de ses branches.

Une partie A d'un e.v.n. est un **cône** si pour tout $u \in A$ et pour tout réel $\lambda \geq 0$ on a : $\lambda.u \in A$. Un cône est une partie étoilée par rapport à 0.



☞ **Exercice 1.2.** (facile) Démontrez que toute partie étoilée est connexe par arc.

☞ La notion d'espace métrique connexe par arcs est une **notion topologique**.

Deux espaces métriques homéomorphes sont simultanément connexes par arcs ou pas.

Par exemple, il n'existe pas d'homéomorphisme de $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sur \mathbb{R} car \mathbb{R}^* n'est pas connexe par arcs (cf. Exercice 1.4 a)), alors que \mathbb{R} l'est.

☞ **Exercice 1.3.** (facile)

a) Démontrez que le produit de deux espaces métriques connexes par arcs est connexe par arcs.

b) Soient (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques, A une partie connexe par arcs de E , et $f : A \rightarrow F$ une application continue sur A . Prouvez que $f(A)$ est connexe par arcs.

c) Soient A et B deux parties connexes par arcs de (E, d) telles que $A \cap B \neq \emptyset$; démontrez que $A \cup B$ est connexe par arcs. L'intersection de deux parties connexes par arcs est-elle connexe par arcs ?

d) Soit I un intervalle quelconque de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow E_d$ continue sur I ; démontrez que le graphe $G = \{(t, f(t)) / t \in I\}$ de f est connexe par arcs dans l'espace produit $I \times E$.

☞ **Exercice 1.4.** (facile)

a) Démontrez que $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ n'est pas connexe par arcs.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. de dimension ≥ 2 , et soit $F \subset E$ une partie finie de E . Démontrez que $E \setminus F$ est connexe par arcs.

b) La sphère unité $\{-1, +1\}$ de \mathbb{R} n'est pas connexe par arcs, mais la sphère unité de $(E, \|\cdot\|)$ avec $\dim(E) \geq 2$ est connexe par arcs.

Prouvez que la *couronne* $\{u \in E / \alpha \leq \|u\| \leq \beta\}$ (où $0 < \alpha < \beta$ donnés et $\dim E \geq 2$) est connexe par arcs en démontrant qu'elle est homéomorphe à $[\alpha, \beta] \times S(0, 1)$.

☞ **Exercice 1.5.** (assez facile) Démontrez que l'ensemble

$$A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 / s \in \mathbb{Q} \text{ ou } t \in \mathbb{Q}\}$$

est connexe par arcs.

2. CONNEXITÉ

Définition 2.1.

Soit E un ensemble $\neq \emptyset$. Une partie A de E sera dite **propre** si $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$.
 On appellera **partition propre** de E la donnée de deux parties A, B de E vérifiant :

$$A \text{ et } B \text{ sont propres, } A \cup B = E \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

Commentaire : Cette définition n'est pas classique, elle introduit simplement une abréviation commode. Remarquons d'ailleurs que la donnée d'une partition propre est équivalente à la donnée d'une partie propre... En effet si A est propre, $E \setminus A = B$ est propre et la seule partition qu'on peut considérer à partir de A est $(A, E \setminus A)$.

Proposition 2.1.

Soit (E, d) un espace métrique *connexe par arcs* non vide. Soit A une partie propre de E .
Conclusion : A ne peut pas être à la fois ouverte et fermée.

Démonstration : *Mutatis mutandis* c'est exactement la démonstration de l'Exercice 2.6 du Chap. VII à laquelle nous vous renvoyons. ♦

Proposition 2.2.

Soit (E, d) un espace métrique $\neq \emptyset$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(2.1) il existe une partie propre A de E à la fois ouverte et fermée dans (E, d) ,
 (2.2) il existe une partition propre de E par des parties A, B ouvertes dans (E, d) ,
 (2.3) il existe une partition propre de E par des parties A, B fermées dans (E, d) .

Démonstration : (2.1) \implies (2.2) Il suffit de prendre A et $E \setminus A = B$ qui est aussi une partie propre. A et B constituent une partition propre de E avec A ouverte et B ouverte comme complémentaire d'un fermé. ♦

(2.2) \implies (2.3) Evident car $B = E \setminus A$ est fermée, et $A = E \setminus B$ aussi. ♦

(2.3) \implies (2.1) Car $E = A \cup B$, A fermée et $A = E \setminus B$ où B est fermée : d'où A ouverte. ♦

Définition 2.2.

Un espace métrique (E, d) est dit **disconnexe** (ou : **non connexe**) s'il possède l'une des propriétés (2.1) (2.2) (2.3) de la Prop. 2.2 (il les possède alors toutes !).
 Un espace métrique qui n'est pas disconnexe est dit **connexe**.
 Une partie A de (E, d) sera dite disconnexe [resp. connexe] si le sous-espace métrique $(A, d|_{A \times A})$ l'est.

Théorème 2.1. (FONDAMENTAL)

|| Tout espace métrique connexe par arcs est connexe.

Démonstration : C'est la Prop. 2.1 reformulée. ♦

Exemple 2.1. Soit E un ensemble quelconque contenant plus d'un point qu'on munit de la distance discrète δ : (E, δ) est disconnexe ainsi que toutes ses parties contenant deux points au moins.

Exemple 2.2. Soit E un ensemble arbitraire qu'on munit de la topologie dite *grossière* dont les seuls ouverts sont E et \emptyset . Si $\text{Card}(E) \geq 2$, cette topologie ne peut pas être décrite par une distance. Si l'on étend la Déf. 2.2 aux espaces topologiques généraux (ce qui est bien naturel, de même pour la Déf. 1.1 : la preuve, c'est qu'on ne se sert jamais de la distance dans ces questions !), on voit que E_{grossier} est *connexe* ainsi que toutes ses parties.

Ces exemples extrêmes sont destinés à prouver qu'on ne peut pas dire naïvement qu'un espace topologique est connexe s'il « est d'un seul tenant », cela dépend trop de la topologie de l'espace. Même dans un e.v.n. la situation n'est pas si simple : voir le prochain exercice. Il n'en reste pas moins que l'idée intuitive connexe \equiv « d'un seul tenant » est parfois utile. Une image plus juste est peut être donnée par une portion du globe terrestre : la connexité des parties émergées dépend du niveau des eaux . . .

Remarque 2.1. La notion d'espace métrique (et même d'espace topologique) disconnexe [connexe] est *topologique*.

Remarque 2.2. La connexité s'énonçant comme la négation d'une propriété ((2.1)(2.2)(2.3)), il ne sera pas étonnant que les démonstrations de connexité soient en général des démonstrations *par l'absurde*.

Voici une propriété des connexes conduisant à des démonstrations directes :

Proposition 2.3.

|| (E, d) est connexe si et seulement si : toute fonction $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ continue est constante.

Démonstration :

Tout d'abord, notez bien qu'il s'agit de l'ensemble à deux éléments $\{0, 1\}$, et non de l'intervalle $[0, 1]$! Sa seule structure d'espace métrique possible correspond à la topologie discrète, et les ouverts (*i.e.* aussi les fermés) sont donc : $\{0, 1\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, \emptyset .

Si E est connexe, et s'il existe $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ continue non constante : $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$ constituent une partition propre de E par des parties ouvertes (et fermées, d'ailleurs) [ou encore : A est une partie propre de E ouverte et fermée] : contradiction. ♦

Si E n'est pas connexe, il existe une partition propre de E par des ouverts A et B . On pose alors $f(u) = 0$ pour $u \in A$ et $f(u) = 1$ pour $u \in B$. f n'est pas constante, et f est continue car : $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = A$ ouvert, $f^{-1}(\{1\}) = B$ ouvert, $f^{-1}(\{0, 1\}) = E$. ♦

On sait que les intervalles de \mathbb{R} sont connexes par arcs, donc connexes. Réciproquement, on a :

Proposition 2.4.

|| Les seules parties connexes de \mathbb{R} (usuel !) sont les intervalles.

Démonstration :

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, connexe, et qui n'est pas un intervalle. Donc, par définition d'un intervalle, il existe $\alpha \in A$, $\beta \in A$ avec $\alpha < \beta$, tels que $[\alpha, \beta] \not\subset A$.

Soit $\gamma \in]\alpha, \beta[$ tel que $\gamma \notin A$. Alors : $A \cap]-\infty, \gamma[$ et $A \cap]\gamma, +\infty[$ sont ouverts dans A et constituent une partition propre de A : contradiction. ♦

Conséquences : \mathbb{Q} , $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\}$, $[0, 1[\cup]1, 2]$ ne sont pas connexes dans \mathbb{R} .

Théorème 2.2. (TRÈS IMPORTANT)

|| Soient (E, d) , (F, δ) des espaces métriques, et soit A une partie *connexe* de E . Soit $f : A \rightarrow F$ une application *continue* sur A . *L'image directe* $f(A)$ est *connexe* dans F .

Démonstration :

Si $f(A)$ n'était pas connexe, on aurait une partition propre de $f(A)$ par deux ouverts B, C de $f(A)$. $f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(C)$ constitueraient (vérifiez-le en détail) une partition propre de A par des ouverts, et donc A ne serait pas connexe : contradiction. ♦

☞ Il n'y a évidemment pas de résultat analogue pour l'image inverse ! Trouvez des contre-exemples.

Corollaire 2.1.

|| Soit $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur l'intervalle (α, β) [ouvert ou fermé, ou rien ; borné ou pas].
 || L'image de l'intervalle (α, β) par f est un connexe de \mathbb{R} [Th. 2.1], et donc un intervalle [Prop. 2.4].

Nota : La nature de l'intervalle image n'est pas obligatoirement celle de l'intervalle (α, β) . Mais on a :

Corollaire 2.2.

|| Soit $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[\alpha, \beta] : f([\alpha, \beta]) = [\gamma, \delta]$. En effet $f[\alpha, \beta]$ est un intervalle compact, donc fermé et borné. ♦

Théorème 2.3. (théorème des valeurs intermédiaires) (FONDAMENTAL)

|| Soit (E, d) un espace métrique *connexe*, et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur E . Si f prend les valeurs α et β , toute valeur γ comprise entre α et β est aussi une valeur prise par f . Soit :
 || si $f(u) = \alpha$ et $f(v) = \beta$, $\alpha < \beta$ (ou : $\beta < \alpha$) : $\forall \gamma \in]\alpha, \beta[$, $\exists w \in E$ tel que :
 || $f(w) = \gamma$.

Démonstration : $f(E)$ est connexe, et donc un intervalle de \mathbb{R} [Th. 2.2 et Prop. 2.4]. Par conséquent, si α, β sont dans $f(E)$, on a : $[\alpha, \beta] \subset f(E)$. ♦

Corollaire 2.3.

|| Sous les hypothèses du Th. 2.3, s'il existe $u \in E$ tel que $f(u) > 0$ et $v \in E$ tel que $f(v) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ possède une racine au moins.

Remarque 2.3.

Si (E, d) est un espace métrique tel que toute fonction continue $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ possède la propriété des valeurs intermédiaires, (E, d) est évidemment connexe. Sinon, en effet, il existerait $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ continue et non constante, et f devrait donc prendre – par exemple – la valeur $\frac{1}{2}$.

☞ Pendant longtemps, la propriété des valeurs intermédiaires pour une fonction $(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ a été considérée de manière plus ou moins claire comme une propriété caractérisant les fonctions continues. C'est *tout à fait faux* : la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(t) = \sin(\frac{1}{t})$ pour $t \neq 0$ n'est pas continue en 0, mais elle vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.

☞ **Exercice 2.1.** (niveau moyen) Soit $(E, \| \cdot \|)$ un e.v.n. sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} de dimension ≥ 2 , et soit $\varphi \in E' \setminus \{0\}$. Démontrez que $E \setminus \text{Ker}(\varphi)$ ne peut pas être connexe par arcs.

Par contre, $E \setminus \text{Ker}(\varphi)$ peut être connexe par arcs si $\varphi \in E^* \setminus F'$ comme le prouve l'exemple suivant que vous détaillerez [exemple dû à B. Le Gac, Univ. de Provence].

Soit $E = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) / f \text{ est dérivable (à droite) en } 0\}$ muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. On prend $\varphi(f) = f'(0)$. Prouvez que $\varphi \in E^*$ mais que $\varphi \notin E'$.

Démontrez que $E \setminus \text{Ker}(\varphi)$ est connexe par arcs.

Indication : Considérez $f_0(t) = -t + 1$, $g_0(t) = t - 1$, et les fonctions :

$h_s(t) = t - 2s + 1$ pour $0 \leq t \leq s$; $h_s(t) = -t + 1$ pour $s \leq t \leq 1$, s décrivant $[0, 1]$.

☛ **Exercice 2.2.** (assez facile)

a) Démontrez que l'ouvert $GL(\mathbb{R}^n)$ [cf. Chap. X] de $L(\mathbb{R}^n)$ n'est pas connexe par arcs [On admettra que $\det : L(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto \det(A)$ est une fonction continue sur $L(\mathbb{R}^n)$].

(plus difficile) b) Démontrez que l'ouvert $GL(\mathbb{C}^n)$ de $L(\mathbb{C}^n)$ est connexe par arcs.

Indication : Soit χ un arc joignant 0 à 1 dans \mathbb{C} , puis, pour $A \in GL(\mathbb{C}^n)$, considérez $\varphi(t) = \chi(t).A + (1 - \chi(t)).I_{\mathbb{C}^n}$. Bricolez χ pour que $\varphi(t) \in GL(\mathbb{C}^n)$.

Proposition 2.5.

Soit (E, d) un espace métrique. Si $A \subset E$ est une partie *connexe* de E , il en est de même de toute partie B de E vérifiant : $A \subset B \subset \text{adh}(A)$ [en particulier $\text{adh}(A)$ est *connexe*].

Démonstration : Soit $f : B \rightarrow \{0, 1\}$ une fonction continue sur B ; A étant connexe : $f|_A$ est constante. Comme A est dense dans B , la fonction f coïncide avec le prolongement de $f|_A = \text{constante}$ à B . Donc, Prop. 2.3, B est connexe. ♦

Proposition 2.6.

Soit (E, d) un espace métrique. Soit $(A_i)_{i \in I}$ (I arbitraire) une famille de parties connexes de E vérifiant : $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.
Conclusion : la réunion $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est connexe.

Démonstration : Soit $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$, et soit $f : A \rightarrow \{0, 1\}$ continue. Puisque A_i est connexe : $f|_{A_i}$ est constante, et pour tout $i \in I$ sa valeur est $f(a)$. Donc f est constante, et, Prop. 2.3 : A est connexe. ♦

Corollaires 2.4.

Si au lieu de $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ on a : $\exists j \in I$ tel que : $\forall i \in I : A_i \cap A_j \neq \emptyset$, le résultat ci-dessus reste valide. De même si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ vérifie : $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, pour $1 \leq i \leq n - 1$.

3. COMPOSANTES CONNEXES

Théorème 3.1. (IMPORTANT)

Soit (E, d) un espace métrique. Si u est un point quelconque de E , la réunion de toutes les parties *connexes* de (E, d) qui contiennent u est une partie *connexe* et *fermée* de (E, d) . On notera $C(u)$ cet ensemble. On a :

$$C(u) \cap C(v) \neq \emptyset \implies C(u) = C(v).$$

E s'écrit comme *réunion disjointe* (réunion qui peut être finie ou infinie) d'ensembles de ce type.

Définition 3.1.

L'ensemble *connexe* et *fermé* $C(u)$, qui est la plus grande partie connexe contenant u , s'appelle la *composante connexe* de u .

Démonstration du Th. : Soit $u \in E$, et soit $C(u) = \bigcup \{A \subset E / A \text{ connexe ET } u \in A\}$: d'après la Prop. 2.6, cette partie de E est connexe ; il est clair que $C(u)$ est

la plus grande partie connexe de E contenant u . D'après la Prop. 2.5 : $\text{adh}(C(u))$ est connexe, et donc : $\text{adh}(C(u)) \subset C(u)$, d'où : $C(u) = \text{adh}(C(u))$, et $C(u)$ est fermé dans (E, d) .

Si $C(u) \cap C(v) \neq \emptyset$, d'après la Prop. 2.6 : $C(u) \cup C(v)$ est connexe, ce qui entraîne $C(u) = C(v)$, sinon $C(u) \cup C(v)$ serait un connexe contenant u plus grand que $C(u)$, ce qui est impossible par définition de $C(u)$.

Tout $v \in E$ appartient à un $C(u)$ et à un seul : donc E s'écrit bien comme réunion des $C(u)$ disjoints. ♦

On a donc une partition de E , et on sait que cela signifie que E est l'ensemble des classes d'équivalence d'une relation d'équivalence qui est : $u \sim v$ si et seulement si u et v appartiennent à une même partie connexe de E .

Exemples 3.1.

1) Si (E, d) est connexe, on a évidemment une seule composante connexe : $C(u) = E$ pour tout $u \in E$.

2) $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a deux composantes connexes : $C(s) =]-\infty, 0[$ si $s < 0$, et $C(s) =]0, +\infty[$ si $s > 0$.

3) Un puzzle de 1500 pièces est la réunion de 1500 composantes connexes.

4) Le sous-espace \mathbb{Q} de \mathbb{R} usuel a autant de composantes connexes que de points, $\forall r \in \mathbb{Q} : C(r) = \{r\}$. Un tel espace est dit *totalelement discontinu*.

En effet, si $C(r) \neq \{r\}$ pour un r , soit $r' \neq r, r' \in C(r)$. L'identité $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$ étant continue $C(r)$ serait un connexe de \mathbb{R} , i.e. un intervalle de \mathbb{R} contenant $[r, r']$ (en supposant $r < r'$). Mais $[r, r']$ contient des points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et on arrive à une contradiction puisque $C(r) \subset \mathbb{Q}$. On a donc ici une infinité dénombrable de composantes connexes. Le cas de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est identique : on a alors une infinité non dénombrable de composantes connexes.

Remarque : Lorsqu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes, celles-ci sont fermées ET ouvertes. On peut légitimement se demander s'il en est toujours ainsi : l'exemple ci-dessus prouve qu'il n'en est rien puisque $\{r\}$ n'est pas ouvert dans \mathbb{Q} .

5) Soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ un lacet simple [Déf. 1.1], et soit $L = \varphi([0, 1])$ son image. Le *Théorème de Jordan* affirme que $\mathbb{C} \setminus L$ a deux composantes connexes : l'une (dite intérieure) est bornée, et l'autre (dite extérieure) est non bornée. La frontière de chacune des composantes est L .

Ce résultat vous servira dans l'étude des fonctions analytiques : il est long et difficile à démontrer [voir l'ouvrage de J. Dieudonné, appendice du chapitre IX].

☞ **Exercice 3.1.** Dans l'Exercice 2.1, prouvez que si $\varphi \in E^I : E \setminus \text{Ker}(\varphi)$ a deux composantes connexes.

☞ **Exercice 3.2.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et soit $U \neq \emptyset$ un ouvert de E . Démontrez que les composantes connexes de U sont ouvertes dans E . Démontrez que tout ouvert de \mathbb{R} est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts (autre démonstration dans l'Exercice 2.4 du Chap. VI).

Proposition 3.1. (IMPORTANTE)

|| Si deux espaces métriques (E, d) et (F, δ) sont **homéomorphes**, les composantes connexes de l'un et de l'autre se correspondent bijectivement.

Démonstration : Soit $u \in E$, et soit $C(u)$ sa composante connexe. Soit d'autre part $f(u)$ (f est l'homéomorphisme $E \rightarrow F$) et $C(f(u))$. On a : $C(f(u)) = f(C(u))$.

En effet, $f(C(u))$ est connexe dans F [Théorème 2.2] et contient $f(u)$, d'où : $f(C(u)) \subset C(f(u))$.

Supposons qu'il existe $D \subset F$ tel que D soit connexe, $D \supset f(C(u))$ et $D \neq f(C(u))$. On a : $f^{-1}(D) \supset f^{-1}[f(C(u))] = C(u)$, et $f^{-1}(D)$ serait un connexe contenant u et plus grand que $C(u)$: c'est impossible. ♦

Applications :

1) \mathbb{R}^n n'est pas homéomorphe à \mathbb{R}^2 ; sinon, soit f cet homéomorphisme : la restriction g de f à $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ serait un homéomorphisme de \mathbb{R}^* sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$. Or \mathbb{R}^* a deux composantes connexes tandis que $\mathbb{R}^2 \setminus \{f(0)\}$, connexe, n'en a qu'une. La Prop. 3.1 nous permet d'affirmer qu'on aurait une contradiction.

2) $[0, 1]$ n'est pas homéomorphe au cercle unité car (même raisonnement que ci-dessus) $[0, 1]$ moins le point $\frac{1}{2}$ a deux composantes connexes tandis que le cercle unité auquel on enlève un point quelconque reste connexe.

3) Soit $E = Y$ et soit $F = S$ (les lettres Y et S comme parties de \mathbb{R}^2 , les traits étant d'épaisseur nulle !) : soit u le point d'intersection des branches dans le Y , $E \setminus \{u\}$ a trois composantes connexes, tandis que $F \setminus \{f(u)\}$ a une ou deux composantes connexes suivant la place de $f(u)$ sur S (extrémité ou pas). E et F ne sont donc pas homéomorphes.

On pourrait multiplier les exemples, mais nous vous laissons le soin de le faire.

On dispose ainsi d'un précieux critère de non-homéomorphie. Rappelons que la compacité en fournissait un également : $[0, 1]$ n'est pas homéomorphe à $[0, 1[$ ou à $[0, +\infty[$, car $[0, 1]$ est compact et les deux autres intervalles ne le sont pas.

Le « sinus des topologues »

Dans \mathbb{R}^2 , on considère le graphe de la fonction : $t \mapsto \sin(\frac{1}{t})$ pour $t \in]0, \frac{2}{\pi}]$; $G = \{(t, \sin(\frac{1}{t})) / t \in]0, \frac{2}{\pi}]\}$, et le segment $S = \{(0, t) / t \in [-1, +1]\}$ [faites le dessin]. On a : $\text{adh}(G) = G \cup S$ [voir Chap. IV, Lecture].

G est connexe par arc et donc connexe [cf. Exercice 1.3 d) et Th. 2.1]. Par conséquent $\text{adh}(G)$ est connexe [Prop. 2.5]. On démontre [ce n'est pas très difficile, mais assez long] que $\text{adh}(G)$ n'est pas connexe par arcs, ce qui prouve :

- i) qu'un espace métrique connexe n'est pas nécessairement connexe par arcs et :
- ii) que l'adhérence d'un espace connexe par arcs n'est pas nécessairement connexe par arcs.

La notion de connexité, moins intuitive que celle de connexité par arcs, a de « bonnes » propriétés que n'a pas la connexité par arcs, d'où l'introduction des deux notions assez proches l'une de l'autre.

• Proposition 3.2.

Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques *non vides*, et soit $E \times F$ muni (par exemple) de la distance $d_\infty[(u, v), (u', v')] = \max\{d(u, u'), \delta(v, v')\}$. On a :

$E \times F$ est connexe si et seulement si E ET F sont connexes.

Démonstration :

(i) Si $E \times F$ est connexe, E l'est aussi car $E = \text{pr}_1(E \times F)$, où $\text{pr}_1(u, v) = u$ est continue [cf. Chap. IX pour pr_1 , et on applique le Th. 2.2]. De même pour F . ♦

(ii) Soient (u, v) et (u', v') des points de $E \times F$; $E \times \{v'\}$, homéomorphe à E et $\{u\} \times F$ homéomorphe à F sont des parties connexes de $E \times F$. Ces deux ensembles ont en commun le point (u, v') [dessin !], et par conséquent les composantes connexes

de (u, v) et (u', v') sont égales. Comme (u, v) et (u', v') sont arbitraires, $E \times F$ a une seule composante connexe, ce qui revient à dire que $E \times F$ est connexe. ♦

Ce résultat reste vrai pour tout produit fini, et même pour le produit dénombrable [Chap. I, Exercice 2.4].

4. APPLICATIONS DE LA NOTION DE CONNEXITÉ

Théorème 4.1. (théorème du passage des douanes) (IMPORTANT)

Soit (E, d) un espace métrique, et soit $A \subset E$. Soit $B \subset E$, B connexe vérifiant $B \cap A \neq \emptyset$ ET $B \cap (E \setminus A) \neq \emptyset$. Conclusion : $B \cap \text{fr}(A) \neq \emptyset$.

Conséquence 1 : Si E est connexe, tout $A \subset E$, A propre, vérifie $\text{fr}(A) \neq \emptyset$.

Conséquence 2 : Soit $A \subset E$, propre. L'image de tout arc joignant $u \in A$ à $v \in E \setminus A$ a une intersection non vide avec $\text{fr}(A)$ [en d'autres termes : la trajectoire d'un arc joignant un point de A propre à un point de $\bigcup_E A$ coupe la frontière de A qui est aussi la frontière de $\bigcup_E A$].

Démonstration : La conséquence 1 est triviale : il suffit de faire $B = E$. La seconde conséquence découle de ce que $[0, 1]$ est connexe et du Th. 2.2 : l'image d'un arc est connexe. ♦

Démontrons donc le résultat principal. Supposons que $B \cap \text{fr}(A) = \emptyset$. On sait [Chap. VI] que $E = \text{int}(A) \cup \text{ext}(A) \cup \text{fr}(A) = \text{int}(A) \cup \text{int}(E \setminus A) \cup \text{fr}(A)$.

On en tire que :

$$B = B \cap E = [B \cap \text{int}(A)] \cup [B \cap \text{int}(E \setminus A)] \cup [B \cap \text{fr}(A)] \\ = [B \cap \text{int}(A)] \cup [B \cap \text{int}(E \setminus A)] \quad (\text{car le dernier terme est vide})$$

Posons $U = B \cap \text{int}(A)$ et $V = B \cap \text{int}(E \setminus A)$. On vient de voir que : $B = U \cup V$. Par définition de la topologie relative, $\text{int}(X)$ étant ouvert dans E pour tout $X : U$ et V sont ouverts dans B .

- $U \cap V = B \cap \text{int}(A) \cap B \cap \text{int}(E \setminus A) = B \cap \emptyset = \emptyset$.
- $U \neq \emptyset$ car $B \cap A$ est non vide et contenu dans $B \cap \text{int}(A)$; en effet, si $u \in B \cap A$ et si $u \notin \text{int}(A) : u \in B$ et $u \in E \setminus \text{int}(A)$, donc : $u \in B \cap A \cap [E \setminus \text{int}(A)] \subset B \cap \text{adh}(A) \cap \text{adh}(E \setminus A) = B \cap \text{fr}(A)$, contradiction avec l'hypothèse faite.
- De même, $V \neq \emptyset$.

Finalement, (U, V) serait une partition propre de B connexe : impossible. Donc : $B \cap \text{fr}(A) \neq \emptyset$. ♦

Les deux résultats suivants donnent lieu à des raisonnements typiques de la connexité : on assiste à un passage du local au global en vertu d'un enchaînement dû à la connexité. De plus – ce qui ne gêne rien – ces résultats vous seront utiles en calcul différentiel où vous rencontrerez à nouveau ce genre de raisonnement.

Nous avons défini [cf. Chap. IV et Exercice 2.13 du Chap. XIV] une application $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R} \rightarrow E$, où $(E, \|\cdot\|)$ est un e.v.n. sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , affine par morceaux. L'image d'une telle application est souvent appelée **ligne brisée**.

Proposition 4.1.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n. sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} , et soit $U \neq \emptyset$ une partie ouverte et connexe de E . Tout couple de points u, v de U peut être joint par une ligne brisée contenue dans U . En particulier, U est connexe par arcs.

Démonstration : Soit u un point arbitraire dans U , et posons :

$$A = \{v \in U / v \text{ peut être joint à } u \text{ par une ligne brisée contenue dans } U\}.$$

Si l'on prouve que $A = U$ on aura gagné.

A n'est pas vide puisqu'il contient u [u peut être joint à u par une ligne brisée, l'application constante égale à u]. $A \subset U$ qui est connexe ; donc si l'on démontre que A est à la fois ouvert et fermé, on aura nécessairement $A = U$.

• *A est ouvert.* Soit $v \in A$. Puisque U est ouvert, il existe $\rho_v > 0$ tel que $B(v, \rho_v] \subset U$. Mais on a $B(v, \rho_v] \subset A$ puisque, si $w \in B(v, \rho_v]$, on peut joindre w à v par un morceau de rayon de la boule, et puisque v peut être joint à u par une ligne brisée contenue dans U [faites un dessin !]. Donc A est ouvert (dans U ou E , c'est pareil). ♦

• *A est fermé.* Soit v un point adhérent à A dans le sous-espace métrique U ; soit, rappelons-le, $v \in \text{adh}_E(A) \cap U$. Il existe donc une suite (v_n) de points de A convergente de limite $v \in U$. Puisque U est ouvert dans E , il existe $\rho > 0$ tel que $B(v, \rho] \subset U$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N$ on a : $v_n \in B(v, \rho)$; $v_N \in A$, et donc on peut joindre v_N à u par une ligne brisée contenue dans U ; on joint ensuite v_N à v par un morceau de rayon, et en définitive on aura joint u à v par une ligne brisée contenue dans U . D'où : $v \in A$, et A est fermé dans U . ♦

La démonstration est terminée. ♦

Remarque 4.1.

Si $E = \mathbb{R}^n$, et si l'on a choisi une base de E , par exemple la base naturelle, on peut faire en sorte que la ligne brisée du résultat ci-dessus soit constituée par des segments parallèles aux vecteurs de base [dessin !].

Proposition 4.2.

Soit (E, d) un espace métrique **connexe**, et soit (F, δ) un espace métrique. Soit $f : E \rightarrow F$ une application continue sur E , et **localement constante**, en ce sens que : $\forall u \in E, \exists \rho = \rho_u > 0 : f|_{B(u, \rho_u]}$ est constante.
Conclusion : f est une application **constante** sur E entier.

Démonstration :

• Soit $v \in f(E)$, et posons : $A = f^{-1}(\{v\})$; $A \neq \emptyset$ par hypothèse, et $\{v\}$ étant fermé et f continue sur E : A est une partie fermée de E . ♦

• Soit maintenant $u \in A$: $f(u) = v$ par définition, et puisque f est localement constante : $\exists \rho_u > 0$ tel que $f|_{B(u, \rho_u]} = f(u) = v$. Donc : $B(u, \rho_u] \subset A$, et A est ouvert dans E . ♦

Comme E est connexe, on a : $A = E$, et donc $f(u) = v$ pour tout $u \in E$: f est constante sur E . ♦

Fin de la partie cours du Chapitre XX

CORRIGÉ DES EXERCICES

☞ Exercice 1.1

On utilise les homéomorphismes affines souvent utilisés déjà :

$$\theta : [0, 1] \rightarrow [\alpha, \beta], t \mapsto (\beta - \alpha)t + \alpha, \text{ et } \theta^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1], s \mapsto \frac{s - \alpha}{\beta - \alpha}.$$

a) On pose $\varphi := f \circ \theta$; $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$ est continu sur $[0, 1]$ et :

$$\varphi(0) = f(\theta(0)) = f(\alpha), \varphi(1) = f(\theta(1)) = f(\beta - \alpha + \alpha) = f(\beta). \diamond$$

b) On prend $\psi(t) := \varphi(1 - t)$: ψ est continu sur $[0, 1]$ et $\psi(0) = \varphi(1) = v$, $\psi(1) = \varphi(0) = u$. ♦

c) On ramène φ sur $[0, \frac{1}{2}]$, ψ sur $[\frac{1}{2}, 1]$, et on « recolle » :

On prend : $\chi(t) = \varphi(2t)$, pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\chi(t) = \psi(2t - 1)$, pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$.

$$\chi(0) = \varphi(0) = u, \chi(\frac{1}{2}) = \varphi(1) = \psi(0) = v, \chi(1) = \psi(1) = w.$$

χ est donc continu sur $[0, 1]$, et convient. ♦

d) Pour trois arcs, on procède de la même manière, en ramenant respectivement φ, ψ, χ à $[0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], [\frac{2}{3}, 1]$.

On considère : $\gamma(t) := \varphi(3t)$ pour $t \in [0, \frac{1}{3}]$, $\gamma(t) = \psi(3t - 1)$ pour $t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $\gamma(t) = \chi(3t - 2)$ pour $t \in [\frac{2}{3}, 1]$. γ répond bien à la question (vérifiez). ♦

🔗 **Exercice 1.2**

C'est très simple : il suffit d'aller de u à a par un segment et de a à v par un segment, on recolle ensuite comme dans c) ci-dessus.

$$\varphi(t) := u + t(a - u), \psi(t) := a + t(v - a),$$

et on prend :

$$\chi(t) := \varphi(2t) = u + 2t(a - u) \text{ pour } t \in [0, \frac{1}{2}], \chi(t) := \psi(2t - 1) = a + (2t - 1)(v - a) \text{ pour } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \text{ ♦}$$

🔗 **Exercice 1.3**

a) Soient $(u, v), (u', v')$ dans $E \times F$. Soit φ un arc allant de u à u' dans E , et soit ψ un arc allant de v à v' dans F . L'application $\chi : [0, 1] \rightarrow E \times F, \chi(t) = (\varphi(t), \psi(t))$ va de (u, v) à (u', v') dans $E \times F$ et est continue. ♦

b) Soient v, v' dans $f(A) : v = f(u)$ et $v' = f(u')$ avec u et u' dans A . Soit φ allant de u à u' dans A . $\psi = f \circ \varphi : [0, 1] \rightarrow f(A)$ va de v à v' dans $f(A)$. ♦

c) Soient $a \in A$ et $b \in B$. On prend $c \in A \cap B \neq \emptyset$. Soit φ joignant a à c dans A , et soit ψ joignant c à b dans B . On recolle φ et ψ comme dans l'Exercice 1.1 c), et on obtient χ continue allant de a à b en restant dans $A \cup B$. ♦

L'intersection de deux e.m. connexes par arcs n'est évidemment pas connexe par arcs (prendre deux morceaux de courbes (ou deux bananes) se coupant en deux points seulement). ♦

d) Soient $(s, f(s)) \in G$ et $(s', f(s')) \in G$. Puisque I est connexe par arcs, soit $\varphi : [0, 1] \rightarrow I$ tel que $\varphi(0) = s, \varphi(1) = s'$; $\psi : [0, 1] \rightarrow I \times E$, défini par : $\psi(t) := (\varphi(t), (f \circ \varphi)(t))$ est un arc qui convient. ♦

Remarque : Dans tous ces exercices, il vaut mieux s'abstenir de dire « l'arc qui convient », mais dire plutôt « un arc qui convient ».

🔗 **Exercice 1.4**

a) Si \mathbb{R}^* était connexe par arcs, -1 et $+1$ étant donnés dans \mathbb{R}^* , il existerait $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^*$ continu tel que $\varphi(0) = -1$ et $\varphi(1) = +1$; d'après le Théorème des valeurs intermédiaires classique (ou Th. de Bolzano), il existerait $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$, et φ ne serait pas à valeurs dans \mathbb{R}^* . ♦

Si $\dim(E) \geq 2$, la situation est tout à fait différente : si $u, v \in E \setminus F$ où F est un ensemble fini, il est facile de voir (dessin !) qu'on peut joindre u à v par un nombre fini de segments contigus qui ne coupent pas F . ♦

b) Il est clair que $\{-1, +1\}$ n'est pas connexe par arcs (même raisonnement que pour \mathbb{R}^* ci-dessus). ♦

Soit maintenant $S(0, 1)$ dans E tel que $\dim(E) \geq 2$. Une figure montre tout de suite ce qu'on peut faire.

Soient $u, v \in S(0, 1)$: on considère le segment joignant u à v dans E , et on le « plaque » sur la sphère en ramenant les vecteurs du segment à la norme 1.

$$\text{On pose donc : } \varphi(t) := \frac{u + t \cdot (v - u)}{\|u + t \cdot (v - u)\|}.$$

On a : $\varphi(0) = \frac{u}{\|u\|} = u, \varphi(1) = \frac{v}{\|v\|} = v$, et φ est continue sur $[0, 1]$ comme composée

d'application continues, SAUF si le dénominateur s'annule.

Examinons ce cas à part :

$$\begin{aligned} \|u + t(v - u)\| = 0 &\iff u + t(v - u) = 0 \iff (1 - t)u = -tv \\ &\implies (1 - t)\|u\| = t\|v\| \implies t = \frac{1}{2}, \text{ et donc } \frac{1}{2}u = -\frac{1}{2}v : v = -u. \end{aligned}$$

Donc le procédé ne marche pas si (et seulement si) les points u et v sont antipodaux (dessin dans \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 !).

Il est facile de régler ce (petit) problème : on choisit sur $S(0, 1)$ un point w tel que $w \neq u, w \neq v$, et on passe comme ci-dessus par l'intermédiaire de w ; *i.e.* qu'on plaque sur $S(0, 1)$ les segments $[u, w]$ et $[w, -u]$; on raccorde comme dans l'Exercice 1.1 c).

Dans tous les cas un morceau de grand cercle est un arc qui convient sur $S(0, 1)$. ♦

$[\alpha, \beta] \times S(0, 1)$ est connexe par arcs d'après l'Exercice 1.3 a) et le résultat ci-dessus. On aura terminé si l'on prouve que cet espace métrique est homéomorphe à la couronne :

$$C = \{u \in E / 0 < \alpha \leq \|u\| \leq \beta\}.$$

Considérons les applications $f : [\alpha, \beta] \times S(0, 1) \rightarrow C$ et $g : C \rightarrow [\alpha, \beta] \times S(0, 1)$ définies par : $f(t, u) := t.u$ et $g(u) := \left(\|u\|, \frac{u}{\|u\|}\right)$. Ces deux applications sont clairement continues sur leur domaine de définition.

$\forall t \in [\alpha, \beta], \forall u \in S(0, 1) : (g \circ f)(t, u) = g(tu) = \left(\|tu\|, \frac{tu}{\|tu\|}\right) = (t, u)$, car $t > 0$ et $\|u\| = 1$.

$$\forall u \in C : (f \circ g)(u) = f\left(\|u\|, \frac{u}{\|u\|}\right) = \|u\| \times \frac{u}{\|u\|} = u \text{ car } \|u\| > 0.$$

Donc f et g sont deux bijections continues telles que $g = f^{-1}$, et la démonstration est terminée.

☞ Exercice 1.5

Il suffit de faire des dessins envisageant tous les cas possibles (prendre des axes orthonormés pour placer s et t). Soient $(s, t) \in A \iff s \in \mathbb{Q}$ ou $t \in \mathbb{Q}$, et $(s', t') \in A$.

1^{er} cas : $s \in \mathbb{Q}$ et $t' \in \mathbb{Q}$; les droites D joignant (s, t) à (s', t') et D' joignant (s, t') à (s', t) sont contenues dans A .

D'où le chemin à suivre (segments contigus sur D et D') pour aller de (s, t) à (s', t') en restant dans A .

2^{ème} cas : $t \in \mathbb{Q}$ et $s' \in \mathbb{Q}$, cas symétrique du 1^{er}; les droites D joignant (s', t) à (s', t') et D' joignant (s, t) à (s', t) sont dans A .

3^{ème} cas : $s \in \mathbb{Q}$ et $s' \in \mathbb{Q}$; on considère la droite D passant par (s, t) parallèle à l'axe des t et la droite D' passant par (s', t') et parallèle à l'axe des t . D et D' sont dans A . On se donne $r \in \mathbb{Q}$ arbitraire, et on considère la droite D'' parallèle à l'axe des s et d'ordonnée r . On passe de (s, t) à (s', t') en empruntant des segments contigus de D, D' et D'' (3 segments au lieu de 2 dans les 2 premiers cas).

4^{ème} cas : $t \in \mathbb{Q}$ et $t' \in \mathbb{Q}$; cas symétrique du 3^{ème}; on considère D et D' parallèles à l'axe des s passant par (s, t) pour D et par (s', t') pour D' .

On se donne $q \in \mathbb{Q}$ arbitraire et on considère la droite D'' parallèle à l'axe des t passant par (q, t) . On peut aller de (s, t) à (s', t') sans quitter A en prenant des segments de D, D', D'' contigus. ♦

☞ Exercice 2.1

Posons $E_\varphi^+ = \{v \in E / \varphi(v) > 0\}$ et $E_\varphi^- = \{v \in E / \varphi(v) < 0\}$. On a :
 $E = \text{Ker}(\varphi) \cup E_\varphi^+ \cup E_\varphi^-$, les trois ensembles étant disjoints deux à deux.

$E \setminus \text{Ker}(\varphi) = E_\varphi^+ \cup E_\varphi^-$. Soient $u \in E_\varphi^+$ et $v \in E_\varphi^-$ (si $u \in E_\varphi^+$, on a $-u \in E_\varphi^-$, et vice-versa).

Supposons qu'il existe $\chi : [0, 1] \rightarrow E \setminus \text{Ker}(\varphi)$ continu sur $[0, 1]$, tel que $\chi(0) = u$ et $\chi(1) = v$. Soit alors $\psi = \varphi \circ \chi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$; c'est une fonction continue sur $[0, 1]$ et :
 $\psi(0) = \varphi(\chi(0)) = \varphi(u) > 0$, $\psi(1) = \varphi(\chi(1)) = \varphi(v) < 0$. On peut appliquer le Th. des valeurs intermédiaires élémentaire (le Th. de Bolzano) et il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $\psi(\alpha) = 0 = \varphi(\chi(\alpha))$, soit : $\chi(\alpha) \in \text{Ker}(\varphi)$. Donc χ ne serait pas à valeurs dans $E \setminus \text{Ker}(\varphi)$, et on arrive à une contradiction. ♦

Contre-exemple lorsque $\varphi \in E^* \setminus E'$. E est l'espace vectoriel des fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[0, 1]$ et admettant une dérivée (à droite) finie en 0.

$\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \varphi(f) = f'(0^+)$ est manifestement linéaire sur E , mais n'est pas continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Il est facile de voir que φ n'est pas continue sur E en considérant la suite $f_n(t) := \frac{1}{n} \sin(nt), t \in [0, 1] : \|f_n\|_\infty \leq \frac{1}{n}$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n) = 0$, dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$; mais $f'_n(t) = \frac{1}{n} \cdot n \cos(nt) = \cos(nt)$, et $f'_n(0^+) = 1$, donc $\varphi(f_n) = 1$ pour tout n ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

On prouverait de la même façon que E n'est pas fermé dans $C_\infty([0, 1], \mathbb{R})$, et n'est donc pas complet.

On aura prouvé que $E \setminus \text{Ker}(\varphi)$ est connexe par arcs si l'on trouve $f_0 \in E_\varphi^-$ et $g_0 \in E_\varphi^+$ pouvant être joints par un arc contenu dans $E \setminus \text{Ker}(\varphi)$. En effet E_φ^- et E_φ^+ sont connexes par arcs, car convexes, et tout $f \in E_\varphi^-$ pourra être joint à un $g \in E_\varphi^+$ en passant par l'intermédiaire de f_0 et g_0 .

Comme suggéré dans l'énoncé, on prendra $f_0(t) := -t + 1, g_0(t) := t - 1$, et on considère les fonctions $h_s, 0 \leq s \leq 1$, définies par $h_s(t) := t - 2s + 1$ pour $0 \leq t \leq s$ et $h_s(t) := -t + 1$ pour $s \leq t \leq 1$.

On a : $f'_0(0^+) = -1$, soit $f_0 \in E_\varphi^-$ et $g'_0(0^+) = +1$, soit $g_0 \in E_\varphi^+$.
 $h_0(t) = f_0(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$ et $h_1(t) = g_0(t)$ pour tout $t \in [0, 1]$; enfin, pour tout $s \in]0, 1[$: $h_s \in E, \varphi(h_s) = h'_s(0^+) = +1$, soit $h_s \in E_\varphi^+$ pour tout $s \in]0, 1[$.

Finalement $\chi : [0, 1] \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty), s \mapsto h_s$ vérifie : $\chi(0) = f_0, \chi(1) = g_0$, et $\forall s \in [0, 1] : \chi(s) \in E \setminus \text{Ker}(\varphi) = E_\varphi^- \cup E_\varphi^+$.

Si l'on prouve que χ est une application continue, on aura l'arc cherché joignant $f_0 \in E_\varphi^-$, à $g_0 \in E_\varphi^+$, à travers l'hyperplan $\text{Ker}(\varphi)$ (qui est partout dense [Chap. X]) qui n'est donc pas « imperméable » mais, plutôt « poreux ».

Soit $0 \leq s' \leq s \leq 1 : 0 \leq [\chi(s')](t) - [\chi(s)](t)$ pour tout $t \in [0, 1]$.
 $0 \leq t \leq s' : [\chi(s')](t) - [\chi(s)](t) = (t - 2s' + 1) - (t - 2s + 1) = 2(s - s')$;
 $s' \leq t \leq s : [\chi(s')](t) - [\chi(s)](t) = (-t + 1) - (t - 2s + 1) = -2t + 2s$;

d'où : $\sup_{s' \leq t \leq s} [\chi(s')](t) - [\chi(s)](t) = \max_{s' \leq t \leq s} (-2t + 2s) = 2(s - s')$;
 $s \leq t \leq 1 : [\chi(s')](t) - [\chi(s)](t) = (-t + 1) - (-t + 1) = 0$; d'où,

$\forall s, s' \in [0, 1] : \|\chi(s) - \chi(s')\|_\infty = \|h_s - h_{s'}\|_\infty \leq 2|s - s'|$ et χ est continue car lipschitzienne (de constante 2). ♦

📌 **Exercice 2.2**

a) **Cas réel** : Le résultat est pratiquement évident en supposant que $\det : L(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue ; ce dernier résultat est facile à vérifier en revenant à l'une des définitions de \det . De toute façon, vous verrez en calcul différentiel que \det est une fonction indéfiniment dérivable !

Supposons qu'il existe un arc $\varphi : [0, 1] \rightarrow GL(\mathbb{R}^n)$ joignant $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ à $B \in GL(\mathbb{R}^n)$. $\psi = \det \circ \varphi$ est une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R}^* .

On obtiendra donc une contradiction (Corol. 2.3) si l'on peut trouver $A \in GL(\mathbb{R}^n)$ tel que $\det(A) > 0$ et $B \in GL(\mathbb{R}^n)$ tel que $\det(B) < 0$.

Pour A , on prend $I_{\mathbb{R}^n}$ de déterminant +1, et pour B l'application qui dans la base canonique a pour matrice la matrice diagonale comportant $(n - 1)$ fois +1 et une fois -1. Rappelons que le déterminant d'une application linéaire ne dépend pas de la base choisie. ♦

b) **Cas complexe** : On remarque d'abord qu'il suffit de savoir joindre $A \in GL(\mathbb{C}^n)$ arbitraire à Id_E l'identité sur \mathbb{C}^n ($Id_E \in GL(\mathbb{C}^n)$). En effet, pour joindre A à B , on joindra A à Id_E et Id_E à B , puis on recollera comme dans l'Exercice 1.1 c).

Soit F un sous-ensemble fini de \mathbb{C} ne contenant ni 0 ni 1, on déterminera F ultérieurement, et soit $\chi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus F$ un arc joignant 0 à 1. Il existe bien un tel arc, constitué par exemple de segments contigus parallèles aux axes *Ré* et *Im*.

Soit $A \in GL(\mathbb{C}^n)$, et considérons la fonction suivante (destinée à être un arc, celui qu'il nous faut) : $\varphi(t) := \chi(t).A + (1 - \chi(t)).Id_E$.

φ est continue sur $[0, 1]$ car χ l'est, et : $\varphi(0) = Id_E, \varphi(1) = A$. φ est donc un arc joignant Id_E à A dans $L(\mathbb{C}^n)$.

Le problème à présent, c'est de se débrouiller pour que φ soit un arc dans $GL(\mathbb{C}^n)$, i.e. de prouver que $\varphi(t) \in GL(\mathbb{C}^n)$ pour tout $t \in]0, 1[$.

$$\det \varphi(t) = \det[\chi(t).A + (1 - \chi(t)).Id_E] = \det[\chi(t).(A + \frac{1 - \chi(t)}{\chi(t)}.Id_E)]$$

$$\det \varphi(t) = [\chi(t)]^n \cdot \det(A + \frac{1 - \chi(t)}{\chi(t)} Id_E) = [\chi(t)]^n \cdot \det(A - (1 - \frac{1}{\chi(t)}).Id_E).$$

On a le droit de faire ce calcul si $\chi(t) \neq 0$ pour $t \in]0, 1[$, et on aura alors $\det \varphi(t) \neq 0$ si $1 - \frac{1}{\chi(t)}$ n'est pas une valeur propre de A .

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A , certaines pouvant être égales ; mais en tout cas $\lambda_i \neq 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, car A est inversible ($A \in GL(\mathbb{C}^n)$).

$1 - \frac{1}{\chi(t)} \neq \lambda_i \iff \chi(t) \neq \frac{1}{1 - \lambda_i}$. On va donc prendre $F = \{\frac{1}{1 - \lambda_1}, \dots, \frac{1}{1 - \lambda_n}\}$, où $\lambda_i \neq 1$ (si certaines valeurs propres λ_i valent 1, on ne s'en préoccupe pas).

$\mathbb{C} \setminus F$ contient 0 et 1, et est connexe par arcs. On peut donc joindre 0 à 1 dans $\mathbb{C} \setminus F$ par χ choisi tel que $1 - \frac{1}{\chi(t)}$ n'est pas valeur propre de A et tel que $\chi(t) \neq 0$ pour $t \in]0, 1[$ (il suffit pour cette dernière condition de ne pas faire repasser l'arc en 0, ce qui est loisible).

Alors $\det \varphi(t) \neq 0$, et le problème est résolu. ♦

Exercice 3.1

Les demi-espaces E_φ^- et E_φ^+ sont convexes, donc connexes par arcs, donc connexes. Prouvons que ce sont les deux composantes connexes de $E \setminus \text{Ker}(\varphi)$.

Supposons, par exemple, qu'il existe K connexe contenant strictement E_φ^+ , avec $K \subset E \setminus \text{Ker}(\varphi)$. K contiendrait donc un point u de E_φ^- , et on aurait $\{u\} \cup E_\varphi^+ \subset K$.

Soit $v \in E_\varphi^+$; on aurait $\varphi(u) < 0$ et $\varphi(v) > 0$, et donc – théorème des valeurs intermédiaires – il existerait un point $w \in K$ tel que $\varphi(w) = 0$, ce qui est contradictoire avec $K \subset E \setminus \text{Ker}(\varphi)$. ♦

Exercice 3.2

Soit V une composante connexe de U , et soit $u \in V$. Puisque U est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(u, \rho] \subset U$. $B(u, \rho]$ est convexe, donc connexe par arcs, et donc connexe. D'autre part $u \in V \cap B(u, \rho]$, et donc d'après la Prop. 2.6 : $V \cup B(u, \rho]$ est connexe. Par définition d'une composante connexe, on a : $V \cup B(u, \rho] \subset V$, et donc : $B(u, \rho] \subset V$, qui est donc ouvert. ♦

Soit à présent U un ouvert de \mathbb{R} . Les composantes connexes de U sont donc des intervalles [Prop. 2.4] ouverts [résultat ci-dessus]. U est donc une réunion d'intervalles ouverts disjoints. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ une bijection [\mathbb{Q} est dénombrable].

Définissons pour l'un des intervalles ci-dessus l'entier $n(I)$ comme le plus petit entier tel que $f(n) \in I$. Il est donc loisible de numéroter les intervalles ouverts (les composantes connexes) avec les entiers $n(I)$.

Par conséquent, il n'y a qu'un ensemble dénombrable au plus de composantes connexes.

LECTURE – PROBLÈME

Le groupe fondamental

I. Soient E_d et F_δ des espaces métriques. On suppose que $E = A \cup B$ où A, B sont des fermés de E . Soient $f : A \rightarrow F$ et $g : B \rightarrow F$ des applications continues sur A , resp. B , telles que $f(u) = g(u)$ pour tout $u \in A \cap B$.

Soit $h : E \rightarrow F$ définie par $h(u) = f(u)$ si $u \in A$ et $h(u) = g(u)$ si $u \in B$. Démontrez que h est continue sur E .

Indication : Démontrez que pour tout $X \subset E$ on a $h(\text{adh}(X)) \subset \text{adh}[h(X)]$ [cf. critère (2.4) du Chap. VII] ; considérez $Y = X \cap A$ et $Z = X \cap B$ et remarquez que $X = Y \cup Z$.

II. On note I l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Soit $X \subset E$ fixé, arbitraire ($X = \emptyset$ est permis). Soient $f, g : E \rightarrow F$ deux applications continues sur E .

On dit que f est homotope à g relativement à X s'il existe une application $\Phi : E \times I \rightarrow F$, **continue** sur $E \times I$, vérifiant : $\forall u \in E : \Phi(u, 0) = f(u)$, $\forall u \in E : \Phi(u, 1) = g(u)$, $\forall x \in X, \forall t \in I : \Phi(x, t) = f(x) = g(x)$.

Lorsque ces conditions sont remplies, on écrit : $f \approx_X g$.

Φ est appelée une **homotopie**. Φ est une *déformation continue de f en g* vérifiant une certaine condition donnée par X (un exemple de telle condition est donnée dans **III** ci-dessous).

Démontrez que \approx_X est une relation d'équivalence sur l'ensemble des applications continues $E \rightarrow F$.

III. On considère maintenant des arcs $\alpha : I \rightarrow E$ (cf. Définition 1.1).

Un arc constant sera appelé un *arc nul*. On note α^{-1} , et on appelle *arc inverse*, l'arc défini par $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1 - t)$. Si α, β sont deux arcs tels que $\alpha(1) = \beta(0)$, on note $\gamma := \alpha\beta$ l'arc, appelé *arc produit*, défini par : $\gamma(t) := \alpha(2t)$ pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\gamma(t) := \beta(2t - 1)$ pour $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Voir Exercice 1.1.

Deux arcs α et β ayant même origine (i.e. $\alpha(0) = \beta(0)$), et même extrémité (i.e. $\alpha(1) = \beta(1)$), seront dits *homotopes*, on notera $\alpha \approx \beta$, si α et β sont homotopes relativement à $X = \{0, 1\}$, au sens de **II**. Autrement dit, $\alpha \approx \beta$ s'il existe $\Phi : I \times I \rightarrow E$ continue telle que : $\forall s \in I : \Phi(s, 0) = \alpha(s)$, $\Phi(s, 1) = \beta(s)$, $\forall t \in I : \Phi(0, t) = \alpha(0) = \beta(0)$, $\Phi(1, t) = \alpha(1) = \beta(1)$.

1) Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ des arcs tels que $\alpha \approx \gamma$ et $\beta \approx \delta$. Démontrez que si $\alpha\beta$ est défini, il en est de même de $\gamma\delta$, et qu'on a $\alpha\beta \approx \gamma\delta$.

2) Démontrez que si α et β sont deux arcs tels que $\alpha \approx \beta$, on a $\alpha^{-1} \approx \beta^{-1}$.

3) Démontrez que si α est un arc et β un arc nul tels que $\alpha\beta$ existe, on a $\alpha\beta \approx \alpha$. De même si γ est un arc nul tel que $\gamma\alpha$ existe : $\gamma\alpha \approx \alpha$.

4) Soient α, β, γ trois arcs tels que $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ existent. Démontrez que $(\alpha\beta)\gamma$ et $\alpha(\beta\gamma)$ existent et que $(\alpha\beta)\gamma \approx \alpha(\beta\gamma)$.

Indication : Considérez

$\Phi(s, t) := \alpha(4\frac{s}{1+t})$, $\Phi(s, t) := \beta(4s - 1 - t)$, $\Phi(s, t) := \gamma(1 - 4\frac{1-s}{2-t})$
sur des intervalles bien choisis.

5) Soit α un arc. Démontrez que $\alpha\alpha^{-1}$ et $\alpha^{-1}\alpha$ sont des arcs homotopes à des arcs nuls.

6) Soient α, β deux arcs tels que $\alpha\beta^{-1}$ existe et est fermé [i.e. $\alpha\beta^{-1}(0) = \alpha\beta^{-1}(1)$]. Démontrez que $\alpha\beta^{-1}$ est homotope à un arc nul si et seulement si $\alpha \approx \beta$.

IV. Soit maintenant w un point fixé de E . On considère \mathcal{L}_w l'ensemble des *lacets basés en w* , i.e. des arcs $\alpha : I \rightarrow E$ tels que $\alpha(0) = \alpha(1) = w$.

Pour $\alpha \in \mathcal{L}_w$, on note $[\alpha]$ l'ensemble des $\beta \in \mathcal{L}_w$ tels que $\beta \approx \alpha$. $[\alpha]$ s'appelle la *classe d'homotopie* de α .

On définit le produit $[\alpha][\beta]$ par $[\alpha\beta]$. Démontrez que ce produit est bien défini et définit sur l'ensemble des classes d'homotopie de lacets basés en w une structure de *groupe*. Ce groupe, noté $\pi_1(E, w)$ est appelé le **groupe fondamental**, ou le **groupe de Poincaré**, de E en w .

CORRIGÉ DE LA LECTURE – PROBLÈME

I. Soit $X \subset E$ arbitraire. On pose : $Y = X \cap A$ et $Z = X \cap B$.
 $Y \cup Z = (X \cap A) \cup (X \cap B) = X \cap (A \cup B) = X \cap E = X$ puisque $X \subset E$.

D'après le formulaire de adh , on a : $\text{adh}(X) = \text{adh}(Y) \cup \text{adh}(Z)$, et donc pour toute application h (formule connue) : $h[\text{adh}(X)] = h[\text{adh}(Y)] \cup h[\text{adh}(Z)]$ (*).

$\text{adh}(Y) = \text{adh}(X \cap A)$; $X \cap A \subset A \implies \text{adh}(Y) = \text{adh}(X \cap A) \subset \text{adh}(A) = A$ (A fermé) ; on a donc : $\text{adh}(Y) \subset A$; de la même manière : $\text{adh}(Z) \subset B$.

On a donc : $h[\text{adh}(Y)] = f[\text{adh}(Y)]$ et $h[\text{adh}(Z)] = g[\text{adh}(Z)]$.

f et g étant continues, on a : $f[\text{adh}(Y)] \subset \text{adh}[f(Y)]$ et $g[\text{adh}(Z)] \subset \text{adh}[g(Z)]$.

Revenons à (*) :

$$h[\text{adh}(X)] \subset \text{adh}[f(Y)] \cup \text{adh}[g(Z)] = \text{adh}[h(Y)] \cup \text{adh}[h(Z)]$$

$$h[\text{adh}(X)] \subset \text{adh}[h(Y) \cup h(Z)] = \text{adh}[h(Y \cup Z)] = \text{adh}[h(X)].$$

$$h[\text{adh}(X)] \subset \text{adh}[h(X)] \text{ et } h \text{ est donc bien continue. } \blacklozenge$$

II. Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(E, F)$ l'ensemble des applications $E \rightarrow F$ continues sur E . Démontrons que \approx_X est une relation d'équivalence sur \mathcal{C} .

a) *Réflexivité.* Soit à montrer que $\forall f \in \mathcal{C} : f \approx_X f$. On considère $\Phi : E \times I \rightarrow F$ définie par : $\forall u \in E, \forall t \in I : \Phi(u, t) := f(u)$. Φ est continue car $\Phi = f \circ \text{pr}_1$ où $\text{pr}_1 : E \times I \rightarrow E$, $\text{pr}_1(u, t) = u$ est continue [Chap. IX].

Ensuite : $\Phi(u, 0) = \Phi(u, 1) = f(u)$, et $\Phi(x, t) = f(x)$ pour tout $x \in X$. f est donc bien homotope à f relativement à X . \blacklozenge

b) *Symétrie.* Démontrons que $f \approx_X g$ implique $g \approx_X f$.

Par hypothèse, il existe $\Phi : E \times I \rightarrow F$ continue telle que $\forall u \in E : \Phi(u, 0) = f(u)$, $\Phi(u, 1) = g(u)$, $\forall x \in X : \Phi(x, t) = f(x) = g(x)$.

Définissons $\Psi : E \times I \rightarrow F$ par : $\forall u \in E, \forall t \in I : \Psi(u, t) := \Phi(u, 1 - t)$.

Ψ est continue puisque $t \rightarrow 1 - t$ est continue. $\forall u \in E : \Psi(u, 0) = \Phi(u, 1) = g(u)$, $\Psi(u, 1) = \Phi(u, 0) = f(u)$. $\forall x \in X, \forall t \in I : \Psi(x, t) = \Phi(x, 1 - t) = f(x) = g(x)$.

Donc $g \approx_X f$. \blacklozenge

c) *Transitivité.* Supposons que $f \approx_X g$, que $g \approx_X h$, et prouvons que $f \approx_X h$.

Par hypothèse, il existe $\Phi : E \times I \rightarrow F$ et $\Psi : E \times I \rightarrow F$ continues telles que : $\forall u \in E : \Phi(u, 0) = f(u)$, $\Psi(u, 0) = g(u)$, $\Phi(u, 1) = g(u)$, $\Psi(u, 1) = h(u)$, et : $\forall x \in X, \forall t \in I : \Phi(x, t) = f(x) = g(x)$, $\Psi(x, t) = g(x) = h(x)$.

Définissons $\Xi : E \times I \rightarrow F$ de la manière suivante : pour tout $u \in E$, tout $t \in [0, \frac{1}{2}]$: $\Xi(u, t) := \Phi(u, 2t)$ et pour tout $t \in [\frac{1}{2}, 1]$: $\Xi(u, t) := \Psi(u, 2t - 1)$.

Ξ est continue sur $E \times I$ en utilisant la partie I du Problème. Ensuite :

$\forall u \in E : \Xi(u, 0) = \Phi(u, 0) = f(u)$, $\Xi(u, 1) = \Psi(u, 1) = h(u)$, et : $\forall x \in X, \forall t \in I$:

$$\Xi(x, t) = \Phi(x, 2t) = f(x) = g(x) \text{ pour tout } t \in [0, \frac{1}{2}], \text{ et}$$

$$\Xi(x, t) = \Psi(x, 2t - 1) = g(x) = h(x) \text{ pour tout } t \in [\frac{1}{2}, 1],$$

donc $\Xi(x, t) = g(x) = h(x)$ pour tout $t \in I$. On a donc bien $f \approx_X h$. \blacklozenge

La démonstration est terminée. \blacklozenge

III. 1) Puisque $\alpha\beta$ est défini, $\alpha(1) = \beta(0)$. Puisque $\alpha \approx \gamma$ et $\beta \approx \delta$, $\alpha(1) = \gamma(1)$ et $\beta(0) = \delta(0)$. Donc $\gamma(1) = \delta(0)$, et ainsi $\gamma\delta$ existe.

Puisque $\alpha \approx \gamma$ et $\beta \approx \delta$, il existe $\Phi : I \times I \rightarrow E$ et $\Psi : I \times I \rightarrow E$ continues telles que $\forall s, t \in I : \Phi(s, 0) = \alpha(s)$, $\Phi(s, 1) = \gamma(s)$, $\Phi(0, t) = \alpha(0) = \gamma(0)$, $\Phi(1, t) = \alpha(1) = \gamma(1)$, $\Psi(s, 0) = \beta(s)$, $\Psi(s, 1) = \delta(s)$, $\Psi(0, t) = \beta(0) = \delta(0)$, $\Psi(1, t) = \beta(1) = \delta(1)$.

On considère $\Xi : I \times I \rightarrow E$ définie par : $\forall s \in [0, \frac{1}{2}], \forall t \in I : \Xi(s, t) := \Phi(2s, t)$ et $\forall s \in [\frac{1}{2}, 1], \forall t \in I : \Xi(s, t) := \Psi(2s - 1, t)$. Par I, Ξ est continue sur $I \times I$; et on a : $\forall s \in [0, \frac{1}{2}] : \Xi(s, 0) = \alpha(2s)$, $\forall s \in [\frac{1}{2}, 1] : \Xi(s, 0) = \beta(2s - 1)$, $\forall s \in [0, \frac{1}{2}] : \Xi(s, 1) = \gamma(2s)$, $\forall s \in [\frac{1}{2}, 1] : \Xi(s, 1) = \delta(2s - 1)$; $\forall t \in I : \Xi(0, t) = \Phi(0, t) = \alpha(0) = \beta(0)$, $\forall t \in I : \Xi(1, t) = \Psi(1, t) = \gamma(0) = \delta(0)$. On a donc bien : $\alpha\beta \approx \gamma\delta$. \blacklozenge

2) Puisque $\alpha \approx \beta$, il existe $\Phi : I \times I \rightarrow E$ continue telle que :

$\forall s \in I : \Phi(s, 0) = \alpha(s), \Phi(s, 1) = \beta(s); \forall t \in I : \Phi(0, t) = \alpha(0) = \beta(0),$
 $\Phi(1, t) = \alpha(1) = \beta(1).$

On considère $\Psi : I \times I \rightarrow E$ définie par $\forall s, t \in I : \Psi(s, t) := \Phi(1 - s, t)$. Ψ est continue par **I**, et :

$\forall s \in I : \Psi(s, 0) = \alpha(1 - s), \Psi(s, 1) = \beta(1 - s)$, et
 $\forall t \in I : \Psi(0, t) = \Phi(1, t) = \alpha(1) = \beta(1), \Psi(1, t) = \Phi(0, t) = \alpha(0) = \beta(0).$

On a donc bien $\alpha^{-1} \approx \beta^{-1}$. ♦

3) Comme $\alpha\beta$ existe et comme β est un arc nul : $\beta(s) = \alpha(1)$.

Considérons $\Phi : I \times I \rightarrow E$ définie par $\Phi(s, t) := \alpha(\frac{2s}{1+t})$ si $0 \leq s \leq \frac{1}{2}(1+t)$, $\Phi(s, t) := \alpha(1)$ si $\frac{1}{2}(1+t) \leq s \leq 1$. On a :

$\forall s \in [0, \frac{1}{2}] : \Phi(s, 0) = \alpha(2s), \forall s \in [\frac{1}{2}, 1] : \Phi(s, 0) = \alpha(1); \forall t \in I : \Phi(0, t) = \alpha(0),$
 $\Phi(1, t) = \alpha(1)$. Φ est continue sur $I \times I$ (simple) et donc $\alpha\beta \approx \alpha$. On procède de façon similaire pour $\gamma\alpha \approx \alpha$. ♦

4) Commencer par expliciter $\alpha(\beta\gamma)$ et $(\alpha\beta)\gamma$ pour voir ce qu'on a à prouver, et constater qu'on n'a pas associativité.

Considérons la fonction définie par :

$$\forall t \in I, \forall s \in [0, \frac{1}{4}(1+t)] : \Phi(s, t) := \alpha(\frac{4s}{1+t}),$$

$$\forall t \in I, \forall s \in [\frac{1}{4}(1+t), \frac{1}{4}(2+t)] : \Phi(s, t) := \beta[4s - 1 - t],$$

$$\forall t \in I, \forall s \in [\frac{1}{4}(2+t), 1] : \Phi(s, t) := \gamma[1 - 4\frac{1-s}{2-t}].$$

Φ est continue par **I**, et :

$$\forall s \in [0, \frac{1}{4}] : \Phi(s, 0) = \alpha(4s), \forall s \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] : \Phi(s, 0) = \beta(4s - 1),$$

$$\forall s \in [\frac{1}{2}, 1] : \Phi(s, 0) = \gamma(2s - 1); \forall s \in [0, \frac{1}{2}] : \Phi(s, 1) = \alpha(2s),$$

$$\forall s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] : \Phi(s, 1) = \beta(2s - 1), \forall s \in [\frac{3}{4}, 1] : \Phi(s, 1) = \gamma(4s - 3).$$

D'où, en posant $\xi := (\alpha\beta)\gamma$ et $\eta := \alpha(\beta\gamma) : \Phi(s, 0) = \xi(s), \Phi(s, 1) = \eta(s)$.

On a aussi : $\Phi(0, t) = \alpha(0) = \xi(0), \Phi(1, t) = \gamma(1) = \eta(1)$.

En définitive : $(\alpha\beta)\gamma \approx \alpha(\beta\gamma)$. ♦

5) Prenons $\Phi : I \times I \rightarrow E$ définie par :

$$\forall t \in I, \forall s \in [0, \frac{1}{2}] : \Phi(s, t) := \alpha[2s(1-t)],$$

$$\forall t \in I, \forall s \in [\frac{1}{2}, 1] : \Phi(s, t) := \alpha[2(1-s)(1-t)].$$

Φ est continue sur $I \times I$ et :

$$\forall s \in [0, \frac{1}{2}] : \Phi(s, 0) = \alpha(2s), \forall s \in [\frac{1}{2}, 1] : \Phi(s, 1) = \alpha(2 - 2s),$$

$$\forall s \in I : \Phi(s, 1) = \alpha(0), \forall t \in I : \Phi(0, t) = \alpha(0).$$

Donc $\alpha\alpha^{-1}$ est homotope à l'arc nul d'image $\alpha(0) \in E$. De la même façon, $\alpha^{-1}\alpha$ est homotope à l'arc nul d'image $\alpha(1)$. ♦

6) Comme $\alpha\beta^{-1}$ existe, $\alpha(1) = \beta(1)$, et puisque $\alpha\beta^{-1}$ est fermé, $\alpha(0) = \beta(0)$.

Supposons que $\alpha\beta^{-1}$ est homotope à un arc nul ; alors par **1)** et **3)**, $(\alpha\beta^{-1})\beta$ est homotope à β . Mais, par **4)**, $(\alpha\beta^{-1})\beta$ est homotope à $\alpha(\beta^{-1}\beta)$, qui, par **5)** et **3)**, est homotope à α .

D'où $\alpha \approx \beta$.

Réciproquement, si $\alpha \approx \beta$, par **1)** on a $\alpha\beta^{-1} \approx \beta\beta^{-1}$, et par **5)** $\beta\beta^{-1}$ est homotope à un arc nul. Donc $\alpha\beta^{-1}$ est homotope à un arc nul. ♦

IV. Prouvons que le produit de classes d'homotopies de lacets basés en w est bien défini. Il nous faut vérifier que $[\alpha][\beta]$ est défini de façon unique par $[\alpha]$ et $[\beta]$. *i.e.* que $[\alpha][\beta]$ ne dépend pas des représentants choisis pour le définir, par $[\alpha\beta]$.

Mais si $\alpha \approx \gamma$ et $\beta \approx \delta$, on a $\alpha\beta \approx \gamma\delta$, par **III 1)**, entraîne $[\gamma][\delta] = [\gamma\delta] = [\alpha\beta]$.

D'autre part – par définition – $[\alpha][\beta]$ est une classe d'homotopie d'un lacet basé en w . ♦

$$([\alpha][\beta])[\gamma] = [\alpha\beta][\gamma] = [(\alpha\beta)\gamma], \text{ et } : [\alpha]([\beta][\gamma]) = [\alpha][\beta\gamma] = [\alpha(\beta\gamma)].$$

Donc, puisque par **III 4)** on a $(\alpha\beta)\gamma \approx \alpha(\beta\gamma)$, le produit considéré est associatif. ♦

Notons $[\varepsilon]$ la classe d'homotopie du lacet nul en w $[\varepsilon(s) = w]$.

Par **III 3)**, on a $[\alpha][\varepsilon] = [\alpha\varepsilon] = [\alpha] : [\varepsilon]$ est donc élément neutre pour notre produit.

Par **III 5)**, on a $[\alpha][\alpha^{-1}] = [\alpha\alpha^{-1}] = [\varepsilon]$. Donc tout élément est inversible. ♦

Donc l'ensemble des classes d'homotopie de l'ensemble des lacets basés en w muni du produit des lacets est un groupe qu'on note $\pi_1(E, w)$ et qu'on appelle le **groupe fondamental** – ou **groupe de Poincaré** – de E en w .

Notons que le groupe fondamental n'a aucune raison d'être commutatif . . .

On démontre (c'est facile, vous pouvez le faire), que si E est connexe par arcs on a : $\pi_1(E, w)$ et $\pi_1(E, z)$ isomorphes pour tous $w, z \in E$.

Cette notion de groupe fondamental sert en particulier à définir la notion d'espace métrique (plus généralement topologique) **simplement connexe** qui – en gros – est un espace « sans trou ». Ce qui définit d'ailleurs la notion de trou . . .

De façon précise, E est simplement connexe si tous les groupes fondamentaux de E (w parcourant E) sont triviaux, *i.e.* réduits à $\{\varepsilon\}$.

Par exemple, \mathbb{R}^2 est simplement connexe, tandis que $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ne l'est pas : un lacet entourant l'origine et un lacet ne l'entourant pas ne sont certainement pas homotopes ! $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, w)$ est – pour tout w – isomorphe à \mathbb{Z} .

Ces notions sont fondamentales pour l'intégration des formes différentielles, en particulier pour la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Si l'on détermine les groupes fondamentaux de la boule euclidienne (c'est facile) et de la sphère euclidienne (c'est moins facile) de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, on obtient une démonstration en deux lignes du difficile théorème du point fixe de Brouwer (*cf.* Chap. XVI in fine) . . . Cela vaut le coup de calculer des groupes d'homotopie !

Nous renvoyons le lecteur intéressé aux premières pages de n'importe quel cours de topologie algébrique (par exemple les livres de M. Zisman ou de C. Godbillon cités dans la bibliographie).

Fin du Chapitre XX

CHAPITRE XXI

MINIMISATION D'UNE FORME QUADRATIQUE

Introduction

Ce chapitre XXI, le dernier, traite de la *minimisation d'une forme quadratique*, i.e. d'une fonction de la forme $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto F(u) = \langle u, A(u) \rangle - 2\langle u, \varphi \rangle$, où E est un e.v.n, E' son dual topologique, $A \in \mathcal{L}(E, E'), \varphi \in E'$. Le coefficient 2 n'a aucune importance autre qu'esthétique.

La question n'est pas tellement de résoudre effectivement le problème posé : il existe une multitude d'algorithmes, issus de l'optimisation, assez simples et très efficaces, pour ce faire.

Il s'agit plutôt de *transformer* le problème en d'autres problèmes au moins aussi intéressants : problème d'*inéquation variationnelle*, problème de *point-selle* (ou *col*), problème de *min-max* (point de départ de la théorie des jeux).

Diverses formulations sont données, des généralisations suggérées.

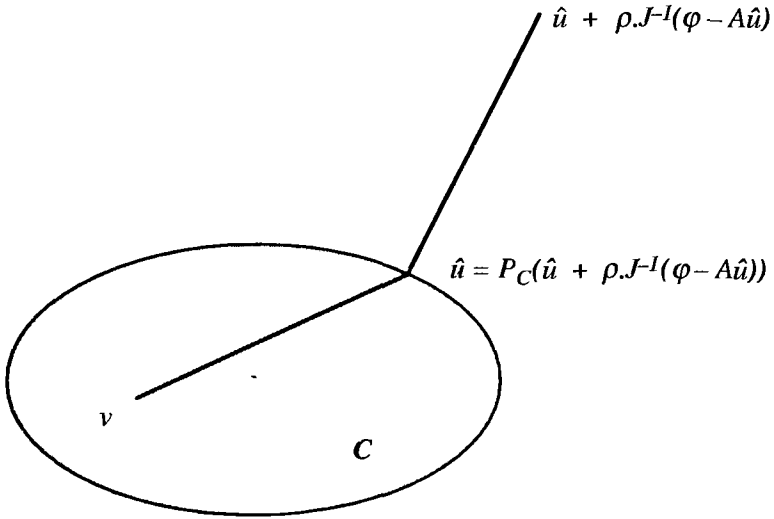
Finalement, le problème initial est résolu, dans le cas où E est un espace de Hilbert, grâce au théorème du point fixe des applications strictement contractantes (Chap. XVI) et au théorème des projections (Chap. XVII).

Il n'y a pas d'exercices, le chapitre étant conçu comme un gros exercice dirigé.

VOILA, C'EST TERMINÉ... OUF !

Plus que tout, mon fils, garde-toi d'écrire beaucoup de livres. C'est une tâche sans fin, qui fatigue l'homme.

L'Ecclésiaste. Epilogue.



Proposition 3.4

$$T_\rho(u) = P_C[u + \rho J^{-1}(\varphi - Au)]$$

$[\hat{u} \in C \text{ vérifie : } \forall v \in C, \langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0] \implies \forall \rho > 0, T_\rho(\hat{u}) = \hat{u}$

$\exists \rho > 0 \text{ tel que } T_\rho(\hat{u}) = \hat{u} \implies \forall v \in C, \langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0.$

CHAPITRE XXI

MINIMISATION D'UNE FORME QUADRATIQUE

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel (e.v.n.).

On se donne $a : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une *forme bilinéaire continue*, $a \in \mathcal{B}(E, E; \mathbb{R})$, et φ une *forme linéaire continue*, $\varphi \in E'$.

On considère la *fonctionnelle quadratique* suivante :

$$(0.1) \quad \boxed{\forall u \in E : \Phi(u) = a(u, u) - 2\varphi(u)}$$

On se donne, d'autre part, $C \neq \emptyset$, une partie *convexe fermée* de E .

On se propose dans ce qui suit d'étudier le problème de la *minimisation* de Φ sous la *contrainte* C , i.e. de calculer le nombre $\mu = \mu(\Phi, C) := \inf\{\Phi(c) / c \in C\}$ et d'étudier l'ensemble des solutions : $\text{Argmin}(\Phi, C) := \{c \in C / \Phi(c) = \mu\}$.

En fait, ce qui va surtout nous préoccuper, c'est de formuler le problème sous différents aspects, chacun de ces aspects pouvant conduire à une méthode pour l'aborder.

1. MINIMISATION ET INÉQUATIONS

Commençons par rappeler qu'il existe une isométrie linéaire surjective de $\mathcal{B}(E, E; \mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}(E, E')$ [Chap.X]. On peut donc identifier la forme bilinéaire a à un *opérateur* (i.e. une application linéaire continue) $A : E \rightarrow E'$.

Cette identification se fait tout simplement en posant, pour tous $u \in E, v \in E$: $a(u, v) = [Au](v) = \langle v, Au \rangle$, soit : $Au = a(u, \cdot)$.

On peut donc écrire la fonctionnelle quadratique qui nous intéresse :

$$(1.1) \quad \Phi(u) = \langle u, Au \rangle - 2\langle u, \varphi \rangle = \langle u, Au - 2\varphi \rangle.$$

Afin de pouvoir aller plus loin, nous allons faire deux hypothèses :

$$(1.2) \quad \forall u \in E : a(u, u) \geq 0 \text{ [positivité]}$$

$$(1.3) \quad \forall u \in E, \forall v \in E : a(v, u) = a(u, v) \text{ [symétrie]}$$

Proposition 1.1.

|| Sous les hypothèses (1.2) et (1.3), Φ est une *fonctionnelle convexe*, i.e. vérifie :

$$(1.4) \quad \forall u, v \in E, \forall \lambda \in]0, 1[: \Phi[\lambda u - (1 - \lambda)v] \leq \lambda\Phi(u) + (1 - \lambda)\Phi(v).$$

Démonstration : On veut que :

$$a[\lambda u + (1 - \lambda)v, \lambda u + (1 - \lambda)v] - 2\varphi[\lambda u + (1 - \lambda)v] \\ \leq \lambda a(u, u) - 2\lambda\varphi(u) + (1 - \lambda)a(v, v) - 2(1 - \lambda)\varphi(v),$$

soit en utilisant (1.3) :

$$\lambda^2 a(u, u) + 2\lambda(1 - \lambda)a(u, v) + (1 - \lambda)^2 a(v, v) \leq \lambda a(u, u) + (1 - \lambda)a(v, v), \text{ soit :} \\ (\lambda^2 - \lambda)a(u, u) + 2\lambda(1 - \lambda)a(u, v) + [(1 - \lambda)^2 - (1 - \lambda)]a(v, v) \leq 0, \text{ soit :} \\ -\lambda(1 - \lambda)a(u, u) + 2\lambda(1 - \lambda)a(u, v) + (1 - \lambda)(1 - \lambda - 1)a(v, v) \leq 0, \text{ soit :} \\ a(u, u) - 2a(u, v) + a(v, v) \geq 0, \text{ i.e. } a(u - v, u - v) \geq 0, \text{ ce qui est assuré par (1.2).} \blacklozenge$$

Proposition 1.2.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Pour tous } u, v \text{ dans } E, \text{ la dérivée directionnelle} \\ (1.5) \quad \Phi'(u; v) = \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{\Phi(u + tv) - \Phi(u)}{t} \text{ existe, et :} \\ \Phi'(u; v) = 2\langle v, Au - \varphi \rangle. \end{array} \right.$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \Phi(u + tv) &= a(u + tv, u + tv) - 2\varphi(u + tv) \\ &= a(u, u) + 2ta(u, v) + t^2a(v, v) - 2\varphi(u) - 2t\varphi(v) \\ &= \Phi(u) + 2ta(u, v) + t^2a(v, v) - 2\varphi(v) \\ \implies \frac{\Phi(u + tv) - \Phi(u)}{t} &= 2a(u, v) + ta(v, v) - 2\varphi(v) \\ \implies \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{\Phi(u + tv) - \Phi(u)}{t} &= 2a(u, v) - 2\varphi(v) = 2\langle v, Au - \varphi \rangle. \blacklozenge \end{aligned}$$

Proposition 1.3.

$$\left\| \begin{array}{l} \text{Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :} \\ (1.6) \quad [\text{O}] \quad \hat{u} \in C \text{ et } \forall v \in C : \Phi(\hat{u}) \leq \Phi(v), \\ (1.7) \quad [\text{I}] \quad \hat{u} \in C \text{ et } \forall v \in C : \langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0. \end{array} \right.$$

Terminologie : (1.7) [I] est appelé une *inéquation variationnelle* ; on dit « variationnel » quand l'opérateur A est la dérivée d'une fonction convexe, ce qui est bien le cas ici : $Au = q'(u; \cdot)$ avec $q(u) = a(u, u)$ [Prop.1.2 en faisant $\varphi = 0$].

Remarque : Dans (1.6) et (1.7) rien ne dit que \hat{u} existe ! Ce n'est pas le problème pour le moment.

Démonstration :

$$(1.6) \implies (1.7) : \hat{u} \in C \text{ et } v \in C \implies \forall t \in]0, 1[: tv + (1 - t)\hat{u} \in C, \text{ car } C \text{ convexe, et (1.6)}$$

D'où :

$$\Phi(\hat{u}) \leq \Phi[tv + (1 - t)\hat{u}] = \Phi[\hat{u} + t(v - \hat{u})] \implies \frac{\Phi[\hat{u} + t(v - \hat{u})] - \Phi(\hat{u})}{t} \geq 0.$$

$$\text{On utilise la Prop. 1.2 : } \lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{\Phi[\hat{u} + t(v - \hat{u})] - \Phi(\hat{u})}{t} = 2\langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0.$$

Donc : $\forall v \in C : \langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0$, i.e. (1.7). \blacklozenge (1.7) \implies (1.6) : On écrit que Φ est convexe [Prop. 1.1].

$$\forall t \in]0, 1[: \Phi[tv + (1 - t)\hat{u}] \leq t\Phi(v) + (1 - t)\Phi(\hat{u}) = t[\Phi(v) - \Phi(\hat{u})] + \Phi(\hat{u})$$

$$\text{D'où : } \frac{\Phi[\hat{u} + t(v - \hat{u})] - \Phi(\hat{u})}{t} \leq \Phi(v) - \Phi(\hat{u}).$$

On utilise à nouveau la Prop.1.2 :

$$\lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \frac{\Phi[\hat{u} + t(v - \hat{u})] - \Phi(\hat{u})}{t} = 2\langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0 \text{ par (1.7), et aussi } \leq \Phi(v) - \Phi(\hat{u}) \text{ d'après ce qui précède, et donc : } 0 \leq \Phi(v) - \Phi(\hat{u}) \implies \Phi(\hat{u}) \leq \Phi(v), \text{ cela pour tout } v \in C, \text{ i.e. (1.6). } \blacklozenge$$

Remarques :

1) On notera l'astuce consistant à remplacer le vecteur $v \in C$ arbitraire par le vecteur $tv + (1 - t)\hat{u} = \hat{u} + t(v - \hat{u})$. Cette méthode revient souvent.

2) On remarquera l'intérêt de la notion de dérivée directionnelle, notion bien plus faible que celle de dérivée usuelle (qui est dite *dérivée de Fréchet*). Toutefois, dans notre cas particulier, Φ est effectivement Fréchet-dérivable :

$$\begin{aligned}\Phi(u+h) - \Phi(u) &= a(u+h, u+h) - 2\varphi(u+h) - a(u, u) + 2\varphi(u) \\ &= 2a(u, h) + a(h, h) - 2\varphi(h)\end{aligned}$$

D'où : $|\Phi(u+h) - \Phi(u) - 2\langle h, Au - \varphi \rangle| = |a(h, h)| \leq (\|a\| \cdot \|h\|) \cdot \|h\|$, et :
 $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|a\| \cdot \|h\| = 0$. Donc : $D\Phi(u) = Au - \varphi \in E'$ existe pour tout $u \in E$. ♦

Proposition 1.4.

|| L'application $u \mapsto Bu = Au - \varphi$ vérifie :
 (1.8) [propriété dite de **monotonie**] $\forall u \in E, \forall v \in E : \langle u - v, Bu - Bv \rangle \geq 0$.

Remarque : Bien noter que $Bu = \Phi'(u; \cdot) = D\Phi(u)$, la propriété (1.8) a lieu avec Φ beaucoup plus générale (simplement convexe et dérivable dans un sens faible).

Démonstration :

$\langle u - v, Bu - Bv \rangle = \langle u - v, Au - \varphi - Av + \varphi \rangle = \langle u - v, A(u - v) \rangle = a(u - v, u - v) \geq 0$
 par (1.2). ♦

Remarque : On a démontré au passage que A est lui-aussi monotone :

$\forall u, v \in E : \langle u - v, Au - Av \rangle \geq 0$, ce qui se simplifie en : $\forall u \in E : \langle u, Au \rangle \geq 0$ (on dit que A est **positif**).

Donc, pour $A : E \rightarrow E'$ linéaire, on a : **monotonie** \iff **positivité**.

Proposition 1.5.

|| Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
 (1.7) [I] $\hat{u} \in C$ et $\forall v \in C : \langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0$,
 (1.9) [J] $\hat{u} \in C$ et $\forall v \in C : \langle v - \hat{u}, Av - \varphi \rangle \geq 0$.

Remarque : (1.9) [J] s'appelle l'**inéquation linéarisée** de l'inéquation (1.7).

Démonstration :

(1.7) \implies (1.9) D'après la propriété de monotonie [Prop. 1.4] :

$\langle v - \hat{u}, (Av - \varphi) - (A\hat{u} - \varphi) \rangle \geq 0 \implies \langle v - \hat{u}, Av - \varphi \rangle \geq \langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0$
 par (1.7). ♦

(1.9) \implies (1.7) Dans (1.8) on change $v \in C$ en $tv + (1-t)\hat{u} \in C$ pour $t \in]0, 1[$:

$\langle tv + (1-t)\hat{u} - \hat{u}, A[tv + (1-t)\hat{u}] - \varphi \rangle \geq 0 \implies t\langle v - \hat{u}, A\hat{u} + tA(v - \hat{u}) - \varphi \rangle \geq 0$
 Donc : $\langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle + t\langle v - \hat{u}, A(v - \hat{u}) \rangle \geq 0$.

D'où, en faisant tendre t vers 0 : $\langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0$, i.e. (1.7). ♦

Remarque : (1.7) \implies (1.9) est vrai pour tout A monotone (linéaire ou pas).

(1.9) \implies (1.7) subsiste si A n'est pas linéaire continu mais vérifie la condition de continuité « faible » suivante : $\forall u, v, w \in E, \lim_{t \rightarrow 0} \langle u, A[v + tw] \rangle = \langle u, Av \rangle$. On appelle **hémicontinuité** la propriété $\forall u, v, w \in E : t \rightarrow \langle u, A[v + tw] \rangle$ est continue ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

L'équivalence (1.7) \iff (1.9) est donc valide pour tout opérateur $A : E \rightarrow E'$ (linéaire ou non) qui est **monotone** et **hémicontinu**.

Corollaire 1.1.

| L'ensemble $S \subset C$ des solutions de (1.7) est un convexe fermé.

Démonstration : Si $S = \emptyset$, c'est un convexe.

Si non, soient \hat{u} et \tilde{u} deux solutions. Pour $t \in]0, 1[$: $t\hat{u} + (1-t)\tilde{u} \in C$, et :

$\forall v \in C : \langle v - \hat{u}, Av - \varphi \rangle \geq 0$ et $\forall v \in C : \langle v - \tilde{u}, Av - \varphi \rangle \geq 0$.

On multiplie la première inéquation par t , la seconde par $1-t$, et on ajoute :

$\forall v \in C : \langle tv - t\hat{u} + (1-t)v - (1-t)\tilde{u}, Av - \varphi \rangle \geq 0$. D'où :

$\forall v \in C : \langle v - [t\hat{u} + (1-t)\tilde{u}], Av - \varphi \rangle \geq 0$.

Donc $t\hat{u} + (1-t)\tilde{u} \in C$ est solution de (1.9), donc de (1.7) [Prop.1.5], et S est un convexe. ♦

Corollaire 1.2.

| L'ensemble S des solutions (1.7) est fermé dans E .

Démonstration : Soit (\hat{u}_n) une suite d'éléments de S telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{u}_n) = \hat{u}$. Alors $\hat{u} \in C$ car C est fermé, et $\forall n : \langle v - \hat{u}_n, Av - \varphi \rangle \geq 0$, d'où à la limite : $\langle v - \hat{u}, Av - \varphi \rangle \geq 0$ et $\hat{u} \in C$. Le résultat découle alors de la Prop. 1.5. ♦

Corollaire 1.3.

| D'après la Proposition 1.3, l'ensemble des solutions du problème (1.6) est convexe fermé. ♦

Remarque : On peut prouver ce résultat indépendamment en supposant que Φ est convexe et « séquentiellement semi-continue inférieurement », ce qui signifie que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u \implies \Phi(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\Phi(u_n)).$$

En effet, si \hat{u} et \tilde{u} sont solutions de (1.6), on a : $t\hat{u} + (1-t)\tilde{u} \in C$ pour $t \in]0, 1[$ et d'après la convexité :

$$\Phi[t\hat{u} + (1-t)\tilde{u}] \leq t\Phi(\hat{u}) + (1-t)\Phi(\tilde{u}) \leq t\Phi(v) + (1-t)\Phi(v) = \Phi(v)$$

pour tout $v \in C$. Donc : $t\hat{u} + (1-t)\tilde{u}$ est solution de (1.6).

Soit à présent (\hat{u}_n) une suite de solutions de (1.6) telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} (\hat{u}_n) = \hat{u}$. $\forall v \in C : \Phi(\hat{u}_n) \leq \Phi(v)$, d'où, si Φ est séq. s. c. i. : ($\hat{u} \in C$ car C fermé) $\Phi(\hat{u}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \Phi(\hat{u}_n) \leq \Phi(v)$, et \hat{u} est solution de (1.6). ♦

Proposition 1.6.

| Si \hat{u} solution de (1.7) est tel que $\hat{u} \in \text{int}(C)$ (supposé non vide), on a : $A\hat{u} = \varphi$, i.e. que \hat{u} est solution d'une équation.

| Si $C = F$ est un sous-espace vectoriel fermé de E , \hat{u} solution de (1.7) est solution de l'équation : $\forall v \in F : \langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle = 0$.

| Par conséquent (pour l'une des deux raisons), si $C = E$ entier : (1.7) s'écrit $A\hat{u} = \varphi$ (équation). **Les inéquations généralisent les équations.**

Démonstration : Soit $\hat{u} \in \text{int}(C) \neq \emptyset$. Soit $\rho > 0$ tel que $B(\hat{u}, \rho] \subset C$.

Pour tout $v \in E, v \neq 0$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $w = \hat{u} + \lambda v$. $\|\hat{u} + \lambda v - \hat{u}\| = |\lambda| \cdot \|v\| < \rho$ pour $|\lambda| < \frac{\rho}{\|v\|}$.

Pour λ ainsi choisi, on a : $\hat{u} + \lambda v \in B(\hat{u}, \rho] \subset C$.

$$(1.7) \implies \langle \hat{u} + \lambda v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0 \implies \lambda \langle v, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0.$$

Prenant $\lambda \geq 0$ puis $\lambda \leq 0$, avec $|\lambda| \leq \frac{\rho}{\|v\|}$, il vient : $\langle v, A\hat{u} - \varphi \rangle = 0$ pour tout $v \in E$, d'où : $\forall v \in E : (A\hat{u} - \varphi)(v) = 0 \implies A\hat{u} - \varphi = 0 \implies A\hat{u} = \varphi$. ♦

Cas $C = F$: $\hat{u} \in F$ et donc pour tout $v \in F : -v + 2\hat{u} \in F$, d'où : $\forall v \in F : \langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0$ et $\forall v \in F : \langle -v + 2\hat{u} - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0$, donc : $-\langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0$, d'où : $\langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle = 0$. ♦

Cas $C = E$: $\hat{u} \in \text{int}(E) = E$, d'où $A\hat{u} = \varphi$, d'après la première partie. ♦

On peut aussi raisonner d'après le cas ci-dessus :

$\forall v \in E : \langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle = 0$ donne en changeant v en $v + \hat{u} \in E : \langle v, A\hat{u} - \varphi \rangle = 0$, pour tout v , donc $A\hat{u} - \varphi = 0 \implies A\hat{u} = \varphi$. ♦

2. POINTS SELLE ET MIN-MAX

Considérons la fonction $\mathbb{L} : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, fonction appelée **Lagrangien**, définie par :

$$(2.0) \quad \boxed{\mathbb{L}(u, v) := \langle u - v, Au - \varphi \rangle}$$

Notons que pour tout $v = v_0$ fixé :

$$\mathbb{L}_1(u) := \langle u - v_0, Au - \varphi \rangle = \langle u, Au \rangle - \varphi(u) - \langle v_0, Au \rangle - \varphi(v_0)$$

est une fonction **convexe** (vérifiez).

Pour tout $u = u_0$ fixé : $\mathbb{L}_2(v) := \langle u_0 - v, Au_0 - \varphi \rangle = \langle v, \varphi - Au_0 \rangle + \langle u_0, Au_0 - \varphi \rangle$ est une fonction **affine**, donc en particulier **concave** (i.e. que $-\mathbb{L}_2$ est convexe).

Proposition 2.1.

$$\left\| \begin{array}{l} \hat{u} \in C \text{ vérifie l'inéquation (1.7) si et seulement si il existe } \tilde{v} \in C \text{ tel que :} \\ (2.1) \quad \text{[PS]} \quad \forall (u, v) \in C \times C : \mathbb{L}(\hat{u}, v) \leq \mathbb{L}(\hat{u}, \tilde{v}) \leq \mathbb{L}(u, \tilde{v}). \\ \text{Une solution de la double inégalité (2.1) s'appelle un } \mathbf{point-selle} \text{ ou un } \mathbf{col}. \end{array} \right.$$

Démonstration :

(2.1) \implies (1.7) : (\hat{u}, \tilde{v}) vérifie, par définition de \mathbb{L} :

$$\forall (u, v) \in C : \langle \hat{u} - v, A\hat{u} - \varphi \rangle \leq \langle \hat{u} - \tilde{v}, A\hat{u} - \varphi \rangle \leq \langle u - \tilde{v}, Au - \varphi \rangle.$$

Faisant $u = \tilde{v}$, on a : $\forall v \in C : \langle \hat{u} - v, A\hat{u} - \varphi \rangle \leq \langle \hat{u} - \tilde{v}, A\hat{u} - \varphi \rangle \leq 0$.

D'où : $\langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0$, soit (1.7). \blacklozenge

(1.7) \implies (2.1) : Soit $\hat{u} \in C$ solution de (1.7) ; écrivons que (\hat{u}, \hat{u}) satisfait (2.1) :

$$\forall (u, v) \in C : \langle \hat{u} - v, A\hat{u} - \varphi \rangle \leq 0 \leq \langle u - \hat{u}, Au - \varphi \rangle. \text{ Or si } \hat{u} \text{ est solution de (1.7), on a } \langle \hat{u} - v, A\hat{u} - \varphi \rangle \leq 0 (\forall v \in C) \text{ et aussi - d'après la Prop. 1.5 - } 0 \leq \langle u - \hat{u}, Au - \varphi \rangle (\forall u \in C). \text{ D'où le résultat. } \blacklozenge$$

Remarque : Pour démontrer ce résultat, on n'a eu à utiliser que (1.7) \iff (1.8). Donc la Proposition est vraie pour tout opérateur A (*linéaire ou pas*) qui est monotone et hémicontinu.

Proposition 2.2.

Soient E et F deux ensembles quelconques non vides, et soit $\mathbb{L} : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ un lagrangien absolument quelconque (i.e. une fonction quelconque sur le produit $E \times F$). Soient $C \subset E$ et $K \subset F$, non vides. Le problème (2.1) :

(2.1) il existe $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in C \times K$ tel que :

$$\forall (u, v) \in C \times K : \mathbb{L}(\tilde{u}, v) \leq \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \mathbb{L}(u, \tilde{v})$$

est équivalent au problème suivant appelé **problème minimax** :

(2.2) [mM] on a : $\min_{u \in C} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) = \max_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v)$.

où min remplace inf quand inf est effectivement atteint ; de même pour max et sup.

Démonstration :

(2.1) \implies (2.2) : $\forall (u, v) \in C \times K : \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v) \leq \mathbb{L}(u, v)$, entraîne :

$$\sup_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v) \leq \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) ;$$

et : $\sup_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v) \leq \inf_{u \in C} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) \leq \inf_{u \in C} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) \quad (1)$.

Supposons maintenant que $(\tilde{u}, \tilde{v}) \in C \times K$ vérifie :

$$\forall (u, v) \in C \times K : \mathbb{L}(\tilde{u}, v) \leq \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \mathbb{L}(u, \tilde{v}).$$

On en déduit :

$$\mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \sup_{v \in K} \mathbb{L}(\tilde{u}, v) \leq \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, \tilde{v}) \leq \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}),$$

i.e. les **égalités** : $\sup_{v \in K} \mathbb{L}(\tilde{u}, v) = \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, \tilde{v}) \quad (2)$.

Mais on a : $\inf_{u \in C} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) \leq \sup_{v \in K} \mathbb{L}(\tilde{u}, v)$ ⁽³⁾, et :

$$\inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, \tilde{v}) \leq \sup_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v)$$
 ⁽⁴⁾

[pour ⁽³⁾, considérez $f(u) := \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) : \inf_{u \in C} f(u) \leq f(\tilde{u}) = \sup_{v \in K} \mathbb{L}(\tilde{u}, v)$; de même pour ⁽⁴⁾].

On en déduit :

$$\inf_{u \in C} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) \stackrel{(3)}{\leq} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(\tilde{u}, v) \stackrel{(2)}{=} \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) \\ \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) \stackrel{(2)}{=} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, \tilde{v}) \stackrel{(4)}{\leq} \sup_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v)$$
 ⁽⁵⁾.

⁽⁵⁾ jointe à ⁽¹⁾ donne l'égalité : $\inf_{u \in C} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) = \sup_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v)$ ⁽⁶⁾.

⁽³⁾ et ⁽⁴⁾ sont alors des égalités :

$$\mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) \stackrel{(2)}{=} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, \tilde{v}) \stackrel{(4)}{\leq} \sup_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v)$$

$$\sup_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v) \stackrel{(6)}{=} \inf_{u \in C} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) \stackrel{(3)}{\leq} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(\tilde{u}, v) \stackrel{(2)}{=} \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Donc :

$$\mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sup_{v \in K} \mathbb{L}(\tilde{u}, v) = \min_{u \in C} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) = \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, \tilde{v}) = \max_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v),$$

et on a donc (2.2). ♦

(2.2) \implies (2.1) Ecrivons que les max et min sont effectivement atteints : il existe $\tilde{u} \in C$ et il existe $\tilde{v} \in K$ tels que : $\max_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v) = \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, \tilde{v})$, et : $\min_{u \in C} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) = \sup_{v \in K} \mathbb{L}(\tilde{u}, v)$.

$$\max_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v) = \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, \tilde{v}) \leq \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \sup_{v \in K} \mathbb{L}(\tilde{u}, v) = \min_{u \in C} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v),$$

où les deux termes extrêmes sont égaux par hypothèse, d'où :

$$\mathbb{L}(\tilde{u}, v) \leq \sup_{v \in K} \mathbb{L}(\tilde{u}, v) = \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, \tilde{v}) \leq \mathbb{L}(u, \tilde{v}).$$

Donc (\tilde{u}, \tilde{v}) est un point selle de \mathbb{L} . ♦

Proposition 2.3.

S'il existe $\tilde{u} \in C, \tilde{v} \in K$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall v \in K : \mathbb{L}(\tilde{u}, v) \leq \alpha \text{ et } \forall u \in C : \mathbb{L}(u, \tilde{v}) \geq \alpha :$$

(\tilde{u}, \tilde{v}) est point selle de \mathbb{L} .

La réciproque est vraie aussi (prendre $\alpha = \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v})$!).

Démonstration : Faisant $v = \tilde{v}$ dans la première inégalité et $u = \tilde{u}$ dans la seconde, on obtient : $\mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \alpha$ et $\mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) \geq \alpha$, soit $\mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \alpha$. D'où :

$$\forall (u, v) \in C \times K : \mathbb{L}(\tilde{u}, v) \leq \alpha = \mathbb{L}(\tilde{u}, \tilde{v}) \leq \mathbb{L}(u, \tilde{v}). \quad \blacklozenge$$

Proposition 2.4.

| L'ensemble des points selle de \mathbb{L} s'écrit $M \times N$ où $M \subset C$ et $N \subset K$.

Démonstration : Il s'agit de montrer que si (u', v') et (u'', v'') sont deux points selle, il en est de même de (u', v'') [bien voir ce point].

D'après la Prop. 2.2, on a : $\mathbb{L}(u', v') = \mathbb{L}(u'', v'')$, notons α cette quantité. Par définition de (u', v') , (u'', v'') points selle, on a : $\forall v \in K : \mathbb{L}(u', v) \leq \alpha$ et $\forall u \in C : \mathbb{L}(u, v'') \geq \alpha$, d'où le résultat d'après la Prop. 2.3. ♦

Proposition 2.5.

| On suppose ici que E et F sont des e.v.n. réels et que $C \subset E, K \subset F$ sont des convexes fermés. On suppose en outre que :

$\forall v \in K : u \mapsto \mathbb{L}(u, v)$ est convexe sur C et s.c.i, i.e. telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u \implies \mathbb{L}(u, v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{L}(u_n, v),$$

$\forall u \in C : v \mapsto \mathbb{L}(u, v)$ est concave sur K et s.c.s, i.e. telle que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = v \implies \mathbb{L}(u, v) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{L}(u, v_n),$$

| Dans ces conditions, l'ensemble $M \times N$ des points selle de \mathbb{L} est un convexe fermé.

Démonstration : Il suffit de prouver que M et N sont des convexes : $M \times N$ sera convexe (trivial : vérifiez). Démontrons le résultat pour M par exemple.

Supposons que $M \times N \neq \emptyset$, et soient (u', v') , (u'', v'') des points selle.

Posons $\alpha := \min_{u \in C} \sup_{v \in K} \mathbb{L}(u, v) = \max_{v \in K} \inf_{u \in C} \mathbb{L}(u, v)$.

$\forall v \in K : \mathbb{L}(u', v) \leq \alpha$ et $\mathbb{L}(u'', v) \leq \alpha$.

Soit $\lambda \in]0, 1[$.

$\forall v \in K : \mathbb{L}[\lambda u' + (1 - \lambda)u''] \leq \lambda \mathbb{L}(u', v) + (1 - \lambda)\mathbb{L}(u'', v) \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda)\alpha = \alpha$.

$\forall u \in C : \mathbb{L}(u, v') \geq \alpha$, et donc d'après la Prop. 2.3 : $(\lambda u' + (1 - \lambda)u'', v')$ est point selle de \mathbb{L} , et donc [Prop. 2.4] : $\lambda u' + (1 - \lambda)u'' \in M$ qui est donc convexe. ♦

Soit $(\tilde{u}_n, \tilde{v}_n)$ une suite de $M \times N$ convergente vers $(\tilde{u}, \tilde{v}) : (\tilde{u}, \tilde{v}) \in C \times K$ puisque $C \times K$ est fermé.

$\forall v \in K : \mathbb{L}(\tilde{u}_n, v) \leq \alpha$, d'où : $\mathbb{L}(\tilde{u}, v) \leq \liminf \mathbb{L}(\tilde{u}_n, v) \leq \alpha$,

$\forall u \in C : \mathbb{L}(u, \tilde{v}_n) \geq \alpha$, d'où : $\alpha \leq \limsup \mathbb{L}(u, \tilde{v}_n) \leq \mathbb{L}(u, \tilde{v})$.

Donc, d'après la Prop. 2.3, (\tilde{u}, \tilde{v}) est un point selle de \mathbb{L} , et $M \times N$ est fermé dans $E \times F$. ♦

Corollaire :

| Dans notre cas particulier : $\mathbb{L}(u, v) = \langle u - v, Au - \varphi \rangle$, l'ensemble des solutions est un convexe fermé (peut-être vide) $M \times N \subset C \times F$.

Démonstration : Nous avons déjà vérifié que $\mathbb{L}(\cdot, v) = \langle \cdot - v, A(\cdot) - \varphi \rangle$ est convexe et il est facile de voir qu'elle est continue (donc s.c.i.) ; quant à $\mathbb{L}(u, \cdot) = \langle u - \cdot, Au - \varphi \rangle$, c'est une fonction affine (donc concave) continue (donc s.c.s). ♦

Une selle de cheval ou un col entre deux montagnes donnent l'idée de la surface représentative $z = f(x, y)$ d'une fonction qui est convexe [resp. concave] par rapport à la première [resp. seconde] variable : faites un – ou plusieurs – dessin(s) !

Le problème min-max modélise ce que font deux joueurs : chacun essaie de maximiser son gain et de minimiser le gain de l'adversaire.

Problèmes de recherche de point selle et de min-max participent de la *théorie mathématique des jeux* fondée par John von Neumann. Sur ces sujets, voir le livre de J-P. Aubin cité dans la bibliographie.

Pour le moment, nous avons transformé notre problème de *minimisation* d'une fonctionnelle en un problème d'*inéquation variationnelle*, puis en un problème de *point selle* et en un problème de *min-max*.

Nous allons le transformer en un problème de *point fixe*, ce qui nous permettra de le résoudre, au moins dans un cas particulier.

3. RÉSULTAT D'EXISTENCE ET ALGORITHME DE CALCUL

On suppose dans toute la suite que E est un espace de Hilbert réel $(E, (\cdot|\cdot))$. On notera J l'isométrie linéaire surjective de F . Riesz [Chap. XVIII]. On suppose de plus que la condition (1.2) $\forall u \in E : a(u, u) \geq 0$ est remplacée par la condition *plus restrictive* :

$$(3.1) \quad \exists \mu > 0, \forall u \in E : a(u, u) \geq \mu \|u\|^2.$$

(qui implique : $a(u, u) > 0$ pour tout $u \neq 0$, i.e. que a est définie positive)

Cette condition est appelée hypothèse de *coercivité* (on dit parfois d'*ellipticité*).

Remarque : Sous cette hypothèse, on a : $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \Phi(u) = +\infty$. En effet :

$\Phi(u) = a(u, u) - 2\varphi(u) \geq \mu\|u\|^2 - 2\|\varphi\|' \cdot \|u\| = \|u\|(\mu\|u\| - 2\|\varphi\|')$, et on a : $\mu\|u\| - 2\|\varphi\|' > 0$ pour $\|u\|$ assez grand ($\|u\| > 2\frac{\|\varphi\|'}{\mu}$), d'où : $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \Phi(u) = +\infty$.

Proposition 3.1.

Il existe $\nu > 0$ tel que : $\forall u, v : |a(u, v)| \leq \nu\|u\| \cdot \|v\|$. On a : $\mu \leq \nu$ et $\mu = \nu$ équivaut à $A = \mu J$.

Démonstration : a étant continue, il existe $\nu > 0$ vérifiant :

$$\forall u, v \in E : |a(u, v)| \leq \nu\|u\| \cdot \|v\|.$$

D'ailleurs, $\|a\|$ est la borne inférieure des ν tels qu'on ait l'inégalité ci-dessus. On a donc : $\mu\|u\|^2 \leq a(u, u) \leq \nu\|u\|^2$; en prenant $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$, on obtient : $\mu \leq \nu$. ♦

Si $A = \mu J$ où $\mu > 0$: $a(u, u) = \langle u, Au \rangle = \langle u, \mu Ju \rangle = \mu\|u\|^2$, et donc : $\forall u, v \in E : |a(u, v)| = |\langle v, \mu Ju \rangle| = \mu|\langle u, v \rangle| \leq \mu\|u\| \cdot \|v\|$.

Supposons maintenant que :

$\mu\|u\|^2 \leq a(u, u)$ pour tout $u \in E$ et que $|a(u, v)| \leq \mu\|u\| \cdot \|v\|$ pour tous $u, v \in E$.

On a : $\mu\|u\|^2 \leq \langle u, Au \rangle \leq \|Au\|' \cdot \|u\| \leq \|a\| \cdot \|u\|^2 \leq \mu\|u\|^2$ car $\|a\| \leq \nu = \mu$.

Donc : $\langle u, Au \rangle = \|Au\|' \cdot \|u\| = (u|J^{-1}Au) = \|J^{-1}Au\| \cdot \|u\|$.

D'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $J^{-1}Au = \alpha(u) \cdot u$, soit : $Au = \alpha(u) \cdot Ju$. Mais $\langle u, Au \rangle = (u|J^{-1}Au) = (u|\alpha(u)u) = \alpha(u)\|u\|^2$ et : $\langle u, Au \rangle = \mu\|u\|^2$.

Avec $\|u\| = 1$, on a donc : $\alpha(u) = \mu$ et enfin : $Au = \mu Ju$. ♦

On supposera dans ce qui suit que $\mu < \nu$.

Proposition 3.2.

Avec les hypothèses faites ci-dessus, le problème de minimisation (1.6) **admet une solution et une seule**. i.e. :
il existe $\hat{u} \in C$ unique tel que $\inf_{u \in C} \Phi(u) = \Phi(\hat{u}) = \min_{u \in C} \Phi(u)$.

Démonstration : La fonction $(u, v) \mapsto a(u, v)$ définit un produit scalaire sur E : bilinéarité et symétrie font partie des hypothèses et $0 = a(u, u) \geq \mu\|u\|^2 \implies u = 0$ (a définie positive). La norme associée à $a(\cdot, \cdot)$ définie par $\| \|u\| \|^2 = a(u, u)$ vérifie : $\mu\|u\|^2 \leq a(u, u) \leq \nu\|u\|^2$, soit : $\sqrt{\mu}\|u\| \leq \| \|u\| \leq \sqrt{\nu}\|u\|$. Les normes $\|\cdot\|$ et $\| \| \cdot \| \|$ sont donc équivalentes.

Donc $(E, \|\cdot\|)$ et $(E, \| \| \cdot \| \|)$ ont le même dual topologique et sont tous deux des espaces de Hilbert.

Il existe donc $c \in E$ unique tel que $\forall u \in E : \varphi(u) = a(u, c)$ [$c = J_a^{-1}(\varphi)$, où J_a est l'isométrie linéaire surjective de F . Riesz relative au produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$].

Alors : $\Phi(u) = \| \|u\| \|^2 - 2a(u, c) = \| \|u - c\| \|^2 - \| \|c\| \|^2$.

Désignons par \mathcal{P}_C la projection sur C relative au produit scalaire $a(\cdot, \cdot)$: $\inf_{u \in C} \Phi(u) = (\inf_{u \in C} \| \|u - c\| \|^2) - \| \|c\| \|^2 = \| \| \mathcal{P}_C(c) - c \| \|^2 - \| \|c\| \|^2$ et la solution (unique) cherchée est $\hat{u} = \mathcal{P}_C(c)$. ♦

On a avec la Prop. 3.2 un théorème d'existence et d'unicité, mais pas de moyen pratique pour calculer la solution. Nous allons y remédier... de manière théorique au moins.

Pour tout $\rho > 0$ et pour tout $u \in E$, on pose :

$$T_\rho(u) = \mathcal{P}_C[u + \rho J^{-1}(\varphi - Au)],$$

où \mathcal{P}_C est la projection relative au produit scalaire $(\cdot|\cdot)$.

Proposition 3.3

Si $\hat{u} \in C$ vérifie (1.7), i.e. $\forall v \in C : \langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0$, on a pour tout $\rho > 0 : \hat{u} = T_\rho(\hat{u})$. C'est-à-dire que \hat{u} est un **point fixe** de T_ρ .
 Réciproquement, si pour un certain $\rho > 0$, \hat{u} vérifie $\hat{u} = T_\rho(\hat{u}) : \hat{u}$ est solution de (1.7).

Remarque Rappelons que d'après la Prop.1.3 on a (1.6) = problème de minimisation \iff (1.7) = problème d'inéquation.

Démonstration :

• $\hat{u} \in C$ vérifie (1.7) $\implies \forall \rho > 0 : \hat{u} = T_\rho(\hat{u})$.
 $\forall v \in C, \forall \rho > 0 : \rho \langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0 \implies \langle v - \hat{u}, \rho(\varphi - A\hat{u}) \rangle \leq 0$
 $\implies (v - \hat{u} | \rho J^{-1}(\varphi - A\hat{u})) \leq 0 \implies (v - \hat{u} | \hat{u} + \rho J^{-1}(\varphi - A\hat{u}) - \hat{u}) \leq 0$.
 On a donc [Chap.XVII,Th. 3.1 (3.4.1)] : $\hat{u} = P_C[\hat{u} + \rho J^{-1}(\varphi - A)] = T_\rho(\hat{u})$. ♦
 • $\hat{u} \in E$ et $\exists \rho > 0 : \hat{u} = T_\rho(\hat{u}) \implies \hat{u}$ vérifie (1.7).
 $\hat{u} = P_C[\hat{u} + \rho J^{-1}(\varphi - A\hat{u})] \implies \hat{u} \in C$ (même caractérisation que ci-dessus)
 et $\forall v \in C : (v - \hat{u} | \hat{u} + \rho J^{-1}(\varphi - A\hat{u}) - \hat{u}) \leq 0 \implies \hat{u} \in C$ et $\forall v \in C : \rho \langle v - \hat{u}, \varphi - A\hat{u} \rangle \leq 0 \implies \hat{u} \in C$ et $\forall v \in C : \langle v - u, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0$, i.e. (1.7). ♦

Proposition 3.4.

Il existe $\kappa = \kappa(\rho) > 0$ tel que : $\forall u, v \in E : \|T_\rho(u) - T_\rho(v)\| \leq \kappa(\rho) \cdot \|u - v\|$.
 Pour tout ρ appartenant à un certain intervalle, on a : $0 < \kappa(\rho) < 1$.

Démonstration : Comme P_C est contractante : $\forall u, v \in E, \forall \rho > 0 :$

$$\begin{aligned} \|T_\rho(u) - T_\rho(v)\|^2 &= \|P_C[u + \rho J^{-1}(\varphi - Au)] - P_C[v + \rho J^{-1}(\varphi - Av)]\|^2 \\ &\leq \|u + \rho J^{-1}(\varphi - Au) - v - \rho J^{-1}(\varphi - Av)\|^2 = \|(u - v) - \rho J^{-1}(Au - Av)\|^2 \\ &\leq \|u - v\|^2 - 2\rho \langle u - v | J^{-1}(Au - Av) \rangle + \rho^2 \|J^{-1}(Au - Av)\|^2 \\ &\leq \|u - v\|^2 - 2\rho \langle u - v, A(u - v) \rangle + \rho^2 \|A(u - v)\|^2. \end{aligned}$$

Mais : $\|A(u - v)\| \leq \nu \cdot \|u - v\|$ et $\langle u - v, A(u - v) \rangle \geq \mu \cdot \|u - v\|^2$. D'où :
 $\|T_\rho u - T_\rho v\|^2 \leq (1 - 2\rho\mu + \rho^2\nu^2) \cdot \|u - v\|^2$. ♦

Etudions $f(\rho) = 1 - 2\rho\mu + \rho^2\nu^2$ [faites un dessin !].

$f(0) = 1$ et $1 - 2\rho\mu + \rho^2\nu^2 = 1 \implies \rho = 0$ ou $-2\mu + \rho\nu^2 = 0$, i.e. $\rho = \frac{2\mu}{\nu^2}$.

$f'(\rho) = -2\mu + 2\rho\nu^2$ est nulle en $\rho_0 = \frac{\mu}{\nu^2}$ qui correspond à un *minimum* pour f , car

$f(\rho) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} +\infty$. Ce *minimum* vaut : $f(\rho_0) = 1 - 2\mu \frac{\mu}{\nu^2} + \nu^2 \frac{\mu^2}{\nu^4} = 1 - \frac{\mu^2}{\nu^2} > 0$.

On peut poser : $\kappa^2(\rho) = 1 - 2\rho\mu + \rho^2\nu^2$ avec $\kappa(\rho) > 0 :$

$$0 < \kappa^2(\rho) < 1 \iff \rho\nu^2 < 2\mu \iff 0 < \rho < \frac{2\mu}{\nu^2}.$$

En définitive, pour tout $\rho \in]0, \frac{2\mu}{\nu^2}[$, on a : $0 < \kappa(\rho) < 1$. La valeur minimum de

$\kappa(\rho)$ est obtenue au milieu de l'intervalle – en $\frac{\mu}{\nu^2}$ – elle vaut : $\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{\nu^2}}$. ♦

Proposition 3.5.

L'inéquation (1.7) admet une solution unique \hat{u} , et il existe un algorithme pour la calculer.

Démonstration : Pour tout ρ fixé dans l'intervalle $]0, \frac{2\mu}{\nu^2}[$, l'application $u \mapsto T_\rho(u) = P_C[u + \rho J^{-1}(\varphi - Au)]$ est une contraction stricte de E dans E , d'après la Prop. précédente. D'après le Th. fondamental 2.1 du Chap. XVI, il existe un point fixe et un seul \hat{u} pour T_ρ , et d'après la Prop. 3.3 cet \hat{u} est solution de (1.7).

On dispose d'un algorithme pour calculer \hat{u} : on prend $u_0 \in E$ arbitraire, et on considère la suite définie pour tout $n \geq 1$ par : $u_{n+1} = T_\rho(u_n)$. On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = u$.

On a de plus des majorations de l'erreur [cf. Th. 2.1 du Chap. XVI].

A priori : \hat{u} dépend de ρ , mais ce n'est pas le cas parce que \hat{u} est solution de (1.7), ce qui équivaut à \hat{u} est solution de (1.6), et on sait que (1.6) n'a qu'une solution. Donc \hat{u} ne dépend pas de ρ , mais la vitesse de convergence de l'algorithme dépendra de ρ .

Démontrons directement (la méthode est générale) que (1.7) n'a qu'une solution.

Soient $\hat{u} \in C$ et $\tilde{u} \in C$ deux solutions de (1.7); on a donc : $\forall c \in C$: $\langle v - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0$ et $\langle v - \tilde{u}, A\tilde{u} - \varphi \rangle \geq 0$. Faisons $v = \tilde{u}$ dans la première inégalité et $v = \hat{u}$ dans la seconde. Il vient :

$$\langle \tilde{u} - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi \rangle \geq 0 \text{ et } \langle \hat{u} - \tilde{u}, A\tilde{u} - \varphi \rangle \geq 0 \implies \langle \tilde{u} - \hat{u}, \varphi - A\tilde{u} \rangle \geq 0. \text{ Ajoutons :}$$

$$\langle \tilde{u} - \hat{u}, A\hat{u} - \varphi + \varphi - A\tilde{u} \rangle \geq 0 \implies \langle u - \hat{u}, A(\tilde{u} - \hat{u}) \rangle \leq 0.$$

$$\text{Alors : } \mu \|\tilde{u} - \hat{u}\|^2 \leq \langle \tilde{u} - \hat{u}, A(\tilde{u} - \hat{u}) \rangle \leq 0, \text{ d'où : } \tilde{u} = \hat{u}. \blacklozenge$$

Remarques : On s'est servi ici de la linéarité de A , mais on aurait le même résultat avec A non linéaire vérifiant une condition de monotonie forte :

$$\forall u, v \in E : \langle u - v, Au - Av \rangle \geq \mu \|u - v\|^2.$$

D'ailleurs, on peut reprendre les trois dernières propositions avec A non linéaire vérifiant la condition de forte monotonie et la condition suivante :

$$\exists \nu > 0, \forall u, v \in E : \|Au - Av\| \leq \nu \|u - v\| \text{ (} A \text{ lipschitzienne de constante } \nu \text{)}.$$

Bien entendu l'algorithme ci-dessus n'a de valeur calculatoire/numérique que si P_C peut être explicité et si $J^{-1}(\varphi - Au_n)$ n'est pas trop compliqué.

Corollaire 3.1. (lemme de Lax-Milgram)

Soit E un espace de Hilbert réel, et soit $A \in \mathcal{L}(E, E')$. On suppose qu'il existe $\mu > 0$ tel que $\forall u \in E : [Au](u) \geq \mu \|u\|^2$.

Conclusion : A est un homéomorphisme linéaire de E sur E' , et on a : $\|A^{-1}\|_{\mathcal{L}(E', E)} \leq \frac{1}{\mu}$. De plus la solution de l'équation $A\hat{u} = \varphi$ peut être trouvée grâce à un algorithme.

Démonstration : On remarque que les Prop. 3.3, 3.4, 3.5 n'utilisent pas la symétrie de A (l'hypothèse (1.3)). D'après la Prop. 3.5 et la Prop. 1.6, on a : pour tout $\varphi \in E'$ il existe $\hat{u} \in E$ unique tel que $A\hat{u} = \varphi$ (il suffit de faire $C = E$).

Donc A est une bijection de E sur E' .

$$\text{Partant de } \mu \|u\|^2 \leq \langle u, Au \rangle, \text{ faisons pour } \psi \in E', \psi \neq 0 : u = A^{-1}(\psi).$$

$$\mu \|A^{-1}(\psi)\|^2 \leq \langle A^{-1}\psi, A \circ A^{-1}(\psi) \rangle = \langle A^{-1}\psi, \psi \rangle \leq \|A^{-1}\psi\| \cdot \|\psi\|'$$

$$\implies \mu \|A^{-1}\psi\| \leq \|\psi\|' \implies \|A^{-1}y\| \leq \frac{1}{\mu} \|\psi\|'.$$

C'est dire que A^{-1} (linéaire puisque A l'est) est continu de norme $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\mu}$. On applique ensuite l'algorithme de la Prop. 3.5 avec $P_E = Id_E$, ce qui donne l'algorithme simple suivant : $u_{n+1} = u_n + \rho J^{-1}(\varphi - Au_n)$. \blacklozenge

On retrouve ainsi, avec une démonstration nouvelle, le Th. 2.2 du Chap. XVIII, avec l'algorithme en prime.

Fin du Chapitre XXI

MATHÉMATIENS CITÉS DANS LE COURS

ABEL Niels Henrick (1802 – 1829) Norvège. Impossibilité de la résolution par radicaux des équations de degré ≥ 5 . Théorie des groupes. Intégrales abéliennes. Fonctions elliptiques.

A propos de Cauchy : *le seul qui sache traiter les mathématiques*. Mais aussi : *Cauchy est un bigot, ce qui est une chose étrange pour un homme de science*.

ARCHIMÈDE (287 ? – 212, av. J.C.) Syracuse. Mathématicien, mécanicien, physicien.

$\pi \in]3 + \frac{10}{71}, 3 + \frac{1}{7}[$. Etude des coniques, de l'hélice, du cylindre et de la sphère. Notion de très grand nombre (10^{63}). Précurseur du calcul intégral (méthode d'exhaustion).

ALEXANDROV Pavel Sergueivitch (1896 – 1982) Russie. Topologie générale et topologie algébrique.

APÉRY Roger (1919 –) France (Univ. de Caen). Théorie analytique des nombres.

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \notin \mathbb{Q} \text{ (vers 1980).}$$

ARZELÀ Cesare (1847 – 1912) Italie. Elève de Dini. Equations différentielles.

ASCOLI Giulio (1843 – 1896) Italie. Analyse. Topologie. Calcul des variations. Ensembles de fonctions continues.

BAIRE René (1874 – 1932) France. Théorie des fonctions de variables réelles (il est le fondateur de la théorie moderne). Notion de semi-continuité. Mesurabilité (ensembles de mesure nulle). Topologie générale (ensembles maigres).

BANACH Stefan (1892 – 1945) Pologne. Analyse fonctionnelle (un des fondateurs, avec F. Riesz) et théorie des fonctions. Son livre *Théorie des opérations linéaires* (1931) est génial, et reste intéressant à lire (demande les connaissances d'analyse fonctionnelle de maîtrise).

BERNSTEIN Serguéi Natanovic (1880 – 1968) Russie. Approximation des fonctions. Ne pas confondre avec Félix Bernstein (1878-1956) Allemagne, U.S.A, du Th. de Cantor-Bernstein (théorie des ensembles).

BESICOVITCH Abram Samoilovitch (1891 –) Anglais d'origine russe. Fonctions presque périodiques.

BESSEL Friedrich Wilhelm (1784 – 1846) Allemagne. Astronome. Equations différentielles (fonctions de Bessel). Polynômes trigonométriques.

BOLZANO Bernhard (1781 – 1848) Tchèque de langue allemande. Philosophie religieuse. Précurseur d'une définition correcte des réels.

BOREL Emile (1871 – 1956) France. Théorie des fonctions. Séries divergentes. Théorie de la mesure des ensembles (notion d'ensemble négligeable). Probabilités. Théorie des jeux et stratégie (cf. aussi von Neumann). Fondateur du Centre National de la Recherche Scientifique (C.N.R.S.).

BOURBAKI Nicolas (1935 –) France. Pseudonyme collectif d'un groupe de jeunes mathématiciens issus de l'E.N.S. (H. Cartan, C. Chevalley, J. Delsarte, J. Dieudonné, A. Weil, puis cooptations). Publication des *Eléments de mathématiques* depuis 1939 (plus de 5000 pages) chez Hermann éd. Ces Eléments étaient destinés à l'origine à remplacer les grands traités d'analyse du début du siècle (Valiron, . . .) jugés désuets. Les sujets traités dans les Eléments jusqu'à présent sont : théorie des ensembles, algèbre, topologie générale, analyse fonctionnelle, intégration, géométrie, groupes de Lie.

Profitant du canular lié au nom même de Bourbaki, de publications bourbakistes issues de la ville imaginaire de Nancago (Nancy + Chicago), etc. des journalistes « vulgarisateurs » ont propagé l'idée que le groupe Bourbaki était une sorte de société secrète. Il n'en est rien, évidemment, et le fameux séminaire Bourbaki est ouvert à tous les mathématiciens. Certains domaines ont été très influencés par les travaux des bourbakistes : par exemple les espaces vectoriels topologiques.

Le traité de Bourbaki a des admirateurs inconditionnels, mais aussi des détracteurs : la théorie des ensembles (premier tome du traité) n'a guère de succès auprès des spécialistes. La théorie de l'intégration choisie par Bourbaki a fait l'objet d'ardentes polémiques : les probabilistes en sont d'implacables ennemis. Les *Eléments d'analyse* de J. Dieudonné (8 tomes, Gauthier-Villars éd.) reflètent bien le « style Bourbaki », ce qui n'est pas étonnant puisque l'auteur fut le rédacteur de plusieurs tomes du traité de Bourbaki.

BROUWER Luitzen Egbertus Jan (1881 – 1891) Hollande. Géométrie différentielle, fonctions holomorphes, équations aux dérivées partielles (E.D.P.). Logique (courant intuitionniste).

BUNIAKOWSKI V.I. (1804 – 1889) Russie. Théorie des nombres et probabilités appliquées.

CACCIOPOLI Renato (1904 – 1959) Italie. Equations différentielles ordinaires, stabilité. Théorie des groupes. Petit fils du théoricien de l'anarchisme Mikhail Bakounine.

CANTOR Georg (1845 – 1918) Allemagne, d'origine russe. Ses travaux sur les séries trigonométriques le conduisent à fonder la théorie des ensembles (laquelle n'est pas d'origine abstraite, comme beaucoup de gens le croient !). Ordinaux. Cardinaux.

CARTAN Henri Paul (1904 –) France. Fonctions analytiques de plusieurs variables. Topologie algébrique, théorie du potentiel, géométrie algébrique. Notion de filtre.

CAUCHY Augustin-Louis (1789 – 1857) Son œuvre est considérable : théorie des polyèdres, théorie des nombres, groupes finis . . . Mais son grand mérite est d'avoir fondé l'analyse des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, des suites, des séries . . . sur des bases solides : il est le premier à poser des définitions claires et à donner des démonstrations rigoureuses capables de satisfaire les mathématiciens actuels. En gros, on peut dire qu'il est l'inventeur des définitions du type : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x : |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$ (aux notations près !).

Il a défini une notion d'intégrale (des fonctions continues) qui porte son nom. La fréquence avec laquelle son nom revient dans le cours témoigne de l'étendue de ses activités.

CESÀRO Ernesto (1859 – 1906) Italie. Séries divergentes et séries trigonométriques. Une suite (u_n) converge au sens de Cesàro si $v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \dots + u_n)$ converge.

CHEBYSHEV (ou Tchebychev) Pafnouty Livovitch (1821 – 1894) Russie. Théorie des nombres, probabilités, approximation des fonctions par des polynômes (au sens de $\| \cdot \|_\infty$, notamment). Mécanismes.

DEDEKIND Richard Julius Wilhelm (1831 – 1916) Allemagne. Définition de \mathbb{R} à partir de \mathbb{Q} par la méthode des « coupures ». Intégrales eulériennes. Théorie des ensembles (avec G. Cantor). Notion d'idéal.

DINI Ulisse (1845 – 1918) Italie. Analyse (séries), géométrie différentielle. Si vous allez à Pise, vous pourrez admirer sa statue.

DIRAC Paul Adrien Maurice (1902 – 1984) Angleterre. Physicien, prix Nobel 1933. Prédiction théorique de l'existence de l'antiparticule de l'électron par un raisonnement très subtil. A utilisé dans ses calculs des objets mathématiques en apparence aberrants qui ont pris place plus tard dans la théorie des distributions (Sobolev et Schwartz).

DIRICHLET Peter Gustav (ou : Lejeune-Dirichlet) (1805 – 1859) Allemagne. Théorie des nombres (par exemple : dans toute progression arithmétique dont les deux premiers termes sont premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers). Séries trigonométriques. Mécanique et physique mathématique.

EKELAND Ivar (contemporain) France. Analyse non linéaire. Optimisation. Probabilités.

A lire de cet auteur : *Le Calcul, l'Imprévu. Les figures du temps de Kepler à Thom*. Seuil éd. Points Sciences S53, 1984.

EUCLIDE (315 ? – 256 ? av. J.C.) Grèce. Auteur des fameux *Éléments* qui contiennent la première tentative d'axiomatisation de la géométrie.

EULER Leonhard (1707 – 1783) Suisse (mais a travaillé aussi en Prusse et en Russie). Son œuvre est considérable et primordiale. Auteur très prolifique : 30 volumes de mathématiques, 32 de mécanique et astronomie, 12 de physique et divers . . . et 13 enfants.

FÉJER Lipot (Leopold) (1880 – 1959) Hongrie. Séries trigonométriques (sommées de Cesàro).

FISHER Ernst (1875 – 1956) Allemagne. Séries trigonométriques, convergence au sens de Cesàro.

FOURIER Jean Baptiste Joseph (1768 – 1830) France. Théorie de la chaleur. Le premier à étudier les « mathématiques de la physique » au sens actuel. Inventeur des séries trigonométriques.

Il fit partie de l'expédition de Bonaparte en Egypte, et en revint persuadé que la chaleur guérissait tous les maux ; il vécut dès lors dans des locaux surchauffés ; cette attitude inspira-t-elle ses recherches ? Ne pas confondre le mathématicien Fourier et le philosophe Charles Fourier (inventeur du fouriérisme).

FRÉCHET René Maurice (1878 – 1973) France. Topologie générale et analyse fonctionnelle, théorie de l'intégration, calcul différentiel dans les espaces abstraits, séries de Fourier, probabilités.

La possibilité de définir des notions comme limite et continuité dans des ensembles arbitraires est une idée qui, sans aucun doute, fut exprimée en premier par Fréchet en 1904, et développée par lui-même dans sa célèbre thèse (1906). La méthode la plus simple et la plus fructueuse qu'il proposa pour définir ces notions fut l'introduction de la notion de distance. Mais le principal mérite de Fréchet repose sur l'importance qu'il assigna à trois notions qui devaient jouer un rôle fondamental dans tous les développements ultérieurs de l'analyse fonctionnelle : la compacité, la complétion, et la séparabilité.

J. Dieudonné 1981 (traduit de l'anglais par Y.S).

FREDHOLM Erik Ivar (1866 – 1927) Suède. Analyse, Physique mathématique, mécanique. Théorie des équations intégrales.

FUBINI Guido (1879 – 1943) Italie et U.S.A. Théorie de la mesure.

GALERKIN Boris Grigorievitch (1871 – 1945) Russie. Ingénieur. E.D.P.

GAUSS Karl Friedrich (1777 – 1855) Allemagne. Surnommé le *Prince des mathématiciens*. Génie précoce. Polygones, théorème fondamental de l'algèbre, intégrales elliptiques, géométrie différentielle (courbures d'une surface), géométrie non euclidienne, théorie des erreurs, méthode des moindres carrés, astronomie, etc.

GRAM Jorgen Pedersen (1850 – 1916) Danemark. Analyse.

HAAR Alfred (1885 – 1933) Hongrie. Théorie de la mesure sur les groupes localement compacts

HADAMARD Jacques Salomon (1865 – 1963) France. Inventeur de l'expression *Analyse fonctionnelle*. Nombres premiers. Equations aux dérivées partielles.

HAHN Hans (1879 – 1934) Autriche. Fonctions de variables réelles. Analyse fonctionnelle.

HAUSDORFF Felix (1868 – 1942) Allemagne. Première définition de la notion de topologie, par les voisinages. Fondements des mathématiques, topologie générale, espaces vectoriels topologiques.

HEINE Heinrich Eduard (1821 – 1881) Allemagne. Séries trigonométriques (c'est lui qui suggéra à Cantor ce sujet d'étude). Construction (de Cantor-Heine) des réels. Inventeur de la continuité uniforme. Ne pas confondre avec le poète Henri (Heinrich) Heine (1797 – 1856).

HERMITE Charles (1822 – 1901) France. Fonctions elliptiques et fonctions abéliennes. Formes quadratiques (théorie des nombres). Réformé de Polytechnique (santé), il passe le bacc. en 1847, après ses premiers travaux. Introduction de fonctions continues en théorie des nombres (formes hermitiennes) ; théorie algébrique des invariants ; fonctions modulaires. Démontre la transcendance de e en 1873. Hermite était beau-frère de Joseph Bertrand et beau-père de Emile Picard.

HILBERT David (1862 – 1943) Allemagne. Ses travaux ont fortement influencé la plupart des branches des mathématiques qui existaient au début du siècle : logique, théorie des ensembles, arithmétique, algèbre, géométrie algébrique, analyse, physique, etc. En 1900, à Paris, au 2ème Congrès International de Mathématiques, Hilbert donna une liste de 23 problèmes qui devaient

constituer un programme de travail pour le siècle à venir ; ces problèmes constituent toujours un fil directeur dans de nombreux travaux.

HÖLDER Otto Ludwig (1859 – 1937) Allemagne. Analyse, théorie des groupes.

JACOBI Karl Gustav (1804 – 1851) Allemagne (Prusse). Fonctions elliptiques et abéliennes. Equations différentielles et équations aux dérivées partielles. Calcul des variations. Mécanique céleste. Formes quadratiques et déterminants (« jacobien »). Théorie des nombres.

JENSEN Johannes Ludwig (1859 – 1925) Allemagne. Fonctions convexes.

JORDAN Camille Marie (1838 – 1922) France. Théorie des groupes. Equations algébriques. Théorie des courbes. Théorie de l'intégration (Lebesgue était son disciple).

KACMARZ S. Analyse fonctionnelle.

KRONECKER Leopold (1823 – 1891) Allemagne. Nombres algébriques. Aurait dit : *Dieu fit le nombre entier, le reste est l'œuvre de l'homme*. Adversaire de Cantor et de la théorie des ensembles.

KURATOWSKI Casimir (1896 – 1980) Pologne. Topologie générale et topologie algébrique.

LAGRANGE Joseph Louis (Comte de) (1736 – 1813) France (d'origine piémontaise). Calcul des variations, mécanique céleste, astronomie, théorie des nombres (formes quadratiques).

LAGUERRE Edmond Nicolas (1834 – 1886) France. Géométrie, algèbre (polynômes), analyse.

LAPLACE Pierre Simon (marquis de) (1749 – 1827) France. Mécanique céleste et probabilités.

LAX Peter D. Mathématicien américain contemporain. Equations aux dérivées partielles paraboliques et hyperboliques. Lemme de Lax-Milgram.

LEBESGUE Henri Léon (1875 – 1941) France. Théorie de l'intégration. Séries trigonométriques. Inventeur (dans sa thèse) de la théorie de l'intégration qui porte son nom. En ce qui concerne la théorie de Lebesgue et ses implications ultérieures, nous signalons l'ouvrage de A. Michel : *Constitution de la théorie moderne de l'intégration*. Vrin éd. Paris 1992, et celui de J.P. Pier : *Histoire de l'intégration*. Masson éd. Paris 1996.

LEGENDRE Adrien Marie (1752 – 1833) France. Analyse (fonctions elliptiques et eulériennes), théorie des nombres, calcul des variations, mécanique

LIPSCHITZ Rudolf Otto Sigismund (1832 – 1903) Allemagne. Arithmétique, géométrie différentielle, analyse (séries de Fourier), équations différentielles (existence, calcul approché des solutions).

MAZUR Stanislaw (1905 –) Pologne. Analyse fonctionnelle.

MERAY Charles (1835 – 1911) France. Théorie de Cantor-Méray des réels.

MILGRAM A.N. U.S.A. Mathématicien contemporain, E.D.P. Lemme de Lax-Milgram.

MINKOWSKI Hermann (1864 – 1909) Allemagne. Théorie des nombres et géométrie (convexité). A mis sous forme mathématique la relativité restreinte (il eut A. Einstein comme étudiant à Zurich).

MONTEL Paul (1876 – 1975) France. Fonctions analytiques (familles normales). Géométrie. Mécanique.

NEUMANN (von) Johann (John) (1903 – 1957) U.S.A. (origine hongroise). Analyse fonctionnelle (espaces de Hilbert et leurs opérateurs : \mathbb{C}^* -algèbres, applications à la mécanique quantique), théorie des ensembles (logique), théorie des jeux, économie mathématique, théorie ergodique. Construction du premier ordinateur (et de la bombe atomique).
Ne pas confondre avec Neumann Carl Gottfried (1832 - 1925).

NIKODYM Otton Martin (1887 – 1974) U.S.A. d'origine polonaise. Analyse fonctionnelle. Théorie de la mesure.

(de) **PARSEVAL** des Chesnes Marc Antoine (1755 – 1836) France. Géomètre, membre de l'Institut. Arrêté pendant la révolution, il dut son salut à Legendre. Auteur d'un pamphlet contre

Napoléon, il dut son salut à l'exil. Sa laideur l'avait fait surnommer le « cochon savant » par ses collègues de l'Académie . . . Parseval brille par son absence dans les dictionnaires (trop d'ennemis sans doute !), et je dois mes renseignements à son sujet à l'un de ses descendants, que je remercie.

PEANO Giuseppe (1858 – 1932) Italie. Célèbre par sa courbe continue qui remplit un carré, et par son axiomatique des entiers. Auteur d'un *Formulaire mathématique* qui laissa perplexes ses contemporains.

PICARD Emile (1856 – 1941) France. Géométrie. Fonctions analytiques. Equations différentielles (méthode des approximations successives) et théorie des groupes.

PLANCHEREL Michaël (1885 – 1967) Suisse. Théorie de l'Intégration. Transformation de Fourier.

POINCARÉ Henri (1854 – 1912) France. Un des plus grands mathématiciens ; œuvre considérable (400 travaux importants, 1000 notes brèves). Equations différentielles (fonctions fuchsienues) et E.D.P. Physique (problème des n corps). Topologie algébrique (conjecture célèbre). Poincaré a failli découvrir la Relativité (restreinte) peu avant Einstein, et il a découvert ce qu'on appelle maintenant la théorie du chaos (nombreux travaux actuels). Remarque : la Relativité est parfois attribuée à Poincaré, parfois à H.A. Lorentz, et même parfois à la première femme de Einstein . . . Le génie de A. Einstein a toujours excité la hargne des médiocres. Ne pas confondre H. Poincaré avec son cousin Raymond Poincaré, président de la république pendant la guerre de 14–18.

PTOLÉMÉE Claudius (90 ? – 168 ?) Grèce. Astronomie, mathématiques, géographie. Précurseur de la trigonométrie. Sa cosmologie géocentrique aura « force de loi » jusqu'à Copernic.

PYTHAGORE (580 ? – 500 ? Av J.C.) Grèce. Mathématiques et physique. Table de nombres premiers. « Pont aux ânes » : *dans un triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal, si je ne m'abuse, à la somme des carrés des deux autres côtés*. Existence des nombres irrationnels ($\sqrt{2}$). Polyèdres.

RADON Johann Karl (1887 – 1956) Autriche. Théorie de l'intégration.

RIEMANN Georg Friedrich Bernhard (1826 – 1866) Allemagne. Séries de Fourier. E.D.P. Analyse complexe (fonction ζ). Répartition des nombres premiers. Fonctions abéliennes et surfaces de Riemann. Son œuvre est considérable, surtout si l'on tient compte de sa mort (tuberculose) à 40 ans . . .

RIESZ Frigyes (Frédéric) (1880 – 1956) Hongrie. Analyse fonctionnelle. Ne pas confondre avec M. Riesz (analyse fonctionnelle, lui aussi), son frère ; ni avec Ritz, Walter (1878 - 1909) physicien théoricien allemand d'origine suisse.

SCHAUDER Juliusz Pavel (1896 – 1943). Pologne. Analyse fonctionnelle. E.D.P. Assassiné par les nazis.

SCHMIDT Erhard (1876 – 1959) Allemagne. Analyse fonctionnelle. Intégration.

SCHWARZ Hermann Amandus (1843 – 1921) Allemagne. Analyse et géométrie différentielle.

SCHWARTZ Laurent (1915 –) France. Théorie des Distributions. Médaille Fields (1950) [c'est l'équivalent du prix Nobel]. Analyse fonctionnelle. Théorie de la mesure et probabilités dans les espaces de Banach.

SOBOLEV Sergueï Lvovic (1908 – 1989) Russie. Physique mathématique. Précurseur de la théorie des distributions.

STEINHAUS Hugo Dyonis (1887 – 1967) Pologne. Analyse fonctionnelle.

STIELTJES Thomas-Jan (1856 – 1894) Hollande. Théorie de l'intégration.

STONE Marshall Harvey (1903 –) U.S.A. Topologie et analyse fonctionnelle. Intégration. Algèbres de Boole.

TAUBER Alfred (1866 – 1942) Autriche. Auteur de résultats (théorèmes taubériens) liant les convergences au sens de Abel, Cesàro, à la convergence usuelle.

TIETZE Heinrich Frantz Friedrich (1880 – 1964) Autriche et Allemagne. Topologie.

TOEPLITZ Otto (1881 – 1940) Allemagne. Espaces vectoriels topologiques. Matrices infinies.

TYCHONOV André Nikolaevitch (1906 –) Russie. Topologie. Points fixes.

ULAM Stanislaw Marcin (1909 – 1984) U.S.A. d'origine polonaise. Analyse fonctionnelle, théorie de la mesure.

URYSOHN Paul Samuelovitch (1898 – 1924) Russie (mort noyé en France pendant des vacances). Topologie.

VOLTERRA Vito (1860 – 1940) Italie. Analyse fonctionnelle. Equations intégrales et intégral-différentielles. Physique mathématique, mécanique. Mathématique des assurances.

WEIERSTRASS Karl Theodor Wilhelm (1815 – 1897) Allemagne. Séries. Fonctions analytiques. Fonctions elliptiques. Premier exemple (1871) de fonction continue $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en aucun point (exemple de « fractale » au sens de B. Mandelbrot).

Vous trouverez bien d'autres renseignements biographiques dans l'ouvrage : *Des Mathématiciens de A à Z* de B. Hauchecorne et D. Suratteau. Éditions Ellipses, Paris 1996.

J'ai fourni ma carrière, j'ai acquis quelque célébrité dans les mathématiques ; je n'ai haï personne, je n'ai point fait de mal et il faut bien finir, mais ma femme n'a pas voulu.

J. L. Lagrange (paroles rapportées par G. Monge)

L'élaboration et le développement ultérieurs de l'arithmétique systématique, comme à peu près tout ce que les mathématiques de notre siècle (le XIX^{ème}) ont produit dans la voie des idées scientifiques originales, se rattache à Gauss.

L. Kronecker

L'autre matin, Dirichlet est resté avec moi deux heures . . . Il a lu toute ma thèse avec moi et a été fort aimable ; je ne m'y attendais pas, étant donné la grande différence de rang entre nous. J'espère qu'il se souviendra de moi plus tard.

B. Riemann (lettre 1852)

Ayez un entretien avec M. Hermite ; il n'évoquera jamais une image concrète ; cependant, vous percevrez bientôt que les entités les plus abstraites sont pour lui comme des créatures vivantes.

H. Poincaré

INDEX

Les nombres renvoient aux pages

A

Additivité 43, 46
Adhérence 20, 71, 111
Adhérent (point -) 20, 111
Adjoint (d'un opérateur) 409
Algèbre (structure d'-) 231
a posteriori : latin ; après certaines données.
Application affine par morceaux 94, 313
Application bornée 23
Application continue 155, 310
Application continue en un point 151
Application contractante 17, 363
Application contractive 363
Application de dualité 405
Application dérivable 192
Application en escalier 94, 313
Application fermée 156
Application höldérienne 172, 313
Application linéaire bornée 201
Application linéaire continue 200
Application linéaire de rang fini 206
Application λ -lipschitzienne 17, 363
Application localement constante 472
Application multilinéaire continue 212
Application multivoque 382
Application ouverte 156
Application partielle 188
Application projection 385, 390
Application propre 337
Application strictement contractante 17, 363
Application uniformément continue 171
Approximation uniforme 93
a priori : latin ; avant toute chose.
Arc (origine et extrémité d'un -) 463
Axiomatique des suites convergentes 81
Axiome d'Archimède 292, 359

B

Base de Schauder 264
Base hilbertienne
(ou : base orthonormale) 48, 429
Bidual 231, 408
Boule ouverte 18
Boule fermée 18
Boule ouverte généralisée 21, 144
Boule fermée généralisée 21, 144
« Box metric » 16

C

Caractérisation de von Neumann-Jordan 51
Cauchy-Schwarz (inégalité de -) 44
c-espace
(e.m. à boules fermées compactes) 337
cf. latin *confer* : comparez, rapprochez.

Classification des notions rencontrées
en topologie 175
Coefficient de Fourier 428
Coercivité 372, 412, 489
Col \equiv point-selle.
Combinaison convexe 50
Compactifié d'Alexandrov 306
Complet (espace -), complète (partie -) 238
Complété d'un espace métrique 347
Complété d'un e.v.n 352
Complété d'un espace préhilbertien 355, 407
Composante connexe 468
Cône 62, 464
Conjugué de $p \in]1, +\infty[$ 16
Connexité par arcs 463
Connexité 465
Continuité des applications linéaires 200
Contraction \equiv application contractante.
Contraction stricte \equiv application strictement contractante.
Contravecteur 232
Convexe (ensemble) 48
Convexe (fonction) 49
Convexité stricte (d'un e.v.n) 39, 311
Convexité uniforme (d'un e.v.n) 39, 311
C.Q.F.D. Ce qu'il fallait démontrer (en fin de démonstration).
Covecteur \equiv forme linéaire.
Critère de Cauchy 235
--- pour les séries 261
Critère de convergence d'Abel 264
Critère de Weierstrass 276
Cube de Hilbert 287, 310

D

Découpage d'un intervalle 94
Définie (forme bilinéaire -) 43
Demi-espace 49
Dénombrable 91
Densité de A par rapport à B 91
Densité des rationnels 91, 359
Déterminant de Gram 433, 441
De type dénombrable \equiv séparable (le premier serait préférable, mais la routine)
Développement en série de Fourier 429
Diamètre (d'une partie) 21, 171
Distance 11
Distance associée à une norme 37, 38
Distance bornée 21
Distances de Hölder
(ou : höldérienne) d'ordre p 16
Distance de u à v 11
Distance $d(u, A)$ de u (point)
à A (sous-ensemble) 19

- Distance de $A \subset E$ à $B \subset E$ 21
- Distance discrète 13
- Distances équivalentes 14, 15, 176
- Distance euclidienne 12
- Distance induite 14
- Distances sur un produit 15, 185
- bomologiquement équivalentes 176
- topologiquement équivalentes 176
- uniformément équivalentes 176
- Distance transportée 13
- Distance uniforme 23
- Distance usuelle 12
- Droite achevée \equiv droite étendue.
- Droite étendue 306
- Dual topologique 199, 405
- ### E
- E.D.P. \equiv équation(s) aux dérivées partielles.
- Egalité de Parseval 429
- e.m. Abréviation pour espace métrique.
- Ensemble dérivé 115
- Énumération des rationnels 66, 73
- Enveloppe convexe 51
- Enveloppe convexe fermée 505
- Epigraphe 49
- Equation d'un hyperplan 232
- Equation intégrale 368
- Equation intégrale linéaire de Fredholm
de seconde espèce non homogène ... 369
- Equation intégrale linéaire de Volterra
de seconde espèce non homogène ... 370
- Espace à produit scalaire : synonyme (anglo-saxon) d'espace préhilbertien.
- Espace de Banach 238
- Espace de Banach classiques 243
- Espace de Banach complété d'un e.v.n. ... 352
- Espace de Banach réflexif 408
- Espace de Hilbert 238
- Espace de Hilbert complété d'un
espace préhilbertien 355, 407
- Espace euclidien 45
- Espace métrique 13
- Espace métrique borné : e.m. dont la distance est bornée.
- Espace métrique complet 238
- Espace métrique compact 287, 305
- Espace métrique localement compact ... 314
- Espace métrique précompact 283
- Espace métrique produit 15, 153, 185
- Espace métrique totalement borné
 \equiv e.m. précompact.
- Espace préhilbertien 43, 46
- Espace topologique 119, 135
- Espace topologique séparé 135
- Espace vectoriel normé (e.v.n.) 38
- — — classique 41
- Espaces vectoriels normés de
dimension finie 258
- Estimation *a priori* et *a posteriori* ... 364, 365
- Etoilée (partie -) 464
- e.v.n. Abréviation pour espace vectoriel normé
(ne pas oublier les points !).
- Excès de Hausdorff 22
- Exponentielle d'un opérateur 262
- Extérieur 129
- ### F
- Famille orthogonale 48, 427
- Famille orthonormale 427
- Famille maximale 431
- Famille totale 92, 429
- Fermeture \equiv adhérence.
- Fermé (ou : partie fermée) d'un e.m. . 20, 117
- Fermé d'un produit 186
- Fonction affine par morceaux 94, 313
- Fonction à variation bornée ... 95, 286, 309
- Fonction bornée inférieurement 78
- Fonction en escalier 94
- Fonction indicatrice 50
- Fonction inf-bornée 78
- Fonction nulle à l'infini 357
- Fonction polynomiale 95
- Fonction réglée 95
- Fonction semi-continue inférieurement ... 78
- Forme quadratique 483
- Formule d'Ascoli (distance d'un
point à un hyperplan fermé) 204
- Frontière 116
- ### G
- Géométrie des e.v.n 39, 311
- $GL(E) = \text{Isom}(E, E)$ 199
- $\mathcal{GL}(E) = \mathcal{I}\text{som}(E, E)$ 199
- Groupe des isométries 174
- Groupe fondamental, ou groupe de
Poincaré, d'un espace topologique : .. 476
- ### H
- Hémi-continuité 485
- Homéomorphes (espaces -) 174
- Homéomorphisme 174, 469
- Homogénéité 37, 43, 46
- Hyperplan 204, 232
- ### I
- Identité de la médiane 45, 386
- Identité de polarisation 45
- Identité du parallélogramme 45, 51
- i.e.* latin : c'est-à-dire.
- Image d'une suite 67
- Image (\equiv trajectoire) d'un arc 463
- Indicatrice (fonction) 50
- Inégalité de Bessel 428

Inégalité de Buniakowski =	
Inégalité de Cauchy-Schwarz	
Inégalité de Cauchy-Schwarz	44
Inégalité de convexité	37
Inégalité de Jensen	60
Inégalité de Ptolémée	47
Inégalité du quadrilatère	349
Inégalité triangulaire	11, 37
Inégalité triangulaire généralisée	12, 38
Inégalité triangulaire (seconde -)	12
Inéquation (variationnelle)	484
Inéquation (variationnelle)-linéarisée	485
Inf de deux fonctions	157
<i>In fine</i> : latin : « à la fin ».	
Injection canonique	153
Injection canonique dans le bidual	231, 408
Intérieur	129
Intérieur par rapport à un	
sous-espace métrique	131
Inverse à droite (à gauche) orthogonal	413
Isom(E, F)	199, 231
\mathcal{I} som(E, F)	199
Isométrie	17
Isométrie canonique $E \mapsto L(\mathbb{K}, E)$	205
Isométrie canonique	
$E' \times F' \rightarrow (E \times F)'$	205
Isométrie canonique	
$\mathcal{B}(E, F; G) \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{L}(F, G))$	408
Isométrie canonique $E \rightarrow E''$	408
Isométrie de F. Riesz	405
Isométrie linéaire	199
Isométriques (e.m. ou e.v.n. -)	17, 199
Isomorphisme d'e.v.n.	199
Itération	364

J

Jauge de Minkowski [ou jauge]	
d'un ensemble	61

L

Lacet	463
Lagrangien	487
Lemme de Lax-Milgram	412
Lemme de F. Riesz (lemme des éléments	
quasi-orthogonaux)	289
Ligne brisée	471
Limite d'une application	190
Limite d'une suite	70
Limite inférieure d'une suite de réels	76
Limite supérieure d'une suite de réels	75

M

Méthode des approximations successives	367
Méthode des moindres carrés	418
Métrique : synonyme de distance.	
Minimax \equiv min-max	487
Minimum absolu (ou global)	51

Minimum relatif (ou local)	51
Module de continuité	172
Moments	207
Monotone (opérateur -)	485
Multi-application \equiv application multivoque	
Multi-application de meilleure approximation	
par rapport à un ensemble	382
Multi-application propre	382
<i>Mutatis mutandis</i> : latin « en changeant ce qui doit l'être ». L'expression remplace une démonstration qui diffère très peu d'une autre démonstration donnée.	

N

Niveau	49
Non dégénérescence	46
Norme	37
Norme associée à un produit scalaire	43, 44
Norme atteinte et non atteinte	202, 209, 210
Norme de la moyenne	41
Norme de la moyenne quadratique	41
Normes de matrices	40
Normes équivalentes	39
Normes höldériennes	40
Norme naturelle sur $\mathcal{L}(E, F)$,	
sur le dual topologique E'	201
Norme uniforme	41
Notion homologique	176
Notion isométrique	175
Notion topologique	175
Notion uniforme	176
Noyau d'une application linéaire	231
Noyau d'un opérateur intégral	208
Noyau reproduisant	419
Nullité à l'origine	37
Nullité sur la diagonale	11

O

Opérateur \equiv application linéaire continue.	
Opérateur adjoint (d'un opérateur) : voir à Adjoint.	
Opérateur de rang un	206
Opérateurs de Hilbert-Schmidt, et op.	
à trace ou nucléaires	445
Opérateurs de décalage	448
Opérations de Minkowski	39
Orthogonaux (vecteurs -)	47
Orthogonal (d'une partie)	48
Orthogonales (parties -)	47
Ouvert (ou : partie ouverte) d'un e.m	20, 132
Ouvert d'un produit	186

P

Partie compacte	287, 305
Partie complète	238
Partie également continue	
\equiv partie équicontinue.	

- Partie équi-uniformément continue 313
 Partie équicontinue 313
 Partie positive (négative) d'une fonction . 157
 Partie précompacte 283
 Partie propre 465
 Partie totale 92
 Partition continue de l'unité subordonnée
 à un recouvrement 166
 Partition propre 465
 Partout dense (partie -) 91
Passim : latin « au passage ».
 Petite perturbation d'un isomorphisme . . 263
 Poids 207, 437
 Point d'accumulation 115
 Point de meilleure approximation d'un
 point par rapport à un ensemble 381
 Point extérieur 129
 Point fixe d'une application 363
 Point frontière 116
 Point intérieur 129
 Point isolé 115
 Point selle \equiv col 487
 Polynômes de Bemstein 98
 Polynômes orthogonaux (de Jacobi, Legendre,
 Chebyshev, Hermite, Laguerre) 437
 Positif (opérateur -) 485
 Positivité 11, 37, 43
 Principe de Ekeland 271
 Principe de prolongement des égalités . . 156
 Principe de prolongement des inégalités . 158
 Principe des pigeons 105
 Principe du maximum pour les
 fonctions convexes 132
 Problème aux limites 219
 Procédé d'orthogonalisation de
 Gram-Schmidt 432
 Produit d'espaces métriques 15, 185
 Produit scalaire sur un espace réel 43
 Produit scalaire sur un espace complexe
 (produit hermitien) 46
 Produit scalaire hermitien \equiv p.s. sur un espace
 vectoriel complexe.
 Projection (au sens de
 « meilleure approximation ») 381
 Projections naturelles 186
 Projection orthogonale 389
 Projection stéréographique 13
 Projection sur un convexe complet
 d'un espace préhilbertien 385
 Prolongement par continuité 191
 Propre (partie -, partition -) 465
 Propriété de Bolzano-Weierstrass 305
 Propriété de Borel-Lebesgue 305
 Propriété de Cantor 307
 Propriété d'intersection finie 307
- Q**
- Q.E.D. = C.Q.F.D. latin *Quod erat demon-*
strandum.
- R**
- Rare (partie -) 147
 Rayon de Chebyshev 22
 Recouvrement 283
 Recouvrement fini, dénombrable 283
 Relativité des intérieurs 131
 Relativité des parties fermées 119
 Relativité des parties ouvertes 136
 Reste d'une série 261
- S**
- Seconde inégalité triangulaire 12, 38
 Segment (dans un espace vectoriel) 49
 Semi-distance 11
 Semi-norme 37
 Séparable \equiv de type dénombrable
 (pour un e.m.) 91
 Séparé, séparation 11, 37, 43, 135
 Série dans un e.v.n. 260
 Série convergente, divergente 260, 261
 Série de Fourier 429
 Série harmonique : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (divergente).
 Série harmonique alternée : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
 (convergente).
 Série normalement convergente 261
 Série trigonométrique \equiv série de Fourier
 au sens classique 435
 Sesquilinéaire 46
 Sinus des topologues 470
 Somme de Cesàro 80
 Somme directe topologique 391
 Somme d'une série 260
 Somme partielle (d'une série) 260
 Sous-additive (fonction) 17
 Sous-espace vectoriel engendré par
 une partie 92
 Sous-niveau 49
 Sphère 18
 Sphère généralisée 21
 Sous-espace métrique 14, 153
 Sous-espace vectoriel normé 39
 Sous-groupe du groupe additif des
 nombres réels 100
 Stabilité (de l'algorithme du point fixe) . . 364
 Strictement convexe (e.v.n. -,
 espace de Banach -) 39, 311
stricto sensu latin « au sens strict »
 Suite 67
 Suite convergente 70
 Suite de Cauchy 235

Suite divergente	70	Théorème des bornes atteintes	310
Suite exhaustive d'ouverts à adhérence compacte	315	Théorème de Stone-Weierstrass	333
Suite extraite	68	Théorème des valeurs intermédiaires	467
Suite stationnaire	68	Théorème de Tychonov	287
Sup de deux fonctions	157	Théorème de Weierstrass	96
Symétrie	11, 43	Théorème de Weierstrass trigonométrique	97
Symétrie hermitienne	46	Théorème des formes linéaires à noyau fermé	203
T		Théorème du passage des douanes	471
Taubérien (théorème -)	80	Topologie	119, 135
Terme de rang n (d'une suite)	67	Topologie discrète	135
Théorème d'Arzelà-Ascoli	313	Topologie grossière	135
Théorème de Bohman-Korovkin	340	Trace (propriétés de la -)	57
Théorème de Bolzano-Weierstrass	77	Transposée	41, 232
Théorème de Brouwer	372	U	
Théorème de Dini	321	Ultramétrique (distance -)	11, 300
Théorème de Heine	312	Uniformément convexe (norme -, e.v.n., espace de Banach-)	39, 311
Théorème de la place des zéros	343	V	
Théorème de Mazur-Ulam	218	Valeur absolue d'une fonction	157
Théorème de point fixe de Caristi	273	Valeur d'adhérence d'une suite	72
Théorème de point fixe des applications strictement contractantes	364	Vitesse de convergence	364
Théorèmes de prolongement	257	Voisinage (d'un point, d'une partie)	137
Théorème de prolongement de Tietze-Urysohn	273, 278		
Théorème de Pythagore	47		

NOTATIONS

◆ : fin de démonstration, ou fin d'étape d'une démonstration.

:= : signe égale de définition, ou de notation ; « on pose ».

Symboles logiques :

\implies : implication logique ; $P \implies Q$: (la proposition) P implique (la proposition) Q .

\nRightarrow : n'implique pas.

\iff : équivalence logique ; $P \iff Q$: P (proposition) équivaut à Q (proposition).

\neg : négation ; \neg (proposition) P : **non** P ; non P est vraie $\iff P$ fausse.

\vee : connecteur (de propositions) **ou** (non exclusif) ; $P \vee Q$: P ou Q .

\wedge : connecteur (de propositions) **et** ; $P \wedge Q$: P et Q .

\forall : quantificateur universel ; $\forall u$: quel que soit u , ou : pour tout u .

\exists : quantificateur existentiel ; $\exists u$: il existe (au moins) un u .

$\exists!u$: il existe un unique u ; non classique, à éviter (de même pour $\exists?$ existe-t-il ?).

Symboles de la théorie des ensembles :

\in : appartenance ; $u \in E$: (l'élément) u appartient à (l'ensemble) E .

\notin : négation de l'appartenance ; $u \notin E$: u n'appartient pas à E .

\subset : contenu ; $A \subset E$: (l'ensemble) A est contenu dans (l'ensemble) E .

\supset : contient ; $E \supset A$: (l'ensemble) E contient (l'ensemble) A .

$\not\subset$: non contenu. $A \not\subset B \iff [\exists a \in A \text{ tel que } a \notin B]$.

$\not\supset, \not\subset, \Leftarrow$: signification claire ; non classiques, à éviter.

$A \setminus B$ ou $\complement_A B$: complémentaire de B par rapport à A ; $A \setminus B = \{a \in A / a \notin B\}$.

\emptyset : ensemble vide.

2^A ou $\mathcal{P}(A)$: ensemble des parties de l'ensemble A (y compris \emptyset et A).

$\{u\}$: singleton ; ensemble réduit à l'élément u .

\cap, \bigcap : intersection ; $A \cap B$: A inter B ; $A \cap B = \{u / (u \in A) \wedge (u \in B)\}$.

\cup, \bigcup : union ou réunion ; $A \cup B$: A union B ; $A \cup B = \{u / (u \in A) \vee (u \in B)\}$.

$\bigcap_{i \in I} A_i$: intersection des ensembles A_i indexés sur $i \in I$.

$\bigcup_{i \in I} A_i$: réunion des ensembles A_i indexés sur $i \in I$.

\rightarrow : application ; $f : A \rightarrow B$ application (f) de (l'ensemble) A dans (l'ensemble) B .

$f|_X$: restriction de f à $X \subset A$.

Id_E : application identique sur E .

$\mathbf{1}$ ou $\mathbf{1}_X$: fonction constante égale à 1 sur un ensemble X .

$I_X, X \subset E$: fonction indicatrice de X , valant 0 sur X et $+\infty$ sur $E \setminus X$.

$(u_n)_{n \in S}$: suite d'éléments u_n d'un ensemble, indexée sur $S \subset \mathbb{N}$, S infini.

Symboles divers :

\sim ou \equiv ou \approx : relation d'équivalence.

\prec ou \succ : relation d'ordre.

\mapsto : « béquillon » utilisé pour définir l'image d'un point par une application.

Symboles propres aux espaces vectoriels :

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} est le corps des scalaires d'un espace vectoriel.

\perp : orthogonal ; $u \perp v$ signifie « u orthogonal à v », i.e. $(u|v) = 0$.

A^\perp : orthogonal d'une partie ; $A^\perp = \{u \in E / \forall a \in A : (u|a) = 0\}$.

$[A]$: sous-espace engendré par A ; $[A] = \{\sum_{i \in I} \lambda_i a_i / I \text{ fini, } \lambda_i \in \mathbb{K}, a_i \in A\}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

$[a, b]$: segment d'extrémités a et b : $[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b / \lambda \in [0, 1]\}$.

$L(E, F)$: espace vectoriel des applications linéaires $E \rightarrow F$.

$B(E, F; G)$: espace vectoriel des applications $E \times F \rightarrow G$ bilinéaires.

$\text{Isom}(E, F)$: ensemble des $A \in L(E, F)$ qui sont bijectives (*i.e.* des isomorphismes d'espaces vectoriels de E sur F).

$GL(E) = \text{Isom}(E, E)$: groupe des isomorphismes de E sur E (groupe linéaire).

E^* : espace vectoriel dual de E (espace des formes linéaires).

$E^{**} = (E^*)^*$: bidual de E .

$\langle u, \varphi \rangle$ où $u \in E$, $\varphi \in E^*$ (dual) signifie $\varphi(u)$.

$A + B$ où $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, est l'ensemble $\{a + b / a \in A, b \in B\}$.

λA où $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \neq \emptyset$ est l'ensemble $\{\lambda a / a \in A\}$.

\oplus : somme directe de sous-espaces vectoriels.

$\text{conv}(A)$: enveloppe convexe de (l'ensemble) A , *i.e.* plus petit convexe contenant A .

\otimes : produit tensoriel. Pour $u \in E$ et $\varphi \in E^*$: $u \otimes \varphi$ est l'opérateur de rang 0 ou 1 défini par $(u \otimes \varphi)(x) = \varphi(x).u$.

Symboles propres aux espaces métriques :

$d(\cdot, \cdot)$, $\delta(\cdot, \cdot)$, $\partial(\cdot, \cdot)$: distance sur un ensemble.

(E, d) ou E_d : espace métrique.

$d(u, A)$: distance de $u \in E$ à $A \neq \emptyset$; $d(u, A) = \inf_{a \in A} d(u, a)$.

$d(A, B)$: distance de $A \neq \emptyset$ à $B \neq \emptyset$; $d(A, B) = \inf_{a \in A, b \in B} d(a, b)$.

$e(A, B)$: écart de Hausdorff de $A \neq \emptyset$ à $B \neq \emptyset$; $e(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B)$.

$\text{diam}(A)$: diamètre de l'ensemble A ; $\text{diam}(A) = \sup_{a \in A, a' \in A} d(a, a')$.

$B(u, \rho[$: boule ouverte de centre u et de rayon $\rho (> 0)$. On note aussi $B(u, \rho)$.

$B(u, \rho]$: boule fermée de centre u et de rayon $\rho (> 0)$. On note aussi $B_f(u, \rho)$. Eviter la notation $\overline{B}(u, \rho)$.

$S(u, \rho)$: sphère de centre u et de rayon $\rho (> 0)$.

$B(A, \rho[$, $B(A, \rho]$, $S(A, \rho)$: boules et sphère généralisées.

$\text{int}(A)$ ou $\overset{\circ}{A}$: intérieur de (l'ensemble) A .

$\text{adh}(A)$ ou \overline{A} : adhérence de (l'ensemble) A .

$\text{fr}(A)$: frontière de (l'ensemble) A .

$\text{ext}(A)$: extérieur de (l'ensemble) A : $\text{ext}(A) = \text{int}(E \setminus A)$.

A' : ensemble dérivé de A (ensemble des points d'accumulation).

Symboles propres aux espaces vectoriels normés (e.v.n.) :

$\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, $\|(\cdot)\|$, $\|[\cdot]\|$, \dots : norme sur un espace vectoriel.

$(E, \|\cdot\|)$ ou $E_{\|\cdot\|}$: espace vectoriel normé.

$\mathcal{L}(E, F)$: espace vectoriel des applications linéaires $E \rightarrow F$ continues sur E .

$\mathcal{B}(E, F; G)$: ensemble des éléments de $B(E, F; G)$ qui sont continus.

$\mathcal{I}\text{som}(E, F)$: ensemble des $A \in \text{Isom}(E, F)$ tels que $A \in \mathcal{L}(E, F)$, $A^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

$\mathcal{G}\mathcal{L}(E) = \mathcal{I}\text{som}(E, E)$.

E' : dual topologique de l'e.v.n. E (espace des formes linéaires continues).

$E'' = (E')'$: bidual topologique.

$\|\cdot\|'$: norme naturelle de E' : $\|\varphi\|' = \sup_{\|u\| \leq 1} |\varphi(u)| = \sup_{u \neq 0} \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|}$.

$\text{adh}[A]$: plus petit sous-espace vectoriel fermé engendré par A .

$\overline{\text{conv}}(A)$: enveloppe convexe fermée de A = plus petit convexe fermé contenant A .

Ensembles particuliers :

\mathbb{N} : ensemble des nombres entiers naturels, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

\mathbb{Z} : ensemble des nombres entiers de signe quelconque, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, \dots\}$.

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

\mathbb{Q} : ensemble des nombres rationnels. $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

\mathbb{I} : ensemble des nombres irrationnels = $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

\mathbb{R} : ensemble des nombres réels. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

\mathbb{C} : ensemble des nombres complexes.

$\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n = \{x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) / \forall i = 1, \dots, n : \xi_i \in \mathbb{K}\}$.

$\ell^\infty(\mathbb{K})$ ou ℓ^∞ : espace vectoriel des suites $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ bornées d'éléments de \mathbb{K} : $x \in \ell^\infty \iff \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |\xi_n| < \infty$. $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur ℓ^∞ .

$\ell^p(\mathbb{K})$ ou ℓ^p , p réel ≥ 1 : espace vectoriel des suites $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ d'éléments de \mathbb{K} vérifiant $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$. $\|x\|_p = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p \right]^{1/p}$ est une norme sur ℓ^p .

$c(\mathbb{K})$: espace vectoriel des suites d'éléments de \mathbb{K} convergentes.

$c_0(\mathbb{K})$: espace vectoriel des suites d'éléments de \mathbb{K} convergentes de limite 0.

$c_{00}(\mathbb{K})$: espace vectoriel des suites d'éléments de \mathbb{K} nulles à partir d'un certain rang.

$\mathcal{B}(A, E_d)$: ensemble des applications $f : A \rightarrow E$ qui sont bornées, c'est-à-dire telles que $\text{diam}[f(A)] < \infty$.

$d_\infty(f, g) = \sup_{a \in A} d[f(a), g(a)]$ est une distance sur $\mathcal{B}(A, E_d)$ [la distance uniforme].

$\mathcal{C}(E_d, F_\delta)$: ensemble des applications $f : E \rightarrow F$ continues sur E_d .

$\mathcal{C}_\infty([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, e.v.n. des fonctions $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[\alpha, \beta]$, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$.

$\mathcal{C}_p([\alpha, \beta], \mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$, e.v.n. des fonctions $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[\alpha, \beta]$, muni de la norme $\|f\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt \right]^{1/p}$.

$\mathcal{E}([\alpha, \beta], \mathbb{R})$: fonctions en escalier.

$\mathcal{A}([\alpha, \beta], \mathbb{R})$: fonctions continues sur $[a, b]$ et affines par morceaux.

$\mathcal{R}([\alpha, \beta], \mathbb{R})$: fonctions réglées.

$\mathcal{P}([\alpha, \beta], \mathbb{R})$: fonctions polynomiales.

BIBLIOGRAPHIE

- Aubin, J-P.** *Initiation à l'analyse appliquée.* Masson éd. Paris 1994.
- Banach, S.** *Théorie des opérations linéaires.* Chelsea Pub. C^o New York.
- Bass, J.** *Cours de mathématiques.* Tome III. Masson éd. Paris 1971.
- Bell, E.T.** *Les grands mathématiciens.* Payot éd. Paris 1950.
- Bertrandias, J-P.** *Mathématiques pour l'informatique. 1. Analyse fonctionnelle.* Armand Colin éd. Paris 1970.
- Bouveresse, J., Itard, J., Sallé, E.** *Histoire des mathématiques.* Librairie Larousse éd. Paris 1977.
- Bovier, A. et George, M.** sous la direction de **F. Le Lionnais** *Dictionnaire des Mathématiques.* Presses Universitaires de France 1979.
- Brézis, H.** *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications.* Masson éd. Paris 1987.
- Buchwalter, H.** *Variations sur l'analyse. Maîtrise de mathématiques.* Ellipses éd. Paris 1992.
- Chambadal, L. et Ovaert, J.L.** *Cours de mathématiques. Notions fondamentales d'algèbre et d'analyse.* Gauthier-Villars éd. Paris 1966.
- Choquet, G.** *Cours d'analyse Tome II. Topologie.* Masson éd. Paris 1964 (il existe une édition récente).
- Ciarlet, P.G.** *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation.* Masson éd. 1988.
- Collette, J-P.** *Histoire des mathématiques. Tome 2.* Editions du renouveau pédagogique. Montréal 1979.
- Combes, J.** *Suites et séries.* Presses Univ. de France, Paris 1982.
- Day, M.M.** *Normed linear spaces.* Springer-Verlag 1973 (3ème édition).
- Descombes, R.** *Cours d'analyse pour le Certificat de Mathématiques 1.* Vuibert éd. 1962.
- Diener, F. et Reeb, G.** *Analyse non standard.* Hermann éd. Paris 1989.
- Dieudonné, J.** *Eléments d'analyse 1) Fondements de l'analyse moderne.* Gauthier-Villars Paris 1968 (il existe une édition récente).
- Dieudonné, J.** *Pour l'honneur de l'esprit humain.* Les mathématiques aujourd'hui. Hachette éd. Paris 1987.
- Faisant, A.** *TP et TD de topologie générale.* Hermann éd. Paris 1988 (Collec. Méthodes).
- Faurre, P.** *Analyse numérique. Notes d'optimisation.* Ecole Polytechnique. Ellipses éd. Paris 1988.
- Garsoux, J.** *Analyse mathématique.* Dunod éd. Paris 1968.
- Godbillon, C.** *Eléments de topologie algébrique.* Hermann, Paris 1971 (Collec. Méthodes).
- Gonord, S. et Tosel, N.** *Topologie et analyse fonctionnelle (Thèmes d'Analyse pour l'Agrégation).* Ellipses éd. Paris 1996.
- Gostiaux, B.** *Cours de mathématiques spéciales. Tome 2. Topologie, analyse réelle. Tome 3. Analyse fonctionnelle et calcul différentiel.* Presses Univ. de France éd. 1993.
- Guénard, F.** *Agrégation de mathématiques. Concours externe. Vade-mecum de l'oral d'analyse.* Eska éd. 1991.
- Guichardet, A.** *Intégration. Analyse hilbertienne.* Ellipses éd. Paris 1989.
- Hauchecorne, B.** *Les contre-exemples en mathématiques.* Ellipses éd. Paris 1988.
- Holmgren, R.A.** *A First Course in Discrete Dynamical Systems.* Springer-Verlag, Berlin 1994.
- Kolmogorov, A. et Fomine, S.** *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle.* Ed. Ellipses 1994.

- Laurent, P.-J.** *Approximation et optimisation*. Hermann, Paris 1972.
- Lions, J.-L.** *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Gauthier-Villars éd. Paris 1969.
- Lipschutz, S.** *Theory and problems of general topology*. Schaum's outline series McGraw-Hill Book C° ed. New York 1965 (il existe une édition récente, en français).
- Lusternik, L., Sobolev, V.** *Précis d'analyse fonctionnelle*. Ed. MIR. Moscou (disponible en France et peu cher).
- Mandelbrot, B.** *Les objets fractals. Forme, hasard et dimension*. Flammarion, Paris 1975. Il existe une édition plus récente et complétée.
- Maté, L.** *Hilbert space methods in science and engineering*. Akadémiai Kiado éd. Budapest 1989.
- Meyer, Y.** *Les ondelettes. Algorithmes et applications*. Armand Colin, Paris 1993-1994.
- Mneimné, R., Testard, F.** *Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques*. Hermann, Paris 1986 (Collec. Méthodes).
- Moulin, H. et Fogelman-Soulié, F.** *La convexité dans les mathématiques de la décision*. Hermann éd. Paris 1979 (Collec. Méthodes).
- Pisot, C. et Zamansky, M.** *Mathématiques générales algèbre-analyse*. Dunod éd. Paris 1961 (plusieurs fois réédité).
- Popa, E.** *Culegere de probleme de analiza functionala*. Editura didactica si pedagogica. Bucuresti 1981.
- Popescu, T.** *Retrospectiva matematica. Reperu evolutive*. Editura Litera. Bucuresti 1980.
- Radulescu, S. si Radulescu, M.** *Teoreme si probleme de analiza matematica*. Editura didactica si pedagogica. Bucuresti 1982.
- Revuz, D.** *Mesure et intégration*. Hermann, Paris 1994 (Collec. Méthodes).
- Samuelides, M. et Touzillier, L.** *Analyse fonctionnelle*. CEPADUES-ED. Toulouse 1989.
- Schatten, R.** *Norm ideals of completely continuous operators*. Springer-Verlag, Berlin 1960.
- Schwartz, L.** *Analyse. Topologie générale et analyse fonctionnelle*. Hermann éd. Paris 1970 (il existe une édition récente). Il existe aussi un cours d'analyse en quatre tomes du même auteur (Hermann éd.).
- Schwartz, L.** *Analyse hilbertienne*. Hermann éd. Paris 1979.
- Siddiqi, A.H.** *Functional analysis with applications*. Tata McGraw-Hill ed. (New Delhi) 1986.
- Taylor, A.E.** *Introduction to functional analysis*. John Wiley & Sons ed. 1967.
- Tisseron, C.** *Notions de topologie. Introduction aux espaces fonctionnels*. Hermann éd. Paris 1985.
- Trénoquine, V.** *Analyse fonctionnelle*. Ed. MIR. Moscou 1989 (disponible en France et peu cher).
- Trénoquine, V., Pissarevski, B., Soboléva, T.** *Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle*. Ed. MIR. Moscou 1987 (disponible en France et peu cher).
- Vauthier, J. et Prat, J.-J.** *Cours d'analyse mathématique de l'agrégation*. Masson éd. Paris 1994.
- Wagschal, C.** *Topologie et analyse fonctionnelle*. Hermann éd. Paris 1995 (Collec. Méthodes).
- Wagschal, C.** *Topologie, Analyse fonctionnelle* (deux livrets d'exercices). Hermann éd. Paris 1995.
- Zeidler, E.** *Nonlinear functional analysis and its applications*. 5 tomes. Springer-Verlag ed. New York 1986.
- Zisman, M.** *Topologie algébrique élémentaire*. Armand Colin, Paris 1972 (Collec. U).

TABLE DES MATIÈRES

Avant-propos	3
Chapitre I : Distances et espaces métriques	9
1. Distances	11
2. Espaces métriques	13
3. Quelques notions qu'on peut définir à l'aide d'une distance	18
<i>Lecture</i> : Tout espace métrique E_d est isométrique à un s.e.m. de $\mathcal{B}_\infty(E, \mathbb{R})$...	24
<i>Corrigé des exercices</i>	25
<i>Problème</i> : Régularisée de Hausdorff d'une fonction	33
Chapitre II : Normes et espaces vectoriels normés	35
1. Normes	37
2. Espaces vectoriels normés	38
3. Exemples d'espaces vectoriels normés	40
4. Exemples classiques d'espaces vectoriels normés (e.v.n. « classiques ») ...	41
5. Produits scalaires et espaces préhilbertiens	43
6. Ensembles et fonctions convexes	48
<i>Lecture</i> : Le critère de « préhilbertisabilité » de Jordan-von Neumann	51
<i>Corrigé des exercices</i>	53
<i>Problème</i> : Jauges de Minkowski	61
Chapitre III : Suites de points d'un espace métrique	65
1. Suites de points d'un ensemble	67
2. Suites de points d'un espace métrique	69
3. Limite supérieure et limite inférieure d'une suite de nombres réels	74
<i>Corrigé des exercices</i>	79
<i>Lecture</i> : Convergence de suites d'ensembles	83
<i>Problème</i> : Stabilité en optimisation	85
Chapitre IV : Densité et approximation dans un e.m.	89
1. Densité et approximation	91
2. Approximation uniforme des fonctions $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$	
Le théorème de Weierstrass	93
Démonstrations	97
<i>Lecture</i> : Sous-groupes du groupe additif des nombres réels	100
<i>Corrigé des exercices</i>	103
<i>Problème</i> : Une distance curieuse	106
Chapitre V : Fermés d'un espace métrique	109
1. Notion d'adhérence	111
2. Points d'accumulation et points isolés	115
3. Frontière	116
4. Parties fermées d'un espace métrique	117
<i>Corrigé des exercices</i>	120
<i>Problème</i> : Étude d'une fonction convexe	123
Chapitre VI : Ouverts d'un espace métrique	127
1. Notion d'intérieur	129
2. Parties ouvertes d'un espace métrique	132
<i>Corrigé des exercices</i>	138
<i>Problème 1</i> : Boules généralisées	144

<i>Problème 2</i> : Ensembles rares	147
Chapitre VII : Applications continues	149
1. Continuité en un point	151
2. Continuité sur un espace métrique	155
Démonstrations	159
<i>Corrigé des exercices</i>	160
<i>Lecture-Problème</i> : Partition continue de l'unité subordonnée à un recouvrement	164
Chapitre VIII : Applications uniformément continues.	
Homéomorphismes	169
1. Continuité uniforme	171
2. Homéomorphismes	174
<i>Corrigé des exercices</i>	177
Chapitre IX : Produit d'espaces métriques et continuité.	
Limite d'une application	183
1. Produits d'espaces métriques	185
2. Espace métrique produit et continuité	187
3. Limite d'une application	189
<i>Corrigé des exercices</i>	194
Chapitre X : Applications linéaires continues	197
1. Caractérisations des applications linéaires continues. L'e.v.n. $\mathcal{L}(E, F)$...	199
2. Exemples	205
3. Caractérisations des applications multilinéaires continues	211
Démonstrations	215
<i>Lecture 1</i> : Une propriété des isométries	218
<i>Lecture 2</i> : Approximation d'un e.v.n.	220
<i>Corrigé des exercices</i>	223
Annexe : Rappels d'algèbre linéaire	231
Chapitre XI : Suites de Cauchy et espaces métriques complets.	
Espaces de Banach, espaces de Hilbert	233
1. Suites de Cauchy	235
2. Espaces métriques complets : espaces de Banach, espaces de Hilbert	237
3. Exemples fondamentaux d'espaces métriques et d'e.v.n. complets : espaces de Banach classiques	243
<i>Corrigé des exercices</i>	247
Chapitre XII : Espaces métriques complets (suite)	255
1. Théorèmes de prolongement	257
2. Espaces vectoriels normés de dimension finie	258
3. Séries dans les espaces vectoriels normés	260
Démonstrations	266
<i>Corrigé des exercices</i>	269
<i>Lecture-Problème 1</i> : Le principe de Ekeland	271
<i>Lecture-Problème 2</i> : Le théorème de prolongement de Tietze-Urysohn	273
<i>Lecture-Problème 3</i> : Le théorème de T.-U., une autre approche	278
Chapitre XIII : Espaces métriques compacts (I)	281
1. Recouvrements	283
2. Espaces métriques précompacts	283

3. Espaces métriques compacts	287
<i>Corrigé des exercices</i>	290
<i>Problèmes de révisions :</i>	
<i>Problème 1</i> : Le dual de c_0 est isométrique à ℓ^1	294
<i>Problème 2</i> : Convergence d'une suite d'ensembles	296
<i>Problème 3</i> : Normes équivalentes	298
<i>Problème 4</i> : Espaces ultramétriques	299
Chapitre XIV : Espaces métriques compacts (II)	303
1. Le théorème fondamental	305
2. Applications continues définies sur un espace métrique compact	309
3. Ensembles équicontinus. Théorème d'Arzelà-Ascoli	313
4. Espaces métriques localement compacts	314
Démonstrations	317
<i>Corrigé des exercices</i>	320
<i>Lecture-Problème</i> : Théorème de Stone-Weierstraß	333
<i>Problème 1</i> : Espaces métriques à boules fermées compactes	337
<i>Problème 2</i> : Le théorème de Bohman-Korovkin	340
<i>Problème 3</i> : Le théorème de la place des zéros	343
Chapitre XV : Complété d'un espace métrique, d'un e.v.n. et d'un espace préhilbertien	345
1. Complété d'un espace métrique	347
2. Complété d'un espace vectoriel normé	352
3. Complété d'un espace préhilbertien	355
<i>Corrigé des exercices</i>	356
Annexe : Propriétés des nombre réels	359
Chapitre XVI : Espaces métriques complets : Applications (I) Points fixes	361
1. Point fixe d'une application	363
2. Le théorème du point fixe des contractions strictes	364
3. Quelques applications du théorème du point fixe	367
4. Variantes du théorème fondamental et applications	370
5. Le théorème de Brouwer	372
<i>Lecture</i> : Un résultat d'existence pour les équations non linéaires	372
<i>Corrigé des exercices</i>	373
Chapitre XVII : Espaces métriques complets : Applications (II) Projections	379
1. Meilleure approximation dans un espace métrique	381
2. Meilleure approximation dans un e.v.n.	382
3. Projection sur un convexe complet d'un espace préhilbertien	385
4. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel complet	389
<i>Corrigé des exercices</i>	392
<i>Problème</i> : Algorithme pour trouver un point dans une intersection	400
Chapitre XVIII : Espaces de Hilbert réels (I) Autour du théorème de Riesz	403
1. L'application de dualité. Le théorème de F. Riesz	405
2. Opérateur adjoint d'un opérateur	409
<i>Corrigé des exercices</i>	414

<i>Problème 1</i> : Noyaux reproduisants de Aronszjan–Bergman	419
<i>Problème 2</i> : Un problème de Contrôle Optimal abstrait	423
Chapitre XIX : Espaces de Hilbert réels (II)	
Bases hilbertiennes	425
1. Base hilbertienne, ou base orthonormale, d'un espace préhilbertien réel séparable	427
2. Existence de bases hilbertiennes	432
3. Applications	435
<i>Corrigé des exercices</i>	438
<i>Problème 1</i> : Une riche famille d'opérateurs	442
<i>Problème 2</i> : Opérateurs de Hilbert-Schmidt	445
<i>Problème 3</i> : Opérateurs de décalage	448
<i>Problème 4</i> : Un calcul de distance	450
<i>Problème 5</i> : Un espace de Hilbert et son dual	451
<i>Problème 6</i> : Un contre-exemple sur la projection orthogonale	454
<i>Problème 7</i> : La base hilbertienne de Haar	457
Chapitre XX : Connexité(s)	461
1. Connexité par arcs	463
2. Connexité	465
3. Composantes connexes	468
4. Applications de la notion de connexité	471
<i>Corrigé des exercices</i>	472
<i>Lecture-Problème</i> : Le groupe fondamental d'un espace métrique	476
Chapitre XXI : Minimisation d'une forme quadratique	481
1. Minimisation et inéquations	483
2. Points selle et min-max	487
3. Résultat d'existence et algorithme de calcul	489
Mathématiciens cités	493
Index	499
Notations	504
Bibliographie	507
Table des matières	509