

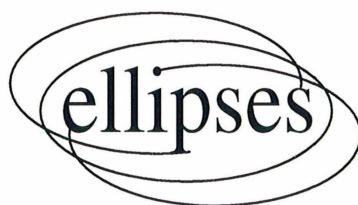


UNIVERSITÉS
MATHÉMATIQUES

Transformations de Laplace

*Théorie et illustrations
par les exemples*

Gilbert DEMENGEL



UNIVERSITÉS

UNIVERSITÉS

MATHÉMATIQUES

TRANSFORMATIONS DE LAPLACE

**Théorie et illustrations
par les exemples**

Gilbert DEMENGEL



MATHÉMATIQUES

- *Algèbre linéaire. Rappels de cours, exercices corrigés*, P. Jeannin et H. Joulak, 240 p.
- *Cours de mathématiques pour économistes. Algèbre linéaire et systèmes dynamiques*, M.-C. Barthélémy, 288 p.
- *Initiation à la statistique descriptive*, G. Duthil et D. Vanhaecke, 192 p.
- *Introduction à la géométrie différentielle. Géométrie et applications*, P. Aimé, 304 p.
- *Mathématiques pour économistes. Exercices corrigés*, M.-C. Barthélémy, 224 p.
- *Mesures et distributions – Théorie et illustration par l'exemple*, F. et G. Demengel, 288 p.
- *Notions et techniques de base – DEUG MASS, MIAS, SM – semestre d'orientation. Cours et exercices corrigés*, M. Jambon, 128 p.
- *Probabilités et statistiques. Cours, exercices et problèmes résolus*, J. Istas, 176 p.
- *Probabilités et statistiques à l'usage des physiciens*, B. Escoubès, 176 p.
- *Techniques mathématiques pour la physique*, G. Auliac, J. Avignant et E. Azoulay, 320 p.
- *Topologie et analyse fonctionnelle. Cours de licence avec 240 exercices et problèmes corrigés*, Y. Sonntag, 512 p.
- *Transformations de Fourier généralisées – Séries et transformations de Fourier et de Walsh, leurs extensions – Transformations discrètes et rapides. Cours et problèmes résolus*, G. Demengel, 288 p.
- *Transformations de Laplace – Théorie et illustrations par les exemples*, G. Demengel, 288 p.

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

- *Bifurcations et chaos. Une introduction à la Dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica*, H. Dang-Vu et C. Delcarte, 448 p.
- *Distributions et applications. Séries de Fourier. Transformations de Fourier et de Laplace*, G. Demengel, P. Bénichou, N. Boy et J.-P. Pouget, 256 p.
- *Initiation à la programmation linéaire et à l'algorithme du simplexe*, C. Brezinski, 96 p.
- *Probabilités. Statistiques inférentielles. Fiabilité. Outils pour l'ingénieur*, G. Demengel, P. Bénichou, N. Boy et J.-P. Pouget, 256 p.
- *Théorie et analyse du signal. Cours et initiation pratique via MATLAB et SCILAB*, A. Yger, 272 p.
- *Statistique et économétrie - Du modèle linéaire... aux modèles non-linéaires*, X. Guyon, 208 p.

INFORMATIQUE

- *Méthodologie et algorithmes en Pascal. Cours et exercices corrigés*, R. Legrand, 256 p.

« Je dédie cet ouvrage à Guillaume et Victor,
Ce sont mes petits-fils, petits enfants encore,
Espérant que, plus tard, une de leurs passions
Concernera les Maths et ses Applications. »

ISBN 2-7298-1144-3

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2002
32, rue Barge 75740 Paris cedex 15



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (Art. L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Avant-propos

Contenu du livre

L'ouvrage présent est consacré à l'étude de la transformation de Laplace unilatère des fonctions et des distributions causales. Les chapitres 1 et 4 sont des chapitres qui mettent en place la transformation dans un cadre théorique. Dans le chapitre 1, les abscisses de convergence, les propriétés principales concernant les dérivations, les intégrations, la convolution des fonctions dont l'importance est ainsi soulignée, l'holomorphie des transformées de Laplace, leurs comportements au voisinage de l'infini et au voisinage de leurs points singuliers, ainsi que les formules permettant l'inversion de la transformation sont étudiés en détail. Quelques exemples de calcul y figurent.

Le chapitre 4 étend la notion de fonction causale aux distributions dites alors causales. Pour de telles distributions T , la notion d'abscisse de convergence $\sigma(T)$ se généralise par la considération de la borne inférieure des réels a tels que $\exp(-at)T$ appartienne à l'espace \mathcal{S}' . La transformée de Laplace de T est définie alors formellement pour $\Re(s) > \sigma(T)$ par la fonction complexe de la variable s telle que $F(s) = \langle T, \exp(-st) \rangle$. Les propriétés des images de Laplace des fonctions se généralisent, en particulier l'holomorphie de F dans le demi-plan de convergence, les propriétés de translation, de dérivation, d'intégration et de convolution. La formule d'inversion permet de compléter celle qui concerne les fonctions. Dans ce chapitre, on accorde une attention particulière aux distributions qui sont des parties finies causales, en adaptant, pour ces cas particuliers, la traduction des théorèmes généraux.

Les chapitres 2 et 5 développent, de manière détaillée, des exemples de calculs d'images. Dans le chapitre 2, les exemples fournissent ainsi un dictionnaire d'images usuelles pour lesquelles des méthodes variées de calcul, utilisant les ressources de l'analyse classique, sont proposées. Outre les propriétés mêmes des transformées, ce sont des calculs d'intégrales au moyen du théorème des résidus, l'utilisation de relations algébriques, l'utilisation d'équations différentielles, l'interversion d'intégrations, la dérivation sous le signe intégral, les développements en série, l'utilisation de prolongements analytiques...

Ces exemples de calculs sont suivis d'exemples de calculs de convolution, d'exemples de recherche d'images inverses, d'utilisation du théorème d'inversion dans la recherche de comportements de certaines fonctions au voisinage de l'infini. Enfin, on propose aussi dans ce chapitre des résolutions d'équations fonctionnelles par la méthode de la transformation de Laplace : les équations différentielles linéaires, les équations différentielles avec arguments retardés, les équations intégrales et les équations intégro-différentielles, les équations aux différences.

De même, dans le chapitre 5, on étudie surtout les images de certains peignes causaux et de distributions de type parties finies. Le reste du chapitre est consacré à la résolution au sens des distributions des équations différentielles, intégrales ou intégro-différentielles, les seconds membres de ces équations pouvant devenir alors des distributions.

Le chapitre 6 donne des exemples, classiques, de résolution de certains problèmes aux limites rencontrés en physique dans différents domaines : diffusion de la chaleur, filtres, lignes de transmissions électriques, vibrations des poutres, équations

de Maxwell, ... Diverses classes d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles sont envisagées avec calcul des solutions souvent au moyen de la formule d'inversion et l'utilisation de contours fermés du champ complexe convenables.

Les deux autres chapitres 3 et 7 sont des chapitres d'exercices portant soit sur les chapitres 1 et 2, soit sur les chapitres 4, 5 et 6. Ces exercices, d'un nombre avoisinant la centaine, peuvent être, des prolongements théoriques des chapitres 1 et 4, des calculs d'images de Laplace ou des résolutions d'équations fonctionnelles déjà vus dans les chapitres d'exemples, mais proposés avec des méthodes différentes, ou bien des thèmes non abordés dans les chapitres précédents et contenant des démarches analogues à des procédés décrits à d'autres propos.

Ces exercices sont affectés des symboles (\star) , (\star, \star) ou (\star, \star, \star) . La première catégorie est celle des exercices simples, applications directes de la théorie ou prolongements d'exemples déjà donnés ; ils font intervenir des calculs simples et des concepts d'analyse classique connus. Dans la deuxième catégorie, les calculs proposés sont plus complexes, les notions théoriques utilisées demandant davantage de réflexion. La troisième catégorie correspond aux exercices difficiles, soit par les concepts requis, soit par la complexité des calculs eux-mêmes.

Ce livre ne contient pas de liste importante de transformées de Laplace ; seuls, quelques tableaux concernant des classes de fonctions usuelles y sont disposés. De plus, les résultats encadrés dans les deux chapitres d'exemples fournissent un grand nombre d'images. Il n'en est pas moins vrai que ces résultats ainsi mis en évidence sont insuffisants. On renvoie à la consultation d'ouvrages et de tables spécialisés précisés dans la bibliographie. Celle-ci est loin d'être exhaustive. Les références, à l'intérieur de l'ouvrage sont indiquées à l'aide d'un double crochet : $[[\]]$.

A quels étudiants cet ouvrage peut-il être utile ?

Tout d'abord, il est utilisable par la plupart des étudiants engagés dans une maîtrise scientifique. Outre la transformation en elle-même, qui constitue un des exemples les plus fructueux, après la transformation de Fourier, de correspondance entre fonctions ou entre distributions et fonctions, le livre fournit, pour le calcul des images, un grand nombre d'occasions de manipuler les procédés de l'analyse classique des fonctions et des distributions.

La construction de la transformation, la mise en place d'une formule intégrale d'inversion, l'étude des comportements au voisinage de l'infini, l'utilisation de la théorie des fonctions analytiques et notamment les prolongements analytiques et le théorème des résidus, sans oublier les applications à la résolution des équations fonctionnelles, sont beaucoup de notions qui peuvent présenter de l'intérêt pour les étudiants en Mathématiques. Aux étudiants des maîtrises de Physique ou de Physique appliquée, notamment celles qui sont tournées vers le traitement du signal ou vers l'automatisme, l'ouvrage apporte, outre les justifications théoriques indispensables, de nombreuses méthodes de calcul, des manipulations nombreuses des fonctions spéciales et des exemples, dans des domaines variés de la Physique, de problèmes de physique régis par des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles et par des conditions limites interprétables en termes concrets.

Table des matières

Chapitre 1	Transformation des fonctions	7
1.1	Définitions, régions de convergence	7
1.2	Calcul des abscisses de convergence	10
1.3	Transformation de Laplace d'une fonction	11
1.4	Régions de convergence uniforme	13
1.5	Holomorphie des transformées de Laplace	15
1.6	Propriétés de la transformation de Laplace	19
1.7	Convolution et Transformation de Laplace	22
1.8	Comportements asymptotiques d'originaux et d'images	24
1.9	Transformée de Laplace d'une somme de série entière	32
1.10	Inversion de la transformation de Laplace	33
Chapitre 2	Calcul d'images et Applications	53
2.1	Détermination de transformées de Laplace de fonctions	53
2.2	Utilisation des formules d'inversion	72
2.3	Applications à la résolution d'équations fonctionnelles	96
Chapitre 3	Exercices sur les chapitres 1 et 2	115
Chapitre 4	Transformation de Laplace des distributions	135
4.1	Définitions, régions d'existence	135
4.2	Transformée de Laplace d'une distribution	139
4.3	Propriété d'holomorphie d'une transformée de Laplace	142
4.4	Propriétés de la transformation de Laplace	144
4.5	Convolution et transformation de Laplace	147
4.6	Comportement à l'infini d'une transformée de Laplace	151
4.7	Inversion de la transformation des distributions	152
4.8	Distributions parties finies	157
4.9	Transformée de Laplace d'une partie finie causale	175
4.10	Propriétés des images de Laplace des parties finies	179
Chapitre 5	Calculs d'images de distributions	193
5.1	Transformées de demi-peignes	193
5.2	Transformées des parties finies de type puissances	199
5.3	Images de parties finies associées aux fonctions de Bessel	203
5.4	Calculs d'images par divers procédés	207
5.5	Applications à la convolution	221
5.6	Applications aux résolutions d'équations fonctionnelles	224
Chapitre 6	Problèmes aux limites de la physique	239
6.1	Problèmes régis par des équations différentielles	239
6.2	Equations aux dérivées partielles de la physique	251
Chapitre 7	Exercices des chapitres 4, 5 et 6	273
	Annexes	283
	Bibliographie	288

Chapitre 1

Transformation de Laplace des fonctions

1.1 Définitions, régions de convergence

1.1.1 Fonctions causales localement sommables

Définition 1.1 Une fonction causale f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , presque partout définie et mesurable sur \mathbb{R} et telle que :

$$\forall t \in]-\infty, 0[, f(t) = 0$$

Dans le cas où f est seulement définie sur \mathbb{R}_+ , on peut la considérer comme causale en la prolongeant par 0 sur \mathbb{R}_- . L'ensemble des fonctions causales qui sont localement Lebesgue-sommables sur \mathbb{R} (ou sur \mathbb{R}_+) est un espace vectoriel que l'on note \mathcal{L}_+ .

1.1.2 Abscisse de convergence absolue de Laplace

On s'intéresse à l'existence au sens de Lebesgue, lorsque s est un nombre complexe, de l'intégrale, dite «**intégrale de Laplace de f** » qui s'écrit :

$$I(f, s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.1)$$

ou à sa convergence en tant qu'intégrale impropre, convergence que l'on appellera aussi semi-convergence. Dans un premier temps, on suppose $s = x$ réel. On va établir :

Proposition 1.1 Pour toute fonction f de \mathcal{L}_+ , il existe un unique élément de $\overline{\mathbb{R}}$, noté $\zeta_a(f)$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x < \zeta_a(f) \Rightarrow I(|f|, x) = +\infty, \quad x > \zeta_a(f) \Rightarrow I(|f|, x) < +\infty$$

Définition 1.2 Le nombre $\zeta_a(f)$ défini par la proposition précédente est appelé : «**l'abscisse de convergence absolue de Laplace de f** »

On commence par énoncer le :

Lemme 1.1 *Si x_0 est un réel tel que $I(|f|, x_0)$ soit convergente, alors :*

$$x > x_0 \Rightarrow I(|f|, x) < \infty$$

Démonstration du lemme

◇ C'est évident d'après le théorème de convergence dominée puisque $x > x_0$ implique l'inégalité : $|f(t)| \exp(-xt) \leq |f(t)| \exp(-x_0 t)$, lorsque $f(t)$ est défini, donc pour presque tout t tel que $t \geq 0$. ◇

Démonstration de la proposition

◇ On pose : $\Theta(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid I(|f|, x) < +\infty\}$. On peut distinguer trois cas qui s'excluent mutuellement :

- Cas 1 : $\Theta(f) = \emptyset$
- Cas 2 : $\Theta(f) = \mathbb{R}$
- Cas 3 : C'est le cas où, $\Theta(f)$ n'étant ni vide ni égal à \mathbb{R} , le lemme 1.1 implique que la borne inférieure $\zeta_a(f)$ de $\Theta(f)$ est un nombre réel.

Alors, soit $x > \zeta_a(f)$, il existe un réel x_0 inférieur à x et appartenant à $\Theta(f)$. Le lemme 1.1 affirme alors que $x \in \Theta(f)$. Cela démontre la proposition. ◇

Remarque 1.1 *Cette proposition ne dit pas ce qui se passe pour $x = \zeta_a(f)$. La conclusion varie avec la fonction f (Cf. Section 2.1).*

1.1.3 Abscisse de convergence (ou de semi-convergence)

Proposition 1.2 *Pour toute fonction de \mathcal{L}_+ , il existe un unique élément de $\overline{\mathbb{R}}$, noté $\zeta_c(f)$ tel que :*

$$x < \zeta_c(f) \Rightarrow I(f, x) \text{ est divergente,} \quad x > \zeta_c(f) \Rightarrow I(f, x) \text{ est convergente}$$

Ce nombre est appelé : «l'abscisse de convergence de Laplace de f ».

La démonstration est la même que la précédente si l'on prouve le lemme 1.2 analogue au lemme 1.1, à savoir :

Lemme 1.2 *Si x_0 est un réel tel que $I(f, x_0)$ soit convergente, alors :*

$$x > x_0 \Rightarrow I(f, x) \text{ est convergente}$$

Démonstration de ce lemme.

◇ On se sert de la formule généralisée d'intégration par parties qu'on énonce sous la forme suivante, convenant aux problèmes envisagés dans ce qui suit (Cf. Exercice 3.4) :

Soient une fonction g continûment dérivable sur $[a, b]$ et une fonction h Lebesgue-intégrable sur $[a, b]$. On considère la fonction absolument continue H définie sur cet intervalle par une "intégrale indéfinie" de h : $H(u) = \int_a^u h(t) dt$, par exemple, ce qui implique que la fonction H est presque partout dérivable et de dérivée égale

presque partout à h sur $[a, b]$. Alors, on a l'égalité suivante généralisant l'intégration par parties :

$$\int_a^b g'(u)H(u) du = g(b)H(b) - g(a)H(a) - \int_a^b g(u)h(u) du \quad (1.2)$$

Sur $[0, A]$, avec $g(u) = e^{-(x-x_0)u}$, $h(t) = f(t)e^{-x_0t}$, $H(u) = \int_0^u h(t) dt$, cette formule nous donne :

$$\begin{aligned} - \int_0^A (x - x_0) \exp[-(x - x_0)u]H(u)du &= \\ \exp[-(x - x_0)A]H(A) - \int_0^A \exp[-(x - x_0)u]f(u) \exp(-x_0u)du &= \\ \exp[-(x - x_0)A]H(A) - \int_0^A f(u) \exp(-xu)du & \quad (1.3) \end{aligned}$$

On fait tendre A vers $+\infty$. L'hypothèse de convergence de $I(f, x_0)$ implique que H est bornée et, puisque $x > x_0$, le produit $\exp[-(x - x_0)A]H(A)$ tend vers 0. Par ailleurs, l'intégrale du premier membre de cette égalité (1.3) porte sur une fonction majorée en valeur absolue par la fonction sommable sur \mathbb{R}_+ : $u \mapsto (x - x_0) \exp[-(x - x_0)u] \sup |H(u)|$.

Par le théorème de convergence dominée, cette intégrale sur $[0, A]$ admet donc une limite finie lorsque A vers $+\infty$.

Concluons que la dernière intégrale de l'égalité (1.3) admet une limite finie, ce qui achève de démontrer le lemme 1.2. \diamond

Comme il a été dit ci-dessus, cela établit l'existence et la caractérisation de l'abs-cisse $\zeta_c(f)$.

Remarque 1.2 *Il est clair que $\zeta_c(f) \leq \zeta_a(f)$, mais l'inégalité peut être stricte comme on le voit en considérant l'intégrale $\int_1^{+\infty} \sin u/u^x du$.*

On voit, en effet que cette intégrale converge absolument si et seulement si $x > 1$ alors qu'elle est semi-convergente (Cf. Exercice 3.2) si et seulement si $x > 0$. Or, cette intégrale est identique à $\int_0^{+\infty} \sin(\exp t) \exp(-xt + t) dt$.

On exhibe ainsi un exemple de fonction : $t \mapsto \sin(\exp t) \exp t$, où $\zeta_c(f) = 0$ alors que $\zeta_a(f) = 1$. D'autres exemples sont donnés dans les exercices 3.2 et 3.3 (voir aussi la remarque 1.3).

Corollaire 1.1 *Si $I(f, x_0)$ est convergente et si $x_0 \geq 0$, alors il existe une constante C telle que :*

$$\forall t \geq 0, \quad \left| \int_0^t f(u) du \right| \leq C \exp(x_0t)$$

Démonstration

◇ Le résultat est trivial pour $x_0 = 0$. Dans le cas où $x_0 > 0$, l'égalité (1.3) précédente, dans laquelle on prend $x = 0$ et $A = t$, nous fournit :

$$\int_0^t f(u) du = -x_0 \int_0^t H(u) \exp(x_0 u) du + \exp(x_0 t) H(t)$$

Par l'hypothèse de convergence de $I(f, x_0)$, la fonction $|H|$ est majorée par une constante K . On peut donc majorer le second membre de la formule précédente par :

$$K \int_0^t x_0 \exp(x_0 u) du + K \exp(x_0 t)$$

Cette majorante est égale à $K[2 \exp(x_0 t) - 1]$, ce qui termine la preuve. ◇

Il faut noter l'importance de l'hypothèse $x_0 \geq 0$.

En effet, si on considère la fonction f telle que $f(t) = \exp(-2t)$, dont l'abscisse de convergence est -2 , on peut choisir dans ce qui précède $x_0 = -1$ et le corollaire amènerait à écrire l'inégalité : $\int_0^t \exp(-2u) du \leq C \exp(-t)$, ce qui s'écrit encore : $1 - \exp(-2t) \leq 2C \exp(-t)$, conduisant ainsi à une contradiction quand on fait tendre t vers $+\infty$.

1.2 Calcul des abscisses de convergence**1.2.1 Premiers exemples**

On désigne par \mathcal{U} la fonction échelon-unité, c'est-à-dire la fonction qui est définie par : $\mathcal{U}(t) = 0$ si $t < 0$ et par : $\mathcal{U}(t) = 1$ si $t > 0$.

On vérifie facilement les résultats suivants :

$$\zeta(t \mapsto \mathcal{U}(t) \exp t^2) = +\infty, \quad \zeta(t \mapsto \mathcal{U}(t) \exp -t^2) = -\infty$$

$$\text{Si } \alpha > -1 \quad \zeta(t \mapsto \mathcal{U}(t) t^\alpha) = 0$$

$$\zeta(t \mapsto \mathcal{U}(t) \exp(a + i\omega)t) = a$$

D'autres exemples sont traités au cours du développement du chapitre 2.

1.2.2 Formules générales

Proposition 1.3 *Soit f une fonction de \mathcal{L}_+ . Alors les abscisses de convergence de f , éventuellement égales à $+\infty$, vérifient les inégalités respectives :*

$$\zeta_c(f) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{t} \ln \left| \int_0^t f(u) du \right| \right], \quad \zeta_a(f) \leq \limsup_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{t} \ln \left| \int_0^t |f(u)| du \right| \right] \quad (1.4)$$

Chacune de ces inégalités est remplacée par l'égalité correspondante lorsque la limite supérieure du second membre est strictement positive.

Démonstration

◇ Il suffit de démontrer la première formule, puisque l'autre s'obtient en remplaçant f par $|f|$. L'inégalité est évidente lorsque la limite supérieure est égale à $+\infty$. Supposons que la \limsup soit un réel α .

Soient $a > \alpha$ et $\varepsilon > 0$ tels que : $\alpha + \varepsilon < a$. Par définition de \limsup , il existe A tel que : $\sup_{t \geq A} \frac{1}{t} \ln \left| \int_0^t f(u) du \right| < \alpha + \varepsilon$ d'où la propriété :

$$t \geq A \Rightarrow \left| \int_0^t f(u) du \right| \leq \exp(\alpha + \varepsilon)t$$

Utilisons alors la formule (1.3) précédente avec $x_0 = 0$ et $x = a$. On a, sur l'intervalle $[0, A']$, avec $A' > A$:

$$\int_0^{A'} f(u) \exp(-au) du = \int_0^{A'} a \exp(-au) h(u) du - \exp(-aA') H(A')$$

Le dernier terme est inférieur à $\exp[(-aA') + (\alpha + \varepsilon)A']$, donc tend vers 0 puisque $\alpha + \varepsilon < a$.

De même, l'intégrale du second membre a une limite finie puisqu'au voisinage de $+\infty$, l'intégrand est majoré par $a \exp[(\alpha + \varepsilon - a)u]$.

On en déduit la convergence de $I(f, a)$ et, par conséquent, $\zeta_c(f) \leq \alpha$.

Pour montrer l'inégalité inverse dans le cas où $\alpha > 0$, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe $b < \alpha$ avec $b > 0$ tel que $I(f, b)$ soit convergente, alors le corollaire 1.1, qui s'applique puisque $b > 0$, implique l'existence d'une constante C strictement positive telle que : $\left| \int_0^t f(u) du \right| \leq C \exp(bt)$.

En prenant le logarithme et en divisant par t , on obtient $(\ln C + bt)/t$ dont la limite, lorsque t tend vers $+\infty$, est égale à b inférieure strictement à α , amenant ainsi une contradiction (Cf. Exercice 3.5, pour l'inégalité stricte dans le cas d'une limite supérieure strictement négative). La proposition 1.3 est donc démontrée. ◇

1.3 Transformation de Laplace

1.3.1 Introduction de la variable complexe

Dans les propositions qui précèdent, la variable x était réelle. En fait, les résultats obtenus peuvent s'exprimer à l'aide de la variable complexe s .

Proposition 1.4 *Si le nombre complexe s vérifie $x = \Re(s) > \zeta_a(f)$, (resp. $x = \Re(s) > \zeta_c(f)$), alors l'intégrale $I(f, s)$ est convergente (resp. est semi-convergente).*

Démonstration

◇ Dans le cas de l'absolue convergence, la propriété est évidente en vertu de l'égalité $|f(t)| \exp[-(x + iy)t] = |f(t)| \exp(-xt)$.

Dans le cas de la convergence, on utilise encore l'égalité (1.3) :

Supposons $x = \Re(s) > \zeta_c(f)$. Soit alors un réel x_0 qui vérifie $\zeta_c(f) < x_0 < x$. On utilise (1.3) avec $g(u) = \exp[-(s - x_0)u]$ et $h(u) = \exp(-x_0u)f(u)$. On obtient

ainsi :

$$\int_0^A \exp(-su) f(u) du = \int_0^A g(u) h(u) du = g(A)H(A) - \int_0^A g'(u)H(u) du$$

ou encore :

$$\int_0^A \exp(-su) f(u) du = e^{-(s-x_0)A} H(A) + (s-x_0) \int_0^A H(u) e^{-(s-x_0)u} du$$

Par hypothèse, $|H|$ est majorée et, comme la partie réelle de $-(s-x_0)$ est strictement négative, le second membre de l'égalité précédente admet une limite finie (type de raisonnement déjà utilisé). Cela termine la démonstration. \diamond

1.3.2 Définitions

On définit et on note \mathcal{L}_d le sous espace de \mathcal{L}_+ contenant toutes les fonctions f telles que $\zeta_c(f) < +\infty$.

Définition 1.3 Soit f un élément de \mathcal{L}_d . Soit la fonction, notée $\mathcal{L}(f)$, définie dans le demi-plan ouvert $\Pi_{\zeta_c(f)} = \{s \in \mathbb{C}, \Re(s) > \zeta_c(f)\}$ (noté plus simplement $\Pi_c(f)$) au moyen de la formule :

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-st) dt$$

Cette fonction est appelée la transformée de Laplace de f . L'application qui associe à f sa transformée $\mathcal{L}(f)$ est dite "transformation de Laplace".

La fonction f qui joue le rôle d'antécédent est classiquement appelé "un original", la transformée de Laplace s'appelle aussi "image de Laplace" et la correspondance $f \xrightarrow{\mathcal{L}} F$ entre l'original f et l'image F est quelquefois désignée, malgré l'abus de langage, par le symbolisme : $f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s)$. On trouvera, dans les exemples et les exercices du chapitre 2, des calculs explicites de transformées de Laplace.

Remarque 1.3 Si f est un élément de \mathcal{L}_d , son abscisse de convergence absolue n'est pas nécessairement finie.

En utilisant, en effet, une fonction du même type que dans la remarque 1.2, on remarque que l'intégrale :

$$\int_e^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha (\ln x)^\beta} dx, \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1 \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \text{ quelconque}$$

est toujours convergente mais n'est jamais absolument convergente. On en déduit que la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = e^t \sin(\exp(e^t)) (\exp(e^t))^{1-\alpha}$ admet, pour ces valeurs de α , des abscisses vérifiant, d'une part, $\zeta_c(f) = -\infty$ et, d'autre part, $\zeta_a(f) = +\infty$.

1.4 Régions de convergence uniforme

1.4.1 Régions de convergence absolue et uniforme

Comme dans l'étude des séries entières dont la convergence se trouve réglée avec la notion de disque ouvert de convergence et dont les régions d'uniforme convergence sont les disques fermés inclus dans ce disque, on va prouver que l'intégrale $I(|f|, s)$ converge uniformément dans les demi-plans fermés inclus dans le demi-plan ouvert :

$$\Pi_a(f) = \{s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \zeta_a(f)\}.$$

Proposition 1.5 *L'intégrale $I(|f|, s)$ converge uniformément dans tout demi-plan fermé $\overline{\Pi}_b$ où b est un réel quelconque vérifiant $b > \zeta_a(f)$.*

Démonstration

◇ La preuve en est évidente grâce à la propriété suivante :

$$\forall x \geq b \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |f(t) \exp[-(x + iy)t]| \leq |f(t)| \exp[-bt]$$

En effet, $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe par hypothèse A tel que :

$$\forall B > A, \quad \int_B^{+\infty} |f(t)| \exp(-bt) dt < \varepsilon$$

On en déduit alors :

$$\forall B > A, \forall x \geq b, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \left| \int_B^{+\infty} f(t) \exp(-(x + iy)t) dt \right| < \varepsilon.$$

C'est l'expression de la convergence uniforme annoncée. ◇

1.4.2 Régions de "semi"-convergence uniforme

On désigne par $\text{sect}(s_0, \theta)$ le secteur fermé du plan de sommet s_0 , d'axe parallèle à l'axe des réels positifs et de demi-angle au sommet θ supposé vérifier : $\theta < \pi/2$.

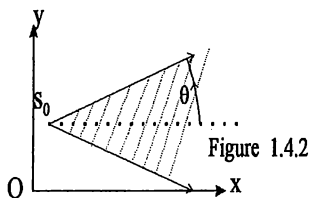


Figure 1.4.2

Proposition 1.6 *L'intégrale $I(f, s)$ converge uniformément dans tout secteur $\text{sect}(s_0, \theta)$ de sommet s_0 vérifiant $\Re(s_0) > \zeta_c(f)$.*

Démonstration

◇ On se sert encore de l'intégration par parties (formule (1.2)), mais cette fois dans le but de majorer un reste d'intégrale. Aussi, l'intervalle $[0, A]$ sera remplacé

par un intervalle $[B, A]$ où on fera tendre A vers $+\infty$.

Pour cela, on prend pour cette formule :

$$h(u) = f(u) \exp[-s_0 u], \quad H(t) = \int_B^t h(u) du, \quad \text{et} \quad g(u) = \exp[-(s - s_0)u]$$

On obtient ainsi :

$$\int_B^A f(t) \exp[-st] dt = \int_B^A h(t)g(t) dt = H(A)g(A) + (s - s_0) \int_B^A H(u)g(u) du$$

On fixe $B > 0$ et on fait l'hypothèse que $\Re(s_0) > \zeta_c(f)$. Alors l'intégrale sur $[B, +\infty[$ de $f(t) \exp(-s_0 t)$ est convergente et il en résulte qu'il existe M tel que :

$$\forall A > B, \quad \left| \int_B^A f(t) \exp(-s_0 t) dt \right| \leq M$$

Supposons $\Re(s) > \Re(s_0)$. Comme $g(A)$ tend vers 0, il en est de même de $H(A)g(A)$ et l'intégrale $\int_B^{+\infty} H(u)g(u) du$ est absolument convergente. On peut donc passer à la limite dans l'égalité précédente, ce qui donne, pour tout B :

$$\int_B^{+\infty} f(t) \exp[-st] dt = (s - s_0) \int_B^{+\infty} H(u)g(u) du$$

En outre, en passant aux modules, on a aussi :

$$\left| \int_B^{+\infty} f(t) \exp[-st] dt \right| \leq M |s - s_0| \int_B^{+\infty} |g(u)| du$$

En calculant la dernière intégrale, on obtient la majoration :

$$\left| \int_B^{+\infty} f(t) \exp[-st] dt \right| \leq M \frac{|s - s_0|}{x - x_0} \exp[-(x - x_0)B]$$

Or, $|s - s_0|/(x - x_0) = [\cos(\arg(s - s_0))]^{-1}$. Donc, si s est dans le secteur $\text{sect}(s_0, \theta)$, on peut majorer $|s - s_0|/(x - x_0)$ uniformément par $(\cos \theta)^{-1}$.

Finalement, étant donné $\varepsilon > 0$, l'hypothèse de convergence au point s_0 implique qu'il existe B_0 tel que :

$$B > B_0 \Rightarrow \left| \int_B^A f(u) \exp[-s_0 u] du \right| < \varepsilon \cos \theta$$

Ainsi :

$$B > B_0 \Rightarrow \left| \int_B^{+\infty} f(t) \exp[-st] dt \right| < \varepsilon$$

Comme cette inégalité est vérifiée indépendamment de s dans le secteur $\text{sect}(s_0, \theta)$, la preuve est obtenue. \diamond

(Pour des compléments sur ces régions d'uniforme convergence, le lecteur peut consulter [[28]].)

1.5 Holomorphie des transformées de Laplace

1.5.1 Abscisses de convergence de $t \mapsto tf(t)$

Proposition 1.7 Soit f un élément de \mathcal{L}_d . Alors, la fonction $f_{|1}$ définie par : $t \mapsto f_{|1} = -tf(t)$ appartient aussi à cet espace et, de façon plus précise, les abscisses de convergence de cette fonction sont égales à celles de f .

Démonstration

◇ Soit un réel x tel que $x > \zeta_c(f)$. En désignant par x_0 un réel vérifiant l'inégalité : $\zeta_c(f) < x_0 < x$ et par H la fonction absolument continue définie par : $H(t) = \int_0^t f(u) \exp(-x_0 u) du$, la formule d'intégration par parties fournit :

$$\begin{aligned} \int_0^A tf(t) \exp(-xt) dt &= \int_0^A t \exp[-(x-x_0)t] dH(t) = \\ &= A \exp[-(x-x_0)A] H(A) - \int_0^A [1 - (x-x_0)t] \exp(-(x-x_0)t) H(t) dt \end{aligned}$$

Puisque $-(x-x_0) < 0$, il en résulte que :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} A \exp[-(x-x_0)A] = 0 \quad \text{et} \quad t \mapsto [1 - (x-x_0)t] e^{-(x-x_0)t} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+)$$

Ajoutons que, par hypothèse, H est bornée. Il en résulte, lorsque $A \rightarrow +\infty$, que le premier terme du second membre tend vers 0 et que le deuxième terme tend vers une limite finie.

Le premier membre admet donc une limite dans \mathbb{C} , d'où : $\zeta_c(tf) \leq \zeta_c(f)$. Pour démontrer l'inégalité inverse, on pose : $H(t) = \int_1^t u f(u) e^{-xu} du$ en supposant $x > \zeta_c(tf)$. Cette fonction H est donc bornée. L'intégration par parties sur l'intervalle $[1, A]$ nous donne :

$$\int_1^A f(t) \exp(-xt) dt = \int_1^A t^{-1} dH(t) = A^{-1} H(A) + \int_1^A t^{-2} H(t) dt$$

Lorsque A tend vers $+\infty$, le premier terme du second membre tend vers 0 et le deuxième, portant sur une fonction du type $O(t^{-2})$ au voisinage de $+\infty$, admet une limite dans \mathbb{C} . On en déduit que $x > \zeta_c(f)$. Par conséquent, $\zeta_c(f) \leq \zeta_c(f_{|1})$. La proposition est donc démontrée. ◇

1.5.2 Etude de l'holomorphie d'une transformée de Laplace

Théorème 1.1 Soit f une fonction de \mathcal{L}_d , alors sa transformée de Laplace $F = \mathcal{L}(f)$ est une fonction holomorphe de la variable s dans le demi-plan ouvert $\Pi_c(f)$, c'est-à-dire lorsque $\Re(s) > \zeta_c(f)$. De plus, la dérivée complexe, au point s_0 , de la transformée de Laplace de f est obtenue par dérivation sous le signe intégral par rapport à s . Autrement dit, on a :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \zeta_c(f) \Rightarrow \frac{dF}{ds}(s) = \mathcal{L}(f_{|1})(s) \quad (1.5)$$

Démonstration

La preuve de ce théorème est plus simple si on se place au dessus de l'abscisse de convergence absolue (Cf. exercice 3.17). On utilise alors le théorème d'holomorphicité des intégrales dépendant d'un paramètre complexe.

◇ Ce théorème est, en fait, la traduction, pour une intégrale, d'un théorème de Weierstrass sur l'holomorphicité de la limite d'une suite uniformément convergente de fonctions holomorphes.

Avec l'hypothèse donnée, cette preuve repose sur la convergence uniforme de $I(f, s)$ dans les domaines $\text{sect}(s, \theta)$, propriété qui implique la convergence uniforme dans tout disque fermé de centre s_0 vérifiant $\Re(s_0) > \zeta_c(f)$ et de rayon r vérifiant $r < \Re(s_0) - \zeta_c(f)$. Un tel disque est noté \mathbf{D} et sa frontière, parcourue dans le sens direct, s'identifie à un chemin noté γ . La fonction $F = \mathcal{L}(f)$ est la limite de la suite de fonctions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $F_n(s) = \int_0^n f(t) \exp(-st) dt$ et, d'après la proposition 1.6 et ce qui vient d'être dit, cette convergence est uniforme sur \mathbf{D} .

On montre d'abord que les fonctions (F_n) sont holomorphes dans $\overset{\circ}{\mathbf{D}}$.

Il suffit, pour cela, d'utiliser les variables x et y et les théorèmes concernant les intégrales, dépendant de paramètres réels, prises sur des intervalles compacts. Presque partout en t sur le compact $[0, n]$, la fonction $(x, y) \mapsto f(t) \exp(-(x+iy)t)$ est de classe \mathcal{C}^∞ dans $\overset{\circ}{\mathbf{D}}$. On sait donc qu'on peut dériver sous le signe intégral. La fonction $(x, y) \mapsto \exp(-(x+iy)t)$ vérifie les conditions de Cauchy et comme les dérivations figurant dans ces conditions permutent avec l'intégrale, on obtient ces conditions de Cauchy pour (F_n) . On en déduit l'holomorphicité du terme général de la suite.

La formule de Cauchy nous donne alors

$$\forall s \in \overset{\circ}{\mathbf{D}}, \quad F_n(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{F_n(z)}{z-s} dz$$

ou encore, par paramétrage du cercle γ :

$$F_n(s) = \frac{ir}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_n(s_0 + r \exp(i\theta)) \exp(i\theta)}{s_0 - s + r \exp(i\theta)} d\theta$$

Pour le dénominateur, on a l'inégalité : $|s_0 - s + r \exp(i\theta)| \geq r - |s - s_0|$. Par ailleurs, la convergence uniforme sur le cercle γ de F_n vers F implique qu'il existe un entier N tel que :

$$\forall n > N, \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad |F_n(s_0 + r \exp(i\theta)) - F(s_0 + r \exp(i\theta))| \leq (r - |s - s_0|)\varepsilon$$

On en déduit la convergence uniforme sur $[0, 2\pi]$ de la suite des intégrands précédents considérés comme des fonctions de θ . Il en résulte donc, par passage à la limite, lorsque $s \in \overset{\circ}{\mathbf{D}}$:

$$F(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(s)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{ir}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F_n(s_0 + r \exp(i\theta)) \exp(i\theta)}{s_0 - s + r \exp(i\theta)} d\theta \\
 &= \frac{ir}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(s_0 + r \exp(i\theta)) \exp(i\theta)}{s_0 - s + r \exp(i\theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{F(z)}{z - s} dz
 \end{aligned}$$

Cette dernière formule prouve l'holomorphie dans le disque ouvert considéré et, par conséquent dans tout le demi-plan ouvert $\Pi_c(f)$. De plus, la dérivée complexe de F_n étant obtenue par dérivation sous le signe intégral, on a :

$$\frac{dF_n}{ds}(s) = \int_0^n (-tf(t)) \exp(-st) dt = 1/2i\pi \int_\gamma \frac{F_n(z)}{(z - s)^2} dz$$

Le raisonnement de convergence uniforme ci-dessus peut-être repris. D'une part, la dernière intégrale converge vers $\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{F(z)}{(z - s)^2} dz$, d'autre part, la suite des dérivées $\frac{dF_n}{ds}$ converge vers $\mathcal{L}(f_{|1})$.

L'égalité obtenue $\mathcal{L}(f_{|1})(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{F(z)}{(z - s)^2} dz$ exprime finalement que cette transformée de $t \mapsto f_{|1}(t) = -tf(t)$ est bien la dérivée complexe de $\mathcal{L}(f)$. \diamond

On sait qu'une fonction, holomorphe dans un ouvert de \mathbb{C} , est analytique dans cet ouvert, en particulier, indéfiniment \mathbb{C} -dérivable. Comme la dérivée d'une transformée de Laplace en est encore une, on peut itérer, sans aucune hypothèse supplémentaire, le théorème précédent, d'où la conséquence suivante :

Corollaire 1.2 *Soit f , élément de \mathcal{L}_d , alors la transformée de Laplace de f est analytique dans le demi-plan ouvert $\Pi_c(f)$ et, en désignant par f_n la fonction $t \mapsto (-t)^n f(t)$, les dérivées successives de $F = \mathcal{L}(f)$ sont données par les formules :*

$$\Re(s) > \zeta_c(f) \Rightarrow F^{(n)}(s) = \int_0^{+\infty} (-t)^n f(t) \exp(-st) dt = \mathcal{L}(f_n)(s) \quad (1.6)$$

1.5.3 Utilisation de divers prolongements analytiques

a) Prolongement analytique dans le demi-plan ouvert de convergence.

Supposons que le calcul de la transformée $F = \mathcal{L}(f)$ soit effectué pour les valeurs réelles de s supérieures strictement à l'abscisse de convergence de f ou encore pour des valeurs s_n constituant une suite réelle convergente vers un nombre réel supérieur strictement à cette abscisse. Supposons aussi que l'on connaisse une fonction holomorphe F^* dans le demi-plan $\Pi_c(f)$ dont la restriction à la demi-droite $] \zeta_c(f), +\infty[$ ou à l'ensemble des points s_n coïncide avec F . Alors, d'après

la propriété précédente, le demi-plan étant un ouvert connexe, on peut conclure à l'égalité $\mathcal{L}(f)(s) = F^*(s)$ quel que soit $s \in \Pi_c(f)$.

Exemple 1.1

Il est facile de calculer $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)t^\alpha)(s)$, lorsque $\alpha > -1$, pour les valeurs réelles de s . La fonction trouvée est, à un facteur près, la fonction $x \mapsto x^{-(\alpha+1)}$. Dans le champ complexe privé d'une coupure qui n'a pas de points communs avec Π_0 , cette fonction se prolonge en la fonction holomorphe $s \mapsto \exp((-\alpha-1)(\ln|s|+i\theta))$ où θ est l'argument de s compris, dans le cas présent, dans $]-\pi/2, \pi/2[$ lorsque $s \in \Pi_0$. Notons cette fonction à l'aide d'un crochet : $\left[s^{-(\alpha+1)} \right]$. D'après ce qui vient d'être affirmé, on a alors :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}(t)t^\alpha)(s) = \Gamma(\alpha+1) \left[s^{-(\alpha+1)} \right]$$

D'autres situations utilisent ce prolongement analytique.

Par exemple, lorsque l'image de Laplace cherchée est solution d'une équation différentielle. Celle-ci étant résolue lorsque la variable est réelle, on sait que le prolongement sera toujours solution de cette équation. Ce prolongement fournira la transformée cherchée dans le domaine complexe. Une autre situation peut être envisagée :

b) Prolongement analytique relativement à un paramètre

Supposons que la fonction, notée alors $f(t, \lambda)$, dépende d'un paramètre complexe λ appartenant à un ouvert Ω de \mathbb{C} et qu'elle soit analytique dans cet ouvert par rapport à λ . Dans cette situation, on peut énoncer la proposition suivante :

Proposition 1.8 *Soit une famille $f(t, \lambda)$, paramétrée en la variable λ , de fonctions causales de la variable t où le paramètre λ appartient à un ouvert Ω de \mathbb{C} . On suppose :*

1) *Il existe un réel c tel que $\zeta_a(f) \leq c$ quel que soit λ dans Ω .*

2) *Pour presque tout $t > 0$ fixé, la fonction : $\lambda \mapsto f(t, \lambda)$ est holomorphe dans Ω . Pour tout compact K inclus dans Ω , il existe une fonction causale $t \mapsto h(t)$ admettant une abscisse de convergence vérifiant $\zeta_a(h) \leq c$ telle que, pour presque tout $t \geq 0$ et pour tout $\lambda \in K$, on a : $\left| \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) \right| \leq h(t)$.*

Alors, l'image de Laplace $F(x, \lambda)$ de $f(t, \lambda)$ est holomorphe en λ dans Ω et la dérivée de cette fonction holomorphe est la transformée de Laplace de $\frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda)$.

Preuve

◇ C'est une application immédiate du théorème d'holomorphie des intégrales dépendant d'un paramètre.

On considère, en effet, pour tout $s \in \Pi_c$ fixé, la fonction $f(t, \lambda) \exp(-ts)$. L'intégrale de cette fonction de la variable t existe pour tout $\lambda \in \Omega$. De plus lorsque $\lambda \in K$, on a : $\left| \frac{\partial}{\partial \lambda} f(t, \lambda) \exp(-st\Re(s)) \right| \leq h(t) \exp(-t\Re(s))$ et, puisque $\zeta_a(h) \leq c$, cette dernière fonction est sommable. On en déduit ainsi la convergence uniforme locale de l'intégrale portant sur la dérivée. Par conséquent, le

théorème d'holomorphie des intégrales s'applique et donne le résultat. \diamond

Ainsi, dans l'exemple précédent, on peut prendre α complexe avec $\Re(\alpha) > -1$, ce qui assure l'existence de l'intégrale de $t \mapsto t^\alpha \exp(-st)$ pour $\Re(s) > 0$. La dérivée partielle par rapport à α de la fonction puissance s'écrit : $t^\alpha \ln t$ et, sur tout compact K du demi-plan Π_{-1} , on a : $|t^\alpha \ln t| \leq \ln t \left[\chi_{[0,1]} + t^A \chi_{]1,+\infty[} \right]$ où $A = \sup_{\alpha \in K} \Re(\alpha)$. Cette fonction majorante est toujours d'abscisse de convergence nulle ; l'analyticité de la transformée par rapport à α est donc démontrée dans l'ouvert $\Omega = \Pi_{-1}$.

La conséquence est la suivante : Comme on sait que les deux fonctions $\Gamma(\alpha + 1)$ et $\left[s^{-(\alpha+1)} \right]$ sont holomorphes dans l'ouvert connexe Π_{-1} , on en déduit, par le principe du prolongement analytique, que le résultat obtenu dans le cas où $\alpha \in \mathbb{R}$ est encore valable lorsque α est dans Π_{-1} .

Ce procédé fait l'objet de nombreuses illustrations dans les exemples traités au chapitre 2.

Remarque 1.4 Dans la proposition précédente, il est suffisant de supposer que la majorante h admet une abscisse finie c_1 indépendante du compact K .

En effet, la proposition donnera alors les images de $f(t, \lambda)$ pour $\Re(s) > c_1$. Soit alors $\lambda \in \Omega$. Comme l'image $F(s, \lambda)$ de $f(t, \lambda)$ existe dans Π_{c_1} , on pourra procéder, à partir d'une formule établie dans Π_{c_1} , à un prolongement relativement à la variable s vers Π_c .

Ces questions exigent ici que les fonctions $f(t, \lambda)$ soient dans \mathcal{L}_d . Elles seront reprises lorsque ces fonctions engendreront des distributions de type parties finies (Cf. § 4.10.7).

1.6 Propriétés de la transformation de Laplace

Outre la linéarité de la transformation qui est évidente, on cherche quels sont les effets, sur les transformées, de quelques opérations simples sur les originaux f .

1.6.1 Translation et dilatation sur un original

Soit f_a la translatée, d'indice a de la fonction f , supposée dans \mathcal{L}_d . Cette fonction est définie par $f_a(t) = f(t - a)$ et, si l'on suppose que $a > 0$, la translatée reste causale. Une translation sur la variable d'intégration amène, si $x > \zeta_c(f)$, la relation :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f_a(t) \exp(-xt) dt &= \int_{-a}^{+\infty} f(t) \exp(-x(t+a)) dt \\ &= \exp(-ax) \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-xt) dt \end{aligned}$$

Il en résulte que $\zeta_c(f_a) = \zeta_c(f)$ et que cette relation, étant valable pour des x complexes, on a :

Proposition 1.9 *La translatée d'indice $a > 0$ d'une fonction de \mathcal{L}_d est encore dans \mathcal{L}_d ; les abscisses de convergence restent les mêmes et on a :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \zeta_c(f) \Rightarrow \mathcal{L}(f_a)(s) = \exp(-as)\mathcal{L}(f)(s)$$

Remarque 1.5 *En inversant le rôle de l'original et de l'image, il est clair que, si $f \in \mathcal{L}_d$, la fonction $t \mapsto g(t) = f(t) \exp(at)$ où a est, cette fois, un réel quelconque, est encore dans \mathcal{L}_d , que son abscisse de convergence vérifie : $\zeta_c(g) = \zeta_c(f) + a$ et que, d'autre part, la transformée $\mathcal{L}(g)$ est la translatée d'indice a de la transformée $\mathcal{L}(f)$.*

Pour la dilatation, rappelons que la dilatée d'indice k réel non nul de la fonction f , notée dans cet ouvrage $f_{[k]}$, est définie par $f_{[k]}(t) = f(kt)$. Si $k > 0$, cette fonction reste causale. Si, en outre, on suppose que $x > k\zeta_c(f)$, on a :

$$\int_0^{+\infty} f_{[k]}(t) \exp(-xt) dt = 1/k \int_0^{+\infty} f(u) \exp(-ux/k) du$$

De cette relation, il en résulte facilement : $\zeta_c(f_{[k]}) = k\zeta_c(f)$ et, en remplaçant, dans la relation précédente, x par un complexe s , on obtient :

Proposition 1.10 *La dilatée d'indice $k > 0$ d'une fonction de \mathcal{L}_d est encore dans \mathcal{L}_d ; les abscisses de convergence vérifient $\zeta_c(f_{[k]}) = k\zeta_c(f)$ et on a :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > k\zeta_c(f) \Rightarrow \mathcal{L}(f_{[k]})(s) = \frac{1}{k} \mathcal{L}(f)\left(\frac{s}{k}\right)$$

Remarque 1.6 *On peut également remplacer t par kt pour k complexe. mais la propriété précédente n'est vérifiée qu'avec certaines restrictions (Cf. Exercice 3.16).*

1.6.2 Transformation d'une dérivée

Notons pour commencer que, si une fonction de \mathcal{L}_d est dérivable, sa dérivée n'est pas nécessairement dans \mathcal{L}_d , pas forcément en raison des abscisses de convergence, mais plutôt à cause de la locale sommabilité.

Il suffit, en effet, de considérer la fonction f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t)t^\alpha$ où $-1 < \alpha < 0$ dont la dérivée $f'(t) = \alpha\mathcal{U}(t)t^{\alpha-1}$ existe partout sauf au point $t = 0$. Cependant, cette dérivée n'est pas sommable au voisinage de 0.

Si, de façon plus générale, f n'admet pas de limite à droite au point $t = 0$ ou bien tend vers l'infini, on constate immédiatement que la dérivée ne peut être sommable au voisinage de $t = 0$. C'est pourquoi on est amené à supposer l'existence de la limite $f(0+)$.

Par ailleurs, il est facile de se rendre compte que la dérivée peut avoir une abscisse de convergence différente de celle de la fonction. Ainsi, la fonction f telle que $f(t) = t$ pour $0 \leq t \leq 1$ et $f(t) = 1$ pour $t > 1$ a une abscisse égale à 0 alors que la dérivée possède une abscisse égale à $-\infty$. Dans ce cas, $\zeta_c(f') < \zeta_c(f)$.

A l'inverse, considérons l'exemple de la remarque 1.2.A.

La dérivée de $t \mapsto (\exp t) \sin(\exp t)$ s'écrit : $(\exp(2t)) \cos(\exp t) + (\exp t) \sin(\exp t)$.

La transformée du premier terme fait intervenir l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{x-1}} du$ qui n'est convergente que pour $x > 1$. On en déduit, pour ce dernier cas, l'inégalité contraire $\zeta_c(f') > \zeta_c(f)$.

Ajoutons encore qu'on peut trouver des fonctions d'abscisses finies dont la dérivée a une abscisse égale à $+\infty$ (Cf.Exercice 3.15).

On suppose à présent, de façon générale, que f est dans \mathcal{L}_d et qu'elle est absolument continue sur tout intervalle compact de $[0, +\infty[$. Il en résulte qu'elle est continue sur $[0, +\infty[$, presque partout dérivable sur cet intervalle et que sa dérivée est une fonction causale. On peut, sur $[0, A]$, utiliser l'intégration par parties :

$$\int_0^A f'(t) \exp(-st) dt = \int_0^A \exp(-st) df(t) = f(A) \exp(-sA) - f(0+) + s \int_0^A f(t) \exp(-st) dt$$

On suppose que $\zeta_c(f') \neq +\infty$ et on note $a = \sup(\zeta_c(f), \zeta_c(f'))$. Alors, si en outre $\Re(s) > a$, les deux intégrales de la relation précédente admettent des limites finies lorsque $A \rightarrow +\infty$. Il en résulte que, par différence, $f(A) \exp(-sA)$ admet également une limite. Puisque l'intégrale de $f(t) \exp(-st)$ est convergente, cette limite est nécessairement nulle. Par conséquent :

Proposition 1.11 *Si la fonction f , élément de \mathcal{L}_d est absolument continue sur tout intervalle compact de $[0, +\infty[$ et si la dérivée est aussi dans \mathcal{L}_d , alors la transformée de la dérivée vérifie :*

$$\boxed{\Re(s) > \sup(\zeta_c(f), \zeta_c(f')) \Rightarrow \mathcal{L}(f')(s) = -f(0+) + s\mathcal{L}(f)(s) \quad (1.7)}$$

Dans le cas où la fonction est deux fois dérivable et, sous réserve de pouvoir transporter les hypothèses précédentes au niveau de cette nouvelle situation, on peut énoncer :

Corollaire 1.3 *Soit f une fonction de \mathcal{L}_d dérivable sur $[0, +\infty[$ à dérivée absolument continue sur cet intervalle et telle que les fonctions f' et f'' soient dans l'espace \mathcal{L}_d . Alors, les limites $f(0+)$ et $f'(0+)$ existent et la relation précédente implique la relation :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \sup(\zeta_c(f), \zeta_c(f'), \zeta_c(f'')) \Rightarrow \mathcal{L}(f'')(s) = s\mathcal{L}(f')(s) - f'(0+)$$

Il en résulte :

$$\boxed{\Re(s) > \sup(\zeta_c(f, f', f'')) \Rightarrow \mathcal{L}(f'')(s) = s^2\mathcal{L}(f)(s) - sf(0+) - f'(0+) \quad (1.8)}$$

Ces formules sont à l'origine du traitement des équations différentielles par la transformation \mathcal{L} (Cf.§ 3 du chapitre 2).

1.6.3 Transformation d'une primitive

Si f est un élément de \mathcal{L}_d , on peut considérer la fonction I_f définie par $I_f(t) = \int_0^t f(u) du$. C'est une fonction absolument continue et, d'après le corollaire 1.1, on sait que pour tout x_0 tel que $x_0 > 0$ et $x_0 > \zeta_c(f)$, on a $|\int_0^t f(u) du| \leq C \exp(x_0 t)$. Cette dernière majoration pouvant s'écrire : $|I_f(t) \exp(-x_0 t)| \leq C$, il en résulte que l'intégrale de Laplace de I_f converge **absolument** en tout point x vérifiant $x > x_0$.

On peut conclure ainsi $\zeta_a(I_f) \leq \sup(0, \zeta_c(f))$, en particulier, I_f est dans \mathcal{L}_d . En tenant compte de $I_f(0+) = 0$, la formule de la proposition (1.8) nous fournit : $\mathcal{L}(f)(s) = s\mathcal{L}(I_f)(s)$. On peut donc énoncer :

Proposition 1.12 *Soit f une fonction de \mathcal{L}_d . La fonction $t \mapsto \int_0^t f(u) du$ est alors dans \mathcal{L}_d et on a :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \sup(0, \zeta_c(f)) \Rightarrow \mathcal{L}\left(\int_0^t f(u) du\right)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f)(s) \quad (1.9)$$

Remarque 1.7 *Supposons que $\zeta_c(f) < 0$ et que la transformée $\mathcal{L}(f)$ ne soit pas nulle au point $s = 0$. Alors, la fonction $(1/s)\mathcal{L}(f)(s)$ ne peut être holomorphe au point $s = 0$. On en déduit, le demi-plan d'holomorphie de $\mathcal{L}(I_f)$ ne pouvant contenir ce point, que : $\zeta_c(I_f) \geq 0$. Dans ce cas $\zeta_c(I_f) = \zeta_a(I_f) = 0$*

1.7 Convolution et Transformation de Laplace

Comme dans le cas de la transformation de Fourier, à propos de laquelle nous verrons d'ailleurs quelles sont les relations qui la lient à la transformation de Laplace, nous prouvons maintenant que la convolée de deux originaux est transformée en le produit habituel des deux transformées.

1.7.1 Convolution de deux originaux

Supposons que f et g soient deux fonctions causales toutes deux localement sommables. L'intégrale exprimant leur convolution est alors prise sur $[0, +\infty[$ et comme, de plus, $g(x-t) = 0$ lorsque $t > x$, on en déduit que si $x < 0$, la convolée est nulle au point x . Dans le cas où $x > 0$, cette convolée au point x s'exprime par une intégrale sur le compact $[0, x]$.

Il reste à examiner l'existence, au moins presque partout, de cette intégrale.

Supposons que $x \in [0, A]$. Lorsque x et t sont tous deux dans cet intervalle, la différence $x-t$ reste dans un intervalle compact K . Considérons la restriction de la convolée à cet intervalle $[0, A]$, elle est identique à la convolée de $\chi_{[0, A]} f$ et de $\chi_K g$. En désignant ces deux fonctions par f_1 et par g_1 , on se ramène à des fonctions à supports compacts qui, étant données les hypothèses, sont sommables sur \mathbb{R} et pour lesquelles on sait que l'on peut appliquer le théorème de Fubini. En utilisant en outre un changement de variables évident, on obtient :

$$\left[\int_{\mathbb{R}} f_1(t) dt \right] \left[\int_{\mathbb{R}} g_1(u) du \right] = \int_{\mathbb{R}^2} f_1(t) g_1(u) dt du$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f_1(w-v)g_1(v) dv dw = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}} f_1(w-v)g_1(v) dv \right] dw$$

En particulier, ce théorème de Fubini implique que la fonction $w \mapsto \int_{\mathbb{R}} f_1(w-v)g_1(v) dv$ existe pour presque tout w . On en déduit que, sur $[0, A]$, la convolée $f \star g$ est définie presque partout. On en déduit classiquement que cette convolée est définie presque partout sur \mathbb{R} . Ce théorème implique aussi que cette fonction est sommable sur $[0, A]$ et ceci quel que soit A . Concluons :

Proposition 1.13 *Si f et g sont des fonctions de \mathcal{L}_+ . Alors, la convolée $f \star g$ existe presque partout sur \mathbb{R} et définit un nouvel élément de ce même espace \mathcal{L}_+ .*

1.7.2 Transformation d'une convolée

Théorème 1.2 *Soient f et g des fonctions de $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ dont les abscisses de convergence absolues ne sont pas égales à $+\infty$. Alors, la fonction $f \star g$ est aussi dans $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$. De façon plus précise, on a : $\zeta_a(f \star g) \leq \sup(\zeta_a(f), \zeta_a(g))$ et la transformée de la convolée vérifie :*

$$\boxed{\Re(s) > \sup(\zeta_a(f), \zeta_a(g)) \Rightarrow \mathcal{L}(f \star g)(s) = [\mathcal{L}(f)(s)][\mathcal{L}(g)(s)] \quad (1.10)}$$

Démonstration

◇ L'utilisation de la formule de Fubini requiert les sommabilités et c'est pourquoi on envisage seulement les abscisses de convergence absolues. On suppose donc $x > \sup(\zeta_a(f), \zeta_a(g))$. La formule de Fubini nous donne d'abord formellement :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (f \star g)(t) e^{-xt} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} \left[\int_0^t f(u)g(t-u) du \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_u^{+\infty} f(u)g(t-u) e^{-xt} dt \right] du \end{aligned}$$

Remplaçons toutes les fonctions par leurs modules. Puisque $x > \zeta_a(g)$, on voit apparaître, dans la dernière intégrale, la transformée de la translatée d'indice u de la fonction g , donc en utilisant la proposition 1.8 :

$$\int_u^{+\infty} |g(t-u)| \exp(-xt) dt = \int_0^{+\infty} |g_u(t)| \exp(-xt) dt = \exp(-ux) \mathcal{L}(|g|)(s)$$

La dernière intégrale de la relation de Fubini précédente devient donc, en remplaçant les fonctions par leurs modules :

$$[\mathcal{L}(|g|)(x)] \int_0^{+\infty} |f(u)| \exp(-xu) du$$

Comme, de plus, l'inégalité $x > \zeta_a(f)$ implique la convergence absolue de cette dernière intégrale, on en déduit la validité de la formule de Fubini précédente. Ajoutons d'ailleurs qu'elle est valable aussi pour tout complexe s vérifiant l'inégalité : $\Re(s) > \sup(\zeta_a(f), \zeta_a(g))$.

D'après la remarque précédente, l'intégrale du second membre de cette formule s'écrit :

$$[\mathcal{L}(g)(s)] \int_0^{+\infty} f(u) \exp(-su) du = [\mathcal{L}(g)(s)][\mathcal{L}(f)(s)]$$

Il en résulte la formule annoncée sous la réserve faite sur le complexe s . \diamond

Signalons qu'on peut montrer que la transformée de Laplace d'un produit fg s'exprime sous certaines conditions comme une convolution complexe des transformées. Ce sera vu comme application d'une des formules d'inversion de \mathcal{L} .

Il est à noter aussi que le domaine de validité de la propriété précédente fait intervenir les abscisses de convergence absolue (cela tenant aux conditions d'application du théorème de Fubini) ; ce domaine n'est donc pas toujours le domaine commun d'existence des deux transformées de Laplace des fonctions en cause. Des améliorations peuvent être envisagées. Une illustration en est donnée à partir d'un cas particulier.

1.7.3 Examen d'un cas particulier de convolution

On a vu, dans § 6.3, la transformation de la fonction $t \mapsto \int_0^t f(u) du$. Nous remarquons que cette intégrale peut être considérée comme la convolée $\mathcal{U} \star f$. En effet, on a :

$$(\mathcal{U} \star f)(t) = \int_0^t \mathcal{U}(t-u) f(u) du = \int_0^t f(u) du$$

Puisque $\zeta_a(\mathcal{U}) = 0$, on déduit du théorème précédent que :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \sup(0, \zeta_a(f)) \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U} \star f)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f)(s)$$

Cette formule ne diffère de la formule (1.9) que par le remplacement, dans cette dernière, de $\zeta_a(f)$ par $\zeta_c(f)$.

Considérons alors une fonction f dont l'abscisse de convergence est positive et diffère de l'abscisse de convergence absolue. Par exemple, la fonction déjà envisagée $t \mapsto \exp t \sin(\exp t)$ où $\zeta_a(f) = 1$ et $\zeta_c(f) = 0$. Alors, l'égalité de (1.9) est vraie pour \mathcal{U} et f sous la seule condition $\Re(s) > 0$.

1.8 Comportements asymptotiques d'un original et de son image

Dans ce paragraphe, on montre comment le comportement d'un original $f(t)$ au voisinage de $t = 0$ (respectivement, lorsque $t \rightarrow +\infty$) est lié au comportement de son image $F(s)$ lorsque $|s| \rightarrow +\infty$ (respectivement, au voisinage de $s = 0$).

Lorsqu'une proposition concerne le comportement de $f(t)$ au voisinage de $t = 0$, la proposition est dite "de valeur initiale". Si elle concerne le comportement de $f(t)$ au voisinage de $+\infty$, elle est dite "de valeur finale".

Proposition 1.14 (de valeur finale)

- 1. Soit f une fonction de \mathcal{L}_d telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ soit absolument convergente (resp. soit convergente), ce qui implique que l'on a : $\zeta_a(f) \leq 0$ (resp. $\zeta_c(f) \leq 0$). Alors, la transformée de Laplace F de f vérifie, lorsque $s \rightarrow 0$ dans Π_0 (resp. dans un secteur de sommet O et d'angle θ tel que $|\theta| < \pi/2$) :

$$\lim_{s \rightarrow 0} F(s) = \int_0^{+\infty} f(t) dt \quad (1.11)$$

- 2. Soit f une fonction appartenant à \mathcal{L}_d et d'abscisse nulle, dérivable et telle que sa dérivée soit aussi transformable. On suppose que $\int_0^{+\infty} f'(t) dt$ est absolument convergente (resp. convergente). Alors, la limite de $f(t)$ en $+\infty$ existe et cette limite est aussi celle de $sF(s)$ lorsque $|s| \rightarrow 0$ dans Π_0 (resp. dans un secteur de sommet O et d'angle θ tel que $|\theta| < \pi/2$) :

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \quad (1.12)$$

Démonstration de 1

◇ La convergence de l'intégrale de f implique que l'abscisse correspondante est négative ou nulle. Pour le cas de l'absolue convergence, il suffit de noter que : $|f(t) \exp(-st)| \leq |f(t)|$. Comme f est sommable sur \mathbb{R} , le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique et donne le résultat puisque $\lim_{s \rightarrow 0} f(t) \exp(-st) = f(t)$.

Pour le cas de la convergence, il suffit de se servir de la proposition 1.6 dont la démonstration reste valable sous l'hypothèse plus faible que $I(f, x_0)$ est convergente. Dans le cas présent $x_0 = 0$ et la convergence uniforme dans le secteur $sect(0, \theta)$ montre qu'on peut passer à la limite sous l'intégrale de Laplace. ◇

Démonstration de 2

◇ La propriété précédente s'applique à la dérivée f' . Dans chacun des cas précisés précédemment, l'intégrale $\int_a^b f'(t) dt$ admet une limite lorsque $a \rightarrow 0$ et lorsque $b \rightarrow +\infty$. On en déduit d'abord que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$ existe.

Par ailleurs, puisque $f(0+)$ existe et puisque l'abscisse de f' est aussi négative ou nulle, on sait (Cf. Prop 1.11, égalité (1.7)) que : $\mathcal{L}(f') = sF(s) - f(0+)$ pour tout s de Π_0 . Comme la limite du premier membre est $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(0+)$, on en déduit que la limite de $sF(s)$, lorsque $s \rightarrow 0$ dans Π_0 , est bien $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. ◇

Remarque 1.8 Le résultat 1) n'est pas un moyen de prouver la convergence de l'intégrale de f .

Appliquons, par exemple, ce résultat à la fonction de Bessel J_0 . On établit d'abord la convergence de $\int_0^\infty J_0(t) dt$ grâce à la connaissance du comportement

asymptotique de cette fonction (Cf. Annexe 1). Le résultat précédent nous dit alors que cette intégrale est égale à 1, limite de $(1 + s^2)^{-1/2}$ en $s = 0$.

En revanche, la limite de $F(s)$ en $s = 0$ peut exister sans que l'intégrale de f soit convergente; il suffit, pour le voir, de considérer la fonction $s \mapsto (s^2 + 1)^{-1}$ qui est l'image de $\mathcal{U}(t) \sin t$.

Si, dans la deuxième propriété de cette proposition, on suppose aussi l'existence de l'intégrale de f , il en résulte évidemment que la limite de f en $+\infty$ est nulle, on retrouve ainsi, puisque F a une limite finie en $s = 0$ que : $sF(s) \rightarrow 0$.

On trouvera dans l'exercice 3.6 des indications sur la situation où la limite de f en $+\infty$ est infinie.

Proposition 1.15 (Analogie d'un théorème de Riemann-Lebesgue) *Soit f une fonction de \mathcal{L}_d . Alors, la transformée de Laplace F de f vérifie :*

$$\forall \theta, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \lim_{s \in \text{sect}(0, \theta), |s| \rightarrow +\infty} F(s) = 0 \quad (1.13)$$

Et la convergence est uniforme par rapport à l'argument de s dans ces secteurs.

Démonstration

◇ On suppose d'abord que l'abscisse de convergence absolue n'est pas égale à $+\infty$ et que $s \in \text{sect}(0, \theta)$, où θ est fixé vérifiant $|\theta| < \pi/2$.

Pour $\Re(s) = x > x_0 > \zeta_a(f)$, on peut écrire :

$$|F(s)| \leq \int_0^{+\infty} \exp(-(x - x_0)t) (\exp(-x_0 t) |f(t)|) dt$$

Puisque $t \mapsto \exp(-x_0 t) |f(t)|$ est sommable, le théorème de convergence dominée s'applique lorsque $x \rightarrow +\infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc choisir A pour que :

$$x > A \Rightarrow |F(s)| < \varepsilon$$

Alors, en choisissant s tel que $|s| > \frac{A}{\cos \theta}$, on obtient cette même majoration, ce qui prouve la convergence uniforme annoncée.

Pour le cas où l'absolue convergence n'est pas vérifiée, on rappelle d'abord qu'en posant $I_f(t) = \int_0^t f(u) du$, l'intégrale de Laplace de I_f converge absolument pour tout réel x vérifiant $x > \sup(0, \zeta_c(f))$ (Cf. § 6.3).

Comme $I_f(0+) = 0$, il en résulte que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$0 \leq t < \eta \Rightarrow |I_f(t)| < \varepsilon \cos \theta$$

On suppose $\Re(s) = x > \sup(0, \zeta_c(f))$. Le réel x_0 vérifiant : $x > x_0 > \sup(0, \zeta_c(f))$, on désigne par J_0 l'intégrale $I(|I_f|, x_0)$. La transformée de Laplace de I_f étant $\frac{F(s)}{s}$ (Cf. proposition 1.11), on obtient, par décomposition de l'intégrale en deux morceaux et en utilisant la convergence absolue :

$$\left| \frac{F(s)}{s} \right| \leq \int_0^\eta |I_f(t)| e^{-xt} dt + \int_\eta^{+\infty} |I_f(t)| e^{-(x-x_0)t} e^{-tx_0} dt$$

En utilisant un calcul d'intégrale suivi d'une majoration, il vient ensuite :

$$|F(s)| \leq \frac{|s|}{x} \left[\varepsilon \cos \theta \left(1 - e^{(-x\eta)} \right) \right] + |s| e^{-(x-x_0)\eta} \int_{\eta}^{+\infty} |I_f(t)| e^{((-x_0)t)} dt$$

Puisque $\frac{x}{|s|} \geq \cos \theta$ et $x > 0$, la majoration de la dernière intégrale nous fournit, uniformément dans le secteur $sect(0, \theta)$:

$$|F(s)| \leq \varepsilon + |s| \frac{\exp[-(x - x_0)\eta] J_0}{\eta}$$

En remarquant enfin que : $|s| \exp[-(x - x_0)\eta] \leq |s| \exp[-(|s| \cos \theta - x_0)\eta]$, on en déduit que le deuxième terme tend vers 0 uniformément dans le secteur considéré, lorsque s vers l'infini. \diamond

Signalons, lorsque f est absolument continue sur tout segment de \mathbb{R}^+ , une conséquence qui est très utile dans les résolutions d'équations différentielles linéaires à coefficients variables, pour déterminer certaines constantes d'intégration :

Corollaire 1.4 (de valeur initiale)

Si f est une fonction absolument continue, élément de \mathcal{L}_d , ce qui implique l'existence de $f(0+)$, alors, on a :

$$\forall \theta, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \lim_{s \in sect(0, \theta), |s| \rightarrow +\infty} sF(s) = f(0+) \quad (1.14)$$

La convergence étant uniforme par rapport à l'argument de s dans ces secteurs.

Remarque 1.9 On remarquera l'analogie de ce corollaire avec la proposition 1.13 (partie 2) par l'échange de f et F et des voisinages de 0 et de $+\infty$

Démonstration

\diamond Elle résulte de l'égalité : $\mathcal{L}(f')(s) = sF(s) - f(0+)$, puisque le premier membre tend vers 0 dans les conditions précisées dans le théorème précédent. \diamond

Applications immédiates des propositions précédentes

Soit f un élément de \mathcal{L}_d tel que $t \mapsto g(t) = \frac{f(t)}{t}$ soit encore dans \mathcal{L}_d . On désigne par F l'image de Laplace de f . Ce qui précède permet alors de déterminer la transformée G de g .

En effet, $-tg(t)$ a pour image la dérivée $G'(s)$ dans le demi-plan $\Pi_f = \Pi_{\zeta_c(f)}$. En supposant s réel, on a donc : $-G' = F$, d'où $G(s) = - \int_a^s F(u) du + C$ où a est un réel fixé arbitrairement avec $a > \zeta_c(f)$.

Pour calculer C , on se sert d'une des propriétés précédentes qui implique :

$\lim_{s \rightarrow +\infty} G(s) = 0$. On en déduit : $C = \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_a^s F(u) du$, ce qui signifie que l'intégrale de F sur $[a, +\infty[$ est convergente et que $C = \int_a^{+\infty} F(u) du$. Ce résultat peut

s'écrire :

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{+\infty} F(u) du$$

On remarque, dans cette formule, une analogie avec la relation : $\mathcal{L}\left(\int_0^t f(u)du\right) = \frac{F(s)}{s}$.

Ajoutons que d'après la proposition 1.14, la limite, lorsque $|s| \rightarrow +\infty$, peut être prise sur une demi-droite non verticale située dans Π_f ou même le long de toute courbe continue Γ_s débutant au point s et ayant une branche infinie restant dans un secteur dont les côtés font avec l'axe des abscisses un angle inférieur à $\pi/2$.

Le prolongement analytique de l'image de Laplace de $\frac{f(t)}{t}$ s'exprime ainsi par $\int_{\Gamma_s} F(u) du$.

Supposons de plus qu'au voisinage de $t = 0$, on ait : $f(t) \sim kt$, ce qui implique : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = k$. Le corollaire 1.4 fournit alors $\lim_{s \rightarrow \infty} s \int_{\Gamma_s} F(u) du = k$ et cela précise le comportement de l'intégrale de F , à savoir :

$$\int_{\Gamma_s} F(u) du \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{k}{s}$$

Les propositions précédentes vont être améliorées en mettant en évidence d'autres convergences uniformes en distinguant les cas où il y a convergence absolue ou non de l'intégrale de Laplace :

Théorème 1.3 (de valeur finale)

Soit f une fonction élément de \mathcal{L}_d dont la transformée de Laplace est notée F . Alors :

- (i) Si l'abscisse de convergence absolue est distincte de $+\infty$, $F(x + iy)$ converge uniformément vers 0 dans tout demi-plan fermé $\overline{\Pi}_a$ tel que $a > \zeta_a(f)$, à savoir :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \text{ tel que : } |y| > B \Rightarrow |F(x + iy)| \leq \varepsilon, \quad x \geq a \geq \zeta_a(f)$$

- (ii) Si l'abscisse de convergence absolue est $+\infty$, $F(x + iy)/y$ converge uniformément vers 0 dans tout demi-plan fermé $\overline{\Pi}_a$ tel que $a > \zeta_c(f)$, à savoir :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists B \text{ tel que : } \forall x \geq a \geq \zeta_c(f), \quad |y| > B \Rightarrow \left| \frac{F(x + iy)}{y} \right| \leq \varepsilon$$

Démonstration de (i)

◇ Si on remarque que l'on peut écrire :

$$F(x + iy) = \int_0^{+\infty} \exp(-iyt)f(t)\exp(-xt)dt,$$

on voit qu'à tout x fixé, tel que $x > \zeta_a(f)$, $F(x + iy)$ est la transformée de Fourier d'une fonction Lebesgue-intégrable. Elle tend donc vers 0 lorsque $y \rightarrow \pm\infty$. Mais

cette remarque ne permet pas d'obtenir la convergence uniforme souhaitée. Nous allons plutôt, par une décomposition en une somme de deux intégrales, nous ramener à un intervalle d'intégration fini. On peut écrire, en effet :

$$|F(s)| = |F(x + iy)| \leq \left| \int_0^A f(t) \exp(-st) dt \right| + \int_A^{+\infty} |f(t)| \exp(-at) dt$$

L'intégrale $I(|f|, a)$ est convergente par hypothèse, donc, on peut choisir A tel que la deuxième intégrale de l'inégalité précédente soit inférieure à $\epsilon/3$. Donc :

$$\forall x \geq a, \quad |F(x + iy)| \leq \left| \int_0^A f(t) \exp(-st) dt \right| + \frac{\epsilon}{3} \quad (*)$$

Considérons maintenant la fonction F_A définie par $F_A(s) = \int_0^A f(t) e^{(-st)} dt$ et approchons d'abord f par g continûment dérivable sur $[0, A]$. Cette approche est possible grâce à la densité des fonctions de classe C^1 sur $[0, A]$ dans l'espace $\mathcal{L}_{[0,A], \exp(-at)}^1$. Il existe donc g de classe C^1 telle que :

$$\int_0^A |f(t) - g(t)| \exp(-at) dt \leq \epsilon/3$$

Alors :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^A f(t) \exp(-st) dt \right| &\leq \int_0^A |f(t) - g(t)| \exp(-at) dt + \left| \int_0^A g(t) \exp(-st) dt \right| \\ &\leq \int_0^A g(t) \exp(-st) dt + \epsilon/3 \quad (**) \end{aligned}$$

Il reste finalement à traiter l'intégrale portant sur g . Une intégration par parties nous donne :

$$\int_0^A g(t) \exp(-st) dt = -\frac{1}{s} [(g(A) \exp(-sA) - g(0)) + \int_0^A g'(t) \exp(-st) dt]$$

On en déduit la majoration :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^A g(t) e^{(-st)} dt \right| &\leq \frac{1}{|s|} \left[(|g(A)| e^{(-aA)} + |g(0)|) + \int_0^A |g'(t)| e^{(-at)} dt \right] \\ &\leq \frac{K}{|y|} \end{aligned}$$

La constante K ne dépendant que de g , la majoration ainsi obtenue est uniforme dans le demi-plan Π_a . Il existe donc B tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |y| \geq B \Rightarrow \left| \int_0^A g(t) \exp(-st) dt \right| \leq \epsilon/3 \quad (***)$$

Les trois inégalités (*), (**), (***) fournissent le résultat souhaité :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |y| \geq B \Rightarrow |F(x + iy)| \leq \epsilon, \quad \forall x \geq a. \diamond$$

Démonstration de (ii)

◇ Soient des réels a et b vérifiant : $\zeta_c(f) < b < a$ et soit $s = x + iy$ un complexe tel que $x \geq a$.

Par hypothèse, l'intégrale $\int_0^t f(u) \exp(-bu) du$ est bornée. Il en résulte, par différence de deux intégrales, qu'il existe M tel que :

$$\forall(A, B), \quad A \geq 0, B \geq 0 \Rightarrow \left| \int_A^B f(t) \exp(-bt) dt \right| \leq M$$

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Choisissons A tel que $[M/(a-b)] \exp[-A(a-b)] \leq \varepsilon/2$. On a :

$$F(x + iy) = \int_0^A \exp(-st) f(t) dt + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_A^B \exp(-st) f(t) dt \quad (*)$$

En définissant ϕ_b par $\phi_b(t) = \int_A^t f(u) \exp(-bu) du$, la démarche classique d'intégration par partie exprime la deuxième intégrale de (*) sous la forme :

$$\int_A^B \exp(-(s-b)t) d(\phi_b)(t) = \exp(-(s-b)B) \phi_b(B) + (s-b) \int_A^B e^{-(s-b)t} \phi_b(t) dt$$

On en déduit par majoration :

$$\left| \int_A^B e^{-st} f(t) dt \right| \leq M e^{-(x-b)B} + M |s-b| \frac{e^{-(x-b)A} - e^{-(x-b)B}}{x-b}$$

Par conséquent, on obtient, quand B tend vers $+\infty$:

$$\left| \int_A^{+\infty} \exp(-st) f(t) dt \right| \leq M |s-b| \frac{\exp(-(x-b)A)}{x-b} \leq \frac{M |s-b|}{x-b} e^{-(a-b)A}$$

Alors, étant donné le choix de A et, puisque

$$\frac{|s-b|}{x-b} \leq \frac{x-b+|y|}{x-b} = 1 + \frac{|y|}{x-b} \leq 1 + \frac{|y|}{a-b},$$

on en déduit :

$$\left| \int_A^{+\infty} \exp(-st) f(t) dt \right| \leq M \exp(-(a-b)A) + |y| \frac{\varepsilon}{2}$$

Finalement, si l'on divise par $|y|$, la relation (*) nous donne :

$$\left| \frac{F(x + iy)}{y} \right| \leq \frac{1}{|y|} \int_0^A \exp(-bt) f(t) dt + \frac{1}{|y|} M \exp(-(a-b)A) + \frac{\varepsilon}{2},$$

ou encore :

$$\left| \frac{F(x + iy)}{y} \right| \leq M \frac{1}{|y|} (1 + \exp(-(a-b)A)) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Il suffit donc de choisir $|y|$ assez grand pour que l'on obtienne le résultat de convergence uniforme annoncé . De façon précise :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad |y| \geq \frac{1}{2\epsilon}(1 + \exp(-(a-b)A)) \Rightarrow (\forall x \geq a), \quad \left| \frac{F(x+iy)}{y} \right| \leq \epsilon. \diamond$$

D'autres raffinements concernant ces comportements asymptotiques peuvent être obtenus. On se contente dans ce qui suit de l'étude du comportement d'une transformée de Laplace à l'infini lorsqu'on connaît un équivalent de f au voisinage de 0. L'étude inverse des comportements de f connaissant ceux de l'image au voisinage de l'infini est faite comme conséquence de la formule d'inversion (Cf. §1.10.8, Chapitre 2, §2.2.2 et bibliographie [[22]], [[28]]).

Proposition 1.16 *Soit f une fonction de \mathcal{L}_d équivalente au voisinage de 0 à la fonction at^ρ où ρ vérifie : $\rho > -1$. Alors, la transformée de Laplace F de f est équivalente pour s réel et tendant vers $+\infty$ à la fonction : $s \mapsto a\Gamma(\rho+1)s^{-\rho-1}$.*

Démonstration

\diamond Par hypothèse, on a :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta, \forall 0 < t < \eta \Rightarrow a(1 - \epsilon/3)t^\rho \leq f(t) \leq a(1 + \epsilon/3)t^\rho$$

Par multiplication par une exponentielle et l'intégration sur $[0, \eta]$, on en déduit :

$$a(1 - \epsilon/3) \int_0^\eta t^\rho \exp(-st) dt \leq \int_0^\eta f(t) \exp(-st) dt \leq a(1 + \epsilon/3) \int_0^\eta t^\rho \exp(-st) dt$$

Evaluons l'intégrale $J = \int_0^\eta t^\rho \exp(-st) dt$ au moyen de $\Gamma(\rho+1)$:

$$J = \int_0^{+\infty} t^\rho e^{-st} dt - \int_\eta^{+\infty} t^\rho e^{-st} dt = s^{-\rho-1} \Gamma(\rho+1) - \int_{s\eta}^{+\infty} \left(\frac{u}{s}\right)^\rho e^{-u} \frac{du}{s}$$

Cette dernière intégrale est obtenue avec la variable $u = st$.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-u} u^\rho du$ étant convergente et η étant fixé, il en résulte que

$\lim_{s \rightarrow +\infty} \int_{s\eta}^{+\infty} e^{-u} u^\rho du = 0$. On peut donc trouver A tel que :

$$s > A \Rightarrow 0 < \int_{s\eta}^{+\infty} e^{-u} u^\rho du \leq a(\epsilon/3)\Gamma(\rho+1)$$

En multipliant les termes précédents par $s^{\rho+1}$, on a ainsi montré :

$$a(1 - (2\epsilon/3))\Gamma(\rho+1) \leq s^{\rho+1} \int_0^\eta \exp(-st) f(t) dt \leq a(1 + \epsilon/3)\Gamma(\rho+1)$$

Il reste à ajouter le terme $K = s^{\rho+1} \int_\eta^{+\infty} f(t) \exp(-st) dt$ qui, par la translation $t = u + \eta$, devient :

$$K = s^{\rho+1} \exp(-s\eta) \int_0^{+\infty} f(u + \eta) \exp(-su) du$$

Une image de Laplace étant bornée pour s réel assez grand, on peut en déduire qu'il existe B , $B > A$, tel que :

$$s > B \Rightarrow K < a\Gamma(\rho + 1)(\varepsilon/3)$$

Finalement, on a montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B, \quad s > B \Rightarrow a(1 - \varepsilon)\Gamma(\rho + 1) < s^{\rho+1}F(s) < a(1 + 2\varepsilon/3)\Gamma(\rho + 1)$$

Ceci signifie l'équivalence annoncée. \diamond

Remarque 1.10 *Si on possède un développement limité de $t^{-\rho}f(t)$ au voisinage de 0, on peut en reprenant la démarche précédente déterminer un développement asymptotique de l'image F au voisinage de l'infini.*

Les exercices 3.18 et 3.19 illustrent la proposition précédente et précisent cette remarque.

1.9 Transformée de Laplace d'une somme de série entière

Pour des raisons de convergence uniforme d'une série entière, un calcul formel montre que l'on doit obtenir pour transformée de $\Sigma a_n t^n$, la somme des transformées, c'est-à-dire la série $\Sigma a_n n! / s^{n+1}$. Il est donc naturel de supposer que cette nouvelle série entière $\Sigma n! a_n z^n$ admet un rayon de convergence non nul.

Proposition 1.17 *Soit une série entière $\Sigma a_n t^n$ dont le rayon de convergence est infini et tel que la série entière $\Sigma_0^{+\infty} n! a_n t^n$ ait un rayon de convergence R non nul. Alors la fonction f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t) \Sigma_0^{+\infty} a_n t^n$ est dans \mathcal{L}_d et on a :*

$$\Re(s) > \frac{1}{R} \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}(t) \Sigma_0^{+\infty} a_n t^n)(s) = \Sigma_0^{+\infty} \frac{n! a_n}{s^{n+1}} \quad (1.15)$$

Démonstration

\diamond On rappelle que la transformée de $\mathcal{U}(t)t^n$ est $n! / s^{n+1}$. Il suffit, pour prouver la proposition, de le faire pour un réel x vérifiant $x > 1/R$. Comme le rayon de $\Sigma_0^{+\infty} n! a_n t^n$ est R , on en déduit :

$$x > \frac{1}{R} \Rightarrow \Sigma_0^{+\infty} \frac{n! a_n}{x^{n+1}} \quad \text{est absolument convergente.}$$

On montre que la limite, lorsque $A \rightarrow +\infty$, de l'intégrale sur $[0, A]$ de $f(t) \exp(-xt)$ est bien la somme de la série précisée. Pour cela, on considère la différence D en valeur absolue :

$$\begin{aligned} |D| &= \left| \int_0^A \Sigma_0^{+\infty} a_n t^n \exp(-xt) dt - \Sigma_0^{+\infty} \frac{n! a_n}{x^{n+1}} \right| \\ &= \left| \Sigma_0^{+\infty} a_n \left[\int_0^A t^n \exp(-xt) dt - \int_0^{+\infty} t^n \exp(-xt) dt \right] \right| \\ &\leq \Sigma_0^{+\infty} |a_n| \int_A^{+\infty} t^n \exp(-xt) dt \end{aligned}$$

Majorons le reste d'intégrale apparaissant ainsi en faisant intervenir un réel x_0 vérifiant $x > x_0 > 1/R$. On a :

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} t^n \exp(-xt) dt &= \int_A^{+\infty} t^n \exp[-(x - x_0)t] \exp(-x_0t) dt \\ &\leq \exp[-(x - x_0)A] \int_A^{+\infty} t^n \exp(-x_0t) dt \\ &\leq \frac{\exp[-(x - x_0)A] n!}{x_0^{n+1}} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$|D| \leq \exp[-(x - x_0)A] \sum_0^{+\infty} \frac{n! |a_n|}{x_0^{n+1}}$$

Finalement, puisque $\exp[-(x - x_0)A] \rightarrow 0$ lorsque $A \rightarrow +\infty$, on obtient la conclusion annoncée :

$$\int_0^{+\infty} f(t) \exp(-xt) dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(t) \exp(-xt) dt = \sum_0^{+\infty} \frac{n! a_n}{x^{n+1}} \quad \diamond$$

On trouvera dans le chapitre 2 des exemples de calcul d'images, notamment celles de fonctions de Bessel, par utilisation de cette proposition.

Il existe une réciproque de cette proposition (Cf. Théorème 1.5) qui permet d'établir qu'une fonction complexe développable en série de Laurent à l'extérieur d'un disque est la transformée de Laplace d'une certaine fonction f du type envisagé ci-dessus.

Remarque 1.11 *Pour certaines fonctions développables en série entière, le théorème précédent ne peut s'appliquer.*

Par exemple, la fonction $\mathcal{U}(t) \exp(-t^2)$ conduirait à la série de transformées de Laplace de terme général $(-1)^n \frac{(2n)!}{n! s^{2n+1}}$. Or, cette série est toujours divergente !

1.10 Inversion de la transformation de Laplace

1.10.1 Relation entre les transformations de Fourier et de Laplace

On suppose connues les formules réalisant, à l'aide d'hypothèses diverses, l'inversion de la transformation de Fourier. On peut les utiliser, *au moins d'un point de vue formel*, pour inverser \mathcal{L} .

On pose $s = x + 2i\pi\lambda$. La fonction $F = \mathcal{L}(f)$ peut s'écrire, si $\Re(s) > \zeta_a(f)$:

$$\mathcal{L}(f)(x + 2i\pi\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-xt) f(t) \exp(-2i\pi\lambda t) dt = \mathcal{F}(f_{\wedge x})(\lambda)$$

Autrement dit, cette transformée de Laplace, considérée comme fonction de la partie imaginaire, est la transformée de Fourier de $f_{\wedge x}$ définie par : $f_{\wedge x}(t) =$

$\exp(-xt)f(t)$. Une des formules d'inversion de la transformation de Fourier, par exemple celle qui utilise la transformation conjuguée, nous donne ainsi :

$$f_{\wedge x}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2i\pi\lambda) \exp(2i\pi\lambda t) d\lambda$$

Cette formule s'écrit encore, après passage de $\exp(xt)$ dans l'autre membre et le choix de la variable d'intégration $z = x + 2i\pi\lambda$:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x + 2i\pi\lambda) \exp(2i\pi\lambda t) \exp(xt) d\lambda = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta} f(z) \exp(zt) dz (*)$$

Dans cette formule, l'intégrale est étendue à la droite parallèle à l'axe des imaginaires, d'abscisse x et orientée dans le sens des ordonnées croissantes. Cette formule d'inversion est valable, par exemple, sous les conditions suffisantes de sommabilité sur \mathbb{R} des fonctions $f_{\wedge x}$ et $f_{\wedge x}$.

D'autres conditions sont utilisables. En particulier, lorsque la fonction $f_{\wedge x}$ est à variation bornée, on a :

$$\frac{1}{2}[f_{\wedge x}(t+0) + f_{\wedge x}(t-0)] = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^{+A} F(x + 2i\pi\lambda) \exp(2i\pi\lambda t) d\lambda (**)$$

Ces deux types de formules (*), (**) suggèrent des résultats d'inversion de la transformation de Laplace dans lesquels les hypothèses faites feront nécessairement intervenir les propriétés des transformées de Laplace démontrées précédemment. L'une de ces propriétés est l'holomorphie dans des demi-plans de type Π_a , ce qui permettra, dans les démonstrations, d'utiliser les théorèmes de Cauchy.

1.10.2 Formules de transformation inverse

Rappelons d'abord la définition d'une fonction à variation bornée :

Soit f définie sur $[a, b]$. A toute subdivision croissante $\sigma = \{a, t_1, t_2, \dots, t_n, b\}$ de $[a, b]$, on associe la variation de f sur σ , définie par :

$$\text{var}_{\sigma}(f) = \sum_0^{n+1} |f(t_{i+1}) - f(t_i)|$$

La variation totale de f sur $[a, b]$ est la borne supérieure : $\text{Var}_{[a,b]} f = \sup_{\sigma} \text{var}_{\sigma}(f)$. La fonction f est dite à variation bornée sur $[a, b]$ si cette variation totale est finie.

On voit facilement que si f est réelle et monotone sur $[a, b]$ ou encore continue et possédant une dérivée bornée sur $[a, b]$, alors f est à variation bornée sur $[a, b]$.

On commence par une proposition qui fait intervenir une valeur principale d'intégrale et qui est exactement la traduction d'un des résultats formels précédents :

Proposition 1.18 Soit f une fonction de \mathcal{L}_d , à variation bornée et vérifiant $\zeta_a(f) < +\infty$. Alors, la transformée de Laplace de f étant notée F et le segment d'origine $a - iA$ et d'extrémité $a + iA$ étant noté $\gamma(a, A)$, on a, pour tout réel t :

$$a > \zeta_a(f) \Rightarrow \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(a, A)} F(s) \exp(st) ds = i\pi[f(t+0) + f(t-0)] \quad (1.16)$$

Démonstration

◇ On remarque d'abord que F est continue sur $\gamma(a, A)$ puisque ce segment est placé, par hypothèse, dans le domaine d'holomorphic. Il suffit alors de traduire l'intégrale sur $\gamma(a, A)$ en paramétrant par $s = a + 2i\pi\lambda$. On obtient :

$$\int_{\gamma(a, A)} F(s) \exp(st) ds = 2i\pi \int_{-A/2\pi}^{+A/2\pi} F(a + 2i\pi\lambda) \exp[(a + 2i\pi\lambda)t] d\lambda$$

Or, $\lambda \mapsto F(a + 2i\pi\lambda)$ est la transformée de Fourier de $f_{\wedge a}$. Ainsi :

$$\int_{\gamma(a, A)} F(s) \exp(st) ds = 2i\pi \exp(at) \int_{-A/2\pi}^{+A/2\pi} \mathcal{F}(f_{\wedge a})(\lambda) \exp[2i\pi\lambda t] d\lambda$$

Comme la fonction $f_{\wedge a}$ est à variation bornée, la formule d'inversion de Fourier s'applique et donne :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(a, A)} F(s) e^{st} ds = i\pi e^{at} [f_{\wedge a}(t+0) + f_{\wedge a}(t-0)] = i\pi [f(t+0) + f(t-0)]$$

Remarquons que, bien entendu, le second membre est nul pour $t < 0$. ◇

En utilisant la transformée de Laplace de $t \mapsto \int_0^t f(u) du$, fonction qui, d'une part, est absolument continue, donc à variation bornée, et qui, d'autre part, a une abscisse de convergence absolue vérifiant $\zeta_a \leq \sup(0, \zeta_c(f))$ donc différente de $+\infty$, on obtient :

Corollaire 1.5 Soit f une fonction de \mathcal{L}_d . Alors, la transformée de Laplace de f étant notée F et le segment d'origine $a - iA$ et d'extrémité $a + iA$ étant noté $\gamma(a, A)$, pour tout réel t on a :

$$a > \sup(0, \zeta_c(f)) \Rightarrow \frac{1}{2i\pi} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\gamma(a, A)} \frac{F(s)}{s} e^{st} ds = \int_0^t f(u) du \quad (1.17)$$

On laisse le soin au lecteur, en utilisant des opérations simples sur les fonctions f d'énoncer des corollaires du même type que le précédent, notamment en remplaçant f par une convolée. Les théorèmes qui vont suivre sont en réalité des conditions concernant des fonctions holomorphes pour qu'elles soient des transformées de Laplace.

1.10.3 Fonctions holomorphes identifiables à des transformées de Laplace

Pour qu'une fonction analytique soit une transformée de Laplace, il est nécessaire, d'après des résultats précédents, qu'elle tende vers 0 de façon uniforme relativement à l'argument lorsque $|s| \rightarrow +\infty$ dans les demi-plans Π_a (du moins si on impose aux originaux trouvés que leurs abscisses de convergence absolue ne soient pas $+\infty$).

Théorème 1.4 *Soit F une fonction analytique dans un demi-plan ouvert $\Pi_a = \{\Re(z) > a\}$ telle que :*

- (i) *Pour tout $b > a$, $\lim_{|s| \rightarrow +\infty} F(s) = 0$, ceci uniformément dans le demi-plan fermé $\bar{\Pi}_b$.*
- (ii) *Pour tout $b > a$, l'intégrale de F sur la droite Δ_b parallèle à l'axe des imaginaires et d'abscisse b est absolument convergente.*

Posons alors :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta_b} F(z) \exp(zt) dz \quad (1.18)$$

Cette fonction f a les propriétés suivantes :

- 1) *La fonction f est bien définie par cette formule, en particulier elle ne dépend pas de l'abscisse b de Δ_b ,*
- 2) *La fonction f est causale, continue sur \mathbb{R} .*
- 3) *L'abscisse de convergence absolue de f est inférieure ou égale à a .*
- 4) *Quel que soit $b > a$, la transformée de Laplace de f coïncide, dans le demi-plan Π_b , avec la fonction F .*

Démonstration

◇ On suivra éventuellement l'argumentation sur les illustrations fournies ci-après.

Preuve de 1)

Fixons Δ_c d'une abscisse particulière $c > a$. L'intégrale de $F(z) \exp(zt)$ est, à l'exponentielle $\exp(ct)$ près, l'intégrale de $F(z) \exp(iyt)$ le long de Δ_c . L'hypothèse (ii) d'absolue convergence fournit alors l'existence de $f(t)$ quel que soit le réel t .

Soit Δ'_c dont l'abscisse est $c' > c$ (par exemple). En utilisant les points d'ordonnées $\pm d$ de ces droites, on forme un rectangle $DD'E'E$ à côtés parallèles aux axes (voir figure 1). Par le théorème de Cauchy, l'intégrale de $\exp(zt)F(z)$ sur le bord de ce rectangle est nulle. Considérons les intégrales sur $[DD']$ et sur $[E'E']$ respectivement. Par l'hypothèse 1), pour tout $\epsilon > 0$, il existe d_0 tel que :

$$|y| > d_0 \Rightarrow |F(x + iy)| \leq \epsilon \quad \forall x \text{ tel que } c \leq x \leq c'$$

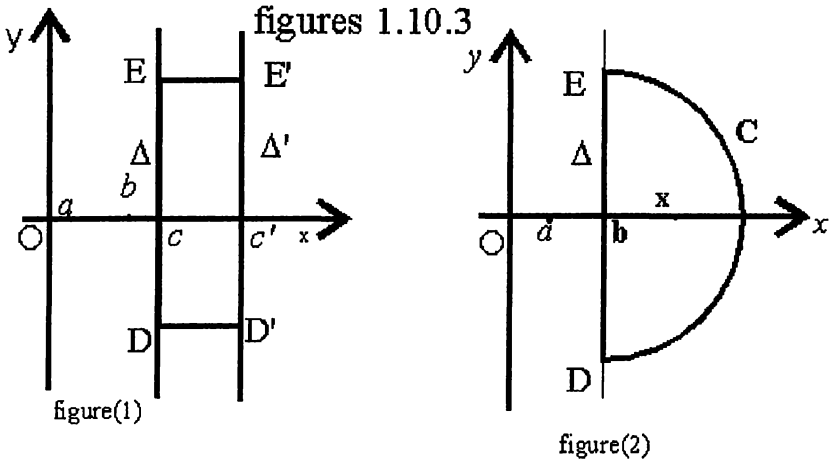
Cela fournit pour les intégrales sur les segments horizontaux, en supposant par exemple $c' > 0$:

$$\left| \int_{[DD']} \exp(zt)F(z) dz \right| \leq (c' - c) \exp(c't)\epsilon$$

La même majoration est vraie sur $[EE']$.

Ceci prouve que ces intégrales tendent vers 0 lorsque $d \rightarrow +\infty$. Il reste donc, après ce passage à la limite, la conclusion :

$$\int_{\Delta_c} \exp(zt)F(z) dz = \int_{\Delta'_c} \exp(zt)F(z) dz$$



Preuve de 2)

Sur Δ_b , avec $b \geq a$, on a la propriété $|F(b+iy)\exp(iyt)| = |F(b+iy)|$, d'où l'on déduit la convergence uniforme par rapport à t de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} F(b+iy)\exp(iyt) dy$.

Il en résulte la continuité de la fonction de t qu'elle définit et, en faisant le produit par $\exp(bt)$, on obtient la continuité de f sur \mathbb{R} .

Si on suppose $t < 0$, on applique le théorème de Cauchy au contour de Jordan Γ_R constitué du segment $[DE]$ porté par Δ_b et d'un demi-cercle C_R de rayon R , de diamètre $[DE]$, demi-cercle placé à droite de Δ_b (comme indiqué dans la figure 2 ci-dessus). On obtient :

$$\int_{\Gamma_R} \exp(zt)F(z)dz = 0$$

Pour prouver que l'intégrale sur Δ_b est nulle, il suffit de démontrer que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \exp(zt)F(z) dz = 0$$

Sur C_R , on a d'une part : $|\exp(-st)| = \exp(bt) \exp(tR \cos(\theta))$. Par ailleurs, l'hypothèse 1) implique que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe R assez grand pour que sur ce cercle C_R , on ait : $|F(z)| < \varepsilon$. On majore alors l'intégrale sur C_R de façon classique. On obtient d'abord :

$$\left| \int_{C_R} F(z) \exp(st) dt \right| \leq 2R\varepsilon \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp Rt \cos \theta d\theta$$

En raison de $t < 0$, on utilise la minoration habituelle de \sin dans l'argument de l'exponentielle, ce qui donne :

$$\int_0^{\pi/2} \exp(Rt \cos \theta) d\theta = \int_0^{\pi/2} \exp(Rt \sin \theta) d\theta \leq \frac{\pi}{2R|t|} [1 - \exp(Rt)]$$

On obtient ainsi le résultat souhaité.

Preuve de 3)

On suppose maintenant que $t > 0$, que c est fixé avec ($c \geq b$). Pour tout réel x vérifiant $x > c$, l'intégrale définissant f étant paramétrée à l'aide de $z = c + iy$, la transformée peut s'écrire :

$$\int_0^{+\infty} f(t) \exp(-xt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-xt) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(c + iy) \exp[(c + iy)t] dy \right]$$

Comme, par l'hypothèse (ii), $y \mapsto F(c + iy)$ est sommable sur \mathbb{R} et que, en raison de $x > c$ et de $t > 0$, $t \mapsto \exp[(c - x)t]$ l'est aussi sur \mathbb{R}_+ , on peut appliquer la formule de Fubini à la double intégration du second membre.

Ceci fournit donc la sommabilité de $f(t) \exp(-xt)$ sur \mathbb{R}_+ . Cela étant finalement vrai quels que soient x et c tels que $x > c > a$, on en déduit : $\zeta_a(f) \leq a$.

Preuve de 4)

On explicite la formule de Fubini précédente :

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(c + iy) e^{(c+iy)t} dy \right] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(c + iy) \left[\int_0^{+\infty} e^{[(c-x+iy)t]} dt \right]$$

Par intégration effective, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} f(t) \exp(-xt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(c + iy)}{c + iy - x} dy$$

Cette dernière intégrale est l'intégrale de $\frac{F(z)}{z - x}$ sur le chemin complexe Δ_c .

Pour la calculer, on utilise la formule fondamentale de Cauchy en utilisant encore un demi-cercle C_R de diamètre $[D E]$ complété par ce diamètre pour constituer le chemin de Jordan Γ , les points D et E étant placés sur Δ_c , symétriques par rapport à l'axe des réels, et de rayon R assez grand pour que ce contour Γ_R contienne en son intérieur le point x (voir la figure 2 précédente en prenant le demi-cercle symétrique par rapport à la droite d'intégration). On a ainsi :

$$\int_{\Gamma_R} \frac{F(z)}{(z - x)} dz = 2i\pi F(x)$$

On montre, par les mêmes majorations que celles qui précèdent, que l'intégrale sur le demi-cercle C_R tend vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$. Il reste donc à la limite :

$$\forall x > c, \quad \mathcal{L}(f)(x) = F(x)$$

On en déduit, par prolongement analytique que la transformée de f coïncide avec F sur la totalité du demi-plan Π_a . \diamond

Remarque 1.12 *D'après la proposition 1.14, on sait que, nécessairement, une transformée de Laplace tend vers 0 uniformément dans des secteurs de sommet 0 alors que le théorème précédent utilise des convergences uniformes dans des demi-plans. Lorsqu'une fonction analytique H ne converge pas uniformément vers 0 dans de tels demi-plans, mais qu'elle y reste uniformément bornée, le théorème précédent s'applique à la fonction $z \mapsto H(z)/z$. La fonction h , original de la fonction H , s'obtiendra alors par la dérivation de la fonction f donnée par la formule précédente appliquée à cette fonction $H(z)/z$.*

On précise avec la proposition qui suit. En fait, ce procédé sera repris lorsque l'on cherchera des antécédents de H de type distributions, la dérivation en question étant faite au sens des distributions.

Proposition 1.19 *Soit F une fonction holomorphe dans Π_a vérifiant les hypothèses suivantes :*

1) *Pour tout $b > a$, on a : $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} \frac{F(b + iy)}{b + iy} = 0$ uniformément par rapport à l'abscisse b .*

2) *La limite, lorsque $B \rightarrow +\infty$ de $\int_{b-iB}^{b+iB} \frac{F(z)}{z} e^{zt} dz$ existe quel que soit t dans \mathbb{R} .*

3) *Cette limite étant désignée par $g(t)$, cette fonction est dérivable et la restriction de sa dérivée à $[0, +\infty[$ admet une transformée de Laplace G .*

Alors, $F = G$, autrement dit, F est bien une transformée de Laplace.

Démonstration

◇ L'hypothèse 1) entraîne, comme dans le théorème précédent que la fonction g est bien définie, à savoir que l'intégrale ne dépend pas de l'abscisse b . La transformée de la fonction g est égale à $\frac{G(z)}{z}$. Donc, en appliquant à cette fonction g

le théorème d'inversion, on obtient donc, sur $[0, +\infty[: g(t) = \int_{\Delta_b} \frac{G(z)}{z} e^{zt} dz$.

En utilisant alors la définition de g , on en déduit que :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \frac{F(b + iy) - G(b + iy)}{b + iy} \exp(iyt) dy = 0$$

D'après un théorème concernant l'injectivité de la transformation de Fourier (Cf. [[24]], Théorème 113) on en déduit :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \frac{F(b + iy) - G(b + iy)}{b + iy} = 0$$

On peut conclure $F = G$. ◇

Le théorème qui suit établit une réciproque de la proposition 1.15.

Théorème 1.5 *Soit F une fonction analytique à l'extérieur d'un disque fermé $\overline{D}(0, R^{-1})$ et nulle à l'infini. Alors, cette fonction est, dans le demi-plan ouvert Π_R , une transformée de Laplace.*

Démonstration

◇ D'après les deux hypothèses, $1/R$ étant le rayon du disque D , on peut écrire le développement de Laurent de $F(z)$ pour $|z| > 1/R$ sous la forme :

$$F(z) = \sum_1^{+\infty} a_n z^{-n}. \text{ L'idée est, bien sûr, d'interpréter } z^{-n} \text{ comme une transformée}$$

de Laplace, à savoir celle de f_n définie par : $f_n(t) = \mathcal{U}(t)t^{n-1}/(n-1)!$. On est ainsi amené à poser : $f(t) = \sum_1^{+\infty} a_n f_n(t) = \mathcal{U}(t)g(t)$ où g est la somme de la série

$$\text{entière } \sum_1^{+\infty} \frac{a_n t^n}{n!}.$$

Trois problèmes sont posés : Cette fonction est-elle définie sur \mathbb{R}_+ , sa transformée existe-t-elle ? et, par ailleurs, sa transformée est-elle F ?

Pour tout $R' > R$, la fonction $z \mapsto F(\frac{1}{z})$ est majorée dans le disque fermé $\overline{D(0, R')}$.

Soit $M = \sup_{|z| \leq R'} |F(\frac{1}{z})|$. Alors, d'après les inégalités de Cauchy appliquées au dé-

veloppement en série entière $F(\frac{1}{z}) = \sum_1^{+\infty} a_n z^n$, on a : $|a_n| \leq MR'^n$. On en déduit

la majoration $|a_n|/(n-1)! \leq M \frac{R'^n}{(n-1)!}$ et, par conséquent, la série définissant g a un rayon de convergence infini.

De plus, cette même majoration conduit à l'inégalité :

$$|g(t)| \leq M \sum_0^{+\infty} (R')^{n+1} \frac{|t|^n}{n!} = MR' \exp(R'|t|)$$

On en déduit que l'abscisse de convergence absolue de f est inférieure à R' et cela quel que soit $R' > R$. La fonction f est donc un élément de \mathcal{L}_d avec $\zeta_a(f) \leq R$.

Il reste à prouver que la transformée de f est F . Pour cela, il suffit d'appliquer à cette fonction f la proposition 1.16. En effet, la série définissant f a bien un rayon infini et en multipliant le coefficient de t^n par $n!$, la série obtenue qui, dans le cas présent, est de coefficient a_n , admet le rayon R non nul. Cette proposition 1.16 nous dit alors que, pour $\Re(z) > 1/R$, la transformée de Laplace de f est la fonction définie par $\sum_1^{+\infty} a_n z^{-n}$. C'est donc bien la fonction F . ◇

1.10.4 Composition avec une fonction analytique

Théorème 1.6 *Soit f une fonction de \mathcal{L}_+ telle que $|f(t)| \leq M \exp(\alpha t)$ pour un certain réel α . Soit une fonction G somme d'une série entière dans un disque $D(0, R)$ telle que $G(0) = 0$. Alors, si on note $F = \mathcal{L}(f)$ la transformée de Laplace de f , la composée $G \circ F$ est définie et c'est une transformée de Laplace.*

Démonstration

◇ L'idée de la démonstration repose sur la propriété de la convolution itérée d'une

fonction f par elle-même qui est transformée par \mathcal{L} en une puissance de $\mathcal{L}(f)$. Nous aurons donc à effectuer la série de ces convolées.

Par hypothèse, dans le disque $D(0, R)$, on a : $G(z) = \sum_1^{+\infty} a_n z^n$. On majore d'abord $|F(s)|$ en supposant $\Re(s) = x > \alpha$:

$$|F(s)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)| \exp(-xt) dt \leq M \int_1^{+\infty} \exp[(\alpha - x)t] dt = \frac{M}{x - \alpha}$$

Soit $R_1 < R$; on peut choisir $\beta > \alpha$ tel que $M/(\beta - \alpha) \leq R_1$. Alors :

$$\Re(s) = x > \beta \Rightarrow |F(s)| \leq \frac{M}{x - \alpha} \leq \frac{M}{\beta - \alpha} \leq R_1$$

Il en résulte que, *sous cette condition*, $F(s)$ est dans un disque fermé où il y a convergence absolue et uniforme de la série entière, en particulier, on peut définir la composée comme une série de fonctions puissances :

$$H(s) = G(F(s)) = \sum_1^{+\infty} a_n [F(s)]^n$$

On sait que la convolée $f \star f$ a une abscisse de convergence absolue vérifiant $\zeta_a(f \star f) \leq \zeta_a(f) \leq \alpha$, ce qui permet de réitérer et, en notant f^{*n} la convolée n fois de f avec elle-même, d'en déduire que $\zeta_a(f^{*n}) \leq \alpha$.

Pour pouvoir définir la série $h = \sum_1^{+\infty} a_n f^{*n}$ qui, formellement, représente la fonction h dont la transformée de Laplace est H , il nous faut trouver des majorantes convenables pour les fonctions f^{*n} . Mais ceci est facile grâce à la propriété :

$$|f(t)| \leq M \exp(\alpha t)$$

On en déduit d'abord :

$$|f \star f(x)| = \left| \int_0^x f(t) f(x-t) dt \right| \leq M^2 \int_0^x e^{(\alpha t)} e^{\alpha(x-t)} dt = M^2 [x e^{\alpha x}]$$

Ensuite, en prenant comme hypothèse de récurrence :

$$|f^{*n}(x)| \leq M^n \left[\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \right] \exp(\alpha x),$$

on montre la majoration pour tout n :

$$|f^{*(n+1)}(x)| \leq M^{n+1} \int_0^x e^{\alpha t} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha(x-t)} dt = M^{n+1} e^{\alpha x} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

En effectuant cette dernière intégration, on obtient le résultat.

On en déduit donc une majoration du terme général de h et, si on utilise en outre les inégalités de Cauchy $|a_n| R_1^n \leq K$ où $K = \sup_{|z| \leq 1} |G(z)|$, on a :

$$|a_n f^{*n}(t)| \leq K \left(\frac{M}{R_1} \right)^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(\alpha t)$$

Cette majoration par le terme général d'une série partout convergente prouve que la fonction h qui est nulle sur \mathbb{R}_- est une fonction définie sur \mathbb{R} . Elle est même continue car le terme général est continu et la majoration sur $[0, A]$ de ce terme par $K \left(\frac{M}{R_1}\right)^n \frac{A^{n-1}}{(n-1)!} \exp(\alpha A)$ entraîne la convergence uniforme sur tout compact.

Ces majorations prouvent aussi que h possède une abscisse de convergence vérifiant $\zeta_a(h) \leq \frac{M}{R_1} + \alpha$. En effet :

$$|h(t)| \leq K \sum_1^{+\infty} \left(\frac{M}{R_1}\right)^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \exp(\alpha t) = K \frac{M}{R_1} \exp\left[\left(\frac{M}{R_1} + \alpha\right)t\right]$$

Reste à voir que la transformée de h est H .

On suppose désormais $\Re e(s) = x > \beta$. La convergence uniforme sur tout compact de la série définissant h permet l'interversion suivante :

$$\int_0^A h(t) \exp(-st) dt = \sum_1^{+\infty} \int_0^A a_n f^{*n}(t) \exp(-st) dt$$

Si on montre que le reste, noté R_N de la série du second membre peut être majoré par ε indépendamment de A , on pourra passer à la limite sous la sommation lorsque A tend vers $+\infty$. Or, dans ce reste, on peut majorer l'intégrale sur $[0, A]$ par l'intégrale sur $[0, +\infty[$ et, en vertu de ce qui précède, on obtient :

$$|R_N| = \left| \sum_N^{+\infty} a_n \int_0^A f^{*n}(t) e^{-st} dt \right| \leq \sum_N^{+\infty} |a_n| M^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-(\beta-\alpha)t} dt$$

Cette dernière intégrale est connue, sa valeur est $(\beta - \alpha)^{-n}$, donc inférieure à $(R_1/M)^n$. Finalement :

$$|R_N| \leq \sum_N^{+\infty} |a_n| M^n (R_1/M)^n = \sum_N^{+\infty} |a_n| R_1^n$$

La convergence de cette dernière série implique :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_0 \text{ tel que : } N > N_0 \Rightarrow \sum_N^{+\infty} |a_n| R_1^n \leq \varepsilon$$

Ce nombre N_0 est indépendant de A et fournit donc ce qui était annoncé :

$$N > N_0 \Rightarrow \left| \sum_N^{+\infty} a_n \int_0^A f^{*n}(t) \exp(-st) dt \right| \leq \varepsilon, \quad \forall A > 0$$

On en conclut que, pour $\Re e s > \beta$, on a :

$$\int_0^{+\infty} h(t) e^{-st} dt = \sum_1^{+\infty} a_n \int_0^{+\infty} f^{*n}(t) e^{-st} dt = \sum_1^{+\infty} a_n F(s)^n = (G \circ F)(s)$$

Le théorème est donc démontré. \diamond

Ce théorème fournira, à partir de transformées de Laplace connues, un grand nombre d'autres transformées, mais il faut se rendre compte que, dans la pratique, il sera en général difficile d'expliciter les originaux correspondants, ceux-ci faisant intervenir des séries de convolées. On trouvera des applications de ce théorème dans l'exercice 3.44.

1.10.5 Application des formules d'inversion

Les applications classiques de la transformation de Laplace résident dans le calcul opérationnel. Une équation fonctionnelle E , munie éventuellement de conditions initiales ou de conditions-frontière, étant transformée en une autre équation notée $\mathcal{L}(E)$, une des applications naturelles de la formule d'inversion est de déterminer l'original de la solution de $\mathcal{L}(E)$ si on sait résoudre cette équation transformée (Cf. §3 du chapitre 2). Cette application de la formule d'inversion réclame l'utilisation du théorème des résidus sur des contours convenables du champ complexe (Cf. §2 du chapitre 2) assortis de divers passages à la limite.

Parmi d'autres applications, notons celle qui consiste à déterminer les comportements au voisinage de 0 ou au voisinage de $+\infty$, la mise en place de diverses formules intégrales pour des fonctions spéciales et leur utilisation dans des prolongements analytiques, l'exploitation des propriétés de \mathcal{L} en les interprétant pour \mathcal{L}^{-1} . Nous commençons par une telle propriété qui va permettre de définir une convolution dite complexe.

1.10.6 Application à la convolution complexe

Théorème 1.7 *Soient deux fonctions f et g de \mathcal{L}_+ telles que $|f(t)| \leq A \exp(ct)$ et $|g(t)| \leq B \exp(dt)$. On suppose, en outre, que le produit fg est localement sommable. Alors, F et G désignant les deux transformées et Δ_a étant une droite parallèle à l'axe des imaginaires orientée dans le même sens et d'abscisse a tel que $a > c$, la transformée de Laplace de ce produit vérifie :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > a + d \Rightarrow \mathcal{L}(fg)(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta_a} F(\sigma)G(s - \sigma) d\sigma \quad (1.19)$$

Démonstration

\diamond L'hypothèse faite sur la locale sommabilité de fg est naturelle puisque, par exemple, la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est bien localement sommable alors que son carré ne l'est pas. Les majorations par des exponentielles impliquent la relation : $|f(t)g(t)| \leq AB \exp[(c+d)t]$, ce qui établit que l'abscisse de convergence absolue de fg vérifie $\zeta_a(fg) \leq c + d$. Ce produit est donc élément de \mathcal{L}_d .

Si $\Re(s) > c + d$, on peut trouver $a > c$ tel que $\Re(s) > a + d$. On applique alors la formule d'inversion pour la fonction f , en utilisant la droite d'intégration Δ_a , ce qui donne, en paramétrant cette droite, la relation :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(a + iy) \exp[(a + iy)t] dy$$

On remplace alors, dans l'intégrale définissant la transformée de fg , $f(t)$ au moyen de cette formule, avec toujours $\Re(s) > a + d$:

$$\mathcal{L}(fg)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} g(t)e^{-st} \left[\int_{\mathbb{R}} F(a + iy) \exp[(a + iy)t] dy \right] dt$$

Puisque $\Re(s - a - iy) > a + d - a = d$, la fonction $t \mapsto g(t) \exp((a + iy - s)t)$ est sommable sur \mathbb{R}_+ . La fonction $y \mapsto F(a + iy)$ l'est également sur \mathbb{R} . Il en résulte qu'on peut appliquer la formule de Fubini :

$$\mathcal{L}(fg)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(a + iy) \left[\int_0^{+\infty} g(t)e^{[(a+iy-s)t]} dy \right] dt$$

Cette relation peut aussi s'écrire :

$$\mathcal{L}(fg)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} F(a + iy) G(s - (a + iy)) dy$$

En revenant à l'intégration sur Δ_a , cette formule s'interprète comme une convolution le long de Δ_a , à savoir :

$$\mathcal{L}(fg)(s) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta_a} F(\sigma) G(s - \sigma) d\sigma \quad \diamond$$

1.10.7 Formules intégrales et prolongements analytiques

Exemple 1.2 Inverse de la Fonction eulérienne

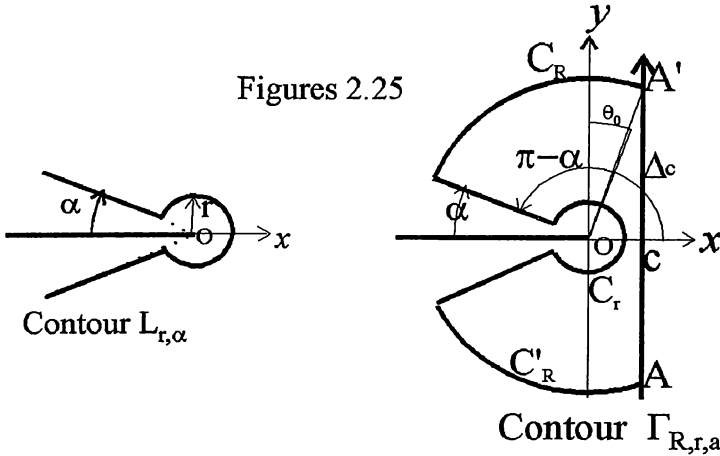
Pour $\Re \nu > -1$, la fonction $\mathcal{U}(t)t^\nu$ a pour image de Laplace (Cf. §1, chapitre 2) dans le demi-plan Π_0 la fonction $\frac{\Gamma(\nu + 1)}{s^{\nu+1}}$. En appliquant la formule d'inversion, on a, Δ_c étant une droite d'abscisse $c > 0$ arbitraire et t un réel positif arbitraire :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta_c} \frac{\exp(zt)}{[z^{\nu+1}]} dz = \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}$$

On va prolonger analytiquement cette formule en procédant (ce qui sera un procédé très utilisé dans la suite) à une *déformation de contour*.

La fonction $\frac{1}{z^{\nu+1}}$ ayant un point de branchement en 0, du moins si ν est non entier, on établit une coupure γ issue de 0, s'identifiant par exemple à l'axe des réels négatifs. Dans l'ouvert $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma$, la fonction $g(z) = \frac{\exp(zt)}{[z^{\nu+1}]}$, où le crochet au dénominateur indique que cette puissance prolonge la fonction $x \mapsto x^{\nu+1}$ sur les réels positifs, est holomorphe. Par conséquent, par le théorème de Cauchy, son intégrale sur le chemin fermé $\Gamma_{R,r,\alpha}$ (Cf. figure ci-après) est nulle.

Figures 2.25



En utilisant une proposition dite : «**lemme de Jordan**», on montre la propriété suivante :

$$\forall \alpha, \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} g(z) dz = 0$$

Ce lemme, très utile dans la suite, est énoncé ici dans le contexte de la formule d'inversion. :

Lemme 1.3 Soit φ une fonction continue dans un secteur $S_{(z_0, -)}$ de sommet z_0 contenu dans le demi-plan fermé $\{z \mid \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Re}(z_0)\}$. Soit d'autre part un arc de cercle C_R de centre z_0 et de rayon R inclus dans ce secteur. Alors, si $\varphi(z)$ converge uniformément vers 0 lorsque $|z| \rightarrow +\infty$, z restant dans $S_{(z_0, -)}$, on a, quel que soit $t > 0$, le résultat :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} \varphi(z) \exp(zt) dz = 0$$

Démonstration

◇ Par hypothèse :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A, \forall z \in S_{(z_0, -)}, |z| \geq A \Rightarrow |\varphi(z)| \leq \varepsilon$$

Soient θ_1 et θ_2 les angles polaires, relativement à l'origine prise en z_0 , des extrémités de l'arc C_R , qui vérifient donc la condition $\pi/2 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \frac{3}{2}\pi$. Alors, en choisissant $R > A$, on a, par paramétrage de l'arc, la majoration suivante :

$$\left| \int_{C_R} \varphi(z) dz \right| \leq R\varepsilon \int_{\theta_1}^{\theta_2} \exp(Rt \cos \theta) d\theta \quad (*)$$

On peut majorer cette dernière intégrale en la prenant sur $[\pi/2, \frac{3}{2}\pi]$ et utiliser une minoration classique de $\sin u$ dans l'intervalle $[0, \pi/2]$.

On obtient ainsi :

$$\int_{\pi/2}^{\frac{3}{2}\pi} e^{(Rt \cos \theta)} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} e^{(-Rt \sin \theta)} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} \exp(-Rt \frac{2}{\pi} \theta) d\theta < \frac{\pi}{Rt}$$

La relation (*) précédente devient ainsi :

$$\forall R, \quad R > A \Rightarrow \left| \int_{C_R} \varphi(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{t} \varepsilon$$

Autrement dit l'intégrale tend bien vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$. \diamond

Remarque 1.13 *Bien entendu, le lemme reste valable en remplaçant t par $-t$, si l'arc de cercle C_R est dans un secteur $S_{(z_0,+)$, donc à droite de z_0 . Par ailleurs, le lemme est inutile si C_R vérifie $\alpha_1 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \alpha_2$, avec $\alpha_1 > \pi/2$ et $\alpha_2 < 3\pi/2$ car une minoration uniforme de $\cos \theta$ donne immédiatement le résultat.*

Retournons à notre exemple. La fonction φ concernée est définie par $\varphi(z) = z^{-\nu-1}$ avec $\Re \nu > -1$. La condition du lemme y est donc vérifiée sur les arcs de C_R qui sont à gauche de l'axe des y . Il en résulte que les intégrales sur ces arcs tendent vers 0. Sur les arcs situés à droite de l'axe des y et à gauche de Δ_c , la majoration : $|g(z)| \leq \theta_0 e^{ct} R^{-\Re(\nu)}$ où θ_0 (voir la figure ci-dessus) est un majorant de l'angle au centre de l'arc, donne également le résultat.

Il résulte de tout ceci que l'égalité de Cauchy fournit à la limite une autre définition intégrale de $\frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)}$:

$$\Re(\nu) > -1 \Rightarrow \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu+1)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta_c} \frac{\exp(z t)}{[z^{\nu+1}]} dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{L_{\alpha,r}} \frac{\exp(z t)}{[z^{\nu+1}]} dz \quad (*)$$

C'est cette égalité qui traduit ce qu'on appelle la déformation du chemin Δ_c en le chemin $L_{\alpha,r}$, orienté dans le sens direct. Ce dernier, appelé aussi «**lacet associé à γ** » enferme cette coupure à l'aide d'un arc de cercle de centre O et de rayon r et de deux demi-droites, issues de O , symétriques par rapport à Ox , faisant entre elles l'angle 2α , lequel est arbitrairement petit. L'intégrale sur ce lacet est donc indépendante de r et de α , c'est pourquoi on peut le noter plus simplement L .

On considère à présent l'égalité obtenue comme étant, à $t > 0$ fixé, l'égalité de deux fonctions de ν . Soit la fonction g^* définie par

$$g^*(\nu) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\exp(z t)}{[z^{\nu+1}]} dz$$

Elle est analytique en ν dans la totalité de \mathbb{C} . En effet, la fonction sous le signe intégral $(z, \nu) \mapsto h((z, \nu))$ est holomorphe en ν dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma$, continue sur L quel que soit $\nu \in \mathbb{C}$ et la dérivée qui est égale à la constante $\ln t$ près à la fonction $\nu \mapsto -(\nu+1)h(z, \nu)z^{-1}$, a les mêmes propriétés. Il en résulte que, si on note L_n l'ensemble des points de L de module $\leq n$, la fonction $g_n^* = \frac{1}{2i\pi} \int_{L_n} h((z, \nu)) dz$ est analytique dans \mathbb{C} .

De plus, si on suppose que ν reste dans un domaine borné, il existe k tel que

$$|h(z, \nu)| \leq \frac{\exp(t \Re(z))}{|z|^k}$$

Ceci entraîne que les intégrales sur les demi-droites de L convergent uniformément par rapport à ν sur tout domaine borné. De là, découle la convergence uniforme

de la suite (g_n^*) vers sa limite g^* . D'après le théorème de Weierstrass sur les suites de fonctions holomorphes, la fonction g^* est holomorphe dans le plan des ν .

Par ailleurs, on sait que les fonctions $\nu \mapsto \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)}$ et $\nu \mapsto t^\nu = \exp(\nu \ln t)$ (car $t > 0$) sont analytiques dans le plan complexe. On déduit donc de ce qui précède une nouvelle formule intégrale pour le prolongement analytique du produit de ces deux fonctions.

Proposition 1.20 *La fonction entière : $\nu \mapsto \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu + 1)}$ admet pour représentation intégrale :*

$$\forall \nu \in \mathbb{C}, \quad \frac{t^\nu}{\Gamma(\nu + 1)} = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{\exp(z t)}{[z^{\nu+1}]} dz \quad (1.20)$$

Exemple 1.3 *Fonction de Bessel d'indice quelconque*

On commence par le cas d'un indice p entier positif. On rappelle que la fonction J_p est définie par la série entière :

$$J_p(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^p \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Comme $\frac{1}{(n+p)!}$ est le résidu en $u = 0$ de $u \mapsto \frac{\exp(u)}{u^{n+p+1}}$, on peut remplacer cette fraction par une intégrale le long d'un cercle C_r de centre O et de rayon r. ce qui permet d'écrire :

$$J_p(z) = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^p \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{C_r} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n} \frac{\exp u}{u^{n+p+1}} du$$

En faisant apparaître la puissance de $\frac{z^2}{4u}$ et en permutant l'intégrale et une série entière qui est donc uniformément convergente sur le cercle C_r , on obtient :

$$J_p(z) = \frac{(z/2)^p}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{\exp u}{u^{p+1}} \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{z^2}{4u}\right)^n du = \frac{(z/2)^p}{2i\pi} \int_{C_r} \frac{\exp(u - \frac{z^2}{4u})}{u^{p+1}} du$$

Dans le cas d'un indice λ réel ou complexe non entier négatif, le développement en série s'écrit :

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\lambda \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + 1 + \lambda)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

On peut reprendre la méthode précédente en utilisant, cette fois, la représentation intégrale, valable pour tout λ de $\frac{1}{\Gamma(n + 1 + \lambda)}$, obtenue en prenant $t = 0$ dans la proposition précédente. La démarche suivie reste la même et on aboutit à une

formule du même type où l'entier p est remplacé par l'indice λ et le cercle remplacé par le lacet L . Bien entendu, si $\Re(\lambda) > -1$, on peut utiliser la représentation intégrale définie directement par la formule d'inversion de Laplace des fonctions puissances.

Proposition 1.21 *La fonction de Bessel d'indice λ admet les représentations intégrales suivantes :*

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) > -1 \Rightarrow J_\lambda(z) = \frac{(z/2)^\lambda}{2i\pi} \int_{\Delta_c} \frac{\exp(u - \frac{z^2}{4u})}{u^{\lambda+1}} du \quad (1.21)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \Re(\lambda) > -1 \Rightarrow J_\lambda(z) = \frac{(z/2)^\lambda}{2i\pi} \int_L \frac{\exp(u - \frac{z^2}{4u})}{u^{\lambda+1}} du \quad (1.22)$$

Remarque 1.14 *Dans le cas d'un entier p positif, le lacet L est remplacé par le cercle C_r .*

On peut voir que ceci n'est pas contradictoire. En effet, les deux intégrales sur les deux demi-droites deviennent, lorsque $\alpha \rightarrow 0$, égales à deux intégrales convergentes opposées l'une à l'autre, la coupure étant d'ailleurs inutile puisque dans le cas étudié, il n'y a plus de point de branchement.

1.10.8 Comportement asymptotique d'un original au voisinage de l'infini

Lorsque les calculs, par utilisation de la formule d'inversion, n'aboutissent pas, il est cependant possible quelquefois d'obtenir, encore par déformation de Δ_c , l'expression du comportement à l'infini de l'original recherché. En fait, c'est la considération des points singuliers de F les plus proches de la droite limitant le demi-plan d'holomorphie qui fournissent ces comportements. Nous considérons des exemples où ces points singuliers sont des pôles et d'autres où ce sont des points de branchement.

Exemple 1.4 *Situation où le point singulier le plus à droite est un pôle simple*

Soit la fonction F holomorphe dans le demi-plan ouvert Π_a et admettant un point singulier unique z_0 sur la frontière de ce demi-plan, ce point étant un pôle simple pour F . Ayant pris $c > a$ pour écrire la formule d'inversion et choisissant $\varepsilon > 0$ de façon que les autres points singuliers soient à gauche de $a - \varepsilon$, on fait les hypothèses suivantes :

- (i) $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} F(x + iy) = 0$, uniformément en x pour $x \in [a - \varepsilon, c]$,
- (ii) L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} F(x + iy) dy$ converge absolument pour tout $x \in [a - \varepsilon, c]$.

Sous ces conditions, nous voulons trouver un équivalent de l'original f pour les grandes valeurs de t . On utilise le contour rectangulaire Γ de sommets B, B', A', A (Cf. figure (1) ci-après) situé dans un ouvert où la fonction est holomorphe sauf

au point z_0 qui est à l'intérieur de ce contour. Le théorème des résidus nous donne :

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} \exp(z t) F(z) dz = \text{Rés}(\exp(z t) F(z); z_0) = \exp(t z_0) \text{Rés}(F(z); z_0)$$

Sur le chemin $[A', A]$ d'ordonnée $-\sigma$, on a la majoration :

$$\left| \int_{[A', A]} \exp(z t) F(z) dz \right| \leq (c - a + \varepsilon) \exp(c t) \sup_{x \in [a - \varepsilon, c]} |F(x - i \sigma)|$$

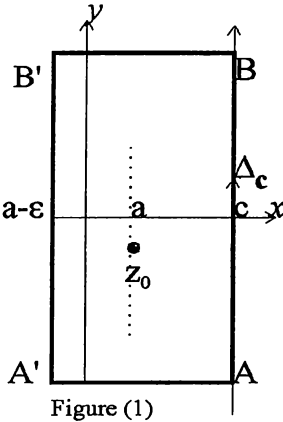


Figure (1)

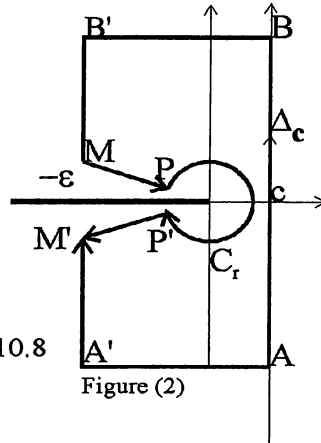


Figure (2)

Figures 1.10.8

Il en résulte par l'hypothèse (i) que cette intégrale tend vers 0 lorsque $\sigma \rightarrow +\infty$. Il en est de même pour l'intégrale sur $[B', B]$. Sur le segment vertical $[A, B]$, une majoration, utilisant l'hypothèse (ii) d'absolue convergence nous donne, lorsque $\sigma \rightarrow +\infty$ et quel que soit ε :

$$\left| -i \int_{\mathbb{R}} \exp((a - \varepsilon + iy)t) F((a - \varepsilon + iy)) dy \right| \leq \exp((a - \varepsilon)t) \int_{\mathbb{R}} |F((a - \varepsilon + iy))| dy$$

Cette dernière intégrale peut donc s'écrire $K \exp(t z_0) \exp(-\varepsilon)t$ avec le facteur $\exp(-\varepsilon)t$ qui tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$. On en déduit, en utilisant le théorème d'inversion, le résultat suivant :

Proposition 1.22 *Soit F , holomorphe dans le demi-plan ouvert Π_a et n'admettant, sur la frontière de ce demi-plan, qu'un point singulier unique z_0 qui est un pôle simple pour F . Si on suppose :*

- (i) $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} F(x + iy) = 0$, uniformément en x pour $x \in [a - \varepsilon, c]$,
- (ii) L'intégrale $\int_{\mathbb{R}} F(x + iy) dy$ converge absolument pour tout $x \in [a - \varepsilon, c]$.

Alors, lorsque $t \rightarrow +\infty$, on a l'équivalence :

$$f(t) \sim \exp(t z_0) \text{Rés}(F(z); z_0)$$

Exemple 1.5 *Situation où le point singulier le plus à droite est un point de branchement*

On fait les mêmes hypothèses que les précédentes, mais on suppose que le point singulier z_0 est celui où les branches d'une fonction multiforme de type puissance à exposant non entier s'échangent, autrement dit un point de branchement. On peut exprimer ceci sous la forme générale :

$$F(z) = (z - z_0)^{\gamma-1}G(z),$$

où G est holomorphe au point z_0 , le nombre γ vérifiant $0 < \gamma < 1$. Dans ce cas, nous obtenons :

Proposition 1.23 *Soit F , holomorphe dans le demi-plan ouvert Π_a et n'admettant, sur la frontière de ce demi-plan, qu'un point singulier unique z_0 qui est un point de branchement pour F . Si on suppose :*

- (i) $\lim_{y \rightarrow \pm\infty} F(x + iy) = 0$, uniformément en x pour $x \in [a - \varepsilon, c]$,
- (ii) L 'intégrale $\int_{\mathbb{R}} F(x + iy) dy$ converge absolument pour tout $x \in [a - \varepsilon, c]$.
- (iii) Au voisinage de z_0 , on a : $F(z) = K(z - z_0)^{\gamma-1}G(z)$ avec G holomorphe au point z_0 , le nombre γ vérifiant $0 < \gamma < 1$.

Alors, on a le développement asymptotique :

$$f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(tz_0) \frac{\sin \pi\gamma}{\pi} \sum_0^{+\infty} (-1)^n G^{(n)}(z_0) \frac{\Gamma(\gamma + n)}{n!}$$

Démonstration

◇ Pour simplifier, on utilise la translation $z = z_0 + u$ de la variable d'intégration dans la formule d'inversion, ce qui revient à transporter le point de branchement à l'origine pourvu que la transformée inverse alors obtenue soit multipliée par $\exp(tz_0)$. On pouvait d'ailleurs utiliser cette translation dans l'exemple précédent. On utilise un nouveau contour (Cf. (2) dans la figure 1.10.7 précédente) tenant compte de la coupure issue de z_0 . A cause des hypothèses (i) et (ii), les intégrales sur les segments $[A'A]$, $[BB']$, $[B'M]$, $[M'A']$ tendent toujours vers 0.

Il reste à considérer le lacet. Une majoration sur le petit cercle montre que l'intégrale correspondante tend vers 0. En effet, M désignant la borne supérieure de $|G|$ sur un disque fermé de centre 0 dans le domaine d'holomorphic de G , on a, puisque $\gamma > 0$:

$$r \rightarrow 0 \Rightarrow \left| \int_{C_r} \exp(zt) [z^{\gamma-1}] G(z) dz \right| \leq r^\gamma \exp(rt) M \rightarrow 0$$

Sur le segment $[MP]$ qui fait l'angle $\pi - \alpha$ avec Ox , on écrit d'abord :

$$\int_{[MP]} e^{zt} F(z) dz = \int_{\left| \frac{\varepsilon}{\cos \alpha} \right|}^r \exp(tue^{i(\pi-\alpha)}) u^{\gamma-1} e^{i(\gamma-1)(\pi-\alpha)} G(ue^{i(\pi-\alpha)}) e^{i(\pi-\alpha)} du$$

Lorsque l'angle α tend vers 0, la composition de la continuité de la fonction en (u, α) sous l'intégrale et de la continuité de l'intégrale par rapport à la borne

inférieure autorise le passage à la limite sous l'intégrale.

On obtient ainsi :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{[MP]} \exp(z t) F(z) dz = \int_r^\epsilon \exp(-t u) u^{\gamma-1} \exp(i(\gamma-1)\pi) G(-u) du$$

Lorsqu'ensuite $r \rightarrow 0$, on obtient :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0, r \rightarrow 0} \int_{[MP]} \exp(z t) F(z) dz = \int_0^\epsilon \exp(-t u) u^{\gamma-1} \exp(i(\gamma-1)\pi) G(-u) du$$

Un calcul du même type sur $[P', M']$ donne une formule semblable où π est remplacé par $-\pi$.

Il résulte de tout ce qui précède la formule qui se substitue, grâce au théorème de Cauchy, à la formule d'inversion :

$$f(t) = -\frac{1}{2i\pi} \lim \int_{[MP] \cup [P'M']} e^{z t} F(z) dz = \frac{\sin(\gamma\pi)}{\pi} \int_0^\epsilon e^{-t u} u^{\gamma-1} G(-u) du \quad (*)$$

Il s'agit maintenant d'étudier le comportement de cette dernière intégrale lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Considérons d'abord le cas particulier de $G(z) = z^n$.

Le changement de variable $t u = v$ nous fournit :

$$W_n = \int_0^\epsilon \exp(-t u) u^{\gamma-1} (-u)^n du = \frac{(-1)^n}{t^{\gamma+n}} \int_0^{t\epsilon} \exp(-v) v^{n+\gamma-1} dv$$

Puisque le quotient de cette dernière intégrale par sa limite lorsque $t \rightarrow +\infty$, à savoir $\Gamma(\gamma+n)$ est égal à 1, on en déduit l'équivalence suivante :

$$W_n \stackrel{t \rightarrow +\infty}{\sim} \widetilde{W}_n = \frac{(-1)^n}{t^{\gamma+n}} \Gamma(\gamma+n)$$

Comme ϵ est arbitrairement petit, on peut supposer que la série de Taylor $\sum_0^{+\infty} a_n z^n$ de G converge dans le disque de rayon 2ϵ de sorte que, par intégration terme à terme,

$$f(t) = \frac{\sin(\gamma\pi)}{\pi} \sum_0^{+\infty} a_n W_n$$

Par conséquent, on est amené à montrer que $\sum_0^{+\infty} a_n \widetilde{W}_n$ est un développement asymptotique lorsque $t \rightarrow +\infty$ de $\sum_0^{+\infty} a_n W_n$. Autrement dit, il faut prouver que, pour tout entier N fixé,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\gamma+N} \left[\sum_0^{+\infty} a_n W_n - \sum_0^N a_n \widetilde{W}_n \right] = 0$$

Cette expression se décompose en la somme de deux termes qui sont :

$$U_N = t^{\gamma+N} \sum_0^N a_n [W_n - \widetilde{W}_n]$$

et

$$R_N = t^{\gamma+N} \sum_{N+1}^{+\infty} a_n W_n$$

Les propriétés des séries entières impliquent :

$$v/t \leq \varepsilon \Rightarrow \sum_{N+1}^{+\infty} |a_n [v/t]^n| < M,$$

où M est une constante indépendante de t .

Il en résulte pour R_N , lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$\begin{aligned} |R_N| &= \left| \sum_{N+1}^{+\infty} a_n (-1)^n t^{N-n} \int_0^{t\varepsilon} e^{-v} v^{n+\gamma-1} dv \right| \\ &= \frac{1}{t} \left| \int_0^{t\varepsilon} e^{-v} v^{\gamma+N-1} \sum_{N+1}^{+\infty} a_n (-1)^n t^{N-n} dv \right| \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^{t\varepsilon} e^{-v} v^{\gamma+N-1} \varepsilon^{-N} \left[\sum_{N+1}^{+\infty} |a_n [v/t]^n| \right] dv \\ &\leq \frac{M}{t} \varepsilon^{-N} \int_0^{t\varepsilon} e^{-v} v^{\gamma+N-1} dv \\ |R_N| &\leq \frac{M}{t} \varepsilon^{-N} \int_0^{+\infty} e^{-v} v^{\gamma+N-1} dv \\ &\leq \frac{M}{t} \varepsilon^{-N} \Gamma(\gamma + N) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$|W_n - \widetilde{W}_n| = t^{-\gamma-n} \int_{t\varepsilon}^{+\infty} e^{-v} v^{n+\gamma-1} dv$$

devient, par le changement de variable $v = t\varepsilon + w$:

$$\begin{aligned} |W_n - \widetilde{W}_n| &= t^{-\gamma-n} \int_0^{+\infty} e^{-t\varepsilon-w} (t\varepsilon + w)^{n+\gamma-1} dw \\ &= e^{-t\varepsilon} \int_0^{+\infty} e^{-w} (t\varepsilon + w)^{-1} \left(\varepsilon + \frac{w}{t}\right)^{n+\gamma} dw \end{aligned}$$

Il s'ensuit que le terme général de U_N est majoré par $t^{\gamma+N} e^{-t\varepsilon} K(t)$ où l'intégrale $K(t)$ admet une limite finie. La présence de l'exponentielle en facteur implique alors que ce terme général tend vers 0 et, par conséquent, que la somme finie constituée par U_N tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

En remplaçant d'une part le facteur $\exp(-tz_0)$ provenant de la translation ramenant z_0 à l'origine, en remplaçant d'autre part le coefficient a_n par $\frac{G^{(n)}(z_0)}{n!}$, puis en tenant compte du facteur $\frac{\sin(\gamma\pi)}{\pi}$ dans la relation (*), on obtient alors le développement asymptotique annoncé. \diamond

Chapitre 2

Calculs d'images de Laplace et applications

2.1 Calculs de transformées de Laplace de fonctions

2.1.1 Détermination par des calculs élémentaires

On rappelle que l'on note \mathcal{U} la fonction "échelon-unité".

Exemple 2.1 (Les fonctions exponentielles)

Soit $f(t) = \mathcal{U}(t) \exp[(a + i\omega)t]$. Les abscisses vérifient $\zeta_c(f) = \zeta_a(f) = a$. Le calcul est immédiat :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > a \Rightarrow F(s) = \int_0^{+\infty} \exp[(a + i\omega - s)t] dt = \frac{1}{(s - a - i\omega)}$$

A partir de ce résultat, on obtient les images des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} &\mathcal{U}(t) \sin(\omega t), \quad \mathcal{U}(t) \cos(\omega t), \quad \mathcal{U}(t) \exp(at) \sin(\omega t), \quad \mathcal{U}(t) \exp(at) \cos(\omega t) \\ &\mathcal{U}(t)(-t)^n \exp(at) \cos(\omega t), \quad \mathcal{U}(t)(-t)^n \exp(at) \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Ces derniers étant obtenus par le théorème 1.1. Ces résultats, ainsi que ceux qui concernent les fonctions hyperboliques, sont consignés dans le tableau T_1 construit ci-après.

Exemple 2.2 (Les fonctions puissances)

La fonction $t \mapsto \mathcal{U}(t)$ admet des abscisses nulles et sa transformée est définie par $F(s) = 1/s$. Les fonctions $t \mapsto \mathcal{U}(t)t^n$ où n est un entier ont également des abscisses de convergence nulles et, par récurrence, on a :

$$\int_0^{+\infty} t^n \exp(-st) dt = n \int_0^{+\infty} t^{n-1} \exp(-st) dt$$

ou bien encore :

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

D'ailleurs, ce même résultat peut être obtenu par multiplication de l'échelon-unité par $(-t)^n$ puisque, d'après le théorème 1.1, la nouvelle transformée est alors la dérivée n-ième de $s \mapsto 1/s$, laquelle est bien $(-1)^n/s^{n+1}$. Les résultats sont consignés dans le tableau qui suit :

Premier tableau T_1 d'images de Laplace usuelles

Original f	Image F	$\sigma(f)$	Original f	Image F	$\sigma(f)$
$\mathcal{U}(t) \exp(zt)$	$\frac{1}{s-z}$	$\Re(z)$	$\mathcal{U}(t)t^n$	$n!/s^{n+1}$	0
$\mathcal{U}(t) \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	0	$\frac{\mathcal{U}(t)}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{[\sqrt{s}]}$ *	0
$\mathcal{U}(t) \cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	0	$\mathcal{U}(t)t^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha + 1)}{[s^{\alpha+1}]}$ **	0
$\mathcal{U}(t) \text{ch}(bt)$	$\frac{s}{s^2 - b^2}$	$ b $	$\mathcal{U}(t)(-t)^n \sin(\omega t)$	$\left[\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}\right]^{(n)}$	0
$\mathcal{U}(t) \text{sh}(bt)$	$\frac{b}{s^2 - b^2}$	$ b $	$\mathcal{U}(t)(-t)^n \cos(\omega t)$	$\left[\frac{s}{s^2 + \omega^2}\right]^{(n)}$	0

Dans ce tableau, les dérivées indiquées sont relatives à la variable s et les fonctions affectées de crochet sont précisées par les notes (*)¹ et (**)².

Donnons les détails de calcul pour la puissance d'exposant quelconque α , avec la condition de sommabilité locale $\alpha > -1$. On peut se contenter de faire ce calcul lorsque s est réduit à la variable réelle x . On trouve, dans ce cas, un résultat qui, grâce au changement de variable $u = xt$, s'exprime à l'aide de la fonction eulérienne Γ :

$$x > 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} t^\alpha \exp(-xt) dt = \frac{1}{x^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^\alpha \exp(-u) du = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{x^{\alpha+1}}$$

La fonction obtenue se prolonge analytiquement dans \mathbb{C} privé d'une coupure issue du point O et placée dans le demi-plan des abscisses négatives. On sait que la fonction F transformée de $f : t \mapsto \mathcal{U}(t)t^\alpha$ est analytique dans le demi-plan Π_0 . Cette fonction F coïncide, sur l'axe des réels strictement positifs, avec la fonction $\Gamma(\alpha + 1)x^{-(\alpha+1)}$. En notant le prolongement de cette dernière puissance par $[s^{-(\alpha+1)}]$, la fonction F s'exprime donc, dans tout le demi-plan Π_0 , par :

$$F(s) = \Gamma(\alpha + 1)[s^{-(\alpha+1)}]$$

Remarque 2.1 La formule concernant la puissance $t \mapsto t^\alpha$ reste valable lorsque α est complexe (Cf. Proposition 1.8).

¹Le symbole "racine carrée", mis entre crochet (Cf.§1.5.3, exemple1.1), signifie que cette fonction est calculée au moyen de l'argument de s imposé dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

²Lorsque α est non entier, la notation "crochet" (Cf.§1.5.3, exemple1.1) signifie que cette puissance est calculée en imposant l'argument de s dans $]-\pi/2, \pi/2[$.

Il suffit, pour cela, que $\Re \alpha > -1$. Dans la transformée, on utilise alors le prolongement analytique de Γ qui est défini dans le plan complexe privé de tous les réels entiers négatifs ou nuls (Cf. Annexe 1).

Exemple 2.3 (La fonction logarithme népérien)

La fonction $\mathcal{U} \ln$ est causale et localement sommable. Son abscisse de convergence est nulle et on a :

$$\mathcal{L}(\mathcal{U} \ln)(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-xt) \ln t dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \exp(-u) [\ln u - \ln x] du$$

Soit C la constante définie par $C = \int_0^{+\infty} \exp(-u) \ln u du$; le prolongement analytique, dans l'ouvert Π_0 , de la fonction de la variable réelle x obtenue ci-dessus, nous donne :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U} \ln)(s) = \frac{1}{s} (C - [\log](s))$$

L'intégrale définissant la constante C est obtenue par dérivation de la fonction eulérienne Γ (Cf. Annexé 1).

En effet, la dérivation sous le signe intégral (qui se justifie aisément) nous fournit la relation :

$$\frac{d}{dt} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{t-1} du \Big|_{t=1} = \int_0^{+\infty} e^{-u} (\ln u) u^{t-1} du \Big|_{t=1} = \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln u du$$

On obtient donc $C = \Gamma'(1)$ et finalement, puisque $\Gamma'(1) = -\gamma$, constante d'Euler (Cf. Annexe 1), concluons :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U} \ln)(s) = -\frac{1}{s} \left([\log](s) + \gamma \right) \quad (2.1)$$

Exemple 2.4 (Les produits du logarithme par des puissances)

La fonction $t \mapsto f(t) = \mathcal{U}(t) (\ln t) t^\alpha$ est causale et localement sommable lorsque $\alpha > -1$. Son abscisse de convergence est nulle et on a, pour tout réel $x > 0$:

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \exp(-xt) t^\alpha \ln t dt = x^{-(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} u^\alpha \exp(-u) [\ln u - \ln x] du$$

Soit C la constante définie par $C = \int_0^{+\infty} u^\alpha \exp(-u) \ln u du$, d'ailleurs égale à $\Gamma'(\alpha+1)$ (voir ci-dessus). La relation précédente, prolongée analytiquement dans Π_0 , fournit alors, en précisant que la formule obtenue est valable quel que soit $\alpha > 0$, entier ou non :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U} t^\alpha \ln t)(s) = \frac{1}{[s^{\alpha+1}]} \left[\Gamma'(\alpha+1) - [\log](s) \Gamma(\alpha+1) \right] \quad (2.2)$$

On peut poursuivre avec les fonctions $t \mapsto f_2(t) = \mathcal{U}(t) (\ln t)^2 t^\alpha$. Le procédé précédent fournit aisément, lorsque $\Re s > -1$:

$$\mathcal{L}(Ut^\alpha(\ln t)^2)(s) = \frac{1}{[s^{\alpha+1}]} \left[\Gamma''(\alpha+1) - 2[\log](s)\Gamma'(\alpha+1) + [\log]^2(s)\Gamma(\alpha+1) \right] \quad (2.3)$$

En généralisant, on voit que l'image de Laplace de f_n où $f_n(t) = U(t)(\ln t)^{nt^\alpha}$, n étant un entier positif, est donnée par une combinaison linéaire des fonctions du type : $[s^{-(\alpha+1)}][\log]^k(s)$, avec $0 \leq k \leq n$, les coefficients étant des produits de coefficients du binôme par des dérivées de Γ au point $\alpha + 1$.

Ajoutons que ces formules peuvent être étendues au cas où α est un complexe quelconque vérifiant : $\Re(\alpha) > -1$.

2.1.2 Transformation des fonctions périodiques

Soit f une fonction périodique de période a . Désignons par g sa restriction à $[0, a[$ prolongée par 0 hors de $[0, a]$ et supposons cette fonction sommable.

Alors, si on désigne par G la transformée de g qui est partout définie, il est facile d'exprimer la transformée de $t \mapsto U(t)f(t)$ à l'aide de celle de g . On a, en effet :

$$\begin{aligned} \Re(s) > 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-st) dt &= \sum_0^{+\infty} \int_{ka}^{(k+1)a} f(t) \exp(-st) dt \\ &= \sum_0^{+\infty} \int_0^a g(u) \exp(-s(u+ka)) du = \sum_0^{+\infty} \exp(-kas) G(s) \end{aligned}$$

Il en résulte que l'intégrale de Laplace de Uf est convergente si et seulement si la série géométrique de terme général $\exp(-kas)$ est convergente. On en déduit que les deux abscisses de convergence sont égales à 0 et que la transformée de Uf est définie par la somme de cette série géométrique de raison $\exp(-as)$:

Remarque 2.2 Une autre méthode, utilisant la propriété de \mathcal{L} vis-à-vis des translations, peut être exploitée. L'égalité : $g = Uf - (Uf)_a$ donne, en effet : $G(s) = (1 - \exp(-as))F(s)$.

Proposition 2.1 Si f est une fonction périodique de période a , la fonction Uf a une abscisse de convergence (ou de convergence absolue) nulle et, si G désigne l'image de Laplace de la restriction de f à $[0, a]$, on a :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(Uf)(s) = \frac{G(s)}{1 - \exp(-sa)} \quad (2.4)$$

2.1.3 Utilisation des propriétés de la transformation

Dans la recherche de l'image du quotient de $f(t)$ par la variable t , on est amené à une primitivation, d'où l'obtention du résultat à une constante près. Le calcul de cette constante utilise souvent les théorèmes de valeur initiale.

Exemple 2.5

Soit la fonction f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t)(\sin(at)/t)$ où a est réel. Elle est continue et bornée et on en déduit facilement que $\zeta_c(f) = 0$. Son produit par t a pour image de Laplace dans Π_0 la fonction $s \mapsto a/(a^2 + s^2)$.

On en déduit, par primitivation, en se limitant d'abord à la variable réelle x , que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(f)(x) = -\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

Puisque cette image tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$, on en déduit que $C = \pi/2$.

En désignant ensuite le prolongement de \arctan dans π_0 ³ par un crochet. on en déduit :

$$\boxed{\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left(\mathcal{U}(t)\frac{\sin(at)}{t}\right)(s) = \left[\arctan\left(\frac{a}{s}\right)\right] \quad (2.5)}$$

Exemple 2.6

Soit g définie par $g(t) = \mathcal{U}(t)(\sin^2(at)/t)$ où a est réel.

A l'aide du passage à l'angle $2at$, l'image de $2\mathcal{U}(t)\sin^2(at)$ est : $\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 4a^2}$. Il en résulte :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(g)(x) = -\frac{1}{4}[\ln(x^2) - \ln(x^2 + 4a^2)] + C$$

La fonction sous le crochet tend vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$, la constante est donc nulle. Le prolongement analytique nous donne finalement :

$$\boxed{\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)\left(\frac{\sin^2(at)}{t}\right)\right](s) = \frac{1}{4}\left[\log\left(1 + 4\frac{a^2}{s^2}\right)\right] \quad (2.6)}$$

Exemple 2.7

Soit la fonction h définie par : $h(t) = \mathcal{U}(t)\left(\frac{\sin^2(at)}{t^2}\right)$ où a est réel. Cette fonction est continue, bornée et même sommable. Son abscisse est nulle. En utilisant la dérivée de la fonction g précédente, on a : $g'(t) = -h(t) + a\frac{\sin(2at)}{t}$.

En passant par la primitivation de $\frac{2a}{4a^2 + x^2}$ et en tenant compte de la constante, on obtient, pour image de $\frac{\sin(2at)}{t}$, la fonction : $x \mapsto \arctan(2a/x)$.

En utilisant alors la formule précédente et la transformée $\mathcal{L}(g') = s\mathcal{L}(g)$ puisque $g(0+) = 0$, on obtient grâce aux résultats précédents (en faisant, en outre, un prolongement analytique) la relation où on suppose $\Re(s) > 0$:

³Ce prolongement est défini à l'aide de la différence de logarithmes complexes dont les points de branchement sont i et $-i$, laissant donc Π_0 inclus dans le domaine d'holomorphie

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{U}(t)\frac{\sin^2(at)}{t^2}\right)(s) = -\frac{s}{4}\left[\log\left(1+4\frac{a^2}{s^2}\right)\right] + a\left[\arctan\left(\frac{2a}{s}\right)\right] \quad (2.7)$$

Remarque 2.3 Les formules précédentes sont relatives à un paramètre a réel. Le passage à a complexe pourrait être fait en développant ces fonctions à l'aide des fonctions exponentielles complexes.

On peut aussi, ce qui est plus rapide, utiliser la transformée de $f(at)$ lorsque a est complexe (Cf. Exercice 3.16) ou encore étendre les résultats obtenus par un prolongement analytique.

2.1.4 Utilisation de développements en séries

Images de fonctions de Bessel de première espèce ou modifiées de première espèce

Ces calculs sont traités ici comme application de la proposition 1.17. Une autre méthode est utilisée dans les exercices 3.9 et 3.11. La fonction de Bessel J_n d'indice n entier et la fonction modifiée de même indice I_n sont définies par :

$$J_n(t) = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}, \quad I_n(t) = i^{-n} J_n(it)$$

Exemple 2.8 Transformées de $t \mapsto f(t) = \mathcal{U}(t)J_0(\sqrt{t})$ et $t \mapsto g(t) = \mathcal{U}(t)I_0(\sqrt{t})$

La fonction f est donc définie par la série entière dont le terme général s'écrit : $\frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{t}{4}\right)^k$. On en déduit que son produit par $k!$ est le terme général d'une série entière admettant encore un rayon de convergence infini. La proposition 1.17 s'applique ; elle s'applique de même pour g et on obtient des exponentielles pour images :

$$\begin{aligned} \Re(s) > 0 &\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}J_0(\sqrt{t}))(s) = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2^{2n}s^{n+1}} = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{-1}{4s}\right) \\ \Re(s) > 0 &\Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}I_0(\sqrt{t}))(s) = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2^{2n}s^{n+1}} = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{1}{4s}\right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

La proposition nous dit que : $\zeta_a(f) \leq 0$. En fait, comme les fonctions obtenues admettent $s = 0$ pour point singulier, on a : $\zeta_c(f) = \zeta_a(f) = \zeta_c(g) = \zeta_a(g) = 0$

Exemple 2.9 Transformées de $t \mapsto f(t) = \mathcal{U}(t)J_0(t)$ et de $t \mapsto g(t) = \mathcal{U}(t)I_0(t)$

Le terme général d'indice $2n$, les autres étant nuls, fournit, par son produit par $(2n)!$, la valeur absolue $b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$. L'application de la règle de d'Alembert donne $R = 1$ pour rayon de convergence de la série entière $\sum b_n t^{2n}$. En effet :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = 1$$

En appliquant la proposition 1.17, on obtient donc :

$$\Re(s) > 1 \Rightarrow F(s) = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2 s^{2n+1} 4^n}$$

En mettant $(n!)^2 4^n$ sous la forme $[2.4.6. \dots (2n - 2)(2n)]^2$, une simplification avec la factorielle de $2n$ nous donne un résultat de développement en série entière connu :

$$F(s) = \frac{1}{s} \left[1 + \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{s^{2n}} \frac{[1.3.5 \dots (2n - 1)]}{[2.4.6. \dots (2n - 2)(2n)]} \right] = \frac{1}{s} \left[\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] = [(1 + s^2)]^{-\frac{1}{2}}$$

Dans le cas de I_0 , le raisonnement est le même, le radical étant remplacé par $[(s^2 - 1)]^{-\frac{1}{2}}$.

Rappelons que, dans cette formule, le crochet qui contient la puissance $-1/2$ signifie que cette puissance doit être considérée dans le demi-plan ouvert Π_1 comme le prolongement analytique de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

D'après la proposition 1.17, la seule information donnée sur l'abscisse de convergence absolue de f est : $\zeta_a(\mathcal{U}J_0) \leq 1$. En fait, la fonction $J_0(t)$ est bornée car c'est le coefficient de Fourier d'indice 0 de la fonction périodique $\theta \mapsto \exp(it \sin(\theta))$ (Cf. Annexe 2). On en déduit que cette abscisse est nulle et, par prolongement analytique, que le résultat précédent est valable dans tout le demi-plan Π_0 , ce qui d'ailleurs est cohérent avec la présence du radical dans le résultat trouvé. Par contre, dans le cas de I_0 , le radical $(s^2 - 1)]^{-\frac{1}{2}}$ confirme que : $\zeta_a(I_0) = 1$.
Concluons :

$$\begin{aligned} \Re(s) > 0 &\Rightarrow \mathcal{L}\left(\mathcal{U}(t)J_0(t)\right)(s) = \left[(1 + s^2)^{-1/2}\right] \\ \Re(s) > 1 &\Rightarrow \mathcal{L}\left(\mathcal{U}(t)I_0(t)\right)(s) = \left[(s^2 - 1)^{-1/2}\right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

Les exercices 3.9, 3.10 et 3.11 proposent d'autres méthodes de calcul de transformées de fonctions de Bessel.

Remarque 2.4 *On remarque, sur les deux exemples qui précèdent, que le changement de t en it dans la fonction f se traduit par le changement de (s) en $F(s/i) = F(-is)$.*

C'est conforme à l'extension qui peut être faite de la propriété de dilatation de \mathcal{L} au cas où le coefficient de dilatation est complexe (Cf. exercice 3.16).

Remarque 2.5 *La méthode des séries entières, utilisée dans ce qui précède, pourrait être utilisée pour la fonction J_ν , qui est localement sommable lorsque $\nu > -1$, car l'argumentation de la proposition 1.17 peut aussi s'appliquer à la série (non entière) qui définit cette fonction.*

Le terme général de cette série s'écrit $a_k t^{\nu+2k}$ avec $a_k = (-1)^k \frac{(1/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$.

Son image de Laplace s'en déduit : $u_k(x) = a_k \frac{\Gamma(\nu+2k+1)}{x^{\nu+2k+1}}$.

On peut alors chercher la condition de convergence de la série de ces images. Le rapport $|\frac{u_{k+1}}{u_k}|$ admet la limite $|x|^{-2}$, ce qui signifie que la série des transformées converge sous la condition $x > 1$. Bien que le développement ne soit pas celui d'une série entière, l'analogie de la proposition 1.17 s'appliquera pour $x > 1$. Mais, la somme de ce développement ne paraît pas aisé à expliciter. Le fait de l'obtenir par une autre méthode (Cf. exemple 2. 19) fournira a contrario une application au calcul des fonctions sommes de ces familles de séries.

Exemple 2.10 Calcul de la transformée de $t \mapsto \mathcal{U}(t)I_2(2\sqrt{t})$

Le développement en série de cette fonction s'écrit :

$$\sum_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{n!(n+2)!}$$

Il est facile de voir que les hypothèses de la proposition 1.17 sont vérifiées et que l'abscisse de convergence est ≤ 0 . La série des transformées nous donne :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)I_2(2\sqrt{t})\right](s) = \sum_0^{+\infty} \frac{s^{-(n+2)}}{n!(n+2)!}$$

En écrivant : $\frac{1}{n!(n+2)} = \frac{n+1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}$, la formule précédente nous donne :

$$F(s) = \sum_0^{+\infty} s^{-(n+2)} \left[\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} \right] = s^{-1} \sum_1^{+\infty} \frac{s^{-k}}{k!} - \sum_2^{+\infty} \frac{s^{-k}}{k!}$$

Finalement, en tenant compte des premiers termes du développement de l'exponentielle, on obtient :

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\mathcal{U}(t)I_2(2\sqrt{t})\right)(s) = 1 + \left(\frac{1}{s} - 1\right) \exp \frac{1}{s} \quad (2.10)}$$

Exemple 2.11 Calcul de la transformée de $t \mapsto \mathcal{U}(t)t^{-n/2}I_n(2\sqrt{t})$

Cette fonction généralise la précédente, elle se développe suivant la formule :

$$f(t) = \sum_0^{+\infty} \frac{t^k}{k!(n+k)!}$$

Là encore la proposition 1.17 s'applique et fournit :

$$F(s) = \sum_0^{+\infty} \frac{s^{-(k+1)}}{(n+k)!}$$

En factorisant par $s^{(n-1)}$, on reconnaît dans le second membre le développement de $\exp(1/s)$ tronqué de ses n premiers termes :

$$F(s) = s^{(n-1)} \left[\exp\left(\frac{1}{s}\right) - \sum_0^{n-1} \frac{s^{-k}}{k!} \right] \quad (2.11)$$

Autre calcul où intervient une série

Exemple 2.12 Calcul de la transformée de $t \mapsto \mathcal{U}(t)(\cos \sqrt{t}/\sqrt{t})$

Cette fonction est localement sommable, et on trouve $\zeta_c(f) = 0$. On utilise encore un développement en série qui s'écrit ici :

$$f(t) = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n t^{n-1/2}}{(2n)!}$$

N'étant pas une série entière, la proposition 1.17 ne s'applique pas. Cependant, on peut montrer que, dans le cas présent, on peut encore intervertir la série et la transformation de Laplace (Cf. Exercice 3.10). Simplifions, dans l'image du terme général, un quotient de deux factorielles qui y figure :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n+1/2)}{(2n)!} &= \frac{(n-1/2)(n-3/2)\dots(1/2)\Gamma(1/2)}{(2n)!} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3.1\sqrt{\pi}}{2^n(2n)!} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{(2n)(2n-2)\dots 4.2(2^n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{n!(2^{2n})} \end{aligned}$$

On reconnaît dans l'image F de f le développement d'une exponentielle puisque :

$$F(s) = \sqrt{\pi} \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)2^{2n}s^{n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)(4s)^n}$$

En conclusion :

$$\Re e(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}(t)(\cos \sqrt{t}/\sqrt{t}))(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \exp\left(\frac{-1}{4s}\right) \quad (2.12)$$

On trouvera d'autres exemples du même type dans l'exercice 3.8.

2.1.5 Transformation de fonctions définies par des intégrales

Parmi ces fonctions figurent celles qui sont appelées sinus intégral, cosinus intégral, fonction d'erreur, exponentielle intégrale. Leurs définitions font appel à des intégrales fonctions de l'une des deux bornes.

Il s'agit de :

$$\text{Si}(t) = \int_0^t \frac{\sin u}{u} du, \quad \text{Ci}(t) = \int_t^{+\infty} \frac{\cos u}{u} du, \quad \text{Ei}(-t) = - \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du$$

On développe ici des exemples où sont mis en oeuvre des procédés différents. D'autres exemples sont proposés dans les exercices 3.10 et 3.11. Dans ce qui suit, les originaux considérés sont supposés multipliés par l'échelon \mathcal{U} .

Exemple 2.13 *Calcul de la transformée de la fonction sinus intégral*

D'après la définition de Si, il s'agit d'une fonction continue et bornée puisque l'intégrale impropre de $\sin t/t$ sur $]0, +\infty[$ est convergente. On en déduit que son abscisse de convergence absolue vérifie $\zeta_a(\text{Si}) \leq 0$. C'est aussi une fonction dérivable, de dérivée égale à $\sin t/t$ partout continue et bornée.

Si la transformée de cette dernière fonction est notée G , la dérivée de G est l'image dans le demi-plan Π_0 du produit $-t(\sin t/t) = -\sin t$ (Cf. formule (1.5)). On en déduit que G admet pour dérivée la fonction $s \mapsto -1/(1+s^2)$.

En se situant sur l'axe des réels positifs, on a : $G(x) = C - \arctan x$ et, comme G est une transformée de Laplace (Cf. formule (1.12)), on a $C = \pi/2$, autrement dit $G(x) = \arctan(1/x)$. Il suffit, à présent, d'appliquer la formule de primitivation (1.9) Comme $\text{Si}(0+) = 0$, on obtient le résultat pour la variable réelle. On prolonge ensuite analytiquement dans Π_0 . On obtient donc :

$$\forall \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\text{Si})(s) = \frac{1}{s} \left[\arctan \left(\frac{1}{s} \right) \right] \quad (2.13)$$

On a deux contrôles du résultat obtenu ci-dessus, à savoir la limite de cette dernière fonction lorsque s tend vers $+\infty$, on trouve bien 0 ; d'autre part, la limite de $sF(s)$ lorsque s tend vers $+\infty$ et là, on trouve bien encore 0 qui est la valeur $\text{Si}(0+)$.

Exemple 2.14 *Calcul de la transformée de la fonction cosinus-intégral Ci*

D'après la définition de Ci, il s'agit d'une fonction continue sur $]0, +\infty[$. La fonction $t \mapsto \cos t/t$ étant positive et équivalente à $1/t$ au voisinage de 0, sa limite en $t = 0$ est infinie. Mais une intégration par parties fournit sur $[t, 1]$:

$$\int_t^1 \frac{\cos u}{u} du = -\ln t \cos t + \int_t^1 \sin u \ln u du$$

On en déduit que, lorsque $t \rightarrow 0$, on a l'équivalence $\text{Ci}(t) \sim -\ln t$, ce qui établit que la fonction est localement sommable. Elle tend vers 0 à l'infini, donc l'abscisse de convergence vérifie $\zeta_a(\text{Ci}) \leq 0$. Il faut remarquer que, contrairement à l'exemple précédent, la dérivée Ci' n'est plus localement sommable puisqu'au voisinage de $t = 0$ cette dérivée est équivalente à $-1/t$.

Pour le calcul de sa transformée F , on utilise plutôt la dérivation de F ; plus précisément on cherche une équation différentielle dont cette image est solution sur $]0, +\infty[$. On considère pour cela la fonction $t \mapsto g(t) = -t\text{Ci}(t)$. Au voisinage de 0, l'équivalence $g(t) \sim t \ln t$ implique l'existence de $g(0+)$. Par ailleurs, g possède une dérivée qui s'écrit $-\text{Ci}(t) + \cos t$, élément de \mathcal{L}_d et, de plus, l'image

de g est la dérivée F' de la transformée cherchée. L'application du théorème 1.1 nous fournit alors, lorsque $\Re s > 0$:

$$\mathcal{L}(g')(s) = \mathcal{L}(-\text{Ci})(s) + \mathcal{L}(\cos)(s) = -F(s) + \frac{s}{s^2 + 1} = -g(0+) + s\mathcal{L}(g)(s) = sF'(s)$$

En se restreignant à la variable réelle strictement positive x , la fonction F est solution de l'équation différentielle :

$$F(x) + xF'(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

L'équation sans second membre admet la solution $x \mapsto C/x$ et la méthode de variation de la constante conduit à $C' = x/x^2 + 1$. On en déduit que F peut s'écrire sous la forme :

$$F(x) = \frac{1}{x} [\ln \sqrt{x^2 + 1} + K]$$

Finalement, en constatant que la limite à l'infini de $\ln \sqrt{x^2 + 1}/x$ est nulle, on conclut à $K = 0$ à l'aide d'un théorème de valeur finale (Cf. formule (1.13)). Il suffit ensuite de voir que la fonction trouvée peut se prolonger dans le demi-plan ouvert Π_0 . On note $[(s^2 + 1)^{1/2}]$ le prolongement de la racine carrée réelle et, en remarquant que l'image de cette puissance reste dans ce demi-plan Π_0 où la fonction \ln se prolonge en $[\log]$, on conclut :

$$\mathcal{L}(\text{Ci})(s) = \frac{1}{s} [\log] \left([(s^2 + 1)^{1/2}] \right) \quad (2.14)$$

Exemple 2.15 Calcul de la transformée de la fonction intégrale $\text{Ei}(-t)$

La dérivée de cette fonction est égale à $(\exp(-t))/t$ qui n'est pas, à cause de sa singularité en $t = 0$, transformable par Laplace. On affaiblit cette singularité en intégrant par parties l'intégrale définissant $\text{Ei}(-t)$. On a ainsi :

$$\text{Ei}(-t) = - \left[e^{-u} \ln u \right]_t^{+\infty} - \int_t^{+\infty} e^{-u} \ln u \, du = e^{-t} \ln t - \int_t^{+\infty} e^{-u} \ln u \, du$$

En se référant à l'exemple 2.3, la fonction intégrale du second membre est définie pour $t > 0$ par :

$$\int_t^{+\infty} \exp(-u) \ln u \, du = [\Gamma'(1) - \int_0^t \exp(-u) \ln u \, du]$$

D'après la remarque 1.5 et l'exemple 2.3, l'image de $\exp(-u) \ln u$ est égale à la translatée d'indice -1 de $-s^{-1}([\log](s) + \gamma)$, à savoir : $-(s+1)^{-1}([\log](s+1) + \gamma)$. En divisant ce résultat par s , on obtient l'image de la primitive considérée ci-dessus (Cf. Proposition 1.11). En tenant compte de l'égalité $\Gamma'(1) = -\gamma$, nous avons :

$$F(s) = -(s+1)^{-1}([\log](s+1) + \gamma) + \frac{\gamma}{s} - \frac{1}{s}(s+1)^{-1}([\log](s+1) + \gamma)$$

Le terme contenant γ s'annule et, finalement, on trouve :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\text{Ei}(-t))(s) = -\frac{1}{s} \left[\log(s+1) \right] \quad (2.15)$$

Une étude de l'exponentielle intégrale, redonnant en particulier ce résultat est proposé dans l'exercice 3.19.

Exemple 2.16 Calcul de la transformée de la fonction de Bessel $U(t)K_0(t)$.

Cette fonction (Cf. Annexe 2) $f = K_0$ dite «fonction de Hankel d'indice 0» est une solution de l'équation de Bessel d'indice 0. Elle admet la représentation intégrale : $K_0(t) = \int_0^{+\infty} \exp(-tch\theta) d\theta$. C'est cette représentation qui peut être utilisée avec une interversion de deux intégrations. Cette permutation est licite lorsqu'on suppose $x > 0$ puisqu'alors les deux fonctions exponentielles, l'une en la variable t , l'autre en la variable θ , sont sommables sur $[0, +\infty[$. Cette permutation permet aussi de prouver que l'abscisse de convergence de la fonction f considérée vérifie $\zeta_a(f) \leq 0$. Il est d'ailleurs évident que l'abscisse est nulle. Pour le calcul, un changement de variable fournit, après cette permutation :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(x) &= \int_0^{+\infty} \exp(xt) \left[\int_0^{+\infty} \exp(-tch\theta) d\theta \right] dt \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \exp(-t(x + ch\theta)) dt \right] d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{x + ch\theta} d\theta = 2 \int_0^{+\infty} \frac{e^\theta}{2xe^\theta + e^{2\theta} + 1} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \ln \left[\frac{1 + x - \sqrt{x^2 - 1}}{1 + x + \sqrt{x^2 - 1}} \right] \end{aligned}$$

Une dernière simplification à l'intérieur du logarithme, puis le prolongement analytique habituel dans le demi-plan Π_0 , conduisent au résultat :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L} \left[U(t)K_0(t) \right] (s) = \frac{1}{[(s^2 - 1)^{1/2}]} \ln(s - [(s^2 - 1)^{1/2}]) \quad (2.16)$$

Exemple 2.17 Calcul de la transformée d'une fonction associée à la fonction d'erreur

L'exercice 3.43 propose les déterminations des images des fonctions $\text{erf}(t)$ et $\text{erf}(\sqrt{t})$. Dans ce qui suit, nous déterminons l'image de la fonction $\text{erf}(1/\sqrt{t})$ qui, tout en utilisant le calcul direct de l'image de sa dérivée, réclame davantage de calculs.

Rappelons d'abord l'expression de la fonction considérée qu'on note erf_r :

$$\text{erf}_r(t) = \text{erf}(1/\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{1/\sqrt{t}} \exp(-u^2) du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} f(t)$$

L'abscisse de convergence vérifie $\zeta_a(\text{erf}_r) \leq 0$. L'image de Laplace de f est notée F .

La dérivée de cette fonction f s'exprime par $(-1/2)(t)^{-3/2} \exp(-1/t)$. Cette dérivée tend vers 0 en $t = 0$ et se comporte comme $(t)^{-3/2}$ à l'infini. Elle est donc sommable et on en déduit que $\zeta_a(f') \leq 0$. De plus, par la valeur d'une intégrale classique, on a $f(0+) = \sqrt{\pi}/2$, on en déduit donc que :

$$\mathcal{L}(f')(s) = -\sqrt{\pi}/2 + sF(s)$$

Calculant la transformée G de f' en faisant intervenir dans l'exposant de l'exponentielle le carré d'une différence, on trouve, pour l'expression de $-2G(x)$ dans le cas de la variable réelle $x > 0$:

$$\int_0^{+\infty} (t)^{-3/2} \exp\left[-xt - \frac{1}{t}\right] dt = \exp(-2\sqrt{x}) \int_0^{+\infty} (t)^{-3/2} \exp\left[-\left(\sqrt{xt} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2\right] dt$$

Par le changement de variable $u = 1/\sqrt{t}$, il en résulte donc :

$$G(x) = -\exp(-2\sqrt{x}) \int_0^{+\infty} \exp\left[-\left(u - \frac{\sqrt{x}}{u}\right)^2\right] du$$

On remarque que la dernière intégrale porte sur une fonction g telle que $g(u) = g\left(\sqrt{\frac{x}{u}}\right)$. On en déduit, par un changement de variables, deux expressions de cette intégrale que l'on additionne :

$$\int_0^{+\infty} g(u) du = \int_0^{+\infty} g(v) \frac{\sqrt{x}}{v^2} dv = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} g(u) \left[1 + \frac{\sqrt{x}}{u^2}\right] du$$

Or, $1 + \sqrt{\frac{x}{u^2}}$ est la dérivée de $u - \sqrt{\frac{x}{u}}$. Il en résulte, par le changement de variable difféomorphe : $w = u - \sqrt{\frac{x}{u}}$, la nouvelle expression de cette intégrale :

$$\int_0^{+\infty} g(u) du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-w^2) dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Finalement, on en déduit : $G(x) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp(-2\sqrt{x})$. En rassemblant tous ces calculs, en tenant compte du coefficient $\sqrt{\pi}/2$ et en prolongeant dans le demi-plan Π_0 , on obtient ainsi le résultat :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\text{erf}_r)(s) = \left(\frac{1}{s}\right) \left[1 - \exp\left(-2[(s)^{1/2}]\right)\right] \quad (2.17)$$

On remarque qu'au cours du calcul, on a trouvé la transformée de la dérivée que l'on peut d'ailleurs trouver par d'autres méthodes, par exemple par une équation différentielle (Cf. Exercice 3.8) :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t) \frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)\right](s) = \exp(-a[s^{1/2}]) \quad (2.18)$$

Enfin, en multipliant cette fonction par la variable t , on parvient à une autre image :

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right)\right](s) = \frac{1}{s^{1/2}}\exp(-a[s^{1/2}])$$

2.1.6 Calcul au moyen d'équations différentielles

Si l'original considéré est solution d'une équation différentielle, on peut tenter de transformer cette équation par \mathcal{L} . En principe, parmi les solutions de l'équation transformée figure la transformée de Laplace cherchée. Comme les solutions de cette équation transformée font intervenir des constantes d'intégration, ce sont les théorèmes de valeur finale ou de valeur initiale qui peuvent éventuellement permettre le calcul de ces constantes. Mais ces théorèmes peuvent, dans certains cas, être inefficaces. Nous verrons d'ailleurs comment, notamment à l'aide de développements au voisinage de 0, utiliser de façon plus fine ces théorèmes. Détaillons deux exemples liés aux fonctions de Bessel d'indices non entiers et un exemple lié aux polynômes de Laguerre.

Exemple 2.18 Transformée de la fonction $t \mapsto \mathcal{U}(t)t^\lambda J_\lambda(t)$

Posons $f(t) = \mathcal{U}(t)t^\lambda J_\lambda(t)$ où, on le rappelle (Cf. Annexe 2) ;

$$J_\lambda(t) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n + \lambda + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+\lambda}$$

Au voisinage de 0, J_λ est équivalente à at^λ . On en déduit que la fonction considérée est localement sommable sous la condition $\lambda > -1/2$. Par ailleurs, (Cf. Annexe 2), cette fonction est à croissance lente. On en déduit que $\zeta_a(f) \leq 0$. On commence par chercher une équation différentielle vérifiée par f . La fonction J_λ est solution de :

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \lambda^2)x = 0$$

Un calcul facile nous donne l'équation vérifiée par f sur \mathbb{R}_+ :

$$ty'' + (1 - 2\lambda)y' + ty = 0$$

Pour pouvoir appliquer le corollaire (1.3) et la formule (1.8), il faut assurer l'existence de $f(0+)$ et de $f'(0+)$. On est ainsi amené à restreindre la condition sur λ en $2\lambda - 2 \geq 0$, donc $\lambda \geq 1$. On tient compte alors des relations $f(0+) = 0$ et $f'(0+) = \alpha$ ($\alpha = 0$ lorsque $\lambda > 1$ et $\alpha = 1$ lorsque $\lambda = 1$).

Puisque, sous cette condition, f'' est aussi transformable, l'image de laplace F de f a ainsi les propriétés suivantes : $\mathcal{L}(f') = sF(s)$ et :

$$\mathcal{L}(f'') = s^2 F(s) - \alpha, \mathcal{L}(tf) = -F'(s), \mathcal{L}(tf') = -(sF)', \mathcal{L}(tf'') = -(s^2 F)'$$

La valeur numérique de α n'intervient pas et on en déduit que, si $\lambda \geq 1$, F vérifie l'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre :

$$(s^2 + 1)F' + (1 + 2\lambda)sF = 0$$

Sa solution générale s'écrit sur \mathbb{R}_+ : $F(s) = C(1 + s^2)^{-(\lambda+1/2)}$.

Il reste à calculer la constante C. Sous la condition imposée $\lambda \geq 1$, la fonction F tend vers 0 à l'infini quel que soit la constante C. La proposition 1.15, non plus que le corollaire 1.4 ne peuvent nous être utiles.

Cependant, on sait que la fonction f est équivalente au voisinage de 0 à une fonction du type $at^{2\lambda}$. Comme la condition $2\lambda > -1$ est vérifiée, on peut utiliser la proposition 1.16 qui affirme que la fonction F est équivalente, lorsque $x \rightarrow +\infty$, à $s \mapsto a\Gamma(2\lambda + 1)s^{-2\lambda-1}$, c'est-à-dire finalement à $\frac{\Gamma(2\lambda + 1)}{2^\lambda\Gamma(\lambda + 1)}s^{-2\lambda-1}$.

Or, la fonction solution : $(1 + s^2)^{-(\lambda+1/2)}$ est équivalente, sous cette condition, à $s^{-2\lambda-1}$. On en déduit donc la valeur de C, à savoir :

$$C = (2^{-\lambda})\Gamma(2\lambda + 1)/\Gamma(\lambda + 1) = \frac{2^\lambda}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\lambda + \frac{1}{2})$$

La dernière simplification provenant de la formule de duplication de Γ (Cf. Annexe 1).

Tout ceci étant vrai sous la condition $\lambda \geq 1$, on en déduit, après le prolongement dans le demi-plan Π_0 , le résultat :

$$\forall \lambda \geq 1, \quad \Re e(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{U}t^\lambda J_\lambda)(s) = \frac{2^\lambda\Gamma(\lambda + 1/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{[(1 + s^2)^{\lambda+1/2}]} \quad (2.19)$$

Pour $\lambda = 1$, on trouve $(s^2 + 1)^{-3/2}$, dérivée de $s(s^2 + 1)^{-1/2}$, ce qui se vérifie à l'aide de $J_1 = -J'_0$ (Cf. Formule (2.9)), suivie de la multiplication par t qui permet d'atteindre l'image de $tJ_1(t)$.

Remarque 2.6

La condition sur λ provient de la méthode utilisée qui exige l'appartenance des dérivées d'ordre 1 et d'ordre 2 à \mathcal{L}_d . D'autres méthodes, par exemple, celle qui utilise les développements en séries entières et la proposition 1.17) (Cf. exercice 3.10) ou encore, celle qui utilise une représentation intégrale des fonctions de Bessel (Cf. exercice 3.11), montrent la validité de cette formule pour $\lambda > -1/2$. D'ailleurs, on vérifie cette formule pour $\lambda = 0$ et aussi pour $\lambda = 1/2$ puisque, dans ce cas, la fonction considérée se réduit à $\sqrt{t}J_{1/2}(t) = \sqrt{t}\sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t$ dont l'image qui est égale à $\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 + s^2)^{-1}$ est bien conforme au résultat trouvé.

Exemple 2.19 Transformée de la fonction $t \mapsto \mathcal{U}(t)J_\nu(t)$, $\nu > 1$ non entier

Pour la sommabilité au point $t = 0$, on suppose $\nu > -1$. L'abscisse de convergence absolue de cette fonction notée g est négative ou nulle. Transformons l'équation vérifiée par g : $t^2g'' + tg' + (t^2 - \nu^2)g = 0$. On note que, sous la condition donnée $\nu > 1$, on a : $g(0+) = g'(0+) = 0$. Donc, sous cette dernière condition, les propriétés des transformées de g et de ses dérivées, données par les formules de

l'exemple précédent, fournissent immédiatement la relation différentielle vérifiée par la transformée G de g , à savoir :

$$(s^2 + 1)G'' + 3sG' + (1 - \nu^2)G = 0$$

On suppose d'abord que $s = x$ réel et on commence par chercher l'équation vérifiée par $H(x) = (1 + x^2)^{-\alpha}G(x)$ en choisissant l'exposant α pour obtenir une équation la plus simple possible. Dans cette équation, le coefficient du terme $(1 + x^2)^{\alpha-1}H(x)$ s'écrit : $(2\alpha + 1)^2x^2 + (2\alpha + 1) + (1 + x^2)(1 - \lambda^2)$. Il se simplifie par le choix de $\alpha = -1/2$ et, pour ce choix, la fonction H est solution de l'équation :

$$(1 + x^2)H'' + xH' - \nu^2H = 0$$

Cette équation peut s'écrire :

$$\frac{d}{dx}(H'\sqrt{1 + x^2} + \nu H) - \frac{\lambda}{\sqrt{1 + x^2}}(H'\sqrt{1 + x^2} + \nu H) = 0 \quad (*)$$

Des solutions particulières de cette équation sont obtenues lorsqu'on impose la relation : $H'\sqrt{1 + x^2} + \nu H = 0$, ce qui donne les fonctions $H = C_1(\sqrt{1 + x^2} - x)^{-\nu}$. Comme le changement de ν en $-\nu$ laisse l'équation (*) invariante, on en déduit d'autres solutions indépendantes des précédentes, à savoir $H = C_2(\sqrt{1 + x^2} - x)^\nu$. La solution générale de (*) s'écrit donc :

$$H(x) = C_1(\sqrt{1 + x^2} - x)^{-\nu} + C_2(\sqrt{1 + x^2} - x)^\nu$$

Retournons à $G(x) = H(x)(1 + x^2)^{-1/2}$. Des développements limités au voisinage de $+\infty$ montrent que G s'y comporte comme : $C_1x^{\nu-1} + C_2x^{-\nu-1}$ si ces constantes sont non nulles. Or, la condition sur ν implique $\nu - 1 > 0$ alors que $-\nu - 1 < -2$. La transformée de Laplace de G devant tendre vers 0 à l'infini, il en résulte que, nécessairement $C_1 = 0$, d'où $G(x) = C_2(1 + x^2)^{-1/2}(\sqrt{1 + x^2} - x)^\nu$.

Il reste à calculer C_2 . Là aussi, c'est la proposition 1.16 qui permet son calcul. On trouve ainsi que : $C_2 = 1$ Donnons le résultat en prolongeant dans Π_0 :

$$\forall \nu \geq 1, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(U(t)J_\nu(t))(s) = \frac{[(1 + s^2)^{\frac{1}{2}} - s]^\nu}{(1 + s^2)^{1/2}} \quad (2.20)$$

Remarque 2.7 Du résultat précédent, on peut en déduire facilement l'image de Laplace de $U(t)\frac{J_\nu(t)}{t}$ dans le cas où $\nu \leq 1$.

D'abord, si on pose : $R = \sqrt{1 + x^2} + x$, on a : $R^{-1} = \sqrt{x^2 + 1} - x$. Ensuite, par dérivation, on obtient : $\frac{d}{dx}[R^{-\nu}] = \frac{-\nu R^{-\nu}}{\sqrt{x^2 + 1}}$. Cela veut dire que le premier membre de cette égalité représente au coefficient $-\nu$ près la transformée de $U(t)\frac{J_\nu(t)}{t}$. On en conclut en prolongeant encore dans Π_0 :

$$\forall \nu \geq 1, \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)\frac{J_\nu(t)}{t}\right](s) = \frac{1}{\nu} \left[[(1+s^2)^{1/2} + s]^{-\nu}\right] \quad (2.21)$$

Remarque 2.8 En utilisant la remarque 2.5, le développement en série de J_ν , dont le terme général est : $a_k \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k}$, avec $a_k = (-1)^k \frac{(1/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$. fournit par transformation terme à terme un développement que l'on peut alors identifier au résultat précédent.

Cela nous donne, pour tout $\nu \geq 1$ et pour $x > 1$ ou même pour $\Re(s) > 1$, le résultat :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathcal{U}(t)J_\nu(t)}{t}\right](s) = \sum_0^{+\infty} (-1)^k \frac{(1/2)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \frac{\Gamma(\nu+2k+1)}{s^{\nu+2k+1}} \quad (2.22)$$

Application de la formule (2.22) à des sommations de séries

Considérons, par exemple, la fonction h_ν définie dans le disque coupé $D \setminus \Delta$ de centre O et de rayon 1, Δ étant la coupure constituée par l'axe des réels négatifs,

par $h_\nu(u) = u^{-\nu} \frac{[(1+u)^{1/2} - 1]^\nu}{[(1+u)^{1/2}]^\nu}$, la détermination choisie pour la puissance 1/2 étant celle qui prolonge la racine carrée réelle.

Cette fonction ne dépend pas de la branche choisie pour u^ν . L'ayant prolongée sur tout le disque, elle y est analytique. On se propose de déterminer sa série de Taylor au point $u = 0$.

Pour cela, on remplace u par $\frac{1}{s^2}$, en supposant $\Re(s) > 1$. On obtient :

$$h_\nu\left(\frac{1}{s^2}\right) = s^{\nu+1} \frac{\left[[(1+s^2)^{1/2}] - s\right]^\nu}{[(1+s^2)^{1/2}]^\nu}$$

En utilisant la formule (2.22), on en déduit donc :

$$h_\nu\left(\frac{1}{s^2}\right) = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k (1/2)^{\nu+2k} \Gamma(\nu+2k+1)}{k! \Gamma(\nu+k+1) s^{2k}}$$

En revenant à la variable u et en prolongeant la série dans tout le disque, on obtient le développement en série de Taylor de h_ν pour tout $\nu \geq 1$:

$$|u| < 1 \Rightarrow \frac{[(1+u)^{1/2} - 1]^\nu}{u^\nu [(1+u)^{1/2}]^\nu} = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k (1/2)^{\nu+2k} \Gamma(\nu+2k+1) u^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (2.23)$$

On peut d'ailleurs faire une vérification pour le premier terme du développement qui est bien égal de part et d'autre à $2^{-\nu}$.

Exemple 2.20 Image de Laplace de la fonction $\mathcal{U}(t)I_\nu(t)$.

On rappelle que $I_\nu(t) = \exp(i\frac{\pi\nu}{2})J_\nu(it)$.

Pour le calcul de l'image, on pourrait reprendre la méthode précédente, l'équation différentielle étant du même type, à savoir $t^2y'' + ty' - (t^2 + \nu^2)y = 0$. On pourrait aussi effectuer une dilatation complexe de rapport i à partir des résultats précédents (Cf. Exercice 3.16). Nous préférons utiliser ici le développement en série de I_ν , la remarque 2.5 et la relation (2.20).

En posant : $b_k = \frac{(1/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}$, la série des images des termes de la série $I_\nu(t)$

s'écrit maintenant : $\exp(i\frac{\pi\nu}{2}) \sum_0^{+\infty} b_k \frac{\Gamma(\nu+2k+1)}{s^{\nu+2k+1}}$. Or, en changeant u en $-u$

dans (2.20), on a :

$$\frac{[(1-u)^{1/2} - 1]^\nu}{(-u)^\nu [(1-u)^{1/2}]^\nu} = \sum_0^{+\infty} \frac{(1/2)^{\nu+2k} \Gamma(\nu+2k+1) u^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)}$$

Donc, en reprenant la variable $s = u^{-2}$, pour $\Re(s) > 1$, on reconnaît la somme de la série précédente. On peut donc conclure :

$$\boxed{\Re(s) > 1 \Rightarrow \mathcal{L}[\mathcal{U}(t)I_\nu(t)](s) = \frac{[s - [(s^2 - 1)^{1/2}]]^\nu}{[(s^2 - 1)^{1/2}]} \quad (2.24)}$$

Cette fois, les singularités de l'image étant -1 et $+1$, on voit que l'abscisse de convergence de $\mathcal{U}(t)I_\nu(t)$ est égale à 1.

Exemple 2.21 Fonctions liées aux polynômes de Laguerre généralisés

Le polynôme de Laguerre généralisé de degré n et d'indice $\alpha > 0$ est défini par

$$L_n^\alpha(t) = t^{-\alpha} \frac{\exp t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^{\alpha+n} \exp(-t))$$

On se propose de calculer l'image de Laplace de $f(t) = \mathcal{U}(t)t^\alpha L_n^\alpha(t)$. L'équation différentielle vérifiée par le polynôme de Laguerre L_n^α s'écrit :

$$ty'' + (\alpha + 1 - t)y' + ny = 0$$

Celle vérifiée par f s'en déduit :

$$tf'' - (\alpha - 1 + t)f' + (n + \alpha)f = 0$$

Il est facile de voir que l'abscisse de convergence absolue est nulle et, par utilisation de la formule de Leibniz, que $f(0+) = 0$. L'équation précédente transformée par \mathcal{L} s'écrit :

$$-(s^2 F(s))' - (\alpha - 1)(sF(s)) + (sF(s))' + (n + \alpha)F(s) = 0$$

ou encore :

$$(s - s^2)F'(s) + \left(n + \alpha + 1 - s(1 + \alpha) \right) F(s) = 0$$

Cette équation, en se restreignant à la variable réelle x a pour solution générale $C(x - 1)^n x^{-(n+\alpha+1)}$, ce qui peut s'écrire

$$F(x) = C(1 - 1/x)^n x^{-\alpha-1}$$

Il reste à calculer la constante C. Par la formule de Leibniz, le terme de "plus bas degré" dans la fonction f s'écrit at^α avec $a = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! \Gamma(\alpha + 1)}$ et la fonction $g(t) = f(t) - at^\alpha$ est de degré $\alpha + 1$, ce qui implique que $g'(0+) = 0$ et, en transformant g'' , on doit obtenir $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 G(x) = 0$.

Or, la transformée G de g est donnée par : $G(x) = F(x) - a\Gamma(\alpha + 1)x^{-(\alpha+1)}$. Par ailleurs, un développement simple prouve que cette fonction est équivalente à l'infini à $x^{-(\alpha+1)}(C - a\Gamma(\alpha + 1))$. On en déduit : $C = a\Gamma(\alpha + 1) = \frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!}$, d'où le résultat, en prolongeant analytiquement dans le demi-plan Π_0 :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(U t^\alpha L_n^\alpha(t))(s) = \left[\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} \right] \left(1 - \frac{1}{s} \right)^n \left[s^{-\alpha-1} \right] \quad (2.25)$$

2.1.7 Résumé de résultats précédents

Certains des résultats précédents ou d'autres obtenus dans ce qui suit, par recherche d'images inverses sont décrits dans le tableau T_2 ci-dessous :

Original f	Image F	Original f	Image F
$U(t) \ln(t)$	$s^{-1} [[\log](s) + \gamma]$	$U(t) J_\lambda(t)$	$\frac{[(1 + s^2)^{1/2} - s]^\lambda}{[(1 + s^2)^{1/2}]}$
$U(t) \frac{\sin^2(at)}{t}$	$\frac{1}{4} [\log](1 + \frac{4a^2}{s^2})$	$U(t) t^\lambda J_\lambda(t)$	$\frac{2^{-\lambda} \Gamma(2\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1) (1 + s^2)^{(\lambda+1/2)}}$
$U(t) \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}} \exp(-\frac{1}{4s})$	$\frac{U(t) I_n(2\sqrt{t})}{t^{n/2}}$	$\frac{s^{n-1}}{2^n} [e^{1/s} - \sum_0^{n-1} \frac{s^{-k}}{k!}]$
$U(t) \text{Si}(t)$	$\frac{1}{s} [\arctan(\frac{1}{s})]$	$U_a J_0(\sqrt{t^2 - a^2})$	$\frac{\exp(-a[(s^2 + 1)^{1/2}])}{(s^2 + 1)^{1/2}}$
$U(t) \text{Ci}(t)$	$\frac{[\log([(s^2 + 1)^{1/2}])]}{s}$	$\frac{t^{\frac{\lambda-1}{2}} J_{\lambda-1}(2\sqrt{at})}{a^{\frac{\lambda-1}{2}}}$	$s^{-\lambda} \exp(-\frac{a}{s})$
$U(t) \text{Ei}(-t)$	$-\frac{1}{s} [\log](s + 1)$	$U(t) I_2(2\sqrt{t})$	$1 + (1 + \frac{1}{s} - 1) \exp(\frac{1}{s})$
$U(t) \text{erf}_c(\frac{1}{2\sqrt{t}})$	$\frac{1}{s} \exp(-[s^{1/2}])$	$U(t) \text{erf}_r(t)$	$\frac{1}{s} [1 - \exp(-2[s^{1/2}])]$
$U(t) t^\alpha L_n^\alpha(t)$	$\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! [s^{\alpha+1}] (\frac{s}{s-1})^n}$	$U(t) t^{\alpha-1} \log t$	$\frac{\Gamma'(\alpha) - \Gamma(\alpha) [\log](s)}{[s^\alpha]}$

2.2 Utilisation des formules d'inversion

Dans la pratique, ces formules pourraient être considérées comme inutiles puisque la propriété d'injectivité de \mathcal{L} , du moins pour les fonctions habituelles qui sont continues (Cf. Exercice 3.26), permet de procéder à la lecture inverse d'un dictionnaire d'images. Mais, certaines résolutions de problèmes physiques font intervenir des fonctions qui peuvent ne pas être contenues dans un tel dictionnaire; les formules d'inversion, même traitées numériquement, sont alors utilisées. Il est bon de noter aussi l'intérêt théorique de ces formules qui permettent, en particulier, de déterminer les comportements comparés des originaux et des images aux voisinages de 0 et de l'infini. Pour décrire une méthode d'utilisation de la formule, nous commençons par un exemple très simple de calcul d'une transformée inverse. Des calculs moins immédiats feront suite. On terminera par des études de comportements asymptotiques comparés des fonctions et de leurs images prolongeant ainsi les résultats obtenus dans le chapitre 1 (§1.8 et §1.10.8).

2.2.1 Calculs de transformées inverses

Exemple 2.22 *Transformée inverse d'une fonction rationnelle*

Soit la fonction F définie dans le demi-plan Π_0 par $F(z) = \frac{3z^2 + 1}{(z^2 + 1)^2}$. Une telle fraction rationnelle se décompose en éléments simples, lesquels ont, d'après le dictionnaire d'images, des antécédents connus. La méthode que nous utilisons n'est donc ni la plus efficace ni la plus rapide!

Les hypothèses du théorème 1.5 sont vérifiées de façon évidente et l'original associé est défini par une intégrale sur une droite verticale d'abscisse $c > 0$:

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta_c} F(z) \exp(z t) dz$$

En fait, la fonction G où $G(z) = F(z) \exp(z t)$ est holomorphe dans le plan privé des pôles doubles i et $-i$. Le calcul se sert du théorème des résidus appliqué à G et au contour Γ_R (voir dessin ci-après) constitué d'un demi-cercle C_R , centré au point d'affixe c , situé à gauche de Δ_c et complété par son diamètre $[A, A']$ placé sur cette droite.

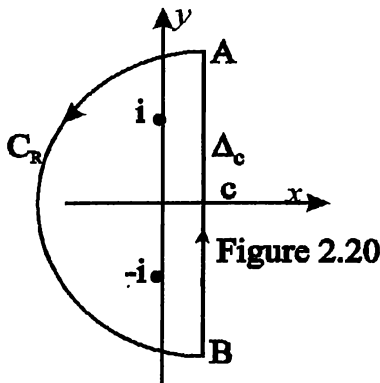


Figure 2.20

En supposant $R > 1$, le théorème des résidus nous fournit :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} F(z) \exp(zt) dz = \mathcal{U}(t) [\text{Res}(G; i) + \text{Res}(G; -i)]$$

Les pôles étant doubles, le calcul des résidus fournit ensuite, par exemple pour le premier :

$$\text{Res}(G; i) = \frac{d}{dz} [(3z^2 + 1) \exp(zt)(z + i)^{-2}]_{z=i} = \exp(it) \left(\frac{t}{2} - i\right)$$

La somme des deux résidus donne ensuite :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_R} F(z) \exp(zt) dz = \mathcal{U}(t) [t \cos t + 2 \sin t]$$

Montrons maintenant que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} G(z) dz = 0$, ce qui se fait par une majoration immédiate. On a, en effet, $\Re e(zt) \leq ct$ sur C_R puisque t est positif et, par conséquent :

$$\left| \int_{C_R} G(z) dz \right| \leq \pi R \exp(ct) \frac{3R^2 + 1}{(R^2 - 1)^2}$$

Finalement, on trouve :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) [t \cos t + 2 \sin t]$$

Exemple 2.23 Calcul de l'image inverse de la fonction $s \mapsto s^{-1} \exp(-s^{1/2})$

Dans cet autre exemple, on constate la présence d'un point de branchement associé à la puissance non entière $1/2$. On introduit la coupure γ issue de O et placée sur l'axe des réels négatifs, moyennant quoi la fonction, notée $w = [z^{1/2}]$ (qui prolonge la racine carrée habituelle sur les réels positifs), est définie par la formule $w = |z|^{1/2} \exp(i\theta/2)$ où θ , conformément à la coupure utilisée, est l'argument appartenant à $] -\pi, \pi[$.

On applique le théorème de Cauchy à G telle que $G(z) = z^{-1} \exp(-w(z)) \exp(zt)$, holomorphe dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma$ et au contour $\Gamma_{r,R,\alpha}$ constitué, comme le montre la figure ci-après, par le segment $[A, B]$ d'abscisse c , par trois arcs de cercle C_R, C'_R, C_r de centre O et de rayons respectifs R et r , joints à deux segments $[a, b]$ et $[a', b']$ portés par des demi-droites d'angles polaires $\pm\alpha$ avec $\alpha \in]\pi/2, \pi[$.

Il s'agit de chercher les limites des intégrales sur ces différents morceaux du chemin lorsque $\alpha \rightarrow \pi, R \rightarrow +\infty$ et $r \rightarrow 0$.

Sur l'arc de cercle C_R , en remplaçant l'arc par le demi-cercle correspondant, on a la majoration :

$$\left| \int_{C_R} G(z) dz \right| \leq \pi \exp(ct) \int_0^\pi \exp(-\sqrt{R} \cos(\theta/2)) d\theta$$

Une majoration classique conduit à prendre $\pi/2 - \theta/2$ pour variable, à se ramener à une intégrale sur $[0, \pi/2]$ et à minorer le sinus dans cet intervalle (C'est la démarche utilisée dans la démonstration du lemme de Jordan ; voir le lemme 1.3) :

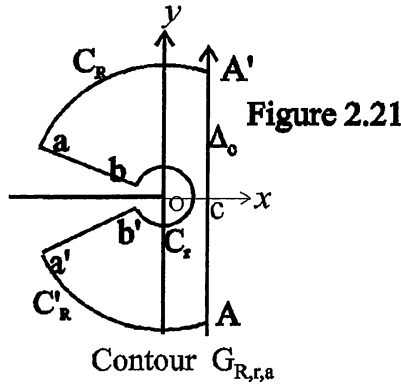


Figure 2.21

$$\int_0^\pi \exp(-\sqrt{R} \cos(\theta/2)) d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \exp(-\sqrt{R} \sin u) du \leq 2 \int_0^{\pi/2} \exp(-\sqrt{R} \frac{2\pi}{u}) du$$

En calculant cette dernière intégrale, on obtient :

$$\left| \int_{C_R} G(z) dz \right| \leq \frac{\pi}{\sqrt{R}} \rightarrow 0$$

Le même traitement s'applique à l'intégrale sur C'_R .

Le paramétrage sur l'arc de cercle C_r fournit :

$$\int_{C_r} G(z) dz = i \int_\alpha^{-\alpha} \exp(-\sqrt{r} \exp(\theta/2)) \exp(rt \exp(i\theta)) d\theta$$

La continuité vis-à-vis des bornes, puis la continuité en (r, θ) de la fonction sous l'intégrale permettent un passage à la limite sous le signe intégral. On obtient ainsi :

$$\lim_{r \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \pi} \int_{C_r} G(z) dz = -2i\pi$$

Enfin, sur le segment $[a, b]$, on peut aussi faire un passage à la limite sous l'intégrale lorsque $\alpha \rightarrow \pi$. L'argument constant de z tendant vers π , on en déduit, en paramétrant au moyen du module $u = |z|$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \int_{[a,b]} G(z) dz = - \int_0^R \exp(-ut) \exp(-\sqrt{u}) \exp(i\frac{\pi}{2}) \frac{du}{u}$$

Sur le segment $[b', a']$, on a un résultat analogue en remplaçant $\exp(i\pi/2)$ par $\exp(-i\pi/2)$.

On constate que la somme de ces deux intégrales fournit une intégrale convergente aussi bien au point $u = 0$ ($\frac{\sin \sqrt{u}}{u} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} u^{-1/2}$) qu'au voisinage de $+\infty$ (présence de l'exponentielle avec $ut > 0$). Concluons donc :

$$\lim \left[\int_{[a,b]} G(z) dz + \int_{[b',a']} G(z) dz \right] = 2i \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-ut)}{u} \sin(\sqrt{u}) du = 2iK(t)$$

Montrons maintenant que cette fonction K se ramène à la fonction d'erreur. Le changement de variable $u = x^2$, le remplacement de $\frac{\sin x}{x}$ par l'intégrale $\int_0^1 \cos vx dv$, l'utilisation de la parité de \cos et une permutation des intégrations nous donnent successivement :

$$\begin{aligned} K(t) &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-tx^2)}{x} \sin x dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \exp(-tx^2) \left(\int_0^1 \cos(vx) dv \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-tx^2) \cos(vx) dx \right) dv \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-tx^2 - ivx) dx \right) dv \\ &= \int_0^1 \exp\left(-\frac{v^2}{4t}\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-t\left(x - i\frac{v}{2t}\right)^2\right) dx \right) dv \\ &= \int_0^1 \exp\left(-\frac{v^2}{4t}\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-tw^2) dw \right) dv \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}} \int_0^1 \exp\left(-\frac{v^2}{4t}\right) dv = 2\sqrt{\pi} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu \end{aligned}$$

Dans ces égalités, on a utilisé le résultat classique $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}$ et la nouvelle variable $w = x\sqrt{t}$ qui permet d'en déduire l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(-tw^2)} dw$.

La formule d'inversion fait intervenir la limite de l'intégrale sur $[A, B]$ de $G(z)$. En divisant par $2i\pi$ les limites précédentes, on obtient la transformée inverse f de $s \mapsto s^{-1} \exp(-s^{1/2})$ pour les valeurs positives de t , transformée inverse qui fait apparaître erfc , fonction d'erreur complémentaire (Cf. Exemple 2.17) :

$$f(t) = \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2\sqrt{t}}} e^{-\mu^2} d\mu \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{1}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\mu^2} d\mu = \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)$$

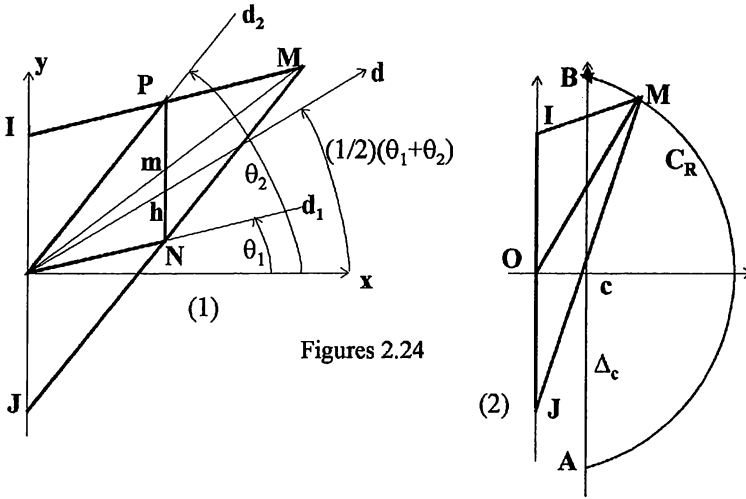
Exemple 2.24 Image inverse de $s \mapsto [(s^2 + 1)^{-1/2}] \exp(-a[(s^2 + 1)^{1/2}])$

Ce nouvel exemple fait intervenir les deux points de branchement I et J d'affixes i et $-i$. On suppose que la fonction F donnée est celle qui prolonge analytiquement la fonction de la variable réelle : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \exp(-a\sqrt{x^2 + 1})$. En prenant pour coupure le segment S qui joint les deux points de branchement, on voit qu'on peut choisir des déterminations des arguments $\theta_1 = \arg(z - i)$ et $\theta_2 = \arg(z + i)$ qui sont opposés lorsque $z = x$ est réel positif. La branche w de la racine ainsi obtenue est telle que, pour x réel et positif, $w(x) = [(x^2 + 1)^{1/2}] = \sqrt{x^2 + 1}$. On

aurait pu aussi choisir deux coupures issues de i et de $-i$ dirigées parallèlement à l'axe des abscisses, dans la direction de $-\infty$ sur cet axe.

1) Calcul pour $t < a$

On commence par prouver que la fonction f cherchée est nulle pour $t < a$. Pour cela, on considère l'arc de cercle C_R de centre O de rayon R , situé à droite de Δ_c , et d'extrémités A et B placées sur Δ_c . Complété par le segment $[BA]$, cet arc de cercle fournit un chemin fermé sur lequel l'intégrale de $e^{zt}F(z)$ est nulle (voir la figure (2) ci-après).



Figures 2.24

Si on prouve que, dans le cas où $t < a$, on a : $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} e^{zt}F(z)dz = 0$, on aura prouvé que l'intégrale de cette fonction sur Δ_c est nulle.

Dans ce but, nous majorons d'abord, en posant $\varphi = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$, l'intégrale sur la partie C'_R de C_R qui est dans le demi-plan supérieur :

$$\left| \int_{C'_R} e^{zt}F(z)dz \right| \leq \frac{\pi R}{\sqrt{R^2 - 1}} \int_0^{\pi/2} \exp \left[tR \cos \theta - a \sqrt{|R^2 e^{2i\theta} + 1|} \cos \varphi \right] d\theta (*)$$

Suivons maintenant sur la figure (1) où M est sur C'_R , les points P et N étant les milieux respectifs de $[IM]$ et $[JM]$. Par parallélisme, on a $\widehat{Ox, d_1} = \theta_1$ et $\widehat{Ox, d_2} = \theta_2$. Il en résulte que la bissectrice d de (d_1, d_2) vérifie $\widehat{Ox, d} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$. Si M est dans le demi-plan supérieur, $JM \geq IM$ d'où $OP \geq ON$. Soient h le point d'intersection de d et de PN et m le milieu de NP . Ces points vérifient donc : $\frac{hP}{hN} = \frac{OP}{ON} \geq 1$, ce qui entraîne $\overline{hm} > 0$ ou encore $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \leq \theta$, d'où, finalement : $\cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \geq \cos \theta$.

Comme par ailleurs, on a : $\sqrt{|z^2 + 1|} \geq \sqrt{R^2 - 1}$, on en déduit la majoration :

$$\exp \left[tR \cos \theta - a \sqrt{|R^2 e^{2i\theta} + 1|} \cos \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right) \right] \leq \exp \left[R \cos \theta \left(t - a \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} \right) \right]$$

Puisque $t < a$, le terme $u(R) = R \left(t - a \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{R} \right)$ est négatif pour R assez grand.

On peut alors, en utilisant la démarche du lemme de Jordan 1.3, qui consiste à minorer un sinus sur $[0, \pi/2]$, affiner la majoration de l'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2} e^{(u(R)\cos\theta)} d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{(u(R)\sin\theta)} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} \exp(u(R)\frac{2}{\pi}\theta) d\theta \leq -\frac{\pi}{2u(R)}$$

Comme $u(R) \rightarrow -\infty$, cette dernière intégrale tend vers 0, ce qui permet de conclure avec la relation (*).

Donnons maintenant, pour $t > a$, deux méthodes pour le calcul de f .

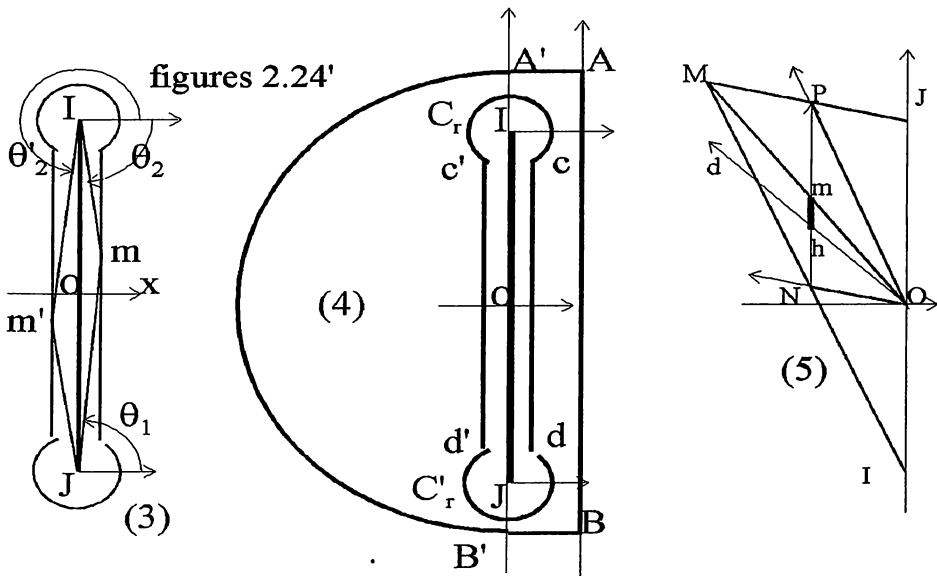
2) Méthode de déformation du contour

Le nombre $t > a$ est fixé. On constitue alors un contour fermé Γ_R à l'aide de l'aide d'un segment $[AB]$ porté par la droite d'intégration Δ_c , de deux segments horizontaux (AA') et (BB') , A' et B' étant d'abscisses nulles et d'un arc de cercle C_R centré en O , situé à gauche de Oy et d'extrémités A' et B' .

Par ailleurs, on entoure le segment S (constituant la coupure) d'un lacet L fait de deux arcs de cercle centrés en i et en $-i$ de même rayon r que l'on joint à l'aide de deux segments parallèles $[c, d]$ et $[c', d']$ distants de 2ε situés de part et d'autre de S (voir figure (3) ci-après). Si $r < c$, Γ_R contient L dans son intérieur.

Le chemin $\Gamma_R^+ \cup L^-$ est ainsi le bord orienté d'un compact contenu dans un ouvert d'holomorphic de la fonction $z \mapsto \exp(z t) F(z)$ (Voir la figure (4) ci-après) et, par conséquent, le théorème de Cauchy fournit :

$$\int_{\Gamma_R^+} \exp(z t) F(z) dz = \int_{L^+} \exp(z t) F(z) dz$$



◇ Il s'agit d'abord de prouver que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R \cup [AA'] \cup [BB']} \exp(z t) F(z) dz = 0$, ce qui impliquera la relation :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{L^+} \exp(z t) F(z) dz \quad (**)$$

Sur $[AA']$ d'ordonnée σ , la fonction $\sqrt{|z^2 + 1|}$ atteint son minimum $\sqrt{\sigma^2 - 1}$ au point A' et de même $\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$ prend sa valeur minimum, qui est positive, en A' . On en déduit la majoration de l'intégrale et sa limite, et il en est de même pour $[B'B]$:

$$\left| \int_{[AA']} e^{zt} F(z) dz \right| \leq \frac{ce^{ct}}{\sqrt{\sigma^2 - 1}} \rightarrow 0$$

La majoration de l'intégrale sur la partie supérieure de C_R est menée comme précédemment. La figure à prendre en compte est la figure (5) symétrique de la figure (1) précédente.

Cette fois, les angles $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ et θ ont des cosinus négatifs. La disposition des points m et h restant la même, on a $\left| \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right| \geq |\cos \theta|$, mais en factorisant l'exposant par $\cos \theta$, on obtient la majoration valable sur C_R :

$$\left| \exp\left(zt - a[(z^2 + 1)^{1/2}]\right) \right| \leq \exp\left[\cos \theta(Rt - a\sqrt{R^2 - 1})\right]$$

En posant $v(R) = Rt - a\sqrt{R^2 - 1}$, on en déduit pour l'intégrale :

$$\left| \int_{C_R} e^{zt} F(z) dz \right| \leq \frac{\pi R}{\sqrt{R^2 - 1}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(v(R) \cos \theta) d\theta$$

Le procédé de majoration de l'exponentielle, passant par la minoration habituelle de $\sin \theta$ (Cf. lemme 1.3), aboutit à une majoration de l'intégrale par $\frac{K}{v(R)}$.

Comme $t > a$, $\lim_{R \rightarrow +\infty} v(R) = +\infty$, d'où la conclusion annoncée. La relation (***) est donc prouvée. \diamond

Calcul le long du lacet et identification à une fonction spéciale connue

Le produit $|F(z)(z - i)|$ tend vers 0 au voisinage de i . Il en résulte que l'on a : $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} e^{zt} F(z) dz = 0$. De même pour le cercle de centre $-i$.

En tenant compte de la parité, en utilisant le changement de paramètre défini par : $\sqrt{t^2 - a^2} \operatorname{ch} \alpha = t$, $\sqrt{t^2 - a^2} \operatorname{sh} \alpha = a$ et en prenant la variable $\theta = \arcsin y$, on obtient la limite de l'intégrale le long du lacet sous la forme suivante :

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \left[\sqrt{t^2 - a^2} [\sin \theta \operatorname{ch} \alpha + \cos \theta \operatorname{sh} \alpha] \right] d\theta$$

On peut voir que cette intégrale est indépendante de α (Cf. Exercice 3.24, question A).

Pour le choix $\alpha = 0$, on retrouve la définition de la fonction $J_0(\sqrt{t^2 - a^2})$ comme coefficient de Fourier d'indice 0 de la fonction $\theta \mapsto \exp(i\sqrt{t^2 - a^2} \sin \theta)$ (Cf. Annexe 2). Résumons-nous :

Proposition 2.2 *La transformée inverse de Laplace de la fonction F définie par $F(s) = [(s^2 + 1)^{-1/2}] \exp(-a[(s^2 + 1)^{1/2}])$ est la fonction f définie par la formule : $f(t) = \mathcal{U}(t - a) J_0(\sqrt{t^2 - a^2})$.*

3) Autre méthode : un changement de variable

On suppose démontré que $t < a \Rightarrow f(t) = 0$ et on pose $\tau = t - a$. Dans l'intégrale sur Δ_c définissant $f(t)$, effectuons alors le changement de variable : $u = \frac{\tau}{2}(z + [(z^2 + 1)^{1/2}])$. En l'absence d'une étude précise de cette transformation complexe $u = g(z)$, on se contente des calculs formels suivants :

$$(z^2 + 1)^{1/2} = \frac{2u}{\tau} - z, \quad z^2 + 1 = \left(\frac{2u}{\tau} - z\right)^2, \quad z = \frac{4u^2 - \tau^2}{4u\tau}, \quad dz = \left[-\frac{1}{\tau} - \frac{\tau^2}{4u^2}\right]du$$

$$\left[(z^2 + 1)^{1/2}\right] = \frac{u}{\tau} + \frac{\tau}{4u} \text{ et aussi } z - a \left[(z^2 + 1)^{1/2}\right] = u - \frac{t^2 - a^2}{4u}. \text{ On en déduit :}$$

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{g(\Delta_c)} \exp\left(u - \frac{t^2 - a^2}{4u}\right) \frac{du}{u}$$

Pour justifier tous ces calculs et déterminer $g(\Delta_c)$, on pose $v = \frac{2u}{\tau}$, moyennant quoi $2z = v - \frac{1}{v}$ exprimant que z d'affixe M est le milieu du segment joignant les points m et m' d'affixes respectives v et $-1/v$.

On définit ainsi par la géométrie la transformation $v \mapsto z$ et, par composition avec une homothétie, la transformation $u \mapsto z$. A l'aide des propriétés du quadrangle harmonique, on peut étudier complètement et de façon élémentaire, cette transformation du plan complexe (voir l'exercice 3.24, partie B). On montre ainsi qu'il est possible, par utilisation du théorème de Cauchy, de déformer dans la définition de $f(t)$ le chemin Δ_c en un autre chemin γ_c de telle sorte que $g(\gamma_c)$ soit une droite verticale Δ'_c . Cet exercice 3.24 permet alors de justifier la formule suivante :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{g(\Delta'_c)} \exp\left(u - \frac{t^2 - a^2}{4u}\right) \frac{du}{u}$$

Finalement, en se reportant à la représentation intégrale associée à $\lambda = 0$ trouvée dans la proposition 1.21, on retrouve le résultat énoncé dans la proposition 2.2 précédente.

Exemple 2.25 Recherche de l'image inverse de $[z^{-\lambda}] \exp(-\frac{a}{z})$

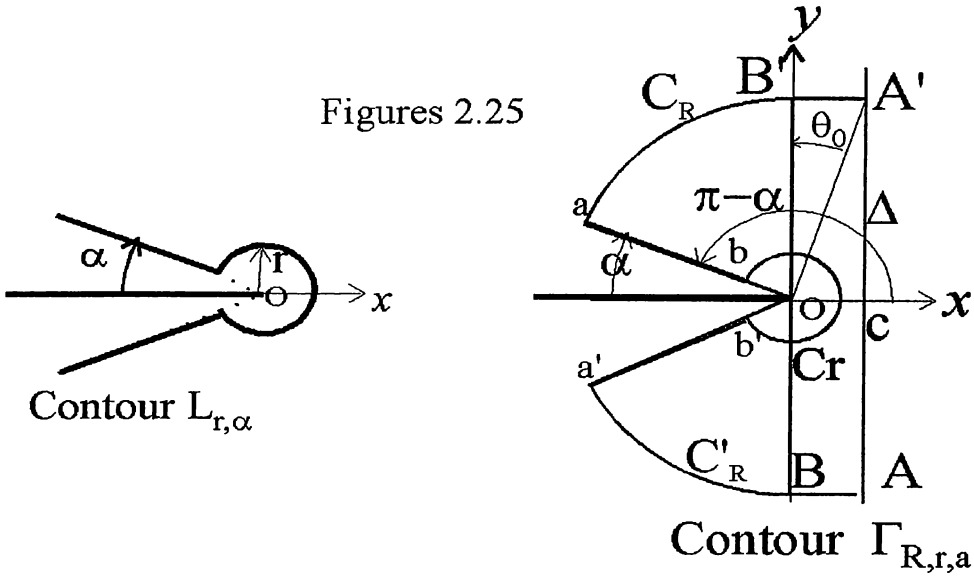
On suppose $\lambda > 0$ et $a > 0$. La fonction admet O pour point de branchement et il est sous-entendu que la branche utilisée pour la fonction puissance, notée $[z^\lambda]$, est celle qui prolonge la fonction réelle $x \mapsto x^\lambda$. Elle est définie par $|z|^\lambda \exp(i\lambda \arg(z))$ où $\arg(z)$ vérifie $-\pi < \arg(z) < \pi$.

On utilise la formule d'inversion avec l'intégration habituelle sur Δ_c où $c > 0$. On commence par déformer cette droite d'intégration en le lacet $L_{r,\alpha}$ composé d'un arc de cercle de centre O et de rayon r et de deux demi-droites symétriques par rapport à Ox et faisant avec cet axe des angles α voisins en valeurs absolue de π (Cf.figure ci-après).

En utilisant deux segments horizontaux d'ordonnées R et $-R$, deux arcs de cercle de centre O et de rayon R s'appuyant sur des morceaux des deux courbes

précédentes (Cf.figure), on constitue un chemin de Jordan $\Gamma_{R,r,\alpha}$ sur lequel, par le théorème de Cauchy, l'intégrale de $F(z) \exp(zt)$ est nulle.

Figures 2.25



Sur $[B'A']$, par exemple, on a : $|F(z)| \leq R^{-\lambda} \exp\left[\frac{-ax}{x^2 + R^2}\right]$.

Pour l'intégrale, on en déduit (la même chose étant vraie sur $[BA]$) :

$$\left| \int_{[AA']} \exp(zt)F(z)dz \right| \leq cR^{-\lambda} \exp(ct) \rightarrow 0$$

Sur l'arc C_R , on a, en majorant l'intégrale par sa valeur sur un quart de cercle :

$$\left| \int_{C_R} \exp(zt)F(z)dz \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R^{-\lambda} \exp\left[Rt \cos \theta - a \frac{\cos \theta}{R}\right] d\theta$$

En appliquant le lemme 1.3, on en déduit que cette intégrale tend vers 0. On obtient le même résultat pour l'arc de cercle symétriques par rapport à Ox . Il est ainsi démontré que l'image inverse cherchée est définie par :

$$f(t) = U(t) \frac{1}{2i\pi} \int_{L_{r,\alpha}} \exp(tz) \left[z^{-\lambda} \right] \exp\left(-\frac{a}{z}\right) dz$$

Cette formule ressemble à la représentation intégrale d'une fonction de Bessel donnée par la proposition 1.21.

Pour faire apparaître l'exposant $u - \frac{x^2}{4u}$, on pose $u = zt$. Le lacet est alors remplacé par une courbe homothétique qui est encore un lacet du même type, mais comme les résultats précédents sont indépendants de r , on peut conserver, dans les calculs, l'intégration sur le lacet précédent. Par ailleurs, l'exponentielle est devenue celle de $u - \frac{(2\sqrt{at})^2}{4u}$. On en déduit :

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} t^{\lambda-1} \int_L \exp \left[u - \frac{(2\sqrt{at})^2}{4u} \right] u^{-\lambda} du$$

En faisant apparaître le facteur $\left[\frac{2\sqrt{at}}{2} \right]^{\lambda-1}$, on obtient le résultat, grâce à la proposition 1.21 :

Proposition 2.3 *L'image de Laplace inverse de la fonction F définie dans le demi-plan Π_0 par $F(z) = [z^{-\lambda}] \exp(-\frac{a}{z})$ est représentée par une intégrale le long d'un lacet L bordant la demi-droite des réels négatifs, à savoir :*

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} t^{\lambda-1} \int_L \exp \left[u - \frac{(2\sqrt{at})^2}{4u} \right] u^{-\lambda} du,$$

ou encore, en faisant intervenir une fonction de Bessel :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \left(\frac{t}{a} \right)^{(\lambda-1)/2} J_{\lambda-1}(2\sqrt{at})$$

L'exercice 3.21 fournit une autre méthode pour aboutir à ce résultat. Par ailleurs, l'exercice 3.9,d) propose le calcul inverse, donc une vérification de ce qui précède, par utilisation d'une équation différentielle de Bessel.

Exemple 2.26 *Recherche de l'image inverse de $F(z) = ([z^{5/3}] + [z^{1/3}])^{-1}$*

Les puissances fractionnaires de cette définition sont supposées prolonger la racine cubique et ses puissances entières sur les réels positifs. Cet exemple fait intervenir un point de branchement pour lequel la coupure sera identifiée à la demi-droite des réels négatifs, mais aussi des pôles. En effet, on a :

$$[z^{5/3}] + [z^{1/3}] = [z^{1/3}]([z^{2/3}] - i)([z^{2/3}] + i)$$

L'équation $[z^{2/3}] - i = 0$ fournit $\exp(2i\theta/3) = \exp(i\pi/2)$, donc, en tenant compte de la définition de l'argument de z , fournit la seule solution $a = \exp(3i\pi/4)$. L'autre facteur fournit \bar{a} .

On considère encore la figure 2.25 de l'exemple précédent. En les pôles précédents, la somme des résidus de $\exp(zt)F(z)$ est égale à $\frac{3}{4i} \exp(\frac{t\sqrt{2}}{2}(1-i))$, c'est-à-dire $\frac{3}{2} \exp(-\frac{\sqrt{2}}{2}t) \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}t)$. Par conséquent, le théorème des résidus appliqué au contour $\Gamma_{R,r,\alpha}$ et à la fonction $e^{zt}F(z)$ fournit :

$$\int_{\Gamma} \exp(zt)(z) dz = 3i\pi \exp(-\frac{\sqrt{2}}{2}t) \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}t)$$

Une majoration immédiate sur les grands arcs de cercle prouve que ces intégrales tendent vers 0 :

$$\left| \int_{C_R} \exp(zt)F(z) dz \right| \leq \frac{\pi R \exp(ct)}{R^{5/3} - R^{1/3}}$$

On obtient déjà le résultat pour $t > 0$:

$$f(t) = \frac{3}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + \frac{1}{2i\pi} \int_{L_+} \exp(zt)F(z)dz$$

On fait également une majoration sur le petit cercle du lacet L :

$$\left| \int_{C_r} \exp(zt)F(z)dz \right| \leq \frac{2\pi r \exp(ct)}{r^{1/3} - r^{5/3}}$$

Cette majoration indépendante de α montre que l'intégrale sur le lacet se réduit aux intégrales sur les demi-droites de ce lacet qui d'ailleurs, lorsque $\alpha \rightarrow 0$, deviennent des intégrales (convergentes) sur les réels négatifs. L'intégrale sur la demi-droite supérieure s'écrit, à la limite :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\rho t) \frac{1}{(\rho)^{5/3} \exp(5i\pi/3) + [\rho^{1/3}] \exp(i\pi/3)} d\rho$$

Sur la demi-droite inférieure, π est remplacé par $-\pi$. On en déduit que l'intégrale sur le lacet est égale à la différence de deux intégrales qui sont imaginaires conjuguées :

$$\int_{L_+} \exp(zt)F(z)dz = 2i \int_0^{+\infty} \exp(-\rho t) \frac{(\rho)^{5/3} \sin(5\pi/3) + (\rho)^{1/3} \sin(\pi/3)}{(\rho)^{10/3} + 2\rho^2 \cos(4\pi/3) + (\rho)^{2/3}} d\rho$$

En simplifiant, on obtient, pour $t > 0$, la formule :

$$f(t) = \frac{3}{2} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-\rho t) \frac{1 - \rho^{4/3}}{\rho^{8/3} - \rho^{4/3} + 1} \rho^{-1/3} d\rho$$

En passant par la variable $u = \rho^{4/3}$, on peut décomposer la fraction rationnelle de u qui est à l'intérieur de cette intégrale, mais cela ne permet pas un calcul explicite. Cette formule permet cependant d'estimer le comportement de f au voisinage de $t = 0$ et de l'infini (voir le paragraphe suivant).

Exemple 2.27

Lorsque la fonction F possède une infinité de points singuliers à gauche du demi-plan d'holomorphic, l'application du théorème d'inversion peut conduire à l'expression de l'image inverse sous forme d'une série. Par exemple, dans la résolution d'un problème classique d'évolution de la température le long d'une tige de longueur L (Cf. chapitre 6), on est amené à la recherche de la transformée inverse d'une fonction F définie par $F(s) = \frac{\text{ch}(x\sqrt{as})}{s \text{ch}(L\sqrt{as})}$ où x est une longueur vérifiant $0 < x < L$. On se propose de déterminer cette image inverse au moyen d'une série.

a) Etude de la fonction F

On simplifie les notations en prenant $a = 1$. La fonction notée (abusivement) \sqrt{s} est la puissance d'exposant $1/2$ qui prolonge la fonction réelle $t \mapsto \sqrt{t}$. Mais

les deux branches de la fonction étant opposées, leur composition avec une fonction paire, à savoir ici le cosinus hyperbolique, fournissent une fonction F au sens strict (c'est-à-dire uniforme). Cette fonction possède le pôle $s = 0$ et une infinité d'autres pôles simples donnés par l'égalité $\text{ch}(L\sqrt{s}) = 0$, c'est-à-dire : $s = -\left(\frac{\pi(2n+1)}{2L}\right)^2$ avec $n \geq 0$ entier. Ces points, notés s_n sont tous réels strictement négatifs.

Il en résulte que F est holomorphe dans le demi-plan Π_0 . Par ailleurs, par l'hypothèse $x < L$, on voit facilement que les hypothèses de la formule d'inversion sont vérifiées (voir les détails dans l'exercice 3.42).

b) Utilisation d'un contour et application du théorème des résidus

Pour le calcul de l'image inverse à partir de l'intégrale de $\exp(st)F(s)$ sur Δ_c , on se sert encore d'un arc de cercle C_R de centre O , placé à gauche de Δ_c (voir la figure ci-après), le rayon R étant choisi pour que ce chemin ne passe pas par un pôle, par exemple : $R = R_N = \frac{N^2\pi^2}{L^2}$. Le contour utilisé est $\Gamma_N = [AB] \cup C_{R_N}$ où A et B sont les extrémités de l'arc de cercle sur Δ_c . Puisque le résidu au point $s = 0$ est égal à 1, l'application du théorème des résidus nous donne :

$$\int_{\Gamma_N} \exp(st)F(s)ds = 2i\pi \left[1 + \sum_0^{N-1} \text{Rés} \left[\exp(st)F(s); s = s_n \right] \right]$$

Les résidus en les autres pôles simples s_n sont donnés par :

$$\begin{aligned} \text{Rés} \left[\exp(st)F(s); s = s_n \right] &= \frac{2e^{s_n t} \text{ch}(ix\sqrt{|s_n|})}{iL\sqrt{|s_n|} \text{sh}(iL\sqrt{|s_n|})} \\ &= \frac{4(-1)^{(n+1)}}{\pi(2n+1)} \exp(s_n t) \cos \left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L} \right] \end{aligned}$$

c) Détermination de la limite sur l'arc de cercle

Il s'agit à présent de prouver que l'intégrale sur C_{R_N} tend vers 0 lorsque $N \rightarrow +\infty$. Dans ce qui suit, on ne raisonnera que sur la partie C'_R de l'arc de cercle qui se trouve dans le demi-plan supérieur et on pose sur cet arc : $s = R_N \exp(i\theta)$. En vue d'utiliser le lemme 1.3, on démontre d'abord que le module maximum de $sF(s)$ sur cet arc de cercle est uniformément borné. On est ainsi amené à majorer $|\text{ch}(x[s]^{1/2})|^2$ et à minorer $|\text{ch}(L[s]^{1/2})|^2$.

De la formule que l'on vérifie facilement :

$$|\text{ch}(a + ib)|^2 = \text{ch}^2 a \cos^2 b + \text{sh}^2 a \sin^2 b = \text{ch}^2 a - \sin^2 b,$$

on déduit facilement une première inégalité :

$$\left| \text{ch} \left(\frac{x}{L} \pi N \exp(i(\theta/2)) \right) \right| \leq \text{ch} \left(\frac{x}{L} \pi N \cos(\theta/2) \right)$$

Comme $|\text{ch}(\pi N \exp(i(\theta/2)))|^2 = \text{ch}^2(\pi N \cos(\theta/2)) - \sin^2(\pi N \sin(\theta/2))$, on aurait de même, pour le dénominateur de $F(s)$, la minoration :

$$|\text{ch}(\pi N \exp(i(\theta/2)))|^2 \geq \text{ch}^2(\pi N \cos(\theta/2)) - 1 = \text{sh}^2(\pi N \cos(\theta/2))$$

L'inconvénient est que ce minorant s'annule lorsque $\theta = \pi$. Il faut donc procéder à une minoration moins grossière.

Pour cela, scindons en deux l'intervalle $[\alpha_N, \pi]$ parcouru par θ (voir la figure qui suit).

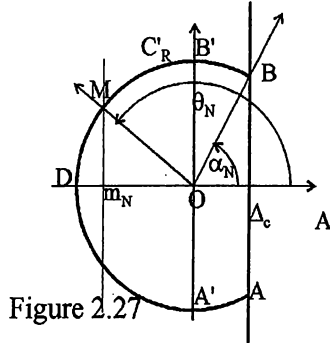


Figure 2.27

Soit M le point du cercle se projetant en m_N , pôle le plus à gauche à l'intérieur de C_{R_N} . On désigne l'angle polaire de M par θ_N . Il est donc défini par :

$$\cos \theta_N = -\frac{(N - 1/2)^2(\pi/L)^2}{N^2(\pi/L)^2} = -(1 - \frac{1}{2N})^2$$

On raisonnera successivement sur les intervalles $[\alpha_N, \theta_N]$ et $[\theta_N, \pi]$. Sur le premier intervalle, on utilise la minoration grossière signalée ci-dessus. On obtient :

$$\left| \frac{ch(x\sqrt{s})}{ch(L\sqrt{s})} \right| \leq \frac{ch(\frac{\pi Nx}{L} \cos(\frac{\theta}{2}))}{sh(N\pi \cos(\frac{\theta}{2}))} \leq \frac{ch(\frac{\pi Nx}{L} \cos(\frac{\theta}{2}))}{ch(\pi N \cos(\frac{\theta}{2}))} \coth(N\pi \cos(\frac{\theta}{2}))$$

La croissance de $t \mapsto cht$ jointe à l'inégalité $x/L < 1$ ainsi que la décroissance de $t \mapsto \coth t$ utilisée dans la situation du premier intervalle où $\cos \theta/2 \geq \cos(\theta_N/2)$ nous donnent ensuite :

$$\left| \frac{ch(x\sqrt{s})}{ch(L\sqrt{s})} \right| \leq \coth(N\pi \cos(\theta_N/2))$$

Le calcul de ce cosinus fournit $\cos^2(\theta_N/2) = \frac{1}{2N} - \frac{1}{8N^2}$. La fonction \coth portant alors sur une fonction croissante de N , il en résulte :

$$\alpha_N \leq \theta \leq \theta_N, N > 1 \Rightarrow \left| \frac{ch(x\sqrt{s})}{ch(L\sqrt{s})} \right| \leq \coth \left[\pi \left(\frac{N}{2} - \frac{1}{8} \right)^{1/2} \right] \leq \coth \pi (*)$$

Sur le deuxième intervalle, on passe à l'angle double en écrivant :

$$\begin{aligned} 2|ch(\pi N \exp(i(\theta/2)))| &= 2ch^2(\pi N \cos(\theta/2)) - 2\sin^2(\pi N \sin(\theta/2)) \\ &= ch(2\pi N \cos(\theta/2)) + \cos(2\pi N \sin(\theta/2)) (**) \end{aligned}$$

Or, le choix fait pour θ_N implique, d'une part, $2N\pi \sin(\theta/2) \leq 2N\pi$ et, d'autre part :

$$2N\pi \sin(\theta/2) \geq 2N\pi \sin(\theta_N/2) = 2N\pi \left(1 - \frac{1}{2N} + \frac{1}{8N^2}\right)^{1/2}$$

Ceci entraînant $2N\pi \sin(\theta/2) \in [2N\pi - \frac{\pi}{2}, 2N\pi]$, on a : $\cos 2N\pi \sin(\theta/2) \geq 0$. La relation (**) fournit donc : $|\operatorname{ch}(\pi N \exp(i(\theta/2)))| \geq \sqrt{2} \operatorname{ch}(\pi N \cos(\theta/2))$ et, il en résulte la majoration :

$$\theta \in [\theta_N, \pi] \Rightarrow \left| \frac{\operatorname{ch}(x\sqrt{s})}{\operatorname{ch}(L\sqrt{s})} \right| \leq \sqrt{2} \quad (***)$$

Finalement les relations (*) et (***) impliquent que $|sF(s)|$ est majoré par une constante C indépendante de N , ce qui donne ensuite pour l'intégrale sur C'_{R_N}

$$\left| \int_{C'_{R_N}} e^{st} F(s) ds \right| \leq C \left[\left| \int_{\widehat{BB'}} e^{st} \frac{ds}{s} \right| + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \exp(tR_N \cos \theta) d\theta \right]$$

La première intégrale est majorée par $e^{ct}(\pi/2 - \alpha_N)$, donc tend vers 0 puisque $\alpha_N \rightarrow \pi/2$. De plus, grâce au lemme 1.3, la limite de la dernière intégrale est nulle lorsque $N \rightarrow +\infty$. Résumons :

Proposition 2.4 *L'image inverse de $s \mapsto \frac{1}{s} \frac{\operatorname{ch}(x[s^{1/2}])}{\operatorname{ch}(L[s^{1/2}])}$, où $0 < x < L$, est égale à la somme d'une série trigonométrique en la variable x , c'est-à-dire :*

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} \exp\left(-t \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4L^2}\right) \cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] \right]$$

Remarque 2.9 *Au lieu d'utiliser le contour constitué par le cercle C_R , on pourrait choisir un contour rectangulaire comme dans l'exemple 6.23 étudiant la vibration transversale d'une tige. On obtient d'autres majorations des fonctions hyperboliques aboutissant au résultat précédent.*

Exemple 2.28 *Image inverse de $s \mapsto \frac{1}{s} \log \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right]$ où P et Q sont des polynômes*

a) Déformation du contour

Tous les zéros et les pôles de P/Q , au nombre de $n = p + q$ où p et q désignent les degrés de P et Q , sont des points de branchement pour le logarithme. Si a désigne la plus grande partie réelle de ces points, la fonction F est holomorphe dans Π_b où $b = \sup(a, 0)$. En privant le champ complexe d'un ensemble fini de m ($m \leq n$) coupures $\{\gamma\}$, qui sont des segments ou des demi-droites tous situés dans le complémentaire de Π_b , on obtient un ouvert Ω , contenant Π_b , dans lequel on peut définir une détermination de la fonction logarithme.

Deux cas se présentent selon que $s = 0$ fait partie des points de branchement ou encore appartient à l'une des coupures (cas 1) ou selon que ce point appartient à Ω (cas 2). Dans tous les cas, F est holomorphe dans Ω sauf peut-être au pôle simple $s = 0$. On peut vérifier les hypothèses du théorème d'inversion sur le demi-plan Π_b , ce qui implique que $f(t)$ s'obtient par intégration de $e^{st} F(s)$ sur Δ_c où $c > b$.

Soit un ensemble de m lacets, noté $\{L\}$, composé de segments ou de demi-droites

parallèles à ceux de $\{\gamma\}$ et d'arcs de cercle dont les centres sont les points de branchement et, éventuellement de centre O si $s = 0$ appartient à une coupure sans être un point de branchement. On définit également, comme dans l'exemple 2.25, un bord orienté de compact Γ composé de trois segments $[BA]$, $[AA']$, $[A'B']$, d'une réunion $\cup C_j$ d'arcs de cercle tous inclus dans le cercle de centre O et de rayons R et de parties de $\{L^-\}$ (ceci en généralisant la figure 2.25 au cas où il existerait plusieurs coupures de type demi-droites).

Dans le cas 1, l'application du théorème de Cauchy nous fournit :

$$\int_{\Gamma} e^{st} F(s) ds = 0$$

Dans le cas 2, c'est le théorème des résidus qui donne :

$$\int_{\Gamma} e^{st} F(s) ds = 2i\pi \text{Rés}[e^{st} F(s); 0] = 2i\pi \log\left(\frac{P(0)}{Q(0)}\right)$$

On montre, comme à l'habitude, que sur le chemin $\Gamma_1 = [BA] \cup [A'B'] \cup (\cup C_j)$, l'intégrale de $e^{st} F(s)$ tend vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$. Alors, on en déduira qu'on peut remplacer la droite d'intégration Δ_c par le chemin $\{L^+\}$.

Désignons par $\|P\|$ le polynôme obtenu en remplaçant les coefficients du polynôme P par leurs modules respectifs. Par ailleurs, si le terme de plus haut degré du polynôme Q s'écrit $\beta_q s^q$, on pose $Q^0 = Q - \beta_q s^q$.

Alors, sur le segment $[A'B']$ qui est d'ordonnée R , on a, pour R assez grand :

$$\left| \int_{[A'B']} e^{st} F(s) ds \right| \leq \frac{c}{R} e^{ct} \ln \left[\frac{\|P\|(\sqrt{R^2 + c^2})}{|\beta_q|R^q - \|[Q^0]\](\sqrt{R^2 + c^2})} \right]$$

Ce quotient par R d'un tel logarithme tend vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$ et, ainsi les intégrales sur les segments $[BA]$ et $[A'B']$ tendent vers 0.

Une majoration du même type sur un des arcs C_j nous donne :

$$\left| \int_{C_j} e^{st} F(s) ds \right| \leq \frac{2\pi R}{R} \ln \left[\frac{\|P\|(R)}{|\beta_q|R^q - \|[Q^0]\](R)} \right] \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{tR \cos \theta} d\theta$$

Le résultat est alors obtenu par la démarche du lemme 1.3. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\{L\}^+} e^{st} F(s) ds && \text{dans le cas 1} \\ f(t) &= \log\left(\frac{P(0)}{Q(0)}\right) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\{L\}^+} e^{st} F(s) ds && \text{dans le cas 2} \end{aligned}$$

b) Calcul de l'intégrale sur le lacet dans le cas où P et Q sont du même degré

Par une décomposition du logarithme, on voit qu'on peut se ramener au cas où P et Q sont du premier degré. Dans le cas 1, on peut prendre $P = s - s_0$ et $Q = s$ et dans le cas 2, on prend $P = s - s_0$ et $Q = s - s_1$, ces nombres étant

non nuls. Dans chacun de ces cas, on peut choisir pour coupure le segment dont les extrémités sont s_0 et s_1 .

Détermination de l'image inverse dans le cas 2

On suppose donc que le point $s = 0$ n'est pas sur la coupure $[s_0, s_1]$. Comme les produits $(s - s_j) [\log(s - s_j)] \rightarrow 0$ lorsque $s \rightarrow s_j$, on en déduit que les intégrales sur les cercles de centres s_0 et s_1 tendent vers 0 lorsque leur rayon tend vers 0. On désigne par α l'argument de $s_1 - s_0$. On compte les arguments à partir de la direction de l'axe des réels positifs. L'intégrale sur un des segments du lacet admet pour limite, en posant $\delta = |s_1 - s_0|$, l'intégrale convergente :

$$\exp(i\alpha) \int_0^\delta \exp(t(s_0 + \rho e^{i\alpha})) \left[\ln \left[\frac{\rho}{\delta - \rho} \right] + i\alpha - i(\alpha - \pi) \right] \frac{d\rho}{s_0 + \rho e^{i\alpha}}$$

Sur le même segment, dans le sens contraire, après un tour complet sur le cercle de centre s_1 , ce qui remplace l'argument $\alpha - \pi$ de $s - s_1$ par $\alpha + \pi$, on obtient l'intégrale :

$$- \exp(i\alpha) \int_0^\delta \exp(t(s_0 + \rho e^{i\alpha})) \left[\ln \left[\frac{\rho}{\delta - \rho} \right] - i\pi \right] \frac{d\rho}{s_0 + \rho e^{i\alpha}}$$

Dans la somme, les intégrales portant sur le logarithme disparaissent et nous obtenons, après calcul du résidu au point $s = 0$ et division par $2i\pi$:

$$f(t) = \ln \left| \frac{s_0}{s_1} \right| - i\alpha + \exp(i\alpha) \int_0^\delta \exp(t(s_0 + \rho e^{i\alpha})) \frac{d\rho}{s_0 + \rho e^{i\alpha}}$$

La fonction sous l'intégrale étant de classe C^1 par rapport à (t, ρ) dans l'ouvert où $s_0 + \rho e^{i\alpha} \neq 0$, lequel, par hypothèse, contient la coupure, on peut dériver sous l'intégrale par rapport à t . On obtient ainsi : $f'(t) = \exp(i\alpha) \int_0^\delta \exp(t(s_0 + \rho e^{i\alpha})) d\rho$. On calcule facilement cette intégrale. En tenant compte enfin de la propriété :

$$\int_0^\delta \frac{1}{s_0 + \rho \exp(i\alpha)} d\rho = \left[\log \left(\frac{s_0}{s_1} \right) \right],$$

On en déduit :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \int_0^t \frac{\exp(s_1 u) - \exp(s_0 u)}{u} du^1$$

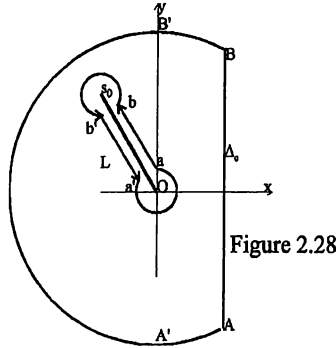
Détermination de l'image inverse dans le cas 1

On désigne par α l'argument de s_0 . Les arguments seront comptés à partir de la direction de l'axe des réels positifs. D'après les hypothèses faites, on peut supposer $\pi/2 \leq \alpha \leq 3\pi/2$. L'intégrale sur le petit cercle de centre s_0 tend vers 0 lorsque son rayon r' tend vers 0. Cela résulte de la majoration :

$$\left| \int_{C'_{r'}} e^{st}(s) ds \right| \leq \exp((\Re s_0 + r')t) \left[r \ln \left(\frac{r'}{r' + |s_0|} \right) + 3\pi \right]$$

¹Ce résultat peut être retrouvé à l'aide de l'exemple 2.15 en utilisant l'exponentielle intégrale.

Par contre, ni l'intégrale sur le petit cercle de centre O et de rayon r, ni les intégrales sur les segments du lacet n'ont de limites finies (non sommabilité au point d'affixe 0). En tenant compte des limites lorsque $r' \rightarrow 0$ et en laissant r fixe, l'intégrale sur une des parties rectilignes $L_1 = [re^{i\alpha}, s_0]$ du lacet s'écrit, en paramétrant à l'aide de $s = \rho e^{i\alpha}$:



$$\int_{L_1} e^{st} F(s) ds = e^{i\alpha} \int_r^{|s_0|} \exp(t\rho e^{i\alpha}) \left[\ln\left(\frac{[|s_0| - \rho]}{\rho}\right) + i(\alpha - \pi) - i\alpha \right] \frac{d\rho}{\rho}$$

Sur l'autre partie rectiligne du lacet, compte tenu de l'argument de $s - s_0$ qui augmente de 2π , on trouve :

$$\int_{L_2} e^{st} F(s) ds = -e^{i\alpha} \int_r^{|s_0|} \exp(t\rho e^{i\alpha}) \left[\ln\left(\frac{[|s_0| - \rho]}{\rho}\right) + i(\alpha + \pi) - i\alpha \right] \frac{d\rho}{\rho}$$

Dans la somme de ces intégrales, la partie logarithmique se supprime et il nous reste :

$$\int_{L_1 \cup L_2} e^{st} F(s) ds = -2i\pi \int_r^{|s_0|} \exp(t\rho e^{i\alpha}) \frac{d\rho}{\rho}$$

Cette intégrale n'a pas de limite finie pour $r = 0$, mais il est possible de faire intervenir une intégrale convergente en retranchant à l'intégrand son équivalent au voisinage de 0. On obtient ainsi :

$$\int_{L_1 \cup L_2} e^{st} F(s) ds = -2i\pi \left[\int_r^{|s_0|} \frac{\exp(t\rho e^{i\alpha}) - 1}{\rho} d\rho + \ln\left[\frac{|s_0|}{r}\right] \right] (*)$$

Par ailleurs, l'intégrale sur le cercle de centre O, fournit :

$$\int_{C_r} e^{st} F(s) ds = i \int_{\alpha-2\pi}^{\alpha} \exp(rte^{i\theta}) \left[\ln\left(\frac{|re^{i\theta} - s_0|}{r}\right) + i \arg(re^{i\theta} - s_0) - i\theta \right] d\theta$$

Le terme logarithmique s'écrit $\ln\left(\frac{|s_0|}{r}\right) + \ln\left(|1 - \frac{r}{s_0} e^{i\theta}\right)$. Le premier terme fournit, par un passage à la limite, lorsque $r \rightarrow 0$, dans l'intégrale précédente l'expression $2i\pi \ln\left(\frac{|s_0|}{r}\right)$ qui s'annule avec le dernier terme de la relation (*). L'intégrale fournie par le deuxième terme tend vers 0. Par ailleurs, on remarque que

$\int_{\alpha-2\pi}^{\alpha} (\alpha - \pi - \theta) d\theta = 0$ En résumé, après division par $2i\pi$, on obtient :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \left[\int_0^{|s_0|} \frac{1 - \exp(t\rho e^{i\alpha})}{\rho} d\rho \right]$$

On peut encore simplifier ce résultat en dérivant par rapport à t . On trouve $\frac{\exp(ts_0) - 1}{t}$.

On en déduit une autre expression de $f(t)$, à savoir : $\int_0^t \frac{\exp(s_0 u) - 1}{u} du$. On pourrait justifier ce résultat à partir du résultat précédent (calcul dans le cas 2) par un passage à la limite lorsque $s_1 \rightarrow 0$.

2.2.2 Comportement asymptotique des originaux pour les petites ou les grandes valeurs de t

A défaut de calcul explicite d'un original f par l'utilisation de la formule d'inversion, des développements asymptotiques peuvent parfois être utilisés à l'intérieur de cette formule, ou d'une autre déduite de celle-ci par déformation, pour obtenir des informations sur le comportement de f . Pour expliquer certaines des démarches pouvant être utilisées, commençons un exemple simple où l'original est connu, ce qui permettra, en outre, une vérification des résultats obtenus.

Exemple 2.29 *Comportement de f lorsque $F(s) = s^{-\lambda} \exp(-s)$ où $\lambda > 0$*

Bien entendu, la présence du facteur $\exp(-s)$ se traduit sur l'original par la translation $t \mapsto t - 1$ et, par ailleurs, on connaît l'original de la puissance. L'original est ainsi défini par $f(t) = \mathcal{U}(t - 1) \frac{(t - 1)^{\lambda - 1}}{\Gamma(\lambda)}$.

Il se trouve que les calculs qui suivent permettent, en fait, de vérifier ce résultat. Cependant, cette vérification ne constitue pas l'objectif poursuivi, lequel est, avant tout, de voir comment l'étude du comportement de f en $t = 0$ et à l'infini peut être faite grâce à la formule d'inversion.

Etude au voisinage de $t = 0$

Cette fonction F vérifiant les hypothèses de la formule d'inversion dans le demi-plan Π_0 , l'original f est défini par une intégrale sur Δ_c où c est un réel strictement positif arbitraire. Dans le cas $\lambda > 1$, une majoration immédiate donne, en supposant $c > 1$ et en ayant posé $K = \int_{\mathbb{R}} (1 + y^2)^{-(\lambda/2)} dy$:

$$\begin{aligned} |2i\pi f(t)| &= \left| \int_{\Delta_c} e^{st} s^{-\lambda} \exp(-s) ds \right| = e^{c(t-1)} \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{iy(t-1)}}{(c + iy)^\lambda} dy \right| \\ &\leq e^{c(t-1)} \int_{\mathbb{R}} (c^2 + y^2)^{-(1/2)\lambda} dy \leq e^{c(t-1)} K \end{aligned}$$

Pour tout $t < 1$ fixé et pour tout ε , il existe c_0 tel que $c > c_0 \Rightarrow e^{c(t-1)} \leq \frac{\varepsilon}{K}$. On en déduit, dans le cas $\lambda > 1$, le résultat : $\forall t < 1, f(t) = 0$.

Une autre méthode consiste à considérer un arc de cercle centré en O situé à droite de Δ_c et limité par cette droite (Cf. §1.10.3 et figures 1.10.3 (2)). L'intégrale sur cet arc est majorée par $R^{1-\lambda} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \exp(R(\cos \theta)(t-1)) d\theta$. Grâce à l'hypothèse $t < 1$, on majore à nouveau cette expression (Cf. lemme 1.3) par un terme du type $CR^{-\lambda}$. L'application du théorème de Cauchy montre alors que $t < 1 \Rightarrow f(t) = 0$. Cette dernière méthode fournit donc le résultat quel que soit $\lambda > 0$.

Etude lorsque $t \rightarrow +\infty$, en fait lorsque $t > 1$

On utilise, pour cela, le contour de l'exemple 2.25. Sur $[AB]$, d'ordonnée σ , la majoration, valable pour $t > 1$:

$$|\exp[(x + i\sigma)t]F(x + i\sigma)| \leq \frac{\exp(x(t-1))}{\sigma^\lambda} \leq \sigma^{-\lambda},$$

permet de montrer que les limites des intégrales de $F(s)e^{st}$ sur de tels segments sont nulles. Sur les cercles de type C_R , cette même fonction est majorée par $R^{-\lambda} \exp[R \cos \theta(t-1)]$ où $\cos \theta < 0$, $\lambda > 0$ et $t > 1$. On en déduit donc, par application du lemme de Jordan 1.3, que, sur ces arcs de cercles, les intégrales tendent aussi vers 0.

Il en résulte, lorsque $t > 1$, la formule :

$$2i\pi f(t) = \int_L e^{st} s^{-\lambda} \exp(-s) ds$$

On se contente de poursuivre l'étude dans les deux cas où, soit $0 < \lambda < 1$, soit $1 < \lambda < 2$.

Dans le premier cas, l'intégrale sur l'arc C_r tend vers 0 lorsque $r \rightarrow 0$ et $\alpha \rightarrow 0$ puisqu'elle est majorée par $2\pi e^{r(t-1)} r^{1-\lambda}$. Les intégrales sur les demi-droites ont également des limites s'exprimant par des intégrales convergentes, ce qui permet de conclure :

$$2i\pi f(t) = - \int_0^{+\infty} e^{-x(t-1)} x^{-\lambda} e^{-i\lambda\pi} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x(t-1)} x^{-\lambda} e^{i\lambda\pi} dx$$

A l'aide du changement de variable $x(t-1) = u$, cette formule devient :

$$\pi f(t) = \sin(\lambda\pi)(t-1)^{\lambda-1} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{(1-\lambda)-1} du = \sin(\lambda\pi)(t-1)^{\lambda-1} \Gamma(1-\lambda)$$

L'emploi ensuite de la formule des compléments fournit finalement le comportement cherché lorsque $t > 1$ (mieux, c'est l'original lui-même!) :

$$f(t) = \frac{(t-1)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$$

Passons au deuxième cas.

Cette fois, on ne peut faire tendre r et α vers 0 sans précaution car les intégrales sur les demi-droites du lacet et sur le cercle C_r deviennent divergentes. En corrigeant les termes responsables de ces divergences, on est conduit à écrire :

$$\int_{C_r} e^{s(t-1)} s^{-\lambda} ds = \int_{C_r} s^{-\lambda} ds + \int_{C_r} s^{-\lambda} [e^{s(t-1)} - 1] ds$$

Puisque $e^{s(t-1)} - 1$ se comporte comme $s(t-1)$ au voisinage de $s = 0$, la limite lorsque $r \rightarrow 0$ de la deuxième intégrale est nulle (Cf. la majoration dans le cas précédent). La première intégrale se calcule. Il en résulte, pour t fixé :

$$\int_{C_r} e^{s(t-1)} s^{-\lambda} ds = 2i \frac{1}{1-\lambda} \sin(\pi(1-\lambda)) r^{1-\lambda} + O(r)$$

La somme des intégrales sur les demi-droites du lacet, lorsque $\alpha \rightarrow 0$, s'écrit : $-\exp(\pm i\pi\lambda) \int_r^{+\infty} x^{-\lambda} \exp[-x(t-1)] dx$. Ces intégrales sont divergentes à la borne $x = 0$, mais on peut également écrire cette somme sous la forme :

$$2i \sin(\pi\lambda) \left[\int_r^{+\infty} x^{-\lambda} dx + \int_r^{+\infty} x^{-\lambda} [\exp[-x(t-1)] - 1] dx \right]$$

La première intégrale se calcule et la deuxième, portant sur une fonction équivalente en $x = 0$ à $x^{1-\lambda}$, a une limite finie $J(t)$ lorsque $r \rightarrow 0$. Il en résulte, car les deux intégrales calculées ci-dessus se suppriment :

$$f(t) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} J(t) = \frac{\sin(\pi\lambda)}{\pi} \int_0^{+\infty} x^{-\lambda} [\exp[-x(t-1)] - 1] dx$$

Finalement, un changement de variable, une intégration par parties et la formule des compléments nous donnent également dans ce cas l'original lui-même, à savoir :

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\sin(\lambda\pi)}{\pi} (t-1)^{\lambda-1} \int_0^{+\infty} u^{-\lambda} (\exp -u - 1) dx \\ &= \frac{\sin(\lambda\pi)}{\pi(1-\lambda)} (t-1)^{\lambda-1} \left[[(\exp -u - 1)u^{1-\lambda}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} u^{1-\lambda} \exp -u dx \right] \\ &= \frac{\sin(\lambda\pi)}{\pi(1-\lambda)} (t-1)^{\lambda-1} \Gamma(2-\lambda) = \frac{\sin(\lambda\pi)}{\pi} (t-1)^{\lambda-1} \Gamma(1-\lambda) \\ &= \frac{(t-1)^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \end{aligned}$$

Exemple 2.30 *Comportements de f lorsque $F(s) = \frac{s^{1/2}}{s^2 + a^2}$*

Etude de f lorsque $t \rightarrow +\infty$

Sans reprendre la démarche précédente en détail, on peut, par utilisation du théorème des résidus, déformer la droite d'intégration Δ_c en un lacet L bordant la coupure placée sur la demi-droite des réels négatifs. La somme des résidus aux points $\pm ia$ est fournie par $a^{-1/2} \sin(at + \pi/4)$. On trouve ainsi :

$$f(t) = a^{-1/2} \sin(at + \pi/4) + \frac{1}{2i\pi} \int_{L^-} \exp(st) F(s) ds$$

La fonction F tend vers 0 à l'origine, donc l'intégrale sur le petit cercle du lacet tend vers 0. Les intégrales sur les demi-droites du lacet convergent, lorsque

$\alpha \rightarrow 0$, vers deux intégrales convergentes et il en résulte que l'intégrale sur le lacet s'exprime par :

$$\int_{L^-} \exp(st)F(s)ds = 2i \int_0^{+\infty} \exp(-\rho t) \frac{\rho^{1/2}}{\rho^2 + a^2} d\rho$$

L'intégrant étant majoré par la fonction sommable $\rho \mapsto \frac{\rho^{1/2}}{\rho^2 + a^2}$ indépendante de t , le théorème de convergence dominée indique que cette intégrale tend vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$.

Plus précisément, en posant $t\rho = y$ et en employant encore le théorème de convergence dominée, on détermine pour celle-ci un équivalent, à savoir :

$$t^{-3/2} \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-y)\sqrt{y}}{a^2 + (y/t)^2} dy \quad t \xrightarrow{\sim} \infty \quad \frac{1}{a^2 t^{3/2}} \int_0^{+\infty} \exp(-y)\sqrt{y} dy = \frac{\Gamma(3/2)}{a^2 t^{3/2}}$$

Il en résulte un équivalent de $f(t)$ au voisinage de $+\infty$:

$$f(t) \quad t \xrightarrow{\sim} \infty \quad \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(at + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}a^2 t^{3/2}}$$

Etude de f au voisinage de 0

On se sert de l'intégrale sur Δ_c en développant d'abord formellement suivant les puissances de a/z sous le signe intégral :

$$\int_{\Delta_c} \exp(tz)F(z)dz = \int_{\Delta_c} \frac{\exp(tz)}{z^{3/2}} \left[\sum_0^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{a}{z}\right)^{2n} \right] dz$$

Cette série n'est convergente que si $|a/z| < 1$, mais le minimum de $|z|$ étant égal à c , lequel peut être pris arbitrairement grand, cette condition est remplie. On pourrait également par des arguments d'uniforme convergence montrer que l'interversion de l'intégrale et de la sommation est licite. Le but étant de trouver un équivalent de f au voisinage de 0, nous faisons plutôt intervenir le reste d'ordre N . On a, ainsi :

$$\int_{\Delta_c} \exp(tz)F(z)dz = \int_{\Delta_c} \frac{\exp(tz)}{z^{3/2}} \left[\sum_0^{N-1} (-1)^n \left(\frac{a}{z}\right)^{2n} + R_N \right] dz$$

En utilisant la formule d'inversion pour les puissances de a/z , on obtient alors :

$$f(t) = \left[\sum_0^{N-1} (-1)^n \left(\frac{a^{2n} t^{2n+1/2}}{\Gamma(2n + 3/2)} \right) \right] + S_N$$

Il ne reste plus qu'à prouver que, pour tout N fixé, $\lim_{t \rightarrow 0} t^{3/2-2N} S_N = 0$. Vérifions le pour $N = 1$ (pour N quelconque, voir l'exercice 3.22), cas pour lequel nous avons $|S_1| = \frac{a^2}{2} \left| \int_{\Delta_c} \frac{\exp(zt)}{z^{3/2}(z^2 + a^2)} dz \right|$. En posant $zt = u$, ce qui remplace la

droite d'intégration par une droite du même type, permettant donc de conserver Δ_c indépendant de t ; on en déduit la majoration suivante de $2|S_1|$:

$$a^2 t^{3/2} \left| \int_{\Delta_c} \frac{\exp u}{u^{3/2}(u^2 + a^2 t^2)} du \right| \leq a^2 t^{3/2} \exp(c) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(c^2 + y^2)^{3/4}(c^2 + y^2 - (at)^2)} dy$$

La limite de cette dernière intégrale est finie et nous avons même le résultat $S_1 = O(t^{3/2})$. Cette formule peut s'étendre au cas de l'ordre N quelconque pour fournir un développement limité d'ordre arbitraire.

On résume par :

Proposition 2.5 *L'image inverse de Laplace de $F(s) = \frac{s^{1/2}}{s^2 + a^2}$ admet aux voisinages de 0 et de $+\infty$ les équivalents respectifs :*

$$\begin{aligned} f(t) & \underset{t \rightarrow 0}{\sim} 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} \\ f(t) & \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(at + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}a^2 t^{3/2}} \end{aligned}$$

Exemple 2.31 *Comportements de f lorsque $F(s) = \frac{1}{s([s^{3/2}] + 1)}$*

La fonction F possède le point de branchement $s = 0$ pour lequel la coupure sera identifiée à l'axe des réels négatifs. L'expression du dénominateur s'annule pour $s = \exp(i\theta)$ où $3\theta/2 = \pi(1 + 2k)$, ce qui donne deux solutions $\theta = \pm 2\pi/3$. Par conséquent, F est holomorphe dans Π_0 privé des deux pôles $\exp[\pm i2\pi/3]$ et on peut vérifier les hypothèses du théorème d'inversion.

Etude au voisinage de $t = 0$

On se sert de la formule d'inversion, avec une droite d'abscisse $c > 1$:

$$2i\pi f(t) = \int_{\Delta_c} \frac{e^{st}}{s(s^{3/2} + 1)} ds$$

Le développement suivant les puissances de $1/s$ nous donne :

$$2i\pi f(t) = \int_{\Delta_c} \frac{e^{st}}{s^{5/2}} \left[\sum_0^{+\infty} (-1)^n s^{-\frac{3n}{2}} \right] ds$$

A l'aide encore des images inverses des fonctions puissances de s , on obtient le développement asymptotique au voisinage de $t = 0$:

$$f(t) \sim \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{3n+3/2}}{\Gamma(\frac{3n+5}{2})}$$

En particulier, f admet, au voisinage de 0, l'équivalent : $\frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2}$.

Etude au voisinage de $+\infty$

La somme des résidus nous donne :

$$\frac{4}{3} \Re \left(\exp \left(t \exp \left(2i \frac{\pi}{3} \right) \right) \exp \left(-2i \frac{\pi}{3} \right) \exp \left(-i \frac{\pi}{3} \right) \right) = -\frac{4}{3} \exp \left(-\frac{t}{2} \right) \cos \left(\frac{\sqrt{3}t}{2} \right)$$

L'emploi du contour habituel $\Gamma_{R,r,\alpha}$ et du théorème des résidus amène alors à l'égalité :

$$f(t) = -\frac{4}{3} \exp(-t/2) \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) + \frac{1}{2i\pi} \int_{L_+} e^{st} F(s) ds$$

Aucune des intégrales associées à ce lacet ne donnent des limites finies. Leurs parties infinies se compensent, ce que l'on voit par la décomposition : $F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s^{1/2}}{1 + s^{3/2}}$.

La première fonction ayant \mathcal{U} pour image inverse, on est ramené à l'étude de l'intégrale sur L de la fonction définie par $F_1(s) = \frac{s^{1/2}}{1 + s^{3/2}}$. Cette fois, les intégrales de $\exp(st)F_1(s)$ sur les demi-droites et sur le petit cercle du lacet L sont convergentes. On montre, par une majoration immédiate, que l'intégrale sur le cercle tend vers 0. Sur les deux demi-droites, on obtient :

$$-\int_{+\infty}^0 \exp(-xt) \frac{-i}{1 - ix^{3/2}} dx + \int_0^{+\infty} \exp(-xt) \frac{i}{1 + ix^{3/2}} dx$$

En divisant par $2i\pi$, on a :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \left[1 - \frac{4}{3} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \exp(-xt) \frac{\sqrt{x}}{1 + x^3} dx \right]$$

On développe la dernière intégrale lorsque t est grand :

$$\int_0^{+\infty} \exp(-xt) \left[\sum_0^N (-1)^n x^{3n+1/2} \right] dx + \int_0^{+\infty} \exp(-xt) \frac{x^{3N+7/2}}{1 + x^3} dx$$

Cette écriture fournit un développement asymptotique :

$$f_1(t) = \frac{\Gamma(3/2)}{t^{3/2}} - \frac{\Gamma(9/2)}{t^{9/2}} + \dots + \frac{\Gamma(3N + 3/2)}{t^{3N+3/2}} + R_N(t)$$

On montre, en effet, que $\lim_{t \rightarrow 0} t^{3N+3} R_N = 0$.

Proposition 2.6 *L'image inverse de F où $F(s) = \frac{1}{s([s^{3/2}] + 1)}$ admet, au voisinage de $t = 0$, l'équivalent $\frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{3/2}$ et s'écrit, lorsque $t \rightarrow +\infty$:*

$$f(t) \sim 1 - \frac{4}{3} \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}t}{2}\right) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} t^{-3/2}$$

2.2.3 Calculs de convolution de fonctions

Sur le premier exemple, on propose une technique de calcul direct. C'est l'occasion de montrer les difficultés pratiques auxquelles on peut se heurter. L'emploi de la transformation de Laplace va se révéler en général beaucoup plus simple (Cf. Exercice 3.14), à la condition cependant d'avoir un tableau d'images de Laplace très complet, sinon la difficulté pourrait réapparaître en appliquant la formule d'inversion de \mathcal{L} .

Exemple 2.32 Détermination directe de la convolée $f \star g$ avec $f(t) = \mathcal{U}(t)J_0(t)$ et $g(t) = \mathcal{U}(t) \sin t$.

Les fonctions étant causales, cette convolée s'exprime par :

$$(f \star g)(t) = \mathcal{U}(t) \int_0^t J_0(u) \sin(t - u) du$$

On utilisera (Cf. Annexe 2) pour la fonction de Bessel la définition :

$$J_n(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^n \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(n + 1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos(t \cos \theta) (\sin^{2n} \theta) d\theta$$

En appliquant la formule de Fubini dans l'intégration répétée qui exprime la convolution, on a :

$$\pi(f \star g)(t) = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^t \cos(u \cos \theta) \sin(t - u) du \right] d\theta$$

En utilisant une formule de trigonométrie et en intégrant en la variable u deux fonctions sinus, on obtient ensuite, par deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \pi(f \star g)(t) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t \cos \theta) - \cos t}{\sin^2 \theta} d\theta \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [-[\cos(t \cos \theta) - \cos t](\cotan \theta)]_{\epsilon}^{\pi/2} + t \int_{\epsilon}^{\pi/2} \sin(t \cos \theta) \cos \theta d\theta \\ &= t[[\sin(t \cos \theta) \sin \theta]_0^{\pi/2} + t \int_0^{\pi/2} \cos(t \cos \theta) \sin^2 \theta d\theta] \\ &= t^2 \int_0^{\pi/2} \cos(t \cos \theta) \sin^2(\theta) d\theta \end{aligned}$$

En tenant compte de $\Gamma(3/2) = (1/2)\Gamma(1/2)$ et de la formule définissant J_1 , on a finalement :

$$\boxed{\mathcal{U}(t)J_0(t) \star \mathcal{U}(t) \sin t = \mathcal{U}(t)tJ_1(t) \quad (2.26)}$$

Exemple 2.33 Convolution de $\frac{J_\lambda(t)}{t}$ par J_μ lorsque $\Re(\lambda) > 0$, $\Re(\mu) > -1$ et $\lambda + \mu \neq 0$.

D'après l'exemple 2.19, en posant $R = \sqrt{1+x^2} + x$, ces deux fonctions ont pour images respectives : $\frac{1}{\lambda}R^{-\lambda}$ et $\frac{R^{-\mu}}{\sqrt{1+x^2}}$. Leur produit nous donne $\frac{1}{\lambda} \frac{R^{-\mu-\lambda}}{\sqrt{1+x^2}}$. Donc, en utilisant encore cet exemple 2.19, on obtient, à la condition $\lambda + \mu \neq 0$, le résultat :

$$\boxed{\mathcal{U}(t) \frac{J_\lambda(t)}{t} \star \mathcal{U}(t) J_\mu = \mathcal{U}(t) \frac{1}{\lambda} J_{\lambda+\mu}(t) \quad (2.27)}$$

Exemple 2.34 Convolution de $t^\lambda J_\lambda(t)$ par $t^\mu J_\mu(t)$.

On suppose $\Re(\lambda) > -1/2$, $\Re(\mu) > -1/2$ et $\lambda + \mu \neq -1/2$. D'après l'exemple 2.17, les images de ces fonctions sont données par : $\frac{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{[(1+x^2)^{\lambda+1/2}]}$ et la même formule avec μ . On voit que le produit fera intervenir l'image de la fonction $t^{\lambda+\mu+1/2} J_{\lambda+\mu+1/2}$.

Donc, en utilisant la fonction eulérienne B de deux variables (Cf. Annexe 1), on obtient, sous les conditions données ci-dessus :

$$\boxed{\mathcal{U}(t) t^\lambda J_\lambda(t) \star [\mathcal{U}(t) t^\mu J_\mu(t)] = \frac{B(\lambda + 1/2, \mu + 1/2)}{\sqrt{2\pi}} t^{\lambda+\mu+1/2} J_{\lambda+\mu+1/2} \quad (2.28)}$$

2.3 Applications à la résolution d'équations fonctionnelles

2.3.1 Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Certains problèmes de physique se ramènent à la recherche d'une fonction g définissant un phénomène débutant à un certain instant -qu'il est alors logique de choisir pour origine des temps- et qui est solution, à partir de cet instant, d'une équation différentielle du type :

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = f(t),$$

où la fonction f est une fonction causale imposée par le problème considéré. La fonction g cherchée est donc causale, à dérivées causales. D'ailleurs, dans beaucoup de cas, les valeurs de cette fonction g et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ pour la valeur $t = 0$, ou encore les limites à droite en ce point de ces fonctions, font partie des données (conditions initiales d'un problème de Cauchy). Les théorèmes d'existence et d'unicité pour ce problème de Cauchy montrent alors que la solution cherchée est unique. S'il en est ainsi et si la fonction f appartient à \mathcal{L}_d , la transformée, par \mathcal{L} , de l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$[s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0]Y(s) = F(s) + P_0(s),$$

où P_0 est un polynôme tenant compte des conditions initiales. Finalement, si on peut justifier que la fonction inconnue g admet une transformée de Laplace G , celle-ci est solution de cette équation algébrique. C'est le cas lorsque la fonction f est du type exponentielle-polynôme puisqu'alors, d'après les résultats sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants, la solution est de ce même type. Comme la fonction Y s'obtient en divisant le second membre par un polynôme, on en déduit facilement que le théorème d'inversion peut s'appliquer et fournir ainsi la solution unique du problème. Cependant, il est souvent plus simple d'utiliser le dictionnaire des images de Laplace, en mettant en oeuvre les propriétés de \mathcal{L} . Contrairement aux résolutions de problèmes du chapitre 6, les exemples qui suivent ne comporte aucun environnement fourni par les Sciences physiques ou par la Technologie ; en particulier, on ne se pose aucune question sur le rôle joué dans ces exemples par les conditions initiales.

On commence par un exemple où la fonction "second membre" est continue sur $[0, +\infty[$. Les deux autres exemples font intervenir des fonctions f possédant des points de discontinuités.

Exemple 2.35 *On se propose de rechercher la fonction g solution de l'équation différentielle : $y'' - 2y' + 5y = \mathcal{U}(t)e^t \cos(2t)$, obéissant en outre aux conditions initiales : $g(0_+) = 0, g'(0_+) = 1$.*

En transformant ce problème par \mathcal{L} , on établit que la transformée G de g est solution de l'équation algébrique :

$$G(s)[s^2 - 2s + 5] = 1 + \frac{s - 1}{(s - 1)^2 + 4}$$

La fraction rationnelle $G(s)$ est donc la somme de la fraction $\frac{1}{(s - 1)^2 + 4}$ dont l'image inverse est $\frac{1}{2}\mathcal{U}(t) \sin(2t) \exp t$ et de la fraction $\frac{s - 1}{[(s - 1)^2 + 4]^2}$, dérivée de la fraction précédente au coefficient $-1/2$ près, donc d'image inverse $\frac{te^t}{4}\mathcal{U}(t) \sin(2t)$.

On sait, d'après les théorèmes généraux sur les équations différentielles, que l'équation donnée admet une solution unique vérifiant les conditions initiales données. On sait aussi par les méthodes élémentaires de résolution, qu'avec un second membre de type "polynôme-exponentiel", cette solution admet une abscisse de convergence finie. Il en résulte, en utilisant des images inverses connues, que la fonction g , solution unique du problème est définie par :

$$g(t) = \frac{1}{4}\mathcal{U}(t)(t + 2) \sin(2t) \exp t$$

On pourra reprendre ce problème par les méthodes élémentaires habituelles et vérifier, par conséquent, le résultat précédent. Des exemples du même type sont proposés dans l'exercice 3.27.

Exemple 2.36 *On se propose de rechercher la fonction g solution de l'équation différentielle :*

$$y'' - y = f(t) \quad \text{avec} \quad f(t) = e^t \quad \text{sur} \quad [0, 1], \quad \text{et} \quad f(t) = e^{-t} \quad \text{sur} \quad]2, +\infty[,$$

obéissant en outre aux conditions initiales : $g(0+) = 1, g'(0+) = -1$.

Ici, le second membre étant discontinu, on fait une extension de la notion de solution d'une équation différentielle. La fonction g cherchée est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et, seulement, de classe C^2 par morceaux sur $[0, +\infty[$. En outre, l'équation est vérifiée par g et ses dérivées sur l'intervalle $[0, +\infty[$ privé des points de discontinuité de g'' .

La résolution élémentaire de ce problème est possible ; elle exige la mise en oeuvre des techniques habituelles sur, successivement, les intervalles $[0, 1[, [1, 2[, [2, +\infty[$. Le second membre étant $\exp t$, la solution sur $[0, 1[$ existe et est unique. Les valeurs de cette solution et de sa dérivée fournissent de nouvelles conditions de Cauchy pour la résolution sur $[1, 2[$, d'où une solution unique sur cet intervalle. De proche en proche, on obtient alors une solution unique sur \mathbb{R}_+ qui est de type exponentielle-polynôme par morceaux et, par conséquent, transformable par Laplace (Cf. exercice 3.28 pour le détail de ces calculs).

Dans ce qui suit, nous utilisons la méthode de Laplace. Ecrivons la fonction du second membre sous la forme :

$$f(t) = [\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1)] \exp t + \mathcal{U}(t - 2) \exp(-t) = \mathcal{U}(t) \exp t - e[\mathcal{U}(t - 1)] \exp(t - 1) + e^{-2}[\mathcal{U}(t - 2)] \exp[-(t - 2)]$$

On en déduit immédiatement son image de Laplace, à savoir :

$$F(s) = \frac{1}{s - 1} - e \frac{e^{-s}}{s - 1} + e^{-2} \frac{e^{-2s}}{s + 1}$$

La transformée du premier membre de l'équation : $G(s)[s^2 - 1] - s + 1$ nous fournit la fonction G :

$$G(s) = \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{(s + 1)(s - 1)^2} - e \frac{e^{-s}}{(s + 1)(s - 1)^2} + e^{-2} \frac{e^{-2s}}{(s - 1)(s + 1)^2}$$

Après décomposition des fractions $\frac{1}{(s + 1)(s - 1)^2}$ et $\frac{1}{(s + 1)(s - 1)^2}$, on obtient, par utilisation d'images inverses connues, le résultat :

$$g(t) = \mathcal{U}(t) \left[\frac{5e^{-t}}{4} - \frac{e^t}{4} + \frac{te^t}{2} \right] - e\mathcal{U}(t - 1) \left[\frac{e^{-t+1}}{4} - \frac{e^{t-1}}{4} + \frac{(t - 1)e^{t-1}}{2} \right] + e^{-2}\mathcal{U}(t - 2) \left[\frac{e^{t-2}}{4} - \frac{e^{-t+2}}{4} - \frac{(t - 2)e^{-t+2}}{2} \right]$$

Exemple 2.37 La fonction f étant définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(t) = e^t \text{ sur } [2n, 2n + 1] \quad \text{et} \quad f(t) = 0 \text{ sur }]2n + 1, 2n + 2[$$

on se propose de rechercher la fonction g solution de l'équation différentielle : $y^{(4)} - y = f(t)$, obéissant en outre aux conditions :

$$g(0+) = g'(0+) = g''(0+) = g'''(0+) = 0$$

La fonction f est majorée par $\exp t$; elle est donc transformable par \mathcal{L} . La méthode élémentaire appliquée sur l'intervalle $[n, n + 1[$ fournirait une solution de type exponentielle-polynôme, laquelle serait majorée par une expression de la forme $P(n) \exp n$. On en déduit que la solution, d'ailleurs unique, est majorée, par exemple, par $C \exp(2t)$. Par conséquent, cette solution est transformable par \mathcal{L} .

L'image F de f est la somme de la série de terme général : $\int_{2n}^{2n+1} \exp[(1-s)t] dt$. On en déduit, pour $\Re(s) > 1$, cette transformée :

$$F(s) = \frac{\exp(1-s) - 1}{1-s} \frac{1}{1 - \exp[2(1-s)]} = \frac{1}{(s-1)(1 + \exp(1-s))}$$

Etant données les conditions initiales toutes nulles, la solution admet pour image de Laplace :

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)^2(s+1)(s^2+1)(1 + \exp(1-s))}$$

L'utilisation de la formule d'inversion montre que l'écriture de la fonction g nécessite le calcul d'une suite de résidus aux points singuliers s solutions de $\exp(1-s) = -1$, c'est-à-dire aux points $s_k = 1 + i\pi(2k+1)$, placés d'ailleurs sur la frontière du demi-plan $\Pi_{\zeta_a(g)}$. Cette utilisation est l'objet de l'exercice 3.29.

Nous allons plutôt, ici, développer la fraction $\frac{1}{1 + \exp(1-s)}$ en une série géométrique de raison $-\exp(1-s)$. Il est alors facile de justifier que g est la somme de la série des images inverses des fonctions $\frac{(-1)^n \exp[n(1-s)]}{(s-1)^2(s+1)(s^2+1)}$. En vertu de la décomposition :

$$\frac{1}{(s-1)^2(s+1)(s^2+1)} = \frac{1}{8(1+s)} + \frac{1}{4(1-s)^2} - \frac{3}{8(s-1)} + \frac{s+1}{4(1+s)^2},$$

cette fonction g peut s'écrire sous forme d'une série de fonctions translatées d'indices de translation n :

$$g(t) = \sum_0^{+\infty} \exp(n) \left[\mathcal{U}(t) \left[\frac{\exp(-t)}{8} + \frac{t \exp(-t)}{4} + \frac{3 \exp t}{8} + \frac{\cos t + \sin t}{4} \right] \right]_n$$

Dans l'exercice 3.30, on propose d'autres exemples de résolution de problèmes de type précédent lorsque le second membre f est une fonction discontinue. Dans les exercices 3.31 et 3.32, on se consacre, les techniques restant semblables, à des systèmes d'équations différentielles.

2.3.2 Equations différentielles linéaires à coefficients variables

On ne connaît pas, en général, la transformée de Laplace du produit d'une dérivée de la fonction inconnue par une fonction quelconque. Cependant, on sait que le produit par une puissance, à savoir $t^k y^{(n)}$ admet pour image de Laplace la fonction $Y^{(k)}$ au signe près. Aussi, les seuls cas simples où la transformation de Laplace peut paraître efficace concernent les équations linéaires où les coefficients

des dérivées sont polynomiaux. L'équation différentielle (E_1) est alors transformée en une équation également différentielle (E_2) dont l'ordre est égal au degré maximum des polynômes constituant les coefficients. Il en résulte qu'une simplification n'est assurée, a priori, que si ce degré maximum est inférieur à l'ordre de l'équation différentielle donnée au départ.

Ainsi, dans le cas d'une équation différentielle de départ qui est du second ordre, on envisagera des coefficients polynomiaux du premier degré. Il n'est, cependant, pas exclu qu'avec des coefficients qui soient du second degré, l'équation transformée, qui est alors du second ordre, soit résoluble numériquement par une méthode élémentaire. Dans ce qui suit, nous traitons des exemples où les coefficients sont du premier degré. On trouvera d'autres exemples dans les exercices 3.33 et 3.34. Une autre difficulté va surgir si le coefficient de y'' est la variable t elle-même. Dans ce cas, en effet, si on transforme l'équation du second ordre (E_1) en un système du premier ordre $z' = H(z, t)$ où $z = (y, y')$, on voit que la fonction H n'étant pas continue aux points où $t = 0$, le théorème de Cauchy sur l'existence et l'unicité d'une solution obéissant à des conditions initiales $z_0 = (y_0, y'_0)$ données au point $t = 0$ n'est plus nécessairement applicable. Certains des exemples qui suivent feront ainsi intervenir une discussion sur ces conditions initiales.

Par ailleurs, la résolution de (E_2) fera intervenir des constantes arbitraires. Ce sont les théorèmes de comportement à l'infini des images de Laplace qui permettent éventuellement de choisir ces constantes pour repérer dans ces solutions de (E_2) celles qui sont des images de Laplace.

Enfin, on ne peut plus affirmer, a priori, qu'il existe des solutions de (E_1) transformables par \mathcal{L} . Le lecteur peut se rendre compte de façon simple de cette impossibilité éventuelle en considérant l'équation : $y'' - 2ty' - 2y = 0$ avec $y(0+) = 0$, laquelle a pour solution $\exp(t^2)$; l'équation (E_2) associée n'admet alors aucune solution qui soit une image de Laplace.

La transformation \mathcal{L} est donc utilisée dans ce qui suit de manière formelle, quitte à vérifier, en fin de calcul, la validité de la fonction obtenue comme solution de l'équation proposée.

Exemple 2.38 *On se propose de rechercher la fonction g solution de l'équation différentielle E_1 :*

$$(t + 1)y'' - 5y' + (t + 1)y = \mathcal{U}(t)tJ_1(t),$$

obéissant en outre aux conditions initiales suivantes : $g(0+) = g'(0+) = 0$.

Dans cet exemple, le coefficient de la dérivée seconde est non nul, non seulement au point $t = 0$, mais sur la totalité de \mathbb{R}_+ ; il en résulte, d'après les théorèmes généraux sur les équations différentielles linéaires, que le problème admet une solution, laquelle est unique. On fait l'hypothèse, a priori, que cette solution est dans \mathcal{L}_d .

On sait (Cf. exemple 2.18) que :

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}t^\lambda J_\lambda)(s) = \frac{\Gamma(2\lambda + 1)}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)} \frac{1}{[(1 + s^2)^{\lambda + 1/2}]}$$

La transformation par \mathcal{L} de l'équation E_1 fournit donc l'équation E_2 :

$$(s^2 + 1)Y' - (s^2 + 1 - 7s)Y = -(1 + s^2)^{-3/2}$$

L'équation sans second membre peut s'écrire :

$$\frac{Y'}{Y} = 1 - \frac{7s}{(s^2 + 1)}$$

La solution générale de cette équation est donc : $Y_0(s) = C \exp(s)(s^2 + 1)^{-7/2}$. La méthode de variation de la constante C fournit ensuite : $C' = -\exp(-s)(s^2 + 1)$.

Une intégration par parties donne finalement $C = \exp(-s)(s^2 + 2s + 3) + \lambda$. La solution générale de l'équation E_2 s'écrit donc :

$$Y(s) = (s^2 + 2s + 3)(s^2 + 1)^{-7/2} + \lambda \exp(s)(s^2 + 1)^{-7/2}$$

Une telle fonction ne peut représenter une transformée de Laplace que si sa limite est nulle en $+\infty$ (Cf. Proposition de valeur finale 1.15). Par conséquent, si la solution de E_1 est transformable par \mathcal{L} , son image est :

$$G(s) = (s^2 + 2s + 3)(s^2 + 1)^{-7/2}$$

On peut l'écrire aussi :

$$G(s) = \left[(s^2 + 1)^{-5/2} + 2s(s^2 + 1)^{-7/2} + 2(s^2 + 1)^{-7/2} \right]$$

En tenant compte du résultat de l'exemple 2.18, on obtient les images inverses du premier et du troisième termes qui sont donc, à des coefficients près, $t^2 J_2(t)$ et $t^3 J_3(t)$. Le deuxième est, à un coefficient près, la dérivée du premier terme ; son image inverse est proportionnelle à $t^3 J_2(t)$. Il en résulte que la solution de l'équation proposée s'écrit :

$$g(t) = \mathcal{U}(t) \left[\frac{1}{3} t^2 J_2(t) + \frac{2}{15} t^3 J_2(t) + \frac{2}{15} t^3 J_3'(t) \right]$$

On peut finalement vérifier que ce second membre vérifie l'équation et les conditions initiales.

Remarque 2.10 Cette équation pouvait aussi être résolue en recherchant une solution sous forme d'un développement en série entière. On voit d'ailleurs sur le résultat précédent, qu'en fait, la solution peut être prolongée en une fonction analytique sur toute la droite réelle.

Dans l'exemple qui suit, le coefficient de y'' est la variable t elle-même. Pour les raisons explicitées ci-dessus, l'existence d'une solution n'est plus automatiquement assurée. On prévoit de discuter suivant les valeurs données aux conditions initiales.

Exemple 2.39 On se propose de rechercher la fonction g solution de l'équation différentielle E_1 :

$$ty'' - (3t - 2)y' + (2t - 4)y = \mathcal{U}(t)t \exp t,$$

obéissant en outre aux conditions initiales suivantes : $g(0+) = a, g'(0+) = b$.

La transformée E_2 par \mathcal{L} de l'équation E_1 est l'équation différentielle du premier ordre :

$$-(2sY + s^2Y' - a) + 3(Y + sY') + 2sY - 2a - 2Y' - 4Y = (s - 1)^{-2}$$

ou encore :

$$(s - 1)(s - 2)Y' + Y = -(s - 1)^{-2} - a$$

A ce niveau de calcul, on remarque que cette équation E_2 ne dépend pas de b . L'équation sans second membre correspondante à E_2 admet pour solution générale $Y_0(t) = C \frac{s-1}{s-2}$ et la méthode de variation de la constante C nous fournit $C' = -(s - 1)^{-4} - a(s - 1)^{-2}$. On en déduit la solution générale de l'équation E_2 :

$$Y(s) = \frac{1}{3(s - 2)(s - 1)^2} + a \frac{1}{s - 2} + \lambda \frac{s - 1}{s - 2}$$

Nécessairement, pour que ce soit une transformée de Laplace, cette fonction doit tendre vers 0 lorsque $s \rightarrow +\infty$, ce qui impose $\lambda = 0$. On vérifie alors que la limite de $sY(s)$ est bien $a = y(0+)$, conformément au corollaire 1.4. Finalement, les calculs nous donnent pour solution éventuelle de E_1 :

$$g(t) = \mathcal{U}(t) \left[\left(\frac{1}{3} + a \right) \exp(2t) - \frac{1}{3}(1 + t) \exp t \right]$$

On peut vérifier que c'est effectivement une solution et qu'elle obéit à la condition $g(0+) = a$, mais la dérivée vérifie $g'(0+) = 2a$. Il en résulte que si b est différent de $2a$, le problème n'admet aucune solution transformable par Laplace.

Exemple 2.40 On se propose de rechercher, s'il en existe, les fonctions g solutions de l'équation différentielle E_1 :

$$4ty'' + 2y' + y = \mathcal{U}(t)t^{1/2} [1 + t],$$

obéissant en outre aux conditions initiales suivantes : $g(0+) = 0, g'(0+) = a$.

L'équation transformée E_2 s'écrit :

$$-4s^2Y' + (1 - 6s)Y = \frac{\sqrt{\pi}}{4} [2s^{-3/2} + 3s^{-5/2}]$$

Les solutions de l'équation homogène associée vérifient : $Y_0(s) = Cs^{-3/2} \exp(\frac{-1}{4s})$.

La méthode de variation de la constante conduit à $C' = -\frac{\sqrt{\pi}}{16} \exp(\frac{1}{4s}) \left[\frac{2}{s^2} + \frac{3}{s^3} \right]$.

Une intégration par parties conduit à : $C = -\frac{\sqrt{\pi}}{16} \left[40 - \frac{12}{s} \right] \exp\left(\frac{1}{4s}\right) + \mu$. Par conséquent la solution générale de E_2 s'écrit :

$$Y(s) = \mu s^{-3/2} \exp(-1/4s) - \frac{\sqrt{\pi}}{16} \left[40 - \frac{12}{s} \right] s^{-3/2}$$

La fonction $sY(s)$ tend vers 0 lorsque $s \rightarrow +\infty$ quel que soit la constante μ . Mais, en appliquant le corollaire 1.4 à la fonction dérivée g' dont la transformée est $sY(s)$, on sait que $\lim_{s \rightarrow +\infty} s^2 Y(s) = g'(0+) = a$.

En développant $\exp(-1/4s)$ au voisinage de $+\infty$, on en déduit que si $s^2 Y(s)$ a une limite finie, nécessairement : $\mu - 40 \frac{\sqrt{\pi}}{16} = a$, mais cette limite étant alors nulle, il en résulte que g n'existe que si $a = 0$ et alors $\mu = 40 \frac{\sqrt{\pi}}{16}$.

Comme on sait (Cf. Exemple 2.12) que l'image inverse de $\sqrt{\frac{\pi}{s}} \exp(-\frac{1}{4s})$ est la fonction $h(t) = \mathcal{U}(t) \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$, on en déduit l'image inverse de $\sqrt{\frac{\pi}{s^3}} \exp(-\frac{1}{4s})$ par une intégration. On trouve $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin \sqrt{t}$. Les autres fonctions intervenant dans le résultat sont du type puissance, donc connues. On a, alors, sous la réserve $a = 0$:

$$g(t) = \mathcal{U}(t) \left[\frac{5}{2} \sin(\sqrt{t}) - 5\sqrt{t} + t\sqrt{t} \right]$$

2.3.3 Equations intégrales linéaires

Les équations intégrales peuvent s'écrire de façon générale :

$$y(t) = f(t) + \int_a^b k(u, t) y(u) du$$

L'inconnue est la fonction y , les bornes a et b peuvent être éventuellement infinies, elles peuvent dépendre de la variable t ; enfin le noyau k qui est une fonction de deux variables se présente souvent sous la forme $k(u, t) = g(t-u)$. Dans ce dernier cas, si les bornes sont infinies, on reconnaît dans l'intégrale l'expression d'une convolution. En outre, si les fonctions considérées sont causales, cette intégrale est prise sur $[0, t]$ et cette convolée est alors causale. Dans ce cas, la transformation de Laplace est parfaitement adaptée à la résolution de ces équations intégrales. On distingue dans cette classe d'équations, que l'on dira «convolutives», deux sous-catégories : les équations de première espèce du type :

$$\int_0^t g(u-t) y(u) du = f(t),$$

les équations de deuxième espèce qui sont du type :

$$y(t) = f(t) + \int_0^t g(u-t) y(u) du$$

Cas des équations de première espèce

Si la transformation de Laplace peut s'appliquer, elle donne : $Y(s) = \frac{F(s)}{G(s)}$. En général, il existe un demi-plan où cette fonction est holomorphe, mais les hypothèses du théorème d'inversion ne sont pas généralement vérifiées, en particulier, cette fonction peut ne pas tendre vers 0 en $+\infty$. Il en résulte qu'une telle équation n'admet pas en général de solutions fonctions. Il en est autrement si on cherche des solutions au sens des distributions (Cf. chapitre 5).

Un cas particulier vaut d'être signalé. Supposons que les deux fonctions f et g soient dérivables et que $g(0) \neq 0$, la dérivation de l'équation nous fournit alors :

$$g(0)y(t) + \int_0^t g'(t-u)y(u)du = f'(t)$$

C'est une équation de deuxième espèce. D'ailleurs, si $g(0) = 0$ et $g'(0) \neq 0$ et si les deux fonctions soient de classe C^2 , la dérivation d'ordre 2 fournira une équation de deuxième espèce.

Dans d'autres cas, la recherche de la primitive de y permet d'utiliser la formule d'inversion ; c'est le cas de l'équation d'Abel étudiée dans le deuxième exemple qui suit.

Ajoutons que ces équations rentrant dans la classe plus générale des équations de convolution, des techniques de calcul symbolique peuvent être appliquées parallèlement à la méthode de Laplace à ces équations. Ce point sera abordé dans la section § 5.6.

Cas des équations de première espèce

Exemple 2.41 *On se propose de rechercher la fonction g , solution causale de l'équation intégrale E_1 suivante :*

$$y(t) + \mathcal{U}(t) \int_0^t y(t-u)J_0(u)du = \mathcal{U}(t)tJ_1(t)$$

On suppose ici que cette équation admet une solution unique g transformable par \mathcal{L} . L'intégrale qui figure dans l'équation exprime la convolée de la fonction causale y par la fonction causale $\mathcal{U}(t)J_0(t)$ et par conséquent l'image de Laplace de cette intégrale est le produit des transformées des deux fonctions. En utilisant les résultats des exemples 2.9 et 2.18, l'équation E_2 transformée par \mathcal{L} de E_1 s'écrit :

$$Y(s) \left[1 + \left[(1 + s^2)^{-1/2} \right] \right] = (1 + s^2)^{-3/2}$$

La fonction G image de la fonction g cherchée est donc définie par :

$$G(s) = s^{-2}(1 + s^2)^{-1/2} - s^{-2}(1 + s^2)^{-1}$$

L'image inverse de la dernière fonction donne immédiatement $\mathcal{U}(t) \left[t \exp t - \sin t \right]$. Celle de la première fonction peut s'obtenir par deux primitivations successives

en utilisant le développement en série entière de J_0 . On trouve ainsi :

$$g(t) = -\mathcal{U}(t) \left[t \exp t - \sin t \right] + \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+2}}{2^{2n} n(n+1)(n!)^2}$$

Exemple 2.42 Résolution de l'équation d'Abel : $\int_0^t (t-u)^{-\alpha} y(u) du = f(t)$ dans le cas particulier $0 < \alpha < 1$.

Cette équation est de première espèce, mais faute de dérivabilité de g , on ne peut appliquer la méthode décrite ci-dessus. Cependant, considérons la primitive de y , à savoir $y \star \mathcal{U}$, dont l'image de Laplace est $Z(s) = \frac{Y(s)}{s}$. Comme l'image de $\mathcal{U}(t)t^{-\alpha}$ est égale à $\frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}$, on obtient : $Z(s) = \frac{F(s)}{\Gamma(1-\alpha)s^\alpha}$. Cette fonction tend vers 0 en $+\infty$, ce qui n'est pas suffisant pour inverser, mais c'est surtout le produit de deux transformées de Laplace de fonctions.

On en déduit la solution sous la forme d'une convolée :

$$y^{(-1)}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \mathcal{U}(t)t^{\alpha-1} \star f = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi} \mathcal{U}(t)t^{\alpha-1} \star f$$

Il resterait dans le cas où cela est possible, à dériver ce résultat. Par exemple, puisqu'il suffit que l'un des facteurs soit dérivable, c'est possible si la fonction f est dérivable. Lorsque f n'est pas dérivable, on peut dériver le premier facteur, mais au sens des distributions, ce qui fournira une distribution partie finie (Cf. §4.8).

2.3.4 Equations intégro-différentielles linéaires

Outre les termes qui interviennent dans une équation intégrale, ces équations contiennent des dérivées de la fonction inconnue. Pour obtenir éventuellement une solution unique, on imposera des conditions initiales. Comme dans ce qui précède, on applique d'abord \mathcal{L} de manière formelle. Ajoutons que, là aussi, des techniques de calcul symbolique peuvent être utilisées (Cf. §5.6).

Exemple 2.43 On se propose de rechercher la fonction g solution de l'équation intégral-différentielle E_1 suivante :

$$y'' + 3y + 4 \int_0^t y(u)sh(t-u)du = \mathcal{U}(t)t^2 J_2(t)$$

obéissant en outre aux conditions initiales suivantes : $g(0+) = a, g'(0+) = 0$.

En l'absence de résultats généraux sur de telles équations, on admet que l'équation E_1 admet une solution transformable par Laplace. Comme précédemment, l'intégrale figurant dans E_1 est l'expression d'une convolution. En transformant par \mathcal{L} , on obtient l'équation E_2 :

$$Y(s) \left[s^2 + 3 + \frac{4}{s^2 - 1} \right] - as = 3(1 + s^2)^{-5/2}$$

On en déduit que, sous l'hypothèse faite, la fonction G , image de la solution, est donnée par la formule :

$$G(s) = 3 \frac{s^2 - 1}{s^2 + 1} + \frac{as(s^2 - 1)}{(s^2 + 1)^2}$$

En utilisant encore les résultats de l'exemple 2.18, on obtient effectivement une fonction g définie par :

$$g(t) = \mathcal{U}(t) \left[\frac{1}{15} t^3 J_3(t) - \frac{2}{21} t^4 J_4(t) + a[\cos t - t \sin t] \right]$$

Exemple 2.44 On se propose de rechercher le couple (x, y) de fonctions causales solution du système intégral-différentiel suivant :

$$(E_1) \quad \begin{cases} x' + 2 \int_0^t y(u) \cos(t - u) du = \mathcal{U}(t) \\ 6 \int_0^t x(u) \operatorname{ch}(t - u) du + 4y' = \mathcal{U}(t) \end{cases}$$

obéissant aux conditions initiales suivantes : $x(0+) = 0, y(0+) = -1$.

En supposant que la solution (x, y) existe et soit transformable par Laplace, le couple (X, Y) des transformées vérifient le système linéaire suivant :

$$(E_2) \quad \begin{cases} sX(s) + 2 \frac{sY(s)}{s^2 + 1} = \frac{1}{s} \\ 6 \frac{sX(s)}{s^2 - 1} + 4sY(s) = \frac{1}{s} - 4 \end{cases}$$

La résolution de ce système est immédiate, on obtient :

$$\begin{cases} X(s) = \frac{s^4 - 1}{s^2(s^4 - 4)} - \frac{(1 - 4s)(s^2 - 1)}{2s^2(s^4 - 4)} \\ Y(s) = \frac{(1 - 4s)(s^4 - 1)}{4s^2(s^4 - 4)} - \frac{3(s^2 + 1)}{2s^2(s^4 - 4)} \end{cases}$$

Des décompositions de fractions rationnelles et l'utilisation des images inverses usuelles fournissent ensuite, pour $t \geq 0$:

$$x(t) = \mathcal{U}(t) \left[\frac{5\operatorname{sh}(t\sqrt{2})}{16\sqrt{2}} - \frac{\operatorname{ch}(t\sqrt{2})}{4} - \frac{3 \cos(t\sqrt{2})}{8} - \frac{3 \sin(t\sqrt{2})}{32\sqrt{2}} + \frac{t}{8} + \frac{5}{8} \right]$$

$$y(t) = \mathcal{U}(t) \left[-\frac{15\operatorname{sh}(t\sqrt{2})}{32\sqrt{2}} - \frac{3\operatorname{ch}(t\sqrt{2})}{8} - \frac{3 \cos(t\sqrt{2})}{8} + \frac{9 \sin(t\sqrt{2})}{32\sqrt{2}} + \frac{7t}{16} - \frac{1}{4} \right]$$

2.3.5 Equations aux différences linéaires à coefficients constants

Deux sortes de problèmes peuvent être posés à propos de ces équations aux différences dont les éléments inconnus sont, pour rester dans le cadre de cet ouvrage, soient des fonctions ou des suites causales, soient des fonctions ou des suites de supports limités à gauche. Une première situation est obtenue lorsque l'élément

inconnu est une fonction de l'un de ces types vérifiant une relation entre les valeurs qu'elle prend au point t et en des points translattés de t de quantités positives fixes, à savoir $t - a_1, t - a_2, \dots, t - a_k$. De telles équations sont dites "équations fonctionnelles aux différences". La plus simple parmi de telles relations est certainement obtenue lorsque ces indices de translation sont du type ja où j est un entier variant de 0 à k et a un réel positif quelconque. Une dilatation sur la variable permet d'ailleurs de se ramener au cas où $a = 1$. Lorsque la relation est du premier degré, l'équation, dite alors linéaire d'ordre k , prend la forme :

$$\sum_0^k a_j y(t - j) = f(t)$$

Si f est causale, on peut imposer à la fonction inconnue d'être causale. Les conditions initiales sont alors inutiles, car en se plaçant sur $[0, 1[$, on a : $a_0 y(t) = f(t)$ et on peut poursuivre en déterminant l'inconnue y , de proche en proche, sur les intervalles $[n, n + 1[$. Comme la transformation \mathcal{L} est bien adaptée aux translations sur la variable t , elle agira de façon naturelle sur de telles équations, que ses coefficients a_j soient constants ou variables. Si le second membre est seulement de support limité à gauche $[-a, +\infty[$, la solution est, a priori, de même support. Cette solution peut encore être obtenue de proche en proche et, si l'on veut appliquer \mathcal{L} , il suffit de translater la solution pour se ramener à une fonction causale.

La deuxième situation concerne le cas où l'élément inconnu est une suite de nombres réels ou complexes. Cette fois, l'équation aux différences dite "discrète" est une relation entre les différents termes de cette suite .

Généralement, cette relation permet de déterminer le terme d'indice $n + k$ en fonction des termes d'indices $n, n + 1, \dots, n + k - 1$ et de n ; elle est dite alors équation d'ordre k . Par exemple, une équation aux différences discrètes linéaires d'ordre k s'écrit :

$$a_0 u_{n+k} + a_1 u_{n+k-1} + \dots + a_k u_n = v_n$$

Ses coefficients a_j sont constants ou dépendent de j ; autrement dit, elle est à coefficients constants ou variables. Le second membre est une suite donnée, causale ou de support $\{n \geq -n_0\}$. Notons au passage que les termes successifs ne résultent pas, à vrai-dire, de translations d'indices positifs, ce qui implique une différence notable entre les deux situations. Dans le cas de ces équations discrètes, il faudra, pour déterminer une solution, se donner les k premiers termes de la suite. Pour résoudre de telles équations, il convient de définir, d'une certaine façon, la transformée de Laplace d'une suite. Ce sera fait à propos de l'exemple 2.46 qui va suivre et ce sera repris, dans le Chapitre 4, à propos des séries de distributions de Dirac.

Remarque 2.11 *Tout en tenant compte des notations différentes signalées ci-dessus, on peut noter une relation entre les solutions des équations fonctionnelles et les équations discrètes. Cette relation permet d'ailleurs de suggérer une technique d'application de la transformation \mathcal{L} aux équations discrètes.*

Soit, par exemple, l'équation discrète : $a_0u_n + a_1u_{n+1} = v_n$ où (v_n) est causale. On construit la fonction w définie par : $w(t) = v_n, \forall t \in]n, n + 1]$. Supposons trouvée la solution y de l'équation fonctionnelle : $a_1y(t) + a_0y(t - 1) = w(t)$. Alors, pour tout entier n , on a : $a_1y(n + 1) + a_0y(n) = w(n + 1) = v_n$. On en déduit facilement l'égalité : $u_n = y(n)$.

Cette remarque suggère le principe d'une méthode d'application de \mathcal{L} aux équations discrètes (Cf. exemple 2.46 qui suit).

Remarque 2.12 Dans la catégorie des équations fonctionnelles aux différences, on peut aussi considérer des indices de translation négatifs.

L'écriture de l'équation se rapproche alors de celle des équations discrètes :

$$\sum_0^k a_j y(t + j) = f(t)$$

Mais, dans le traitement éventuel d'une telle équation par \mathcal{L} , il faudra tenir compte du fait que la propriété de translation de la transformation n'est plus valable sous sa forme habituelle (Cf. Exemple 2.47).

Exemple 2.45 On se propose de déterminer les fonctions g causales, transformables par \mathcal{L} , vérifiant l'équation fonctionnelle aux différences (E_1) suivante où interviennent les deux indices de translation 1 et 2 :

$$6g(t) - 4g(t - 1) - 2g(t - 2) = \mathcal{U}(t)t \exp t$$

En utilisant notamment les transformées des translatées d'une fonction de \mathcal{L}_d , on voit que l'image G de la fonction g vérifie la relation (E_2) :

$$G(s) \left[6 - 4 \exp(-s) - 2 \exp(-2s) \right] = \frac{1}{(s - 1)^2}$$

Le fait que les amplitudes des différences soient entières permet de factoriser l'expression $2 \exp(-2s) + 4 \exp(-s) - 6$ en la considérant comme un trinôme du second degré de la variable $\exp(-s)$.

De même, on peut décomposer la fonction inverse à la façon d'une fraction rationnelle. On obtient ainsi :

$$G(s) = -\frac{1}{8} \frac{1}{(s - 1)^2} \left[\frac{1}{\exp(-s) - 1} - \frac{1}{\exp(-s) + 3} \right]$$

On peut supposer que la partie réelle de s est positive, ce qui permet de développer les deux fractions $(1 - \exp(-s))^{-1}$ et $(1 + \frac{\exp(-s)}{3})^{-1}$ en séries entières de la variable $\exp(-s)$. On obtient ainsi G comme somme d'une série de fonctions dont on connaît les images inverses :

$$G(s) = -\frac{1}{8} \frac{1}{(s - 1)^2} \left[\frac{1}{12} \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{\exp(-ns)}{3^n} + \frac{1}{4} \sum_0^{+\infty} \frac{\exp(-ns)}{3^n} \right]$$

L'image inverse de $\frac{\exp(-ns)}{(s-1)^2}$ étant la translatée d'indice n de $\mathcal{U}(t)t \exp t$, on en déduit :

$$g(t) = \frac{1}{8} \sum_0^{+\infty} \left[\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} + 1 \right] \mathcal{U}(t-n)(t-n) \exp(t-n)$$

Cette somme est une somme finie sur tout intervalle $[n, n+1[$; c'est bien une fonction causale d'abscisse de convergence nulle, dont l'image est la fonction G précédente.

On vérifie que sur $[0, 1[$, cette fonction se réduit au premier terme de la série, à savoir $\frac{1}{6}t \exp t$, ce qui permet de vérifier, sur cet intervalle, la relation de départ : $6g(t) = \mathcal{U}(t)t \exp t$. De même, sur l'intervalle $[1, 2[$, la fonction se réduit aux deux premiers termes, à savoir $\frac{t \exp t}{6} + \frac{(t-1) \exp(t-1)}{9}$. Alors, on a, sur cet intervalle :

$$6g(t) - 4g(t-1) = t \exp t + \frac{6}{9}(t-1) \exp(t-1) - 4 \frac{1}{6}(t-1) \exp(t-1) = t \exp t$$

On a ainsi vérifié que la fonction trouvée est bien solution sur l'intervalle $[0, 2[$. On trouvera d'autres exemples dans l'exercice 3.39. L'exemple suivant est une équation aux différences discrètes. Mais, on remarquera que cet exemple, sur lequel on expose la technique de résolution, provient de la discrétisation de l'équation de l'exemple précédent.

Exemple 2.46 Déterminer la suite causale (u_n) dont les premiers termes u_0 et u_1 sont donnés et qui est solution de l'équation aux différences linéaire à coefficients constants :

$$6y_{n+2} - 4y_{n+1} - 2y_n = (n+2)e^{(n+2)}$$

Pour la traiter par la transformation \mathcal{L} , on associe à la suite de terme général u_n la fonction en escalier, notée $u(t)$ égale à u_n sur l'intervalle $[n, n+1[$. Si la suite u_n est causale—à savoir : $u_n = 0$ si $n < 0$ —la fonction u associée est, elle-même causale et on peut définir sans mal, en passant par cette fonction, les notions d'abscisses de convergence pour les suites. Sous réserve d'existence, l'image de la suite est, par définition, celle de la fonction u , c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}(\{(u_n)\})(s) = \sum_0^{+\infty} u_n \int_n^{n+1} \exp(-st) dt = \frac{1 - e^{-s}}{s} \sum_0^{+\infty} u_n e^{-ns}$$

La dernière série est, en quelque sorte, la fonction génératrice de la suite. C'est une série de Dirichlet que l'on note g_u . Pour résumer, l'image de Laplace de la suite u_n est $\frac{1 - e^{-s}}{s} g_u(s)$.

Il reste à voir comment se traduisent des translations, nécessairement d'indices k positifs et entiers.

Pour cela, il suffit de chercher la nouvelle fonction génératrice. Celle-ci s'écrit :

$\sum_0^{+\infty} u_{n+k} e^{-(n+k)s}$; ce n'est donc pas simplement, comme dans le cas d'une fonction, le produit $\exp(ks)g_u(s)$, mais le produit par cette exponentielle de la série $g_u(s)$ tronquée de ses k premiers termes. On s'aperçoit d'ailleurs, qu'en fait, pour trouver les suites solutions d'équations aux différences discrètes, c'est moins l'image de Laplace que la fonction génératrice qui est le moteur de la transformation.

Pour l'exemple donné, la fonction génératrice est solution de l'équation G_2 :

$$6e^{2s} \left[g_u(s) - u_0 - u_1 e^{-s} \right] - 4e^s \left(g_u(s) - u_0 \right) - 2g_u(s) = \sum_0^{+\infty} (n+2)e^{n+2-ns}$$

On effectue facilement le second membre par dérivation d'une série géométrique : $\sum_0^{+\infty} (n+2) \exp(n+2-ns) = e^2 \frac{2 - e^{1-s}}{(1 - e^{1-s})^2}$ Le problème peut être résolu en fonction des deux données initiales.

Cependant, pour illustrer la remarque précédente, on prendra, en se servant de l'exemple 2.39 : $6u_0 = [te^t]_{t=0} = 0$ et $6u_1 - 0 = [te^t]_{t=1} = e$.

En factorisant un trinôme en e^s , on obtient, avec ces conditions initiales :

$$2(e^s - 1)(3e^s + 1)g_u(s) = e \exp(s) + e^2 \frac{2 - e^{1-s}}{(1 - e^{1-s})^2}$$

En utilisant la variable $v = e^{-s}$, on est ensuite amené à décomposer la fraction rationnelle : $g_u(s) = -\frac{ev}{6(1-v)(1+v/3)(1-ev)^2}$.

On obtient ainsi :

$$g_u(s) = \frac{e}{8} \left[\frac{1}{(1-e)^2(1-v)} - \frac{1}{(1+3e)^2(1+v/3)} + \frac{4e(n+1)e^n}{(e-1)(3e+1)(1-ev)^2} - \frac{4e(3e^2+1)}{(1-e)^2(1+3e)^2(1-ev)^2} \right]$$

La fonction génératrice de la solution se développe ensuite en série entière de la variable v :

$$g_u(s) = \frac{e}{8} \sum_0^{+\infty} \left[\frac{1}{(1-e)^2} - \frac{(-1)^n}{3^n(1+3e)^2} + \frac{4e(n+1)e^n}{(e-1)(3e+1)} - \frac{4e(3e^2+1)e^n}{(1-e)^2(1+3e)^2} \right] e^{-ns}$$

En prenant le coefficient de e^{-ns} , on en déduit le terme général de la suite cherchée :

$$u_n = \frac{e}{8} \left[\frac{1}{(1-e)^2} - \frac{(-1)^n}{3^n(1+3e)^2} + \frac{4e(n+1)e^n}{(e-1)(3e+1)} - \frac{4e(3e^2+1)e^n}{(1-e)^2(1+3e)^2} \right]$$

On vérifie sur cette formule : $u_0 = 0, u_1 = e/6$. Par ailleurs, on vérifie aussi que cette suite est la restriction à \mathbb{N} de la fonction g solution de l'exemple 2.47

précédent.

Enfin, on traite un exemple où les indices de translation contenus dans l'équation sont négatifs, l'inconnue cherchée étant non causale mais seulement de support $[-2, +\infty[$. C'est un exemple où, les indices de translation pouvant être négatifs, il est nécessaire de reprendre la propriété de translation.

Exemple 2.47 On se propose de trouver la fonction y nulle pour $t \leq -2$ telle que :

$$\forall t \leq 0, \quad y(t + 2) + 4y(t + 1) + 4y(t) = \mathcal{U}(t)$$

Lorsque $t \in [0, 1[$, la fonction y est simplement soumise à une relation qui ne permet pas sa détermination. De même sur $[1, 2[$. On en déduit, comme pour les équations discrètes qu'il est nécessaire de se donner, en condition initiale, la fonction y sur l'intervalle $[0, 2[$. Désignons par $Y(s)$ l'image de la restriction de y à $[0, +\infty[$. Les images des fonctions translatées d'indices négatifs $y(t + 1)$ et $y(t + 2)$ sont, par exemple pour la première, l'intégrale y figurant étant connue par hypothèse :

$$\int_1^{+\infty} \exp(-s(u - 1))y(u)du = \exp(s) \left[Y(s) - \int_0^1 \exp(-st)y(t)dt \right]$$

En notant $I_1(s)$ cette intégrale et $I_2(s)$ l'intégrale analogue sur $[0, 2[$, on obtient l'équation transformée :

$$Y(s) \left[e^s + 2 \right]^2 = e^{2s} I_2(s) + 4e^s I_1(s) + \frac{1}{s}$$

Pour terminer les calculs, supposons : $y(t) = 1$ sur $[0, 1[$ et $y(t) = 0$ sur $[1, 2[$. Alors $I_1 = I_2 = \frac{1 - e^{-s}}{s}$ et l'équation transformée peut s'écrire, en divisant par e^{2s} :

$$Y(s) \left[1 + 2e^{-s} \right]^2 = \frac{5e^{-2s} + 3e^{-s} + 1}{s}$$

En utilisant la décomposition

$$\frac{1 + 3u + 5u^2}{1 + 2u^2} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4(1 + 2u)^2} - \frac{1}{1 + 2u},$$

et en développant en série entière de la variable $2u = 2e^{-s}$ pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$, on obtient finalement :

$$Y(s) = \frac{5}{4s} - \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n e^{-ns}}{s} - \frac{3}{4s} \sum_1^{+\infty} n (-1)^n 2^{n-1} e^{-(n-1)s}$$

On en déduit la solution qui s'exprime par une somme localement finie :

$$y(t) = \frac{5}{4} \mathcal{U}(t) - \sum_0^{+\infty} (-1)^n 2^n \mathcal{U}(t - n) - \frac{3}{4} \sum_1^{+\infty} (-1)^n n 2^{n-1} \mathcal{U}(t - n + 1)$$

On vérifie que, sur $[0, 1[$, on a : $y(t) = \frac{5}{4} - 1 + \frac{3}{4} = 1$ et que, sur $[1, 2[$, on a :

$$y(t) = \frac{5}{4} - (1 - 2) - \frac{3}{4}(-1 + 4) = 0.$$

2.3.6 Equations aux différences linéaires à coefficients variables

Exemple 2.48 Déterminer la suite (y_n) de premier terme y_0 et vérifiant l'équation aux différences :

$$(n + 2)y_{n+1} - ny_n = (-1)^n n \exp(n)$$

En l'absence d'un prolongement continu simple du second membre, on reste dans le cadre des équations aux différences discrètes.

On peut remarquer, d'entrée, qu'on a nécessairement $y_1 = 0$ et que la suite inconnue est indépendante de y_0 . On peut choisir $y_0 = 0$, quitte à l'ajouter, en fin de calcul, à la fonction génératrice g_y . La fonction génératrice g_y de la suite (y_n) ayant pour dérivée $\sum_0^{+\infty} ny_n e^{-ns}$, on en déduit la fonction génératrice de la suite (ny_n) .

Donc, en utilisant la traduction des translations sur les suites, on sait écrire la fonction génératrice du premier membre de l'équation. Pour le second membre, on obtient cette fonction en dérivant la relation $\sum_0^{+\infty} (-1)^n e^{n(1-s)} = \frac{1}{1 + e^{1-s}}$.

Il en résulte que la fonction g_y est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre E_2 :

$$e^s \left[g_y(s) - g'_y(s) \right] + g'_y(s) = -\frac{e^{1-s}}{(1 + e^{1-s})^2}$$

L'équation sans second membre associée admet pour solution générale $g_0(s) = C(1 - e^s)$ et la méthode de variation de la constante conduit, en posant $e^{-s} = v$, à la relation $C'(s) = -\frac{ev^3}{(ev + 1)^2(v - 1)^2}$. Une intégration de fraction rationnelle nous donne :

$$C(s) = \lambda - \frac{A}{ee^{-s} + 1} + \frac{C}{1 - e^{-s}} + D \ln\left(\frac{1 - e^{-s}}{1 + ee^{-s}}\right),$$

les nombres A, B, D étant définis par

$$A = (1 + e)^{-2}, \quad C = e(1 + e)^{-2}, \quad , \quad D = 2e^2(1 + e)^{-3}$$

En multipliant cette fonction par $1 - e^s = -e^s(1 - v)$, on obtient la fonction g_y cherchée. Comme la fonction $C(s)$ est développable en série $\sum_0^{+\infty} c_n v^n$, son produit par $-e^s(1 - v)$ sera du type $-c_0 e^s - \sum_0^{+\infty} d_n v^n$. Or, en utilisant par exemple la transformée de Laplace associée à g_y qui doit tendre vers 0 à l'infini, il est nécessaire que $c_0 = 0$. On va en déduire la valeur de la constante λ . Le développement du terme logarithmique ne possédant pas de terme de puissance nulle, on en déduit, en effet : $\lambda - A + C = 0$, c'est-à-dire $\lambda = (1 - e)(1 + e)^{-2}$. Il ne reste plus qu'à effectuer le produit de $C(s)$ par $1 - v$ et à remplacer v^n par v^{n-1} , pour obtenir la suite (y_n) cherchée. Comme le logarithme du quotient

précédent nous donne $e^s \ln\left[\frac{1+ev}{1-v}\right] = \sum_0^{+\infty} (1 + (-1)^n e^{n+1}) \frac{v^n}{n+1}$, on trouve, en posant $a_n = \frac{1 + (-1)^n e^{n-1}}{n+1}$:

$$g_y(s) = y_0 - \frac{1}{e+1} \sum_0^{+\infty} (-1)^n e^{n-ns} - \frac{2e}{(1+e)^3} \sum_0^{+\infty} (a_n - a_{n-1}) e^{-ns}$$

On vérifie que le premier terme, à savoir y_1 , est nul.

2.3.7 Equations différentielles ou intégrô-différentielles linéaires avec retard

Exemple 2.49 On se propose de trouver la solution causale, si elle existe, de l'équation E_1 suivante :

$$y'(t) - 4y(t) + y(t-1) + \mathcal{U}(t) \int_0^t y(u)[5 - 2(t-u)]du = \mathcal{U}(t)(2t-3),$$

vérifiant la condition initiale $y(0+) = 1$.

Il s'agit d'une équation intégrô-différentielle avec retard (présence du terme $y(t-1)$ dans l'équation). On suppose qu'il existe une solution g transformable par \mathcal{L} . L'image G de cette solution vérifie l'équation E_2 :

$$sG(s) - 1 - 4G(s) + \exp(-s)G(s) + \left(\frac{5}{s} - \frac{2}{s^2}\right)G(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{3}{s}$$

En vue d'un développement en série, le coefficient de $G(s)$ est mis sous la forme $1 + H(s) \exp(-s)$ où H est l'inverse algébrique de $s - 4 + \frac{5s-2}{s^2}$. L'équation E_2 peut ainsi s'écrire :

$$G(s) \left[1 + H(s) \exp(-s) \right] = \frac{s^2 - 3s + 2}{s^2} \frac{s^2}{s^3 - 4s^2 + 5s - 2}$$

Le quotient $\frac{1}{H}$ peut s'écrire : $\frac{s^2}{(s-1)^2(s-2)}$. Cette fonction tend vers 0 lorsque $|s| \rightarrow +\infty$. On en déduit que pour $|s|$ assez grand, en particulier pour $\Re(s)$ assez grand, on aura $|H(s)| \leq 1$ et, par conséquent $|H(s) \exp(-s)| \leq 1$. Il en résulte que l'on peut développer en série $(1 + H(s) \exp(-s))^{-1}$. Finalement, sous réserve de vérification, la solution peut s'exprimer par :

$$g(t) = \frac{1}{s-1} \sum_0^{+\infty} (H(s))^n \exp(-ns) = \sum_0^{+\infty} \frac{\exp(-ns) s^{2n}}{(s-1)^{2n+1} (s-2)^n}$$

Désignons l'image inverse de la fraction rationnelle $\frac{s^{2n}}{(s-1)^{2n+1}(s-2)^n}$ par h_n .

La solution, sous réserve de vérification, s'écrit alors :

$$g(t) = \sum_0^{+\infty} h_n(t-n)$$

Il serait long et fastidieux d'expliciter de telles fonctions. on se contente d'expliciter les trois premiers termes de la série qui fournissent d'ailleurs la solution sur l'intervalle $[0, 3[$. On a :

$$\begin{aligned}
 h_0(t) &= \mathcal{U}(t) \exp t \\
 h_1(t) &= \mathcal{U}(t-1) \left[-\frac{(t-1)^2 \exp(t-1)}{2} - 3(t-1) \exp(t-1) - 4 + \exp(2t-2) \right] \\
 h_2(t) &= \mathcal{U}(t-2) \left[e^{t-2} \left[\frac{(t-2)^4}{4!} + (t-2)^3 + \frac{17(t-2)}{2} + 32(t-2) + 48 \right] \right. \\
 &\quad \left. + e^{2t-4} [32(t-2) - 48] \right]
 \end{aligned}$$

En effectuant l'intégrale qui figure dans l'équation E_1 , on pourrait vérifier que la fonction trouvée est bien une solution sur $[0, 3[$. On trouvera d'autres exemples dans l'exercice 3.39

Remarque 2.13 *Toutes les équations traitées précédemment sont linéaires ; elles se ramènent, par utilisation de \mathcal{L} , à des équations du premier degré dont l'inconnue est l'image de la fonction cherchée. Il n'est pas exclu que certaines équations fonctionnelles se ramènent à des équations algébriques de degré supérieur, voire des équations non algébriques. Leur résolution explicite reste exceptionnelle. On trouvera dans l'exercice 3.40 des exemples de ce type, où on peut exceptionnellement expliciter les calculs.*

2.3.8 Principe de la résolution de certaines équations aux dérivées partielles

Les équations étudiées ci-dessus font intervenir des fonctions d'une seule variable. Pour des équations aux dérivées partielles, l'utilisation de la transformation \mathcal{L} sur les fonctions de n variables, dans laquelle $n - 1$ de ces variables sont bloquées, permet de ramener l'équation étudiée à des équations à un nombre moindre de variables dans lesquelles s joue le rôle de paramètre. Ces équations sont étudiées, dans le cadre de la physique, au chapitre 6. Soit, par exemple l'équation aux DP :

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) - a^2 g(t, x),$$

la fonction étant en outre assujettie à la condition initiale : $g(0+, x) = \varphi(x)$ et à d'autres conditions, pouvant d'ailleurs dépendre de t , concernant le bord du domaine d'espace dans lequel a lieu le phénomène. Si on désigne par $G_x(s)$ la transformée de Laplace de $t \mapsto g(t, x)$, l'équation précédente E_1 se transforme en une équation E_2 en la variable d'espace x :

$$(s + a^2)G_s(x) - \varphi(x) = \frac{\partial^2 G_s}{\partial x^2}(x)$$

Pour chaque valeur du nombre s , la solution $G_s(x)$ de cette équation est obtenue après le calcul des constantes fonctions de s à l'aide des conditions au bord. Il restera à trouver l'image inverse (Cf. Exemple 6.13).

Chapitre 3

Exercices sur les deux premiers chapitres

Exercice 3.1 (★)

1. Déterminer les abscisses de convergence et les images de Laplace des fonctions suivantes :

$$t \mapsto \mathcal{U}(t)(t+1) \sin(2t)$$

$$t \mapsto \mathcal{U}(t)(t+1) \cos^2(2t)$$

$$t \mapsto \mathcal{U}(t) \exp(t+1)(t+1) \sin(2t)$$

2. Déterminer les originaux des fonctions rationnelles complexes suivantes

$$F(s) = \frac{3s^2 - s + 1}{(s^2 + s + 1)(s^2 + 1)}$$

$$F(s) = \frac{s^3 + 1}{s^4 - 1}$$

$$F(s) = \frac{s^n + 1}{s^{2n} + 1}$$

$$F(s) = \frac{s-1}{s^3+1} \exp(-s) + \frac{s^2-1}{s^4+1} \exp(-2s)$$

Exercice 3.2 (★★)

Soit la fonction f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t-1)t^{-x} \sin t$, x étant un réel strictement positif donné.

1. Montrer, au moyen par exemple d'une intégration par parties, que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(u) du$ est convergente.

2. On suppose $x \leq 1$. En utilisant, par exemple, la minoration $|\sin t| \geq \sin^2 t$ et une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} |f(u)| du$ est divergente. En déduire que cette fonction f est Lebesgue-sommable sur \mathbb{R} si et seulement si $x > 1$.

3. Déterminer une fonction causale dont les abscisses de convergence et de convergence absolue sont distinctes. (Cf. Chapitre 1, remarque 1.2)

4. Soient deux réels a et b vérifiant $a < b$. Déterminer une fonction causale f telle que $\zeta_a(f) = b$ et $\zeta_c(f) = a$.

Exercice 3.3 (*)

1. Soit la fonction f causale telle que, pour tous les entiers naturels n , on ait :

$$\forall t \in [n, n+1], \quad f(t) = n$$

Montrer que cette fonction est transformable par \mathcal{L} et, soit par un calcul direct, soit en exprimant au préalable la fonction au moyen de l'échelon-unité et de ses translatées, calculer sa transformée de Laplace.

2. On se donne deux suites numériques u_n et v_n , cette dernière étant strictement positive et strictement croissante. On considère la fonction causale f telle que :

$$\forall n, \forall t \in [v_n, v_{n+1}[, f(t) = (-1)^n u_n$$

Exprimer formellement la transformée de Laplace de cette fonction f et déterminer les abscisses de convergences $\zeta_c(f)$ et $\zeta_a(f)$ dans les cas suivants, en discutant, s'il y a lieu, suivant les valeurs du paramètre :

$$u_n = \ln n \quad \text{et} \quad v_n = n$$

$$u_n = n^\alpha, \quad \text{avec} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad v_n = \ln n$$

$$u_n = n^\alpha \quad \text{et} \quad v_n = \ln(\ln n)$$

Exercice 3.4 (**)

On propose de montrer la formule généralisée d'intégration par parties (Cf. Lemme 1.2) Soient une fonction g continûment dérivable sur $[a, b]$ et une fonction h Lebesgue-intégrable sur $[a, b]$. On considère la fonction absolument continue H définie sur cet intervalle par : $H(u) = \int_a^u h(t) dt$. En considérant les fonctions

$$t \mapsto \int_a^t g'(u)H(u) du$$

$$t \mapsto g(t)H(t) - \int_a^t g(u)h(u) du$$

montrer la formule suivante :

$$\int_a^b g'(u)H(u) du = g(b)H(b) - g(a)H(a) - \int_a^b g(u)h(u)$$

Exercice 3.5 (★★)

En utilisant, par exemple, des fonctions exponentielles, montrer que les inégalités (1.4) peuvent être strictes.

Exercice 3.6 (★★)

Donner des exemples de fonctions f d'abscisse de convergence nulle et dont la limite en $+\infty$ est infinie. Montrer qu'il en résulte que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est divergente et déterminer, dans chacun de ces exemples : $\lim_{s \rightarrow 0} F(s)$, s étant réel (comparer avec le résultat de la proposition 1.13, 1)).

Démontrer, de façon générale, que si $f(t) \geq 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$, alors $\lim_{s \rightarrow 0} F(s) = +\infty$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3.7 (★)

(★) Déterminer la transformée de Laplace de la fonction f telle que

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \frac{\sin t - t \cos t}{t^2}$$

Une première méthode consiste à chercher la transformée de $\mathcal{U}(t) \frac{\sin t}{t}$ au moyen d'une primitivation pour en déduire ensuite la transformée de $tf(t)$.

Retrouver le résultat en cherchant d'abord une équation différentielle vérifiée par g et en transformant cette équation différentielle par \mathcal{L} .

Exercice 3.8 (★★)

1) Soit la fonction f telle que

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \left[2 \sin(\sqrt{t}) - 2(\sqrt{t}) \cos(\sqrt{t}) \right]$$

Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients non constants. En déduire une équation différentielle dont l'image F de f est solution. Résoudre cette équation sur l'axe des réels positifs. En déterminant ensuite la limite de $x^2 F(x)$ en $+\infty$ au moyen d'un passage à la limite sous une intégrale, expliciter complètement la fonction F . En déduire l'image de Laplace de $\mathcal{U}(t) \sin(\sqrt{t})$.

2) Soit la fonction f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t)t^{-3/2} \exp(-\frac{1}{t})$. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients polynomiaux simples. En déduire une équation différentielle du second ordre vérifiée par l'image de Laplace F de f . Intégrer cette dernière équation en utilisant la variable $u = \sqrt{s}$. Après calcul de deux constantes (l'une d'entre elles, grâce à un théorème de valeur initiale et à la valeur connue $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$), trouver la transformée de f . Comparer avec l'exemple 2.17 et la formule 2.18.

Exercice 3.9 (★)

Dans les exemples 2.8 et 2.9, on a déterminé des transformées de fonctions de Bessel par utilisation de développements en séries entières. On utilise ici l'équation différentielle admettant parmi ses solutions la fonction J_n . Il s'agit de :

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - n^2)y = 0$$

a) Trouver, en utilisant $J_0(0) = 1$, la transformée par \mathcal{L} de cette équation pour $n = 0$. La solution de l'équation transformée fait intervenir une constante C multiplicative. Déterminer cette constante à l'aide du corollaire 1.4 et la relation $J_0(0) = 1$. En déduire la transformée de $\mathcal{U}J_0(t)$.

b) En utilisant la relation $J_1 = -J_0'$, déduire de ce qui précède la transformée de J_1 .

Retrouver cette transformée par la méthode du a) sachant que $J_1(0) = 0$ et $J_1'(0) = 1/2$. Cette fois, l'équation transformée est du second ordre, mais incomplète et on déterminera les deux constantes en utilisant les deux conditions initiales précédentes.

c) Trouver l'équation différentielle vérifiée par $J_0(\sqrt{t})$ et la transformée de cette équation par \mathcal{L} . Retrouver ainsi le résultat de l'exemple 2.8.

d) Trouver l'équation différentielle vérifiée par f où :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \left(\frac{t}{a}\right)^{(\lambda-1)/2} J_{\lambda-1}(2\sqrt{at})$$

Par la méthode utilisée précédemment, déterminer l'image $\mathcal{L}(f)$.

Exercice 3.10 (★★)

Retrouver le résultat de l'exemple 2.18, dans le cas $\lambda > -1/2$, en utilisant le développement en série de la fonction f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t)t^\lambda J_\lambda(t)$. Dans cette situation où la série n'est pas, à vrai dire, une série entière, on justifiera la commutation de l'intégrale de Laplace et de la sommation de la série.

Exercice 3.11 (★★★)

a) En application d'une proposition analogue à la proposition 1.17 et comme dans l'exemple 2.12, déterminer l'image de Laplace de $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t) \sin \sqrt{t})$.

b) Déterminer également l'image de $\mathcal{U}(t)t^\alpha L_n^\alpha(t)$ et retrouver ainsi le résultat de l'exemple 2.21. Pour cela, on développe en série la dérivée d'ordre n de $t^{\alpha+n}e^{-t}$ et on montre qu'on peut prendre les images de Laplace terme à terme de la série obtenue en multipliant la série précédente par e^t . On trouve ainsi une série de puissances de $\frac{1}{s-1}$ qu'on peut calculer.

c) On admet la formule, valable pour $-1/2 < \Re e(\nu) < 1/2$ (Cf. [[29]]) :

$$\left(\frac{t}{2}\right)^\nu J_\nu(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2 - \nu)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin xt}{(x^2 - 1)^{\nu+1/2}} dx$$

A l'aide de cette formule, retrouver par un calcul direct, le résultat de l'exemple 2.18 (formule (2.19)) sur l'image de la fonction $\mathcal{U}(t)t^\nu J_\nu$. Après avoir commuter une intégrale et \mathcal{L} et utiliser la transformée de Laplace de $\mathcal{U}(t) \sin(xt)$, on sera amené à calculer une intégrale du type $\int_1^{+\infty} \frac{(u-1)^{-\nu+1/2}}{u+s^2} du$. Pour calculer cette dernière, on peut, dans le champ complexe coupé suivant la demi-droite des réels x tels que $x \geq 1$, utiliser le théorème des résidus en choisissant un contour formé de deux arcs de cercles de centre $z = 1$ et deux segments qui viennent s'identifier à la limite aux deux faces (supérieure et inférieure de la coupure. On se servira en fin de calcul de la formule des compléments de Γ (Cf. Annexe 2) :

$$\Gamma(\lambda)\Gamma(1-\lambda) = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}.$$

Peut-on ensuite prolonger la formule obtenue pour d'autres valeurs de ν ?

Exercice 3.12 (***)

a) En utilisant la formule (Cf. annexe 2), $J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(it \sin(\theta)) d\theta$ et en échangeant deux intégrations, ce que l'on justifiera, déterminer l'image de Laplace de $\mathcal{U}(t)J_0(t)$,

b) On admet, comme dans l'exercice précédent et, toujours sous la même condition : $-1/2 < \Re e(\nu) < 1/2$, la formule concernant la fonction de Bessel de deuxième espèce (Cf. annexe 2 et [[29]]) :

$$\left(\frac{t}{2}\right)^\nu Y_\nu(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2 - \nu)} \int_1^{+\infty} \frac{\cos xt}{(x^2 - 1)^{\nu+1/2}} dx$$

On se contente du cas $\nu = 0$. Montrer qu'on peut commuter \mathcal{L} à cette intégrale et qu'ainsi l'image de Y_0 est définie par l'intégrale :

$$-\frac{s}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{1}{(s^2 + x^2)\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

Calculer de façon élémentaire cette intégrale en utilisant le changement de variable : $x = \operatorname{ch}\theta$.

Montrer ainsi que :

$$\mathcal{L}(Y_0)(s) = -\frac{2}{\pi\sqrt{s^2 + 1}} \left[\log(s + \sqrt{s^2 + 1}) \right]$$

Exercice 3.13 (**)

Propriétés des transformées de $f(\sqrt{t^2 - a^2})$

1) Dans la proposition 2.2 (Cf. Exemple 2.24), on a vu que l'image inverse de la fonction F définie par $F(s) = [[s^2 + 1]^{-1/2}] \exp(-a[[s^2 + 1]^{1/2}])$ est la fonction f

définie par $f(t) = \mathcal{U}(t-a)J_0(\sqrt{t^2-a^2})$.

a) En utilisant l'équivalence en $+\infty$: $J_0(t) \sim \sqrt{\frac{2}{t\pi}} \cos(t - \frac{\pi}{4})$ (voir annexe 2), montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} J_0(\sqrt{t^2-a^2})$ est convergente et, à l'aide de la proposition 1.14 (formule 1.11), trouver la valeur de cette intégrale.

b) Dédire de a) la transformée de Laplace de $\mathcal{U}(t-a) \int_t^{+\infty} J_0(\sqrt{u^2-a^2}) du$.

2) On propose l'étude des images des fonctions : $t \mapsto \int_0^t J_0(\sqrt{t^2-x^2})g(x)dx$ où g est une fonction de \mathcal{L}_d d'abscisse de convergence inférieure ou égale à 0.

a) En utilisant la formule de Fubini, pour laquelle on formulera des hypothèses de validité concernant la fonction g , montrer la formule suivante où G désigne la transformée de g :

$$\mathcal{L}(t \mapsto \int_0^t J_0(\sqrt{t^2-x^2})g(x)dx) = (s^2+1)^{-1/2}G(\sqrt{s^2+1})$$

b) Trouver la formule analogue en remplaçant J_0 par I_0 .

c) En utilisant l'exemple 2.8, déterminer l'image de Laplace de $\mathcal{U}(t)J_0(2\sqrt{tx})$ puis celle de $\mathcal{U}(t-x)J_0(2\sqrt{x(t-x)})$.

En déduire, à l'aide de la démarche utilisée précédemment, l'image de Laplace de $t \mapsto \int_0^t \mathcal{U}(t-x)J_0(2\sqrt{x(t-x)})g(x)dx$ à l'aide de G .

Déterminer de même l'image de $t \mapsto \int_0^t \mathcal{U}(t-x)I_0(2\sqrt{x(t-x)})g(x)dx$ à l'aide de G .

Exercice 3.14 (★)

1) Déterminer la transformée de Laplace de la convolée des fonctions f et g suivantes et en déduire l'expression de leurs convolées :

$$f(t) = \mathcal{U}(t)t^2 \sin t, \quad g(t) = \mathcal{U}(t)t \cos(t)$$

$$f(t) = \mathcal{U}(t)t^2 \exp(t-1), \quad g(t) = \mathcal{U}(t-1)t \exp(2t-1)$$

2) A l'aide d'une convolution, prouver, pour tout $t \geq 0$, la relation suivante :

$$\int_0^t J_0(u)J_1(t-u)du = J_0(t) - \cos t$$

3) Déterminer de même les convolées suivantes ; $J_0 \star J_0$, $J_0 \star \frac{J_\nu(t)}{t}$ lorsque $\nu > 0$, $I_0 \star I_0$, $J_\lambda \star \frac{J_\nu(t)}{t}$ lorsque $\nu > 0$, $I_0 \star \frac{I_\nu(t)}{t}$ lorsque $\nu > 0$ et $\text{sht} \star \text{sht}$.

Exercice 3.15 (★)

En utilisant les fonctions citées dans les remarques 1.2 et 1.3, comparer les abscisses de convergence de fonctions et celles de leurs dérivées.

Exercice 3.16 (★★)

Transformée de Laplace de $f(at)$ lorsque a est complexe

1) On commence par le cas particulier de $\mathcal{U}(t) \sin t$.

Soit a un nombre complexe, tel que $\Re(a) > 0$ et $\Im(a) \neq 0$. On suppose

$s = x + iy = re^{-i\alpha}$ avec $x > 1$ et $y < 0$.

a) Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $z \mapsto G(z) = (\sin z)e^{-zs}$ et au chemin complexe composé d'un arc de cercle C_R de centre O et de rayon $R > |a|$ et de deux de ses rayons, l'un étant placé sur l'axe des réels et l'autre passant par le point m d'affixe a .

b) Montrer ensuite que $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} G(z) dz = 0$. Pour cela, la variable d'intégration étant θ , on prouvera que $|\sin z| \leq \operatorname{ch}(R \sin \theta)$ et on majorera $|e^{-sz}|$ par une exponentielle réelle du type e^{-Rx_0} où $x_0 > 1$ est à préciser en fonction des données. En déduire qu'on peut choisir R assez grand pour que l'intégrale considérée ait la limite nulle.

c) En déduire, sous ces conditions, une relation entre les images de Laplace de $U(t) \sin t$ et de $U(t) \sin(at)$. On prolonge ensuite analytiquement l'image de Laplace de $U(t) \sin(at)$ dans son demi-plan d'existence. Vérifier la formule obtenue en utilisant les formules d'addition du sinus.

2) Reprendre le calcul précédent lorsque $a = i$. Retrouver ainsi l'image de $U(t) \sin t$ lorsque s appartient au demi-plan Π_1 .

3) On suppose à présent que $f(t) = U(t)t^{-\nu}g(t)$, l'exposant ν vérifiant $\nu < 1$ et la fonction g étant la restriction à \mathbb{R} d'une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de \mathbb{C} . On suppose que cet ouvert contient l'angle A de sommet O et dont les côtés sont, d'une part l'axe des réels positifs, et d'autre part la demi-droite Δ issue de O et passant par le point m d'affixe $a = \alpha + i\beta$. On suppose enfin que, pour tout z appartenant à un domaine V du champ complexe, l'intégrale

$\int_{C(R)} z^{-\nu} g(u) \exp(-\frac{zu}{a}) du$, où $C(R)$ est un arc de cercle de centre O et de rayon R , tende vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$.

On pose $F(u) = u^{-\nu} g(u) \exp(-\frac{zu}{a})$.

En appliquant le théorème de Cauchy à un contour du même type que le précédent, mais qui évite le passage par le point O, puis des passages à la limite, montrer que :

$$\forall z \in V, \mathcal{L}(f(at))(z) = \frac{1}{a} G\left(\frac{z}{a}\right)$$

4)a) En utilisant une équivalence pour $J_0(t)$ au voisinage de $+\infty$ (Cf. annexe 2), montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} J_0(t) \exp(ixt) dt$.

b) En admettant que la fonction $z \mapsto \int_0^{+\infty} J_0(t) \exp(-zt) dt$ soit continue au point $z = -ix$, calculer l'intégrale précédente en fonction de x .

c) On considère la fonction complexe G définie par $G(z) = J_0(z) \exp(izs)$ et un contour fermé du plan constitué par le bord d'un secteur circulaire de sommet O, de rayon R et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Montrer qu'on peut majorer la fonction $I_0(z)$ sur l'arc de cercle de ce contour par $\operatorname{ch} R$ et qu'on peut choisir le nombre complexe s dans le demi-plan Π_0 de façon que l'intégrale de G sur cet arc de cercle tende vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$.

En déduire une relation entre l'intégrale précédente et $\int_0^{+\infty} I_0(t) \exp(-st) dt$ sous cette condition portant sur s et, en utilisant le prolongement analytique, déter-

miner l'image de Laplace de $\mathcal{U}(t)I_0(t)$ (ou plutôt, vérifier).

5) A partir du résultat de l'exemple 2.19 sur l'image de la fonction $\mathcal{U}(t)J_\nu(t)$, où $\nu > -1$, déterminer l'image de Laplace de la fonction $\mathcal{U}(t)I_\nu(t)$.

Exercice 3.17 (★★)

Soit a l'abscisse de convergence absolue supposée finie d'une fonction f appartenant à \mathcal{L}_d . Montrer que, pour tout complexe s vérifiant : $\Re(s) > a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f(t) e^{-st} dt$ est absolument convergente. En utilisant alors le théorème de dérivation complexe sous le signe intégral des intégrales dépendant d'un paramètre complexe, démontrer l'holomorphic de la transformée de Laplace lorsque s est supérieur à l'abscisse de convergence absolue.

Exercice 3.18 (★)

On suppose qu'au voisinage de 0, on ait $t^{-\rho} f(t) = a_0 + a_1 t + \dots + t^n A_n(t)$ où A_n est borné pour $t \leq t_0$ et $\rho > -1$. En reprenant la démarche de la proposition 1.16, montrer que :

$$F(s) = \sum_0^{n-1} a_k \Gamma(\rho + k + 1) s^{-\rho-k-1} + B s^{-\rho-n-1} + O(\exp(-st_0))$$

Appliquer au cas des transformées de $t^\lambda J_\lambda$ et de J_λ .

Exercice 3.19 (★★)

Comportement au voisinage de $t = 0$ de l'exponentielle intégrale

Ce comportement est étudié, d'une part de façon directe, d'autre part à l'aide de l'amélioration de la proposition 1.16 obtenue par l'exercice précédent.

On rappelle la définition de la constante d'Euler :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

Par ailleurs, on pose :

$$\gamma_n = \int_0^n \left[\frac{1 - (1 - v/n)^n}{v} \right] dv - \ln n, \quad C = \int_0^1 \frac{e^{-v} - 1}{v} dv + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv$$

1) Montrer la formule (par récurrence, par exemple) :

$$\int_0^1 \left[\frac{1 - (1 - u)^n}{u} \right] du = 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n,$$

En déduire, au moyen de calculs simples, que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma_n = \gamma$.

2) En étudiant, par exemple, la fonction $v \mapsto 1 - \frac{v^2}{n} - e^v \left(1 - \frac{v}{n}\right)^n$, dont le signe de la dérivée s'obtient en considérant $e^v \left(1 - \frac{v}{n}\right)^{(n-1)} - 2$, montrer l'inégalité :

$$0 \leq e^{-v} \left(1 - \frac{v}{n}\right)^n \leq e^{-v} \frac{v^2}{n}. \text{ En déduire que } C + \gamma_n \rightarrow 0 \text{ d'où : } C = -\gamma.$$

3) On pose $f(t) = -\text{Ei}(-t)$. En écrivant : $f(t) = \int_t^1 \frac{e^{-v}}{v} dv + f(1)$ et en utilisant le résultat précédent, montrer que :

$$f(t) + \ln t + \gamma = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} t^k}{k k!}$$

4) On se propose de retrouver le développement précédent en supposant connue l'image de Laplace de l'exponentielle intégrale.

Pour cela, on suppose qu'un tel développement au voisinage de 0 existe et on écrit l'image de f donnée dans l'exemple 2.15 sous forme de la somme de $\frac{\ln s}{s}$ dont on connaît l'image inverse et d'une fonction que l'on peut développer en série asymptotique de s au voisinage de $+\infty$. En appliquant à cette fonction les résultats de l'exercice précédent, donner la conclusion.

Exercice 3.20 (★★)

On se propose de reprendre la proposition 1.23 avec un terme logarithmique. Soit donc F possédant sur la frontière Δ_a de son demi-plan d'holomorphic Π_a un seul point singulier s_0 , au voisinage duquel F admet l'équivalent lorsque $0 < \nu < 1$:

$$F(s) \sim K(s - s_0)^{-\nu} [\log(s - s_0)]$$

Les hypothèses i) et ii) de cette proposition sont conservées. On veut obtenir, non un développement asymptotique, mais simplement un équivalent de l'original f au voisinage de l'infini.

1) On suppose établi, L étant un lacet bordant la demi-droite issue de s_0 translatée de l'axe des x négatifs, que : $f(t) \sim \frac{K}{2i\pi} \int_L \exp(st)(s - s_0)^{-\nu} [\log(s - s_0)] ds$. En utilisant un changement de variable ramenant le lacet à un lacet L_0 autour de l'axe des x négatifs, montrer :

$$f(t) \sim \frac{K}{2i\pi} \exp(s_0 t) t^{\nu-1} (c_1 \ln t + c_0),$$

où $c_0 = \int_{L_0} z^{-\nu} \exp z [\log z] dz$, $c_1 = \int_{L_0} z^{-\nu} \exp z dz = -2i\pi \frac{1}{\Gamma(\nu)}$. Calculer ensuite c_0 , en dérivant c_1 , par rapport à ν , sous le signe intégral.

2) Généraliser au cas où $F(s) \sim K(s - s_0)^{-\nu} [\log(s - s_0)]^n$ où n est un entier strictement positif quelconque en faisant apparaître dans le résultat des dérivées successives de $\frac{1}{\Gamma(\nu)}$ par rapport à ν . Voir l'exercice 3.23.

Exercice 3.21 (★★)

On complète la proposition 2.3 dans l'exemple 2.25 en prouvant l'égalité de f à une fonction de Bessel.

a) Montrer, en utilisant une homothétie sur la variable d'intégration que :

$$\int_L \exp(tz) \left[z^{-\lambda} \right] \exp\left(-\frac{a}{z}\right) dz = \left[\frac{t}{a} \right]^{\frac{\lambda-1}{2}} \int_L \exp\left(\sqrt{at} \left[u - \frac{1}{u} \right]\right) \frac{du}{u^\lambda}$$

b) On pose : $g(t) = \int_L \exp[(t/2)(u - 1/u)] \frac{du}{[u^{\lambda+1}]}$. Montrer que cette fonction est deux fois dérivable et que les dérivées s'obtiennent par dérivation sous le signe intégral. Montrer aussi que g vérifie l'équation de Bessel, à savoir : $g'' + (1/t)g' + (1 - (\lambda/t)^2)g = 0$.

Pour cela, en posant $v = (t/2)(u - (1/u))$ et en faisant une intégration par parties, on montrera que : $I(g) = 4(g'' + g)$ s'exprime par :

$$\begin{aligned} I(g) &= \int_L e^v \left(\left(u - \frac{1}{u}\right)^2 + 4 \right) \frac{du}{[u^{\lambda+1}]} = \int_L e^v (1 + u^{-2}) \left(u^{1-\lambda} + u^{-\lambda-1} \right) du \\ &= \frac{2}{t} \left[\left[e^v \left[u^{1-\lambda} + u^{-\lambda-1} \right] \right]_L + \int_L e^v \left((\lambda-1)u^{-\lambda} + (\lambda+1)u^{-\lambda+2} \right) du \right] \end{aligned}$$

Montrer ensuite, en utilisant la croissance comparée, que $e^v \sim e^{tu/2}$ et en déduire que le crochet précédent est nul. Terminer en faisant apparaître g' dans l'expression de $4(g + g'')$ par une autre intégration par parties.

c) En déduire que, pour tout $\lambda > 0$, $g(t) = 2i\pi J_\lambda$, puis retrouver le résultat de la proposition 2.3.

d) Dans le cas où $\lambda = n$, montrer que l'intégrale sur le lacet se réduit à l'intégrale sur le cercle C_r . En déduire, en utilisant le théorème des résidus, qu'à un coefficient près, la fonction g est le coefficient de u^{-n} dans le produit des développements en série de $\exp(tu/2)$ et de $\exp(-t/2u)$. En déduire, par utilisation du développement en série entière classique que, dans ce cas, on a $g = J_n$.

Exercice 3.22 (★★)

Déterminer dans l'exemple 2.30 l'expression du reste S_N et en déduire au voisinage de $t = 0$ le développement limité à l'ordre $N - 1$ de l'image inverse de Laplace de $s \mapsto F(s) = \frac{[s^{1/2}]}{s^2 + a^2}$.

Exercice 3.23 (★★)

On conserve les hypothèses de la proposition 1.23 à l'exception de l'écriture de la fonction F qui s'exprime à présent par : $f(z) = [\log](z - z_0)G(z)$ où G est holomorphe dans le plan.

En utilisant la formule d'inversion et les techniques de la démonstration de cette

proposition, montrer que l'image inverse de Laplace f de F admet le développement asymptotique lorsque $t \rightarrow +\infty$:

$$f(t) \sim \sum_0^{+\infty} (-1)^n G^{(n)}(z_0) t^{-n-1}$$

Exercice 3.24 (★★)

Cet exercice reprend quelques détails de l'exemple 2.24.

A) Soit $w(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \left[t \left((\sin \theta)(\operatorname{ch} \alpha) + (\cos \theta)(\operatorname{sh}(\alpha)) \right) \right] d\theta$.

a) Montrer la relation :

$$w(t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \left[t(\sin \theta)(\operatorname{ch} \alpha) \right] d\theta$$

b) Etablir que la fonction w est dérivable et que sa dérivée s'obtient en dérivant sous le signe intégral. Montrer que cette dérivée est nulle.

En déduire la formule : $w(t) = \pi J_0(t)$.

B) Justification de la deuxième méthode utilisée dans l'exemple 2.24 :

1) Etude d'une transformation complexe g_1 inversible

Soit la transformation complexe qui, à tout z associe $u = \frac{\tau}{2}(z + [(z^2 + 1)^{1/2}])$.

En posant $v = \frac{2u}{\tau}$, on est ramené à l'étude de la transformation g telle que : $v = g(z) = (z + [(z^2 + 1)^{1/2}])$. Les points invariants de g sont les points de branchement i et $-i$.

a) Montrer que tout complexe s admet en général deux antécédents v_1 et v_2 qui sont solutions d'une équation du second degré que l'on écrira.

b) Les relations qui en découlent peuvent être exploitées géométriquement à l'aide des propriétés du quadrangle harmonique. Pour cela, soient m' et m'' les images de v_1 et v_2 .

Montrer que :

$$\begin{cases} Om'.Om'' = 1 \\ \frac{1}{2} \left[(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om'}) + (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Om''}) \right] = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Montrer que Oy est bissectrice de l'angle $(\overrightarrow{Om'}, \overrightarrow{Om''})$.

En prolongeant la droite (Om') jusqu'à son intersection μ avec le cercle C passant par les points A, A' et m' d'affixes $i, -i$ et u_1 , montrer que : $Om'.O\mu = OA.OA' = 1$ et en déduire que m'' est le symétrique de μ par rapport à Ox .

En déduire que le point d'affixe s est le milieu m du segment $[m''m']$ (Cf. figure(1) ci-après).

c) On prend désormais m' dans Π_0 et on pose $u = v_1$. Lorsque, u est réel, les trois points notés alors m_0, m'_0, m''_0 sont alignés sur l'axe des réels et, x étant l'abscisse de m_0 , on a $u = x + \sqrt{x^2 + 1}$ et $v_2 = x - \sqrt{x^2 + 1}$.

L'application g_1 , restriction de g à Π_0 vérifie alors : $g_1(m') = m$, ou $g_1(u) = s$.

On note d'abord : $2v = s + w$ et $2v_2 = s - w$, d'où $w = u - v_2$. Montrer que la droite $(m'm)$ est la bissectrice d de l'angle (\vec{OA}, \vec{OB}) .

En déduire la construction suivante :

Le point m étant donné, déterminer d puis le cercle C . Montrer que le point m' est celui des points d'intersection de d et de C qui est dans Π_0 . L'application h telle que $h(m) = m'$ ainsi définie est l'inverse de g_1 . Il est ainsi établi que g_1 est inversible ; c'est, par ailleurs un difféomorphisme.

2) Transformée par g_1 d'une droite parallèle à l'axe des y

a) Soit $\Delta_{c'}$ la droite d'équation $x = c'$, lieu géométrique du point m' . A chacun des points m' de cette droite, on associe (voir ci-dessus) le point $m = g_1(m')$. Soient p, p', p'' les projections des points m, m', m'' sur l'axe des y . (Cf; figure (1)). Lorsque m' s'éloigne à l'infini sur $\Delta_{c'}$, montrer, en considérant les angles $(\vec{Oy}, \vec{Om'})$ et $(\vec{Om''}, \vec{Oy})$ et en utilisant le fait que p'' reste sur $[AB]$, que $\overline{p''m''} \rightarrow 0$.

b) Montrer, par ailleurs, la formule :

$$(1/2)(\overline{p'm'} + \overline{p''m''}) = (1/2)(c' + \overline{p''m''}) = \overline{pm}$$

En déduire que $\lim \overline{pm} = \frac{c'}{2}$ et que le point m décrit la courbe $g_1(\Delta_{c'}) = \gamma_{c'/2}$ qui a l'allure décrite sur la figure (2) et qui admet pour asymptote $\Delta_{c'/2}$.

3) Déformation du contour Δ_c

Le nombre $c > 0$ étant choisi arbitrairement, on pose $c' = 2c$ et on considère la courbe γ_c admettant donc Δ_c pour asymptote. On considère un contour de Jordan Γ_σ utilisant, d'une part, les parties de γ_c et Δ_c comprises dans la région $|y| \leq \sigma$ et, d'autre part, deux segments horizontaux $[\alpha, \beta], [\alpha', \beta']$ d'ordonnées $\pm\sigma$. En utilisant le théorème de Cauchy, montrer que :

$$\forall t > 0, \quad f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta_c} e^{st} F(s) ds = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_c} e^{st} F(s) ds$$

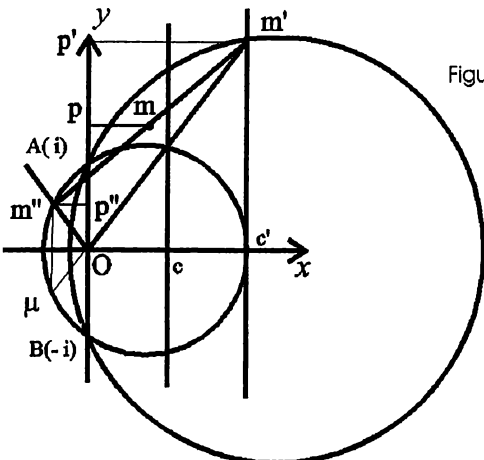


Figure (1)

Figures 2.22

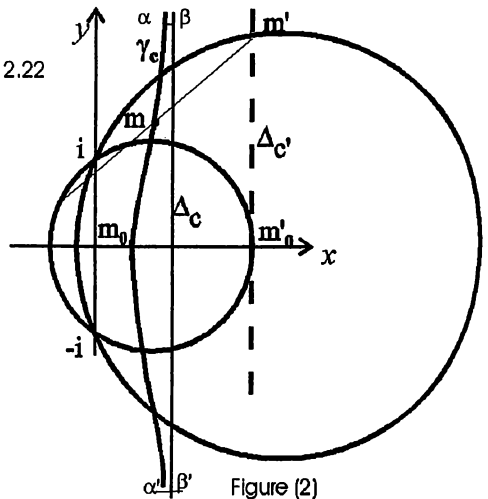


Figure (2)

4) Fin des calculs On suppose établi que la fonction f est nulle pour $t < a$ (voir les détails dans l'exemple 2.24).

En effectuant le changement de variable $s = g_1(u)$, montrer que :

$$\int_{\gamma_c} e^{st} F(s) ds = \int_{\Delta_{2c}} \exp[(1/2)(u - 1/u)t - (a/2)(u + 1/u) \frac{du}{u}]$$

Pour se ramener à une intégrale connue, on pose : $y = (1/2)(t - a)$. Montrer que :

$$f(t) = \int_{\Delta_{2c}} \exp\left[y - \frac{(t^2 - a^2)}{4y}\right] \frac{dy}{y}$$

En comparant avec la formule de la proposition 1.21, pour $n=0$, conclure au résultat :

$$\forall t > a, f(t) = J_0(\sqrt{t^2 - a^2})$$

Exercice 3.25 (★★)

- Déterminer l'image inverse de la fonction $s \mapsto (s) = \exp(-[(s^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}])$. Pour cela, on considérera la dérivée de F , le quotient par s de cette dérivée et on utilisera la relation $J'_0 = J_1$. Pour tenir compte du fait que la fonction $\mathcal{U}(t - a)J_0(\sqrt{t^2 - a^2})$ n'est pas dérivable, on lui retranchera une fonction convenable, de façon à pouvoir appliquer le théorème sur la transformée d'une dérivée.
- Déterminer l'image inverse de $s \mapsto F(s) = [(s^2 - 1)^{-1/2}] \exp(-a[(s^2 - 1)^{1/2}])$. On donnera deux méthodes, l'une d'elles étant analogue à celle de l'exemple 2.24, l'autre s'appuyant sur les résultats de l'exercice 3.16.
- Déduire du résultat précédent l'image inverse de $s \mapsto \exp(-[(s^2 - 1)^{\frac{1}{2}}])$.

Exercice 3.26 (★)

Injectivité de \mathcal{L} Montrer que si f_1 et f_2 sont deux fonctions continues sur $[0, +\infty[$ appartenant à \mathcal{L}_d ont deux transformées de Laplace qui coïncident sur un certain demi-plan de \mathbb{C} , alors, ces deux fonctions sont égales. Dans le cas où les deux fonctions sont seulement dans \mathcal{L}_d , que peut-on dire de cette égalité ?

Exercice 3.27 (★)

- Résoudre le problème de l'exemple 2. 35 par une méthode élémentaire.
- Déterminer, par utilisation de la transformation \mathcal{L} , les fonctions solutions des équations suivantes, obéissant en outre aux conditions initiales précisées :

$$y'' + 2y' + y = \mathcal{U}(t)t^2 \exp(-t), \quad y(0+) = y'(0) = 1$$

$$y'' + y' + y = \mathcal{U}(t)[t^2 \exp(t) + \exp(-\frac{t}{2}) \cos\left[\frac{t\sqrt{3}}{2}\right]], \quad y(0+) = 0, y'(0) = 1$$

$$y^{(4)} - 4y'' + 4y = \mathcal{U}(t)[t^2 \exp(2t) + t^3 \exp(-t)]$$

$$\text{avec } y(0+) = y'(0+) = y''(0+) = y'''(0+) = 1$$

- Rechercher, par des méthodes élémentaires, les solutions des trois problèmes différentiels précédents.

Exercice 3.28 (★)

Trouver, par les moyens élémentaires, la fonction g solution de l'équation différentielle (Cf. Exemple 2.36) :

$$y'' - y = f(t) \quad \text{avec} \quad f(t) = e^t \quad \text{sur} \quad [0, 1] \quad \text{et} \quad f(t) = e^{-t} \quad \text{sur} \quad]2, +\infty[,$$

avec les conditions initiales : $g(0_+) = 1, g'(0_+) = -1$.

Résoudre le même problème lorsque la fonction f est telle que :

$$f(t) = t^2 \exp(t) \quad \text{sur} \quad [0, 1[\quad \text{et} \quad f(t) = t^2 \exp(-t) \quad \text{sur} \quad]1, +\infty[$$

$$g(t) = 1 \quad \text{sur} \quad]1, +\infty[, \quad h(t) = \exp(4t) \quad \text{sur} \quad]1, +\infty[.$$

Exercice 3.29 (★)

Trouver la fonction g solution de l'équation différentielle : $y^{(4)} - y = f(t)$ où f est la fonction définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(t) = e^t, \quad \text{sur} \quad [2n, 2n + 1[\quad \text{et} \quad f(t) = 0 \quad \text{sur} \quad]2n + 1, 2n + 2[,$$

obéissant en outre aux conditions : $g(0_+) = g'(0_+) = g''(0_+) = g'''(0_+) = 0$. On utilisera deux méthodes : en reprenant la résolution de l'exemple 2.37 puis la formule d'inversion, d'autre part, par des moyens élémentaires en procédant de proche en proche.

Exercice 3.30 (★)

Résoudre le système d'équations, avec les conditions initiales : $x(0_+) = y(0_+) = 1$:

$$\begin{cases} x' = 2x - 3y + \mathcal{U}(t)t \exp(4t) \\ y' = y - 2x + \mathcal{U}(t)t^2 \exp(-t) \end{cases}$$

Exercice 3.31 (★)

On définit les fonctions causales f, g, h par :

$$f(t) = g(t) = t \exp(2t), \quad h(t) = 0 \quad \text{sur} \quad [0, 1[, \quad h(t) = \exp t \quad \text{sur} \quad]1, +\infty[$$

Résoudre le système d'équations, les conditions initiales étant $x(0_+) = 1, y(0_+) = z(0_+) = 0$:

$$\begin{cases} x' = x + 3y - 3z + f(t) \\ y' = x + 3y - z + g(t) \\ z' = -2x + 2y + h(t), \end{cases}$$

Exercice 3.32 (★)

Résoudre le système d'équations qui suit, les conditions initiales étant :

$$x(0_+) = y(0_+) = 0, \quad x'(0_+) = 1, \quad y'(0_+) = -1$$

$$\begin{cases} x'' = -y' + 3x + \mathcal{U}(t)t \cos t \\ y'' = 4x' - 3y + \mathcal{U}(t)t \sin t \end{cases}$$

Exercice 3.33 (★★)

a) Résoudre le système suivant d'ordre 1, assorti de conditions initiales données :

$$\begin{cases} ty + z + tz' = \mathcal{U}(t)(t-1)e^t \\ y' - z = \mathcal{U}(t)e^{-t} \end{cases}$$

les conditions initiales étant $x(0+) = y(0+) = y'(0+) = 0$.

b) Résoudre, de même, le système du second ordre, les conditions initiales étant nulles :

$$\begin{cases} y = tz'' + z' + tz \\ z = -ty'' - y' - ty \end{cases}$$

Exercice 3.34 (★★)

La fonction f étant causale et transformable par \mathcal{L} , on considère l'équation différentielle E_1 linéaire du second ordre à coefficients variables dont le coefficient de y'' s'annule au point $t = 0$:

$$(t^2 + 2t)y'' - (t^2 - 4t - 8)y' - 3ty = f(t)$$

On suppose des conditions initiales arbitraires : $y(0+) = a$, $y'(0+) = b$.

a) Déterminer l'équation transformée de E_1 par \mathcal{L} . Montrer que l'équation homogène associée admet une solution particulière du type $s \mapsto s^n$ où n est un entier. En utilisant le changement de fonction inconnue $Z = s^2 Y(s)$, ramener la résolution de l'équation E_2 à celle d'une équation du premier ordre.

b) On suppose que $f(t) = \mathcal{U}(t) \sin t$. Résoudre alors le problème en discutant suivant les valeurs de a et de b .

Exercice 3.35 (★★)

Déterminer la convolution des deux fonctions ; $\frac{e^{bt}t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)}$ et de $\frac{e^{bt}t^{\beta-1}}{\Gamma(\beta-1)}$.

En transformant l'intégrale de convolution précédente par un changement de variable, montrer que l'image inverse de $\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$ est : $\frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{erf}(\sqrt{at})$.

Exercice 3.36

$$(t+b)y'' + (a_1t + b_1)y' + (a_2t + b_2)y = 0$$

a) Transformer l'équation par \mathcal{L} .

b) On suppose : $b = 0$. En désignant les racines de $s^2 + a_1s + a_2 = 0$ par α et β et en posant $(\alpha - \beta)p = b_1\alpha + b_2$ et $(-\alpha + \beta)q = b_1\beta + b_2$, montrer :

$$Y(s) = (s - \alpha)^{p-1} (s - \beta)^{q-1} \left[A + (1 - b_1)y(0) \int_0^s (w - \alpha)^{-p} (w - \beta)^{-q} dw \right]$$

Etudier alors l'ensemble des solutions $Y(s)$ acceptables comme images de Laplace de fonctions dans les cas suivants : $b_1 < 2$, $b_1 = 1$ et $b_1 \geq 2$. Dans ce dernier cas discuter l'existence d'une solution suivant la valeur de $y(0+)$.

c) On suppose que $b \neq 0$. Montrer que, pour qu'il existe des solutions qui soient des transformées de Laplace, il est nécessaire que $b < 0$. Reprendre alors la discussion précédente.

Exercice 3.37 (★★)

Déterminer les fonctions causales transformables par \mathcal{L} , qui sont solutions des équations différentielles suivantes avec retard en vérifiant des conditions initiales quelconques :

$$y'(t) - 2y(t-1) = \mathcal{U}(t)t^3$$

$$y''(t) - y(t-1) = \mathcal{U}(t)t^3$$

Exercice 3.38 (★)

Résoudre l'équation intégral-différentielle suivante où y vérifie $y(0+) = 1$:

$$y'(t) + 2y(t) - \int_0^t y(u) [\cos(t-u) - \exp(t-u)] du = \mathcal{U}(t)t \sin t,$$

Exercice 3.39 (★)

a) Une suite causale $u = (u_n)$ étant donnée, on définit, sous réserve que z soit à l'extérieur d'un certain cercle, la transformée en Z de la suite par la série : $Z(u)(z) = \sum_0^{+\infty} u_n z^{-n}$. Montrer que la transformée en Z de la convolée $u \star v$ de deux suites causales est le produit des deux transformées en Z .

A l'aide de cette notion, trouver la suite causale u telle que :

$$\forall n \geq 0, \quad u_n - 7u_{n-1} + 10u_{n-2} = 16n$$

On déterminera la transformée en Z de la suite causale du second membre et on interprétera le premier membre comme le résultat d'une convolution.

Résoudre également en considérant cette équation comme une équation fonctionnelle aux différences, le second membre étant remplacé par la fonction f , causale définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [n, n+1[, \quad f(t) = n$$

On utilise alors la transformation de Laplace.

b) Résoudre l'équation linéaire aux différences discrètes avec coefficients variables :

$$(n+2)y_{n+2} + (n+1)y_n = 0,$$

les premiers termes étant définis par : $y_0 = 1, y_1 = -1$.

c) Résoudre $(n+1)y_{n+1} + (an+b)y_n = 0$, la condition initiale y_0 étant donnée.

d) Résoudre $(n+2)y_{n+2} + (n-1)y_n = 0$, les deux premiers termes étant donnés.

Exercice 3.40 (★★)

a) Résoudre l'équation différentielle avec deux retards, les conditions initiales étant $y(0+) = y'(0+) = 1$:

$$y(t) + 2y'(t-1) - 3y''(t-2) = \mathcal{U}(t)e^t \sin t,$$

On utilisera des développements en série de la variable se^{-s} .

b) La fonction f étant causale, indéfiniment dérivable et de dérivées appartenant toutes à \mathcal{L}_d et le trinôme $bx^2 + ax + 1$ n'ayant que des racines réelles, résoudre

l'équation : $y(t) + ay'(t-1) + by''(t-2) = \mathcal{U}(t)f(t)$, les conditions initiales étant nulles.

c) Résoudre l'équation intégrale avec retard :

$$y(t) + \mathcal{U}(t) \int_0^t y(u) \sin(t-u-1) du = \mathcal{U}(t) \cos t,$$

Exercice 3.41 (★)

a) Résoudre l'équation : $y(t) - \mathcal{U}(t) \int_0^t y(u)y(t-u) du = \mathcal{U}(t) \frac{\sin(2t)}{2}$. On montrera, malgré les deux solutions qui apparaissent dans l'équation transformée, laquelle est du second degré, qu'il n'y a qu'une seule solution y pour l'équation donnée. Remarquons qu'à l'aide des distributions (Cf. chapitre 5), la même équation aurait deux solutions.

b) Résoudre de même l'équation :

$$\mathcal{U}(t) \int_0^t y(u)y(t-u) du = 2y(t) + \mathcal{U}(t) \frac{a}{\sqrt{\pi t^3}} \left[\exp\left(-\frac{a^2}{t}\right) - \exp\left(-\frac{a^2}{4t}\right) \right]$$

Exercice 3.42 (★★)

Validation de la formule d'inversion dans les exemples 2.27 et 6.14.

Cette utilisation réclame la majoration de $|F(s)| = \left| \frac{\text{ch}(x(s)^{1/2})}{\text{ch}(L(s)^{1/2})} \right|$ avec $x < L$, dans l'exemple 2.27. On suppose que $z \in \Pi_b$ où $b > 0$. Calculer les parties réelles et imaginaires des cosinus hyperboliques qui sont au numérateur et au dénominateur de la fonction F et en déduire les modules à l'aide des fonctions circulaires et hyperboliques des parties réelle et imaginaires. En déduire la majoration : $|F(s)| \leq \frac{\text{ch}(x\sqrt{|s|} \cos(\theta/2))}{\text{sh}(L\sqrt{|s|} \cos(\theta/2))}$ où θ est l'argument de s . Montrer alors que les deux conditions du théorème 1.4 d'inversion sont remplies.

Exercice 3.43

Les fonctions d'erreur et d'erreur complémentaire sont définies par :

$$\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-u^2) du, \quad \text{erf}_c(t) = 1 - \text{erf}(t)$$

a) Montrer que, a étant un réel positif, l'abscisse de convergence de $\text{erf}(at)$ est nulle. Montrer, en utilisant d'abord la commutation de \mathcal{L} et d'une intégrale et en faisant apparaître un carré dans l'exposant de l'intégrale restante que l'image de cette fonction est définie par :

$$F(s) = \frac{1}{s} \exp\left(\frac{s^2}{4a^2}\right) \text{erf}_c\left(\frac{s}{2a}\right)$$

b) Trouver les images de Laplace des fonctions suivantes :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \text{erf}(\sqrt{at}), \quad e^{at} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - be^{b^2 t} \text{erf}_c(b\sqrt{t}) \right], \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\text{erf}_c(\sqrt{at})}{\sqrt{at}}, \quad \frac{e^{at}}{t} \text{erf}(\sqrt{at})$$

c) Déterminer les images de Laplace des fonctions $\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$ et de $\frac{ae^{-a^2/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}$. En déduire l'image de Laplace de la fonction f définie par :

$$f(t) = e^{b^2t+ab} \operatorname{erfc} \left(b\sqrt{t} + \frac{a}{2\sqrt{t}} \right)$$

Exercice 3.44 (★★)

Montrer que la fonction h définie par $h(z) = 1 + \frac{1}{z^\alpha}$ est une transformée de Laplace. Même question pour les fonctions $\frac{1}{1+z^\alpha}$ et $\tan(z^{-\alpha})$ (On pourra se servir du théorème 1.6).

Soit F une transformée de Laplace d'une fonction continue. Montrer que les fonctions $z \mapsto \frac{F(z)}{z+F(z)}$ et $\frac{F(z)}{z-F(z)}$ sont des transformées de Laplace.

Exercice 3.45 (*)

Fonctions de Thomson $z \mapsto \operatorname{ber}(z)$ et $z \mapsto \operatorname{bei}(z)$

Ces fonctions interviennent dans la résolution de problèmes de diffusion de la chaleur. On pose pour $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ber}(x) + i\operatorname{bei}(x) = J_0(x \exp(\frac{3i\pi}{4}))$. En utilisant le développement en série entière de J_0 , déterminer les développements en séries entières des fonctions réelles : $x \mapsto \operatorname{ber}(x)$ et $x \mapsto \operatorname{bei}(x)$. On prolonge ensuite dans tout le champ complexe au moyen de ces séries dont le rayon de convergence reste infini.

De façon plus générale, on pose également : $\operatorname{ber}_\nu(x) + i\operatorname{bei}_\nu(x) = J_\nu(x \exp(\frac{3i\pi}{4}))$, ce qui permet de définir ces fonctions sur \mathbb{C} .

2) Montrer que les abscisses des fonctions $t \mapsto \operatorname{ber}(2\sqrt{t})$ et $t \mapsto \operatorname{bei}(2\sqrt{t})$ sont nulles et que leurs images de Laplace sont respectivement : $\cos(\frac{1}{s})$ et $\sin(\frac{1}{s})$.

Exercice 3.46 (★★)

En appliquant la formule d'inversion et en utilisant un contour convenable, trouver l'image inverse de $(1/s)\operatorname{th}(s/2)$. La somme des résidus se présentant, a priori, sous la forme d'une série divergente, il est possible, en regroupant les termes deux par deux, de donner le résultat comme la somme d'une série trigonométrique.

Exercice 3.47 (★★★)

Soit la fonction F définie dans demi-plan $\Re(s) > 1$ par : $F(s) = \frac{(s^3 - 1)^{-1/3}}{(s^3 + 1)}$.

Dans cette formule, on précise la définition, dans ce demi-plan de la "racine cubique" : $(s^3 - 1)^{1/3} = |s^3 - 1|^{1/3} \exp(\frac{i}{3}(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3))$ où les arguments θ_k des trois facteurs $s - 1$, $s - \exp(\frac{2i\pi}{3})$, $s - \exp(\frac{4i\pi}{3})$ sont tous trois compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$

a) Montrer que F est holomorphe dans ce demi-plan ouvert Π_1 et qu'on peut lui appliquer la formule d'inversion que la formule d'inversion est applicable à cette fonction F . On désigne par f l'image inverse de F . Préciser la formule intégrale

définissant f . Donner les trois premiers termes du développement asymptotique de f au voisinage de $t = 0$

b) Montrer qu'on peut prolonger analytiquement la "racine cubique" précédente dans tout le champ complexe privé d'une coupure γ constituée de trois segments dont l'une des extrémités O est commune, les autres extrémités étant respectivement placées aux points d'affixes 1 , $j = \exp(\frac{2i\pi}{3})$, $j^2 = \exp(\frac{4i\pi}{3})$. On pose alors, cette fonction étant toujours notée $(s^3 - 1)^{1/3}$, $G(s, t) = \frac{e^{st}}{(s^3 + 1)(s^3 - 1)^{1/3}}$.

Calculer les résidus de cette fonction de s en ses trois pôles simples.

c) On considère la courbe fermée constituée d'un arc de cercle C_R , de centre O , situé à gauche de la droite d'intégration Δ dont les extrémités sont des points A et B de cette droite et du segment $[AB]$ lui-même.

D'autre part, on considère un lacet L bordant la coupure, formé de 6 segments de droite, parallèles deux à deux et de trois cercles de centres respectifs les trois points de branchement et de même rayon r , On désigne par Γ le bord du compact limité à l'extérieur par $C_R \cup [AB]$ et à l'intérieur par L . Calculer l'intégrale $\int_{\Gamma} G(s, t) dz$.

Montrer que lorsque $R \rightarrow +\infty$, l'intégrale sur C_R tend vers 0. en déduire la fonction f à l'aide des résidus et de l'intégrale sur le lacet.

d) Exprimer l'intégrale le long du lacet par la somme de trois intégrales et en déduire le comportement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3.48 (★★)

Soit la fonction F définie par : $F(s) = \frac{\sqrt[3]{z}}{[(az)^{5/3}] + 1}$.

En se basant sur des calculs du même type que ceux de l'exemple 2.31, étudier les comportements au voisinage de 0 et lorsque $t \rightarrow +\infty$ de l'image inverse f de Laplace de F .

Exercice 3.49 (★★)

Equations hypergéométriques confluentes

Transformer par \mathcal{L} l'équation $(E_1) : ty'' + (c - t)y' - ay = 0$ en utilisant des conditions initiales arbitraires.

On suppose : $c < 2$. Trouver les solutions de l'équation transformée E_2 qui soient développables en série de la variable s^{-1} et telles que l'image inverse soit équivalente au voisinage de $t = 0$ à t^{1-c} .

On obtient ainsi une solution particulière de E_1 dont on donnera un développement asymptotique au voisinage de $t = 0$.

En modifiant la condition initiale, montrer qu'on peut écrire une autre solution de E_1 sous la forme :

$$\frac{(s-1)^{c-a-1}}{s^{1-a}} \int_s^{+\infty} \frac{(u-1)^{a-c}}{u^a} du$$

En utilisant la variable $v = \frac{u-1}{s-1}$, développer ces fonctions, lorsque $|s| > 1$ en séries de puissances de s^{-1} .

Exercice 3.50 (★★)

Trouver la transformée de Laplace de $\mathcal{U}(t) \exp(-t^2)$ en utilisant la fonction $\operatorname{erfc}\left[\frac{s}{2}\right]$. A l'aide du résultat, montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

$$\operatorname{erfc}\left[\frac{s}{2}\right] \sim \frac{\exp(-s^2/4)}{\pi} \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \Gamma(k-1/2) \left[\frac{2}{s}\right]^{2k+1}$$

Exercice 3.51 (★★)

Trouver l'image de Laplace de

$$\mathcal{U}(t) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\exp(-u)}{\sqrt{t-u}} du$$

En déduire que le développement asymptotique de cette fonction lorsque $t \rightarrow +\infty$ est de la forme :

$$\frac{1}{\pi t} \left[1 + \frac{1}{2t} + \frac{3}{4t^2} + \dots + \frac{1.3.5 \dots (2k-1)}{2^k t^k} + \dots \right]$$

Résoudre la même question pour les fonctions $\mathcal{U}(t)t^\lambda I_\lambda(t)$

Exercice 3.52 (★★★)

1) Soit le polynôme classique de Laguerre défini par $\mathcal{U}(t)L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$, c'est-à-dire le polynôme L_n^α où $\alpha = 0$, au facteur $n!$ près, dans l'exemple 2.21. En utilisant le développement en série entière de e^{-t} , calculer la dérivée d'ordre n du produit $t^n e^{-t}$ et en déduire l'image de Laplace de L_n .

2) On définit, pour ν non entier, la fonction L_ν , sous la réserve $\Re(\nu) > 1$, comme l'image inverse de la fonction : $s \mapsto \Gamma(\nu) \frac{(s-1)^\nu}{s^{\nu+1}}$.

On utilise la formule d'inversion sur les deux demi-droites de l'axe des ordonnées y contenant les points vérifiant $|y| \geq r$, complété par un demi-cercle de centre O de rayon r situé à droite de cet axe des ordonnées, montrer par un passage à la limite lorsque $r \rightarrow 0$, que :

$$L_\nu(t) = \frac{\Gamma(\nu)}{\pi} e^t \int_0^{+\infty} \frac{x^\nu \cos(xt + \nu\pi/2 - (\nu+1) \arctan(1/x))}{(x^2+1)^{(\nu+1)/2}} dx$$

Montrer que, lorsque ν est non entier, on a pour les grandes valeurs de t la formule asymptotique :

$$L_\nu(t) \sim -\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi t^{1+\nu}} e^t (\Gamma(\nu))^2 \left[1 + \frac{(\nu+1)^2}{t} + \frac{(\nu+1)^2(\nu+2)^2}{2!t^2} + \dots \right]$$

Chapitre 4

Transformation de Laplace des distributions

4.1 Définitions, régions d'existence

4.1.1 Remarque préliminaire sur les abscisses de convergence des fonctions

Pour donner, de façon naturelle, une généralisation de la notion d'abscisse de convergence au cas des distributions, on peut, en désignant par f_{*x} la fonction $t \mapsto \exp(-xt)f(t)$, utiliser la propriété suivante :

Proposition 4.1 *Soit une fonction f élément de \mathcal{L}_d . Pour tout réel x , la fonction f_{*x} peut être considérée comme une distribution (a priori, c'est d'ailleurs une mesure). On définit $\zeta_{\mathcal{S}'}(f)$ par :*

$$\zeta_{\mathcal{S}'}(f) = \inf \{x \in \mathbb{R} \mid f_{*x} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})\} \quad (4.1)$$

On a alors les résultats suivants :

- i) $\zeta_{\mathcal{S}'}(f) \leq \zeta_c(f)$.
- ii) Lorsque f est positive, on a l'égalité : $\zeta_{\mathcal{S}'}(f) = \zeta_c(f)$.
- iii) Lorsque, plus généralement, f est telle que, pour tout $x > \zeta_{\mathcal{S}'}(f)$, la fonction f_{*x} est à croissance lente ou la dérivée d'une fonction à croissance lente, l'égalité est encore réalisée.

Démonstration

◇ Preuve de i)

Soit $x > \zeta_c(f)$. Par hypothèse, la fonction F_{*x} définie par $t \mapsto \int_0^t f_{*x}(u) du$ admet une limite à l'infini. Alors on définit une forme linéaire sur \mathcal{S} , en posant, pour tout élément φ de \mathcal{S} :

$$\langle f_{*x}, \varphi \rangle = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f_{*x}(u) \varphi(u) du$$

Cette limite existe bien puisque, par une intégration par parties, on a :

$$\int_0^A f_{*x}(u)\varphi(u) du = \varphi(A)F_{*x}(A) - \int_0^A F_{*x}(u)\varphi'(u) du,$$

et que les deux termes du second membre ont des limites, la dernière intégrale étant même absolument convergente. On en déduit d'ailleurs :

$$\langle f_{*x}, \varphi \rangle = - \int_0^{+\infty} F_{*x}(u)\varphi'(u) du$$

Visiblement, cette forme est linéaire sur \mathcal{S} . De plus, comme F_{*x} est une fonction bornée, elle définit une distribution tempérée dont l'action sur $\varphi \in \mathcal{S}$ est définie par l'intégrale du produit ; on en déduit donc que la forme linéaire ainsi définie n'est autre que la dérivée de cette distribution. C'est donc un élément de l'espace \mathcal{S}' .

Il en résulte que $x > \zeta_{\mathcal{S}'}(f)$, d'où la conclusion : $\zeta_{\mathcal{S}'}(f) \leq \zeta_c(f)$. \diamond

Preuve de ii)

\diamond On suppose la fonction f positive et on choisit $x > \zeta_{\mathcal{S}'}(f)$, ce qui implique que $f_{*x} \in \mathcal{S}'$. Nous montrons d'abord qu'en fait cette fonction est à croissance lente. ce qui permettra de prouver que l'action de la distribution $[f_{*x}] \in \mathcal{S}'$ sur φ est définie par l'intégrale du produit de cette fonction par φ . D'après la caractérisation des formes linéaires continues pour la topologie de \mathcal{S} , laquelle est engendrée par la famille des semi-normes $\eta_{k,p}$, il existe (Cf. exercice 7.10) un réel $\alpha > 0$ et deux entiers naturels k et p tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \quad \eta_{k,p}(\varphi) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{m \leq p} \left| (1+t^2)^k (\varphi)^{(m)}(t) \right| \leq \alpha \Rightarrow \left| \langle [f_{*x}], \varphi \rangle \right| \leq 1$$

Soit alors une fonction ψ de \mathcal{D} , égale à 1 sur $[-1, 1]$, telle que $|\psi(t)| \leq 1$. On construit la suite $\left(\varphi_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathcal{D} définie par : $\varphi_n(t) = (1+t^2)^{-k} \psi(t/n)$. Grâce à la formule de Leibniz, on voit que le calcul d'une dérivée qui figure dans la semi-norme $\eta_{k,p}(\varphi_n)$ fait apparaître des termes du type $\alpha_j (1+t^2)^{-j} \varphi^{(m-j)}(t/n)$, où $j \in [[0, m]]$.

Les puissances de $(1+t^2)$ étant majorées par 1, on en déduit la majoration :

$$\eta_{k,p}(\varphi_n) \leq C \sup_{m \leq p} (n)^{-m} \|\psi^{(m)}\|_\infty$$

Comme la constante C ne dépend que de k et p , il en résulte qu'il existe une constante K telle que la suite $(K\varphi_n)$ vérifie : $\eta_{k,p}(K\varphi_n) \leq \alpha$ d'où l'on déduit $\left| \langle [f_{*x}], K\varphi_n \rangle \right| \leq 1$. Ce dernier crochet de distribution étant une intégrale et la suite φ_n étant convergente partout vers 1, on peut en déduire par le théorème de Fatou :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^k} f_{*x}(t) dt < \infty$$

Cette existence d'intégrale prouve que f_{*x} est une fonction à croissance lente, ce qui implique la propriété :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle [f_{*x}], \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{*x}(t) \varphi(t) dt$$

Pour terminer, choisissons x' tel que $\zeta_{\mathcal{S}'}(f) < x' < x$ et la fonction ψ définie par $\psi(t) = \beta(t) \exp[(x' - x)t]$ où β est une fonction indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} , égale à 1 sur un voisinage de $[0, +\infty]$ et nulle au voisinage de $-\infty$. Puisque $x' - x < 0$, cette fonction ψ appartient à \mathcal{S} . Il en résulte, en tenant compte de la causalité de f :

$$\langle [f_{*x'}], \psi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x't) f(t) \beta(t) \exp[(x' - x)t] dt = \int_0^{+\infty} f_{*x}(t) dt$$

Il est ainsi prouvé que $x > \zeta_a(f)$ ou encore $\zeta_a(f) \leq \zeta_{\mathcal{S}'}(f)$. L'égalité des deux abscisses est donc prouvée dans le cas d'une fonction f positive. \diamond

Preuve de iii)

\diamond Ce qui précède montre que la propriété d'égalité des abscisses est atteinte lorsque, pour tout $x > \zeta_{\mathcal{S}'}(f)$, la fonction f_{*x} est à croissance lente. Supposons maintenant, x vérifiant toujours $x > \zeta_{\mathcal{S}'}(f)$, que la fonction f_{*x} soit la dérivée de g_x qui est une fonction à croissance lente. Alors, d'après ce qui précède, l'action de la distribution $[g_x]$ sur les fonctions de \mathcal{S} est définie par l'intégrale du produit. On a ainsi :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle [f_{*x}], \varphi \rangle = \langle [g_x]', \varphi \rangle = -\langle [g_x], \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} g_x(t) \varphi'(t) dt$$

On peut procéder à une intégration par parties dans cette dernière intégrale, ce qui donne :

$$-\int_0^A g_x(t) \varphi'(t) dt = g_x(0) \varphi(0) - g_x(A) \varphi(A) + \int_0^A f_{*x}(t) \varphi(t) dt$$

Lorsque $A \rightarrow +\infty$, le produit de $g_x(A) \varphi(A)$ tend vers 0 puisque g_x est à croissance lente et φ à décroissance rapide. Il en résulte l'existence de la limite :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f_{*x}(t) \varphi(t) dt \text{ existe}$$

En choisissant x' et une fonction ψ , comme à la fin du raisonnement précédent, on arrive à la conclusion :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f_{*x}(t) dt \text{ existe}$$

Il est ainsi prouvé que $x > \zeta_c(f)$ et, finalement, on a l'égalité des abscisses. \diamond

Remarque 4.1 *D'après un théorème sur la structure des distributions tempérées (Cf. [21]), toute distribution tempérée T s'écrit comme une dérivée d'un ordre*

suffisamment élevé d'une fonction continue à croissance lente. On confirmera plus loin qu'une distribution causale et tempérée possède une abscisse négative ou nulle. On pourrait penser que la dernière propriété (iii) est valable pour toute fonction f . Mais, dans les intégrations par parties successives qu'on est amené à faire, il n'est plus possible, en général de s'appuyer sur les existences de limites des termes du type $g_x(A)\varphi(A)$.

On peut, à cet égard, considérer l'exemple suivant :

Soit la fonction $t \mapsto h(t) = \cos(\exp t)$ qui est bornée, représentant donc une distribution tempérée. Sa dérivée d'ordre 2 est $-e^{2t} \cos(e^t) - e^t \sin(e^t)$. Ce dernier terme est la dérivée de h , on en déduit par conséquent que la fonction définie par : $f : t \mapsto \exp(2t) \cos(\exp t)$ représente une distribution tempérée, d'où il résulte que $\zeta_{S'}(f) \leq 0$. Or, le changement de variable $u = \exp t$ fournit :

$$\int_0^A \exp(-tx) f(t) dt = \int_1^{\exp A} \frac{\cos u}{u^{x-1}} du$$

Cette dernière intégrale admet une limite sous la condition nécessaire et suffisante $x - 1 > 0$, ce qui implique : $\zeta_c(f) = 1!$

4.1.2 Distribution causale et abscisse de convergence

Définition 4.1 Une distribution sur \mathbb{R} est dite «causale» si son support est contenu dans $[0, +\infty]$. L'espace de ces distributions est noté $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$.

Bien que la proposition précédente ne soit pas entièrement satisfaisante, on va généraliser l'abscisse de convergence pour une telle distribution en nous intéressant à l'appartenance à l'espace \mathcal{S}' de l'analogue de f_{*x} , pour ce qui concerne T :

Proposition 4.2 Soit T une distribution causale. Pour tout réel x , on pose : $T_{*x} = \exp(-xt)T_t$ où T_t indique que l'action de T se fait sur les fonctions test de la variable t . Alors, l'ensemble, noté $\lambda(T)$, des réels x tels que $T_{*x} \in \mathcal{S}'$ est, soit vide, soit une demi-droite limitée à gauche privée ou non de son origine, soit \mathbb{R} tout entier.

Définition 4.2 La borne inférieure $\sigma(T)$ de cet ensemble est appelée l'abscisse de convergence de Laplace de T .

Il résulte de cette définition et de la proposition précédente 4.1 qu'en général l'abscisse de convergence d'une fonction f de \mathcal{L}_d coïncide avec l'abscisse de convergence de la distribution $[f]$ associée. Les cas d'exception sont précisés à partir de la remarque 4.1.

Démonstration

◇ Supposons que $\lambda(T)$ ne soit ni vide ni \mathbb{R} tout entier.

Montrons que si $x > x_0$ où $x_0 \in \lambda(T)$, alors $x \in \lambda(T)$, ce qui établira la propriété. Comme dans la démonstration de la propriété analogue pour les fonctions (Cf. chapitre 1), l'essentiel résulte de l'écriture :

$$\exp(-xt)T = \exp(-(x - x_0)t)[\exp(-x_0)tT,$$

mais la différence tient au fait que le produit de la fonction $t \mapsto \exp(-(x - x_0)t)$ par une fonction $\varphi \in \mathcal{S}$, bien qu'étant de classe \mathcal{C}^∞ , n'est pas en général une fonction de \mathcal{S} .

Nous faisons alors intervenir une fonction α_ε de classe \mathcal{C}^∞ , de support $[-\varepsilon, +\infty[$ et égale à 1 sur un voisinage de $[0, +\infty[$ (pour l'existence de telles fonctions, voir l'exercice 7.1). La distribution T étant causale, on peut écrire

$$\langle T_{*x}, \varphi \rangle = \langle \alpha_\varepsilon T_{*x}, \varphi \rangle = \langle T_{*x_0}, \alpha_\varepsilon \exp(-(x - x_0)t) \varphi \rangle$$

Dans cette écriture, le second membre est bien défini puisque $\alpha_\varepsilon \exp(-(x - x_0)t) \varphi$ est bien dans \mathcal{S} .

L'égalité précédente définit T_{*x_0} comme une forme linéaire sur \mathcal{S} .

On pourrait montrer que cette forme linéaire est bien continue sur \mathcal{S} . Il est plus rapide de constater que cette forme linéaire T_{*x} est le produit d'une fonction bornée de classe \mathcal{C}^∞ par une distribution tempérée T_{*x_0} .

Donc, si on pose $\sigma(T) = \inf \lambda(T)$, cet ensemble $\lambda(T)$ est la demi-droite $(\sigma(T), +\infty[$ privée ou non de son origine.

Remarquons que la considération d'une telle fonction α_ε permet de définir un prolongement de la distribution T_{*x} . C'en est un, effectivement, car on vérifie qu'il est indépendant du choix de ε ; ce sera utilisé dans le paragraphe 4.2 qui suit.

4.1.3 Premiers exemples

- Si T est une distribution à support compact, le produit par $\exp(-xt)$ reste, quel que soit x , dans \mathcal{S}' . Il en résulte que l'abscisse de convergence, dans ce cas, est $-\infty$. En particulier, les combinaisons linéaires finies de mesures de Dirac ont une abscisse de convergence égale à $-\infty$.

- Un demi-peigne causal de Dirac $T = \sum_{n_0}^{+\infty} \delta_n$, où n_0 est un entier positif, est une distribution tempérée; son abscisse vérifie donc $\sigma(T) \leq 0$. Mais le produit $\exp(at)T$, avec $a > 0$, n'est plus tempéré. En effet, si cette distribution était tempérée, son action sur la fonction ψ de \mathcal{S} définie par $\alpha_\varepsilon \exp(-at/2)$ aurait pour image la somme $\sum_0^{+\infty} \psi(n) = \sum_0^{+\infty} \exp(an/2)$ qui est une série divergente. Il en résulte donc $\sigma(T) = 0$. Le raisonnement reste le même pour un demi-peigne à croissance lente.

- Si T est causale et tempérée, comme par exemple $\text{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t)}{t}\right)$, l'abscisse de convergence est, a priori, négative ou nulle.

4.2 Transformée de Laplace d'une distribution

Par analogie avec le cas des fonctions, on va définir la transformée de T comme une fonction de la variable complexe s définie pour $\Re(s) > \sigma(T)$. Lorsque la fonction f est dans \mathcal{L}_d , on peut écrire son image de Laplace sous la forme

s suivante : $\mathcal{L}(f)(s) = \langle [f(t)], \exp(-st) \rangle$. Ceci invite à définir la transformée de T par l'action de T sur la fonction : $t \mapsto e^{-st}$.

4.2.1 Cas d'une distribution causale et tempérée

Définition 4.3 Soit T une distribution causale et tempérée, donc d'abscisse de convergence négative ou nulle. On désigne par α_ϵ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , de support $[-\epsilon, +\infty[$ et égale à 1 sur $[0, +\infty[$. Alors, la transformée de Laplace de T est la fonction $\mathcal{L}(T)$ de la variable complexe s définie par :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(T)(s) = \langle T_t, \alpha_\epsilon(t) \exp(-st) \rangle$$

Justification

◇ Lorsque $\Re(s) > 0$, la fonction $t \mapsto \alpha_\epsilon(t) \exp(-st)$ est à décroissance rapide au voisinage de $+\infty$ et elle est nulle au voisinage de $-\infty$, c'est donc un élément de \mathcal{S} . Puisque, par hypothèse, $T \in \mathcal{S}'$, le second membre de la définition précédente est bien défini. Il reste à prouver que ce second membre est indépendant du choix de la fonction α_ϵ .

Soient donc deux fonctions α_ϵ et $\alpha_{\epsilon'}$, avec par exemple $\epsilon' \leq \epsilon$. La différence des deux seconds membres associés de la définition précédente s'écrit

$$\langle T_t, [\alpha_\epsilon(t) - \alpha_{\epsilon'}(t)] \exp(-st) \rangle$$

Or, cette différence qui figure dans la fonction test est nulle sur l'intervalle $[-\epsilon, +\infty[$. Par conséquent, T étant causale, le second membre précédent est nul, ce qui prouve l'indépendance annoncée. ◇

4.2.2 Cas d'une distribution d'abscisse non égale à $+\infty$

Fixons le nombre s tel que $\sigma(T) < \Re(s)$ et choisissons arbitrairement un réel x , qu'on appellera un **réel auxiliaire** vérifiant $\sigma(T) < x < \Re(s)$. La distribution $\exp(-xt)T$ étant dans \mathcal{S}' et la fonction $\alpha_\epsilon(t) \exp(-(s-x)t)$ étant dans \mathcal{S} , l'expression qui suit est bien définie :

$$\langle \exp(-xt)T_t, \alpha_\epsilon(t) \exp(-(s-x)t) \rangle$$

D'où la définition, sous la réserve qu'il soit prouvé que ce symbole est indépendant du choix de x et de celui de α_ϵ .

Définition 4.4 Soit T une distribution causale d'abscisse de convergence $\sigma(T)$ différente de $+\infty$. La transformée de Laplace $\mathcal{L}(T)$ est définie par l'intermédiaire d'un réel auxiliaire x et d'une fonction auxiliaire α_ϵ au moyen de :

$$\sigma(T) < x < \Re(s) \Rightarrow \mathcal{L}(T)(s) = \langle \exp(-xt)T_t, \alpha_\epsilon(t) \exp(-(s-x)t) \rangle$$

Justification

◇ L'indépendance vis-à-vis du choix de α_ϵ a déjà été vue.

Pour l'autre indépendance, soit x' vérifiant aussi $\sigma(T) < x' < \Re s$. La distribution $T_{*x'}$ est le produit $\exp[(x - x')t]T_{*x}$, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} \langle T_{*x'}, \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(s - x')t) \rangle &= \langle T_{*x}, \alpha_\varepsilon(t) \exp[(x - x')t] \exp(-(s - x')t) \rangle \\ &= \langle T_{*x}, \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(s - x)t) \rangle \end{aligned}$$

Cette égalité implique l'indépendance annoncée vis-à-vis du choix de x . \diamond

4.2.3 Calculs de quelques transformées de Laplace

• La distribution δ_a , où $a \geq 0$, est tempérée. Il en résulte qu'on a :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}(\delta_a)(s) = \langle \delta_a, \alpha_\varepsilon(t) \exp(-st) \rangle = \exp(-as)$$

En particulier, la transformée de la distribution de Dirac δ est la fonction $s \mapsto 1$.

• La transformée de Laplace du demi-peigne de Dirac $\sum_0^{+\infty} \delta_n$, lequel est une distribution tempérée, est définie pour $\Re(s) > 0$; c'est la fonction $s \mapsto \sum_0^{+\infty} \exp(-sn)$. Cette série géométrique est bien convergente et on a :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \text{ avec } \Re(s) > 0, \quad \mathcal{L}\left(\sum_0^{+\infty} \delta_n\right)(s) = \frac{1}{1 - \exp(-s)}$$

• Soit le demi-peigne généralisé $T = \sum_0^{+\infty} \exp(n) \delta_n$ qui n'est pas dans \mathcal{S}' . On constate que $\exp(-t)T \in \mathcal{S}'$ alors que, si $a < 1$, $\exp(-at)T \notin \mathcal{S}'$. En effet, ce produit $\exp(-at)T$ est encore un peigne de coefficients $\exp(n(1 - a))$ et, en utilisant la fonction $\alpha_\varepsilon \exp\left(\frac{t(a - 1)}{2}\right)$ qui est dans \mathcal{S} , on aboutit à une contradiction. Il en résulte que $\sigma(T) = 1$. La définition nous donne alors :

$$\begin{aligned} 1 < x < \Re(s) \Rightarrow \mathcal{L}(T)(s) &= \left\langle \sum_0^{+\infty} \exp(n(1 - x)) \delta_n, \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(s - x)t) \right\rangle \\ &= \sum_0^{+\infty} \exp(n(1 - s)) \end{aligned}$$

On en déduit que la transformée de T est la fonction translatée de la précédente, à savoir :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \text{ avec } \Re(s) > 1, \quad \mathcal{L}(T)(s) = \frac{1}{1 - \exp(-(s - 1))}$$

Remarquons cependant que ce résultat de translation résulte (voir plus loin, proposition 4.4) du fait que T est ici le produit du demi-peigne de Dirac par $\exp t$.

4.3 Propriété d'holomorphic d'une transformée de Laplace

Comme pour les fonctions, la transformée de Laplace d'une distribution est une fonction holomorphe dans son demi-plan ouvert d'existence et les dérivées feront apparaître les transformées de Laplace des distributions $(-t)^n T$. Ceci nous conduit à étudier d'abord les abscisses de convergence de ces distributions :

Proposition 4.3 *Pour tout entier naturel n , les abscisses de convergence des distributions $(-t)^n T$ vérifient $\sigma((-t)^n T) = \sigma(T)$*

Démonstration

◇ Soit $x > \sigma(T)$. Alors $\exp(-xt)T \in \mathcal{S}'$ d'où il résulte qu'aussi $(-t)^n T \in \mathcal{S}'$. En effet, par définition :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad \langle (-t)^n T, \varphi \rangle = \langle T, (-t)^n \varphi(t) \rangle$$

Outre cette définition, il est facile de voir (c'est d'ailleurs classique puisque $t \mapsto (-t)^n$ est polynômial) que si $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, alors il en est de même pour la suite $((-t)^n \varphi_k)_k$. On a donc l'inégalité $\sigma((-t)^n T) \leq \sigma(T)$.

Pour l'inégalité inverse, on utilise, pour $n = 1$ par exemple, le fait que si U est tempérée, il existe une distribution elle-même tempérée V telle que $U = tV$ (Cf. [[5,a]], [[21]]). Par ailleurs si une autre distribution V_1 vérifie $U = tV_1$, il en résulte $t(V_1 - V) = 0$, d'où l'on déduit $V_1 = V + C\delta$.

De proche en proche (ou en utilisant la caractérisation de $t^n(V - V_1) = 0$), on voit que l'hypothèse selon laquelle $(-t)^n \exp(-xt)T$ est tempérée implique que $\exp(-xt)T$ l'est aussi. On obtient ainsi l'inégalité inverse. ◇

Théorème 4.1 *Soit F la transformée de Laplace de la distribution T dont l'abscisse de convergence est notée $\sigma(T)$. Alors, cette fonction F est holomorphe dans le demi-plan ouvert $\Pi_{\sigma(T)}$. De plus, les dérivées complexes successives de F dans cet ouvert sont obtenues par dérivation sous le signe distribution par rapport à la variable complexe s . On a ainsi :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \sigma(T) \Rightarrow \frac{d^n}{ds^n} F(s) = \langle (-t)^n \exp(-xt)T, \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(s-x)t) \rangle$$

Autrement dit :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \sigma(T) \Rightarrow \frac{d^n}{ds^n} [\mathcal{L}(T)](s) = \mathcal{L}((-t)^n T)(s) \quad (4.2)$$

Démonstration

◇ Soient un nombre complexe s_0 appartenant à $\Pi_{\sigma(T)}$ et s un complexe vérifiant : $|s - s_0| < [\Re s_0 - \sigma(T)]/2$. Un réel x tel que : $0 < x - \sigma(T) < [\Re s_0 - \sigma(T)]/2$ peut alors jouer le rôle de réel auxiliaire pour les définitions de $F(s_0)$ et de $F(s)$

et aussi, grâce à la proposition 4.3, pour celle de $(-t)^n T$. Ainsi, nous devons montrer que :

$$\lim_{s \rightarrow s_0} \left[\frac{F(s) - F(s_0)}{s - s_0} - \left\langle (-t) \exp(-xt) T, \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(s_0 - x)t) \right\rangle \right] = 0$$

On pose, pour simplifier, $s_0 - x = z_0$, $s - x = z$, $z - z_0 = h$ et on considère la famille de fonctions $(\psi_h)_h$ définie par :

$$\psi_h(t) = \frac{e^{[-(z_0+h)t]} - e^{[-z_0 t]} + hte^{[-z_0 t]}}{h} = e^{[-z_0 t]} \left[\frac{e^{(-ht)} - 1 + ht}{h} \right]$$

Avec ces nouvelles notations, il faut prouver :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \exp(-xt) T, \alpha_\varepsilon(t) \psi_h(t) \right\rangle = 0$$

Les fonctions ψ_h sont dans \mathcal{S} et, par la formule de Leibniz, la dérivée d'ordre p du produit $\alpha_\varepsilon \psi_h$ est égale sur un voisinage de $[0, +\infty[$ à $(\psi_h)^{(p)}$. Tout revient donc à démontrer que $\varphi_h \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. Par un développement en série entière, on a :

$$\gamma_h = \frac{\exp(-ht) - 1 + ht}{h} = \frac{1}{h} \sum_2^{+\infty} \frac{(-ht)^n}{n!}$$

On obtient donc, pour les dérivées successives les majorations suivantes :

$$\begin{aligned} |\gamma_h(t)| &\leq (|h|/2)t^2 \exp(|ht|) \\ \left| \frac{d}{dt} \gamma_h(t) \right| &\leq |ht| \exp(|ht|) \\ \left| \frac{d^m}{dt^m} \gamma_h(t) \right| &\leq |h|^{m-1} \exp(|ht|), \text{ pour } m > 1 \end{aligned}$$

On en déduit, en premier lieu, pour les fonctions $\psi_h = \exp(-z_0 t) \gamma_h(t)$, la majoration :

$$(1 + t^2)^k |\psi_h(t)| \leq (|h|/2)(1 + t^2)^{k+1} \exp(|h| - \Re e z_0)t$$

Comme par hypothèse, $\Re e(z) > 0$ et que $|h| < (1/2)\Re e(z_0)$, on voit que, le produit de la puissance par l'exponentielle étant borné uniformément, cette suite tend uniformément vers 0 avec h .

Dans la dérivée d'ordre m de ψ_h , la formule de Leibniz indique que $\exp(-tz_0)$ reste en facteur d'une combinaison linéaire de dérivées de γ_h . Les majorations qui précèdent fournissent donc, sous la condition précédente vérifiée par h , pour les semi-normes de ces dérivées dans l'espace \mathcal{S} , les inégalités :

$$\begin{aligned} \eta_{k,p}(\psi_h) &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{k \leq p} (1 + t^2)^k |(\psi_h)^{(m)}(t)| \\ &\leq C_{k,p} |h| \sup [(1 + t^2)^{p+1} \exp(|h| - \Re e(z_0)t)] \leq K_{p,k} |h| \end{aligned}$$

Il est ainsi prouvé que la famille ψ_h converge vers 0 dans \mathcal{S} . Par conséquent la fonction F est dérivable en tout point s_0 du demi-plan ouvert $\Pi_\sigma(T)$ et la dérivée complexe est bien fournie par la dérivation par rapport à s sous le signe distribution qui définit $\mathcal{L}(T)$. \diamond

4.4 Propriétés de la transformation de Laplace

4.4.1 Produit de T par une exponentielle

Soit T une distribution dont l'abscisse n'est pas $+\infty$. On considère $U = \exp(ct)T$ où $c \in \mathbb{C}$. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(-xt)U \in \mathcal{S}'$ s'écrit $x - \Re(c) > \sigma(T)$. On en déduit d'abord : $\sigma(U) = \sigma(T) + \Re(c)$. De plus, soit s un complexe tel que $\Re(s) > \sigma(T) + \Re(c)$. Ayant choisi un réel auxiliaire x tel que $\sigma(T) + \Re(c) < x < \Re(s)$, la définition de la transformée de U s'écrit :

$$\mathcal{L}(U)(s) = \langle \exp(-xt)U, \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(s-x)t) \rangle$$

La condition sur x montre qu'il s'agit d'un réel auxiliaire pour la définition de $\mathcal{L}(T)(s-c)$. On a ainsi :

$$\mathcal{L}(T)(s-c) = \langle \exp(-xt)T, \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(s-c-x)t) \rangle$$

En comparant ces deux égalités par l'utilisation de la définition du produit de T par $\exp(ct)$ on peut conclure :

Proposition 4.4 *L'abscisse de convergence de la distribution T n'étant pas $+\infty$, l'abscisse de la distribution $\exp(ct)T$ est $\sigma(T) + \Re c$ et la transformée de Laplace de $\exp(ct)T$ est la translatée d'indice c de celle de T , c'est-à-dire :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \sigma(T) + \Re(c) \Rightarrow \mathcal{L}(\exp(ct)T)(s) = \mathcal{L}(T)(s-c) \quad (4.3)$$

4.4.2 Transformation d'une translatée de T

Soit a un réel positif, la translatée T_a est toujours causale. Comme l'espace \mathcal{S}' est stable par translation, l'abscisse de convergence ne change pas et, en prenant $\sigma(T) < x < \Re(s)$, la définition de $\mathcal{L}(T_a)$ nous donne, en utilisant une fonction auxiliaire qui est la translatée d'indice a de α_ε :

$$\Re(s) > \sigma(T) \Rightarrow \mathcal{L}(T_a)(s) = \langle \exp(-xt)T_a, \alpha_\varepsilon(t-a) \exp(-(s-x)t) \rangle$$

Pour utiliser la définition de la translatée d'une distribution, remplaçons e^{-xt} par $\exp(-ax) \exp(-x(t-a))$. On obtient :

$$\begin{aligned} \Re(s) > \sigma(T) \Rightarrow \mathcal{L}(T_a)(s) &= \langle e^{-xa} (e^{-xt}T)_a, \alpha_\varepsilon(t-a) \exp(-(s-x)t) \rangle \\ &= \langle e^{-xa} (e^{-xt}T), \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(s-x)(t+a)) \rangle \end{aligned}$$

En simplifiant, il reste :

$$\begin{aligned} \Re(s) > \sigma(T) \Rightarrow \mathcal{L}(T_a)(s) &= \langle (\exp(-xt)T), \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(s-x)t) \exp(-as) \rangle \\ &= \exp(-as) \mathcal{L}(T)(s) \end{aligned}$$

Proposition 4.5 *Pour tout $a > 0$, l'abscisse de convergence de la translatée T_a est égale à celle de T et on a :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \sigma(T) \Rightarrow \mathcal{L}(T_a)(s) = \exp(-as) \mathcal{L}(T)(s) \quad (4.4)$$

4.4.3 Transformation d'une dilatée de T

Soit k un réel strictement positif. La dilatée d'indice k de T , notée ${}_kT$ est encore causale puisque, par définition :

$$\left\langle {}_kT_t, \varphi(t) \right\rangle = \left(\frac{1}{k} \right) \left\langle T, \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right\rangle$$

D'après cette formule, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle \exp(-xt) {}_kT, \varphi \right\rangle &= \left\langle {}_kT, \exp(-xt)\varphi \right\rangle = \left(\frac{1}{k} \right) \left\langle T, \exp\left(\frac{-xt}{k}\right) \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{k} \right) \left\langle \exp\left(\frac{-xt}{k}\right) T, \varphi\left(\frac{t}{k}\right) \right\rangle \end{aligned}$$

On en déduit que la condition nécessaire et suffisante pour que $\exp(-xt) {}_kT \in \mathcal{S}'$ s'écrit de manière équivalente : $T_{*(x/k)} \in \mathcal{S}'$, autrement dit :

$$\sigma({}_kT) = k\sigma(T)$$

Supposons alors $\Re e(s) > k\sigma(T)$ et servons nous d'un réel auxiliaire x pour la définition de $\mathcal{L}(T)$. Alors $y = kx$ est un réel auxiliaire pour la définition de $\mathcal{L}({}_kT)$ et nous avons (en omettant dans les formules la fonction α_ϵ dont les dilatées sont encore égales à 1 sur un voisinage de $[0, +\infty[$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}({}_kT)(s) &= \left\langle \exp(-yt) {}_k(T), \exp(-(s-y)t) \right\rangle = \left\langle {}_k(\exp(-xt)T), \exp(-(s-y)t) \right\rangle \\ &= \left(\frac{1}{k} \right) \left\langle \exp(-xt)T, \exp\left(-\left(s - kx\right)\frac{t}{k}\right) \right\rangle = \left(\frac{1}{k} \right) \left\langle \exp(-xt)T, \exp\left(-\left(\frac{s}{k} - x\right)t\right) \right\rangle \end{aligned}$$

Dans la dernière expression, on reconnaît la définition de $\left(\frac{1}{k}\right)\mathcal{L}(T)\left(\frac{s}{k}\right)$, par conséquent :

Proposition 4.6 *Pour tout $k > 0$, l'abscisse de convergence de la dilatée ${}_kT$ vérifie $\sigma({}_k(T)) = k\sigma(T)$ et on a :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re e(s) > k\sigma(T) \Rightarrow \mathcal{L}\left({}_kT\right)(s) = \left(\frac{1}{k}\right)\mathcal{L}(T)\left(\frac{s}{k}\right) \quad (4.5)$$

Dans la section 4.10, nous verrons le cas d'un coefficient de dilatation a complexe.

4.4.4 Transformation d'une dérivée de T

Relation entre les transformées de T et de sa dérivée

Soit T d'abscisse non égale à $+\infty$. La dérivée T' est toujours causale. Par ailleurs, on sait que la dérivée d'une distribution tempérée reste tempérée, d'où il résulte que , si $x > \sigma(T)$, alors $\exp(-xt)T' - x \exp(-xt)T \in \mathcal{S}'$. On en déduit, par

addition de deux éléments de S' , que $\exp(-xt)T' \in S'$. On a ainsi prouvé que $\sigma(T') \leq \sigma(T)$.

On ne peut envisager une réciproque. En effet, la distribution régulière $T = [\mathcal{U}]$, où \mathcal{U} est la fonction échelon-unité, a son abscisse nulle ; par contre, sa dérivée qui est la distribution de Dirac δ a son abscisse égale à $-\infty$.

Dans la recherche d'une relation entre les transformées de Laplace de T et de T' , on suppose donc $\Re(s) > \sigma(T)$ et on prend un réel auxiliaire x qui vérifie l'inégalité : $\Re(s) > x > \sigma(T)$. La définition de $\mathcal{L}(T')$ nous donne alors :

$$\mathcal{L}(T')(s) = \left\langle \exp(-xt)T', \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(s-x)t) \right\rangle$$

On remplace $\exp(-xt)T'$ par la somme $(\exp(-xt)T)' + x \exp(-xt)T$. Examinons l'action du premier terme qui est une dérivée. En remarquant que la contribution de la dérivée de α_ε , à l'intérieur de la dérivation du produit, est nulle, on obtient :

$$\left\langle (e^{(-xt)T})', \alpha_\varepsilon(t)e^{-(s-x)t} \right\rangle = - \left\langle e^{(-xt)T}, \alpha_\varepsilon(t)[-(s-x)]e^{-(s-x)t} \right\rangle$$

En ajoutant l'action de la distribution $xe^{(-xt)T}$, on obtient le résultat :

$$\mathcal{L}(T')(s) = - \left\langle e^{(-xt)T}, \alpha_\varepsilon(t)(-s)e^{-(s-x)t} \right\rangle = s\mathcal{L}(T)(s)$$

Proposition 4.7 *Si T est une distribution d'abscisse non égale à $+\infty$, la dérivée T' a une abscisse vérifiant $\sigma(T') \leq \sigma(T)$ et on a :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \sigma(T) \Rightarrow \mathcal{L}(T')(s) = s\mathcal{L}(T)(s) \quad (4.6)$$

Comparaison avec le cas des fonctions

Dans le cas des fonctions, nous avons vu (Cf. § 6.2, chapitre 1), d'une part que les abscisses de convergence de f et de la dérivée f' (au sens des fonctions) ne pouvaient être comparées dans le cas général et, d'autre part, que la relation entre leurs transformées fait intervenir la limite $f(0+)$. Pour montrer qu'il n'y a pas de contradiction avec le résultat précédent, considérons pour cela deux exemples.

- Soit la fonction f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t) \sin(\exp t) \exp t$, dont la dérivée coïncide sur $[0, +\infty[$ avec $f'(t) = \mathcal{U}(t) \exp(2t) \cos(\exp t) + f(t)$. On a vu que $\zeta_c(f) = 0$ et comme la fonction $t \mapsto \mathcal{U}(t) \exp(2t) \cos(\exp t)$ a une abscisse égale à 1, on en déduit $\zeta_c(f') = 1$ alors que $\zeta_c(f) = 0$.

En revanche, les distributions $[f]$ et $[f]' = [f']$ ont la même abscisse $\sigma([f]) = \sigma([f]') = 0$.

Par ailleurs, du point de vue des fonctions, on a :

$$\Re(s) > 1 \Rightarrow \mathcal{L}(f')(s) = -f(0+) + s\mathcal{L}(f)(s) = s\mathcal{L}(f)(s)$$

Du point de vue des distributions, on a :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}([f]')(s) = s\mathcal{L}([f])(s)$$

Les formules sont les mêmes mais la condition de validité est améliorée pour ce qui est des distributions, cette deuxième relation étant simplement, sans contrainte d'existence d'intégrales, l'expression d'une dérivation de distribution.

• Soit g définie par $g(t) = \mathcal{U}(t) \cos t$. D'une part, on a : $\mathcal{L}(g') = -1 + s\mathcal{L}(g)$ et, d'autre part, pour les distributions associées : $\mathcal{L}([g]') = -1 + s\mathcal{L}([g])$. La différence est aisément explicable puisque $[g]' = [g'] + \delta$ et que $\mathcal{L}(\delta) = 1$.

4.5 Convolution et transformation de Laplace

On sait que la s -convolution (convolution au sens des supports) définit une opération donnant à l'espace \mathcal{D}_+ une structure d'algèbre. Mais, pour étendre la propriété de la transformation de Laplace de la convolution des fonctions, il nous faut d'abord examiner la stabilité de la convolution sur l'espace \mathcal{S}' . Dans ce but, il est utile d'étudier le produit tensoriel de distributions tempérées.

4.5.1 Préliminaire sur le produit tensoriel de distributions tempérées

Soient U et V des distributions tempérées. On sait que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \langle U \otimes V, \varphi \rangle = \langle U_x, \langle V_y, \varphi(x, y) \rangle \rangle$$

Il s'agit de prouver que cette définition s'étend aux fonctions $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ et que, de plus, le produit tensoriel définit une distribution tempérée.

◇ Pour cela, on sait qu'il suffit de montrer que ce produit tensoriel est continu sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ muni de la famille de semi-normes $(\eta_{k,p})$ définissant la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ (Cf. exercice 7.10). On pose :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = \langle V_y, \varphi(x, y) \rangle$$

Rappelons alors que, si $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et que les dérivations par rapport à x se font sous le crochet de distribution. La distribution U étant tempérée, il existe $\alpha > 0$ et des entiers naturels k et p (Cf. exercice 7.10) tels que, les semi-normes dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ étant notées $\eta_{k,p}^1$:

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad |\langle U, \psi \rangle| \leq \alpha \eta_{k,p}^1(\psi) = \alpha \sup_{q \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + x^2)^k |\psi^{(q)}(x)|$$

Il nous faut maintenant majorer les semi-normes en question en fonction de celles de φ . Pour commencer, V étant tempérée, il existe $\beta > 0$ et des entiers k' et p' tels que :

$$\forall \theta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \quad |\langle V_y, \theta(y) \rangle| \leq \beta \sup_{m \leq p'} \sup_{y \in \mathbb{R}} (1 + y^2)^{k'} |\theta^{(m)}(y)|$$

En particulier, cette majoration est valable pour les fonctions θ , dépendant du paramètre x , qui sont du type : $y \mapsto \partial_x^q \varphi(x, y)$, ce qui signifie que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall q \in \mathbb{N},$$

$$|\psi^{(q)}(x)| = |\langle V_y, \partial_x^q \varphi(x, y) \rangle| \leq \beta \sup_{m \leq p'} \sup_{y \in \mathbb{R}} (1 + y^2)^{k'} |\partial_{(x,y)}^{(q,m)} \varphi(x, y)|$$

En substituant ces inégalités dans la première majoration, on obtient :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad |\langle U, \psi \rangle| \leq \alpha \beta \sup_{q \leq p} \sup_{x \in \mathbb{R}} (1 + x^2)^k \sup_{m \leq p'} \sup_{y \in \mathbb{R}} (1 + y^2)^{k'} |\partial_{(x,y)}^{(q,m)} \varphi(y)|$$

Posons alors : $\max(k, k') = n$ et $p + p' = r$. L'inégalité précédente peut s'écrire :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad |\langle U, \psi \rangle| \leq \alpha \beta \sup_{q+m \leq r} \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} (1 + x^2 + y^2)^n |\partial_{(x,y)}^{(q,m)} \varphi(y)|$$

Finalement, on a prouvé l'existence de $\gamma > 0$ et de deux entiers n et r tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad |\langle U \otimes V, \varphi \rangle| \leq \gamma \eta_{n,r}(\varphi)$$

Ceci prouve la continuité requise. \diamond

On peut donc énoncer :

Proposition 4.8 *Le produit tensoriel de deux distributions tempérées est une distribution tempérée.*

4.5.2 Conséquence sur le produit de convolution de deux distributions causales et tempérées

Proposition 4.9 *Le produit de convolution de deux distributions causales et tempérées est aussi causale et tempérée.*

Démonstration

\diamond Soient deux distributions causales U et V . On sait que la convolée $U \star V$ existe et que c'est une distribution causale. Comme exemple de fonction auxiliaire dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^2)$ qui vaut 1 sur un voisinage de $\text{supp}(U) \times \text{supp}(V)$, on peut choisir le produit $(x, y) \mapsto \alpha_\varepsilon(x) \alpha_\varepsilon(y)$ où cette fonction α_ε est du type de celles utilisées précédemment.

La définition de la convolée s'écrit alors :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle U \star V, \varphi \rangle = \langle U \otimes V, \alpha_\varepsilon(x) \alpha_\varepsilon(y) \varphi(x + y) \rangle$$

Nous allons montrer que $U \star V$ est continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour la topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

La démonstration précédente a mis en évidence la continuité du produit tensoriel, à savoir l'existence de $\gamma > 0$ et de deux entiers n et r tels que :

$$\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2), \quad |\langle U \otimes V, \phi \rangle| \leq \gamma \eta_{n,r}(\phi)$$

Appliquons cette majoration à la fonction $(x, y) \mapsto \phi(x, y) = \alpha_\varepsilon(x) \alpha_\varepsilon(y) \varphi(x + y)$. Comme les dérivées de α_ε sont nulles sur un voisinage du support de U ou de celui de V , la formule de Leibniz montre qu'une dérivée d'indice (m, p) quelconque de ϕ se réduit à la dérivée de même ordre de $(x, y) \mapsto \varphi(x + y)$ qui est elle-même égale à $\varphi^{(m+p)}(x + y)$. On en déduit :

$$\eta_{n,r}(\phi) = \sup_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} \sup_{m+p \leq r} (1 + x^2 + y^2)^n |\varphi^{(m+p)}(x + y)|$$

Or, sur les supports, on a $x \geq 0$ et $y \geq 0$ d'où $(1 + x^2 + y^2) \leq 1 + (x + y)^2$. On peut donc exprimer la semi-norme précédente à l'aide de la semi-norme de mêmes indices dans l'espace (\mathbb{R}) , à savoir :

$$\eta_{n,r}(\phi) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \sup_{q \leq r} (1 + t^2)^n |\varphi^{(q)}(t)| = \eta_{n,r}^1(\varphi)$$

Pour résumer, il est prouvé l'existence de $\gamma > 0$ et de deux entiers n et r tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad |\langle U \star V, \varphi \rangle| \leq \gamma \eta_{n,r}^1(\varphi)$$

Cette propriété est la preuve annoncée. On en déduit que $U \star V \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. \diamond

Corollaire 4.1 *L'espace $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ est une algèbre de convolution.*

\diamond La preuve est immédiate ; on voit d'ailleurs que cette algèbre est une sous-algèbre de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. \diamond

4.5.3 Transformation de Laplace d'une convolée de distributions

Nous établissons le théorème analogue à celui concernant la transformée d'une convolée de deux fonctions.

Théorème 4.2 *Soient deux distributions U et V , toutes deux d'abscisses de convergence non égales à $+\infty$. Alors :*

- (i) *L'abscisse de convergence de $U \star V$ vérifie : $\sigma(U \star V) \leq \max(\sigma(U), \sigma(V))$.*
- (ii) *La transformée de Laplace de $U \star V$ vérifie :*

$$\Re(s) \geq \max(\sigma(U), \sigma(V)) \Rightarrow \mathcal{L}(U \star V)(s) = \mathcal{L}(U)(s) \mathcal{L}(V)(s) \quad (4.7)$$

Démonstration

\diamond preuve de (i)

Soit x un réel vérifiant $x > \max(\sigma(U), \sigma(V))$. Il sert de réel auxiliaire aussi bien pour la définition de $\mathcal{L}(U)$ que celle de $\mathcal{L}(V)$. Comme U_{*x} et V_{*x} sont dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, la proposition précédente affirme que $U_{*x} \star V_{*x} \in \mathcal{S}'$. Il suffit à présent de prouver la propriété : $U_{*x} \star V_{*x} = (U \star V)_{*x}$, ce qui établira $x \geq \sigma(U \star V)$ d'où, finalement, l'inégalité annoncée. Vérifions cette relation (en omettant les fonctions α_ε) ; on a :

$$\begin{aligned} \langle U_{*x} \star V_{*x}, \varphi \rangle &= \left\langle \exp(-xt)U_t \otimes \exp(-xu)U_u, \varphi(t+u) \right\rangle \\ &= \left\langle U_t \otimes U_u, \exp(-xt) \exp(-xu) \varphi(t+u) \right\rangle \\ &= \left\langle U_t \otimes U_u, \exp(-x(t+u)) \varphi(t+u) \right\rangle \\ &= \left\langle (U \star V)_t, \exp(-xt) \varphi(t) \right\rangle = \left\langle \exp(-xt)(U \star V)_t, \varphi(t) \right\rangle \end{aligned}$$

On a donc bien : $U_{*x} \star V_{*x} = (U \star V)_{*x}$. \diamond

\diamond Preuve de (ii)

Soit s vérifiant $\Re(s) > \max(\sigma(U), \sigma(V))$. On choisit un réel x qui vérifie l'inégalité : $\Re(s) > x > \max(\sigma(U), \sigma(V))$ (réel auxiliaire). Alors, d'après les définitions et, notamment la relation précédente, on a successivement :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U \star V)(s) &= \left\langle (U \star V)_{*x}, e^{-(s-x)t} \right\rangle = \left\langle U_{*x} \star V_{*x}, e^{-(s-x)t} \right\rangle \\ &= \left\langle U_{*x} \otimes V_{*x}, \alpha_\varepsilon(t) \alpha_\varepsilon(u) e^{-(s-x)(t+u)} \right\rangle \\ &= \left\langle e^{-xt} U_t \otimes e^{-xu} V_u, \alpha_\varepsilon(t) \alpha_\varepsilon(u) e^{-(s-x)(t+u)} \right\rangle \\ &= \left\langle e^{-xt} U_t, \alpha_\varepsilon(t) \left\langle e^{-xu} V_u, \alpha_\varepsilon(u) e^{-(s-x)(t+u)} \right\rangle \right\rangle \end{aligned}$$

En écrivant ensuite : $\exp(-(s-x)(t+u)) = \exp(-(s-x)t) \exp(-(s-x)u)$, cette expression devient un produit, à savoir :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U \star V)(s) &= \left\langle e^{-xt} U_t, \alpha_\varepsilon(t) e^{-(s-x)t} \left\langle e^{-xu} V_u, \alpha_\varepsilon(u) e^{-(s-x)u} \right\rangle \right\rangle \\ &= \left\langle e^{-xt} U_t, \alpha_\varepsilon(t) e^{-(s-x)t} \right\rangle \left\langle e^{-xu} V_u, \alpha_\varepsilon(u) e^{-(s-x)u} \right\rangle \\ &= \mathcal{L}(U)(s) \mathcal{L}(V)(s) \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration. \diamond

4.5.4 Application à la transformation d'une primitive

On sait que toutes les primitives d'une distribution tempérée T sont tempérées (Cf. [[5,a]], [[21]], [[27]]). Lorsque T est causale, on montre que l'une de ses primitives est causale. On l'obtient facilement par le produit de convolution $T \star [\mathcal{U}]$. En effet, d'une part cette distribution, d'après ce qui précède, est causale et tempérée, d'autre part la dérivée de cette convolée s'écrit :

$$(T \star [\mathcal{U}])' = T \star ([\mathcal{U}]') = T \star \delta = T$$

On peut ainsi appliquer le théorème précédent, ce qui nous donne :

Corollaire 4.2 Soit une distribution causale T d'abscisse non égale à $+\infty$. Alors, la primitive causale et tempérée de T , notée $T^{[-1]}$, est $T \star [\mathcal{U}]$ et nous avons :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > \max(0, \sigma(T)) \Rightarrow \mathcal{L}\left(T^{[-1]}\right)(s) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(T)(s) \quad [4.8]$$

4.6 Comportement à l'infini d'une transformée de Laplace

Remarquons d'abord que les transformées de Laplace des distributions ne tendent pas nécessairement vers 0 lorsque s tend vers l'infini dans son demi-plan d'existence. Ainsi, la transformée de δ est la fonction $s \mapsto 1$. Par ailleurs les combinaisons linéaires de dérivées de δ donnent des polynômes de la variable s , autrement dit, des fonctions à croissance lente. On remarque aussi que si on translate à droite toutes ces dérivées, on obtiendra un polynôme exponentiel, les exponentielles y intervenant étant d'exposants négatifs. On va montrer que, de façon générale, une transformée de Laplace de distributions est majorée par un polynôme ou un polynôme exponentiel du type précédent.

Proposition 4.10 *Soit F l'image de Laplace d'une distribution T d'abscisse $\sigma(T)$. Alors :*

- (i) *Il existe $p \in \mathbb{N}$, un réel $b \geq \sigma(T)$ et une constante M tels que :*

$$\forall s \in \Pi_b, \quad |s^{-p} \mathcal{L}(T)(s)| \leq M$$

- (ii) *Si le support de la distribution T est inclus dans l'intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, la majoration précédente s'améliore en :*

$$\exists b, p, M, \text{ tel que : } \forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > b \Rightarrow \{|s^{-p} \mathcal{L}(T)(s)| e^{(a\Re(s))} \leq M \quad (4.9)$$

Démonstration

◇ Il suffit de prouver (i). En effet, si le support de T est dans $[a, +\infty[$, une translation d'indice $-a$ sur la distribution T amènera le facteur $\exp(as)$ dans la transformée, d'où le résultat à partir de (i). Dans la définition de $\mathcal{L}(T)$, on sait qu'on utilise une distribution T_{*x} qui est tempérée. Or, on sait caractériser la continuité sur l'espace \mathcal{S} d'une telle distribution. Il existe un réel $C > 0$ et deux entiers k et p tels que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{S}, \quad |\langle T_{*x}, \varphi \rangle| \leq C \eta_{k,p}(\varphi)$$

Soient $b' > \max(0, \sigma(T))$ et x vérifiant $\max(0, \sigma(T)) < x < b'$ et posons $b = b' + 1$. En utilisant la fonction qui figure dans la définition de $\mathcal{L}(T)$, le réel x précédent servant d'auxiliaire, on obtient pour $s \in \Pi_b$:

$$|\mathcal{L}(T)(s)| \leq C \sup_{t \in \mathbb{R}_+} \sup_{m \leq p} (1 + t^2)^k \left| \frac{d^m}{dt^m} \left[\alpha_\varepsilon(t) \exp(-t(s - x)) \right] \right|$$

Dans les dérivations successives, la fonction α_ε disparaît sur le support de T . D'autre part, comme $|s - x| > \Re(s) - x > 1$, on obtient :

$$|\mathcal{L}(T)(s)| \leq C \sup_{t \in \mathbb{R}_+} (1 + t^2)^k \exp(-t(\Re(s) - x)) |s - x|^p$$

De plus, puisque $\Re(s) - x > b - x$ et puisque $(1 + t^2)^k \exp(-t(b - x))$ est majoré par K sur \mathbb{R}_+ , on en déduit :

$$|\mathcal{L}(T)(s)| \leq CK|s|^p \left| 1 - \frac{x}{s} \right|^p$$

Finalement :

$$\left| 1 - \frac{x}{s} \right| \leq 1 + \frac{|x|}{|\Re(s)|} \leq 1 + \frac{x}{b} \leq 2$$

On en déduit l'existence de M tel que :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > b \Rightarrow |\mathcal{L}(T)(s)| \leq M|s|^p \quad \diamond$$

Remarque 4.2 *On va constater, avec le paragraphe suivant qui étudie l'inversibilité de la transformation de Laplace, que cette propriété de comportement adjointe à celle de l'holomorphic caractérise les transformées de Laplace.*

4.7 Inversion de la transformation de Laplace des distributions

4.7.1 Théorème d'inversion de la transformation de Laplace

On procède, en passant par l'intermédiaire de la transformation de Fourier, comme dans le cas des fonctions. La transformation de Fourier étant inversible dans l'espace des distributions tempérées, on va en déduire des procédés d'inversion pour la transformation de Laplace. La proposition qui suit résume cette situation :

Théorème 4.3 • (i) *Soit une distribution causale T d'abscisse non égale à $+\infty$. Alors :*

$$\forall s = a + ib, \quad a > \sigma(T) \Rightarrow \mathcal{L}(T)(a + ib) = \mathcal{F}(T_{*a})\left(\frac{b}{2\pi}\right)$$

- (ii) *(Propriété d'injectivité de la transformation de Laplace) Soient deux distributions T et U d'abscisses non égales à $+\infty$. Si l'on suppose : $\exists x_0 > \max(\sigma(T), \sigma(U))$ tel que :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(T)(x_0 + iy) = \mathcal{L}(U)(x_0 + iy),$$

alors $T = U$

- (iii) *Soit une fonction $z \mapsto H(z)$ holomorphe dans un certain demi-plan ouvert Π_a . On suppose qu'il existe $b \geq a$, un entier k et une constante C tels que :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \forall x \leq b, \quad |H(x + iy)| \leq C(1 + y^2)^{k/2}$$

(Autrement dit, $y \mapsto H(x + iy)$ est uniformément à croissance lente dans Π_b). Alors, la fonction H est la transformée de Laplace d'une distribution causale qui est la dérivée d'ordre $k + 2$ d'une certaine fonction causale.

Démonstration

◇ Preuve de (i)

Remarquons d'abord qu'on peut définir la valeur au point $b/(2\pi)$ de cette transformée de Fourier puisque l'égalité considérée est une égalité de fonctions. En écrivant $s = a + 2i\pi\lambda$ et en supposant $a > \sigma(T)$, la définition de $\mathcal{L}(T)(s)$ à l'aide d'un réel auxiliaire x , vérifiant $a > x > \sigma(T)$, nous donne :

$$\mathcal{L}(T)(a + 2i\pi\lambda) = \langle (T_{*x})_t, \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(a-x)t) \exp(-2i\pi\lambda t) \rangle$$

Désignons par f la fonction définie par $f(\lambda) = \mathcal{L}(T)(a + 2i\pi\lambda)$. La transformée de Laplace étant holomorphe, cette fonction f est de classe \mathcal{C}^∞ . Considérée comme distribution, on veut démontrer qu'elle est égale à $\mathcal{F}(T_{*a})$ (transformée de Fourier d'une distribution tempérée). On a, en effet, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle [f], \varphi \rangle = \left\langle \left[\langle (T_{*x})_t, \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(a-x)t) \exp(-2i\pi\lambda t) \rangle, \varphi(\lambda) \right] \right\rangle$$

En faisant intervenir une fonction auxiliaire β appartenant à $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ et valant 1 sur un voisinage du support K de φ , cette expression peut être interprétée comme l'action de la fonction φ considérée comme distribution appartenant à $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$ (puisque φ est à support compact) sur la fonction f puisque celle-ci est dans $\mathcal{E}(\mathbb{R})$, cette action étant définie de façon classique par :

$$\langle [f], \varphi \rangle = \langle [\varphi], \beta f \rangle = \left\langle [\varphi]_\lambda, \beta(\lambda) \langle (T_{*x})_t, \alpha_\varepsilon(t) \exp(-(a-x)t) \exp(-2i\pi\lambda t) \rangle \right\rangle$$

On reconnaît, dans cette distribution répétée, l'action, sur une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, du produit tensoriel $[\varphi] \otimes T_{*x}$ dont le support est inclus dans $K \times [0, +\infty[$. En effet, on peut considérer que la fonction auxiliaire de cette action est $\beta(\lambda)\alpha_\varepsilon(t)$, fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ égale à 1 sur un voisinage du support précédent. Ainsi :

$$\langle [f], \varphi \rangle = \langle [\varphi]_\lambda \otimes (T_{*x})_t, \beta(\lambda)\alpha_\varepsilon(t) \exp(-(a-x)t) \exp(-2i\pi\lambda t) \rangle$$

La définition du produit par la fonction $t \mapsto \exp(-(a-x)t)$ qui est de classe \mathcal{C}^∞ et l'utilisation de l'échange de l'ordre des variables dans le produit tensoriel donnent ensuite :

$$\begin{aligned} \langle [f], \varphi \rangle &= \left\langle [\varphi]_\lambda \otimes e^{-(a-x)t} (T_{*x})_t, \beta(\lambda)\alpha_\varepsilon(t) e^{-2i\pi\lambda t} \right\rangle \\ &= \left\langle e^{-(a-x)t} (T_{*x}), [\varphi]_\lambda, \beta(\lambda)\alpha_\varepsilon(t) e^{-2i\pi\lambda t} \right\rangle \\ &= \left\langle (T_{*a}), \alpha_\varepsilon(t) \left\langle [\varphi]_\lambda, e^{-2i\pi\lambda t} \right\rangle \right\rangle \end{aligned}$$

Or, la distribution définie par $[\varphi]$ s'exprime par une intégrale dans laquelle on reconnaît la transformée de Fourier d'une fonction :

$$\langle [\varphi]_\lambda, e^{-2i\pi\lambda t} \rangle = \int_{-\infty}^{-\infty} \varphi(\lambda) e^{-2i\pi\lambda t} d\lambda = \widehat{\varphi}(\lambda)$$

Il reste finalement, par la définition de l'action d'une distribution à support dans $[0, +\infty[$ et la définition de la transformation de Fourier dans \mathcal{S}' :

$$\langle [f], \varphi \rangle = \langle (T_{*a}), \widehat{\varphi}(\lambda) \rangle = \langle \mathcal{F}(T_{*a}), \varphi \rangle$$

Ceci étant vrai pour toute φ dans \mathcal{D} , on obtient : $[f] = \mathcal{F}(T_{*a})$. \diamond

\diamond Preuve de (ii)

Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(T)(x_0 + iy) = \mathcal{L}(U)(x_0 + iy)$$

On en déduit $\mathcal{F}(T_{*x}) = \mathcal{F}(U_{*x})$, d'où, par l'injectivité de \mathcal{F} , l'égalité $T_{*x} = U_{*x}$ et finalement $T = U$. \diamond

\diamond Preuve de (iii)

Pour $x \leq b$, la fonction G définie par $z \mapsto G(z) = H(z)/z^k$ est holomorphe dans $\Pi_{\max(0,a)}$ et bornée dans un certain demi-plan Π'_b . La fonction $z \mapsto K(z) = G(z)/z^2$ répond donc aux hypothèses du théorème d'inversion 1.4 (section 1.10). La fonction K est donc la transformée de Laplace d'une fonction f causale et continue dont l'abscisse de convergence vérifie $\zeta_a(f) \leq \max(0, a)$. La dérivée, au sens des distributions bien entendu, d'ordre $k+2$, a pour transformée de Laplace dans $\Pi_{\max(0,a)}$ la fonction $z^{k+2}K(z)$ autrement dit la fonction H . \diamond

Rappelons que la fonction f est déterminée par une intégrale dans le champ complexe (Cf. théorème 1.4).

4.7.2 Applications du théorème précédent

Convergence dans l'espace des originaux

Proposition 4.11 a) Soit une suite (T_n) de distributions causales. On suppose qu'il existe un réel a et une distribution causale T tels que, pour tout $x > a$, il y ait convergence, dans \mathcal{S}' , de la suite $e^{-xt}T_n$, vers $e^{-xt}T$. Alors, la suite (T_n) converge vers la distribution T dont l'abscisse vérifie $\sigma(T) \leq a$ et l'image de Laplace de T_n converge pour $\Re(s) > a$ vers la transformée de Laplace de T .

b) Soit une suite (S_n) de distributions causales. On suppose qu'il existe un réel a tel que, pour tout $x > a$, il y ait convergence de la suite $e^{-xt} \sum_0^N S_n$ dans l'espace \mathcal{S}' . Alors, la série de terme général S_n converge dans \mathcal{D}'_+ et sa somme S vérifie $:\mathcal{L}(S)(s) = \sum_0^{+\infty} \mathcal{L}(S_n)(s)$ pour tout s vérifiant $\Re(s) > a$.

Preuve de a)

\diamond Puisque $\forall x > a$, on a $e^{-xt}T_n \in \mathcal{S}'$, la distribution T_n est transformable par \mathcal{L} et l'abscisse de convergence vérifie $\sigma(T) \leq a$. Par ailleurs, d'après le théorème 4.3 (i), cette transformée est définie par $\mathcal{L}(T_n)(x + iy) = \mathcal{F}(\exp(-xt)T_n)(\frac{y}{2\pi})$, cette transformée de Fourier étant d'ailleurs une fonction de classe \mathcal{C}^∞ . Nous avons la même propriété en remplaçant T_n par T . En utilisant l'hypothèse de convergence donnée dans l'énoncé, on en déduit par continuité de la transformation de Fourier que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\exp(-xt)T_n)(\frac{y}{2\pi}) = \mathcal{F}(\exp(-xt)T)(\frac{y}{2\pi})$$

Il en résulte :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(T_n)(x + iy) = \mathcal{L}(T)(x + iy)$$

Ceci étant valable quel que soit $x > a$, la propriété est démontrée. \diamond

Preuve de b)

\diamond Désignons par T_x et $T_{x'}$ les limites de $e^{-xt} \sum_0^N S_n$ et de $e^{-x't} \sum_0^N S_n$. On pose $S_x = e^{xt} T_x$ et $S'_x = e^{x't} T_{x'}$. Il est facile de prouver que $S_x = S_{x'}$. En effet, en multipliant la suite $e^{-xt} \sum_0^N S_n$ par e^{xt} , on obtient la convergence dans \mathcal{D}'_+ de $\sum_0^N S_n$ vers $S_{x'}$. En utilisant l'autre suite, on prouve la convergence dans \mathcal{D}'_+ de $\sum_0^N S_n$ vers S_x . On en déduit l'égalité annoncée et il en résulte la convergence dans \mathcal{D}'_+ de la série $\sum_0^{+\infty} S_n$. On est ainsi ramené à la situation précédente avec $T_n = \sum_0^n S_k$, ce qui donne le résultat. \diamond

Exemple 4.1

Un peigne causal est défini par $\sum_0^{+\infty} a_n \delta_{(n)}$. On suppose que la suite (a_n) est à croissance lente, ce qui veut dire qu'il existe un entier k et une constante K tels que $\forall n, |a_n| \leq Kn^k$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{S}$, la série $\sum_0^{+\infty} a_n \varphi(n)$ est convergente, ce qui signifie que la série donnée converge dans \mathcal{S}' . En effet, pour n assez grand, $|\varphi(n)|n^{k+2}$ est borné et le terme général de la série précédente est majoré par $K'n^{-2}$. La proposition précédente s'applique avec $x = 0$ et on retrouve les justifications du calcul des images de Laplace de ces peignes pour les exemples 4.2.3 et ceux du chapitre 5 (§5.1).

Convergence dans l'espace des images

Si on suppose qu'une suite de fonctions holomorphes converge uniformément dans un demi-plan où chacune d'entre elles peut être considérée comme une image de Laplace, la formule d'inversion va nous montrer que la limite des originaux est égale à l'original de la limite. De façon précise :

Proposition 4.12 *Soit une suite (H_n) de fonctions holomorphes dans un demi-plan Π_a . On suppose qu'il existe $b \geq a$ tel que pour chacune d'entre-elles, il existe un entier k et une constante C vérifiant :*

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \leq b, \quad |H_n(x + iy)| \leq C(1 + y^2)^{k/2}$$

Si la suite (H_n) converge uniformément sur tout compact de Π_a , alors l'image inverse de Laplace de la fonction $\lim H_n$ est égale à la limite des distributions images inverses des fonctions H_n .

Il y a de nombreuses applications de cette proposition. En particulier, lorsque la limite est une constante ou un polynôme de la variable s , on met en évidence des suites de distributions qui convergent vers $C\delta$ ou vers des combinaisons linéaires de dérivées de δ (Cf Exercices 7.24 et 7.25).

Exemple 4.2

On cherche la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$ de $\mathcal{U}(t) \frac{\sin(nt)}{t}$, on calcule l'image de cette dernière. Par une intégration, on trouve la fonction $s \mapsto \arctan\left(\frac{n}{s}\right)$ où $\Re(s) > 0$. En passant par l'intermédiaire de $\arctan(s/n)$ et l'expression logarithmique de cette fonction dans Π_0 , on prouve que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan\left(\frac{n}{s}\right) = \frac{\pi}{2}$ uniformément sur tout compact de Π_0 .

A l'aide de la proposition précédente, on en déduit que :

$$n \rightarrow +\infty \Rightarrow \mathcal{U}(t) \frac{\sin(nt)}{t} \xrightarrow{\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})} \frac{\pi}{2} \delta$$

Donnons un autre exemple concernant une suite de peigne :

Exemple 4.3

Soit la suite (T_n) où $T_n = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \delta'_{2nk}$. La transformée de Laplace de cette dérivée de peigne se calcule par la somme d'une série géométrique. On trouve (Cf. Tableau T_2 du chapitre 5) : $\mathcal{L}(T_n)(s) = s \cos\left(\exp\left(-\frac{s}{n}\right)\right)$.

Cette suite d'images converge vers s , la convergence étant uniforme sur tout compact de Π_0 . En effet, sur le compact K choisi, les parties réelles et imaginaires x et y de $\exp(-s/n)$ vérifient :

$$\exp[-a/n] \cos(c/n) \leq x \leq \exp[-b/n] \quad \text{et} \quad |y| \leq \exp[-b/n]$$

En utilisant la formule : $|\cos(\exp(-\frac{s}{n})) - 1|^2 = (\cos x \cosh y - 1)^2 + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y$ et les inégalités vérifiées pour n assez grand :

$$\cos(\exp(-\frac{b}{n})) - 1 \leq \cos x \cosh y - 1 \leq \cos\left[\exp(-\frac{a}{n}) \cos(\frac{c}{n})\right] \operatorname{ch}(\exp[-\frac{b}{n}]) - 1$$

$$|\sin x \operatorname{sh} y| \leq \sin(\exp(-\frac{b}{n})) \operatorname{sh}(\exp(-\frac{b}{n})),$$

on en déduit la convergence uniforme sur K de $\left(\exp(-\frac{s}{n})\right)$ vers 1. Comme $|s|$ est borné sur K , on obtient la convergence uniforme annoncée de $\mathcal{L}(T_n)(s)$ vers s .

La proposition précédente s'applique et on a :

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})} \delta'$$

Image du produit d'une distribution causale par une fonction de \mathcal{S}

Pour étendre la propriété de la transformée du produit banal de deux fonctions (Cf. théorème 1.7), nous considérons la distribution produit de la distribution T par la fonction f appartenant à \mathcal{S} . La distribution fT est toujours causale et,

sachant que le produit par une fonction de \mathcal{S} d'un élément de \mathcal{S}' est encore dans \mathcal{S}' , on en déduit que, si $x > \sigma(T)$, la distribution fT_{*x} est tempérée, autrement dit : $\sigma(fT) \leq \sigma(T)$. En utilisant la première partie du théorème précédent, on obtient :

$$\mathcal{L}(fT)(a + ib) = \mathcal{F}(fT_{*a})\left(\frac{b}{2\pi}\right)$$

Or (Cf. [[5,a]], [[19]], [[21,a]]), la transformée de Fourier du produit d'une fonction de \mathcal{S} par une distribution de \mathcal{S}' est le produit de convolution des transformées. On obtient ainsi :

Proposition 4.13 *Le produit d'une fonction f à décroissance rapide par une distribution T causale d'abscisse non égale à $+\infty$ a une abscisse vérifiant $\sigma(fT) \leq \sigma(T)$ et sa transformée de Laplace vérifie :*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \Re(s) > \sigma(T) \Rightarrow \mathcal{L}(fT)(a + ib) = \left[\mathcal{F}(T_{*a} \star \hat{f}) \right] \left(\frac{b}{2\pi} \right) \quad (4.10)$$

Un exemple, ou plutôt une vérification est proposée dans l'exercice 7. 26.

4.8 Distributions parties finies

Commençons par rappeler les définitions des distributions $Pf(\mathcal{U}(t)t^\alpha)$.

4.8.1 Partie finie d'une puissance de la variable

Pour $\alpha \leq -1$, la fonction puissance t^α n'est pas localement sommable. Des distributions dites "parties finies" de ces puissances vont permettre de prolonger les propriétés de ces fonctions, notamment en ce qui concerne les produits par des puissances entières et les dérivations. Sur ces premiers exemples de parties finies; on détaille une des démarches possibles pour expliciter leur définition et les manipuler. On commence par le cas où la singularité est en $a = 0$.

Cas où l'exposant est un entier $-n$ avec $n \geq 1$

Pour $n > 0$, entier, l'intégrale $J_\varepsilon = \int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(t)t^{-n} dt$, où φ est un élément de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, n'admet pas, en général, de limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Si $T_{n-1}(t)$ désigne le polynôme de Taylor de degré $n - 1$ à l'origine de la fonction φ et si A majore le support de φ , on peut écrire J_ε sous la forme :

$$J_\varepsilon = \int_\varepsilon^A [\varphi(t) - T_{n-1}(t)]t^{-n} dt + \int_\varepsilon^A T_{n-1}(t)t^{-n} dt$$

La première intégrale porte sur une fonction prolongeable par continuité en $t = 0$, elle admet donc une limite. La deuxième intégrale est une somme d'intégrales de valeurs $\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \left[\frac{t^{k-n+1}}{k-n+1} \right]_\varepsilon^A$ lorsque $k \neq n - 1$ et $\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \left[\ln t \right]_\varepsilon^A$ lorsque $k = n - 1$.

En quelque sorte, les valeurs de ces derniers termes pour la borne inférieure ε

sont “responsables” de la divergence de J_ε et leur somme représente ce qui peut être appelé partie infinie de l’intégrale J_ε . Pour simplifier cette partie infinie, on peut l’écrire sous la forme $-\mathcal{I}_\varepsilon(T_{n-1}(\varphi)t^{-n})$, à savoir, au signe près, la valeur en ε de la primitive sans terme constant de la fonction $T_{n-1}(\varphi)t^{-n}$.

En retranchant cette partie infinie, on obtient la définition d’une forme linéaire sur \mathcal{D} dont on voit facilement que c’est une distribution (Cf. exercice 7.9) :

Définition 4.5 La distribution notée $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-n})$ est la distribution dont l’action sur $\varphi \in \mathcal{D}$ est définie par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(t)t^{-n} dt + \sum_{k=0}^{k=n-2} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \left[\frac{\varepsilon^{k-n+1}}{k-n+1} \right] + \left[\frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \ln(\varepsilon) \right] \right]$$

Plus simplement, elle s’exprime par :

$$\langle \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-n}), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(t)t^{-n} dt + \mathcal{I}_\varepsilon(T_{n-1}(\varphi)t^{-n}) \right]$$

Dans cette expression, le premier terme est dit “terme intégral” et le deuxième, opposé de la “partie infinie”, est dit “terme résiduel”.

Pour des détails concernant ces parties finies, voir [[11]], [[14]], [17]].

Cas où l’exposant α est réel ou complexe, non entier

On suppose $-n-1 < \Re(\alpha) < -n$, avec toujours n entier tel que $n \geq 1$. La démarche précédente s’applique encore. La différence réside dans le fait qu’il n’y a plus de logarithme qui intervient dans la partie infinie :

Définition 4.6 La distribution notée $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha)$, où $-n-1 < \Re(\alpha) < -n$, est la distribution dont l’action sur $\varphi \in \mathcal{D}$ est définie par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(t)t^\alpha dt + \mathcal{I}_\varepsilon(T_{n-1}(\varphi)t^\alpha) \right]$$

De façon plus explicite :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(t)t^\alpha dt + \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \left[\frac{\varepsilon^{k+\alpha+1}}{k+\alpha+1} \right] \right]$$

Cas d’une singularité $a > 0$, l’exposant étant entier

Dans ce cas, on distingue deux parties finies (partie finie à gauche et partie finie à droite) selon que l’on considère les restrictions de la puissance à $[0, a[$ ou à $]a, +\infty[$.

Pour la partie finie à droite, la fonction étudiée est $\mathcal{U}(t-a)(t-a)^{-n}$, il suffit alors de remplacer le polynôme de Taylor au point 0 par le polynôme de Taylor au point $t = a$ qui sera noté $T_{n-1,a}(\varphi)$.

Pour la partie finie à gauche, la fonction étudiée est $\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(a-t)(t-a)^{-n}$. On remplace alors, dans la définition précédente, l’intervalle $[\varepsilon, A]$ par $[0, a-\varepsilon]$. Les définitions s’en déduisent :

Définition 4.7 a) La distribution notée $\text{Pf}(\mathcal{U}(t-a)(t-a)^{-n})$ est la distribution dont l'action sur $\varphi \in \mathcal{D}$ est définie par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{a+\varepsilon}^A \varphi(t)(t-a)^{-n} dt + \mathcal{I}_{a+\varepsilon}(T_{n-1,a}(\varphi)(t-a)^{-n}) \right]$$

b) La distribution notée $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(a-t)(t-a)^{-n})$ est la distribution dont l'action sur $\varphi \in \mathcal{D}$ est définie par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{a-\varepsilon} \varphi(t)(t-a)^n dt - \mathcal{I}_{a-\varepsilon}(T_{n-1,a}(\varphi)(t-a)^{-n}) \right]$$

Remarque 4.3 On peut aussi considérer des parties finies bilatérales :

En ajoutant les parties finies à droite et à gauche de mêmes exposants au point $t = a$, on obtient la définition de la partie finie de la fonction causale $\mathcal{U}(t)(t-a)^{-n}$. Si on veut $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)|t-a|^{-n})$, il faut ajouter la partie finie à droite à la partie à gauche multipliée par $(-1)^n$.

Cas de la singularité $a > 0$, l'exposant étant non entier

Il est facile d'adapter les définitions relatives à la singularité $t = 0$.

On en déduit les définitions des parties finies à droite et à gauche, en supposant $-n-1 < \Re(\alpha) < -n$.

Définition 4.8 a) La distribution notée $\text{Pf}(\mathcal{U}(t-a)(t-a)^\alpha)$, où on suppose : $-n-1 < \Re(\alpha) < -n$, est la distribution dont l'action sur $\varphi \in \mathcal{D}$ est définie par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{a+\varepsilon}^A \varphi(t)(t-a)^\alpha dt + \mathcal{I}_{a+\varepsilon}(T_{n-1,a}(\varphi)(t-a)^\alpha) \right]$$

b) La distribution notée $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(a-t)(a-t)^\alpha)$, où $-n-1 < \Re(\alpha) < -n$, est la distribution dont l'action sur $\varphi \in \mathcal{D}$ est définie par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{a-\varepsilon} \varphi(t)(a-t)^\alpha dt - \mathcal{I}_{a-\varepsilon}(T_{n-1,a}(\varphi)(a-t)^\alpha) \right]$$

On peut étendre ces définitions relatives à ce que l'on peut appeler des «**parties finies de puissances**» à d'autres types de parties finies, en particulier celles qui portent sur des produits de puissances de la variable par des puissances entières de logarithmes de cette variable.

De telles parties finies seront dites : «**parties finies logarithmiques**».

Sans prétendre à une grande généralité (Cf. [[14]]), on se contente ici d'envisager quelques exemples de telles parties finies logarithmiques où on reprend encore la démarche précédente de mise en place des définitions.

4.8.2 Exemples de parties finies causales logarithmiques

Exemple 4.4

Soit f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t)t^{-1}\ln^2 t$ dont la seule singularité est $t = 0$. On suppose donnée une fonction $\varphi \in \mathcal{D}$ et on étudie l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$. La fonction $t \mapsto f(t)(\varphi(t) - \varphi(0))$ est localement sommable. Comme précédemment, on calcule l'intégrale qui, ici, fournit la partie infinie, à savoir :

$$\int_{\varepsilon}^A \varphi(0)t^{-1}\ln^2 t dt = \frac{1}{3}\varphi(0) [\ln^3 A - \ln^3 \varepsilon]$$

On posera ainsi, par définition :

$$\left\langle \text{Pf}\left(\mathcal{U}(t)\frac{\ln^2 t}{t}\right), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \varphi(t) dt + \frac{1}{3}\varphi(0)(\ln^3 \varepsilon) \right]$$

Exemple 4.5

Soit f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t)t^{-5/2}\ln t$ dont la seule singularité est $t = 0$. On étudie l'intégrale $\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$ où $\varphi \in \mathcal{D}$. En développant φ par Taylor au point $t = 0$, on voit que $f(t)(\varphi(t) - \varphi(0) - t\varphi'(0))$ est localement sommable. Toujours par la démarche précédente, on calcule la partie infinie, à savoir l'intégrale :

$$\int_{\varepsilon}^A \left[\varphi(0)t^{-5/2}\ln t + \varphi'(0)t^{-3/2}\ln t \right] dt$$

Par des intégrations par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^A t^{-5/2}\ln t dt &= -\frac{2}{3} \left[t^{-3/2}\ln(t) \right]_{\varepsilon}^A + \frac{2}{3} \int_{\varepsilon}^A t^{-5/2} dt \\ &= \frac{2}{3}\varepsilon^{-3/2}\ln(\varepsilon) + \frac{4}{9}\varepsilon^{-3/2} + K(A) \end{aligned}$$

$$\int_{\varepsilon}^A t^{-3/2}\ln t dt = 2\varepsilon^{-1/2}\ln(\varepsilon) + 4\varepsilon^{-1/2} + K'(A)$$

Les termes $K(A)$ et $K'(A)$ étant indépendants de ε , ce calcul permet de détecter la partie infinie, c'est-à-dire les termes qu'il faut soustraire de $\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$ pour obtenir une limite finie. On posera ainsi, par définition :

$$\left\langle \text{Pf}(f), \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt - \frac{2\varphi(0)}{9\varepsilon^{3/2}} [3\ln(\varepsilon) + 2] - \frac{2\varphi'(0)}{\varepsilon^{1/2}} [\ln(\varepsilon) + 2] \right]$$

Exemple 4.6

Soit f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t-1)(t-1)^{-3/2}\ln^2(t-1) + \mathcal{U}(t)\mathcal{U}(1-t)(1-t)^{-1+i}$. La seule singularité est en $t = 1$ mais elle est bilatérale. On peut considérer que f est somme de deux fonctions pour lesquelles la singularité est, soit à gauche, soit

à droite. La partie finie de f est alors la somme des deux parties finies associées à ces deux fonctions. Multiplions par φ et utilisons les polynômes de Taylor au point $a = 1$.

À gauche, il suffit d'utiliser le polynôme de Taylor de φ de degré 0 au point $t = 1$, donc réduit au terme $\varphi(1)$. La partie infinie à gauche de $Pf(f\varphi)$ provient donc de l'intégrale

$$\varphi(1) \int_0^{1-\varepsilon} (1-t)^{-1+i} dt$$

Cette partie infinie, qui est en fait une expression sans limite, est donc $i\varphi(1)(\varepsilon)^i$. À droite, on utilise de même le polynôme de Taylor en $t = 1$ de degré 0. La partie infinie à droite de $Pf(f\varphi)$ provient donc de l'intégrale sur $[1+\varepsilon, A]$ de la fonction $\varphi(1)(t-1)^{-3/2}\ln^2(t-1)$.

Après une translation sur la variable et deux intégrations par parties, cette partie infinie s'exprime par :

$$\varphi(1)\varepsilon^{-1/2}[2\ln^2\varepsilon + 8\ln\varepsilon - 16]$$

La définition de $\langle Pf(f), \varphi \rangle$ s'écrit donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{1-\varepsilon} f(t)\varphi(t)dt + \int_{1+\varepsilon}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt - \varphi(1)[i(\varepsilon)^i + \varepsilon^{-1/2}(2\ln^2\varepsilon + 8\ln\varepsilon + 16)] \right]$$

4.8.3 Généralisation de ces parties finies

Les parties finies de type puissance ou logarithmique déjà étudiées seront dites : « **élémentaires** ». Parmi les fonctions causales f non localement sommables les plus simples, figurent celles qui, sur tout segment $[a, b]$, possèdent un nombre fini de singularités au voisinage desquels la fonction f n'est pas sommable. Ces singularités a_j constituent alors un ensemble fini ou infini dénombrable, localement fini. On peut, en général, décomposer la fonction en une somme finie ou infinie de fonctions causales dites "composantes", notées f_{a_j+} ou f_{a_j-} telles que chacune d'entre elles admet une seule singularité a_j d'un seul côté, c'est-à-dire à droite de a_j ou à gauche de a_j . On simplifie encore en supposant qu'au voisinage de chaque point singulier a_j , les fonctions f_{a_j+} ou f_{a_j-} se comportent comme des produits de puissances de $|t - a_j|$ par des puissances d'exposants entiers de $\ln(|t - a_j|)$ ou encore comme des sommes de tels produits. Dans ce cas, chacune des composantes fournira une somme de parties finies élémentaires.

Supposons qu'on veuille écrire la forme générale, conforme à cette définition, d'une fonction f_0 admettant la seule singularité $t = 0$. Alors, soit $P_n(X) = \sum_1^n a_k X^k$ un polynôme de degré égal à n ($n \geq 1$), un polynôme $Q_{m,q}$ en deux

variables du type $Q_{m,q}(X, Y) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^q b_{j,l} X^j Y^l$ et un ensemble fini C de couples (α_k, m_h) où les α_k sont des complexes de parties réelles négatives ou nulles et les m_h des entiers positifs ou nuls avec $(\alpha_k, m_h) \neq (0, 0)$, ensemble auquel on associe une somme $R_C(t)$ de termes du type $c_{\alpha_k, m_h} t^{\alpha_k} (\ln t)^{m_h}$. La fonction g étant par

ailleurs supposée localement sommable et, en outre, bornée au voisinage de $t = 0$, cette forme générale, dite « **canonique** » dans la suite, s'exprime par :

$$f_0(t) = P_n(t^{-1}) + Q_{m,q}(t^{-1}, \ln t) + R_C(t) + g(t),$$

Il est bon de remarquer qu'il existe, parmi les premiers termes de cette relation, des fonctions localement sommables. Ils sont obtenus à l'intérieur de R_C pour les exposants α_k qui vérifient $\Re(\alpha) > -1$. Dans la mesure où les parties finies de ces termes coïncident avec les distributions régulières associées à ces fonctions localement sommables, nous écrirons, en omettant le facteur \mathcal{U} :

$$\text{Pf}(f_0) = \text{Pf}[P_n(t^{-1})] + \text{Pf}[Q_{m,q}(t^{-1} \ln t)] + \text{Pf}[R_C(t)] + [g]$$

Dans le cas d'une singularité autre que $t = 0$, deux écritures de cette forme s'appliqueront pour f_{a_j+} ou f_{a_j-} et finalement les parties finies les plus générales considérées dans cet ouvrage (Cf. [[11]], [[14]]) sont des sommes dénombrables finies ou localement finies de telles expressions.

Exemple 4.7

La fonction $t \mapsto f(t) = \mathcal{U}(t) \frac{J_0(t)}{t^3}$ ne possède qu'un point singulier $t = 0$. On l'exprime sous la forme :

$$f(t) = \mathcal{U}(t) \left[t^{-3} - \frac{1}{4}t^{-1} + \sum_2^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}} t^{2n-3} \right]$$

La partie finie de cette fonction est la somme des parties finies $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)[t^{-3}]$, de $-\frac{1}{4}\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-1})$ et de la distribution associée à la fonction continue définie par la série précédente.

Des écritures analogues permettraient de ramener des parties finies comme celles des fonctions J_λ lorsque $\lambda < -1/2$ ou $\frac{J_\lambda(t)}{t^n}$ pour $\lambda > 0$ et $n > 2\lambda + 1$ à des sommes de distributions régulières et de parties finies élémentaires.

Ces exemples se généralisent en considérant des fonctions du type $t \mapsto \mathcal{U}(t)g(t)t^\alpha$ où g est une fonction développable en série entière dans \mathbb{R} et α un nombre réel ou complexe de partie réelle inférieure à -1 . On peut aussi supposer que g est localement sommable et possède, au voisinage de $t = 0$ un développement limité d'ordre égal à $E[-\Re(\alpha)]$. Il est facile de transposer ces différentes situations aux cas où les singularités sont autres que $t = 0$. Une illustration en est fournie dans l'exemple qui va suivre.

Exemple 4.8

La fonction $t \mapsto f(t) = \mathcal{U}(t) \frac{\sin(t(t^2 - 4))}{t^3(t - 2)^2}$ possède deux singularités $t = 0$ et $t = 2$. En faisant apparaître son développement au voisinage de $t = 0$ qui se réduit à $-t^{-2}$, cette fonction peut s'écrire :

$$f(t) = -\frac{\mathcal{U}(t)}{t^2} + \frac{\sin(t(t^2 - 4)) + t(t - 2)^2}{t^3(t - 2)^2}$$

Un développement au voisinage de $t = 2$ de cette dernière fraction nous montre finalement que $\text{Pf}(f)$ est la somme de la partie finie $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)[-t^{-2}])$, des parties finies à droite et à gauche de $(t - 2)^{-1}$ et d'une fonction de \mathcal{L}_d .

Exemple 4.9

La fonction $t \mapsto f(t) = \mathcal{U}(t) \frac{t}{\sin^2(t)}$ a une infinité de points singuliers $t = k\pi$.

Sur tout segment I_n , centré par exemple en $t = 0$, contenant les abscisses $k\pi$ où $-n \leq k \leq n$, les composantes de f sont :

$$f_0 = t^{-1}, \quad f_k = (t - k\pi)^{-1}, \quad g_k = k\pi(t - k\pi)^{-2}, \quad \text{avec } k \neq 0, -n \leq k \leq n$$

Par conséquent, si $\varphi \in \mathcal{D}$ a son support contenu dans I_n , on aura, h_n étant une fonction continue sur l'intervalle I_n :

$$\langle \text{Pf}(f), \varphi \rangle = \langle \text{Pf}(t^{-1}), \varphi \rangle + \sum_{-n}^n \left[k\pi \langle \text{Pf}(t - k\pi)^{-2}, \varphi \rangle + \langle \text{Pf}(t - k\pi)^{-1}, \varphi \rangle \right] + \langle [h_n], \varphi \rangle$$

Remarque 4.4 *Il existe d'autres fonctions non localement sommables qui pourraient donner naissance à des parties finies.*

Par exemple une fonction du type $t \mapsto \left[\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - 1) \right] \frac{\sqrt{-\ln t}}{t^2}$ qui ne rentre pas dans les descriptions précédentes. Non plus d'ailleurs qu'une fonction, faisant intervenir une série de fonctions localement sommables, telle que $f(t) = \frac{\mathcal{U}(t)}{t} + \sum_1^{+\infty} a_n \mathcal{U}(t - 1/n)(t - 1/n)^{-1}$, dans laquelle les points singuliers ne constituent pas une suite localement finie. De telles parties finies ne sont donc pas envisagées.

4.8.4 Parties finies considérées comme fonctions d'un paramètre. Dérivation et analyticité

Dérivation des parties finies de puissances par rapport à l'exposant

En dérivant une puissance par rapport à l'exposant, cette puissance se voit multipliée par le logarithme. On se propose de prouver cette propri et  sur les parties finies de puissances. Une telle propri et  fournit une méthode de détermination des parties finies logarithmiques, à partir des résultats sur les parties finies de puissances.

On se contente du cas de la singularité $a = 0$ et on considère, par exemple, le cas où $\alpha \in] - 2, - 1[$. D'après une formule précédente, on a :

$$\langle \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^A \varphi(t)t^\alpha dt + \varphi(0) \frac{(\varepsilon)^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]$$

Cette limite s'exprime aussi par :

$$\langle \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha), \varphi \rangle = \varphi(0) \frac{A^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \int_0^A (\varphi(t) - \varphi(0))t^\alpha dt$$

Puisque $\alpha + 1 \neq 0$, le premier terme est dérivable dans l'intervalle considéré. Le deuxième terme est une intégrale généralisée convergente. La fonction sous le signe intégral, considérée en la variable (t, α) est continue sur $]0, A[\times]-2, -1[$ et dérivable continûment par rapport à α dans ce même domaine. De plus, $\frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}$ est bornée et $|t^{\alpha-1} \ln t|$ est majorée sur tout compact de $] -2, -1[$ par une fonction du type $|t^{\alpha_0-1} \ln t|$ qui est sommable sur $[0, A]$.

D'après un théorème classique de Lebesgue, ce deuxième terme est dérivable par rapport à α dans l'intervalle envisagé et la dérivation peut être effectuée sous le signe intégral.

Finalement, on a :

$$\frac{d}{d\alpha} \langle \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha), \varphi \rangle = \varphi(0) \left[\ln A \frac{A^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{A^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2} \right] + \int_0^A (\varphi(t) - \varphi(0)) t^\alpha \ln t dt$$

Or, ce deuxième membre n'est autre que $\langle \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha \ln t), \varphi(t) \rangle$.

Puisque ce résultat est valable quelle que soit φ , on en déduit que la distribution $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha)$, considérée comme application de l'intervalle $] -2, -1[$ à valeurs dans \mathcal{D}' , est dérivable, sa dérivée par rapport à α dans cet intervalle étant égale à $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha \ln t)$.

En effet, quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}$, ce qui précède permet d'écrire :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle \frac{\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha) - \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{\alpha+\varepsilon})}{\varepsilon} - \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha \ln t), \varphi \right\rangle = 0,$$

et cette relation exprime une limite pour la topologie de \mathcal{D}' . On vérifierait la même propriété sur tout intervalle $] -n-1, -n[$.

De plus, la partie finie est même de classe \mathcal{C}^∞ en α sur l'intervalle $] -2, -1[$ et c'est encore vrai sur tout intervalle $] -n-1, -n[$ (Cf. exercice 7.13).

Enfin, les raisonnements précédents s'étendent au cas où α est complexe et vérifie $-n-1 < \Re(\alpha) < -n$.

On en déduit que la fonction : $\alpha \mapsto [\mathcal{U}(t)t^\alpha]$ qui est analytique (la vérification en est facile) dans le domaine où $\Re(\alpha) > -1$, se prolonge analytiquement en la fonction : $\alpha \mapsto \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha)$ dans la totalité de \mathbb{C} privé de tous les entiers strictement négatifs (Cf. exercice 7.13).

Proposition 4.14 Dans l'ouvert de \mathbb{C} défini par $\Omega = \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha \notin \mathbb{N}_-\}$, l'application qui associe à α la distribution $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha)$ est holomorphe et, dans cet ouvert, sa dérivée d'ordre m s'exprime par la relation :

$$\boxed{\frac{d^m}{d\alpha^m} \left[\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha) \right] = \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha (\ln t)^m) \quad (4.11)}$$

On trouvera, dans les exercices 7.14 et 7.15, des exemples de telles dérivations. L'exercice 7.16 généralise les résultats précédents au cas d'une singularité autre que $t = 0$. On reprend un exemple analogue à l'exemple 4.1 en appliquant la proposition précédente

Exemple 4.10

Soit f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t)t^{-5/2}(\ln t)^2$.

Pour déterminer sa partie finie, on dérive deux fois par rapport à α la formule qui définit $\text{Pf}(t^\alpha)$ lorsque $-3 < \alpha < -2$:

$$\langle Pf(t^\alpha), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^A t^\alpha \varphi(t) dt + \varphi(0) \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \varphi'(0) \frac{\varepsilon^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right]$$

La formule de Leibniz donne alors pour la dérivée d'ordre 2 des deux derniers termes :

$$\begin{aligned} \varphi(0)\varepsilon^{\alpha+1} \left[\frac{(\ln \varepsilon)^2}{\alpha+1} - 2 \frac{\ln \varepsilon}{(\alpha+1)^2} + \frac{2}{(\alpha+1)^3} \right] \\ + \varphi'(0)\varepsilon^{\alpha+2} \left[\frac{(\ln \varepsilon)^2}{\alpha+2} - 2 \frac{\ln \varepsilon}{(\alpha+2)^2} + \frac{2}{(\alpha+2)^3} \right] \end{aligned}$$

En remplaçant ensuite α par $-5/2$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \text{Pf}(f), \varphi \rangle &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^A f \varphi dt + \frac{\varphi(0)}{\varepsilon^{3/2}} \left[(-2/3)(\ln \varepsilon)^2 - (8/9)(\ln \varepsilon) - 16/27 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\varphi'(0)}{\varepsilon^{1/2}} \left[(\ln \varepsilon)^2 + 4(\ln \varepsilon) + 8 \right] \right] \end{aligned}$$

Généralisation à des parties finies dépendant d'un paramètre réel

Dans ce qui suit, on suppose que la fonction f dépend d'un paramètre λ réel appartenant à un intervalle ouvert $] \alpha, \beta [$ de \mathbb{R} , telle que cette fonction, notée désormais $f(t, \lambda)$, se présente sous la forme :

$$\begin{cases} \forall 0 < t \leq a, & f(t, \lambda) = u(\lambda)t^{-v(\lambda)} + g(t, \lambda) \\ \forall t > a, & f(t, \lambda) = h(t, \lambda) \end{cases}$$

On fait les hypothèses suivantes :

- (i) La fonction $t \mapsto g(t, \lambda)$ est sommable sur $]0, a]$ et la fonction $t \mapsto h(t, \lambda)$ est sommable sur $[a, +\infty[$.
- (ii) Les fonctions $u, v, \lambda \mapsto g(t, \lambda)$ et $\lambda \mapsto h(t, \lambda)$ sont dérivables dans $] \alpha, \beta [$, les dérivées partielles de ces dernières par rapport à λ sont continues en (t, λ) dans les domaines respectifs $]0, a] \times] \alpha, \beta [$ et $[a, +\infty[\times] \alpha, \beta [$ et, en outre, sont toutes deux majorées en modules, quel que soit λ dans l'un ou l'autre des intervalles envisagés, par des fonctions $t \mapsto g_1(t)$ et $t \mapsto h_1(t)$ sommables respectivement sur les intervalles $]0, a]$ et $[a, +\infty[$.
- (iii) Dans $] \alpha, \beta [$, la fonction v ne prend pas de valeurs entières et l'ouvert Ω_1 inclus dans $] \alpha, \beta [$ où l'on a : $v(\lambda) < 1$ n'est pas vide

On posera : $\Omega_2 =]\alpha, \beta[\setminus \Omega_1$.

On se propose d'étudier la fonction de λ définie par l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t, \lambda) dt$ lorsque celle-ci existe et de sa partie finie dans le cas où cette intégrale n'existe pas.

On suppose d'abord $\lambda \in \Omega_1$.

◇ Alors les fonctions $t \mapsto t^{-v(\lambda)}$ et $t \mapsto g(t, \lambda)$ étant sommables sur $]0, a]$, on en déduit l'existence de $\int_0^a f(t, \lambda) dt$. Ceci, joint à l'hypothèse de sommabilité de h , nous fournit l'existence de $\int_0^{+\infty} f(t, \lambda) dt$.

La fonction F_1 définie par $F_1(\lambda) = \int_0^a f(t, \lambda) dt$ est alors dérivable dans cet ouvert Ω_1 . En effet, cette fonction s'exprime par :

$$F_1(\lambda) = u(\lambda) \frac{a^{1-v(\lambda)}}{1-v(\lambda)} + \int_0^a g(t, \lambda) dt$$

Puisque $v(\lambda) < 1$, le premier terme est une fonction dérivable dans Ω_1 . Par ailleurs, d'après les hypothèses (ii), la dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial \lambda}(t, \lambda)$ est continue en (t, λ) dans $]0, a] \times]\alpha, \beta[$ et reste uniformément majorée par la fonction $t \mapsto g_1(t)$ sommable sur $]0, a]$, ce qui prouve la convergence uniforme de l'intégrale portant sur cette dérivée partielle. Le théorème classique de Lebesgue sur la dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale fonction d'un paramètre s'applique donc à cette intégrale $\int_0^a g(t, \lambda) dt$ dans Ω_1 .

De même, à l'aide de la continuité en deux variables de $\frac{\partial h}{\partial \lambda}$ et de la majoration de cette dérivée partielle par h_1 , le même théorème prouve la dérivabilité de F_2 définie par $F_2(\lambda) = \int_a^{+\infty} h(t, \lambda) dt$. Concluons déjà que F définie par $F(\lambda) = F_1(\lambda) + F_2(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(t, \lambda) dt$ est dérivable dans Ω_1 et que la dérivée $F'(\lambda)$ s'obtient par dérivation sous le signe somme. ◇

Prolongement dans Ω_2

◇ Dans Ω_1 , la fonction précédente s'exprime par :

$$F(\lambda) = u(\lambda) \frac{a^{1-v(\lambda)}}{1-v(\lambda)} + \int_0^a g(t, \lambda) dt + \int_a^{+\infty} h(t, \lambda) dt$$

Comme l'exposant vérifie encore $\Re(1-v(\lambda)) \neq 0$, on en déduit que le premier terme du second membre est dérivable dans Ω_2 . Par ailleurs, par le même raisonnement que dans ce qui précède, les deux intégrales de ce second membre sont dérivables dans Ω_2 . On en déduit que ce second membre définit un prolongement de classe C^∞ , dans la totalité de $]\alpha, \beta[$, de la fonction intégrale F . ◇

Interprétation de ce prolongement

Dans Ω_2 , on a : $-2 < \Re(1-v(\lambda)) < -1$, on définit alors la partie finie de $\int_0^a f(t, \lambda) dt$ par :

$$\text{Pf} \left(\int_0^a f(t, \lambda) dt \right) = u(\lambda) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^a t^{-v(\lambda)} dt - \frac{\varepsilon^{1-v(\lambda)}}{1-v(\lambda)} \right] + \int_0^a g(t, \lambda) dt$$

Finalement, le terme en ε disparaît quand on effectue l'intégrale; on trouve donc, pour la partie finie de l'intégrale de f sur $]0, +\infty[$, l'expression du prolongement précédent. Sous les hypothèses précédentes, la démonstration précédente

reste valable lorsque la définition de f sur $]0, a]$ est remplacée par $f(t, \lambda) = u(\lambda)(\ln^k(t))t^{-v(\lambda)} + g(t, \lambda)$.

Remarque 4.5 Dans le contexte précédent, il n'est pas question de distributions.

Cependant, en remplaçant la fonction $f(t, \lambda)$ par le produit $f(t, \lambda)\varphi(t)$ où $\varphi \in \mathcal{D}$, ou même $\varphi \in \mathcal{S}$, la démonstration reste entièrement valable. On en déduit ainsi que l'application $\lambda \mapsto [f(t, \lambda)]$ à valeurs dans \mathcal{D}' est de classe \mathcal{C}^∞ dans Ω_1 et que l'application $\lambda \mapsto \text{Pf}[f(t, \lambda)]$ à valeurs dans \mathcal{D}' représente son prolongement de classe \mathcal{C}^∞ , dans la totalité de $] \alpha, \beta[$.

Ce résultat ne nous fournit que la dérivabilité réelle. L'intérêt de l'utilisation de la variable complexe tient d'abord à une simplification des hypothèses du théorème de dérivabilité qui devient alors un théorème d'holomorphicité. Il fournit également le résultat plus substantiel de prolongement analytique. Contentons-nous, à ce propos, d'un exemple. Il concerne une fonction de Bessel et, en fait, il met en évidence une analyticité dans le champ complexe :

Exemple 4.11 Dérivation par rapport à λ de $\text{Pf}(UJ_\lambda)$ pour $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}_-^*$.

La fonction $\lambda \mapsto J_\lambda(t)$ est analytique dans Π_{-1} .

◇ En effet, elle est définie par la série $\sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left[a_k(\lambda) \left(\frac{t}{2} \right)^{2k} \right]$, les coefficients étant : $a_k(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(k+1+\lambda)} \left[\frac{t}{2} \right]^\lambda$. C'est une série de fonctions continues en (t, λ) , analytiques en la variable λ , qui converge uniformément par rapport à λ sur tout compact K de Π_{-1} . Pour majorer l'inverse de $\Gamma(k+1+\lambda)$, on utilise (Cf. Annexe 1) la formule :

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp(\gamma z) \prod_1^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n} \right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \right]$$

En majorant les exponentielles et en faisant réapparaître le même produit infini pour la variable $|z|$, on en déduit :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(z)} \right| \leq |z| e^{\gamma|z|} \exp(\gamma(\Re(z) - |z|)) \prod_1^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{|z|}{n} \right) \exp\left(-\frac{|z|}{n}\right) \exp\left(\frac{|z| - \Re(z)}{n}\right) \right]$$

Autrement dit :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(z)} \right| \leq \exp(1 - \gamma)(|z| - \Re[z]) \frac{1}{\Gamma(|z|)}$$

Or, si $|z| > 0$, on a : $\Gamma(|z|) \geq m$ où $m > 0$ (Cf. Annexe 1). On applique ces résultats pour $z = \lambda + k + 1$, avec $\Re(\lambda) > -1$, ce qui implique $|z| > 0$ pour tout entier k . Des relations : $1 - \gamma > 0$ et $|z| - \Re[z] \leq |\lambda| - \Re[\lambda]$, on tire, lorsque λ parcourt le compact K de Π_{-1} :

$$\left| \frac{1}{\Gamma(\lambda + k + 1)} \right| \leq M \frac{1}{\Gamma(|\lambda + k + 1|)} \leq \frac{M}{m}$$

Il en résulte la majoration uniforme : $|a_k(\lambda)| \leq \frac{M}{m} \left[\frac{t}{2}\right]^c$ où c est la borne inférieure (resp. la borne supérieure) de $\Re e(\lambda)$ sur le compact K selon que $t < 2$ (resp. $t > 2$).

Finalement, pour tout $\lambda \in K$, le terme général de la série est majoré par $\frac{M}{m} \frac{1}{k!} \left[\frac{t}{2}\right]^{c+2k}$, terme général d'une série convergente quel que soit t , ce qui prouve la normale convergence.

D'après le théorème classique sur les séries de fonctions holomorphes, on conclut ainsi à l'holomorphie de $\lambda \mapsto J_\lambda$ dans Π_{-1} .

On en déduit, en utilisant encore la convergence normale précédente qui permet l'intégration terme à terme sur le support compact d'un élément φ de \mathcal{D} , l'holomorphie, dans Π_{-1} , de l'application $\lambda \mapsto \int_0^{+\infty} J_\lambda(t)\varphi(t) dt$ quelle que soit $\varphi \in \mathcal{D}$, ce qui revient à dire que $\lambda \mapsto [J_\lambda]$, à valeurs dans \mathcal{D}' , est analytique dans Π_{-1} . On suppose maintenant : $\Re e(\lambda) > -2$ et $\lambda \neq -1$ en remplaçant, quand il en est besoin, la distribution régulière $[UJ_\lambda]$ par la partie finie $\text{Pf}[UJ_\lambda]$ (Cf. une autre méthode dans l'exercice 7.15), à savoir :

$$\text{Pf}(UJ_\lambda) = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} \text{Pf}\left[U(t)\left(\frac{t}{2}\right)^\lambda\right] + [g(\lambda, t)]$$

Dans cette formule, la fonction g est définie par une série convergente du type précédent. La majoration uniforme qui a été alors utilisée reste encore valable puisque le paramètre $\lambda + k + 1$ est translaté d'une unité, ce qui fournit, lorsque $\Re e(\lambda) \leq -1$, les mêmes majorations uniformes.

On en déduit que $[g]$ est analytique dans le nouveau domaine et, comme on sait que le produit de la fonction analytique $\frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$ par la partie finie $\text{Pf}\left[U(t)\left(\frac{t}{2}\right)^\lambda\right]$, également analytique d'après la proposition 4.14, est aussi analytique dans ce domaine, on peut conclure d'une part à l'analyticité de $\text{Pf}(UJ_\lambda)$ dans $\Pi_{-2} \setminus \{-1\}$ et d'autre part que cette partie finie représente le prolongement analytique de $[UJ_\lambda]$ hors de Π_{-1} .

On peut d'ailleurs continuer ce raisonnement de proche en proche, pour obtenir l'analyticité de $\text{Pf}(UJ_\lambda)$ dans \mathbb{C} privé des entiers négatifs ou nuls. \diamond

De plus, les convergences normales des séries de fonctions holomorphes, entraînant la possibilité de dériver sous le signe intégral ou sous le signe distribution, on est en droit de conclure :

Proposition 4.15 *La fonction $\lambda \mapsto [UJ_\lambda]$ à valeurs dans \mathcal{D}' est analytique dans le demi-plan Π_{-1} . Elle est prolongeable analytiquement dans le domaine $\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} \setminus \lambda \notin \mathbb{N}^*\}$ et son prolongement s'exprime par l'application : $\lambda \mapsto \text{Pf}(UJ_\lambda)$.*

En outre, quel que soit $\lambda \in \Omega$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\text{Pf}(J_\lambda) \right] = \text{Pf} \left(\frac{\partial J_\lambda}{\partial \lambda} \right) = \text{Pf} \left(\ln \left(\frac{t}{2} \right) J_\lambda - \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma'(\lambda + k + 1)}{\Gamma^2(\lambda + k + 1)} \left(\frac{t}{2} \right)^{2k + \lambda} \right)$$

Remarque 4.6 Les formules de dérivation mises en place dans les exemples précédents sont relatives au cas de la singularité $t = 0$. On peut faire des raisonnements analogues pour un point singulier autre que $t = 0$.

Cela peut résulter, dans certains cas, d'une simple translation sur la variable t (Cf. Exercices 7.21 et 7.22).

4.8.5 Multiplication par t d'une partie finie

Comme pour les parties finies des puissances de la variable, le produit par t commute aux parties finies ; autrement dit, nous avons le résultat :

Proposition 4.16 *Quels que soient le complexe α , l'entier naturel m et l'entier naturel k , on a :*

$$t^k P f(\mathcal{U}(t)t^\alpha (\ln t)^m) = P f(\mathcal{U}(t)t^{\alpha+k} (\ln t)^m) \quad (4.12)$$

Il en résulte, en particulier, que si $\Re(\alpha) + k > -1$, la multiplication par t^k fournit la distribution régulière associée à la fonction $\mathcal{U}(t)t^{\alpha+k} (\ln t)^m$ qui est localement sommable.

De plus, cette formule se généralise aux cas des singularités $t = a$ autres que $t = 0$ en remplaçant les puissances entières de t par celles de $t - a$.

Démonstration

On se contente de la faire pour $k = 1$ et dans le cas d'un complexe α .

◇ On suppose $-n - 1 < \Re \alpha < -n$. Par définition, puisque le degré du polynôme de Taylor à utiliser est $n - 1$, l'action du produit $t P f(\mathcal{U}(t)t^\alpha (\ln t)^m)$ sur φ élément de \mathcal{D} s'exprime par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^A t^{\alpha+1} (\ln t)^m \varphi(t) dt + \mathcal{I}_{(\varepsilon)} \left[T_{n-1}(t\varphi) t^\alpha (\ln t)^m \right] \right] (*)$$

Or, le terme général de $T_{n-1}(t\varphi)$ fait intervenir $(t\varphi)^{(j)}(0)$ qui se simplifie en $j\varphi^{(j-1)}(0)$. Il en résulte que, le premier terme étant nul, une translation d'indice ($j - 1 = k$) amène la relation suivante :

$$T_{n-1}(t\varphi) = t \sum_0^{n-2} \frac{\varphi^k(0)t^k}{k!} = t T_{n-2}(\varphi)$$

Par conséquent, l'expression précédente (*) se traduit par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^A t^{\alpha+1} (\ln t)^m \varphi(t) dt + \mathcal{I}_{(\varepsilon)} \left[T_{n-2}(\varphi) t^{\alpha+1} (\ln t)^m \right] \right]$$

Et cette dernière formule explicite l'action sur φ de $P f(\mathcal{U}(t)t^{\alpha+1} (\ln t)^m)$. Enfin, dans le cas où la singularité de f est autre que $a = 0$, la translation $t \mapsto t - a$ fournit le résultat analogue. ◇

Remarque 4.7 Cette propriété de multiplication par la variable peut être utilisée, plus généralement, dans la multiplication par des fonctions régulières.

Soit, par exemple, une fonction g de classe \mathcal{C}^∞ qui s'annule au point $t = 0$, l'ordre du zéro de g en ce point étant k , on peut écrire $g(t) = t^k h(t)$ où h est de classe \mathcal{C}^∞ . La multiplication par une telle fonction g nous donne alors

$$\langle g \text{Pf}(t^\alpha (\ln t)^m), \varphi \rangle = \langle t^k \text{Pf}(t^\alpha (\ln t)^m), h\varphi \rangle = \langle h \text{Pf}(t^{\alpha+k} (\ln t)^m), \varphi \rangle$$

4.8.6 Dérivation d'une partie finie causale

Nous allons prouver que, sauf dans le cas où le logarithme est absent dans la partie finie, la dérivée de cette partie finie d'exposants (α, m) est égale à la partie finie de la fonction dérivée. Dans le cas où α est entier et $m = 0$, une dérivée de distribution de Dirac intervient dans cette dérivation.

Proposition 4.17 a) Lorsque $m \neq 0$ et $\alpha \leq -1$ entier ou non, on a :

$$\frac{d}{dt}(\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha (\ln t)^m)) = \alpha \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{\alpha-1} (\ln t)^m) + m \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{\alpha-1} (\ln t)^{m-1})$$

b) Lorsque $\alpha = -n$ avec $n > 0$ entier, on a :

$$\frac{d}{dt}(\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-n})) = -n \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-n-1}) + (-1)^n \frac{\delta_a^{(n)}}{n!} \quad (4.13)$$

c) Lorsque : $m \neq 0$ et $\alpha \leq -1$ entier ou non, les parties finies :

$$\text{Pf}\left[\mathcal{U}(t-a)(t-a)^\alpha (\ln(t-a))^m\right] \quad \text{et} \quad \text{Pf}\left[\mathcal{U}(a-t)(a-t)^\alpha (\ln(a-t))^m\right]$$

conduisent à des résultats analogues. De même, pour n entier, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{Pf}(\mathcal{U}_a(t)(t-a)^{-n})) &= -n \text{Pf}(\mathcal{U}_a(t)(t-a)^{-n-1}) + (-1)^n \frac{\delta_a^{(n)}}{n!} \\ \frac{d}{dt}(\text{Pf}(\mathcal{U}(a-t)(t-a)^{-n})) &= -n \text{Pf}(\mathcal{U}(a-t)(t-a)^{-n-1}) + (-1)^{n-1} \frac{\delta_a^{(n)}}{n!} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Démonstration de a)

◇ La démonstration est faite dans le cas où $-n-1 < \alpha < -n$ (donc non entier). On pose $f(t) = t^\alpha (\ln t)^m$. La dérivée f' fait intervenir l'exposant $\alpha-1$, le degré du polynôme de Taylor à utiliser pour la définition de $\text{Pf}(f')$ est donc n . On détermine d'abord $\text{Pf}(f')$. Sur tout élément φ de \mathcal{D} , l'action de cette partie finie se traduit par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^A \varphi(t) f'(t) dt + \mathcal{I}_{(\varepsilon)}[T_n(\varphi) f'] \right]$$

Or

$$\mathcal{I}_{(\varepsilon)}[T_n(\varphi)f'] = \mathcal{I}_{(\varepsilon)}\left[\sum_0^n \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} t^j f'(t)\right]$$

Dans cette primitive, on peut effectuer une intégration par parties du terme $t^j f'(t)$, ce qui donne pour cette partie infinie :

$$\varphi(0)f(\varepsilon) + \sum_1^n \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \varepsilon^j f(\varepsilon) - \sum_1^n \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} j(\varepsilon)^{j-1} f(\varepsilon)$$

On peut donc écrire :

$$\langle \text{Pf}(f'), \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^A \varphi(t) f'(t) dt + \sum_0^n \frac{\varphi^{(j)}(0)}{j!} \varepsilon^j f(\varepsilon) - \mathcal{I}_{(\varepsilon)}[T_{n-1}(\varphi')f] \right] (*)$$

Par ailleurs, l'action de la dérivée de $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha(\ln t)^m)$ sur une fonction test φ se traduit par :

$$- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^A \varphi'(t) t^\alpha (\ln t)^m dt + \mathcal{I}_{(\varepsilon)}[T_{n-1}(\varphi') t^\alpha (\ln t)^m] \right] (**)$$

L'intégrale du second membre, intégrée par parties, nous donne alors :

$$- \int_{\varepsilon}^A \varphi'(t) f(t) dt = \int_{\varepsilon}^A \varphi(t) f'(t) dt - [\varphi(t) f(t)]_{\varepsilon}^A$$

En développant, dans le dernier terme $\varphi(\varepsilon)$ par la formule de Taylor à l'ordre n et en substituant dans (**), on voit que les seconds membres des relations (*) et (**) sont égaux. \diamond

Démonstration de b)

\diamond La démonstration reste la même, à ceci près qu'on utilise le polynôme de Taylor de degré n et que la relation (*) qui précède doit être remplacée par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\varphi(t) t^{-n}]_{\varepsilon}^A + \sum_0^n \frac{\varphi^{(j)}(0) \varepsilon^{j+\alpha}}{j!} = - \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}$$

Ce dernier terme, changé de signe, reste dans le second membre de la formule finale. Il s'interprète comme l'image de φ par une dérivée de la distribution de

Dirac au point $t = 0$, à savoir $\frac{(-1)^n \delta^{(n)}}{n!}$. \diamond

c) Cas où $a \neq 0$

\diamond La translation des distributions commute avec la dérivation. Par conséquent, les mêmes résultats se transposent pour une fonction f qui s'écrit sous la forme $\mathcal{U}(t-a)(t-a)^\alpha(\ln(t-a))^m$. On obtient ainsi la première formule. La translation agit de même pour $\text{Pf}[\mathcal{U}(t-a)(t-a)^{-n}]$.

Pour la partie finie à gauche, on peut, par exemple, recommencer le calcul fait ci-dessus (Cf. exercice 7.8), ce qui expliquera le changement de signe de la dérivée de la distribution de Dirac. Remarquons d'ailleurs que la dérivée de la partie finie $\text{Pf}[\mathcal{U}(t)(t-a)^{-n}]$ est alors égale à $-n\text{Pf}[\mathcal{U}(t)(t-a)^{-n-1}]$.

Remarque 4.8 Ces propriétés de dérivation s'étendent aux parties finies logarithmiques (Cf. Exercice 7.23) et aussi à d'autres parties finies non élémentaires.

En particulier, cela s'applique aux parties finies définies de façon plus générale par les formules de §4.8.3 où la différence entre la dérivée de $\text{Pf}(f)$ et $\text{Pf}(f')$ résulte des termes qui proviennent de la dérivation des puissances d'exposants entiers, lesquels apportent des combinaisons de dérivées de δ . On en tiendra compte dans la transformation de la partie finie d'une dérivée (Cf. §4.10.2).

Par exemple, les parties finies de $\frac{J_0(t)}{t^n}$ donnent des formules de dérivation analogues à celles de la proposition ci-dessus (Cf. Exercice 7.5) qui conjugent les formules de dérivation d'un produit et la propriété de dérivation d'une partie finie élémentaire. Ainsi :

$$\frac{d}{dt} \left[\text{Pf} \left[\frac{\mathcal{U}(t)J_0(t)}{t} \right] \right] = -\text{Pf} \left[\frac{\mathcal{U}(t)J_0(t)}{t^2} \right] + \left[\frac{J'_0(t)}{t} \right] + \delta'$$

4.8.7 Caractère tempéré des parties finies causales élémentaires

La proposition qui suit est importante pour la transformation de Laplace des parties finies causales :

Proposition 4.18 Les parties finies causales élémentaires sont des distributions tempérées.

Preuve

◇ On peut procéder par des dérivations successives.

La fonction $\mathcal{U}(t) \ln t$ est à croissance lente, donc, tempérée en tant que distribution. Ses dérivées, qui sont des combinaisons de $\text{Pf}[\mathcal{U}(t)t^{-n}]$ et de dérivées de la distribution δ près, sont elles-mêmes tempérées. La distribution δ et ses dérivées étant tempérées, on en déduit par différence que toutes ces parties finies sont tempérées.

En considérant les fonctions $\mathcal{U}(t)(\ln t)^m$, le même raisonnement conduit à conclure que toutes les parties finies logarithmiques d'exposant entier sont tempérées.

En recommençant un raisonnement par récurrence à partir de $\mathcal{U}(t)t^\alpha(\ln t)^m$ lorsque $-1 < \alpha < 0$, on est à même d'affirmer que toutes ces parties finies sont tempérées. En effectuant des translations, on en déduit qu'il en est de même lorsque le point singulier est $a \neq 0$. ◇

Remarque 4.9 Si la partie finie de f s'écrit, comme dans le paragraphe 4.8.2, sous la forme

$$\text{Pf}(f) = \text{Pf} \left[P_n(t^{-1}) \right] + \text{Pf} \left[Q_{m,q}(t^{-1} \ln t) \right] + \text{Pf} \left[R_G(t) \right] + [g],$$

la fonction g étant localement sommable, bornée au voisinage de $t = 0$ et à croissance lente, alors cette partie finie est une distribution tempérée.

4.8.8 Primitivation

Dans le cadre de la primitivation, deux problèmes apparaissent au sujet des fonctions f qui ne sont pas localement sommables et qui engendrent des distributions parties finies. D'une part, la fonction f possède, sur tout intervalle où elle est continue, des primitives qui sont des fonctions, d'autre part, la distribution $Pf(f)$ possède des primitives distributions. Pour ces dernières, on sait (Cf. § 4.5.4) que les primitives des distributions tempérées sont toutes tempérées et que, si la distribution T est causale et tempérée, il existe une unique primitive de T qui soit causale. Cette primitive est désignée par $T^{(-1)}$.¹

Généralisation de la notion de fonction primitive

On définit également une fonction primitive de f en généralisant la fonction $x \mapsto \int_0^x g(t)dt$ associée à g lorsque celle-ci est continue sur \mathbb{R}_+ . Lorsque la fonction f admet des singularités au voisinage desquels f n'est pas sommable, cette définition n'est plus valable. Il est logique alors de faire un prolongement de cette intégrale au moyen d'une partie finie. On envisage donc, lorsque f n'admet que la singularité $t = 0$, par exemple, la fonction qu'on notera $f^{(-1)}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f^{(-1)}(x) = Pf\left(\int_0^x f(t)dt\right)$$

Finalement, cette définition restera valable pour toutes les fonctions f définissant les parties finies élémentaires.

Exemple 4.12 Déterminons $f^{(-1)}$ lorsque $f(t) = \mathcal{U}(t)t^{-n}$

D'après la définition :

$$Pf\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^x t^{-n} dt + \mathcal{I}_\varepsilon(T_{n-1}(1)t^{-n}) \right]$$

Dans cette formule, le développement de Taylor de la fonction $t \rightarrow 1$ se réduit à 1 et la partie infinie n'est autre que $-\frac{1}{-n+1}(\varepsilon)^{-n+1}$. Cette primitive au point ε se supprime dans le calcul. Finalement, on obtient :

$$Pf\left(\int_0^x f(t)dt\right) = \frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$$

C'est la primitive habituelle «sans terme constant». On observerait la même propriété pour les fonctions produits de puissances par des logarithmes.

Détaillons un autre exemple relatif à la seule singularité $t = a > 0$.

Exemple 4.13 Déterminons $f^{(-1)}$ lorsque $f(t) = \mathcal{U}(t)(|t-a|)^{-3/2}$

Pour $0 < x < a$, la partie finie cherchée se réduit à la primitive $\int_0^x f(t)dt = 2\left[(a-x)^{-1/2} - a^{-1/2}\right]$. Pour $x > a$, elle s'exprime par la somme de deux parties finies, à savoir la partie finie à gauche qui s'écrit :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{a-\varepsilon} (a-t)^{-3/2} dt - 2(\varepsilon)^{-1/2} \right]$$

¹Notation d'une primitive considérée comme une dérivée d'ordre -1.

Et la partie finie à droite qui s'écrit :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{a+\varepsilon}^x (t-a)^{-3/2} dt - 2(\varepsilon)^{-1/2} \right]$$

Tous calculs faits, on trouve $f^{(-1)}(x) = -2 \left[(x-a)^{-1/2} + a^{-1/2} \right]$. Le résultat est ici une fonction non continue mais localement sommable.

On trouvera d'autres calculs dans l'exercice 7.27.

Considérons $T = \text{Pf}(t^\alpha)$ où α est non entier. On en déduit immédiatement que $\frac{1}{\alpha+1} \text{Pf}(t^{\alpha+1})$ est la primitive causale tempérée unique de T et que cette partie finie est celle de la primitive généralisée de t^α .

Soit $T = \text{Pf}(t^{-n})$ avec n entier. Si $n = 1$, on voit que $T^{(-1)} = \mathcal{U}(t) \ln t$. Dans ce cas, on trouve encore la partie finie de $(t^{-1})^{(-1)}$. Si $n > 1$, la proposition 4.14 nous donne : $T^{(-1)} = \frac{1}{1-n} \left[\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-n+1}) + \frac{[-1]^n}{(n-1)!} \delta^{(n-2)} \right]$.

Il en résulte que les égalités obtenues précédemment ne sont plus réalisées.

Soit $T = \text{Pf}(t^\alpha \ln^m t)$ où α est non entier. A priori, une primitive est une combinaison linéaire de parties finies logarithmiques où l'exposant de la puissance est $\alpha + 1$ et l'exposant du logarithme inférieur ou égal à m et éventuellement nul. On procède par identification en posant :

$$T^{(-1)} = \text{Pf} \left[t^{\alpha+1} \left[\sum_0^m a_k \ln^k t \right] \right]$$

On trouve les relations :

$$(\alpha+1)a_m = 1, \quad (\alpha+1)a_{m-1} + ma_m = 0, \dots, \quad (\alpha+1)a_0 + a_1 = 0$$

Ce système admet une solution unique qui s'écrit :

$$T^{(-1)} = \text{Pf} \left[t^{\alpha+1} \left[\sum_0^m \frac{(-1)^{m-k} m!}{(\alpha+1)^{m-k+1} (k)!} \ln^k t \right] \right]$$

Il est facile de voir que ces calculs aboutiraient au même résultat si on détermine la primitive généralisée de la fonction considérée.

Enfin, dans le cas de $T = \text{Pf}(t^{-n} \ln^m t)$, on trouve, soit la fonction localement sommable $\frac{\ln^{m+1} t}{m+1}$ dans le cas où $n = 1$, soit une solution du même type que dans le cas précédent en remplaçant α par $-n$. Là encore, la primitive causale tempérée de la partie finie de f est la partie finie de la primitive généralisée de f .

Proposition 4.19 *La primitive causale tempérée de la partie finie causale : $\text{Pf}[\mathcal{U}(t)t^\alpha]$ dont l'exposant α complexe est non entier négatif avec : $\Re(\alpha) \leq -1$, vérifie la relation :*

$$\left[\text{Pf}[\mathcal{U}(t)t^\alpha] \right]^{(-1)} = \frac{1}{\alpha+1} \text{Pf}[\mathcal{U}(t)t^{\alpha+1}]$$

Pour une partie finie logarithmique où l'exposant de la puissance α vérifie toujours $\Re(\alpha) \leq -1$, avec $\alpha \neq -1$ s'il est entier, ou pour la partie finie de t^{-n} où $n > 1$, on a, respectivement les relations suivantes :

$$\left[\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^\alpha \ln^m t) \right]^{(-1)} = \text{Pf} \left[\mathcal{U}(t)t^{\alpha+1} \left[\sum_0^m \frac{(-1)^{m-k} m!}{(\alpha+1)^{m-k+1} (k)!} \ln^k t \right] \right] \quad (4.15)$$

$$\left[\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-n}) \right]^{(-1)} = \frac{1}{1-n} \left[\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-n+1}) + \frac{[-1]^n}{(n-1)!} \delta^{(n-2)} \right] \quad (4.16)$$

Par ailleurs, soit une fonction causale f , non localement sommable, engendrant une distribution partie finie. On définit la primitive généralisée $f^{(-1)}$ de f comme la fonction causale telle que, pour $x > 0$, $f^{(-1)}(x) = \text{Pf}(\int_0^x f(t)dt)$. Alors, les parties finies précédentes vérifient :

$$\text{Pf}(f) \text{ étant élémentaire, } f(t) \neq t^{-n}, (n > 1), \quad \left[\text{Pf}(f) \right]^{(-1)} = \text{Pf} \left[f^{(-1)} \right]$$

$$\forall n > 1, \quad \left[\text{Pf}(t^{-n}) \right]^{(-1)} = \text{Pf} \left[(t^{-n})^{(-1)} \right] + \frac{[-1]^{n-1}}{(n-1)(n-1)!} \delta^{(n-2)} \quad (4.17)$$

Ces propriétés se généralisent aux cas d'autres singularités que $t = 0$ (Cf. Exercice 7.27).

4.9 Transformée de Laplace d'une partie finie causale

4.9.1 Abscisse de convergence d'une partie finie causale de type puissance ou logarithmique

On a vu précédemment que les parties finies élémentaires sont tempérées. On en déduit donc que leurs abscisses de convergence sont inférieures ou égales à 0. Il en résulte aussi que si on ajoute à de telles parties finies une fonction g localement sommable transformable par \mathcal{L} , l'abscisse de convergence de la distribution obtenue sera inférieure ou égale à $\sup(\zeta_c(g), 0)$.

Par exemple, la fonction $t \mapsto f(t) = \mathcal{U}(t) \frac{J_0(t)}{t^n}$ se présente comme une somme de parties finies de type puissances et d'une fonction localement sommable qui peut s'écrire sous la forme $g(t) = (J_0(t) - P_n(t))t^{-n}$ où P_n est un certain polynôme de degré $n - 1$.

Cette fonction est continue sur $[0, 1]$ et, comme J_0 est bornée, on a, sur $[1, +\infty[$ la majoration $|f(t)| \leq M + |P_n(t)|$. Il en résulte que $\zeta_a(g) \leq 0$, d'où l'on déduit que $\sigma(\text{Pf}(f)) \leq 0$.

Sur cet exemple, on constate que l'abscisse de convergence de la partie finie est inférieure ou égale à $\sup(\zeta_c(J_0), 0)$. Le lecteur peut s'assurer que cette propriété est générale. Concluons :

Proposition 4.20 *Les distributions parties finies élémentaires sont tempérées, leurs abscisses de convergence sont donc inférieures ou égales à 0. Si $\text{Pf}(f)$ est une telle partie finie et si $g \in \mathcal{L}_d$, alors $\sigma(\text{Pf}(f) + [g]) \leq \sup(\zeta(g), 0)$. En particulier, si g est à croissance lente, on a $\sigma(\text{Pf}(f) + [g]) \leq 0$.*

Par ailleurs, si h est une fonction définie par $h(t) = g(t)(\ln t)^j t^\alpha$, où g est une fonction admettant, au voisinage de $t = 0$, un développement limité d'ordre $E(-\text{Re}(\alpha))$ et appartenant à \mathcal{L}_d , j un entier positif et α un nombre réel ou complexe de partie réelle inférieure à -1 , on a : $\sigma(\text{Pf}(h)) \leq \sup(\zeta_c(g), 0)$. Cette propriété reste valable pour $h(t) = \mathcal{U}(t - a) \ln^j(t - a)(t - a)^\alpha$.

Remarque 4.10 *Bien entendu, comme la fonction g est sommable sur $]0, a[$, la fonction $\mathcal{U}(a - t)g(t)$ est d'abscisse ≤ 0 . Il est facile d'en déduire que la partie finie de $h(t) = \mathcal{U}(a - t) \ln^j(a - t)(a - t)^\alpha$ vérifie $\sigma(h) \leq 0$.*

Lorsque l'on connaît l'abscisse de convergence d'une distribution causale, on sait que son image de Laplace s'exprime par son action sur la fonction $t \mapsto \alpha_\varepsilon(t)e^{-st}$. Nous examinons la particularité de cette action dans le cas d'une partie finie.

4.9.2 Action d'une partie finie sur une fonction de \mathcal{S}

Proposition 4.21 *Soit une partie finie de type puissance ou logarithmique. Alors, son action sur une fonction $\varphi \in \mathcal{S}$ est définie par la même formule que celle correspondant aux fonctions test de \mathcal{D} .*

Preuve

◇ On sait déjà que la partie finie est tempérée. Pour montrer que la formule de définition de cette partie finie se prolonge aux fonctions de \mathcal{S} , nous allons considérer qu'une fonction de \mathcal{S} est une limite de suite d'éléments de \mathcal{D} .

Soit une fonction $\psi \in \mathcal{D}$, positive, de support $[-2, +2]$, égale à 1 sur le segment $[-1, +1]$ et inférieure à 1. On pose $\psi_n(t) = \psi(t/n)$, de sorte que ψ_n est une fonction de \mathcal{D} , égale à 1 sur le segment $[-n, n]$ et de support $[-2n, 2n]$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. On considère la suite de terme général $\psi_n \varphi$ qui est incluse dans \mathcal{D} .

Montrons que $\psi_n \varphi \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$, autrement dit que $\theta_n = \psi_n \varphi - \varphi$ tend vers 0 dans \mathcal{S} .

On se donne deux entiers arbitraires k, p . Puisque $\varphi \in \mathcal{S}$, il existe A tel que : $|t| > A \Rightarrow |t^k| \sup_{j \leq p} |\varphi^{(j)}(t)| < \varepsilon$. On examine alors le produit $|t^k (\theta_n)^{(j)}(t)|$ lorsque $n > A$ et $j \leq p$.

Sur $[-n, n]$, on a : $\theta_n = 0$. Sur $[2n, +\infty[$, on a : $\theta_n = -\varphi$ et, puisque $n > A$, on en déduit $|t^k (\theta_n)^{(j)}(t)| < \varepsilon$. Enfin, sur le segment $[n, 2n]$, $|t^k (\theta_n)^{(j)}(t)|$ se présente, en utilisant la formule de Leibniz, comme la somme de $t^k (\psi_n - 1) \varphi^{(j)}$ qui est majorée par ε et de termes du type $t^k C_j^m \frac{\psi^{(m)}}{n^m} (\varphi)^{(j-m)}$ (avec $1 \leq m \leq j$) et qui sont donc majorés par $\frac{K_j}{n} \varepsilon$ où K_j est une constante faisant intervenir des coefficients de Newton et la borne supérieure de toutes les dérivées de ψ jusqu'à l'ordre j , donc ne dépendant que de j .

Il en résulte que sur cet intervalle $[n, 2n]$, on a $|t^k| \sup_{j \leq p} |(\theta_n)^{(j)}(t)| \leq \varepsilon [1 + \frac{1}{n} \sup_{j \leq p} K_j]$.

Prenons alors $n > \sup(A, \sup_{j \leq p} K_j)$; les majorations précédentes nous donnent $|t^k| \sup_{j \leq p} |(\theta_n)^{(j)}(t)| < 2\varepsilon$.

Cela prouve l'affirmation de convergence faite ci-dessus.

La distribution $\text{Pf}(f)$ étant tempérée, on en déduit que :

$$\langle \text{Pf}(f), \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \text{Pf}(f), \theta_n \rangle$$

Pour simplifier les calculs, on continue la démonstration en prenant par exemple $f(t) = t^{-3/2} \ln t$. D'après la définition de l'action d'une partie finie sur un élément de \mathcal{D} , on a :

$$\langle \text{Pf}(f), \theta_n \rangle = \int_0^{2n} [(\psi_n \varphi)(t) - (\psi_n \varphi)(0)] \frac{\ln t dt}{t^{3/2}} + 2 \frac{(\psi_n \varphi)(0)}{\sqrt{2n}} (\ln(2n) + 2)$$

On veut prouver que lorsque $n \rightarrow +\infty$, cette expression tend vers :

$$\int_0^{2n} [\varphi(t) - \varphi(0)] \frac{\ln t dt}{t^{3/2}} + 2 \frac{\varphi(0)}{\sqrt{2n}} (\ln(2n) + 2)$$

Comme $\theta_n(0) = 0$, la différence des deux expressions se réduit à :

$$\int_0^{2n} \theta_n(0) t^{-3/2} \ln t dt - \int_{2n}^{+\infty} \varphi(t) t^{-3/2} \ln t dt$$

Puisque $\varphi \in \mathcal{S}$, la dernière intégrale, qui est un reste d'intégrale convergente, tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. On décompose la première intégrale en deux parties. Dans l'une de ces parties qui est étendue à $[0, 1]$, on peut majorer, puisque $\theta_n(0) = 0$, la fonction à intégrer par une fonction sommable en $t = 0$, à savoir $\sup_{t \in [0,1]} |(\theta_n)'(t)| [t^{-1/2} |\ln t|]$ et comme $\sup_{t \in [0,1]} |(\theta_n)'(t)| \rightarrow 0$, cette intégrale tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Il reste l'intégrale $\int_1^{2n} \theta_n(t) t^{-3/2} \ln t dt$ qui peut être majorée, d'après ce qui précède, par $2\varepsilon \int_1^{+\infty} t^{-3/2} \ln t dt$, quantité arbitrairement petite.

Il résulte de tout ce raisonnement que l'action de $\text{Pf}(f)$ sur la fonction φ qui est dans \mathcal{S} est définie par la même formule que lorsque la fonction φ se trouve dans \mathcal{D} . \diamond

Remarque 4.11 *Le prolongement de la formule définissant la partie finie lorsque la singularité est en $t = 0$ pour les fonctions de \mathcal{S} est également valable lorsque la singularité est en $t = a > 0$, soit pour la partie finie à droite, soit pour la partie finie à gauche. Il suffit de reprendre la démonstration faite précédemment.*

Corollaire 4.3 *L'abscisse de convergence d'une partie finie élémentaire est nulle.*

\diamond Puisque l'abscisse d'une distribution tempérée est inférieure ou égale à 0, il reste à montrer que le produit $e^{xt}T$ où $x > 0$, T étant cette partie finie, n'est

pas tempérée. On se contente de prendre $-2 < \alpha \leq -1$ et $m = 1$. Le produit précédent se définit par :

$$\left\langle e^{xt} \text{Pf} \left[\mathcal{U}(t) t^\alpha \ln t \right], \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t) e^{xt} \varphi(t) dt - \varphi(0) (\varepsilon)^{\alpha+1} \left[\frac{\ln \varepsilon}{\alpha+1} + \frac{1}{(\alpha+1)^2} \right] \right]$$

La fonction $t \mapsto \beta_\varepsilon(t) \exp(-xt/2)$, où la fonction β_ε est une fonction nulle au voisinage de $-\infty$ et égale à 1 sur un voisinage de $[0, +\infty[$, est dans \mathcal{S} , mais elle rend l'intégrale de la définition précédente infinie. On en déduit le résultat. Il est facile de voir que la démonstration est valable dans tous les cas. \diamond

4.9.3 Détermination des images de Laplace de ces parties finies

Puisque l'abscisse est nulle, la définition de l'image de Laplace F de la partie finie de f nous donne :

$$F(s) = \langle \text{Pf}(f), \alpha_\varepsilon(t) \exp(-st) \rangle$$

En supposant que l'exposant de la puissance dans f soit dans l'intervalle fermé : $[-(n+1), -n[$ et en utilisant alors l'expression d'une partie finie sur une fonction de \mathcal{S} , selon la proposition précédente, on obtient, puisque $\alpha_\varepsilon = 1$ sur $[0, +\infty[$:

$$F(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} f(t) \exp(-st) dt + \mathcal{I}_\varepsilon T_{n-1}(e^{-st}) f(t) \right]$$

On se contente de faire les calculs à partir de cette formule pour deux exemples simples où la singularité est soit $t = 0$, soit $t = a > 0$. D'autres exemples sont proposés en exercice, en particulier des images de parties finies logarithmiques (Cf. exercice 7.6 et 7.7) D'autres méthodes sont utilisées dans le chapitre 5 (§5.2).

Exemple 4.14

Soit $f(t) = \mathcal{U}(t) t^\alpha$ où $-3 < \alpha < -2$. Le polynôme de Taylor de degré $n - 1 = 1$ de e^{-st} s'écrit : $T_1(e^{-st}) = 1 - st$. On en déduit :

$$F(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} t^\alpha \exp(-st) dt + \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} - s \frac{\varepsilon^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right]$$

En intégrant une fois par parties le premier terme et en tenant compte du fait que les limites en $+\infty$ des termes intégrés, à cause de la présence de l'exponentielle, sont tous nuls, on obtient, pour cette intégrale :

$$-\frac{e^{-s\varepsilon} \varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} - s \frac{e^{-s\varepsilon} \varepsilon^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \frac{s^2}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \int_{\varepsilon}^{+\infty} t^{\alpha+2} e^{-st} dt$$

En substituant dans la définition précédente, en développant l'exponentielle au voisinage de $\varepsilon = 0$ et en remarquant que la dernière intégrale donne à la limite une intégrale eulérienne, on obtient :

$$F(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{s^2 (\varepsilon)^{\alpha+3}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} \right] + \frac{\Gamma(\alpha+3) s^{-\alpha-1}}{(\alpha+1)(\alpha+2)}$$

On en déduit, en utilisant une des propriétés de la fonction Γ :

$$\forall s \in \mathbb{C} \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L} \left[\text{Pf} \left(\mathcal{U}(t)t^\alpha \right) \right] = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}} \quad (4.18)$$

On remarque que le résultat est formellement le même que pour une fonction puissance d'exposant $\alpha > -1$. On le prouvera (Cf.Exemple 5.19) pour tous les cas où α n'est pas un entier négatif ou nul. L'exemple 5.18 traite le cas d'un exposant entier négatif.

Exemple 4.15

Soit $f(t) = \mathcal{U}(t)\frac{1}{t-a}$. Pour trouver l'image de $\text{Pf}(f)$, on considère la somme des parties finies à gauche et à droite. En appliquant la formule de définition, on trouve pour la variable $s = x$ réel :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\text{Pf}(\frac{\mathcal{U}(t-a)}{t-a}))(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{a+\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t-a} dt - e^{-xa} \ln \epsilon \right] \\ \mathcal{L}(\text{Pf}(\frac{\mathcal{U}(a-t)}{t-a}))(x) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{a-\epsilon} \frac{e^{-xt}}{t-a} dt + e^{-xa} \ln \epsilon \right] \end{aligned}$$

On remarque que la somme de ces deux transformées fait disparaître le terme logarithmique. La somme en question est, en effet, une valeur principale au sens de Cauchy. Pour exprimer le résultat à l'aide d'une fonction connue, on utilise dans les deux intégrales précédentes le changement de variable $u = -x(t-a)$. On obtient ainsi, pour tout $x > 0$:

$$\mathcal{L} \left(\text{Pf} \left(\frac{\mathcal{U}(t)}{t-a} \right) \right) (x) = -e^{-ax} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{e^u}{u} du + \int_{\epsilon}^{ax} \frac{e^u}{u} du \right]$$

On reconnaît dans cette expression la valeur principale de l'exponentielle intégrale, à savoir $\text{Ei}^*(ax)$ où, par définition $\text{Ei}^*(t) = vp \int_{-\infty}^t \frac{e^u}{u} du$. En prolongeant analytiquement cette fonction dans le demi-plan ouvert Π_0 , on peut conclure :

$$\forall s \in \mathbb{C} \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L} \left(\text{Pf} \left(\frac{\mathcal{U}(t)}{t-a} \right) \right) (s) = -e^{-as} \text{Ei}^*(as) \quad (4.19)$$

Remarque 4.12 On constate la différence de résultat avec la transformée de $\text{Pf}(1/t)$ qui est donnée dans l'exemple 5.18. En effet, ici, la translatée d'indice a ne fournirait que la partie finie à droite de $1/(t-a)$ (Cf, ce qui suit).

4.10 Propriétés des images de Laplace des parties finies

Dans ce qui suit, on suppose que la fonction f n'a que la singularité $t = 0$ et qu'elle se présente sous la forme canonique associée aux polynômes P, Q et à la

fonction R_C (Cf. § 4.8.3). La distribution $\text{Pf}(f)$ est alors la somme de parties finies élémentaires et d'une distribution régulière $[g]$.

Comme les propriétés sont connues pour la distribution régulière $[g]$ et que les propriétés que l'on va mettre en évidence sont linéaires, on peut se contenter dans certains cas, pour ne pas alourdir les démonstrations et les énoncés, de considérer seulement le cas d'une partie finie de type puissance. On pose : $\sigma(\text{Pf}(f)) = \zeta$.

4.10.1 Image d'une translatée

Soit $a > 0$ et une fonction f du type canonique précédent. Comme la transformée de Laplace de chacune des parties finies élémentaires h vérifie : $\mathcal{L}(\text{Pf}(h_a)) = \exp(-as)\mathcal{L}(\text{Pf}(h))$ et qu'il en est de même pour la distribution $[g]$, on en déduit :

$$\mathcal{L}(\text{Pf}(f_a)) = \exp(-as)\mathcal{L}(\text{Pf}(f))$$

Exemple 4.16 Image de Laplace de $\text{Pf}(\mathcal{U}(t-a)\frac{1}{t-a})$

On utilise le résultat de l'exemple 5.18, à savoir $\mathcal{L}(\text{Pf}[\mathcal{U}(t)\frac{1}{t}])(s) = -\gamma - [\log](s)$.

On en déduit : $\mathcal{L}(\text{Pf}[\mathcal{U}(t-a)\frac{1}{t-a}])(x) = \exp(-as)[- \gamma - [\log](s)]$.

Vérifions que c'est ce qui a été trouvé à l'intérieur du calcul de l'exemple précédent pour la partie finie à droite.

Par translation sur la variable, on a : $\int_{a+\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t-a} dt = \exp(-at) \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{u} du$.

Cette dernière intégrale donne, dans une intégration par parties, la relation : $-e^{-x\varepsilon} \ln \varepsilon + x \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-ux} \ln u du$. Le premier terme se supprime avec la partie infinie trouvée dans l'exemple précédent.

Il reste enfin la dernière intégrale qui tend vers l'expression (Cf. Annexe 1) :

$$\begin{aligned} x \int_0^{+\infty} e^{-ux} \ln u du &= -xe^{-x\varepsilon} \ln(\varepsilon) + \int_0^{+\infty} e^{-ux} \ln u du \\ &= + \int_0^{+\infty} e^{-v} (\ln v - \ln x) dv = \Gamma'(1) - \ln x = -\gamma - \ln x \end{aligned}$$

On obtient ainsi le résultat prévu.

4.10.2 Image du produit d'un original par une exponentielle

Soit a un complexe quelconque. La fonction $t \mapsto f(t)e^{at}$ garde les mêmes singularités que celles de f et il est facile de voir que l'abscisse de convergence de sa partie finie est devenue $\zeta + \Re(a)$ où ζ est l'abscisse de $\text{Pf}(f)$. Dans la définition de la transformée de $\text{Pf}(f)$, il suffit pour obtenir l'image, lorsque $\Re(s-a) > \zeta$ de remplacer s par $s-a$ dans l'expression de l'image de $\text{Pf}(f)$.

Exemple 4.17 Images des parties finies de $\frac{\cos t}{t}$ et $\frac{\text{cht}}{t}$.

On se sert du résultat de l'exemple 5.17 : l'image de $\text{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t)}{t}\right)$ est $-\text{[log]}(s) - \gamma$.
 En appliquant ce qui précède, on obtient en utilisant $a = i$ dont la partie réelle est nulle, ce qui ne change pas l'abscisse de convergence :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\frac{e^{it}}{t}\right)\right)(s) = -\text{[log]}(s - i) - \gamma$$

On en déduit en utilisant également $a = -i$:

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\frac{\cos t}{t}\right)\right)(s) = -\frac{1}{2}\left[\text{[log]}(s - i) + \text{[log]}(s + i)\right] - \gamma$$

En utilisant la définition de [log] et en se plaçant, pour simplifier, sur l'axe des réels, cas pour lequel les arguments de $s - i$ et $s + i$ sont opposés, on obtient :

$$\forall x > 0, \quad \mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\frac{\cos t}{t}\right)\right)(x) = -\ln(\sqrt{x^2 + 1}) - \gamma$$

Il suffit ensuite de prolonger analytiquement dans le demi-plan Π_0 :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\frac{\cos t}{t}\right)\right)(s) = -\text{[log]}[(s^2 + 1)^{1/2}] - \gamma \quad (4.20)$$

On peut aussi, par différence, retrouver l'image de la fonction continue $\frac{\mathcal{U}(t) \sin t}{t}$.
 En prenant encore x réel, les parties réelles disparaissent et la partie imaginaire est égale à deux fois l'argument de $x - i$, c'est-à-dire $-2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.
 En tenant compte de la division par $2i$, on obtient :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)(s) = \text{[arctan]}(1/s)$$

De même, en prenant $a = 1$ et $a = -1$, cas où les dilatations sont de coefficients réels, on obtient, mais en notant que l'on modifie l'abscisse de convergence en $0 + \sup(1, -1) = 1$:

$$\Re(s) > 1 \Rightarrow \mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\frac{\text{ch} t}{t}\right)\right)(s) = -\text{[log]}[(s^2 - 1)^{1/2}] - \gamma \quad (4.21)$$

Remarque 4.13 Rien n'empêche par la même méthode de chercher les images des parties finies de $\frac{\cos(at)}{t}$ et $\frac{\text{ch}(at)}{t}$

4.10.3 Image de la partie finie d'une dérivée

Pour qu'on puisse parler de la partie finie de la dérivée, on suppose que la fonction g de la formule ci-dessus admet une dérivée localement sommable et que $g(0+)$ existe. Comme on sait que (Cf. Proposition 4.7) : $\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(\text{Pf}(f))\right] = s\mathcal{L}\left[\text{Pf}(f)\right]$,

il s'agit seulement de comparer $\frac{d}{dt}(\text{Pf}(f))$ et $\text{Pf}(f')$. D'après ce qui a été vu précédemment, ces deux distributions sont identiques pour les parties finies élémentaires qui ne sont pas du type puissances à exposants entiers. Pour ces dernières (Cf. Proposition 4.17), on a : $\frac{d}{dt}(\text{Pf}(t^{-n})) = -n(\text{Pf}(t^{-n-1})) + (-1)^n \frac{\delta^{(n)}}{n!}$.

De plus, pour la fonction g , on a $\frac{d}{dt}(g) = [g'] + g(0+)\delta$.

On en déduit ainsi que, lorsque f n'a que la singularité $t = 0$ et qu'elle s'écrit $f(t) = P_n(t^{-1}) + [h] + [g]$ où $P_n(u) = \sum_0^n a_k u^k$ est un polynôme et h une fonction n'ayant au point $t = 0$ qu'une singularité logarithmique :

$$\mathcal{L}[(\text{Pf}(f'))](s) = s\mathcal{L}[(\text{Pf}(f))](s) - g(0+) - \sum_0^n (-1)^k \frac{a_k}{k!} s^k \quad (4.22)$$

Exemple 4.18 Détermination de l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t) \frac{\cos t}{t^2}$.

En dérivant la fonction f définie par $f(t) = \frac{\cos t}{t}$, on obtient :

$$f'(t) = -\frac{\sin t}{t} - \frac{\cos t}{t^2}$$

On peut donc obtenir l'image cherchée en appliquant la formule précédente puisqu'on connaît les images de $\frac{\sin t}{t}$ et de $\text{Pf}(\frac{\cos t}{t})$ (voir l'exemple précédent).

La fonction f s'écrit $f(t) = \frac{1}{t} + g(t)$ où g est régulière avec $g(0) = 0$. On en déduit, d'après la formule (4.22) :

$$\mathcal{L}[(\text{Pf}(f'))](s) = x \left[-\ln \sqrt{x^2 + 1} - \gamma \right] - x$$

En tenant compte de l'image de $\frac{\sin t}{t}$ qui est égale à $[\arctan](1/x)$, on obtient :

$$\mathcal{L}[(\text{Pf}(\frac{\cos t}{t^2}))](s) = -[\arctan](1/x) + x \ln \sqrt{x^2 + 1} + (\gamma - 1)x \quad (4.23)$$

4.10.4 Image de la partie finie d'une primitive

Associés d'abord à chacune des fonctions f_j qui composent une partie finie la fonction primitive $(f_j)^{(-1)}$ (Cf. § 4.8.7). Pour trouver la transformée de Laplace de ces primitives, nous passons par l'intermédiaire de $(\text{Pf}(f_j))^{(-1)}$. Pour cela, on se sert des relations (4.17). On sait que les distributions primitives ne diffèrent que pour le cas de t^{-n} où $n > 1$. Comme pour la distribution régulière $[g]$, l'image de Laplace de la primitive ordinaire s'obtient en divisant l'image de $[g]$ par s , on en déduit :

Proposition 4.22 Soit la partie finie de la fonction $\mathcal{U}f$ où f est définie (Cf. §4.8.3) par :

$$f(t) = P_n(t^{-1}) + Q_{m,q}(t^{-1}, \ln t) + R_C(t) + g(t)$$

Alors, si $P_n(X) = \sum_1^n a_k X^k$, l'image de Laplace de la partie finie de la primitive généralisée de f est donnée par :

$$\mathcal{L} \left[\text{Pf}(f^{(-1)}) \right] (s) = \frac{1}{s} \left[\mathcal{L} \left[\text{Pf}(f) \right] (s) + \sum_2^n \frac{(-1)^k a_k s^{k-2}}{(k-1)[(k-1)!]} \right] \quad (4.24)$$

4.10.5 Dilatation réelle de rapport $k > 0$

La relation : $\langle \text{Pf}(f(kt)), e^{-st} \rangle = \langle \text{Pf}(f(u)), e^{-\frac{s}{k}u} \rangle$, montre que cette propriété de dilatation pour les images de Laplace des distributions reste valable. On peut la vérifier sur les parties finies élémentaires. Par exemple, pour $f(t) = t^{-n}$, la partie infinie pour $f(kt)$ s'écrit : $\mathcal{I}_\varepsilon [T_{n-1}(e^{-st}(kt)^{-n})]$. Le changement de variable $u = kt$ dans cette primitive la remplace par : $\frac{1}{k} \mathcal{I}_{k\varepsilon} [T_{n-1}(e^{-su/k}(u)^{-n})]$.

De même, on a : $\int_\varepsilon f(kt)e^{-st} dt = \frac{1}{k} \int_\varepsilon f(u)e^{-su/k} du$.

On en déduit, après vérification pour une partie finie quelconque :

$$\mathcal{L}(\text{Pf}(f(kt)))(s) = \frac{1}{k} \mathcal{L}(\text{Pf}(f(t)))(s/k)$$

4.10.6 Dilatation complexe

Traisons un exemple simple montrant que la propriété de dilatation complexe n'est pas toujours vérifiée.

Exemple 4.19 Image de $\mathcal{U}(t) \frac{\exp(iat)}{at}$, a étant complexe

Dans le paragraphe 4.10.2, on a trouvé que l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t) \frac{\exp(it)}{t}$ est $-\log(s-i) - \gamma$. De même celle de $\mathcal{U}(t) \frac{\exp(iat)}{t}$ qui est : $-\log(s-ai) - \gamma$. Cependant, si on applique la formule généralisant la propriété de dilatation réelle, on obtiendrait à partir du premier résultat, pour image de $\mathcal{U}(t) \frac{\exp(iat)}{at}$, la fonction $-\frac{1}{a} \log(\frac{s}{a} - i) - \gamma$. C'est manifestement faux puisqu'il suffit de diviser par a le deuxième résultat pour obtenir :

$$\mathcal{L} \left[\mathcal{U}(t) \frac{\exp(iat)}{at} \right] = -\frac{1}{a} \log(s-ai) - \gamma$$

Les résultats diffèrent de $\frac{\log(a)}{a}$. On en déduit que la généralisation envisagée n'est pas toujours licite. On en aurait un autre exemple en comparant les deux formules 4.20 et 4.21 avec le coefficient complexe $a = i$.

Exemple 4.20 Détermination de l'image de $\text{Pf} \left[\mathcal{U}(t) \frac{\exp(at)}{(at)^{3/2}} \right]$, a étant complexe, de partie réelle positive.

On peut, de façon simple, trouver cette image en utilisant encore la propriété 4.10.2. L'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t)(t)^{-3/2}$ (Cf. Formule 4.18) est la fonction $s \mapsto \Gamma(-1/2)[s^{1/2}]$. On en déduit par multiplication par la constante $[a^{-3/2}]$, puis la multiplication de l'original par $\exp(at)$, le résultat cherché, à la condition que $\Re(s - a) > 0$:

$$\text{Pf} \left[\mathcal{U}(t) \frac{\exp(at)}{(at)^{3/2}} \right] = \Gamma(-1/2)[(s - a)^{1/2}]$$

Cette méthode étant trop liée à la présence de l'exponentielle, donc trop reliée à la propriété de translation complexe, on décrit, sur cet exemple, une autre méthode susceptible de généraliser la propriété de dilatation complexe. La partie finie de $\mathcal{U}(t)t^{-3/2}$ admet pour image la fonction $s \mapsto \Gamma(-1/2)s^{1/2}$ et, par conséquent, la partie finie de $\mathcal{U}(t)e^t t^{-3/2}$ est obtenue par la translation d'indice +1, à savoir :

$$\Re(s) > 1, \Rightarrow \mathcal{L} \left[\text{Pf}(\mathcal{U}(t)e^t t^{-3/2}) \right] (s) = \Gamma(-1/2)(s - 1)^{1/2}$$

A partir de ce résultat, on se propose de prouver la formule de dilatation complexe.

On supposera que $a_1 = \Re(a) > 0$ ainsi que $a_2 = \Im(a) > 0$, de sorte que le point a est dans le quart de plan des coordonnées positives. Pour tout réel $x > 1$, le complexe x/a est encore dans Π_1 à la condition que nous supposons réalisée : $\frac{xa_1}{|a|^2} > 1$. Remarquons d'ailleurs que cette condition est réalisée si $a_1 \geq |a|^2$, c'est à dire si a est à l'extérieur du cercle de centre $1/2$ qui passe par O .

On se sert alors du théorème de Cauchy appliqué sur le bord du secteur angulaire ci-après, à la fonction $z \mapsto H(z) = z^{-3/2} \exp \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right)z \right]$ qui est holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus \Delta$ où Δ est une coupure s'identifiant à l'axe des réels négatifs :

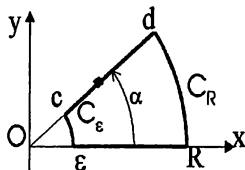


Figure 4.10.5

En paramétrant sur le segment $[c, d]$ par $z = at$, on a ainsi l'égalité :

$$\int_{\epsilon}^R H(t)dt - a \int_{\frac{\epsilon}{|a|}}^{\frac{R}{|a|}} H(at)dt + \int_{C_R^+} H(z)dz + \int_{C_{\epsilon}^-} H(z)dz = 0$$

Un développement en série de puissances montre que, dans un ouvert contenant C_ε , on a : $H(z) = \frac{1}{[z^{3/2}]} + H_1(z)$ où H_1 n'est composée que de puissances de z d'exposants supérieurs à $-1/2$.

On en déduit que $\lim_{z \rightarrow 0} zH_1(z) = 0$, d'où il résulte que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} H_1(z) dz = 0$. L'intégrale restante s'exprime au moyen de α , mesure de l'angle au sommet du secteur :

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{[z^{3/2}]} dz = -i(\varepsilon)^{-1/2} \int_0^\alpha \exp(-i\frac{\theta}{2}) d\theta = 2(\varepsilon)^{-1/2} [\exp(\frac{-i\alpha}{2}) - 1]$$

Par ailleurs, sur le grand cercle,

$$\Re \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) R \exp(i\theta) \right] = -R \sin(\theta) \left(\frac{xa_2}{|a|^2}\right) + \left(1 - \frac{xa_1}{|a|^2}\right) R \cos \theta$$

Ayant choisi $a_2 > 0$, le premier terme est négatif ou nul, alors que le deuxième terme, qui est strictement négatif par hypothèse, fournit sur C_R la minoration uniforme $\frac{xa_1}{|a|^2} R \cos \theta \geq \frac{xa_1}{|a|^2} R \cos \alpha$.

On en déduit la majoration suivante :

$$\left| \int_{C_R} H(z) dz \right| \leq \frac{1}{\sqrt{R}} \int_0^\alpha \left| \exp \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) R e^{i\theta} \right] \right| d\theta \leq \frac{1}{\sqrt{R}} \int_0^\alpha \exp \left[-\frac{xa_1}{|a|^2} R \cos(\theta) \right] d\theta$$

Ceci implique $\left| \int_{C_R} H(z) dz \right| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{R}} \exp \left[-\frac{xa_1}{|a|^2} R \cos(\alpha) \right]$ et, les hypothèses impliquant $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, cette intégrale tend donc vers 0 lorsque $R \rightarrow +\infty$.

Comme les intégrales sur les deux segments du contour sont divergentes, on leur retire leurs parties infinies qui sont respectivement $2(\varepsilon)^{-1/2}$ et $-2\left(\frac{\varepsilon}{|a|}\right)^{-1/2}$, moyennant quoi elles deviendront deux parties finies lorsque $\varepsilon \rightarrow +\infty$; on obtient ainsi, en faisant tendre R vers $+\infty$, la relation :

$$\left[\int_\varepsilon^{+\infty} H(t) dt - 2(\varepsilon)^{-1/2} \right] - a \left[\int_{\frac{\varepsilon}{|a|}}^{+\infty} H(at) dt - 2a^{-3/2} \left(\frac{\varepsilon}{|a|}\right)^{-1/2} \right] + r(\varepsilon) + o(\varepsilon) = 0$$

La fonction résiduelle $r(\varepsilon)$, tenant compte des termes ainsi retranchés et du calcul de l'intégrale sur le petit cercle, est égale à :

$$2(\varepsilon)^{-1/2} - 2a^{-1/2} \left(\frac{\varepsilon}{|a|}\right)^{-1/2} + 2(\varepsilon)^{-1/2} [\exp(\frac{-i\alpha}{2}) - 1]$$

Comme α est l'argument principal de a , on en déduit : $\left|\frac{a}{|a|}\right|^{-1/2} = \exp(\frac{-i\alpha}{2})$.

Par conséquent : $\lim (r(\varepsilon)) = 0$ et, finalement :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\exp\left(\left(1 - \frac{x}{a}\right)t\right)}{t\sqrt{t}} dt - 2(\varepsilon)^{-1/2} \right] = \frac{1}{\sqrt{a}} \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon'}^{+\infty} \frac{\exp\left(\left[1 - \frac{x}{a}\right]at\right)}{t\sqrt{t}} dt - 2[\varepsilon']^{-1/2} \right]$$

Cette relation exprime l'égalité annoncée pour tout x réel vérifiant $x > 1$:

$$\frac{1}{a} \mathcal{L} \left[\text{Pf}(f(t)) \right] \left(\frac{x}{a} \right) = \mathcal{L} \left[\text{Pf}(f(at)) \right] (x)$$

Cette preuve dans le cas particulier étudié peut suggérer les conditions dans lesquelles la propriété de dilatation complexe est vérifiée.

Proposition 4.23 *Soit f une fonction causale non localement sommable, se présentant sous la forme $f(t) = \mathcal{U}(t)t^{-\lambda}g(t)$ où λ est un réel non entier vérifiant $\lambda > 1$ et g la restriction à l'intervalle $[0, +\infty[$ d'une fonction holomorphe dans un ouvert Ω de \mathbb{C} contenant un angle fermé \mathcal{A} de sommet O limité par deux demi-droites faisant avec l'axe des réels des angles de mesures γ_1 et γ_2 vérifiant $0 < \gamma_1 < \pi$ et $-\pi < \gamma_2 < 0$. On se donne un complexe $a \in \mathcal{A}$ dont l'argument vérifie donc : $\gamma_2 < \alpha < \gamma_1$. On suppose :*

- i) *L'abscisse de convergence de $\text{Pf}(f)$ est égal à $\sigma < +\infty$*
- ii) *Quel que soit le réel x tel que $\Re\left(\frac{x}{a}\right) > \sigma$, on a, sur l'arc de cercle Γ_R de centre O , de rayon R , situé dans l'angle \mathcal{A} et limité à l'axe des réels et la demi-droite d'argument α , la propriété suivante :*

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} [z^{-\lambda}]g(z) \exp\left(-z\frac{x}{a}\right) dz = 0$$

Alors, sous ces conditions, la transformée de Laplace de la partie finie de la fonction $t \mapsto f(at)$ existe au point réel x et vérifie l'égalité :

$$a \mathcal{L}(\text{Pf}(f(at)))(x) = \mathcal{L}(\text{Pf}(f(t))\left(\frac{x}{a}\right)$$

Démonstration

◇ On étudie d'abord le cas où $1 < \Re(\lambda) < 2$.

On se sert encore du contour de la figure 4.10.5 dans un ouvert contenu dans $\mathbb{C} \setminus \Delta$ et de la fonction $z \mapsto F(z) = [z^{-\lambda}]g(z) \exp\left(-z\frac{x}{a}\right)$, holomorphe dans l'ouvert Ω contenant l'angle \mathcal{A} .

D'après le théorème de Cauchy, l'intégrale de F sur ce contour est nulle et on sait par hypothèse que la limite de l'intégrale sur l'arc de cercle C_R tend vers 0. Examinons les trois autres morceaux en posant $v(z) = g(z) \exp\left(-z\frac{x}{a}\right)$.

Sur le segment réel $[a, b]$, c'est : $I_{1,\varepsilon,R} = \int_a^b t^{-\lambda} v(t) dt$.

Sur le segment $[c, d]$, c'est : $I_{2,\varepsilon,R} = a \int_{\varepsilon/|a|}^{\varepsilon R/|a|} [(at)^{-\lambda}] v(at) dt$.

Puisque $\Re\left(\frac{x}{a}\right) > \sigma$, la première intégrale admet une limite, notée $I_{1,\varepsilon}$ lorsque $R \rightarrow +\infty$. L'intégrale sur le petit cercle étant indépendante de R et l'intégrale

sur le grand cercle tendant vers 0, l'égalité du théorème de Cauchy entraîne que la deuxième intégrale admet également une limite, que l'on note $I_{2,\varepsilon}$ lorsque $R \rightarrow +\infty$.

On en déduit d'abord :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad I_{1,\varepsilon} - I_{2,\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon} F(z) dz = 0 \quad (*)$$

Rappelons qu'en raison du point singulier $t = 0$, aucune de ces trois intégrales n'est convergente et que les deux premières fournissent les transformées de Laplace (Cf § 4.8.1) respectivement de $t^{-\lambda}v(t)$ et $[(at)^{-\lambda}]v(at)$ à condition de leur ôter leurs parties infinies. On a :

$$\mathcal{L}(\text{Pf}(f(t)))(x/a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[I_{1,\varepsilon} + g(0) \frac{(\varepsilon)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \right]$$

$$\mathcal{L}(\text{Pf}(f(at)))(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} [(at)^{-\lambda}] g(at) e^{(-tx)} dt + g(0) [a^{-\lambda}] \frac{(\varepsilon)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1} \right]$$

Donc, en substituant $\frac{\varepsilon}{|a|}$ à ε et en utilisant l'argument convenable α de a , on a :

$$\begin{aligned} a\mathcal{L}(\text{Pf}(f(at)))(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[I_{2,\varepsilon} + \frac{ag(0)}{-\lambda+1} [a^{-\lambda}] \left[\frac{\varepsilon}{|a|} \right]^{-\lambda+1} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[I_{2,\varepsilon} + \frac{ag(0)}{-\lambda+1} [\varepsilon e^{i\alpha}]^{-\lambda+1} \right] \end{aligned}$$

Sur le petit arc de cercle, on écrit $v(z) = v(0) + zv_1(z)$ où v_1 est bornée au voisinage de $z = 0$. Il en résulte que $\lim_{z \rightarrow 0} z[z^{-\lambda}]zv_1(z) = 0$ puisque $\Re(\lambda) < 2$, et par conséquent :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} F(z) dz = v(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon} [z^{-\lambda}] dz$$

Or, cette dernière intégrale nous fournit :

$$\int_{C_\varepsilon} [z^{-\lambda}] dz = -i(\varepsilon)^{-\lambda+1} \int_0^\alpha \exp[i(-\lambda+1)\theta] d\theta = \frac{[\varepsilon \exp(i\alpha)]^{-\lambda+1} - (\varepsilon)^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}$$

La somme des «parties infinies» dans la relation (*) est donc nulle. Par conséquent, cette relation (*) fournit, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ la formule à prouver dans le cas particulier étudié, à savoir :

$$a\mathcal{L}(\text{Pf}(f(at)))(x) = \mathcal{L}(\text{Pf}(f(t)))(\frac{x}{a})$$

Cas plus général

On suppose maintenant : $n-1 < \Re(\lambda) < n$. Les calculs restent analogues, on peut encore appliquer le théorème de Cauchy et faire tendre R vers $+\infty$ d'où

la relation (*) précédente. On doit maintenant tenir compte des parties infinies à l'aide du symbole $\mathcal{I}_\varepsilon[U]$ qui désigne au signe près, la primitive sans terme constant, prise au point ε de U et à l'aide du polynôme de Taylor $T_{n-1}(v)$ de degré $n - 1$ de la fonction v ou $v(t)$:

$$\mathcal{L}(\text{Pf}(f(t)))(x/a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[I_{1,\varepsilon} + \mathcal{I}_\varepsilon[(t^{-\lambda} T_{n-1}(v))] \right]$$

$$\mathcal{L}(\text{Pf}(f(at)))(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^{+\infty} [(at)^{-\lambda}] v(at) dt + \mathcal{I}_\varepsilon \left[[(at)^{-\lambda}] T_{n-1}(v(at)) \right] \right]$$

En remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{|a|}$, on obtient :

$$a\mathcal{L}(\text{Pf}(f(at)))(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[I_{2,\varepsilon} + a\mathcal{I}_{\frac{\varepsilon}{|a|}} \left[[(at)^{-\lambda}] T_{n-1}(v(at)) \right] \right]$$

Soit un terme quelconque $a_k t^k$ de $T_{n-1}(v)$. Dans $a\mathcal{I}_{\frac{\varepsilon}{|a|}} \left[[(at)^{-\lambda}] T_{n-1}(v(at)) \right]$, il produit, en désignant par α l'argument convenable de a , le terme :

$$\frac{a}{k+1-\lambda} a_k a^k a^{-\lambda} \left(\frac{\varepsilon}{|a|} \right)^{-\lambda+k+1} = \frac{a_k}{k+1-\lambda} [\varepsilon \exp(i\alpha)]^{-\lambda+k+1}$$

Sur le petit arc de cercle, on considère le développement de Taylor d'ordre $n - 1$ de $v(z)$. On a :

$$\int_{C_\varepsilon} F(z) = \int_{C_\varepsilon} [z^{-\lambda}] T_{n-1}(v(z)) dz + \int_{C_\varepsilon} [z^{-\lambda}] v_1(z) dz$$

Grâce à l'inégalité régissant λ , on a : $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \mathcal{A}} [z^{-\lambda}] v_1(z) = 0$, on en déduit que la limite de la deuxième intégrale est nulle. Dans la première intégrale, on pose $z = \varepsilon e^{i\theta}$. Le terme $a_k t^k$ de $T_{n-1}(v(z))$ fournit, par intégration sur $[0, \theta]$ en tenant compte de l'orientation négative du cercle C_ε , le nombre :

$$b_k(\varepsilon) = \frac{a_k}{k+1-\lambda} (\varepsilon)^{k+1-\lambda} \left[1 - \exp(i\alpha(k+1-\lambda)) \right]$$

Finalement, la relation (*) nous donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\text{Pf}(f(t)))(x/a) &- \sum_0^{n-1} \frac{a_k}{k+1-\lambda} (\varepsilon)^{k+1-\lambda} - a\mathcal{L}(\text{Pf}(f(at)))(x) \\ &+ \sum_0^{n-1} \frac{a_k}{k+1-\lambda} (\varepsilon e^{i\alpha})^{k+1-\lambda} + b_k(\varepsilon) + o(\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

Il en résulte donc la formule annoncée :

$$a\mathcal{L}(\text{Pf}(f(at)))(x) = \mathcal{L}(\text{Pf}(f(t)))(\frac{x}{a})$$

Remarque 4.14 Dans certains cas, on peut prendre $a = i$, cela permet de passer de résultats concernant une partie finie de $t^{-\lambda} \sin t$ à des parties finies de $t^{-\lambda} \operatorname{sh} t$ ou des résultats concernant $t^{-\lambda} J_\mu(t)$ à ceux concernant des parties finies de $t^{-\lambda} I_\mu(t)$ (Cf. Exemple 5.32 et 5.33).

Remarque 4.15 On a supposé dans la proposition précédente que $\Re(x/a) > \sigma$. En fait, il suffit que l'une des intégrales associées aux deux segments du contour soient convergentes et même semi-convergente.

C'est le cas lorsque, x étant réel, on prend $a = i$. Si l'intégrale de f est convergente à l'infini, la proposition peut éventuellement s'appliquer malgré les relations $\sigma = \Re(x/a) = 0$ (Cf. Exemple 5.32).

4.10.7 Propriétés d'analyticité par rapport à un paramètre

Proposition 4.24 Soit la fonction f définie par

$$f(t, \lambda) = (\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - a))(u(\lambda)t^{-v(\lambda)} + g(t, \lambda)),$$

où le paramètre λ appartient à un ouvert Ω de \mathbb{C} dans lequel la fonction v ne prend aucune valeur dans \mathbb{N}^* . L'ouvert Ω_1 inclus dans Ω où $\Re(v(\lambda)) < 1$ est supposé non vide.

On suppose que :

- (i) Il existe un réel c tel que, pour tout $\lambda \in \Omega$, la fonction $g(t, \lambda)$ admet une transformée de Laplace $G(s, \lambda)$ définie dans le demi-plan complexe Π_c .
- (ii) Dans Ω , les fonctions u et v sont holomorphes et bornées et la fonction $\lambda \mapsto g(t, \lambda)$ est holomorphe. D'autre part, quel que soit le compact K inclus dans Ω , il existe une fonction causale positive $t \mapsto h(t)$ d'abscisse de convergence vérifiant $\zeta_a(h) \leq c$ telle que, pour presque tout t et tout $\lambda \in K$, on ait la majoration :

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \lambda} g(t, \lambda) \right| e^{-\Re(s)t} \leq h(t)$$

Alors, la fonction $F(s, \lambda)$, image de Laplace de $f(t, \lambda)$ lorsque $\lambda \in \Omega_1$ se prolonge analytiquement dans la totalité de Ω et ce prolongement représente l'image de Laplace de la distribution $\operatorname{Pf}(f(t, \lambda))$ lorsque $\Re(v(\lambda)) \geq 1$.

Démonstration

◇ Quitte à faire une dilatation sur la variable t , on peut supposer que $a = 1$, ce qui simplifie les calculs.

Explicitons d'abord, dans le cas général, la transformée de Laplace $F_1(s, \lambda)$ de la partie finie de $(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - a))t^{-v(\lambda)}$ sous la forme d'une série. On utilise pour cela la borne supérieure M , qui existe par hypothèse, de $\Re(v(\lambda))$ sur Ω et on pose : $n = E(M)$.

Prenons pour commencer le cas $n = 1$.

Le développement de Taylor de e^{-st} étant pris à l'ordre 0, la partie infinie de l'intégrale $\int_0^1 t^{-v(\lambda)} e^{-st} dt$ est la primitive (changée de signe), au point $t = \varepsilon$, de $t^{-v(\lambda)}$, c'est-à-dire : $-\frac{\varepsilon^{-v(\lambda)+1}}{-v(\lambda)+1}$.

Dans la transformée de Laplace, qui est alors définie par :

$$F_1(s, \lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 t^{-v(\lambda)} e^{-st} dt + \frac{\varepsilon^{-v(\lambda)+1}}{-v(\lambda)+1},$$

développons en série la première intégrale en nous appuyant sur la convergence uniforme de la série exponentielle et le fait que la fonction $t \mapsto t^{-v(\lambda)}$ est bornée sur $[\varepsilon, 1]$, ce qui permet l'intégration terme à terme. On obtient :

$$F_1(s, \lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\sum_0^{+\infty} \frac{(-s)^k [1 - \varepsilon^{k+1-v(\lambda)}]}{(k+1-v(\lambda))k!} + \frac{\varepsilon^{-v(\lambda)+1}}{-v(\lambda)+1} \right]$$

Mais la somme de la partie infinie et du premier terme de la série admet la limite $\frac{1}{1-v(\lambda)}$. Dans les autres termes de la série, l'exposant de t est de partie réelle

positive ; ils sont donc majorés par $\frac{|s|^k}{k!}$. On en déduit l'uniforme convergence vis-à-vis de ε , d'où la possibilité de commuter la série avec la limite. Finalement, et ce résultat est valable quel que soit s :

$$F_1(s, \lambda) = \sum_0^{+\infty} \frac{(-s)^k}{(k+1-v(\lambda))k!}$$

Dans le cas général, le procédé est le même. Les n termes de la partie infinie se suppriment avec les puissances de ε contenues dans les n premiers termes du développement de l'intégrale sur $[\varepsilon, 1]$ et, sur la série restante, le passage à la limite permute avec la sommation. On en conclut que dans tous les cas, la formule précédente est vraie.

D'après les hypothèses, c'est une série de fonctions holomorphes de la variable λ dans Ω . De plus, sur tout compact K de Ω et pour tout k assez grand, on a $|k+1-v(\lambda)| \geq k-m$ où m est la borne supérieure de v sur K . Ceci montrant que la convergence de cette série de fonctions holomorphes de λ est localement uniforme dans Ω , on en déduit que $\lambda \mapsto F_1(s, \lambda)$ est holomorphe dans Ω .

La fonction u étant holomorphe dans Ω , on en déduit l'holomorphie de $\lambda \mapsto u(\lambda)F_1(s, \lambda)$ et cela quel que soit s dans \mathbb{C} .

Il reste à examiner la fonction $F_2(s, \lambda) = \int_0^{+\infty} g(t, \lambda) e^{-st} dt$ qui existe par hypothèse quel que soit λ lorsque $\Re(s) > c$.

Fixons s vérifiant cette condition et prenons λ dans un compact K de Ω . L'intégrale qui porte sur la dérivée partielle par rapport à λ s'écrit $\int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial \lambda}(t, \lambda) e^{-st} dt$.

Puisque le module de l'intégrant est majoré par $h(t)e^{-\Re(s)t}$ qui est une fonction sommable indépendante de λ , on en déduit, grâce au théorème d'holomorphie

paramétrique, l'holomorphie de $F_2(s, \lambda)$ dans l'ouvert Ω , quel que soit $z \in \Pi_c$. On en déduit l'holomorphie de $\lambda \mapsto F_2(s, \lambda)$ sur Ω quel que soit $z \in \Pi_c$. Finalement, la somme $\lambda \mapsto u(\lambda)F_1(s, \lambda) + F_2(s, \lambda)$ est holomorphe Ω quel que soit $z \in \Pi_c$.

Comme dans la partie Ω_1 la fonction f est localement sommable et qu'elle admet une transformée de Laplace au sens des fonctions, on en déduit que l'image de la partie finie de f constitue le prolongement analytique en la variable λ de cette image de fonction dans $\Omega \setminus \Omega_1$. \diamond

Exemple 4.21 Détermination de l'image de $\text{Pf} \left[\mathcal{U}(t)t^{-\lambda} \right]$ où $\Re(\lambda) > 0$ avec λ non entier.

La fonction f telle que $f(t) = \mathcal{U}(t)t^{-\lambda}$ est localement sommable pour $\Re(\lambda) < 1$ et on a trouvé son image de Laplace $\Gamma(1 - \lambda)s^{\lambda-1}$ pour $\Re(s) > 0$. La proposition précédente s'applique ici trivialement. La fonction $\lambda \mapsto \Gamma(1 - \lambda)s^{\lambda-1}$ étant analytique dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$, on montre ainsi (résultat connu par d'autres procédés) que cette fonction représente, lorsque f n'est plus localement sommable, l'image de Laplace de $\text{Pf}(f)$.

Remarque 4.16 Bien entendu, cette proposition s'applique à des sommes de telles fonctions où peuvent donc intervenir plusieurs couples de fonctions (u, v) possédant les propriétés indiquées (voir les fonctions de Bessel dans § 5.4.7).

4.10.8 Méthodes de calculs d'images de Laplace de parties finies

On verra dans le chapitre suivant que beaucoup de méthodes utilisées dans le chapitre 2 pour le calcul d'images de fonctions peuvent encore être utilisées dans la détermination des images de distributions du type parties finies. L'inconvénient majeur reste le calcul des constantes par les théorèmes de valeurs initiales ou de valeurs finales qui ne peuvent plus, du moins en principe, être utilisés dans ce nouveau cadre. C'est pourquoi, les méthodes pratiques de calcul consistent souvent à se ramener aux calculs d'images de fonctions à la condition de connaître les transformées de quelques distributions élémentaires. Nous donnons ci-dessous quelques aperçus de telles démarches pour le calcul de $\mathcal{L}(\text{Pf}(f))$ dans le cas d'un seul point singulier qui est l'origine :

1) Utilisation du développement limité de f à l'origine

Par exemple, pour $f(t) = \frac{\cos t}{t^2}$, on écrit : $f(t) = \frac{1}{t^2} - g(t)$ où g est une fonction continue. L'image de $\text{Pf} \left(\frac{\mathcal{U}(t)}{t^2} \right)$ étant connue, on se ramène ainsi à la fonction g .

2) Utilisation d'équations différentielles

L'équation vérifiée par f est souvent vérifiée par sa partie finie. C'est vrai dans le cas où la forme canonique de la partie finie ne fait pas intervenir des exposants entiers. Dans le cas d'exposants entiers, il est facile de prendre en compte les termes supplémentaires du type $\delta^{(k)}$ qui apparaissent dans l'équation.

3) Utilisation de séries

Dans le cas où, seulement un nombre fini de termes de la série sont des parties finies élémentaires, les images de ces termes sont connues. La troncature de la

série permet, là aussi, de se ramener à une fonction.

4) Utilisation de la proposition 4.12 pour le calcul d'images inverses

Prenons l'exemple de la fonction $F(s) = [\log(s + [(s^2 + 1)^{1/2})]$ qui est holomorphe dans Π_0 . En passant par l'intermédiaire de la dérivée $F'(s) = [(s^2 + 1)]^{-1/2}$, on peut développer $F(s)$ pour $\Re(s) > 1$, en série de puissances de s^{-1} . En

écrivant d'abord : $F(s) = [\log(s)] + \ln 2 + \left[\log\left(\frac{1}{2} [1 + [1 + s^{-2}]^{1/2}]\right) \right]$, on trouve le

développement : $F(s) = [\log(s)] + \ln 2 - \sum_1^{+\infty} \frac{a_n}{s^{2n}}$ où $a_n = \frac{(-1)^n 1.3.5 \dots (2n-1)}{2n \cdot 2.4.6 \dots (2n)}$.

Les premiers termes font intervenir des images connues, celle d'une distribution $K\delta$ et celle de $\text{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t)}{t}\right)$. On obtient ainsi le résultat qui sera vu dans l'exemple 5. 23 (formule (5.7)).

5) Emploi de formules du calcul opérationnel (ou symbolique)

On trouvera des détails sur ces formules dans les références [[3 a)], [[6]], [[15 a)].

On se contente ici d'un exemple, le calcul de l'image de $\text{Pf}\left[\frac{\mathcal{U}(t)\text{erf}(\sqrt{t})}{t^{3/2}}\right]$.

La fonction $f(t)e^{-st}$ s'écrit, au voisinage de $t = 0$: $t^{-3/2}e^{-st} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2} du \stackrel{t \rightarrow 0}{\sim} t^{-1}$; on en déduit que l'image cherchée s'exprime par l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi} \text{erf}(\sqrt{t})}{2 t^{3/2}} - \frac{1}{t} \right) e^{-st} dt$$

Supposons démontrée (Cf. Exercice 7.40 pour une démonstration) une des formules de ce calcul symbolique où H est l'image de h :

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)h(t^2)\right](s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^{-3/2} H\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{s^2 x}{4}\right) dx \quad (*)$$

Choisissons $h(t) = \frac{\sin(2\sqrt{t})}{t} - 2\frac{1}{\sqrt{t}}$ d'image $H(s) = \pi \text{erf}(s^{-1/2}) - 2\sqrt{\pi} s^{-1/2}$.

Comme on a : $h(t^2) = \frac{\sin(2t) - 2t}{t^2}$, l'image de Laplace de $h(t^2)$ peut se calculer par deux primitives successives, mais on peut aussi utiliser un développement

en série. On obtient ainsi : $\mathcal{L}(h(t^2))(s) = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n) 2^{2n-1}}{(2n+1)! s^{2n}}$. En traduisant

$H\left(\frac{1}{x}\right)$, on voit que la formule (*) se traduit par l'égalité des images de $h(t^2)$:

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi} \text{erf}(\sqrt{x})}{2 x^{3/2}} - \frac{1}{x} \right) e^{-s^2 x/4} dx = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n) 2^{2n-1}}{(2n+1)! s^{2n}}$$

Il suffit, à présent, d'un échange de variable : s en $2s^{1/2}$ et x en t pour obtenir :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi} \text{erf}(\sqrt{t})}{2 t^{3/2}} - \frac{1}{t} \right) e^{-st} dt = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n) 2^{2n-1}}{(2n+1)! 2^{2n} s^n} = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{s^n}$$

Cette dernière formule fournit l'image cherchée.

Chapitre 5

Calculs d'images de distributions. Applications

5.1 Transformées de demi-peignes

5.1.1 Etude de cas où le support du demi-peigne est \mathbb{N}

On se propose, un demi-peigne étant défini par $T = \sum_0^{+\infty} a_k \delta_k$, de déterminer son abscisse de convergence et, lorsque celle-ci n'est pas $+\infty$, de calculer son image de Laplace.

On étudie les exemples suivants : $a_k = 1$, $a_k = (-1)^k$, $a_k = k!$, $a_k = P(k)$ où P est un polynôme, $a_k = \exp k$.

Exemple 5.1

Les coefficients du demi-peigne sont $a_k = 1$. Ce demi-peigne T est tempéré ; il a déjà été étudié dans § 4.1.3 où l'on a vu que $\sigma(T) = 0$. D'autre part, pour $\Re(s) > 0$, on a, par sommation d'une série géométrique de raison $\exp(-s)$:

$$\mathcal{L}(T) = \langle T_t, \exp(-st) \rangle = \sum_0^{+\infty} \exp(-ks) = \frac{1}{1 - \exp(-s)}$$

Exemple 5.2

Lorsque $a_k = (-1)^k$, le raisonnement est le même, on trouve $\sigma(T) = 0$ et :

$$\mathcal{L}(T) = \sum_0^{+\infty} (-1)^k \exp(-ks) = \frac{1}{1 + \exp(-s)}$$

Exemple 5.3

Lorsque $a_k = k!$, le produit $(\exp(-xt)T)$ se traduit par la série $\sum_0^{+\infty} k! \exp(-kx)$ qui est divergente quel que soit le réel x . Cela équivaut à dire d'ailleurs que le rayon de convergence de la série entière (Cf. §5.1.2 qui suit) de terme général $k!z^k$ est nul. Il en résulte que $\sigma(T) = +\infty$

Exemple 5.4

On suppose : $a_k = P(k)$ Pour k assez grand, on a : $|k^2 P(k)| \exp(-kx)$ est majoré quel que soit $x > 0$, il en résulte la convergence de la série $\sum_0^{+\infty} P(k) \exp(-kx)$ pour tout $x > 0$. Lorsque $x < 0$, cette série est divergente. On a donc : $\sigma(T) = 0$. On peut calculer $\mathcal{L}(T)$ en utilisant des séries entières classiques (Cf. ce qui suit).

Exemple 5.5

Le peigne T n'est pas tempéré puisque la série de terme général $\sum_0^{+\infty} \exp k\varphi(k)$ n'est pas convergente pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}$. Il suffit pour le voir de prendre $\varphi(t) = \alpha(t) \exp(-t/2)$ où α est une fonction de support borné à gauche valant 1 sur $[0, +\infty[$. Cependant, le produit $\exp(-xt)T$ est tempéré sous la condition $x > 1$. On en déduit que $\sigma(T) = 1$ et que la transformée de Laplace s'explique encore par une série :

$$\begin{aligned} \forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 1 \Rightarrow \mathcal{L}(T)(s) &= \langle \exp(-xt)T, \exp(-(s-x)t) \rangle \\ &= \sum_0^{+\infty} \exp(-(s-x)k) \exp k \exp(-xk) \\ &= \sum_0^{+\infty} \exp(-(s-1)k) = \frac{1}{1 - \exp(-(s-1))} \end{aligned}$$

5.1.2 Relations avec les sommes de séries entières

Soit $T = \sum_0^{+\infty} a_k \delta_k$. On suppose que la série entière $\sum_0^{+\infty} a_k z^k$ a un rayon de convergence R non nul. On désigne par F la somme de cette série entière. On peut alors relier la transformée de Laplace de T à la fonction F et cela permet dans certain cas des calculs explicites.

En effet, si on pose $z = \exp(-s)$, on voit que, si $\exp(-\Re(s)) < R$, autrement dit, si $\Re(s) > -\ln(R)$, la série $\sum_0^{+\infty} a_k \exp(-ks)$ est convergente.

En particulier, on a : $\sigma(T) = -\infty$, si $R = +\infty$. En outre, en notant x un réel auxiliaire, on voit que le résultat de l'action de $\exp(-xt)T$ sur la fonction de \mathcal{S} définie par $\exp(-(s-x)t)$ se résume par la formule :

$$\mathcal{L}(T)(s) = F(\exp(-s))$$

En utilisant alors des développements en série entière classiques, on peut expliciter certaines transformées de Laplace à l'aide des fonctions usuelles. De tels résultats sont consignés dans le tableau qui suit :

Tableau T_2 d'images de Laplace de peignes causals

Terme général du demi-peigne T	Image $\mathcal{L}(T)$	$\sigma(T)$	Terme général du demi-peigne T	Image $\mathcal{L}(T)$	$\sigma(T)$
$\frac{(-1)^k}{(2k)!} \delta_{2k}$	$\cos(e^{-s})$	$-\infty$	$\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \delta_{2k+1}$	$\sin(e^{-s})$	$-\infty$
$\frac{1}{(2k)!} \delta_{2k}$	$\text{ch}(e^{-s})$	$-\infty$	$\frac{1}{(2k+1)!} \delta_{2k+1}$	$\text{sh}(e^{-s})$	$-\infty$
$(-1)^k \frac{1.3 \dots (2k-3)}{2.4 \dots (2k)} \delta_k$	$\sqrt{1 - e^{-s}}$	0	$\frac{1.3 \dots (2k-1)}{2.4 \dots (2k)} \delta_k$	$\frac{1}{\sqrt{1 - e^{-s}}}$	0
$\frac{(-1)^{k+1}}{k} \delta_k$	$[\log](1 + e^{-s})$	0	$\frac{(-1)^k}{2k+1} \delta_{2k+1}$	$\arctan(e^{-s})$	0
$\frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} \delta_{2k}$	$J_0(\exp(-s))$	$-\infty$	$\frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!) (k+1)!} \delta_{2k+1}$	$J_1(\exp(-s))$	$-\infty$

5.1.3 Applications

La propriété de la transformée d'une convolution peut être exploitée dans le cadre précédent.

Exemple 5.6

Par exemple, soit le produit de convolution des peignes :

$$T \star U \text{ avec : } T = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \delta_{2k}, \quad U = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \delta_{2k+1}$$

Cette convolution admet pour transformée de Laplace le produit des transformées, à savoir :

$$\mathcal{L}[T \star U](s) = \sin(\exp(-s)) \cos(\exp(-s)) = (1/2) \sin(2 \exp(-s))$$

. Comme cette fonction se développe en une série entière connue, on en déduit, le calcul étant valable si $\Re s > 0$, le résultat suivant :

$$T \star U = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k+1)!} \delta_{2k+1}$$

D'autres exemples sont proposés en exercice (Cf. Exercices 7.3, 7.4)

5.1.4 Etude de peignes dont les supports sont différents de \mathbb{N}

On étudie les demi-peignes $T = \sum_1^{+\infty} a_k \delta_{\ln k}$ où les a_k sont définis par $a_k = 1/k!$

ou $a_k = 1$ ou $a_k = (-1)^k$ ou enfin $a_k = k!$.

On étudie également les demi-peignes $S = \sum_2^{+\infty} a_k \delta_{\ln(\ln k)}$ pour ces mêmes a_k .

Exemple 5.7

Dans le cas de $a_k = 1/k!$, le demi-peigne T est tempéré, d'où $\sigma(T) \leq 0$. Par ailleurs, si $\varphi \in \mathcal{S}$, alors, $\varphi(\ln k)$ est borné et il en résulte que la série de terme général $(1/k!) \exp(x \ln k) \varphi(\ln k)$ est convergente. On peut en déduire facilement que, pour tout réel x , le produit $\exp(xt)T$ est tempéré. Il en résulte : $\sigma(T) = -\infty$. Par ailleurs, la transformée de Laplace est définie par

$$\mathcal{L}(T) = \sum_1^{+\infty} \frac{\exp(-s \ln k)}{k!} = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(k^s)k!}$$

Exemple 5.8

Dans le cas de $a_k = 1$, le demi-peigne T n'est pas tempéré. En effet, l'action de T , par exemple, sur la fonction $t \mapsto \alpha \exp(-t)$, qui appartient à \mathcal{S} , se traduit par la série harmonique, donc par une série divergente. Comme la série de terme général $(\varphi(\ln k))k^{-x}$, quand $\varphi \in \mathcal{S}$ et $x > 1$, converge alors qu'elle diverge si $x < 1$ (Cf. Exercice 7.2), on en déduit que : $\sigma(T) = 1$. En outre, la transformée de Laplace donne immédiatement :

$$\Re(s) > 1 \Rightarrow \mathcal{L}(T)(s) = \langle \exp(-xt)T, \exp(-t(s-x)) \rangle = \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(k^s)} = \zeta(s)$$

La fonction obtenue n'est autre que la fonction ζ de Riemann.

Exemple 5.9

Dans le cas de $a_k = (-1)^k$, le demi-peigne T n'est pas non plus tempéré (Cf. Exercice 7.2). On voit facilement que, si $x < 0$, la série de terme général $a_k \exp(-xt) \varphi(t)$, où $\varphi \in \mathcal{S}$, diverge en général. Par contre, on démontre que, si $x > 0$, la distribution $\exp(-xt)T$ est tempérée. On conclut à : $\sigma(T) = 0$ et le calcul de la transformée donne encore la somme d'une série :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(T)(s) = \langle \exp(-xt)T, \exp(-t(s-x)) \rangle = \sum_1^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(k^s)}$$

Exemple 5.10

Il est évident que, dans le cas de $a_k = k!$, on trouve : $\sigma(T) = +\infty$. C'est aussi ce résultat si les points du support sont d'abscisses $\ln(\ln k)$.

Exemple 5.11

Dans le cas de $a_k = 1/k!$, les points du support étant $\ln(\ln k)$, le demi-peigne T est tempéré. Par ailleurs, quel que soit x et quel que soit $\varphi \in \mathcal{S}$, la série de terme général $(\ln k)^x \varphi(\ln(\ln k))/k!$ est convergente. On en déduit facilement que la distribution $\exp(-xt)T$ est tempérée quel que soit le réel x , d'où : $\sigma(T) = -\infty$. On a alors :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \mathcal{L}(T)(s) = \sum_2^{+\infty} \frac{(\ln k)^{-s}}{k!}$$

Exemple 5.12

Les séries de terme général $(\ln k)^x$ sont divergentes pour tout réel x . On en déduit que, dans le cas où $a_k = 1$, les points du support étant $\ln(\ln k)$, on a : $\sigma(S) = +\infty$.

Exemple 5.13

Pour $a_k = (-1)^k$, le raisonnement est le même que dans l'exemple 9. On a : $\sigma(S) = 0$ et :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(S)(s) = \langle e^t S, \exp(-t(s-x)) \rangle = \sum_2^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{(\ln k)^s}$$

Remarque 5.1 Les séries qui définissent les transformées de Laplace dans ce qui précède sont du type $\sum_1^{+\infty} a_k \exp(-s\lambda_k)$. Ces séries sont dites "séries de Dirichlet".

5.1.5 Applications aux calculs de transformées de Laplace de certaines fonctions

Certaines fonctions causales f peuvent être polynômiales par morceaux et, néanmoins, être transformable par \mathcal{L} . Une dérivée d'un ordre suffisant, au sens des distributions, sera alors un demi-peigne dont le support sera un sous-ensemble de celui des points de discontinuité de f . On peut en déduire une méthode de détermination de la transformée de Laplace de f . Commençons par un exemple.

Exemple 5.14

Soit f la fonction causale ayant pour valeur k^2 sur chaque intervalle $[k, k+1[$. La dérivée $[f]'$ est le demi peigne $T = \sum_1^{+\infty} (2k-1)\delta_k$. Celui-ci admet l'abscisse nulle et on a :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}([f]')(s) = \sum_1^{+\infty} (2k-1) \exp(-sk) = \frac{(\exp(-s) + \exp(-2s))}{(1 - \exp(-s))^2}$$

On en déduit, en divisant par s , la transformée de f cherchée.

Exemple 5.15 plus général

Dans un cadre plus général, supposons que sur $[k, k+1[$, la fonction f coïncide avec un polynôme P_k , les degrés de ces polynômes étant n_k avec $\max n_k = N$ où N est un certain entier. Cette fonction est à croissance lente, on en déduit qu'elle est tempérée et par conséquent $\sigma(T) \leq 0$. On désigne par $c_k^{(j)}$ le saut de la dérivée $f^{(j)}$ au point d'abscisse k , à savoir : $c_k^{(j)} = P_k^{(j)}(k) - P_{k-1}^{(j)}(k)$ si $k > 0$ et $c_0^{(j)} = P_0^{(j)}(0)$. La dérivée de $[f]$ nous donne :

$$[f]' = \sum_0^{+\infty} c_k^{(0)} \delta_k + [f']$$

Après N dérivations, on obtient ainsi :

$$[f]^{(N)} = \sum_{j=0}^{j=N+\infty} \sum_{k=0} c_k^{(j)} \delta_k^{(j)}$$

La transformation de Laplace fournit alors :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re e(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}([f]^{(N)})(s) = \sum_{j=0}^{j=N+\infty} \sum_{k=0} c_k^{(j)} s^j \exp(-ks)$$

En divisant ensuite par s^N , on obtient le résultat.

Exemple 5.16

Le même procédé peut être appliqué lorsque les points de discontinuité ne sont plus les entiers. Par exemple, si les discontinuités sont aux points d'abscisses $\ln k$, et sous réserve que l'abscisse de convergence de $[f]$ ne soit pas $+\infty$, on pourra encore dériver un nombre suffisant de fois pour, ensuite, obtenir la transformée cherchée. On suppose plus précisément que la fonction f coïncide avec la fonction affine $t \mapsto kt + k^2$ sur $[\ln k, \ln(k+1)[$ pour $k \geq 1$. Les sauts de f aux points $\ln k$ sont ainsi $\ln k + (2k - 1)$. La première dérivation nous fournit donc :

$$[f]' = [f'] + \sum_1^{+\infty} (\ln k + (2k - 1)) \delta_{\ln k}$$

La deuxième dérivation donne ensuite :

$$[f]'' = \sum_1^{+\infty} (\ln k + (2k - 1)) \delta'_{\ln k} + \sum_1^{+\infty} \delta_{\ln k}$$

Il est facile de voir que ces distributions ont une abscisse de convergence égale à 1 et que la transformée de Laplace de $[f]''$ est définie par :

$$\Re e(s) > 1 \Rightarrow \mathcal{L}([f]'')(s) = \sum_1^{+\infty} k^{(-s)} [1 + (\ln k + (2k - 1))s]$$

On en déduit la transformée cherchée :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re e(s) > 1 \Rightarrow \mathcal{L}([f])(s) = \sum_1^{+\infty} k^{(-s)} \left[\frac{1}{s^2} + \frac{\ln k + (2k - 1)}{s} \right]$$

Ce résultat pourrait s'exprimer à l'aide de la fonction ζ et de sa dérivée. On trouvera, dans l'exercice 6, d'autres exemples de dérivations de fonctions continues par morceaux avec le calcul de leurs transformées de Laplace.

5.2 Transformées des parties finies de type puissances

Exemple 5.17 Détermination de la transformée de la partie finie $\text{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t)}{t}\right)$

D'après des résultats précédents, on sait que l'abscisse de convergence est nulle et que

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(T)(s) = \text{Pf}\left[\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-st)}{t} dt\right]$$

On se propose la détermination par deux méthodes différentes.

Première méthode : un calcul direct

◇ On effectue d'abord le calcul pour le réel $s = x > 0$. Ayant dégagé dans l'intégrale divergente une intégrale sur un voisinage de 0 que nous choisissons (pour une raison qui va apparaître plus loin) égal à $[0, 1/x]$, nous pouvons écrire :

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{t} dt = \int_{\epsilon}^{1/x} \frac{\exp(-xt)}{t} dt + \int_{1/x}^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{t} dt$$

La deuxième intégrale est convergente, c'est d'ailleurs une constante. On le voit en faisant la dilatation de variable $u = st$, ce qui remplace cette intégrale par $\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du$.

Comme on peut écrire $\exp(-xt)/t = 1/t + \psi(t)$ où $\psi(t) = (\exp(-st) - 1)/t$ peut être prolongée par continuité au point $t = 0$, la première intégrale fournit :

$$\int_{\epsilon}^{1/x} \frac{\exp(-xt)}{t} dt = \int_{\epsilon}^{1/x} \frac{1}{t} dt + \int_{\epsilon}^{1/x} \frac{\exp(-xt) - 1}{t} dt$$

La dernière intégrale admet une limite finie encore indépendante de x et on obtient ainsi :

$$\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\exp(-xt)}{t} dt = C_{\epsilon} - \ln x + \ln \epsilon$$

Le terme C_{ϵ} admet la limite :

$$C = \int_0^1 \frac{\exp(-u) - 1}{u} du + \int_1^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du$$

On en déduit finalement :

$$\mathcal{L}(T)(x) = C - \ln x$$

En prolongeant analytiquement dans le demi-plan Π_0 le logarithme népérien par la fonction notée $[\log]$, le résultat s'écrit :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(T)(s) = C - [\log](s)$$

Il restera à calculer la constante C . ◇

Deuxième méthode : Dérivation du logarithme

◇ La fonction $t \mapsto U(t) \ln t$ est dans \mathcal{L}_d avec une abscisse de convergence nulle. On sait (Cf. Exemple 2.3) :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(U \ln)(s) = -\frac{1}{s}([\log](s) + \gamma)$$

Comme la dérivée de $t \mapsto U(t) \ln t$ est $\text{Pf}\left(\frac{U(t)}{t}\right)$, il suffit de multiplier le résultat précédent par s pour obtenir la transformée cherchée. ◇ Concluons :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\frac{U(t)}{t}\right)\right)(s) = -\gamma - [\log](s) \quad (5.1)$$

Remarque 5.2 On peut aussi utiliser la multiplication par la variable t .

On a la relation $t \text{Pf}(U(t)/t) = U(t)$. Donc, si on note F la transformée cherchée, on a, dans l'ouvert Π_0 , la relation $F'(s) = 1/s$. Par conséquent, à la condition de pouvoir calculer la constante, on peut écrire :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(T)(s) = -\gamma - [\log](s)$$

Exemple 5.18 Détermination de la transformée des parties finies $\text{Pf}\left(\frac{U(t)}{t^n}\right)$ où n est entier

Rappelons les formules de dérivation (Cf. Formule 4.13 dans §4.8.6) :

$$\frac{d}{dt}\left(\text{Pf}\left(\frac{U(t)}{t^n}\right)\right) = -n \text{Pf}\left(\frac{U(t)}{t^{n+1}}\right) + \frac{(-1)^n}{n!} \delta^{(n)}$$

Les propriétés de la transformation de Laplace concernant les dérivées nous donnent, pour une première dérivation d'abord :

$$\Re(s) > 0 \quad \Rightarrow \mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\frac{U(t)}{t^2}\right)\right)(s) = s([\log](s) + \gamma - 1)$$

La deuxième dérivation conduit à :

$$\Re(s) > 0 \quad \Rightarrow \mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\frac{U(t)}{t^3}\right)\right)(s) = -\frac{s^2}{2}([\log](s) + \gamma - \frac{3}{2})$$

Ceci nous permet de faire le test de la formule :

$$\mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\frac{U(t)}{t^n}\right)\right)(s) = -\frac{(-s)^{n-1}}{(n-1)!}([\log](s) + \gamma + a_n)$$

La relation $a_{n+1} = a_n + 1/n$ s'en déduit, d'où le résultat :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left[\text{Pf}\left(\frac{U(t)}{t^n}\right)\right](s) = -\frac{(-s)^{n-1}}{(n-1)!} \left[(\log)(s) + \gamma + \sum_1^{n-1} \frac{1}{k} \right] \quad (5.2)$$

Remarque 5.3 On peut aussi utiliser la formule (4.21) relative à l'image d'une partie finie de primitive.

Exemple 5.19 Détermination de l'image de $\mathcal{U}(t)\text{Pf}\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right)$.

On se sert de la dérivée de $\mathcal{U}(t) \ln^2 t$ dont l'image de Laplace a été déterminée dans l'exemple 2.4. On a trouvé pour $\alpha = 0$ dans la formule (2.3) :

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}(t) \ln^2 t)(x) = \frac{1}{x} \left[\Gamma''(1) - 2\Gamma'(1) \ln x + \ln^2 x \right]$$

La dérivation nous donne immédiatement :

$$2\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)\text{Pf}\left(\frac{\ln t}{t}\right)\right](x) = \left[\Gamma''(1) - 2\Gamma'(1) \ln x + \ln^2 x \right]$$

En fait, on peut aller plus loin pour le calcul numérique (Cf. Annexe 1). On a, en effet : $\Gamma'(1) = -\gamma$ Par ailleurs, la dérivée seconde de Γ vérifie :

$$\Gamma''(1) = \gamma^2 + \sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

On en déduit la formule :

$$\boxed{\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)\text{Pf}\left(\frac{\ln^2 t}{t}\right)\right](x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2}{6} + (\ln x + \gamma)^2 \right] \quad (5.3)}$$

On poursuit pour d'autres valeurs de n dans l'exercice 7.30.

Exemple 5.20 Détermination de l'image de $\mathcal{U}(t)\text{Pf}\left(\frac{\exp(it)}{t}\right)$.

Il est évident que l'image de $\mathcal{U}(t) \exp(it)$ existe pour $\Re(s) > 0$ et qu'elle est égale à $\frac{1}{s-i}$. La fonction continue $f(t) = \mathcal{U}(t) \frac{\exp(it) - 1}{t}$ est alors, au signe près, une

primitive de $\frac{1}{s-i} - \frac{1}{s}$. Cette primitive s'écrit : $-\log(s-i) + \log s + C$ qui est définie au moyen des déterminations des logarithmes dans Π_0 .

Pour calculer la constante, on se sert de la propriété de valeur initiale puisque f est une fonction.

Comme sur l'axe des réels, $F(x)$ s'écrit : $F(x) = -\ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ et que cette quantité tend vers 0 en $+\infty$, on en déduit que $C = 0$.

Ajoutons l'image, qui est connue, de $\text{Pf}\left(\frac{1}{t}\right)$. On obtient ainsi, dans Π_0 :

$$\boxed{\text{calL}\left[\mathcal{U}(t)\text{Pf}\left(\frac{\exp(it)}{t}\right)\right](s) = -\log(s-i) - \gamma \quad (5.4)}$$

Remarquons que cette méthode n'est vraiment pas la plus simple. On peut utiliser, par exemple, la multiplication d'un original par une exponentielle (Cf. § 4.10.3).

Exemple 5.21 Détermination de la transformée des parties finies $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-\lambda})$ où $\lambda > 1$ est non entier

On se sert du fait que, pour n entier, assez grand, $t \mapsto t^n f(t)$ définit une fonction localement sommable dont la transformée de Laplace est $\frac{\Gamma(n - \lambda + 1)}{s^{n-\lambda+1}}$.

On sait que les parties finies de type puissances commutent aux dérivations si les exposants ne sont pas des entiers, ce qui est le cas ici. En dérivant n fois la distribution $[t^n f(t)]$, on obtient $(n - \lambda)(n - \lambda - 1) \cdots (-\lambda)\text{Pf}(f)$. A chacune de ces dérivations, on associe du côté des images une multiplication par s . Par conséquent, on en déduit :

$$(n - \lambda)(n - \lambda - 1) \cdots (-\lambda + 1)\mathcal{L}(\text{Pf}(f))(s) = s^n \frac{\Gamma(n - \lambda + 1)}{s^{n-\lambda+1}}$$

Après simplification, on trouve :

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-\lambda})) = \frac{\Gamma(-\lambda + 1)}{s^{-\lambda+1}} \quad (5.5)$$

Ces résultats permettent le calcul d'images de parties finies associées à des fonctions développables en série de fonctions puissances.

Exemple 5.22 Détermination de l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t) \frac{\exp(at)}{t^{\lambda+1}}$ avec $\lambda > 0$, non entier et a complexe.

Le développement en série entière de l'exponentielle permet d'écrire en supposant $E(\lambda) = N$:

$$\text{Pf} \left[\frac{\exp at}{t^{\lambda+1}} \right] = \sum_0^N \text{Pf} \left[\mathcal{U}(t) \frac{a^n}{n!t^{\lambda+1-n}} \right] + \sum_{N+1}^{+\infty} \mathcal{U}(t) \frac{a^n}{n!t^{\lambda+1-n}}$$

On connaît toutes les images des fonctions ou des parties finies qui figurent dans ce développement. On peut d'abord écrire formellement la série de ces images. On trouve, en utilisant notamment ce qui précède, la série :

$$\sum_0^{+\infty} \frac{a^n \Gamma(n - \lambda)}{n!s^{n-\lambda}}$$

La règle de d'Alembert montre que cette série est convergente lorsque $\left| \frac{s}{a} \right| > 1$. De fait, on peut prouver, comme dans la proposition 1.17 que l'abscisse de convergence vérifie $\sigma(T) \leq |a|$ et que, pour $\Re(s) > |a|$, la transformée de Laplace de T est effectivement la somme de la série précédente.

La puissance s^λ ainsi que $\Gamma(-\lambda)$ étant mis en facteurs, le terme général de la série solution s'écrit :

$$\frac{(n - \lambda - 1)(n - \lambda - 2) \cdots (1 - \lambda)(-\lambda)a^n}{n!s^n}$$

C'est donc le terme général du développement de $(1 - \frac{a}{s})^\lambda$. On en déduit le résultat :

$$\mathcal{L}\left[\text{Pf}\left(\frac{\exp at}{t^{\lambda+1}}\right)\right](s) = \Gamma(-\lambda)(s - a)^\lambda \quad (5.6)$$

Remarquons, qu'ici encore, la méthode utilisée n'est pas la plus simple. La multiplication par une exponentielle donne immédiatement le résultat (Cf. §4.10.3).

5.3 Images de parties finies associées à des fonctions de Bessel

Lorsqu'on fait le quotient d'une fonction de Bessel J_n d'indice entier positif par une puissance d'exposant $\nu < 0$ de la variable avec $\nu < -n - 1$, la fonction obtenue n'est plus localement sommable en raison de la singularité en $t = 0$. Il est facile de voir que le développement de J_n en série entière permet d'écrire ce quotient sous la forme d'une somme finie de parties finies de type puissance et d'une fonction somme de série entière toujours convergente. Les abscisses de convergence de ces fonctions sont toutes nulles. On en déduit que l'abscisse du quotient est, a priori, inférieure ou égale à 0. On a la même situation si l'indice n est remplacé par un réel λ ou même complexe, non entier, quelconque à condition de remplacer la condition précédente par $\Re(\nu) < -\lambda - 1$. Différentes méthodes peuvent être utilisées pour calculer les images de Laplace de telles fonctions.

Exemple 5.23 Détermination de l'image de Laplace de $\text{Pf}\left(\mathcal{U}(t)\frac{J_0(t)}{t}\right)$

On sait (Cf. Exemple 2.9) que la transformée de $t \mapsto \mathcal{U}(t)J_0(t)$ est la fonction $s \mapsto \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$. On se sert de l'égalité :

$$t\text{Pf}\left(\mathcal{U}(t)\frac{J_0(t)}{t}\right) = \mathcal{U}(t)J_0(t)$$

On sait que la dérivée $F'(s)$ de l'image cherchée vérifie : $F'(s) = -\frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$. On peut d'abord chercher une primitive de cette fonction lorsque s est réel. En prenant la variable $u = \text{argsh}(s)$, on obtient immédiatement, C désignant une constante :

$$F(s) = -\text{argsh}(s) + C = -\ln(s + \sqrt{s^2 + 1}) + C$$

Pour calculer cette constante, on ne peut plus se servir de la propriété de valeur initiale, mais cette propriété est valable pour la distribution $\text{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t)J_0(t)}{t}\right) - \text{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t)}{t}\right)$ qui, en fait, s'identifie à une fonction localement sommable et même

développable en série entière. La transformée de cette fonction s'exprime (Cf. Exemple 5.17) par :

$$\mathcal{L}\left[\text{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t)J_0(t)}{t}\right) - \text{Pf}\left(\mathcal{U}(t)\frac{1}{t}\right)\right] = -\text{argshs} + \ln s + \gamma + C$$

Cette fois la limite en $+\infty$ de cette fonction doit être nulle.

Puisque $\lim_{s \rightarrow +\infty} [\ln(s + \sqrt{s^2 + 1}) - \ln s] = \ln 2$, on en déduit : $C = \ln 2 - \gamma$. Il suffit pour conclure de prolonger ensuite dans le demi-plan complexe Π_0 :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\left[\text{Pf}\left(\mathcal{U}(t)\frac{J_0(t)}{t}\right)\right](s) = -\left[\log\left(\frac{s + \sqrt{s^2 + 1}}{2}\right)\right] - \gamma \quad (5.7)$$

Remarque 5.4 On pouvait aussi écrire : $\text{Pf}(f) = \text{Pf}\left(\frac{1}{t}\right) + g$ où g est la fonction localement sommable précisée ci-dessus. On calcule ensuite la transformée de g par la proposition 1.17.

Exemple 5.24 Détermination de l'image de Laplace de $\text{Pf}\left(\mathcal{U}(t)\frac{J_0(t)}{t^2}\right)$

On peut résoudre ce problème en transformant une dérivée. La dérivée de $\text{Pf}\left(\mathcal{U}(t)\frac{J_0(t)}{t}\right)$ est égale à $-\text{Pf}\left(\mathcal{U}(t)\frac{J_0(t)}{t^2}\right) + \mathcal{U}(t)\frac{J_0'(t)}{t} + \delta'$ (Cf. Exercice 7.5).

Puisque la dérivée $\mathcal{U}J_0'(t)$ a pour image la fonction $\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} - J_0(0)$, on obtient

l'image de son quotient par t en prenant une primitive de $\frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}$, laquelle

est de la forme $\sqrt{s^2+1} - s + C$. Cette constante est d'ailleurs nulle puisque l'image de la fonction continue $\frac{J_0'(t)}{t}$ doit tendre vers 0 lorsque $s \rightarrow +\infty$.

On en déduit, par utilisation de l'image d'une dérivée de distribution (Cf. § 4.4.4) :

$$\mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\mathcal{U}(t)\frac{J_0(t)}{t^2}\right)\right) = s\left[\log\left(\frac{s + \sqrt{s^2 + 1}}{2}\right)\right] + \gamma - \sqrt{s^2 + 1} \quad (5.8)$$

Cette méthode peut être réitérée. On obtient ainsi l'image de la partie finie de $\frac{J_0(t)}{t^n}$ (Cf. exercice 7.17).

Exemple 5.25 Détermination de l'image de la partie finie de $\mathcal{U}t^{-1}J_0(\sqrt{t})$

On peut écrire la partie finie sous la forme $\text{Pf}(f) = \text{Pf}\left[\left(\frac{\mathcal{U}(t)}{t}\right)\right] + [g]$, la distribution régulière $[g]$ étant identifiée à la fonction $g(t) = \mathcal{U}(t)\frac{J_0(\sqrt{t})-1}{t}$. En tenant compte du résultat de l'exemple 2.8, on est amené, pour trouver l'image de $[g]$, à chercher les primitives de $\frac{1}{s}\left[\exp\left(-\frac{1}{4s}\right) - 1\right]$. En utilisant le changement

de variable $u = \frac{1}{4s}$, on trouve pour image de $[g]$ les fonctions du type :

$$s \mapsto G(s) = \text{Ei}\left(-\frac{1}{4s}\right) + \ln s + C$$

La fonction Ei se développe au voisinage de l'origine en $Ei(-x) = \ln x - x + o(x)$, il en résulte que l'image précédente admet, lorsque $s \rightarrow +\infty$, la limite : $\lim(-\ln s - \ln 4 + \ln s + C) = C - \ln 4$. On en déduit $C = \ln 4$.

On peut d'ailleurs procéder à une vérification à l'aide du corollaire 1.4 car :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} sG(s) = \lim_{s \rightarrow +i nfty} s[\ln(1/4s) + 1/4s + \ln s + \ln 4] = 1/4 = g(0),$$

comme on peut le voir à partir du deuxième terme du développement de g . En ajoutant l'image de $\text{Pf}(t^{-1})$ et en prolongeant dans le demi-plan π_0 , on peut ainsi conclure :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\text{Pf}(\mathcal{U}(t) \frac{J_0(\sqrt{t})}{t})) = Ei(-\frac{1}{4s}) + \ln(4) - \gamma \quad (5.9)$$

On peut ensuite en déduire les images de Laplace des parties finies de $t^{-2}J_0(\sqrt{t})$ et de $t^{-3}J_0(\sqrt{t})$ (Cf. exercice 7.19).

Exemple 5.26 Détermination de l'image de la partie finie de $\mathcal{U}t^{-1}J_{-\lambda}(t)$, où $\lambda > 0$ est non entier.

Cet exemple est l'occasion d'utiliser une équation différentielle et des développements de l'image au voisinage de $+\infty$.

En dégagant dans le développement de $J_{-\lambda}$ les termes qui sont d'exposants $k < 0$, donc en nombre fini, on peut écrire, la fonction g restante étant localement sommable :

$$\text{Pf}(f) = \sum_{0 \leq n \leq E(\lambda/2)} \left[\frac{(-1)^n}{2^{2n-\lambda} n! \Gamma(-\lambda + n + 1)} \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{2n-1-\lambda}) \right] + [g]$$

Puisque λ n'est pas un entier, aucune des parties finies en cause dans ce développement n'est celle d'une puissance d'exposant entier.

Par conséquent, les dérivées successives de $\text{Pf}(f)$ sont les parties finies des dérivées de la fonction f . On en déduit que $\text{Pf}(f)$ est une solution u de l'équation différentielle obtenue en effectuant le changement de fonction inconnue $u = \frac{y}{t}$ dans l'équation différentielle de Bessel :

$$t^2 y'' + ty' + (t^2 - \lambda^2)y = 0$$

Ce changement aboutit à :

$$t^2 u'' + 3tu' + (t^2 - \lambda^2 + 1)u = 0$$

En utilisant les transformées des dérivées au sens des distributions et les images de $t^k T$, on peut en déduire que l'image cherchée F est solution dans le demi-plan Π_0 de l'équation différentielle :

$$(s^2 + 1)F'''(s) + sF'(s) - \lambda^2 F(s) = 0$$

C'est l'équation différentielle déjà trouvée dans la recherche de l'image de la fonction $\mathcal{U}J_\lambda$ (Cf. exemple 2.18). Par les calculs faits lors de l'étude de cet

exemple, on en déduit que l'image ici cherchée est, du moins pour $s = x$ réel, de la forme :

$$F(x) = C_1 \left(\sqrt{1+x^2} - x \right)^\lambda + C_2 \left(\sqrt{1+x^2} + x \right)^{-\lambda},$$

ou bien encore :

$$F(x) = C_1 \left(\sqrt{1+x^2} + x \right)^{-\lambda} + C_2 \left(\sqrt{1+x^2} + x \right)^\lambda \quad (*)$$

Pour déterminer ces constantes, on se sert du développement trouvé au départ. D'abord, la fonction f est le produit d'une puissance $t^{-\mu}$, où μ est positif assez grand et non entier, par la somme d'une série entière de la variable t qui obéit aux hypothèses de la proposition 1.17. En utilisant les résultats de l'exemple 4.14, on en déduit, puisque le premier terme du développement de f est du type $at^{-\lambda-1}$, que la fonction F se présente sous la forme :

$$F(s) = s^\lambda \sum_0^{+\infty} a_n \frac{1}{s^{2n}},$$

la convergence de la série étant assurée pour $|s| > 1$ ¹. Or, en factorisant le second membre de la solution générale (*) par x^λ , on obtient :

$$F(x) = x^\lambda \left[C_2 \left[1 + \sqrt{1+x^2} \right]^\lambda + C_1 x^{-2\lambda} \left[1 + \sqrt{1+x^2} \right]^{-\lambda} \right]$$

Par composition ou par analyticité, les fonctions $(1 + \sqrt{1+u})^{\pm\lambda}$ sont développables en série entière de la variable u . Cependant, étant donné la présence du point singulier $x = 0$, qui est un point de branchement puisque λ est non entier, le produit $u^\lambda (1 + \sqrt{1+u})^{-\lambda}$ n'est pas développable en série entière de u .

Il en résulte que les seules fonctions de la solution générale (*) qui sont de la forme indiquée ci-dessus correspondent à $C_1 = 0$. On a ainsi : $F(x) = C_2 \left(\sqrt{1+x^2} + x \right)^\lambda$ et il reste à calculer C_2 .

Pour cela, en nous servant encore des résultats de l'exemple 4.14, on peut transformer les premiers termes du développement de départ. On en déduit :

$$F(s) = \frac{2^\lambda \Gamma(-\lambda) s^\lambda}{\Gamma(1-\lambda)} - \frac{2^{\lambda-2} \Gamma(2-\lambda) s^{\lambda-2}}{\Gamma(2-\lambda)} + \dots$$

En factorisant par x^λ , on obtient un équivalent de $F(x)$ pour x réel au voisinage de $+\infty$:

$$F(x) = x^\lambda \left[\frac{2^\lambda \Gamma(-\lambda)}{\Gamma(1-\lambda)} - 2^{\lambda-2} \frac{1}{x^2} + \dots \right] \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2^\lambda}{\lambda} x^\lambda$$

¹Cela peut d'ailleurs se voir directement : Cf. Exercice 7.20

Par ailleurs, en développant au voisinage de $+\infty$ la solution générale (*) et en ayant constaté que la fonction coefficient de C_1 tend vers 0, on obtient :

$$F(x) = C_2 x^\lambda \left[1 + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{1/2} \right]^\lambda = C_2 x^\lambda \left[2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \dots\right) \right]^\lambda = C_2 2^\lambda x^\lambda \left[1 + \frac{\lambda}{4x^2} + \dots \right]$$

Il en résulte, en comparant à l'équivalent précédent que $C_2 = -\lambda^{-1}$. On constate d'ailleurs que les deuxièmes termes $-2^{\lambda-2} x^{\lambda-2}$ des développements précédents coïncident également.

De tout ce calcul, on déduit que, sous la condition où $\lambda > 0$ et non entier :

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-1}J_{-\lambda}(t))) = -\frac{1}{\lambda} \left[s + [(1+s^2)^{1/2}] \right]^\lambda \quad (5.10)$$

Conséquence immédiate de ce résultat :

En multipliant le résultat précédent par $-t$, on obtient la dérivée de l'image précédente, à savoir, lorsque $\Re(\lambda) > 0$, $\lambda \notin \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}(\text{Pf}(\mathcal{U}(t)J_{-\lambda}(t))) = \left[(1+s^2)^{-1/2} \right] \left[s + [(1+s^2)^{1/2}] \right]^\lambda \quad (5.11)$$

5.4 Calculs d'images par divers procédés

5.4.1 Utilisation de la multiplication par t

Ce procédé a été utilisé pour calculer (Cf.Exemple 5.22) la transformée de la partie finie de $\mathcal{U}t^{-1}J_0(t)$. Il est utilisé également dans l'exercice 7.19.

Exemple 5.27 Détermination de l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t) \frac{cht}{t^2}$.

En désignant par $\text{Pf}(f)$ la partie finie considérée, on a : $t\text{Pf}(f) = \mathcal{U}(t)t^{-1}cht$ dont l'image de Laplace, d'après la formule 4.21 s'écrit : $-[\log]((s^2-1)^{1/2}) - \gamma$. La propriété fondamentale nous dit que la dérivée, dans Π_1 , de l'image cherchée est égale à cette dernière fonction changée de signe. En utilisant la variable réelle $x > 1$, pour simplifier, une intégration par parties nous fournit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\text{Pf}(f))(x) &= x \ln(\sqrt{x^2-1}) + x\gamma - \int^x \frac{t^2}{t^2-1} dt + C \\ &= x \ln(\sqrt{x^2-1}) + x\gamma - x + \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} + C \end{aligned}$$

Il reste à calculer C. Nous l'obtenons en considérant la fonction g définie par $g(t) = f(t) - \frac{\mathcal{U}(t)}{t^2}$ qui est continue. L'image de $\text{Pf} \left[\frac{\mathcal{U}(t)}{t^2} \right]$ est donnée pour $x > 0$ (Cf. Exemple 5. 18) par : $x \ln(x + \gamma - 1)$. L'image de g doit tendre vers 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$. On en déduit que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} - x \ln x + C = 0$$

Avec des équivalents classiques, on arrive à $C = 0$. Ainsi, pour : $\Re(s) > 1$, on a :

$$\mathcal{L}(\text{Pf}(U(t) \frac{cht}{t^2})) = s[\log]([s^2 - 1]^{1/2}) + (\gamma - 1)s + \frac{1}{2} \ln \frac{s+1}{s-1} \quad (5.12)$$

5.4.2 Utilisation d'une équation différentielle

Cette méthode a été souvent utilisée. On trouve parfois, pour une famille f_λ , la même équation différentielle pour les parties finies de la famille $\text{Pf}(f_\lambda)$ que pour les distributions régulières $[f_\lambda]$. La résolution de cette équation conduisant aux mêmes solutions, le problème restant est de trouver les valeurs des constantes de la solution générale. Dans l'exemple qui suit, on utilise la méthode et les calculs de l'exemple 5.26 en supposant $\Re(\lambda) \leq -1/2$.

Exemple 5.28 Détermination de l'image de la partie finie de $f_\lambda(t) = U(t)t^\lambda J_\lambda(t)$ avec $\Re(\lambda) \leq -1/2$ et $-2\lambda \notin \mathbb{N}$.

A l'aide du développement classique de J_λ et des conditions données sur λ , on voit que f_λ se présente comme la somme d'une fonction localement sommable et d'une somme finie de puissances dont les exposants sont du type $2\lambda + 2n$, de parties réelles négatives mais non entiers. Il en résulte que les dérivées des parties finies associées sont les parties finies des dérivées et, par conséquent, $\text{Pf}(f_\lambda)$ est solution de l'équation différentielle trouvée dans l'exemple 2.18, à savoir :

$$ty'' + (1 - 2\lambda)y' + ty = 0$$

Et, sans allusion à des conditions initiales, l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par F_λ , image de $\text{Pf}(f_\lambda)$ reste également la même dans Π_0 :

$$(s^2 + 1)F' + (1 + 2\lambda)sF = 0$$

On en déduit encore que, dans Π_0 , cette image s'écrit : $C_\lambda(1 + s^2)^{-(\lambda+1/2)}$. Pour calculer la constante C_λ , on ne peut plus s'appuyer sur des théorèmes de type "valeur initiale". Nous nous servons ici d'une relation liant les fonctions J_λ qui va permettre de proche en proche à se ramener au cas traité dans l'exemple 2.18. A l'aide des développements des J_λ , on montre en effet :

$$J'_\lambda(t) = \frac{\lambda}{t} J_\lambda(t) - J_{\lambda+1}(t)$$

En multipliant cette relation par $t^{\lambda+1}$, on obtient :

$$t^{\lambda+1} J'_\lambda(t) = \lambda t^\lambda J_\lambda(t) - t^{\lambda+1} J_{\lambda+1}(t) \quad (*)$$

Pour pouvoir passer aux images de Laplace des parties finies associées, il nous faut calculer la transformée de $t^{\lambda+1} J'_\lambda(t)$. On l'atteint par dérivation de $t^{\lambda+1} J_\lambda(t)$ qui donne en effet, puisqu'il n'y a pas de puissances d'exposants entiers :

$$\frac{d}{dt}(\text{Pf}(t^{\lambda+1} J_\lambda)) = (\lambda + 1)(\text{Pf}(t^\lambda J_\lambda)) + (\text{Pf}(t^{\lambda+1} J'_\lambda)) \quad (**)$$

Or $\left(\text{Pf}(t^{\lambda+1}J_\lambda)\right) = t\left(\text{Pf}(t^\lambda J_\lambda)\right)$ a pour image

$$-C_\lambda \frac{d}{ds} \left[(1+s^2)^{-(\lambda+1/2)} \right] = -C_\lambda (-2\lambda - 1) s \left[(1+s^2)^{-\lambda-3/2} \right]$$

L'image de sa dérivée est donc :

$$C_\lambda (2\lambda + 1) s^2 \left[(1+s^2)^{-\lambda-3/2} \right]$$

En tenant compte de ce résultat et de la relation (**), la relation (*) nous donne alors en passant aux images des parties finies :

$$C_\lambda (2\lambda + 1) s^2 - (\lambda + 1) C_\lambda (1 + s^2) = \lambda C_\lambda (1 + s^2) - C_{\lambda+1}$$

Finalement $C_{\lambda+1} = (2\lambda + 1) C_\lambda$. En prenant λ assez grand, on sait que (Cf.

Exemple 2.18) : $C_\lambda = \frac{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1/2)}{\sqrt{\pi}}$.

De l'égalité précédente on en déduit :

$$C_{\lambda-1} = \frac{C_\lambda}{2\lambda - 1} = \frac{2^\lambda (\lambda - 1/2) \Gamma(\lambda - 3/2)}{\sqrt{\pi} (2\lambda - 1)} = \frac{2^{\lambda-1} \Gamma(\lambda - 3/2)}{\sqrt{\pi}}$$

Ceci veut dire que l'expression trouvée pour C_λ dans le cas des fonctions reste valable dans le cas des parties finies et, finalement, valable quelle que soit la valeur de l'indice λ à la condition toutefois que 2λ ne soit pas un entier négatif.

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}\text{Pf} \left(\mathcal{U}(t) t^\lambda J_\lambda(t) \right) = \frac{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1/2)}{\sqrt{\pi} (1 + s^2)^{\lambda+1/2}} \quad (5.13)$$

5.4.3 Utilisation de dérivation par rapport à un paramètre

Exemple 5.29 Transformée de $\text{Pf} \left[\mathcal{U}(t) t^\lambda (\ln t)^n \right]$ avec $-\lambda \notin \mathbb{N}$, $\lambda < -1$ et n entier positif.

On se sert du résultat trouvé précédemment (formule 4.18) sur l'image de $\text{Pf} \left[\mathcal{U}(t) t^{-\alpha} \right]$. Il s'agit d'utiliser la proposition 4.14. On obtient ainsi, pour un premier cas $n = 1$:

$$\mathcal{L} \left(\text{Pf}(f) \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\Gamma(1 + \lambda) s^{-\lambda-1} \right]$$

La dérivation du produit conduit au résultat :

$$\mathcal{L} \left(\text{Pf}(f) \right) = \Gamma'(1 + \lambda) s^{-\lambda-1} - \Gamma(1 + \lambda) s^{-\lambda-1} \left[\log s \right]$$

Il suffit ensuite d'itérer cette opération de dérivation, ce qui correspond d'ailleurs à l'application de la formule de Leibniz. On obtient ainsi, pour $\Re(s) > 0$:

$$\mathcal{L} \left[\text{Pf} \left(\mathcal{U}(t) t^\lambda (\ln t)^n \right) \right] (s) = \frac{1}{s^{\lambda+1}} \sum_{k=0}^{k=n} C_n^k (-1)^k \Gamma(k) (1 + \lambda) \left[\log \right]^{n-k} (s) \quad (5.14)$$

5.4.4 Utilisation de relations différentielles de récurrence

Exemple 5.30 Détermination de l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t)t^{-n-1}J_n(t)$ où n est un entier.

On peut montrer la relation différentielle suivante (Cf.Exercice 7.17) :

$$t^{-n} J_{n+1}(t) = -\frac{d}{dt} \left[t^{-n} J_n(t) \right] \quad (*)$$

Cette formule nous permet de calculer l'image de Laplace de la fonction continue f_n définie par $f_n(t) = \mathcal{U}(t)t^{-n}J_n(t)$. On démontre, par récurrence, pour $n \geq 1$, que, si l'on pose $\phi = \text{argsh}x$, on a :

$$\forall x > 0, \quad \mathcal{L}(f_n)(x) = 2^{1-n}(n-1)! \sum_0^{n-1} \frac{\exp[(2j+1-2n)\phi]}{j!(2n-1-j)!}$$

Pour $n = 1$, cette formule se réduit à : $\exp(-\phi) = [x + \sqrt{x^2 + 1}]^{-1}$, qui est bien la transformée de $\frac{J_1(t)}{t}$.

En effet, par le théorème de dérivation, la transformée de $J_1 = -J_0'$ s'écrit : $-\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + J_0(0) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} + 1$, expression qui est bien, au signe près, la dérivée de $[x + \sqrt{x^2 + 1}]^{-1}$.

On suppose vraie cette formule pour l'entier n . En passant aux images de Laplace dans la relation (*) et en utilisant la transformée d'une dérivée, avec la valeur initiale $f_n(0) = \frac{1}{n!2^n}$, on obtient, pour $x > 0$:

$$\mathcal{L}(t f_{n+1})(x) = -2^{1-n}(n-1)! x \sum_0^{n-1} \frac{\exp[(2j+1-2n)\phi]}{j!(2n-1-j)!} + \frac{1}{n!2^n}$$

Il faut ensuite prendre l'opposée d'une primitive en x de cette expression pour obtenir l'image de f_{n+1} . Le numérateur du terme général de cette somme fournit pour primitive :

$$\int \left[(\text{sh}\phi)(\text{ch}\phi) e^{[(2j+1-2n)\phi]} \right] d\phi = \frac{1}{4} \left[\frac{e^{[(2j+3-2n)\phi]}}{2j-2n+3} - \frac{e^{[(2j-1-2n)\phi]}}{2j-2n-1} \right] + C$$

Lorsque $\phi \rightarrow +\infty$, tous les termes du crochet précédent tendent vers 0 à l'exception de $e^{(2j+3-2n)\phi}$ qui devient e^ϕ tendant vers $+\infty$ pour $j = n - 1$. En raison

de l'équivalence $e^\phi = x + \sqrt{x^2 + 1} \overset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$, ce terme étant affecté du coefficient $\frac{2^{1-n}(n-1)!}{4(n-1)!n!} = \frac{1}{22^n n!}$ est équivalent à $\frac{x}{2^n n!}$. Il est donc compensé par l'intégration de la valeur initiale $-x \frac{1}{n! 2^n}$.

Puisque, pour le moment, ce sont des fonctions qui sont en cause, la primitive choisie doit tendre vers 0, d'où : $C = 0$.

Dans la primitive obtenue, on met en facteur $2n$ en tenant compte du coefficient $1/4$, ce qui amène le coefficient $2^{-n} n!$, d'où la forme du résultat A_{n+1} :

$$\left[\sum_0^{n-2} \left[\frac{2^{-n} n! e^{[(2j+3-2n)\phi]}}{2n(2j-2n+3)j!(2n-1-j)!} \right] + \sum_0^{n-1} \left[\frac{2^{-n} n! e^{[(2j-1-2n)\phi]}}{2n(2n-2j+1)j!(2n-1-j)!} \right] \right]$$

En dégagant du deuxième Σ ses deux premiers termes et en regroupant des deux sommes après avoir effectué une translation de deux unités dans le premier Σ , on peut écrire, pour l'image de f_n , l'expression suivante :

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= 2^{-n} n! \left[\frac{e^{(-2n-1)\phi}}{(2n+1)!} + \frac{e^{(-2n+1)\phi}}{(2n)!} \right. \\ &+ \sum_0^{n-1} \frac{e^{(2j-2n-1)\phi}}{(2n)(2n-1-2j)} \left[\frac{1}{j!(2n-1-j)!} + \frac{1}{(j-2)!(2n+1-j)!} \right] \\ &\left. + \frac{e^{-\phi}}{n!(n+1)!} \right] \end{aligned}$$

La réduction au même dénominateur dans le sigma restant nous donne :

$$(2n-j)(2n+1-j) - j(j-1) = 2n(2n+1-2j)$$

Il en résulte finalement :

$$A_{n+1} = 2^{-n} n! \left[\sum_0^n \frac{e^{(2j-2n-1)\phi}}{j!(2n+1-j)!} \right]$$

La formule donnée est donc démontrée par récurrence.

On va en déduire l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t)t^{-n-1}J_n(t)$ en écrivant, par exemple :

$$\mathcal{U}(t)t^{-n-1}J_n(t) = g(t) + \mathcal{U}(t) \frac{1}{n! 2^n t}$$

où la fonction g est continue.

On connaît la transformée de Pf $\left(\mathcal{U}(t) \frac{1}{n! 2^n t} \right)$. Il faut donc calculer la transformée de $[g]$. La fonction $t \mapsto tg(t)$ a pour transformée $A_n(x) - \frac{1}{n! 2^n x}$. En désignant par B_n une primitive de A_n , on a :

$$\mathcal{L}([g])(x) = -B_n(x) + \frac{1}{n! 2^n} \ln x + C$$

Le calcul de B_n se fait comme précédemment à l'aide de la variable ϕ .

$$\begin{aligned} B_n(x) &= 2^{-n}(n-1)! \int \sum_0^{n-1} \frac{e^{(2j-2n+1)\phi}}{j!(2n-1-j)!} \text{ch}\phi d\phi \\ &= 2^{-n-1}(n-1)! \left[\frac{\phi}{n!(n-1)!} + \sum_0^{n-2} \frac{e^{(2j-2n+2)\phi}}{j!(2n-1-j)!(2j-2n+2)} \right. \\ &\quad \left. + \sum_0^{n-1} \frac{e^{(2j-2n)\phi}}{j!(2n-1-j)!(2j-2n)} \right] \end{aligned}$$

Lorsque $\phi \rightarrow +\infty$, tous les termes du crochet précédent tendent vers 0 à l'exception de son premier terme $\frac{\phi}{2 \cdot 2^n n!}$.

En tenant compte de $\frac{1}{n!2^n} \ln x$, ce terme fournit une différence avec le précédent égale à : $\frac{1}{n!2^n} [\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \ln x]$ qui tend vers $\frac{1}{n!2^n} \ln 2$.

Il en résulte, puisque g est une fonction que : $C = -\frac{1}{n!2^n} \ln 2$.

Par le procédé déjà utilisé, on dégage le terme de plus faible indice et on regroupe les deux sigmas après avoir translaté l'indice de l'un deux d'une unité :

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \frac{\phi}{2 \cdot 2^n n!} + 2^{-n}(n-1)! \left[-\frac{e^{-2n\phi}}{(2n-1)!2n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_1^{n-1} \frac{e^{(2j-2n)\phi}}{(2j-2n)} \left[\frac{1}{(j-1)!(2n-j)!} + \frac{1}{(j)!(2n-1-j)!} \right] \right] \end{aligned}$$

La réduction au même dénominateur dans le crochet conduit à $j + (2n - j) = 2n$ et, finalement, on a :

$$\mathcal{L}([g])(x) = -\frac{\phi}{2 \cdot 2^n n!} + 2^{-n}(n!) \sum_0^{n-1} \left[\frac{e^{(2j-2n)\phi}}{(2j-2n)j!(2n-j)!} \right] - \frac{1}{n!2^n} \ln x$$

Posons : $w(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})$. En ajoutant l'image de $\text{Pf}\left(\mathcal{U}(t) \frac{1}{n!2^n t}\right)$, on obtient finalement, d'abord pour $x > 0$ et ensuite, en prolongeant, pour s tel que $\Re(s) > 0$:

$$\boxed{\mathcal{L}\left(\text{Pf}\left[\frac{J_n(t)}{t^{n+1}}\right]\right) = -\frac{1}{2^n n!} \left[\ln \frac{w(x)}{2} - \gamma \right] + \frac{n!}{2^n} \sum_0^{n-1} \frac{w(x)^{(2j-2n)}}{(n-j)j!(2n-j)!} \quad (5.15)}$$

On peut ensuite, par un procédé du même type, ou une dérivation, déterminer l'image de la partie finie de $t^{-n-2} J_n$ (Cf. Exercice 7.18)

5.4.5 Calcul direct par un développement en série

Exemple 5.31 Détermination de l'image de la partie finie de $\frac{\mathcal{U}(t)}{\text{sh}t}$.

La fonction admet une seule singularité au point $t = 0$. En mettant en facteur e^t , on peut se ramener à $f(t) = 2 \frac{\mathcal{U}(t)}{1 - e^{-t}}$. Nous allons calculer d'abord l'image du produit $t^2 \text{Pf}(f)$ qui s'identifie à la fonction continue $g(t) = 2 \frac{\mathcal{U}(t)t^2}{1 - e^{-t}}$. Pour $x > 0$, on calcule l'intégrale de Laplace de g par un développement en série :

$$\mathcal{L}(g)(x) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1 - e^{-t}} dt$$

Pour $t \geq \varepsilon$, la série $\sum_0^{+\infty} e^{-nt}$ est convergente et on peut facilement montrer qu'on peut intervertir la série et l'intégrale :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{t^2 e^{-xt}}{1 - e^{-t}} dt = \sum_0^{+\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} t^2 e^{-(n+x)t} dt$$

Ces intégrales se calculent par parties, d'où :

$$\mathcal{L}(g)(x) = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \left[\varepsilon^2 \sum_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+x)\varepsilon}}{n+x} + 2\varepsilon \sum_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+x)\varepsilon}}{(n+x)^2} + 2 \sum_0^{+\infty} \frac{e^{-(n+x)\varepsilon}}{(n+x)^3} \right]$$

La première série est majorée par $\sum_0^{+\infty} e^{-n\varepsilon}$ de somme $(1 - e^{-\varepsilon})^{-1}$ et, grâce au facteur ε^2 , ce premier terme tend donc vers 0 lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Les deux autres séries convergent normalement en la variable ε . On en déduit qu'on peut faire le passage à la limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, donc :

$$\mathcal{L}(g)(x) = 4 \sum_0^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^3}$$

Or, on sait que (Cf. Annexe 1) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \right) (x) = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

On peut donc conclure :

$$\forall x > 0, \quad \mathcal{L}(g)(x) = -2 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \right) (x)$$

En utilisant ensuite la division par le facteur t , on est amené, puisque $g(0+) = 0$ à prendre la primitive changée de signe de ce résultat. Il en résulte qu'après multiplication par $\exp(-t/2)$, puis une dilatation de rapport $k = 2$, on obtient :

$$\forall x > 1, \quad \mathcal{L}\left(\frac{\mathcal{U}(t)t}{\text{sh}t}\right)(x) = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

Puisque $t^2 \text{Pf}(f) = g$, on prend encore l'opposée d'une primitive du résultat précédent. On obtient donc :

$$\forall x > -1, \quad \mathcal{L}\left(\frac{\mathcal{U}(t)}{\text{sh}t}\right)(x) = -\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

Pour calculer la constante C , nous calculons la transformée pour $x = 1$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{e^{2t} - 1} = \frac{-1}{2t[1 + t + \dots]}$ nous fournit la partie infinie de l'intégrale $2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dt}{e^{2t} - 1}$. On en déduit :

$$\mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t)}{\text{sh}t}\right)\right)(1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2 \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dt}{e^{2t} - 1} + \ln \varepsilon]$$

En utilisant la variable $u = e^{2t}$, on arrive à :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [2\varepsilon - \ln(e^{2\varepsilon} - 1) + \ln(\varepsilon)] = -\ln(2)$$

Par ailleurs, on sait que $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma'(1) = -\gamma$. On en déduit : $C = -\ln 2 - \gamma$. Concluons, en prolongeant dans le demi-plan Π_{-1} :

$$\Re(s) > 1 \Rightarrow \mathcal{L}\left[\text{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t)}{\text{sh}t}\right)\right](s) = -\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(\frac{s+1}{2}\right) - \gamma - \ln 2 \quad (5.16)$$

5.4.6 Calcul par le procédé de dilatation complexe

Exemple 5.32 Détermination de l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t)t^{-1}J_{-\lambda}(at)$ avec $\lambda > 0$, non entier et a un nombre complexe de partie réelle strictement positive.

On a trouvé, dans l'exemple 5.25, l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t)t^{-1}J_{-\lambda}(t)$. Cette fonction se présente sous la forme $t \mapsto t^{-\lambda-1}g(t)$ avec un exposant $\lambda + 1$ qui n'est pas entier et une fonction g qui est restriction d'une fonction somme de série entière de rayon infini, donc holomorphe dans la totalité de \mathbb{C} . On peut donc essayer d'appliquer la proposition 4.23. Soit le réel x vérifiant : $\Re\left(\frac{x}{a}\right) > 0$, c'est-à-dire, en désignant l'argument de a par α , $\cos(\alpha) > 0$, ou encore $a \in \Pi_0$. Cette proposition s'appliquera si nous prouvons, Γ_R étant l'arc de cercle de centre O limité par l'axe des réels et la demi-droite issue de O et passant par le point $z = a$:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} z^{-1} J_{-\lambda}(z) \exp\left(-\frac{xz}{a}\right) dz = 0$$

Pour cela, on admettra (Cf. [[18]] ou [[29]]) la formule asymptotique du comportement au voisinage de l'infini, pour z complexe, de la fonction $J_{-\lambda}(z)$:

$$\forall z \in \mathbb{C}, J_{\lambda}(z) = -\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \left[\cos(z + (2\lambda - 1)\pi/4)A(z) - \sin(z + (2\lambda - 1)\pi/4)B(z) \right],$$

où A et B sont des séries de la variable $1/z$, donc bornées au voisinage de l'infini. Sur l'arc de cercle Γ_R , on pose $z = Re^{i\theta}$. Donc, en utilisant les majorations des modules des parties réelles et imaginaires de $\cos z$ et $\sin z$ par $\text{ch}(\Im m(z))$, on obtient, lorsque $R \rightarrow +\infty$, k, K, K', K'' étant des constantes :

$$\left| J_{\lambda}(Re^{i\theta}) \right| \leq K \left[\frac{2}{(\pi R)^{1/2}} \left[\text{ch}(R \sin \theta + k) \right] \right] \leq \frac{K'}{\sqrt{R}} \left[\exp(R \sin \theta) + K'' \right]$$

La constante K'' étant justifiée par le fait que $\exp(-R \sin \theta)$ est borné sur Γ_R .

En utilisant $\left| \exp\left(-\frac{x}{a}Re^{i\theta}\right) \right| = \exp\left[-\frac{x}{|a|}R \cos(\theta - \alpha)\right]$, on en déduit donc, pour l'intégrale considérée, la majoration :

$$\left| \int_{\Gamma_R} F(z) dz \right| \leq \frac{K'}{\sqrt{R}} \left[\int_0^{\alpha} \left[\exp(R \sin \theta) + K'' \right] \exp\left[-\frac{x}{|a|}R \cos(\theta - \alpha)\right] d\theta \right]$$

Puisque : $\exp[-xR \cos(\theta - \alpha)] \leq 1$ sur l'arc Γ_R , on peut encore écrire, en posant $\varphi(\theta) = \sin \theta - \frac{x}{|a|} \cos(\theta - \alpha)$:

$$\left| \int_{\Gamma_R} F(z) dz \right| \leq \frac{K'K''\alpha}{\sqrt{R}} + \frac{K'}{\sqrt{R}} \left[\int_0^{\alpha} \left[\exp(R\varphi(\theta)) \right] d\theta \right]$$

On suppose désormais $x > \Im m(a) = |a| \sin(\alpha)$. Alors, sur l'arc Γ_R , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(\theta) &< \sin(\theta) - \sin(\alpha) \left[\cos(\theta) \cos(\alpha) + \sin(\theta) \sin(\alpha) \right] \\ &< \sin(\theta) \cos^2(\alpha) - \cos(\theta) \cos(\alpha) \sin(\theta) = \cos(\alpha) \sin(\theta - \alpha) \leq 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs : $\varphi(\alpha) = \sin(\alpha) - \frac{x}{|a|} < 0$ De ces deux inégalités, on en déduit que

$\forall \theta \in [0, \alpha]$, $\varphi(\theta) < 0$ et il en résulte qu'il existe un nombre $m > 0$ tel que $\forall \theta \in [0, \alpha]$, $\varphi(\theta) \leq -m$.

Par conséquent :

$$\int_0^{\alpha} \left[\exp(R\varphi(\theta)) \right] d\theta \leq \alpha \exp(-mR)$$

On conclut ainsi, sous l'hypothèse $x > \Im m(a)$. à la limite nulle pour l'intégrale sur Γ_R . La proposition 4.23 aboutit donc, en se reportant à l'exemple 5.25, au résultat suivant, valable si $\Re e(a) > 0$ et λ non entier :

$$\Re(s) > \Im(a) \Rightarrow \mathcal{L} \left[\text{Pf} \left(t^{-1} J_{-\lambda}(at) \right) \right] = -\frac{1}{\lambda} \left[\frac{s + [(s^2 + a^2)^{1/2}]}{a} \right]^\lambda \quad (5.17)$$

Nous allons étendre ce résultat au cas où $a = i$

Exemple 5.33 Détermination de l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t)t^{-1}I_{-\lambda}(t)$ avec $\lambda > 0$, non entier.

La fonction de Bessel $I_{-\lambda}$ dite « modifiée de première espèce » est définie par $e^{i\lambda\pi/2}J_{-\lambda}(it)$. Il s'agit donc d'utiliser une dilatation complexe de rapport $a = i$. On peut encore essayer l'application de la proposition 4.23 bien que, cette fois, l'abscisse de convergence σ de $\mathcal{U}(t)t^{-1}J_{-\lambda}(t)$ étant nulle, on ne peut plus assurer la condition $\Re(\frac{x}{i}) > \sigma$. Cependant, si on choisit tout de même la fonction F définie par $F(z) = z^{-1}J_{-\lambda}(z) \exp(-\frac{x}{a}z)$ et $a = i$, on remarque qu'en raison du comportement de la fonction $J_{-\lambda}$ au voisinage de $+\infty$ (Cf. ce qui précède), l'intégrale

$$K(\lambda) = \int_0^{+\infty} t^{-1} J_{-\lambda}(t) e^{ixt} dt$$

est bien convergente.

En utilisant le prolongement analytique dans le résultat de l'exemple 5.25, la valeur de cette intégrale, pour $x > 1$, est :

$$K(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} [-i + [((-ix)^2 + 1)^{1/2}]^\lambda$$

. Comme on a : $[(-ix)^2 + 1^{1/2}] = \sqrt{x^2 - 1} \exp(-i\pi/2)$, on en déduit :

$$K(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} \exp(-i\frac{\lambda\pi}{2}) [x + \sqrt{x^2 - 1}]^\lambda$$

Donc, en tenant compte de la remarque 4.15, les résultats de cette proposition 4.23 vont rester valables sous réserve de vérifier :

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} F(z) dz = 0$$

Pour cela, on utilise la majoration faite dans l'exemple précédent avec $a = i$:

$$\left| \int_{\Gamma_R} F(z) dz \right| \leq \frac{K'}{\sqrt{R}} \left[\int_0^{\pi/2} \left[\exp(R \sin \theta) + K'' \right] \exp[-xR \sin(\theta)] d\theta \right] \quad (*)$$

Le réel x étant positif, on voit que l'intégrale facteur de K'' dans (*) tend vers 0. Il reste à considérer :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \left[\exp(R \sin \theta - xR \sin \theta) \right] d\theta$$

On suppose maintenant $x > 1$, d'où : $(1 - x)R < 0$, mais comme le minimum de $\sin \theta$ est nul, une majoration plus fine que dans l'exemple précédent est nécessaire. Elle est classique. On minore, en effet $\sin \theta$ sur $[0, \pi/2]$ par $\frac{2\theta}{\pi}$. On en déduit, comme dans le lemme 1.3 de Jordan :

$$|I_1| \leq \int_0^{\pi/2} \exp((1 - x)R \frac{2\theta}{\pi}) d\theta < \frac{\pi}{2(x - 1)R}$$

On en conclut que $I_1 \rightarrow 0$ lorsque $R \rightarrow +\infty$. En tenant compte des deux intégrales dans (*) qui tendent vers 0, on voit qu'on peut appliquer alors les résultats de la proposition 4.23.

On obtient donc :

$$i \int_0^{+\infty} (it)^{-1} J_{-\lambda}(it) e^{-xt} dt = K(\lambda) = -\frac{i}{\lambda} \exp(-i \frac{\lambda\pi}{2} [x + \sqrt{x^2 - 1}]^\lambda)$$

En multipliant par $\exp(+i \frac{\lambda\pi}{2})$, on a finalement, en prolongeant en outre dans Π_1 :

$$\Re(s) > 1 \Rightarrow \mathcal{L}(\text{Pf}(U(t)t^{-1}I_{-\lambda}(t)))(s) = -\frac{1}{\lambda} [s + [(s^2 - 1)^{1/2}]^\lambda \quad [4.18]$$

Exemple 5.34 Détermination de l'image de la partie finie de $\frac{U(t)}{\sin t}$.

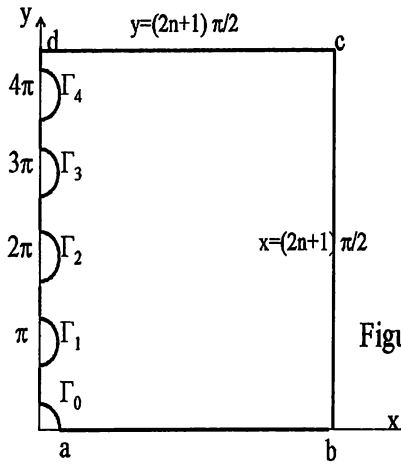
On a vu dans l'exemple 5.30 que la partie finie de $\frac{U(t)}{\text{sh}t}$ a pour image, pour

$x > -1$, la fonction : $-\left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)\left(\frac{s+1}{2}\right) - \gamma - \ln 2$.

Il s'agit donc encore d'utiliser la dilatation de rapport $a = i$, mais cette fois, les singularités pour la fonction donnée étant en nombre infini et, d'autre part, la singularité au point $t = 0$ étant d'ordre entier -1 , la proposition 4.23 ne peut nous être utile. On garde cependant l'idée de l'application du théorème de Cauchy à la fonction F définie par $F(z) = \frac{\exp(izx)}{\text{sh}z}$ et d'un contour convenable pouvant fournir l'intégrale de F sur l'axe imaginaire (ou plus exactement la partie finie de cette intégrale). Les points singuliers de F sont les zéros de $\sin(iz)$, donc d'affixes $z_k = ik\pi$. Comme il ne doivent pas être contenus dans le domaine, on prend le contour C_n dessiné ci-après où les segments $[bc]$ et $[dc]$ sont respectivement d'abscisse et d'ordonnée $R = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, le petit quart de cercle Γ_0 de centre O de rayon ε et les demi-cercles Γ_k , centrés aux points $ik\pi$, de rayons ε . On pose $I_0 = [i\varepsilon, i(\pi - \varepsilon)]$, $I_k = [ik\pi, i(k + 1)\pi - \varepsilon]$ pour $1 \leq k \leq n$, $K_n = [0, iR] \setminus \bigcup_{0 < k \leq n} I_k$.

L'application du théorème de Cauchy fournit alors :

$$\int_\varepsilon^R F(t)dt + \int_{[bc]} F(z)dz + \int_{[cd]} F(z)dz - \sum_0^n \int_{\Gamma_k} F(z)dz - i \int_{K_n} F(iy)dy = 0$$



Calculons d'abord la somme $S_0 = \int_{\varepsilon}^R F(t)dt + \int_{\Gamma_0} F(z)dz - i \int_{[i\varepsilon, i\pi/2]} F(z)dz$ en faisant apparaître les parties finies des deux intégrales qui sont divergentes. On peut développer en série de Laurent la fonction F autour de $z = 0$ selon la formule $F(z) = \frac{1}{z} + \varphi(z)$, cette dernière fonction étant holomorphe en $z = 0$. Il en résulte que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} F(z)dz = -i\pi/2 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_0} \varphi(z)dz = -i\pi/2$$

. En ajoutant et retranchant $\ln(\varepsilon)$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_0 &= \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{e^{-ixt}}{\text{sh}t} dt + \ln(\varepsilon) \right] - \left[\int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{e^{xy}}{\sin y} dy + \ln(\varepsilon) \right] - i\frac{\pi}{2} + o(\varepsilon) \\ &= \text{Pf} \left[\int_0^R \frac{e^{-ixt}}{\text{sh}t} dt \right] - \text{Pf} \left[\int_0^{\pi/2} \frac{e^{xy}}{\sin y} dy \right] - i\frac{\pi}{2} + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Calculons maintenant la somme :

$$S_k = - \int_{\Gamma_k} F(z)dz - \int_{k\pi-\pi/2}^{k\pi-\varepsilon} F(z)dz - \int_{k\pi+\varepsilon}^{k\pi+\pi/2} F(z)dz$$

La fonction $y \mapsto \frac{1}{\sin y}$ étant impaire par rapport au point $y = k\pi$, la somme des parties de cette fonction à droite et à gauche de ce point est une valeur principale qui peut se calculer d'ailleurs par translation à partir de la valeur principale autour de $y = 0$, à savoir :

$$Vp \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{xy}}{\sin y} dy \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\pi/2}^{-\varepsilon} \frac{e^{xy}}{\sin y} dy + \int_{\varepsilon}^{\pi/2} \frac{e^{xy}}{\sin y} dy \right) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{e^{xy} - e^{-xy}}{\sin y} dy$$

Puisque les points singuliers sont des pôles simples, l'intégrale sur Γ_k admet pour limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ la quantité $-i\pi \frac{e^{ix(ik\pi)}}{\text{ch}(ik\pi)}$. On en déduit donc :

$$S_k = -i\pi (-1)^k e^{-xk\pi} + Vp \left(\int_{k\pi-\pi/2}^{k\pi+\pi/2} F(z) \right) dz + o(\varepsilon)$$

En résumé :

$$\begin{aligned} & \lim \left(- \sum_0^n S_k + \int_{[ab]} F(z) dz - \int_{K_n} F(z) dz \right) \\ &= -Vp \left(\int_0^R \frac{e^{xy}}{\sin y} dy \right) + \text{Pf} \left(\int_0^R \frac{e^{-ixt}}{\text{sh}t} dt \right) - i \frac{\pi}{2} - -i\pi \sum_1^n (-1)^k e^{-xk\pi} \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $U_n = \int_{[bc]} F(z) dz + \int_{[cd]} F(z) dz \rightarrow 0$. On suppose à présent que $x > 0$.

Le long de $[bc]$, on minore le dénominateur par : $|\text{sh}(\frac{(2n+1)\pi}{2} + iy)| \geq \text{sh}[\frac{(2n+1)\pi}{2}]$.
Donc, pour la première intégrale, avec $x > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{[bc]} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^{n\pi+\pi/2} \frac{\exp[ix[n\pi + \pi/2] + iy]}{\text{sh}[(n\pi + \pi/2) + iy]} idy \right| \\ &\leq \int_0^{n\pi+\pi/2} \frac{\exp(-xy)}{\text{sh}[(2n+1)\pi/2]} dy \leq \frac{(2n+1)\pi/2}{\text{sh}[(2n+1)\pi/2]} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Le long de $[dc]$, le dénominateur $\text{sh}[\lambda + i\frac{(2n+1)\pi}{2}] = (-1)^n \text{ch}(\lambda)$. Donc, pour la deuxième intégrale, avec toujours $x > 0$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{[dc]} F(z) dz \right| &= \left| \int_0^{n\pi+\pi/2} \frac{\exp[ix[\lambda + i(n\pi + \pi/2)]]}{\text{sh}[\lambda + i\frac{(2n+1)\pi}{2}]} d\lambda \right| \\ &\leq \int_0^{n\pi+\pi/2} \frac{\exp(-x(n\pi + \pi/2))}{\text{ch}(\lambda)} d\lambda \leq \frac{(2n+1)\pi}{2} e^{-(x(n\pi+\pi/2))} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Finalement, en tenant compte du résultat de l'exemple 5.30, du calcul de

$$i\pi \left[-\frac{1}{2} + \sum_1^{+\infty} (-1)^k e^{-xk\pi} \right] = i\pi \left[-\frac{1}{2} + e^{-\pi} \frac{1}{1 + e^{-x\pi}} \right] = \frac{i\pi}{2} \text{th} \left[\frac{x\pi}{2} \right],$$

et en rassemblant les calculs précédents, on peut conclure, en prolongeant en outre dans le demi-plan Π_0 :

$$\Re(s) > 1 \Rightarrow \mathcal{L}(\text{Pf}(\frac{U(t)}{\sin t}))(s) = \left(-\frac{\Gamma'}{\Gamma} \right) \left(\frac{1-is}{2} \right) - \gamma - \ln 2 - \frac{i\pi}{2} \text{th} \left[\frac{s\pi}{2} \right] \quad (5.19)$$

Voir l'exercice 7.28 pour une autre méthode de calcul de cette transformée.

5.4.7 Application du prolongement analytique relatif à un paramètre

Exemple 5.35 *Proposons-nous le calcul de l'image de Laplace de $\text{Pf}(t^\lambda J_\lambda(t))$ pour $\Re(\lambda) \leq -1/2$, 2λ n'étant pas un entier strictement négatif.*

Dans l'exemple 2.18 (formule (2.19)), on a déterminé l'image de f lorsque $\lambda \geq 1$:

$$\Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(Ut^\lambda J_\lambda)(s) = \frac{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{[(1 + s^2)^{\lambda + 1/2}]}$$

Cette formule est même valable (Cf. Remarque 2.6) pour $\lambda > -1/2$. On constate que, si s vérifie toujours la condition $\Re(s) > 0$, le second membre conserve un sens pour des valeurs complexes de λ qui ne rendent pas $\lambda + 1/2$ entier négatif (Cf. Annexe 1). Nous allons voir que, à condition de remplacer f par sa partie finie, l'égalité précédente se prolonge pour toutes les valeurs de λ telles que 2λ n'est pas un entier strictement négatif. En utilisant les propriétés d'analyticité pour les transformées de Laplace des fonctions, on pourrait d'abord démontrer que la formule est valable pour λ complexe vérifiant : $\Re(\lambda) > -1/2$, mais cette preuve qui ne fait intervenir que les images de Laplace de fonctions va se trouver contenue dans l'utilisation de la proposition 4.24, relative aux images de parties finies, sur l'analyticité relative à λ .

On applique cette proposition dans $\Omega = \{\lambda \mid \Re(\lambda) \leq -1/2, -2\lambda \notin \mathbb{N}^*\}$, ou plus précisément sur tout domaine Ω_N inclus dans Ω où $\Re(\lambda) > -N$.

La fonction $f(t) = t^\lambda J_\lambda(t)$ peut s'écrire :

$$f(t) = \sum_0^N \frac{(-1)^n}{2^{2n+\lambda} n! \Gamma(n + \lambda + 1)} t^{2n+2\lambda} + \sum_{N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n+\lambda} n! \Gamma(n + \lambda + 1)} t^{2n+2\lambda}$$

Les premiers termes, en nombre fini, qui sont des fonctions de la forme $u(\lambda)t^{-v(\lambda)}$ où $u(\lambda) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+\lambda} n! \Gamma(n + \lambda + 1)}$ et $v(\lambda) = -2n - 2\lambda$ sont des fonctions holomorphes de λ dans \mathbb{C} et bornées dans Ω_N . De plus, la somme g de la dernière série, qui a un rayon de convergence infini, est localement sommable puisque tous les exposants qui y figurent sont supérieurs à 0.

On commence, en utilisant le comportement à l'infini de la fonction J_λ , par étudier l'abscisse de convergence de la fonction $t \mapsto f(t, \lambda)$ qui pourrait dépendre de λ . Pour cela, on reprend (Cf. [[18]] ou [[29]]), comme dans l'exemple 5.32, la formule asymptotique du comportement au voisinage de l'infini, en nous contentant de $z = x$ réel, mais avec, cette fois, λ complexe, de la fonction $J_\lambda(z)$:

$$J_\lambda(x) = -\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left[\cos(x + (2\lambda - 1)\pi/4)A(x) - \sin(x + (2\lambda - 1)\pi/4)B(x) \right],$$

où A et B sont bornées au voisinage de l'infini. Une majoration immédiate faisant intervenir des sinus et cosinus réels et des sinus et cosinus hyperboliques de $\Im m(\lambda)$ fournit : $|f(t)| \leq K(\lambda)t^{\Re(\lambda)}$. Ceci prouve que, quel que soit λ , l'abscisse de convergence de f , donc aussi celle de g , est égale à 0. C'est la première hypothèse de la proposition 4.24 qui est ainsi vérifiée.

Par les propriétés des exponentielles et de la fonction Γ , la fonction g est somme d'une série de fonctions analytiques en λ dans Ω_N . Il s'agit de prouver que g est analytique dans Ω_N .

On pourrait utiliser les propriétés classiques de J_λ mais on utilise ici une preuve

qui nous servira pour le reste de la démonstration.

Donnons nous un compact K dans Ω_N . On pose : $m = \inf_{\lambda \in K} > 0$.

On a : $|\Gamma(\lambda + n + 1)| \text{geq}(n + m)(n + m - 1) \cdots m\Gamma(m) = \Gamma(n + m + 1)$. Par ailleurs, (Cf. Annexe 1) pour $\mu = \lambda + n + 1$, on a (Cf. Annexe 1) la majoration :

$$\left| \frac{\Gamma'(\mu)}{\Gamma(\mu)} \right| \leq \frac{1}{|\mu|} + \gamma + \frac{\pi^2}{3} \left[n + 1 + \sup_{\lambda \in K} |\lambda| \right] \leq 3n + C \leq 4n$$

Or, la dérivée partielle, par rapport à λ , du terme général de la série définissant g est égale à la somme de deux termes $u_n(t, \lambda)$ et $v_n(t, \lambda)$ que l'on va majorer uniformément. Pour ces deux termes, on a respectivement, pour $|t| > 2$:

$$|u_n(t, \lambda)| = \left| \frac{(-1)^n (t)^{2n+2\lambda} \ln(t)}{2^{2n+\lambda} \Gamma(n + \lambda + 1) n!} \right| \leq \frac{|t|^{2n+2M} |\ln(t)|}{2^{2n+m} \Gamma(n + m + 1) n!}$$

$$|v_n(t, \lambda)| = \left| \frac{(-1)^n (t)^{2n+2\lambda} \Gamma'(n + 1 + \lambda)}{2^{2n+\lambda} n! \Gamma^2(n + 1 + \lambda)} \right| \leq \frac{|t|^{2n+2M}}{2^{2n+m} \Gamma(n + m + 1) n!} 2n$$

Ces majorants sont des termes généraux de séries convergentes, d'où la convergence uniforme locale de la série des dérivées partielles. On en conclut que la fonction g est une fonction analytique dans Ω_N . Les sommes de ces séries majorantes précédentes peuvent être évaluées à l'aide de la fonction de Bessel modifiée I_m . On a, en effet :

$$\sum_{N+1}^{+\infty} |u_n(t, \lambda)| = \frac{|t|^{2M-2m}}{2^m} I_m(|t|)$$

$$\sum_{N+1}^{+\infty} |v_n(t, \lambda)| = 4 \frac{|t|^{2M-2m}}{2^m} I_{m+1}(|t|)$$

On utilise alors le fait que l'abscisse de convergence des fonctions I_m est égale à 1 (Cf. Exemple 5.33). On vérifie ainsi la dernière hypothèse de la proposition 4.24, à savoir que $|\frac{\partial g}{\partial \lambda}| e^{-ct} \leq h(t)$ où h est une fonction sommable. Mais ce résultat n'est obtenu que pour $c > 1$. La proposition 4.24 établit donc que pour $\Re(s) > 1$, la transformée de Pf(f) est bien donnée par la formule donnée au départ. Cependant, comme il a été établi ci-dessus que l'abscisse de convergence de Pf(f) est égale à 0 quel que soit λ , on en déduit finalement que le prolongement obtenu est valable dans le demi-plan Π_0 .

$$-2\lambda \notin \mathbb{N} \quad \Re(s) > 0 \Rightarrow \mathcal{L}(Ut^\lambda J_\lambda)(s) = \frac{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1/2)}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{[(1 + s^2)^{\lambda + 1/2}]} \quad (5.20)$$

5.5 Applications à la convolution

Avant de voir sur des exemples l'intérêt de l'utilisation de la transformation de Laplace dans le calcul d'une convolution, déterminons une convolée de parties finies de façon directe sur deux exemples simples.

Exemple 5.36 Détermination de la convolée de $\text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t))$ par \mathcal{U} .

Par définition, si φ est une fonction test, la convolée se définit par :

$$\begin{aligned} \langle \text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t)) \star \mathcal{U}(t), \varphi \rangle &= \langle \text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t), \langle \mathcal{U}(u), \varphi(t+u) \rangle) \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t} \left[\int_0^{+\infty} \varphi(t+u) du \right] dt - \left[\int_0^{+\infty} \varphi(u) du \right] \ln \varepsilon \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{1}{t} \left[\int_t^{+\infty} \varphi(v) dv \right] dt - \left[\int_0^{+\infty} \varphi(u) du \right] \ln \varepsilon \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(v) \left[\int_{\varepsilon}^v \frac{1}{t} dt \right] dv - \left[\int_0^{+\infty} \varphi(u) du \right] \ln \varepsilon \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(v) [\ln v - \ln \varepsilon] dv - \left[\int_0^{+\infty} \varphi(u) du \right] \ln \varepsilon \end{aligned}$$

Dans cette égalité, on remarque (voir la figure qui suit), que l'on utilise la formule de Fubini. Elle s'applique puisqu'après échange des intégrations, l'intégrale portant sur la valeur absolue s'écrit : $\int_{\varepsilon}^{+\infty} |\varphi(v)| \left| \ln \frac{v}{\varepsilon} \right| dv$ et qu'elle est convergente.

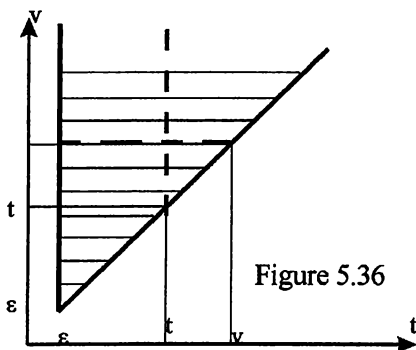


Figure 5.36

Mais, dans la dernière relation, la première intégrale admet une limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, à savoir la différence : $\int_0^{+\infty} \varphi(v) \ln(v) dv - \left[\int_0^{+\infty} \varphi(u) du \right] \ln \varepsilon$. Finalement, on a :

$$\boxed{\text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t)) \star \mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t) \ln t \quad (5.21)}$$

On peut évidemment vérifier en transformant par \mathcal{L} . La transformée de la convolée s'écrit :

$$\mathcal{L} \left[\text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t)) \star \mathcal{U}(t) \right] (x) = \frac{1}{x} \left(-\ln x - \gamma \right)$$

Dans cette dernière expression, on reconnaît bien (Cf. Exemple 2.3, formule (2.1)) l'image de $\mathcal{U}(t) \ln t$.

Voir l'exercice 7.33 pour la convolution de $\text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t))$ par une fraction rationnelle.

Exemple 5.37 Détermination par un calcul direct de la convolée de $\text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t))$ par $\mathcal{U}(t)e^t$

D'après la définition de la convolution, φ étant une fonction test, on a :

$$\langle \text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t)) \star \mathcal{U}(t)e^t, \varphi \rangle = \langle \text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t), \langle \mathcal{U}(u)e^u, \varphi(t+u) \rangle \rangle$$

Des calculs analogues aux précédents conduisent à :

$$\langle \text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t)) \star \mathcal{U}(t)e^t, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^v \varphi(v) \left[\int_{\varepsilon}^v \frac{e^{-t}}{t} dt \right] dv - \left[\int_0^{+\infty} e^u \varphi(u) du \right] \ln \varepsilon (*)$$

La première intégrale suggère d'introduire l'exponentielle intégrale (Cf. §2.1.5) définie par : $\text{Ei}(-t) = - \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du$ et dont on sait (Cf. Exercice 3.19) le comportement au voisinage de 0, à savoir : $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Ei}(-t) - \ln t = \gamma$. On en déduit

donc, en posant : $A = \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^v \varphi(v) \left[\int_{\varepsilon}^v \frac{e^{-t}}{t} dt \right] dv :$

$$\begin{aligned} A &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^v \varphi(v) \left[\text{Ei}(-v) - \text{Ei}(-\varepsilon) \right] dv \\ &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^v \varphi(v) \text{Ei}(-v) dv - \ln \varepsilon + \gamma \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^v \varphi(v) dv \end{aligned}$$

En se reportant à l'égalité (*), le terme en $\ln \varepsilon$ se détruit et, comme, par l'équivalence au voisinage de 0 de $\text{Ei}(-v)$ au logarithme, l'intégrale qui porte sur $e^v \varphi(v) \text{Ei}(-v)$ admet une limite finie, on en déduit :

$$\langle \text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t)) \star \mathcal{U}(t)e^t, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} e^v \varphi(v) \text{Ei}(-v) dv - \gamma \int_0^{+\infty} e^v \varphi(v) dv$$

Finalement :

$$\text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t)) \star (\mathcal{U}(t)e^t) = \mathcal{U}(t) \left[e^t [\text{Ei}(-t) - \gamma] \right] \quad (5.22)$$

Vérifions à l'aide de la transformation de Laplace.

Le produit des transformées nous donne l'expression : $-\frac{\ln x + \gamma}{x - 1}$. Or, en remplaçant x par $x - 1$ dans la formule (2.15) qui donne l'image de $\text{Ei}(-t)$, on obtient : $\mathcal{L}[\mathcal{U}(t)e^t \text{Ei}(-t)] = -\frac{\ln x}{x - 1}$. Par ailleurs, l'image inverse de $\frac{\gamma}{x - 1}$ est la fonction $\gamma \mathcal{U}(t)e^t$. Par conséquent, la formule précédente est vérifiée.

Exemple 5.38 Détermination de la convolée de $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-1})$ par elle-même.

On connaît par l'étude de l'exemple 5.17, l'image F de $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-1})$. Il en résulte que, par utilisation des propriétés de \mathcal{L} , la convolée considérée a pour image la fonction définie par $F^2(s) = [[\log](s) + \gamma]^2$. Or, on connaît, par l'exemple 5.19 l'image : $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)\frac{\ln^2 t}{t}) = \frac{1}{2}(\log s + \gamma)^2 + \frac{\pi^2}{6}$. Par conséquent, à l'aide de la transformation inverse, on en déduit :

$$\boxed{\left[\text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t)) \right]^{*2} = 2\text{Pf}\left[\mathcal{U}(t)\frac{\ln^2 t}{t} \right] - \frac{\pi^2}{6} \quad (5.23)}$$

Dans l'exercice 7.31, on propose le calcul pour la convolée de $\text{Pf}(t^{-1}\mathcal{U}(t))$ par $\text{Pf}(t^{-2}\mathcal{U}(t))$.

Exemple 5.39 Détermination de la convolée de $\mathcal{U}(t)$ par $\text{Pf}(t^{-2}\mathcal{U}(t))$.

En utilisant l'exemple 5.18, on obtient :

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t) \star \text{Pf}(t^{-2}\mathcal{U}(t)) \right] = \ln x + \gamma + 1$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathcal{U}(t) \star \text{Pf}(t^{-2}\mathcal{U}(t)) = -\text{Pf}\left[\mathcal{U}(t)\frac{1}{t} \right] + \delta \quad (5.24)}$$

On peut généraliser facilement (Cf. Exercice 7.32) à $\mathcal{U}(t) \star \text{Pf}(t^{-n}\mathcal{U}(t))$.

Remarque 5.1 D'après les propriétés de la convolution, on sait que la dérivée de $T \star V$ est, par exemple, $T' \star V$. Cela nous donne une autre méthode de calcul.

En dérivant le résultat de l'exemple 5.36 (formule (5.21)) et en tenant compte de $\delta' \star \mathcal{U} = \mathcal{U}' = \delta$, on vérifie le résultat précédent puisque :

$$\left[-\text{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t)}{t^2} - \delta' \right) \star \mathcal{U} = \text{Pf}\left[\frac{\mathcal{U}(t)}{t} \right]$$

5.6 Applications aux résolutions d'équations fonctionnelles

5.6.1 Equations différentielles linéaires à coefficients constants

On se contente des équations différentielles d'ordre 2. Lorsque le second membre f est une fonction continue sur \mathbb{R} , on sait que la solution générale est une fonction 2 fois dérivable sur \mathbb{R} dépendant de deux constantes, lesquelles peuvent être calculées à l'aide de conditions initiales, par exemple des conditions de Cauchy

au point $t = 0$. Il en est ainsi si la fonction du second membre est causale et si les conditions initiales sont remplacées par les limites à droite en $t = 0$. On a vu (Cf. §2.3.5) que, dans ce cas où on cherche des solutions également causales, la fonction solution est même de classe C^2 sur l'intervalle ouvert $]0, +\infty[$, mais seulement de classe C^1 sur l'intervalle fermé.

Lorsque la fonction f est discontinue avec des points de discontinuités de première espèce, il faut étendre la définition d'une solution de l'équation au sens des fonctions en l'exigeant de classe C^1 mais seulement de classe C^2 par morceaux, les points de discontinuités de la dérivée seconde y'' étant ceux de la fonction f . On pourrait continuer cette investigation avec une équation différentielle d'ordre n et prouver ainsi que si la fonction f est continue par morceaux, alors au sens généralisé précédent, les solutions sont de classe C^{n-1} et que c'est la dérivée d'ordre n qui "récupère" les points de discontinuités de première espèce de la fonction f . Dans tous ces cas, l'équation étant multipliée par l'échelon \mathcal{U} , on peut interpréter les dérivées au sens des distributions et on est amené à résoudre une équation dont l'inconnue est une fonction au moyen de la transformation de Laplace des distributions.

Si des conditions initiales sont données, elles s'intègrent dans la formule de dérivation des fonctions continues par morceaux. Bien entendu, dans les cas où le second membre n'est plus une fonction mais une distribution de Dirac ou une distribution du type «partie finie» et dans la mesure où on cherche des solutions transformables par \mathcal{L} , c'est bien cette transformation qui s'impose. Dans cette dernière situation, généralement la notion de conditions initiales n'a plus de sens (Cf. voir cependant la notion de valeur d'une distribution en un point [[17]]). Cette question des conditions initiales sera d'ailleurs reprise plus en détail dans le chapitre 6 (§ 6.1).

Les exemples qui suivent, avec ou sans valeurs initiales, illustrent ces différents cas par la méthode de la transformation de Laplace des distributions.

Exemple 5.40 *Résolution au sens des distributions de : $y'' - 2y' + y = E(t)$, E étant la fonction partie entière, avec les conditions $y(0) = y'(0) = 0$.*

En multipliant l'équation par $\mathcal{U}(t)$ on obtient une équation que l'on interprète au sens des distributions :

$$[\mathcal{U}y''] - 2[\mathcal{U}y'] + [\mathcal{U}y] = [E]$$

Si on désigne par Y l'image de Laplace de $[\mathcal{U}y]$, la dérivation de cette distributions fournit $[\mathcal{U}y]' = [\mathcal{U}y'] + (\mathcal{U}y)(0+)\delta$ d'où l'on tire $\mathcal{L}[\mathcal{U}y'] = sY(s) - y(0)$ et, de même pour la dérivée seconde : $\mathcal{L}[\mathcal{U}y''] = s^2Y(s) - y(0)s - y'(0)$.

Par ailleurs, la dérivée de E au sens des fonctions est égale à \mathcal{U} et les discontinuités de sauts tous égaux à -1 sont situées au points de \mathbb{N}^* . On a, par conséquent :

$$[E]' = \frac{1}{s} - \sum_1^{+\infty} \delta_k$$

Il en résulte que la transformée de Laplace de $[E]$ est définie par :

$$\mathcal{L}([E])(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} \sum_1^{+\infty} e^{-ks} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1 - e^{-s})}$$

On en déduit :

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s-1)^2} - \frac{e^{-s}}{s(1-s)^2(1-e^{-s})}$$

Il s'agit maintenant de trouver l'image inverse. Pour cela, on décompose les fractions rationnelles $\frac{1}{s^2(s-1)^2}$ et $\frac{1}{s(1-s)^2}$, ce qui permet d'écrire :

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{2}{s} - \frac{2}{s-1} - \frac{e^{-s}}{1-e^{-s}} \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{s-1} \right]$$

On en déduit par utilisation d'originaux simples affectés de translations d'indices entiers :

$$U(t)y(t) = U \left[t(1 + e^t) + 2(1 - e^t) \right] - \sum_1^{+\infty} U(t-k) \left[1 - e^{t-k} + (t-k) \right]$$

C'est l'expression d'une somme infinie, localement finie de combinaisons de fonctions affines et d'exponentielles.

On peut vérifier par des moyens élémentaires. Par exemple, sur l'intervalle $[0, 1[$, cette expression fournit :

$y_1(t) = t(1 + e^t) + 2(1 - e^t)$ et c'est bien ce que l'on trouve en résolvant sur $[0, 1[$ l'équation $y'' - 2y' + y = t$.

Sur l'intervalle $[1, 2[$, cette expression de même fournit : $2 + (t - 2)e^t - e^{t-1}$ et c'est bien ce que l'on trouve par la résolution sur $[1, 2[$ de $y'' - 2y' + y = t - 1$ avec les conditions initiales $y_2(1) = y_1(1) = 3 - e$ et $y'_2(1) = y'_1(1) = 1$.

Exemple 5.41 Résolution de $y'' - y = \delta$

On interprète cette équation en remplaçant y par la distribution régulière associée $[y]$, avec y'' remplacé par la dérivée au sens des distributions $[y]''$. L'équation devient donc : $[y]'' - [y] = \delta$.

Montrons d'abord sur cet exemple qu'il n'y a plus lieu de se donner des conditions initiales, elles sont imposées par l'équation elle-même, à savoir ici : $y(0+) = 0$ et $y'(0+) = 1$.

En effet, on a : $[y]' = [y'] + y(0+)\delta$ puis : $[y]'' = [y''] + y'(0+)\delta + y(0+)\delta'$, d'où par différence :

$$[y]'' - (y) = [y'' - y] + y'(0+)\delta + y(0+)\delta' = \delta$$

Ceci impose $y(0+) = 0$, $y'(0+) = 1$ et $[y'' - y] = 0$. On en déduit aussi que, dans $]0, +\infty[$, la fonction y est solution de l'équation homogène $y'' - y = 0$.

On en déduit d'ailleurs deux méthodes pour résoudre l'équation :

Première méthode

On utilise ce qui précède. Sur $]0, +\infty[$, $y(t) = A\cosh t + B\sinh t$. Les conditions initiales imposées nous fournissent : $A = 0$, $B = 1$.

Deuxième méthode

Par transformation de Laplace des distributions, on obtient pour équation transformée : $(s^2 - 1)Y(s) = 1$, d'où le résultat précédent.

Exemple 5.42 Résolution de $y'' - y = \sum_0^{+\infty} \delta_k$

On interprète encore cette équation au sens des distributions. La transformation de Laplace fournit l'équation : $(s^2 - 1)Y(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}}$.

La prise en compte de l'original de la fraction $\frac{1}{s^2 - 1}$ nous donne ensuite :

$$Y(s) = \sum_0^{+\infty} \mathcal{U}(t - k) \operatorname{sh}(t - k)$$

Exemple 5.43 Résolution de $y'' + y = 2\operatorname{Pf}\left[\frac{\sin t}{t^2}\right] + 2\operatorname{Pf}\left[\frac{\cos t}{t^3}\right]$.

Le premier membre a pour image de Laplace $(x^2 + 1)Y(x)$. Pour le deuxième membre, noté B , on s'inspire de la méthode de l'exemple 4.18 qui est une application de la formule (4.22) ou bien on se reporte aux résultats de l'exercice 7.29.

On a, en posant : $\theta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $\psi(t) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ et $r = \sqrt{x^2 + 1}$:

$$\mathcal{L}\left(\operatorname{Pf}\left(\mathcal{U}(t) \frac{\sin t}{t^2}\right)\right) = -r \left[\theta \frac{x}{r} + \left[\ln r - \psi(2) \right] \frac{1}{r} \right]$$

$$\mathcal{L}\left(\operatorname{Pf}\left(\mathcal{U}(t) \frac{\cos t}{t^3}\right)\right) = \frac{r^2}{2} \left[\theta \frac{2x}{r^2} - \left[\ln r - \psi(3) \right] \frac{x^2 - 1}{r^2} \right]$$

On en déduit, après simplification :

$$\mathcal{L}(B) = -(x^2 + 1) \ln(r) + 2\psi(2) + \psi(3)(x^2 - 1)$$

Comme (voir l'annexe 1)) $\psi(2) = 1 - \gamma$ et $\psi(3) = 3/2 - \gamma$, on a encore :

$$\mathcal{L}(B) = (x^2 + 1)(-\ln(r) - \gamma) + \frac{1}{2} + \frac{3x^2}{2}$$

On sait que l'image de la partie finie de $\frac{\cos t}{t}$ est (Cf. formule (4.20)) : $-\ln r - \gamma$, on trouve ainsi pour solution, une distribution qui ne se réduit pas à une fonction :

$$y = \operatorname{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t) \cos t}{t}\right) + \frac{3\delta}{2} - \mathcal{U}(t) \sin t$$

5.6.2 Notion de solution fondamentale

Soit $P(D)$ un opérateur différentiel associé au polynôme $P = \sum_0^n a_k X^k$ de sorte

que, pour toute distribution y , on a : $P(D)y = \sum_0^n a_k y^{(k)}$. On suppose le polynôme unitaire, à savoir : $a_n = 1$. On appelle solution fondamentale de l'opérateur

$P(D)$, la distribution E solution de l'équation différentielle $P(D)y = \delta$.

La transformation de Laplace nous donne immédiatement la transformée de Laplace $\mathcal{L}(E)$ par :

$$\mathcal{L}(E)(s) = (P(s))^{-1}$$

Il est facile de voir que cette fonction E est égale à $\mathcal{U}(t)\varepsilon(t)$ où la fonction $t \mapsto \varepsilon(t)$ est l'unique solution de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$ qui vérifie les conditions initiales : $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0$, $y^{(n-1)}(0) = 1$. En effet, si on note Y_0 l'image de Laplace de ε , les transformées des dérivées successives de ε vérifient : $\mathcal{L}(\varepsilon^{(k)}) = s^k Y_0(s)$ pour $0 \leq k \leq n-1$ et $\mathcal{L}(\varepsilon^{(n)}) = s^n Y_0(s) - 1$. Il en résulte donc : $P(s)Y_0(s) - 1 = 0$, ce qui est le résultat annoncé. Rappelons la proposition qui vient d'être retrouvée en se plaçant ici sur l'ensemble des polynômes :

Théorème 5.1 *Soit $P(X)$ un polynôme de l'indéterminée X dont le coefficient dominant est égal à 1. Alors la solution de l'équation différentielle : $P(D)(y) = \delta$ est exactement la fonction $t \mapsto \varepsilon(t)$, unique solution de l'équation différentielle $P(D)(y) = 0$ qui vérifie les conditions initiales : $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0$, $y^{(n-1)}(0) = 1$.*

Soit maintenant l'équation différentielle $P(D)y = f$ où f est une fonction ou une distribution. Si F est l'image de Laplace de f , on obtient $Y(s) = (P(s))^{-1}F(s)$. On en déduit, par utilisation de la convolution et le passage à l'image inverse : $y = E \star f$.

Enfin, appliquons l'opérateur $P(D)$ sur la distribution δ' . En vertu des propriétés de la convolution avec une dérivée de δ , on a : $P(D)(\delta') = \sum_0^n a_k \delta^{(k)}$. Donc, $P(s)$ est la transformée de cette distribution et la définition de E implique ainsi la propriété suivante :

$$P(D)(\delta') \star E = \delta$$

Autrement dit, E est l'inverse de convolution de la distribution $P(D)(\delta')$. Cette propriété n'ajoute rien à ce qui précède, mais elle prendra tout son sens dans le calcul symbolique, développé ci-après. sur les équations fonctionnelles qui sont du type équations de convolution.

5.6.3 Calcul symbolique et équations de convolution

Définissons l'application Φ qui, à tout polynôme P d'indéterminée X fait correspondre la distribution $P(D)(\delta')$ et telle que $\Phi(1) = \delta$. En particulier : $\Phi(X) = \delta'$ et, après avoir constaté les propriétés triviales de linéarité, il est facile d'en déduire la propriété d'homomorphisme : $\Phi(PQ) = \Phi(P) \star \Phi(Q)$ pour tout couple de polynômes. L'application Φ est alors un isomorphisme entre l'algèbre $\mathbb{C}[X]$ et une certaine sous-algèbre (pour l'opération de convolution), notée $(\mathcal{D}')^*$, de l'algèbre des distributions causales transformables par \mathcal{L} .

On peut prouver, classiquement, que cet homomorphisme se prolonge de façon unique en un homomorphisme $\tilde{\Phi}$ du corps $\mathbb{C}[X]$ des fractions rationnelles d'indéterminée X sur une sous-algèbre \mathcal{S}_{sym} de l'algèbre précédente. Pour deux

polynômes quelconques, on a :

$$\tilde{\Phi}\left(\frac{P}{Q}\right) = \Phi(P) \star \tilde{\Phi}(Q^{-1})$$

Les propriétés des fractions rationnelles vont ainsi se transporter sur la sous-algèbre \mathcal{S}_{sym} qui peut être ainsi interprété comme le corps des quotients de convolution des distributions causales transformables par \mathcal{L} . Donnons un exemple :

Exemple 5.44 *Trouver, dans la sous-algèbre \mathcal{S}_{sym} , l'inverse de convolution de $\mathcal{U}(t) \cos t$ et en déduire le quotient de convolution $[\mathcal{U}(t) \sin t] \star [\mathcal{U}(t) \cos t]^{*-1}$.*

Les deux fonctions $\mathcal{U}(t)e^{it}$ et $\mathcal{U}(t)e^{-it}$ sont, d'après ce qui précède les inverses de convolution des polynômes $X - i$ et $X + i$. On en déduit que :

$$\tilde{\Phi}^{-1}(\mathcal{U}(t) \cos t) = \frac{1}{2(X - i)} + \frac{1}{2(X + i)} = \frac{X}{X^2 + 1}$$

En inversant cette fraction rationnelle, on obtient : $X + \frac{1}{X}$ et, en transformant par $\tilde{\Phi}$, on obtient l'inverse de convolution cherché, à savoir :

$$[\mathcal{U}(t) \cos t]^{*-1} = \delta' + \mathcal{U}$$

L'image par $\tilde{\Phi}^{-1}$ de $\mathcal{U}(t) \sin t$ est de même $\frac{1}{X^2 + 1}$. L'image par $(\tilde{\Phi})^{-1}$ du quotient considéré est donc $\frac{1}{X}$. On en déduit que ce quotient de convolution est \mathcal{U} . Bien entendu, ce calcul peut être fait par \mathcal{L} ; les images de Laplace des fonctions considérées sont respectivement $\frac{s}{s^2 + 1}$ et $\frac{1}{s^2 + 1}$. Le quotient des deux images nous fournit $\frac{1}{s}$ dont l'image inverse de Laplace est \mathcal{U} .

Remarque 5.2 *En fait, ce calcul symbolique élémentaire n'apparaît ici que comme une technique particulière pour résoudre des équations de convolution qui font intervenir les distributions, quotients de convolution de polynômes de δ' .*

Il est facile de voir que ce calcul symbolique peut être défini dans l'algèbre \mathcal{D}'_+ des distributions causales, sans faire allusion à la transformation \mathcal{L} . Par ailleurs, d'autres calculs dits « opérationnels » (Cf. [[14,a)], [[16]], [[15, a) et b)]) par exemple), s'appuyant sur \mathcal{L} , prolongent considérablement ce calcul symbolique.

Des exemples de calcul symbolique sont proposés dans l'exercice 7.36.

5.6.4 Equations linéaires à coefficients polynomiaux

On a déjà vu (Cf. §2.3.2) que, dans ce cas, on obtient pour équation transformée de E_1 une équation différentielle E_2 du même type. Comme dans le chapitre 2,

on raisonne dans le cas des équations du second ordre. On peut trouver cependant deux avantages à utiliser la transformation \mathcal{L} . En premier lieu, l'équation E_2 peut être plus simple que l'équation donnée ; c'est le cas si les coefficients de E_1 sont au plus du premier degré. On obtient alors une équation E_2 du premier ordre. C'est aussi le cas si l'équation E_2 est incomplète et si, de ce fait, elle se ramène au premier ordre. Par ailleurs, même si l'équation E_2 ne se simplifie pas, les solutions cherchées pour cette équation sont des fonctions régulières et non des distributions et cela guide davantage la résolution éventuelle.

Signalons également que, dans le cas où le coefficient polynômial de la dérivée d'ordre maximal s'annule sur $[0, +\infty[$, on ne peut rien affirmer a priori sur l'existence et l'unicité d'une solution fonction lorsque le second membre est une fonction, a fortiori lorsque ce second membre est une distribution. C'est pourquoi, les calculs effectués sont d'abord formels avant d'aboutir éventuellement à des fonctions ou des distributions dont un raisonnement par utilisation de \mathcal{L}^{-1} établit qu'elles sont des solutions de E_1 .

On commence par des exemples de réduction de l'ordre. Le premier exemple reprend l'exemple 2.39 avec un autre second membre :

Exemple 5.45 *Résolution au sens des fonctions ou des distributions de l'équation :*

$$ty'' - (3t - 2)y' + (2t - 4)y = \text{Pf}(U(t)t^{-1})$$

A priori, on ne peut appliquer, notamment à cause du second membre, la transformation de Laplace au sens des fonctions. Nous appliquerons donc la transformation \mathcal{L} au sens des distributions. Cependant, nous tentons sur cet exemple, une résolution, au sens des fonctions, sur l'intervalle $]0, +\infty[$ en ayant remplacé le second membre par la fonction continue $t \mapsto t^{-1}$. Et, pour cette résolution, on ne s'interdit nullement d'utiliser \mathcal{L} lorsque cela est possible, par exemple pour trouver une solution particulière.

Résolution au sens des fonctions

Transformons par Laplace l'équation E_1^0 sans second membre avec des conditions initiales nulles :

$$ty'' - (3t - 2)y' + (2t - 4)y = 0$$

En utilisant les résultats de l'exemple 2.39, l'équation transformée s'écrit :

$$(x - 1)(x - 2)Y' + Y = 0$$

Sa solution générale s'écrit donc $Y_0(t) = C \frac{x - 1}{x - 2}$. La fraction se décompose en $1 + \frac{1}{x - 2}$, ce qui conduit par l'image inverse à $\delta + U(t)e^{2t}$. Comme on se propose la résolution sur $]0, +\infty[$, on considère seulement la solution fonction $t \mapsto e^{2t}$ qui est ainsi une solution particulière de l'équation E_1^0 .

La technique habituelle de résolution de $ty'' - (3t - 2)y' + (2t - 4)y = t^{-1}$ consiste alors à poser $y = u(t)e^{2t}$.

La fonction u est alors solution de l'équation incomplète $tu'' + (t + 2)u' = e^{-2t}t^{-1}$ qui s'intègre sans difficultés. On trouve d'abord ; $u'(t) = \frac{Ke^{-t} - e^{-2t}}{t^2}$ et ensuite,

grâce à deux intégrations par parties et l'introduction des primitives de $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ et de $t \mapsto \frac{e^{-2t}}{t}$, on trouve la solution générale sur $]0, +\infty[$ à l'aide des constantes arbitraires H et K :

$$y(t) = He^{2t} + K \left[e^{2t} \int_t^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv - \frac{e^t}{t} \right] + \frac{1}{t} - 2e^{2t} \int_t^{+\infty} \frac{e^{-2v}}{v} dv$$

On peut d'ailleurs exprimer cette solution en utilisant la fonction exponentielle intégrale $\text{Ei}(-t)$:

$$y(t) = He^{2t} + K \left[-\frac{e^t}{t} - e^{2t} \text{Ei}(-t) \right] + \frac{1}{t} + 2e^{2t} \text{Ei}(-2t)$$

La question posée à présent est de savoir si l'on peut prolonger cette fonction au point $t = 0$. Comme on connaît le comportement classique de $\text{Ei}(-t)$ au voisinage de 0 (Cf. Exercice 3.19), on a la relation :

$$y(t) = H + K \left(-1 - \frac{1}{t} + \ln t + \gamma \right) + \frac{1}{t} - 2 \ln(2t) - 2\gamma + o(t)$$

La disparition du terme en t^{-1} exige $K = 1$ mais alors, au voisinage de $t = 0$, la fonction est équivalente à $-\ln t$. on en déduit qu'il y a une infinité de solutions localement sommables sur $[0, +\infty[$, à savoir :

$$y(t) = He^{2t} + \frac{1 - e^t}{t} + e^{2t} [2\text{Ei}(-2t) - \text{Ei}(-t)]$$

Résolution au sens des distributions

En utilisant la transformée de Laplace de $\text{Pf}(t^{-1})$ et certains des résultats précédents (ou ceux de l'exemple 2.39), la transformée F de la distribution solution T de E_1 vérifie l'équation E_2 que l'on considère sur \mathbb{R} :

$$(x-1)(x-2)Y' + Y = \ln x + \gamma$$

L'équation sans second membre correspondante à E_2 admet pour solution générale $Y_0(t) = C \frac{x-1}{x-2}$ et la méthode de variation de la constante C nous fournit $C' = \frac{\ln x + \gamma}{(x-1)^2}$. Par une intégration par parties, on obtient la solution générale de l'équation E_2 :

$$Y(x) = -\frac{\ln x}{x-2} - \frac{x-1}{x-2} \ln \frac{x}{x-1} - \frac{\gamma}{x-2} + \lambda \frac{x-1}{x-2}$$

On peut, pour faciliter le passage aux images inverses, l'écrire aussi :

$$Y(x) = -\ln x - \gamma + \ln(x-1) + \gamma - 2 \frac{\ln x}{x-2} + \frac{\ln(x-1)}{x-2} - \frac{\gamma}{x-2} + \lambda \frac{x-1}{x-2} + H$$

Les 4 premiers termes de cette relation correspondent d'une part à la partie finie de $\frac{1}{t}$ et d'autre part au produit de cette partie finie par e^t . On en déduit que ces

termes ont pour image inverse la fonction continue $t \mapsto \frac{1 - e^t}{t}$. Pour les termes qui suivent, on fait agir la dilatation de rapport a réel positif quelconque sur l'image de l'exponentielle intégrale (Cf. §2.1.5). Ainsi, la transformée de Laplace de $\text{Ei}(-at)$ s'écrit : $-\frac{1}{x} \ln \left[\frac{x+a}{a} \right]$.

A partir de ce résultat, modifié par des translations sur x provenant de multiplications des originaux par des exponentielles, on obtient :

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\ln x - \ln 2}{x - 2} \right) = -\mathcal{U}(t)e^{2t}\text{Ei}(-2t), \quad \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\ln(x - 1)}{x - 2} \right) = -\mathcal{U}(t)e^{2t}\text{Ei}(-t)$$

Par conséquent, la solution de l'équation E_1 peut s'écrire :

$$y(t) = \mathcal{U}(t) \left[\frac{1 - e^t}{t} + 2e^{2t}\text{Ei}(-2t) - e^{2t}\text{Ei}(-t) - (2 \ln 2 + \gamma)e^{2t} + \lambda e^{2t} \right] + \lambda \delta$$

Si nous n'imposons aucune condition aux solutions cherchées, nous obtenons ainsi une infinité de solutions dépendant de la constante arbitraire λ . Si, par contre, on cherche des fonctions définies sur $[0, +\infty[$ parmi ces distributions, on retombe sur le développement fait ci-dessus et on aboutit à la même conclusion.

Il faut remarquer cependant que les solutions fonctions sur $]0, +\infty[$ constituent un espace affine à deux dimensions alors que les solutions dans l'espace des distributions causales constituent un sous-espace affine à une dimension. On voit aussi que, malgré la présence de δ dans la solution, il n'existe pourtant pas de solution de type $C\delta^{(k)}$.

En fait, en faisant la différence de deux solutions, on constate que $e^{2t} + \delta$ doit être solution de l'équation sans second membre. C'est ce qui a été trouvé dans la résolution de E_1^0 . Et d'ailleurs, puisque les dérivées de cette distribution s'écrivent : $2e^{2t} + \delta + \delta'$ et $4e^{2t} + 2\delta + \delta' + \delta''$, on vérifie qu'elle est bien solution de cette équation.

L'exemple suivant est une équation du second ordre de type «équation d'Euler» : $t^2y'' + bty' + cy = T$. On voit immédiatement que l'équation transformée E_2 est du même type avec un second membre qui est une fonction.

Exemple 5.46 Résolution de l'équation : $t^2y'' + ty' - y = \delta$

L'équation transformée E_2 est incomplète ; elle s'écrit : $x^2Y'' + 3xY' = 1$. Elle se ramène donc à l'équation du premier ordre : $x^2u' + 3xu = 1$ dont la solution générale s'exprime par : $u(x) = \frac{1}{2x} + \lambda \frac{1}{x^3} + \mu$. On en déduit les images des solutions éventuelles :

$$Y(x) = \frac{\ln x - \lambda x^{-2}}{2} + \mu$$

En écrivant ce résultat sous la forme $-\frac{1}{2} \left(-\ln x - \gamma \right) - \frac{\gamma}{2} - \frac{\lambda}{2x^2} + \mu$, on obtient des distributions, dépendant de deux constantes arbitraires a et b , dont on vérifie qu'elles sont effectivement solutions de E_1 , à savoir :

$$y = -\frac{1}{2} \text{Pf} \left[\frac{\mathcal{U}(t)}{t} \right] + a\delta + b\mathcal{U}(t)t$$

On voit, sur cette formule, qu'aucune solution n'est une fonction localement sommable sur $]0, +\infty[$.

Dans ce qui suit, on généralise cette équation.

Exemple 5.47 Résolution de l'équation $t^2 y'' + bty' - by = \delta$ avec $b \neq 1$ et $b \neq 0$

Résolution élémentaire, sans utiliser \mathcal{L}

Ici, nous essayons d'abord une résolution directe de cette équation E_1 , en discutant suivant la valeur de b , le principe étant de résoudre, au sens des fonctions puis au sens des distributions, l'équation sans second membre et d'ajouter ensuite une solution particulière de l'équation complète.

Cas où b vérifie $b \neq -1$

Pour cela, nous cherchons des solutions du type puissance $t \mapsto t^k$ sur $]0, +\infty[$ pour l'équation homogène associée. L'exposant k est, alors, assujéti à l'égalité : $k^2 + (b-1)k - b = 0$. Les deux solutions de cette équation sont $k = 1$ et $k = -b$. Comme nous avons supposé que $b \neq -1$, on en déduit la solution générale de l'équation homogène sur l'intervalle $]0, +\infty[$ sous la forme $y_0(t) = \lambda t + \mu t^{-b}$.

Cas où b vérifie $-b > 1$

Les dérivées de t^{-b} font intervenir les puissances t^{-b-1} et t^{-b-2} avec $-b-2 > -1$ et n'introduisent aucune distribution de Dirac ; ces fonctions sont encore solutions (Cf §4.10.8, 2) au sens des distributions sur $]0, +\infty[$. Mais il n'est pas certain qu'une distribution de support réduit à $\{0\}$ ne puisse pas être solution de cette équation sans second membre. Testons le en calculant $S_k = t^2 \delta^{(k+2)} + bt \delta^{(k+1)} - b \delta^{(k)}$. Il vient, par les propriétés des dérivations de produits :

$$S = (k+1)(k+2) - b(k+1) - b] \delta^{(k)} = (k+2)(k+1-b) \delta^{(k)}$$

Il en résulte qu'il n'y a pas dans le cas présent d'autres solutions distributions pour l'équation sans second membre que les combinaisons linéaires précédentes. On retiendra pour la suite de la discussion que dans le cas $b = k+1$ où $k \in \mathbb{N}$, l'équation sans second membre admet la solution $\delta^{(k)}$, ce qui, d'ailleurs, a été constaté pour $b = 1$ dans l'exemple précédent. Il suffit, pour terminer, de chercher une solution particulière de l'équation complète.

Etant donnée la forme du second membre, on peut chercher une telle solution sous la forme $y = C\delta$. On obtient la condition $2C\delta - bC\delta - bC\delta = \delta$ qui donne bien une valeur de C puisque $b \neq 1$. On en déduit la solution générale de E_1 qui constitue un espace affine à deux dimensions :

$$y = \lambda \mathcal{U}(t)t + \mathcal{U}(t)\mu t^{-b} + \frac{1}{2-b} \delta$$

Cas où b , non entier, vérifie $b > -1$

Au point de vue des distributions, on prolonge la fonction t^{-b} par sa partie finie. Comme l'exposant n'est pas entier, cette partie finie est solution au sens des distributions de l'équation sans second membre. En ajoutant la solution particulière toujours valable, on obtient la solution générale de E_1 :

$$y(t) = \lambda \mathcal{U}(t)t + \mu \text{Pf} \left[\mathcal{U}(t)t^{-b} \right] + \frac{1}{2-b} \delta$$

Cas où b vérifie $b = -1$

Dans ce cas, la solution $t \mapsto t$ est double et on sait que la solution de l'équation homogène est alors $y_0(t) = t(\lambda \ln t + \mu)$. Comme la dérivée seconde de $\mathcal{U}(t)t \ln t$ est $\text{Pf}\mathcal{U}(t)t^{-1}$, cette fonction n'est plus prolongeable en une solution au sens des fonctions sur $[0, +\infty[$. La solution est tout de même, au sens des distributions :

$$y = \mathcal{U}(t) [\lambda[t] + \mu[t \ln t]] + \frac{1}{4}\delta$$

Cas où b est un entier n vérifiant $n > 1$

Au point de vue distributions, il est logique de prolonger la fonction $t \mapsto t^{-n}$ par la partie finie correspondante $y_n = \text{Pf}(t^{-n})$. Cette fois, il n'est pas certain qu'on doit la prendre en compte pour l'équation sans second membre. Les calculs nous donnent, après avoir constaté l'élimination des parties finies elles-mêmes :

$$t^2 y''_n + n y'_n - y_n = n \frac{(-1)^n}{n!} t \delta^{(n)} + \frac{(-1)^n}{n!} t^2 \delta^{(n+1)} + n \frac{(-1)^n}{(n+1)!} t^2 \delta^{(n+1)}$$

Il est facile de voir que $t^2 \delta^{(n+1)} = n(n+1)\delta^{(n-1)}$ et $t \delta^{(n)} = -n \delta^{(n-1)}$. Il en résulte que l'expression précédente ne peut être nulle. La partie finie n'est donc pas une solution particulière de l'équation sans second membre. En revanche, comme il a été vu ci-dessus, l'équation sans second membre admet aussi la solution $\delta^{(n-1)}$. Ceci entraîne que l'espace des solutions distributions de l'équation sans second membre est tout de même de dimension 2.

La solution particulière de l'équation complète étant toujours valable, on en déduit la solution générale :

$$y(t) = \lambda \mathcal{U}(t)t + \nu \delta^{(n-1)} + \frac{1}{2-2n} \delta$$

Utilisation de la transformation \mathcal{L}

On trouve, par transformation par \mathcal{L} , une équation (E_2) du même type, à savoir l'équation d'Euler :

$$s^2 Y'' + (4-b)sY' + 2-2b = 1$$

On commence encore par chercher les solutions du type $s \mapsto s^k$ pour l'équation homogène associée. L'exposant k est solution de l'équation : $k^2 + (3-b)k + 2-2b = 0$ et, si on se place dans le cas $b \neq -1$, on en déduit la solution générale de cette équation homogène sous la forme :

$$Y_0(s) = \lambda s^{-2} + \mu s^{b-1}$$

Dans le cas $b = -1$, cette solution s'écrit :

$$Y_0(s) = s^{-2} (\lambda + \mu \log s)$$

En tenant compte ensuite de la solution particulière $\frac{1}{2-2b}$, valable puisque $b \neq 1$, on obtient la solution générale de (E_2) . Cette solution particulière a pour image

inverse $\frac{\delta}{2-2b}$. On retrouve ainsi, lorsque $b \neq -1$, par utilisation des images inverses classiques des fonctions puissances ou de produits de telles fonctions par un logarithme, les résultats précédents dans les différents cas examinés.

Lorsque $b = -1$, on cherche l'image inverse de $x^{-2} \ln x$.

Comme la transformée de $\mathcal{U}(t) \ln t$ est égale à $-\frac{\ln x + \gamma}{x}$, on en déduit, par dérivation de cette dernière qui fournit : $\frac{\ln x}{x^2} + \frac{\gamma-1}{x^2}$, que l'image inverse de $x^{-2} \ln x$ est égale à $\mathcal{U}(t) [-t \ln t + [\gamma - 1)t]$. Il en résulte que la solution générale de (E_1) s'écrit bien dans ce cas :

$$y = \lambda[t] + \mu[t \ln t] + \frac{1}{4}\delta$$

Enfin, dans le cas où b est un entier n vérifiant $n > 1$, il nous faut chercher l'image inverse de x^{n-1} . C'est une dérivée de δ et on retrouve la formule précédente :

$$y(t) = \lambda \mathcal{U}(t)t + \nu \delta^{(n-1)} + \frac{1}{2-2n}\delta$$

Exemple 5.48 Résolution de $t^2 y'' + 3ty' + y = \delta'$

Pour l'équation transformée (E_2) , on trouve :

$$sY''(s) + Y'(s) = 1$$

La solution générale de cette équation s'obtient sans peine :

$$Y(s) = s + \lambda [\log(s)] + \mu$$

En écrivant ceci sous la forme :

$$Y(s) = s - \lambda [-\log s - \gamma] + \mu + \gamma\lambda,$$

on en déduit la solution générale de l'équation donnée :

$$y(t) = \delta' + \text{APf} \left(\frac{\mathcal{U}(t)}{t} + B\delta \right)$$

Exemple 5.49 Résolution de $ty'' + 2(1-it)y' - (2i+t)y = \delta$

Résolution n'utilisant pas \mathcal{L}

Il peut être prouvé qu'il existe un changement de fonction inconnue qui ramène l'équation à une équation à coefficients constants. Du point de vue des fonctions, on prend pour nouvelle fonction inconnue sur $]0, +\infty[$, la fonction u définie par $u = ty$. On trouve pour nouvelle équation : $u'' - 2iu' - u = 0$. L'équation caractéristique de cette équation admet la racine double $r = i$. La solution générale de cette équation s'exprime donc par : $u_0(t) = Ae^{it} + Bte^{it}$ et on en déduit la solution générale, sur $]0, +\infty[$, du point de vue des fonctions, de l'équation sans

second membre ; il s'agit de : $y_0(t) = \frac{Ae^{it} + Bte^{it}}{t}$.

Il apparaît que la fonction $t \mapsto e^{it}$ n'est pas une solution particulière, au sens des distributions, sur $[0, +\infty[$. En revanche, comme les dérivées de cette fonction sont données respectivement par $[y]' = \delta + ie^{it}$ et $[y]'' = \delta' + i\delta - e^{it}$ et que $t\delta' = -\delta$, on vérifie la relation :

$$t[y]'' + 2(1-it)[y]' - (2i+t)[y] = t(\delta' + i\delta - e^{it}) + 2(1-it)(\delta + ie^{it}) - (2i+t)e^{it} = \delta$$

Ceci signifie que la distribution $[e^{it}]$ est solution particulière de l'équation complète.

Il reste à traiter l'autre fonction solution de l'équation sans second membre, à savoir : $\frac{\exp(it)}{t}$ qu'on prolonge, par Pf $\left(\frac{\mathcal{U}(t) \cos t}{t}\right) + i\frac{\mathcal{U}(t) \sin t}{t}$ en tant que distribution. En utilisant les dérivées de cette partie finie (Cf. Exercice 7.23), on peut voir que cette partie finie n'est pas solution de l'équation sans second membre. En cherchant ensuite la solution éventuelle $y = C\delta$, on voit qu'effectivement, on obtient ainsi les seules solutions de l'équation sans second membre. Par conséquent, en tenant compte de la solution particulière de l'équation complète trouvée précédemment, on en déduit la solution générale de l'équation donnée :

$$y(t) = \mathcal{U}(t) \exp(it) + C\delta$$

Résolution utilisant \mathcal{L}

En transformant l'équation donnée (E_1) par \mathcal{L} , on obtient l'équation (E_2) :

$$(-s^2 + 2is + 1)Y' = 1$$

Elle s'intègre immédiatement et fournit : $Y(s) = \frac{1}{s-i} + C$. Par retour à l'image inverse, on obtient la solution générale de (E_1) , qui confirme ce qui précède :

$$y(t) = \mathcal{U}(t) \exp(it) + C\delta$$

On constate donc que l'équation admet une seule solution qui soit une fonction continue.

5.6.5 Equations intégrales ou intégréo-différentielles

Exemple 5.50 Résolution de l'équation intégrale :

$$2 \int_0^t \frac{J_2(t-u)}{t-u} y(u) du + y(t) = \text{Pf} \left[\frac{\mathcal{U}(t) J_4(t)}{t} \right]$$

On reconnaît dans l'intégrale du premier membre l'expression d'une convolution, celle de la fonction y par la fonction $2\frac{\mathcal{U}(t) J_2(t)}{t}$. Sans conserver nécessairement à y sa nature de fonction, on traduit l'équation intégrale donnée E_1 par l'équation de convolution :

$$\left[2\frac{\mathcal{U}(t) J_2(t)}{t} + \delta \right] \star [y] = \text{Pf} \left[\frac{\mathcal{U}(t) J_4(t)}{t} \right]$$

Le tableau T_2 (Cf §2.1.7) fournit les images de $\mathcal{U}(t)J_\lambda(t)$, il s'agit de $\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^\lambda}{\sqrt{x^2+1}}$ qui n'est autre que la dérivée de $-\frac{1}{\lambda}(\sqrt{x^2+1}-x)^\lambda$. Comme, pour $\lambda = 2$ ou $\lambda = 4$, $J_\lambda(0) = 0$, on en déduit que les images de $\lambda \frac{\mathcal{U}(t)J_\lambda(t)}{t}$ sont données par les fonctions $(\sqrt{x^2+1}-x)^\lambda$.

Par conséquent, le coefficient de y dans la convolution précédente devient : $2x^2 + 2 - 2x\sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}-x)$ et la transformée de E_1 par \mathcal{L} nous fournit : $Y(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)^3}{8\sqrt{x^2+1}}$.

La solution, qui est unique, est la fonction $y(t) = \frac{1}{8}\mathcal{U}(t)J_3(t)$.

Exemple 5.51 Soit l'équation dite : « intégral-différentielle » où l'inconnue y est la fonction (ou la distribution) causale vérifiant :

$$2 \int_0^t \exp(t-u) \cos(t-u) y(u) du - y' + y = \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-3})$$

Là encore, on reconnaît dans la première intégrale l'expression d'une convolution. En interprétant l'équation E_1 au sens des distributions ou au sens des fonctions sous la réserve $y(0) = 0$, on obtient une équation de convolution qui, par application de \mathcal{L} , nous fournit :

$$\left[\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+1} - x + 1 \right] Y(x) = -\frac{x^2}{2} \left[\ln x + \gamma - \frac{3}{2} \right]$$

Après quelques factorisations, on aboutit à :

$$Y(x) = \frac{x|(x-1)^2+1}{2(x-2)(x-1)} \left[\ln x + \gamma - \frac{3}{2} \right]$$

La décomposition de la fraction rationnelle nous donne :

$$\frac{x|(x-1)^2+1}{(x-2)(x-1)} = x + 1 + \frac{4}{x-2} - \frac{1}{x-1}$$

Il nous reste à trouver quelques images inverses :

$$\mathcal{L}^{-1}(\ln x) = -\text{Pf}(t^{-1}) - \gamma\delta$$

De $\text{Pf}(\mathcal{U}t^{-2}) = x(\ln x + \gamma - 1)$, on déduit $\mathcal{L}^{-1}(x \ln x) = \text{Pf}(\mathcal{U}t^{-2}) - (\gamma - 1)\delta'$.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\ln x}{x-2}\right) = e^{2t}\text{Ei}(-2t) + e^{2t} \ln 2$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\ln x}{x-1}\right) = e^t\text{Ei}(-t)$$

En rassemblant tous ces résultats, on a l'unique solution qui n'est pas une fonction :

$$y = \frac{1}{2}[\text{Pf}(t^{-2}) - \text{Pf}(t^{-1})] - \frac{\gamma + 3}{2}\delta - \frac{\delta'}{4} \\ - \frac{e^t}{2}\text{Ei}(-t) + 2e^{2t}\text{Ei}(-2t) + (2\ln 2 + 2\gamma - 3)e^{2t} - \frac{2\gamma - 3}{4}e^t$$

Exemple 5.52 Résolution d'une équation intégral-différentielle à coefficients polynômes :

$$-2 \int_0^t [\exp[-(t-u)]]y(u)du - ty(t) + ty'(t) + \frac{9}{2}y(t) = \text{Pf} \left[\frac{e^t}{t^{9/2}} \right]$$

En transformant cette équation E_1 par \mathcal{L} , nous obtenons l'équation différentielle E_2 :

$$\left[-\frac{2}{x+1} + \frac{7}{2} \right] + (1-x)Y' = \Gamma\left(-\frac{7}{2}\right)(x-1)^{7/2}$$

L'équation homogène associée se simplifie en :

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{7x+3}{2(x^2-1)} = \frac{5/2}{x-1} - \frac{1}{x+1}$$

Il en résulte que son intégrale générale s'écrit : $Y_0(x) = C \frac{(x-1)^{5/2}}{x+1}$. La méthode de variation des constantes donne ensuite : $C' = \Gamma\left(-\frac{5}{2}\right)(x+1)$.

On en déduit : $C = \frac{x^2}{2} + x + K$. Finalement l'intégrale générale de E_2 s'écrit

$Y(x) = \frac{(x-1)^{5/2}}{x+1} [x^2 + x + K]$. Il reste à trouver les images inverses.

Comme $Y(x) = \frac{(x+1)^{9/2}}{2} + (K-1/2) \frac{(x-1)^{5/2}}{x+1}$, deux calculs sont à faire. La première fonction est celle du second membre d'origine, on connaît donc son image inverse.

Par une translation sur x , on est ramené pour la deuxième fonction à $\frac{(x-2)^{5/2}}{e^{2t}x}$ qui a pour image inverse une primitive de la partie finie de $f(t) = \mathcal{U}(t) \frac{e^{2t}x}{t^{7/2}}$.

On se sert alors de la proposition 4.19 (formule 4.17). Puisque l'exposant n'est pas un entier, cette primitive est la partie finie de la primitive de la fonction f . Or, d'après des intégrations par parties successives, cette primitive s'exprime par :

$$f^{-1}(t) = e^{2t} \left[-\frac{2}{5}t^{-5/2} - \frac{8}{15}t^{-3/2} \right] - \frac{32}{15} \int_0^t \left[e^{2u}u^{-1/2} \right]^{-1} du$$

Grâce à un changement de variable, cette primitive s'écrit $\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2t}} \exp(u^2) du$,

ce qui est la fonction d'erreur associée définie par $\text{erg}(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\lambda \exp(u^2) du$.

Chapitre 6

Problèmes aux limites de la physique

6.1 Problèmes régis par des équations différentielles

Dans les exemples qui suivent, on résout diverses équations différentielles linéaires, notamment du second ordre, issues de l'étude de phénomènes physiques dans lesquelles la variable est le temps t qui, après le choix d'une origine, reste dans l'intervalle $[0, +\infty[$. Les problèmes considérés étudient alors l'évolution dans le temps d'une grandeur physique, à partir d'une situation donnée à l'instant $t = 0$. Les solutions sont souvent assujetties à des conditions initiales, par exemple, la valeur initiale $y(0)$ et la vitesse initiale $y'(0)$ à l'instant $t = 0$, c'est-à-dire des conditions de Cauchy.

Remarques sur les conditions initiales

En réalité, puisqu'on résout le problème sur l'ouvert $]0, +\infty[$, ces conditions sont plutôt les limites à droite $y(0+)$ et $y'(0+)$. On sait que, généralement, il existe alors une unique solution pour l'équation mathématique. Cependant un premier problème se pose qui a un aspect à la fois mathématique et physique. Pratiquement, ces conditions initiales ne peuvent être connues. On ne connaît vraiment que les valeurs $y(0-)$ et $y'(0-)$ qui représentent la situation juste avant le lancement du phénomène et si ce sont ces valeurs qui sont prises pour valeurs initiales, on fait ainsi l'hypothèse de la continuité et de la dérivabilité de la fonction inconnue au point $t = 0$. C'est donc imaginer que le procédé de lancement du phénomène n'apporte aucune perturbation sur la grandeur physique étudiée. Mais, si on impose d'entrée une impulsion, cette hypothèse ne paraît pas plausible. Cette question sera discutée dans le premier paragraphe sur des exemples.

Méthode de résolution de Laplace

C'est aux restrictions des fonctions inconnues à $[0, +\infty[$ que l'on applique cette transformation. Lorsque l'on sait par avance que les solutions sont interprétables en terme de fonctions et que ces fonctions et leurs dérivées sont de croissance raisonnable pour les grandes valeurs de la variable et aussi que le second membre admet une abscisse de convergence non infinie, la transformation est valable. On aperçoit d'ailleurs un avantage par rapport à la méthode de résolution élémen-

taire. Celle-ci débute par l'étude de l'équation sans second membre, puis après la résolution de l'équation complète, où les solutions font intervenir des constantes arbitraires, on prend en compte des conditions initiales pour les déterminer. Dans le traitement par \mathcal{L} , cette prise en compte des valeurs initiales $y(0+)$ et $y'(0+)$ précisées ci-dessus est immédiate, pour le calcul des images des dérivées. La transformation \mathcal{L} va donc remplacer l'équation $[E_1]$ étudiée au départ en une autre équation (E_2) qui est algébrique du premier degré si l'équation $[E_1]$ est à coefficients constants et qui peut être une autre équation différentielle si ces coefficients sont variables (Cf. Chapitres 2 et 4).

La dernière phase, une fois résolue l'équation (E_2) , consiste à chercher l'original de sa solution. Cela se fait, soit grâce à un dictionnaire d'images, par utilisation éventuelle des propriétés de la transformation, soit en utilisant la formule d'inversion complexe. Des problèmes annexes peuvent se présenter. Ils concernent les situations où les données initiales sont remplacées par des distributions, distributions de Dirac ou même des peignes. Sur le premier exemple étudié ci-après, on tente d'expliquer comment on est amené à cette situation. Dans certains autres cas, c'est dans les solutions trouvées, dont on constate qu'elles ne sont pas interprétables en terme de fonctions, que l'on voit apparaître de telles distributions. Ces divers cas sont illustrés dans les exemples qui suivent. Mais, d'abord, complétons les indications données dans le paragraphe 5.6.1 à propos des conditions initiales dans les équations linéaires à coefficients constants de second membre δ .

6.1.1 Remarques concernant les conditions initiales

Exemple 6.1 *On cherche une fonction causale y vérifiant : $y'' + ay' + by = \delta$ avec des conditions initiales nulles.*

De façon formelle, la fonction y ou la distribution $[y]$ vérifie : $(\delta'' + a\delta' + b\delta) \star [y] = \delta$. C'est donc l'inverse de convolution (Cf. § 5.6.2) de la distribution $(\delta'' + a\delta' + b\delta)$. D'après le théorème 5.1, c'est une fonction qui s'écrit : $y(t) = \mathcal{U}(t)u(t)$ où u vérifie $u(0) = 0$ et $u'(0) = 1$, d'où $y(0+) = 0$ et $y'(0+) = 1$. La deuxième condition initiale n'est donc pas vérifiée. Donnons deux autres exemples :

Exemple 6.2 *Résolution de $y' - by = \delta$ avec $y(0+) = a$.*

Si on suppose qu'on puisse appliquer la formule $\mathcal{L}(y') = sY(s) - a$, l'équation devient : $(s - b)Y(s) = a + 1$. La solution qui en résulte fournit l'image inverse : $y(t) = \mathcal{U}(t)(a + 1)e^{bt}$. Si $a \neq 0$, elle ne vérifie pas la condition initiale, mais ne vérifie pas non plus l'équation puisque $[y]' = b[y] + (a + 1)\delta$. On en conclut que $y(0+)$ est imposé par l'équation elle-même. Si on résoud sur $]0, +\infty[$, on trouve $y = Ce^{bt}$ et la dérivation au sens des distributions apporte $C = 1$. La transformation \mathcal{L} donne par ailleurs $(s - b)Y(s) = 1$, c'est-à-dire la même solution.

Exemple 6.3 *Résolution de $y'' + y = \delta$ avec $y(0+) = y'(0+) = 1$.*

Formellement, la transformation \mathcal{L} nous donne : $(s^2 + 1)Y(s) = s + 2$. Sa résolution conduit à l'image inverse : $y(t) = \mathcal{U}(t)(\cos t + 2 \sin t)$. Là encore, seule la première condition initiale est vérifiée, mais cette fois, on peut vérifier que

la fonction trouvée n'est plus solution de l'équation différentielle. La manière d'utiliser \mathcal{L} est ainsi en cause.

Procédons autrement : La solution fonction sur $]0, +\infty[$ s'écrit $y = \mathcal{U}(t)(A \cos t + B \sin t)$; ses dérivées distribution sont : $[y]' = y' + A\delta$ et $[y]'' = [-y] + A\delta' + B\delta$. Donc, en se plaçant sur $[0, +\infty[$, l'équation impose : $A = 0$ et $B = 1$. La seule solution de l'équation est donc $\mathcal{U}(t) \sin t$. On voit que, puisque c'est $A = y(0+)$ qui apporte la distribution δ dans la première dérivation, que cette valeur initiale est nécessairement nulle. Comme ce qui a été vu dans §5.6.1, \mathcal{L} doit être appliqué au sens des distributions ; on vérifie, en effet, que cette transformation fournit $(s^2 + 1)Y(s) = 1$, ce qui redonne bien la solution unique précédente.

Concluons :

Lorsque le second membre est δ , les conditions initiales ne peuvent plus être prises en compte. La solution est alors apportée par la transformation de Laplace au sens des distributions et les conditions initiales sont imposées par l'équation elle-même. L'équation est alors une équation de convolution, la solution cherchée est une inverse de convolution et elle est unique.

Exemple 6.4 *Trouver les fonctions continues solutions de $y'' + ay' + by = \delta'$*

La transformation de Laplace des distributions conduit à $Y(s) = \frac{s}{s^2 + as + b}$. C'est l'image d'une fonction continue unique. Prenons l'exemple $a = -2$, $b = 1$, on trouve la solution $y = \mathcal{U}(t)e^t(t + 1)$. On peut vérifier que cette fonction continue est bien la solution du problème. La valeur de la limite en $t = 0$ ne peut s'interpréter comme une valeur initiale (Cf. exemple 6.4 qui suit).

On peut évidemment généraliser toutes ces considérations à une équation d'ordre n , avec ces mêmes seconds membres δ ou ses dérivées.

Abordons maintenant un problème de physique où l'on s'efforce d'analyser ces remarques sur les conditions initiales et, si possible, de faire une interprétation.

6.1.2 Etude d'équations gérant les circuits électriques

L'étude de ces circuits, en traitement des signaux électroniques, rentre dans le cadre de l'étude des filtres, étude où on s'intéresse à la relation entre un signal d'entrée noté $e(t)$ et un signal de sortie $s(t)$ qui est la réponse temporelle du circuit à cette excitation $e(t)$ (Cf. [[20]], [[5,b]]). Cette relation est une équation différentielle linéaire à coefficients constants et la connaissance des réponses obtenues, dites «**réponse indicelle et réponse impulsionnelle**», lorsque le signal d'entrée est l'échelon-unité \mathcal{U} ou bien l'impulsion unité δ , est utile dans l'étude du comportement temporel de ces filtres. Ces équations ne font que traduire une convolution du type $s = e \star h$. Un des procédés d'étude de ces filtres passe par la notion d'impédance complexe, qui utilise les images de Laplace des opérations de dérivation et d'intégration et la détermination de la fonction de transfert qui peut s'interpréter comme la transformée de Laplace de la fonction h (Cf. [[20]]).

Exemple 6.5 *Etude d'un circuit électrique R, L, C*

Si les inconnues envisagées sont les fonctions $t \mapsto i(t)$ intensité du courant dans le circuit et la charge $t \mapsto q(t)$, charge du condensateur et si la force électromotrice

est désignée par $e(t)$, nous avons classiquement le système de deux équations différentielles (E_1) dans $]0, +\infty[$:

$$L \frac{di}{dt}(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = e(t), \quad \frac{dq}{dt}(t) = i(t)$$

On suppose que les conditions initiales i_0 et q_0 sont nulles et que la fonction e admet une transformée de Laplace. Alors, la transformée (E_2) par \mathcal{L} de ce système s'écrit :

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{Q(s)}{C} = E(s), \quad sQ(s) = I(s)$$

Ce système se condense d'ailleurs en une équation intégro-différentielle et on en déduit l'équation (E_3) que doit vérifier la fonction $s \mapsto I(s)$ image de Laplace du courant i :

$$\left[Ls + R + \frac{1}{C} \right] I(s) = E(s)$$

Cette image s'exprime donc par :

$$I(s) = \frac{CE(s)}{LCs^2 + RCs + 1}$$

et, dans la plupart des cas, le retour à la fonction originale est simple.

Cas d'une force électromotrice A constante

On trouve : $I(s) = \frac{A}{LCs^2 + RCs + 1}$.

En supposant, par exemple, $\Omega^2 = \frac{4L - R^2C}{4L^2C} > 0$ et en posant $a = \frac{R}{2L}$, on laisse le soin au lecteur de prouver que, sous cette condition, on a :

$$i(t) = \frac{A}{L\Omega} \mathcal{U}(t) e^{-at} \sin(\Omega t)$$

Cas d'une force électromotrice sinusoïdale

On étudie, en supposant encore $\Omega^2 = \frac{4L - R^2C}{4L^2C} > 0$, le cas où $e(t) = A \sin(\omega t)$.

Par \mathcal{L} , on est amené à décomposer la fraction rationnelle $\frac{A\omega s}{L[(s+a)^2 + \Omega^2][s^2 + \omega^2]}$

où on a posé $a = \frac{R}{2L}$. Finalement, si $\Omega \neq \omega$, la solution s'écrit :

$$i(t) = \mathcal{U}(t) \left[\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) + [\alpha' \cos(\Omega t) + \beta' \sin(\Omega t)] e^{-at} \right]$$

Les constantes α et β étant calculables en fonction des données. Si $\Omega = \omega$, les formules restent valables en se simplifiant un peu.

Cas d'une force électromotrice représentée par une impulsion

Dans ce cas, le plus simple pour les calculs, on a abusivement : $e(t) = A\delta$ et la transformée, toujours sous les mêmes conditions, s'écrit :

$$I(s) = A \frac{s}{L[(s+a)^2 + \Omega^2]}$$

On en déduit

$$i(t) = \frac{A}{L} \mathcal{U}(t) e^{-at} \left[\cos \Omega t - \frac{a}{\Omega} \sin(\Omega t) \right]$$

Supposons que l'on veuille vérifier la condition initiale. Lorsque $t \rightarrow 0$, cette solution a pour limite la constante $\frac{A}{L}$ qui n'est pas la condition initiale nulle et qui n'est pas non plus en rapport simple avec l'amplitude de l'impulsion. Cependant, ceci est bien en accord avec les remarques de la section 6.1.1 : on peut voir que la limite de $q(t)$ est bien nulle, c'est sa dérivée $i(t)$ qui n'a pas de raison d'être nulle à l'instant $t = 0$. Pour tenter une explication ou une interprétation sur cette limite $\frac{A}{L}$, nous remplaçons cette impulsion d'amplitude A par une de ses modélisations, c'est-à-dire par une fonction définie par :

$$\forall t \in [0, \alpha], \quad e(t) = A\alpha^{-1}, \quad \forall t > \alpha, \quad e(t) = 0$$

Cette fonction s'exprime par la différence $e(t) = A \frac{\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - \alpha)}{\alpha}$ et par conséquent, la transformée s'écrit alors, en utilisant un des résultats précédents et une translation :

$$I(s) = \frac{A}{L\Omega\alpha} \left[\mathcal{U}(t) e^{-at} \sin(\Omega t) - \mathcal{U}(t - \alpha) e^{-a(t-\alpha)} \sin(\Omega(t - \alpha)) \right]$$

En principe le temps α est très court. On interprète alors la solution en faisant tendre α vers 0 (convergence simple à t fixé). On trouve :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin[\Omega t] - e^{a\alpha} \sin[\Omega(t - \alpha)]}{\alpha} = \Omega \cos(\Omega t) - a \sin(\Omega t)$$

On retrouve ainsi la réponse du circuit à l'impulsion précédente.

Enfin, l'explication de cette limite de $i(t)$ peut être donnée par l'intégration sur $[0, \alpha]$ des équations (E_1). On a :

$$L i(\alpha) + R \int_0^\alpha i(u) du + \frac{1}{C} \int_0^\alpha q(u) du = \int_0^\alpha e(u) du = A, \quad q(\alpha) = \int_0^\alpha i(u) du$$

En faisant tendre α vers 0, les intégrales tendent vers 0 et on obtient bien que $\lim i(t) = \frac{A}{L}$ et $\lim q(t) = 0$.

Autrement dit, c'est en revenant à l'équation intégral-différentielle donnée par les lois de la physique et en faisant en quelque sorte des interprétations énergétiques que l'on peut expliquer la transformation de la condition initiale sur la fonction i .

Exemple 6.6 *Etude d'un circuit L, C avec intervention de la distribution δ'*

L'intensité et la tension étant nulles pour $t < 0$, on entre aux bornes d'une partie de circuit de résistance négligeable, la tension v_α définie, en posant $A = \frac{V}{\alpha^2}$ où V est une constante, par :

$$\forall t \in [0, \alpha[, \quad v_\alpha(t) = A, \quad \forall t \in [\alpha, 2\alpha[, \quad v_\alpha(t) = -A, \quad \forall t \geq 2\alpha, \quad v_\alpha(t) = 0$$

L'équation (E_1) vérifiée par l'intensité $i(t)$ s'écrit :

$$L \frac{di}{dt}(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) du = A [\mathcal{U}(t) - 2\mathcal{U}(t - \alpha) + \mathcal{U}(t - 2\alpha)]$$

Sa transformée (E_2) par \mathcal{L} s'écrit :

$$(Ls + \frac{1}{Cs})I(s) = \frac{A}{s} [1 - 2e^{-\alpha s} + e^{-2\alpha s}]$$

En posant $\omega^2 LC = 1$, la solution de cette équation s'exprime par :

$$I(s) = \frac{A}{L(s^2 + \omega^2)} [1 - 2e^{-\alpha s} + e^{-2\alpha s}]$$

L'intensité i s'en déduit :

$$i(t) = \frac{V}{\omega L \alpha^2} [\mathcal{U}(t) \sin(\omega t) - 2\mathcal{U}(t - \alpha) \sin(\omega(t - \alpha)) + \mathcal{U}(t - 2\alpha) \sin(\omega(t - 2\alpha))]$$

Si on suppose que la durée de ce signal v_α est très faible, un développement du second ordre par rapport à α au voisinage de 0 montre que l'intensité réponse est voisine de la distribution :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} i(t) = \frac{V}{L} \delta - \frac{V}{L\omega} \sin(\omega t)$$

C'est la réponse que l'on obtient en résolvant l'équation $(s^2 + \omega^2)I(s) = \frac{Vs^2}{L}$, c'est-à-dire en supposant que la tension d'entrée se représente par la distribution $V\delta'$. Il suffit d'ailleurs pour le voir de prouver que, au sens des distributions, on a : $\lim_{\alpha \rightarrow 0} v_\alpha(t) = V\delta'$.

Exemple 6.7 *Etude d'un filtre*

Le filtre considéré est constitué du circuit électrique figuré ci-après où les courants sont indiqués avec les sens de parcours. Les nombres complexes Z_1, Z_2, Z_3 sont les impédances complexes qui tiennent compte des résistances, des inductances et des capacités. Si $I(s)$ est l'image de Laplace du courant $i(t)$ qui traverse l'impédance $Z = (R, L, C)$, l'image de la tension aux bornes de cette impédance est définie par le produit $(R + sL + \frac{1}{Cs})I(s)$. On peut ainsi passer directement aux 3 équations vérifiées par les images de Laplace I_0, I_1, I_2 des trois courants. Si $V(s)$ est l'image de Laplace de la tension appliquée à l'entrée de ce filtre, on

obtient, en calculant la tension dans les branches du circuit (ce qui revient à appliquer les lois de Kirschhoff), le système d'équations (E_2) :

$$Z_1 I_0 + Z_2 (I_0 - I_1) = V, \quad Z_2 (I_0 - I_1) = Z_3 I_1 + Z_4 (I_1 - I_2), \quad Z_4 (I_1 - I_2) = Z_5 I_2$$

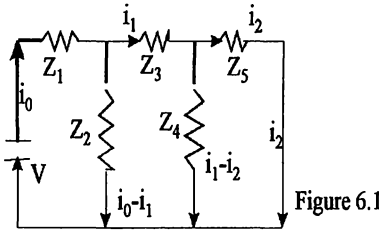


Figure 6.1

On se contente d'étudier le cas particulier suivant :

$$Z_1 = Z_5 = \frac{a}{s}, \quad Z_2 = Z_4 = c, \quad Z_3 = \frac{b}{s}$$

Le système s'écrit de manière matricielle :

$$\begin{pmatrix} c + a/s & -c & 0 \\ c & -(2c + b/s) & c \\ 0 & c & -(c + a/s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \\ I_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(s) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul du déterminant Δ fournit la factorisation : $\Delta = \frac{a + cs}{s^3} (c(b + 2a)s + ab)$ et la solution peut alors être donnée :

$$I_0(s) = sV(s) \frac{c^2 s^2 + c(2a + b)s + ab}{(a + cs)(c(2a + b)s + ab)}$$

$$I_1(s) = cV(s) \frac{s^2}{c(2a + b)s + ab}$$

$$I_2(s) = c^2 V(s) \frac{s^3}{(a + cs)(c(2a + b)s + ab)}$$

Supposons que le signal d'entrée imposé au filtre soit l'impulsion $V\delta$, autrement dit : $V(s) = V$ constante. En posant $\alpha = -\frac{a}{c}$ et $\beta = -\frac{ab}{c(b + 2a)}$, nous obtenons la solution du problème posé laquelle contient des distributions de Dirac δ et δ' :

$$i_0(t) = V \left[\frac{\delta'}{b + 2a} + \frac{b^2 + 2a^2 + 2ab}{c(2a + b)^2} \delta - \mathcal{U}(t) \left[\frac{a}{c^2} e^{-\alpha t} + \frac{ab^3}{2c^2(b + 2a)^3} e^{-\beta t} \right] \right]$$

$$i_1(t) = V \left[\frac{\delta'}{2a + b} - \frac{ab}{c(2a + b)^2} \delta + \mathcal{U}(t) \frac{a^2 b^2}{c^2(2a + b)^3} e^{-\beta t} \right]$$

$$i_2(t) = V \left[\frac{\delta'}{2a + b} - \frac{2a(a + b)}{c(2a + b)^2} \delta + \mathcal{U}(t) \left[\frac{a}{2c^2} e^{-\alpha t} - \frac{ab^3}{2c^2(2a + b)^4} e^{-\beta t} \right] \right]$$

On peut facilement vérifier, par exemple, la première équation.

On laisse au lecteur le soin de trouver la réponse du filtre lorsque le signal d'entrée est une constante V d'où $V(s) = \frac{V}{s}$. Cette réponse fait intervenir l'impulsion δ .

Exemple 6.8 Généralisation de l'exemple précédent.

On suppose, sans revenir à la constitution du circuit physique proprement dit, que les équations E_2 qui sont les transformées des équations liant les intensités i_1, i_2, \dots, i_{N+1} sont les suivantes :

$$\begin{aligned} 2E &= (4s + \frac{3}{s})I_1 + (\frac{1}{s} - 4s)I_2 \\ 0 &= (\frac{1}{s} - 4s)I_{n-1} + 2(\frac{1}{s} + 4s)I_n + (\frac{1}{s} - 4s)I_{n+1}, \quad n = 2, 3, \dots, N \\ 0 &= (\frac{1}{s} - 4s)I_N + (\frac{1}{s} + 4s + 4)I_{N+1} \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système pour $N = 1$ s'écrit :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 + 4s^2 & 1 - 4s^2 \\ 1 - 4s^2 & (1 + 2s)^2 \end{vmatrix} = (1 + 2s)^2(3 + 4s^2 - (1 - 2s)^2) = 2(1 + 2s)^3$$

Pour $N = 2$ on trouve : $\Delta_2 = 2(1 + 2s)^4$ Dans le cas général, on met $2s + 1$ en facteur dans la dernière ligne et la dernière colonne, ce qui remplace le dernier terme par 1, et on remplace la colonne C_N par $C_N - (1 - 2s)C_{N+1}$.

Le dernier mineur principal $\delta_{(3)}$ d'ordre 3 du déterminant Δ_N s'écrit alors :

$$\delta_{(3)} = \begin{vmatrix} 2(1 + 4s^2) & 1 - 4s^2 - 0 & 0 \\ 1 - 4s^2 & 2(1 + 4s^2) - (1 - 2s)^2 & 1 - 2s \\ 0 & 1 - 2s - (1 - 2s) & 1 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne. Comme le cofacteur du dernier terme est le déterminant Δ_{N-1} , on en déduit : $\Delta_N = (2s + 1)\Delta_{N-1}$ et, par conséquent : $\Delta_N = 2(2s + 1)^{N+2}$.

Par les mêmes procédés portant sur les dernières lignes et colonnes, on trouve les diverses inconnues. Par exemple, la fonction I_1 est donnée par : $I_1(s) = \frac{Es}{(2s + 1)}$.

On en déduit par la première équation du système (E_2) que

$$I_2(s) = \frac{Es}{(2s + 1)(1 - 4s^2)}(4s + 2 - 3 - 4s^2) = -Es \frac{(2s - 1)^2}{(1 - 2s)(1 + 2s)^2} = Es \frac{2s - 1}{(2s + 1)^2}$$

De proche en proche, on obtient les autres intensités, à savoir :

$$I_n(s) = \frac{Es}{2s + 1} \left[\frac{2s - 1}{2s + 1} \right]^{n-1}$$

En écrivant ce résultat sous la forme $\frac{Es}{2(s + 1/2)} \left[\frac{s - 1/2}{s + 1/2} \right]^{n-1}$ et en utilisant l'exemple 2.21 qui concerne les polynômes de Laguerre, on peut conclure :

$$i_n(t) = U(t)e^{-t/2}L_{n-1}(t)$$

Exemple 6.9 *Etude d'un pont électrique.*

On considère le circuit dessiné ci-après où sont indiquées les éléments caractéristiques et les intensités. La tension d'entrée $v(t)$, appliquée entre les bornes A et F, à partir de l'instant $t = 0$, date à laquelle toutes les intensités sont nulles, est la distribution $v(t) = K\delta'$. Le problème est de déterminer les courants i_1 , i_2 et i_3 . Pour simplifier, on suppose que, dans le système d'unités considéré, les valeurs numériques des caractéristiques vérifient : $L = \frac{1}{C} = R$.

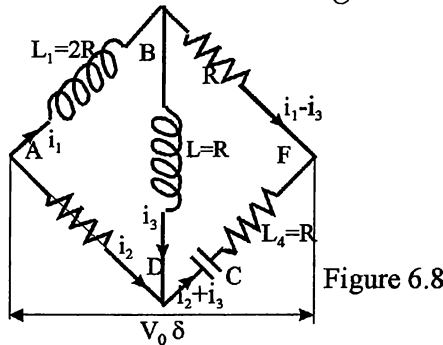


Figure 6.8

Les équations sont simples à établir (Lois de Kirschhoff ou applications de la loi d'Ohm) et, en utilisant la notion d'impédance complexe, les transformées des équations par \mathcal{L} s'écrivent directement :

Dans la branche A B F, on obtient la relation (1) :

$$2RsI_1 + R(I_1 - I_3) = Ks$$

Dans la branche A B D A, on obtient la relation (2) :

$$2RsI_1 + (Rs + R)I_3 - RI_2 = 0$$

La relation (3) s'écrit dans la branche A D F :

$$RI_2 + (I_2 + I_3)\left(R + \frac{R}{s}\right) = Ks$$

En divisant ces équations par R , ce qui revient à remplacer K par $\frac{K}{R}$, le déterminant de ce système s'écrit :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2s+1 & 0 & -1 \\ 2s & -1 & (s+1) \\ 0 & \frac{2s+1}{s} & \frac{1+s}{s} \end{vmatrix} = -2 \frac{(s^2 + 3s + 1)(2s + 1)}{s}$$

Après simplification par $2s + 1$ et en posant $a = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$, la solution de ce système s'écrit :

$$I_1(s) = \frac{Ks(s+2)}{2R(s^2 + 3s + 1)} = \frac{K}{2R} \left[1 - \frac{a+1}{\sqrt{5}(s-a)} + \frac{b+1}{\sqrt{5}(s-b)} \right]$$

$$I_2(s) = \frac{Ks(s-3)}{2R(s^2+3s+1)} = \frac{K}{2R} \left[1 - \frac{6a+1}{\sqrt{5}(s-a)} + \frac{6b+1}{\sqrt{5}(s-b)} \right]$$

$$I_3(s) = \frac{Ks^2}{2R(s^2+3s+1)} = \frac{K}{2R} \left[1 - \frac{3a+1}{\sqrt{5}(s-a)} + \frac{3b+1}{\sqrt{5}(s-b)} \right]$$

On en déduit la solution du problème :

$$i_1(t) = \frac{K}{2R} \left[\delta - \mathcal{U}(t) \frac{a+1}{\sqrt{5}} \exp(at) + \mathcal{U}(t) \frac{b+1}{\sqrt{5}} \exp(bt) \right]$$

$$i_2(t) = \frac{K}{2R} \left[\delta - \mathcal{U}(t) \frac{6a+1}{\sqrt{5}} \exp(at) + \mathcal{U}(t) \frac{6b+1}{\sqrt{5}} \exp(bt) \right]$$

$$i_3(t) = \frac{K}{2R} \left[\delta - \mathcal{U}(t) \frac{3a+1}{\sqrt{5}} \exp(at) + \mathcal{U}(t) \frac{3b+1}{\sqrt{5}} \exp(bt) \right]$$

Exemple 6.10 *Equation différentielle contenant des termes retardés.*

Dans certains problèmes aux limites de la Physique, interviennent dans les équations différentielles, des termes à arguments retardés : On peut supposer que, dans un circuit, les intensités, par exemple, dans certaines parties de ce circuit soient retardés de temps fixes connus h_0, h_1, \dots . Considérons par exemple l'équation différentielle (E_1) :

$$y''(t) = ay'(t-h_1) + by(t-h_0) + f(t)$$

On suppose que les nombres h_0 et h_1 sont positifs, que les solutions cherchées sont causales, que les conditions initiales sont nulles et que la fonction f est dans \mathcal{L}_d . Dans ces conditions la transformation \mathcal{L} nous fournit l'équation (E_2) :

$$s^2 Y(s) = asY(s) \exp(-sh_1) + bY(s) \exp(-sh_0) + F(s)$$

On en déduit formellement l'image de la solution :

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 - as \exp(-sh_1) - b \exp(-sh_0)}$$

On peut l'écrire, en mettant s^2 en facteur, sous la forme : $Y(s) = \frac{F(s)}{s^2} \frac{1}{1-u(s)}$

où la fonction u est définie par : $u(s) = \frac{as \exp(-sh_1) + b \exp(-sh_0)}{s^2}$.

L'idée étant de développer $\frac{1}{1-u(s)}$, il nous faut prouver d'abord que la série de terme général $|u(s)|^n$ est convergente pour $x = \Re e(s)$ assez grand.

Or, cela est évident puisque : $|u(s)| \leq \frac{|a|}{|s|} e^{-xh_1} + \frac{|b|}{|s|^2} e^{-xh_0}$.

Il existe donc $\alpha > 0$ et k tels que $\Re e(s) > \alpha \Rightarrow |u(s)| \leq \frac{k}{|s|}$. On peut d'ailleurs supposer que $\frac{k}{|s|} < 1$ dans ce demi-plan Π_α .

La série de puissances $\sum_0^{+\infty} (u(s))^n$ est donc uniformément convergente et définit,

puisque son terme général est holomorphe, une fonction analytique dans le demi-plan Π_α . En fait, on peut démontrer, à l'aide du théorème 1.4, que la fonction somme $(1 - u(s))^{-1}$ est une transformée de Laplace.

Pour cela, considérons $v(s) = \frac{u(s)^2}{1 - u(s)}$. Dans le demi-plan Π_α , on a la majoration :

$$|v(s)| \leq \frac{k^2}{|s|^2(1 - k/|s|)}$$

On en déduit qu'il y a convergence uniforme de $v(s)$ vers 0 dans ce demi-plan lorsque $|s| \rightarrow +\infty$ et, d'ailleurs, la même majoration prouve l'absolue convergence de l'intégrale de v sur une droite Δ dans ce demi-plan. Cette fonction v est donc (théorème 1.4) une image de Laplace. Il en est de même pour $\frac{1}{1 - u(s)} = 1 + u(s) + v(s)$ et l'image inverse de $Y(s)$ peut s'écrire comme série des images inverses des termes du développement précédent.

Terminons en donnant une indication sur ce calcul de l'image inverse. Celle de u s'écrit : $g(t) = a\mathcal{U}(t - h_1) + b(t - h_0)\mathcal{U}(t - h_0)$, celle de u^n est alors la puissance de convolution g^{*n} et, par conséquent, la solution s'écrit sous la forme d'une série de convolées, à savoir :

$$y(t) = \left[f(t) \star (t\mathcal{U}(t)) \right] \star \left[\delta + \sum_1^{+\infty} g^{*n} \right]$$

Tout ce développement peut être généralisé à une équation différentielle d'ordre quelconque. Nous voyons maintenant, sur un exemple, comment on peut effectuer les calculs dans le cas où il n'y a qu'un seul retard qui intervient dans l'équation différentielle.

Exemple 6.11 Résolution d'un problème avec un seul retard.

On suppose, dans ce qui précède : $h_1 = 0, h_0 = 1, a = 1$ et $f = \delta$. Alors, on a :

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - s - be^{-s}} = \sum_0^{+\infty} b^n \frac{\exp(-ns)}{s^n (s - 1)^n}$$

On calcule l'image inverse du terme général en décomposant la fraction rationnelle $\frac{1}{s^n(1 - s)^n}$, ce qui peut se faire en utilisant des développements limités de $(1 - x)^n$ à l'ordre $n - 1$. On trouve ainsi :

$$\frac{1}{s^n(1 - s)^n} = (-1)^n \left[\frac{1}{s^n} + \sum_1^{n-1} \frac{(n - k + 1)!}{n!k!s^{n-k}} \right] + \frac{1}{(s - 1)^n} + \sum_1^{n-1} \frac{(-1)^k (n - k + 1)!}{n!k!(s - 1)^{n-k}}$$

On en déduit, à l'aide de translations, l'image inverse $y_n(t)$ du terme général de la série définissant $Y(s)$:

$$y_n(t) = b^n \mathcal{U}(t - n) \left[(-1)^n \left[\frac{(t - n)^{n-1}}{n!} + \sum_1^{n-1} \frac{(n - k + 1)!(t - n)^{n-k-1}}{n!k!(n - k)!} \right] + \frac{(t - n)^{n-1} e^{t-n}}{n!} + \sum_1^{n-1} \frac{(-1)^k (n - k + 1)!(t - n)^{n-k-1} e^{t-n}}{n!k!(n - k)!} \right]$$

C'est la série de tous ces termes qui constitue la fonction y solution du problème.

6.1.3 Problèmes aux limites de la mécanique

Exemple 6.12 *Mouvement d'une particule sur une ligne droite*

Une particule de masse m oscille sur une droite. Elle est soumise à une force d'intensité $m(\mu^2 + a^2)$ et à une résistance au mouvement d'intensité $2m\mu v$ où v est la vitesse. A l'instant $t = 0$, la particule est au repos. Il s'agit d'étudier le mouvement de la particule qui s'amorce sous l'effet d'une suite régulière d'impulsions d'amplitude P constante aux instants $t_n = \frac{n}{a}$.

L'équation du mouvement s'écrit :

$$m x'' + 2m\mu x' + m(\mu^2 + a^2)x = P \sum_0^{\infty} \delta_{\frac{n}{a}}$$

La transformation \mathcal{L} nous fournit :

$$\left[ms^2 + 2m\mu s + m(\mu^2 + a^2) \right] Y(s) = P \sum_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{ns}{a}\right)$$

En l'absence de majorations simples sur les contours habituels, le théorème d'inversion paraît difficile à utiliser. Nous utilisons ici la sommation des images inverses des fonctions $F_n(s) = \frac{P}{m} \frac{\exp(-s\frac{n}{a})}{(m + \mu)^2 + a^2}$. L'image inverse de cette fonction est la translatée d'indice n/a de la fonction $t \mapsto \mathcal{U}(t)e^{-\mu t} \sin(at)$. On en déduit la solution qui s'exprime au moyen d'une somme localement finie :

$$y(t) = \frac{P}{am} \sum_0^{+\infty} \mathcal{U}\left(t - \frac{n}{a}\right) \exp\left(-\mu\left(t - \frac{n}{a}\right)\right) \sin\left(at - n\right)$$

Nous étudions maintenant un problème où la variable n'est plus le temps et où les conditions initiales sont remplacées par des conditions pour deux valeurs différentes de la variable.

Exemple 6.13 *Déformation d'une poutre sous l'action de charges transversales.*

En supposant que le poids propre de la poutre est négligeable, la déformation, notée $y(x)$, en un point d'abscisse x de la poutre est solution de l'équation différentielle $EIy^{(4)}(x) = f(x)$ où E et I sont des constantes représentant respectivement le module d'Young et le moment d'inertie de la section transversale de la poutre. Cette fois la variable est une variable d'espace, la fonction f donnée représente la charge transversale par unité de longueur que supporte la poutre au point d'abscisse x . On suppose la poutre de longueur finie L , on est amené à résoudre cette équation sur un intervalle $[0, L]$ dans diverses hypothèses concernant les extrémités de la poutre. On suppose par exemple que la poutre est horizontale et encastree en ces deux extrémités, ce qui se traduit par la nullité de y et de sa dérivée aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. On suppose aussi que la charge se concentre en un point d'abscisse a avec $0 < a < L$, donc est représentée par une impulsion notée abusivement $f(x) = P\delta_a$ dont la transformée de Laplace est la

fonction e^{-as} .

Si on pose, ces quantités étant inconnues a priori : $y''(0+) = \alpha_2$ et $y'''(0+) = \alpha_3$, la transformation \mathcal{L} de l'équation (E_1) donnée nous fournit l'équation (E_2) :

$$EI \left[s^4 Y(s) - s\alpha_2 - \alpha_3 \right] = P \exp(-as)$$

On obtient donc, en posant $K = \frac{P}{EI}$:

$$Y(s) = \frac{\alpha_2}{s^3} + \frac{\alpha_3}{s^4} + \frac{Ke^{-as}}{s^4}$$

On en déduit la fonction y comme si les tous les nombres du second membre étaient des données et comme si x avait un sens au delà de L :

$$y(x) = \mathcal{U}(x) \left[\frac{\alpha_2 x^2}{2} + \frac{\alpha_3 x^3}{6} \right] + \frac{K}{6} \mathcal{U}(x-a)(x-a)^3$$

Il nous reste, pour déterminer la solution, qu'à calculer les nombres α_2 et α_3 à l'aide des conditions d'encastrement au point d'abscisse L . En exprimant donc que la fonction et sa dérivée sont nulles en cette extrémité, nous obtenons deux équations, à savoir :

$$\begin{aligned} \alpha_2 L^2 + \frac{\alpha_3 L^3}{3} + \frac{K(L-a)^3}{3} &= 0 \\ 2\alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + K(L-a)^2 &= 0 \end{aligned}$$

La résolution de ces deux équations à deux inconnues fournit α_2 et α_3 et on en déduit la solution. Le lecteur peut trouver, pour ce même problème d'autres situations où la poutre est très longue ou encore lorsque la poutre n'est plus encastree soit en une extrémité soit en ses deux extrémités (Cf. Exercice 7. 38).

6.2 Equations aux dérivées partielles de la physique

6.2.1 Généralités

Nous ne décrivons que le cas où un phénomène physique fait intervenir une fonction g de deux variables, l'une x dite variable d'espace et l'autre très souvent la variable temps notée t . Le phénomène se passe dans un domaine Ω du plan de ces deux variables. Le temps varie sur $[0, +\infty[$, alors que trois situations se présentent pour la variable x qui parcourt soit \mathbb{R} , soit une demi-droite que l'on identifie à $[0, +\infty[$, soit un segment de droite que l'on identifie à l'intervalle $[0, l]$. Le phénomène physique se traduit mathématiquement par une équation aux dérivées partielles (E_1) dont l'inconnue est la fonction g .

C'est par des considérations pratiques ou expérimentales que l'on sait que certaines conditions sur la frontière du domaine Ω sont susceptibles de fournir l'unicité de la solution de (E_1) , laquelle solution est interprétable comme la fonction décrivant effectivement le phénomène dans son acception physique. Les conditions frontières relatives à $t = 0$ sont dites des conditions initiales; alors que celles

qui correspondent par exemple à $x = 0$ ou $x = l$ sont dites des conditions au bord ou conditions limites.

Souvent l'équation (E_1) est du second ordre, ce qui veut dire que l'ordre maximum des dérivées est 2. Parmi ces conditions de frontière, peuvent figurer également des conditions de comportement asymptotiques, qui peuvent être dictées aussi par la connaissance expérimentale du phénomène ou encore par des considérations de physique théorique. Cela peut être, soit le comportement de la fonction g lorsque t tend vers $+\infty$, par exemple que g reste bornée ou qu'elle tende vers 0 d'une certaine façon, soit éventuellement le comportement de g lorsque x tend vers $\pm\infty$. Les conditions initiales et les conditions limites peuvent faire intervenir la fonction g et certaines de leurs dérivées partielles.

Ces conditions de frontière sont notées : $g(x, 0), g(l, t), g(0, t) \dots$, mais ces symboles sont impropres, en fait, ce sont plutôt des limites à droite ou à gauche par rapport à l'une des variables ; par exemple $g(0, t)$ est une fonction $t \mapsto g_0(t)$ ou une distribution $g u_0$ en la variable t telle que, au sens des fonctions ou au sens des distributions, on puisse écrire : $\forall t \geq 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x, t) = g_0(t)$. Et si la fonction g_0 est une fonction de valeur importante qui s'annule en un temps très court, on est amené dans certains cas à remplacer cette fonction par l'impulsion unité δ , ce qui revient à réaliser cette condition initiale par une double limite. Cette interprétation des conditions de frontière est très importante. Supposons, par exemple, que l'on ait obtenu une écriture de la solution. Généralement, cette écriture n'est valable que dans l'intérieur du domaine Ω . On ne peut donc, dans le but de vérifier ses calculs, remplacer les variables par des valeurs frontières ; cela n'a aucun sens en général. Il faudra effectivement vérifier sur cette écriture que la limite au sens de la condition de frontière existe bien au sens des fonctions ou au sens des distributions et que cette limite est bien celle que l'on attend.

6.2.2 Méthode de résolution de Laplace

La méthode de Laplace consiste à transformer l'équation (E_1) par \mathcal{L} opérant sur les fonctions partielles en une variable et leurs dérivées par rapport à cette variable. Généralement, cette variable est t . La fonction inconnue devient : $t \rightarrow g_x(t)$, elle dépend d'un paramètre x variant dans le domaine d'espace. On supposera donc que c'est une fonction causale, ce qui coïncide, en général, avec le fait que le phénomène étudié est un phénomène « commençant » et qu'en principe la fonction g est nulle avant l'instant pris pour origine des temps. S'il en est autrement, c'est la fonction $\mathcal{U}(t)g_x(t)$ qui sera prise en compte et dans ce cas, certaines propriétés (translation, convolution, \dots) doivent être maniées avec précautions.

La première hypothèse H_1 à formuler est que l'abscisse de convergence de cette fonction n'est pas $+\infty$, ce n'est que des résultats d'expérience qui permettent pour des problèmes classiques de consolider cette hypothèse. On doit aussi supposer qu'il en est de même pour les dérivées de g_x , c'est-à-dire les dérivées partielles par rapport à t et même que toutes ces abscisses de convergence sont inférieures à un réel fixe indépendant de x .

Il est alors logique de noter $\mathcal{L}(g_x)$ comme une fonction des variables x et s , cette

dernière gardant un rôle d'auxiliaire, x reprenant son rôle de variable. Cette fonction est désignée par $G(x, s)$ ou $G_s(x)$. Les dérivées partielles seront alors transformées suivant les règles habituelles, ce qui fait intervenir les conditions initiales :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}g_x(t)\right](s) = sG(x, s) - g(x, 0+) = sG(x, s) - g_0(x)$$

Et, éventuellement, si la dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à t intervient :

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}u_x(t)\right](s) = s^2G(x, s) - sg(x, 0+) - \frac{\partial}{\partial t}g(x, 0+)$$

Il faut aussi transformer les dérivées partielles par rapport à x qui interviennent dans (E_1) . Cela suppose, et c'est une autre hypothèse H_2 , que, d'une part, on puisse intervertir sous le symbole de la transformation de Laplace la dérivation partielle par rapport à x et l'intégration par rapport à t et que, d'autre part, certaines conditions initiales soient dérivables par rapport à x . Par exemple :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial g(x, t)}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathcal{L}(g_x(t))) = \frac{\partial}{\partial x}G(x, s)$$

Et, pour une dérivée mixte :

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 g(x, t)}{\partial x t}\right) = \frac{d}{dx}(\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}g(x, t)\right)) = \frac{d}{dx}(sG(x, s) - g(x, 0+))$$

L'équation (E_1) , supposée linéaire se traduit ainsi par une équation différentielle où l'inconnue est la fonction $x \mapsto G_s(x)$. Cette équation (E_2) est linéaire, elle peut faire intervenir des coefficients variables en x et un second membre fonction de x , tous ces termes dépendant également du paramètre s que l'on peut supposer réel et assez grand, ce qui est susceptible de faciliter la discussion. Le domaine dans lequel on résoud cette équation est le domaine d'espace défini a priori ; c'est ou bien la droite entière, ou bien l'intervalle $]0, +\infty[$, ou bien l'intervalle $]0, l[$ et, si l'équation (E_2) est du second ordre, la solution dépend en général de deux constantes arbitraires. Dans le premier cas, ce sont des conditions de comportements asymptotiques aux deux infinis qui permettent la détermination de ces constantes. Dans le deuxième cas, ce sont les conditions aux limites portant sur G_s et sa dérivée à droite de $x = 0$ et d'autre part des conditions de comportement asymptotique en $+\infty$. Dans le troisième cas, ce sont les conditions limites aux extrémités $x = 0$ et $x = l$ qui le permettent.

Enfin, il s'agit de trouver l'original de la fonction G_s , la variable x devenant maintenant un paramètre. Ce n'est pas la phase la plus simple de l'étude. Dans certains cas, un dictionnaire assez complet d'images de Laplace permet le retour à la fonction g . Mais, la plupart du temps, il faudra utiliser la formule d'inversion, avec des contours auxiliaires sur lesquels on applique le théorème des résidus (Contour de Bromwich). Dans ce dernier cas, le plus courant, la solution se présentera sous forme de séries simples ou doubles ou d'intégrales plus ou moins liées aux fonctions spéciales. C'est ce qui peut être appelé la solution explicite du problème physique considéré. Cette expression donne l'évolution dans

le temps et le comportement dans l'espace de la fonction g , étant bien entendu qu'il faut faire appel à des procédés numériques pour obtenir des résultats chiffrés approximatifs. Il n'est pas interdit de faire, par des passages à la limites, quelques vérifications concernant les conditions de frontière. Dans ce qui suit, nous appliquons ces principes sur quelques équations classiques de la physique

6.2.3 Problèmes de diffusion de la chaleur

Exemple 6.14 On propose de déterminer la fonction $(t, x) \mapsto g(t, x)$, continue dans le domaine $\Omega = [0, +\infty[\times]0, L]$, admettant des dérivées du premier ordre par rapport à t et du second ordre par rapport à x à l'intérieur de Ω , qui soit solution de l'équation aux dérivées partielles E_1 :

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) - a^2 g(t, x),$$

et qui vérifie la condition initiale $\forall x \in [0, L], g(0+, x) = 0$ et des conditions dites "conditions au bord" : $g(t, 0) = h_0(t), g(t, L) = h_1(t)$, ces dernières étant données.

Un tel problème apparaît dans l'étude de l'évolution de la température sous certaines conditions, d'une tige de longueur L . On suppose que les fonctions h_0 et h_1 sont transformables par \mathcal{L} et que leurs transformées sont H_0 et H_1 .

On suppose aussi que les hypothèses (H_1) et (H_2) faites dans §6.2.2 sont justifiées. Il en résulte que la transformée $G_s(x)$ est solution de l'équation E_2 , transformée de E_1 :

$$(s + a^2)G_s(x) = \frac{d^2 G_s}{dx^2}(x)$$

Nous sommes alors en présence, pour chaque valeur du nombre s , d'un problème aux limites, régi par une équation différentielle du second ordre en la variable x . Pour simplifier, on suppose d'abord que s est réel et que $s + a^2 > 0$. La solution générale de l'équation de E_2 s'écrit :

$$G_s(x) = C_1(s)\text{ch}(x\sqrt{s+a^2}) + C_2(s)\text{sh}(x\sqrt{s+a^2})$$

Il reste à déterminer les deux constantes, qui sont ici, en fait, des fonctions de s . En utilisant les conditions au bord, on obtient immédiatement les valeurs de $C_1(s)$ et $C_2(s)$. On en déduit la fonction G_x sous la forme :

$$\begin{aligned} G_s(x) &= H_0(s)\text{ch}(x\sqrt{s+a^2}) \\ &+ \left(H_1(s) - H_0(s)\text{ch}(L\sqrt{s+a^2}) \right) \frac{\text{sh}(x\sqrt{s+a^2})}{\text{sh}(L\sqrt{s+a^2})} \end{aligned}$$

Calcul de la fonction solution g On peut d'abord constater que, malgré la présence du radical $\sqrt{s+a^2}$, la fonction $s \mapsto G_s(x)$ est uniforme. Cela tient à la parité de la fonction ch et au quotient des deux fonctions impaires portant sur la fonction sh . Cette fonction $s \mapsto G_s(x)$ est alors holomorphe dans le demi-plan Π_0 .

Pour continuer avec un cas particulier simple, on suppose que $H_0(s) = \frac{\alpha}{s}$ et $H_1(s) = \frac{\beta}{s}$. La formule précédente devient :

$$G_s(x) = \frac{\alpha \operatorname{sh}[(L-x)\sqrt{s+a^2}] + \beta \operatorname{sh}(x\sqrt{s+a^2})}{s \operatorname{sh}(L\sqrt{s+a^2})}$$

Nous appliquons le théorème d'inversion. La validité de cette formule d'inversion est semblable à celle proposée dans l'exercice 3.42. Les pôles de F définie par $F(s) = e^{st}G_s(x)$ sont définis par $\sin(iL\sqrt{s+a^2}) = 0$, donc ce sont les points $s = 0$ et s_n vérifiant : $s_n + a^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$. Le résidu, au point $s = 0$ de cette fonction s'écrit :

$$\operatorname{Res}[F(s); s = 0] = \frac{\alpha \operatorname{sh}[a(L-x)] + \beta \operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(aL)}$$

Les résidus de F aux points s_n , qui sont tous des pôles simples, sont donnés par :

$$\operatorname{Res}[\exp(st)G_s(x); s = s_n] = \exp(ts_n) \frac{\alpha \operatorname{sh}((L-x)i n \pi / L) + \beta \operatorname{sh}(x i n \pi / L)}{((L s_n) / 2)(s_n + a^2)^{-1/2} \operatorname{ch}(i n \pi)}$$

En explicitant et en simplifiant, on obtient :

$$\operatorname{Res}[\exp(st)G_s(x); s_n] = 2n\pi (-1)^n \frac{(\alpha(-1)^n + \beta) \sin(\frac{n x \pi}{L})}{a^2 L^2 + n^2 \pi^2} \exp \left[-\left(a^2 + \frac{n^2 \pi^2}{L^2}\right) t \right]$$

On prend pour contour un segment de la droite d'intégration de la formule d'inversion complété par un arc de cercle de rayon $R_n = -a^2 - (n + 1/2)^2 \frac{\pi^2}{L^2}$ et de centre O, placé à gauche de cette droite. On peut compléter aussi ce segment par 2 autres segments d'ordonnées $\pm n$ et un segment vertical d'abscisse $-R_n$ de façon que le contour utilisé (Cf. figure de l'exemple 6.20) soit rectangulaire.

En s'appuyant encore sur des majorations et des calculs analogues à ceux de l'exemple 2.27 lorsqu'il s'agit du contour circulaire ou des calculs de l'exemple 6.20 dans le cas d'un contour rectangulaire, on peut montrer finalement que l'image inverse de G_s est égale à la somme de tous les résidus de la fonction $\exp(st)G_s(x)$ en tous les pôles de cette fonction. On en déduit la fonction solution sous la forme d'une série trigonométrique par rapport à la variable x qui est aussi une série d'exponentielles par rapport à la variable t :

$$g(t, x) = \frac{\alpha \operatorname{sh}[a(L-x)] + \beta \operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(aL)} + \frac{2\pi}{L^2} \exp -ta^2 \sum_0^{+\infty} \frac{n \exp \left[-t \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right] ((-1)^n \beta + \alpha)}{a^2 + n^2 \pi^2 / L^2} \sin\left(\frac{n x \pi}{L}\right)$$

Exemple 6.15 *Etude de la chaleur rayonnée dans l'espace par une source de chaleur qui s'identifie à un cylindre infini.*

Le cylindre est infini de rayon a . Sa température est constante égale à g_0 en son intérieur. Ce cylindre est plongé à l'instant $t = 0$ dans l'espace où la température est nulle. La distribution des températures fait intervenir seulement une variable d'espace r qui est la distance du point courant de l'espace à l'axe du cylindre. La fonction inconnue du problème est alors $(t, r) \mapsto g(t, r)$ et la condition initiale peut s'écrire $g(0+, r) = g_0 [\mathcal{U}(r) - \mathcal{U}(r - a)]$. Pour les conditions limites (conditions sur l'axe du cylindre et très loin de cet axe), on impose, quel que soit t : $\lim_{r \rightarrow 0} g(t, r) = C_0$ où C_0 peut dépendre du temps et $\lim_{r \rightarrow +\infty} g(t, r) = 0$.

En utilisant le laplacien en coordonnées cylindriques, l'équation (E_1) du problème s'écrit :

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, r) = k \left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(t, r) + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}(t, r) \right]$$

En tenant compte de la condition initiale, la transformation \mathcal{L} nous fournit, en conservant les hypothèses H_1 et H_2 de §6.2, l'équation (E_2) du second ordre, en la variable r , à coefficients variables :

$$r \frac{d^2 G_s}{dr^2}(r) + \frac{dG_s}{dr}(r) - \frac{rs}{k} G_s(r) = -\frac{rsg_0}{k} [\mathcal{U}(r) - \mathcal{U}(r - a)]$$

Résolution de (E_2) sur $[a, +\infty[$

Cette équation est du type de celle de Bessel d'indice 0. Plus précisément, si dans l'équation de Bessel modifiée d'indice 0, qui s'écrit : $xy'' + y' - xy = 0$ et qui admet (Cf. Annexe 2) pour base de solutions $\{I_0(x), K_0(x)\}$ sur $]0, +\infty[$, on pose : $z(x) = y(Kx) = y(u)$, on obtient : $uz''(u) + z'(u) - K^2uz(u) = 0$ et cette équation s'identifie à (E_2) pour $K^2 = \frac{s}{k}$. Il en résulte que l'équation (E_2) admet pour solutions sur $[a, +\infty[$, puisqu'alors elle est sans second membre, les combinaisons linéaires :

$$C_1(s)I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{k}}\right) + C_2(s)K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{k}}\right)$$

Dans cette formule, on suppose que s appartient au champ complexe coupé suivant l'axe des réels négatifs, avec un argument vérifiant $-\pi < \arg(s) < \pi$; la fonction notée $\sqrt{\frac{s}{k}}$ prolonge ainsi la détermination réelle sur l'axe des réels positifs. Puisque, lorsque $r \rightarrow +\infty$, seule, sur les deux fonctions, $K_0(r)$ tend vers 0, l'autre n'ayant pas de limite, on en déduit que les solutions acceptables sur cet intervalle s'écrivent : $G_1(s) = C_2(s)K_0\left(r\sqrt{\frac{s}{k}}\right)$.

Résolution de (E_2) sur $[0, a[$

Au lieu de résoudre (E_2) avec ses conditions initiales sur $]0, a[$ par les moyens classiques, on choisit, ici, de faire cette résolution en utilisant la transformation \mathcal{L}_r en la variable r à (E_2) dans laquelle s reste un paramètre et r la variable. La transformée de $G_s(r)$ étant notée $G_1(\sigma)$, celle de la dérivée $\frac{d}{dr}G_s(r)$ est égale à

$\sigma G_1(\sigma) - C_0$ et celle de la dérivée seconde s'écrit : $\sigma^2 G_1(\sigma) - C_0 \sigma - \beta$ où β est la valeur $\frac{d}{dr} G_s(0)$. De plus, l'image de $r\mathcal{U}(r)$ est la fonction σ^{-2} . L'équation (E_2), à coefficients variables se transforme donc en (E_3) :

$$\left(\frac{s}{k} - \sigma^2\right)G_1'(\sigma) - \sigma G_1(\sigma) = -\frac{sg_0}{k\sigma^2}$$

On doit d'ailleurs y remarquer la suppression des termes C_0 et β . L'équation sans second membre admet les solutions : $G_1(\sigma) = C(\sigma^2 - \frac{s}{k})^{-1/2}$. Comme, de plus, l'équation complète admet la solution particulière : $\sigma \mapsto \frac{g_0}{\sigma}$, on en déduit que la solution générale de (E_3) s'écrit :

$$G_1(\sigma) = \frac{g_0}{\sigma} + C(\sigma^2 - \frac{s}{k})^{-1/2}$$

Comme l'image inverse de $(\sigma^2 - 1)^{-1/2}$ est la fonction $I_0(r)$, il en résulte, après utilisation d'une dilatation, que la solution générale de (E_2) sur $]0, a[$ s'exprime par : $G_s(r) = g_0 + C(s)I_0\left(r\sqrt{\frac{s}{k}}\right)$ où $C(s)$ ne dépend que de s .

Solution de (E_2) sur $]0, +\infty[$

Il reste à raccorder les solutions à la borne a des deux intervalles précédents, ce qui doit permettre de déterminer les deux constantes $C(s)$ et $C_2(s)$. En posant : $\mu = \sqrt{s/k}$, ces constantes en effet doivent vérifier, d'une part, la condition de continuité :

$$g_0 + C(s)I_0(a\mu) = C_2(s)K_0(a\mu)$$

D'autre part, la condition de dérivabilité :

$$\mu C(s)I_0'(a\mu) = \mu C_2(s)K_0'(a\mu)$$

Puisque : $I_0' = I_1$ et $K_0' = -K_1$, cette relation devient : $C(s) = -C_2(s)\frac{K_1(a\mu)}{I_1(a\mu)}$.

On utilise ensuite (Cf. [[29]], [[18]]) : $I_\nu(z)K_{\nu+1}(z) - I_{\nu+1}(z)K_\nu(z) = z^{-1}$ pour $\nu = 0$, ce qui donne : $C_2(s) = -g_0 a \mu K_1(a\mu)$. On obtient ainsi les constantes et, finalement, la solution de (E_2) s'exprime par :

$$\begin{aligned} G_s(r) &= g_0 \left[1 - a\sqrt{s/k}K_1(a\sqrt{s/k})I_0(r\sqrt{s/k}) \right] \quad \forall r \in]0, a[\\ G_s(r) &= g_0 a\sqrt{s/k}I_1(a\sqrt{s/k})K_0(r\sqrt{s/k}) \quad \forall r \in [a, +\infty[\end{aligned}$$

Majorations préliminaires à l'utilisation d'une formule d'inversion

On met à part la contante g_0 que l'on sait inverser. Alors, les deux expressions trouvées, où on suppose que $z = s$ appartienne au plan complexe coupé suivant la demi-droite des réels négatifs, sont holomorphes dans Π_0 . On utilise les comportements asymptotiques des fonctions I_n et K_n au voisinage de l'infini (Cf. [[29]]) dans Π_0 qui sont donnés par :

$$I_n(z) \sim K \frac{\exp(z) + i \exp(-z + i\pi(n + 1/2))}{\sqrt{z}}, \quad K_n(z) \sim K' \frac{\exp(-z)}{\sqrt{z}}$$

On en déduit :

$$\mu I_0(r\mu)K_1(a\mu) \sim H \exp\left(\sqrt{\frac{s}{k}}(r-a)\right), \quad \text{avec } r-a < 0$$

$$\mu I_1(r\mu)K_0(a\mu) \sim H' \exp\left(\sqrt{\frac{s}{k}}(a-r)\right), \quad \text{avec } r-a > 0$$

On suppose pour toute la suite que $r \neq a$. On peut donc appliquer le théorème d'inversion aux deux expressions. On pose : $\frac{a}{\sqrt{k}} = b$ et $\frac{r}{\sqrt{k}} = r'$, l'expression valable pour $r < a$ étant écrite alors sous la forme : $F_1(z) = b\sqrt{z}K_1(b\sqrt{z})I_0(r'\sqrt{z})$, On ne donne les détails que pour cette première fonction.

Image inverse de F_1

Pour parvenir à l'image inverse, on utilise le contour de la figure de l'exemple 2.25. Pour faire une majoration sur l'arc de cercle de ce contour, on considère seulement sa partie supérieure, notée γ^+ . En reprenant les comportements asymptotiques précédents, on obtient pour $F_1(z)$, lorsque $\pi/2 < \arg(z) < 3\pi/2$, l'équivalence :

$$F_1(z) \sim H \left(\exp((r'-b)\sqrt{z}) + i \exp(-(r'+b)\sqrt{z}) \right)$$

Les deux exposants $r'-b$ et $-(r'+b)$ sont négatifs. La partie réelle de \sqrt{z} étant $\sqrt{R}\cos(\theta/2)$ avec $\cos(\theta/2) \geq 0$, on en déduit, pour R assez grand, la majoration valable sur γ^+ :

$$|F_1(z)| \leq C \exp((r'-b)\sqrt{R}\cos(\theta/2))$$

Ceci fournit la convergence uniforme sur les arcs fermés strictement inclus dans γ^+ , mais non la convergence uniforme souhaitée sur tout l'arc. Par contre, on peut conclure à la convergence uniforme vers 0 sur γ^+ , lorsque $R \rightarrow +\infty$, de $\frac{F_1(z)}{z}$, ce qui permet d'appliquer le lemme de Jordan. Le même raisonnement s'applique sur la partie inférieure du cercle car il y a simplement le changement de i en $-i$ dans la formule d'équivalence ci-dessus. En outre, les mêmes majorations et équivalences s'appliquent pour l'autre fonction $\mu I_1(r\mu)K_0(a\mu)$. Ce qui précède montre qu'il faut appliquer le théorème d'inversion à $\frac{F_1(z)}{z}$; on obtiendra ainsi

une primitive g_1 de l'image inverse de $\frac{F_1(z)}{z}$ (Cf. Remarque 1.12).

D'après cette proposition, nous obtenons, L étant le lacet bordant la coupure de la figure 2.25 :

$$g_1(t, r) = \frac{1}{2i\pi} \int_L \frac{F_1(z)}{z} e^{zt} dz$$

Calcul de l'image inverse g_1 dans le cas où $r \in]0, a[$

Sur le petit cercle γ de rayon ε du lacet, grâce à l'équivalence, au voisinage de 0 : $K_1(z) \sim \log(z/2)$, on obtient : $\left| \int_{\gamma} F_1(z) dz \right| \leq K\sqrt{\varepsilon} (\ln[\varepsilon/2] + \pi)$. Cette intégrale tend donc vers 0. La limite de l'intégrale sur la partie inférieure du lacet, lorsque celle-ci se rapproche de la coupure, partie où l'argument de z est égal à $-\pi$, s'exprime par :

$$\int_0^{+\infty} (-i)\sqrt{\rho} I_0(r'(-i)\sqrt{\rho}) K_1(b(-i)\sqrt{\rho}) e^{-\rho t} \frac{d\rho}{\rho}$$

Sur la partie supérieure du lacet, cette limite s'écrit :

$$-\int_0^{+\infty} (i)\sqrt{\rho}I_0(r'(i)\sqrt{\rho})K_1(b(i)\sqrt{\rho})e^{-\rho t}\frac{d\rho}{\rho}$$

D'après les relations où Y_1 est une fonction de Bessel-Weber (Cf. [[29]] et Annexe 2), on a : $I_0(iz) = I_0(-iz) = J_0(z)$ et :

$$K_1(iz) = -\frac{\pi}{2}(J_1(z) - Y_1(z)), \quad K_1(-iz) = -\frac{\pi}{2}(J_1(z) + Y_1(z))$$

La somme des deux intégrales précédentes nous fournit la limite de l'intégrale sur le lacet, à savoir :

$$i\pi \int_0^{+\infty} J_0(r'\sqrt{\rho})J_1(b\sqrt{\rho})\frac{e^{-\rho t}}{\sqrt{\rho}d\rho}$$

En effectuant le changement de variable d'intégration : $\rho = ku^2$, on arrive à l'image inverse de $\frac{F_1(z)}{z}$, à savoir :

$$g_1(t) = a \int_0^{+\infty} J_0(ru)K_1(au) \exp(-tku^2) du$$

Par conséquent, on a la solution du problème lorsque $r \in]0, a[$:

$$g(t, r) = g_0 \left[1 - a \frac{d}{dt} \left(\int_0^{+\infty} J_0(ru)J_1(au) \exp(-tku^2) du \right) \right]$$

La dérivée formelle de cette intégrale s'écrit :

$$-ak \int_0^{+\infty} u^2 J_0(ru)J_1(au) \exp(-tku^2) du$$

En se servant des équivalences précédentes, on voit qu'il est possible lorsque $t \in [t_0, +\infty[$ avec $t_0 > 0$ de majorer l'intégrand par une fonction sommable indépendante de t . Il en résulte l'expression de $g(t, r)$ pour $0 < r < a$.

Etude pour $r > a$ Les calculs sont analogues, en échangeant les fonctions de Bessel I_0 et I_1 , K_0 et K_1 . On aboutit finalement à la même formule intégrale, à savoir :

$$\forall r > a, \quad g(t, r) = g_0 ak \int_0^{+\infty} u^2 J_0(ru)J_1(au) \exp(-tku^2) du$$

Dans cette dernière formule, comme $|J_0(ru)| \leq 1$ et que $\lim_{r \rightarrow 0} J_0(ru) = 0$, le théorème de Lebesgue nous fournit bien la condition de nullité à l'infini.

6.2.4 Problèmes de transmission dans les lignes électriques

Dans une ligne électrique, on désigne les constantes physiques, déterminées par unité de longueur, qui la caractérisent par R, L, C, G qui sont respectivement la résistance, la self-inductance ou inductance, la capacité et la perditance. L'étude

physique du phénomène se traduit par un système (E_1) de deux équations aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants :

$$(E_1) \quad \begin{cases} L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = -\frac{\partial v}{\partial x} \\ C \frac{\partial v}{\partial t} + Gv = -\frac{\partial i}{\partial x} \end{cases}$$

En éliminant une des fonctions i ou v dans ce système, on aboutit à la même équation dite «équation des télégraphistes» vérifiée par l'une ou l'autre des fonctions, par exemple, pour u :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} u + (RC + LG) \frac{\partial}{\partial t} u + RG u$$

C'est donc une équation linéaire du second ordre à coefficients constants de coefficients $a = LC$, $b = RC + LG$, $c = RG$. On remarque que, pour $a = 0$, on trouve une équation de propagation de la chaleur étudiée dans un des exemples précédents. On utilise la transformation de Laplace pour les fonctions de la variable t . On suppose encore que les hypothèses H_1 et H_2 sont vérifiées. Le système précédent est transformé en un système différentiel d'inconnues $(x, s) \mapsto I(x, s)$ et $(x, s) \mapsto V(x, s)$ où la seule variable est la variable d'espace x , la variable s de Laplace étant considérée comme un paramètre :

$$(E_2) \quad \begin{cases} (Ls + R)I = -\frac{dV}{dx} + Li_0 \\ (Cs + G)V = -\frac{dI}{dx} + Cv_0 \end{cases}$$

L'image du potentiel vérifie l'équation obtenue par élimination de I et le système devient :

$$(E_3) \quad \begin{cases} \frac{d^2 V}{dx^2} - (Ls + R)(Cs + G)V = L \frac{di_0}{dx} - C(Ls + R)v_0 \\ I = -\frac{1}{Ls + R} \frac{dV}{dx} + \frac{Li_0}{Ls + R} \end{cases}$$

Concernant les conditions au bord à adjoindre aux données initiales, on considère seulement deux cas particuliers :

Exemple 6.16 *Problème d'une ligne demi-infinie, avec $L = G = 0$, le courant et le potentiel étant nuls pour $t \leq 0$ et la donnée initiale au point $x = 0$ étant de type sinusoïdal : $t \mapsto A \sin(\omega t)$*

La première équation de (E_3) s'écrit, pour $x > 0$: $V'' = RCsV$. On en déduit :

$$V(s, x) = H_1(s) \exp(-\sqrt{RCs}x) + H_2(s) \exp(\sqrt{RCs}x)$$

La condition à l'infini exige $H_2 = 0$. La condition en $x = 0$ exige $H_1(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$.

On en déduit, en ayant posé : $\sqrt{RC} = \gamma$, l'image de la fonction potentiel :

$$V(s, x) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \exp(-\gamma\sqrt{s}x)$$

Le problème est maintenant d'appliquer la formule intégrale d'inversion.

Ayant coupé le champ complexe suivant l'axe des réels négatifs et la branche de la racine étant celle qui prolonge la racine carrée réelle, on définit la fonction $s \mapsto F(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \exp(-\gamma x \sqrt{s} + st)$. Elle est holomorphe dans le demi-plan Π_0 , les hypothèses d'application de la formule d'inversion sont vérifiées et l'image inverse s'obtient par intégration de F sur Δ_c où $c > 0$. On se sert du contour $\Gamma = \Gamma_{c,r,R,\alpha}$ de la figure 2.25. Le théorème des résidus nous donne :

$$\int_{\Gamma} F_1(s) ds = 2i\pi [Res(F; i\omega) + Res[F; -i\omega]]$$

Nous procédons aux majorations habituelles en nous contentant des parties de contour incluses dans le demi-plan supérieur puisque les calculs resteront les mêmes sur les parties symétriques.

Sur $[A'B']$ d'ordonnée R , on a $|s^2 + \omega^2| \geq R^2 - \omega^2$, $|\exp(-\gamma x \sqrt{s})| \leq 1$ et $|\exp(st)| \leq \exp(ct)$. On en déduit une majoration et la limite :

$$\left| \int_{[A'B']} F(s) ds \right| \leq \frac{c \exp(ct)}{R^2 - \omega^2} \rightarrow 0$$

Sur l'arc $\widehat{B'a}$ que l'on paramètre au moyen de : $s = R \exp(i\theta)$, on a la majoration : $|\exp(st)| \leq \exp(Rt \cos \theta)$ et, les autres inégalités précédentes étant toujours vraies, on aboutit à la majoration :

$$\left| \int_{\widehat{B'a}} F(s) ds \right| \leq \frac{R}{R^2 - \omega^2} \int_{\pi/2}^{\pi-\alpha} \exp(Rt \cos \theta) d\theta$$

En majorant cette intégrale par le remplacement de $\pi - \alpha$ par π , puis en la transformant en l'intégrale sur $[0, \pi/2]$ de $\exp(-Rt \sin \theta) d\theta$, ce qui permet d'utiliser le lemme 1.3, on obtient la majoration et la limite lorsque $R \rightarrow +\infty$:

$$\left| \int_{\widehat{B'a}} F(s) ds \right| \leq \frac{K}{R(R^2 - \omega^2)} \rightarrow 0$$

Au voisinage de $s = 0$ dans le plan coupé, $\lim_{|s| \rightarrow 0} sF_1(s) = 0$ et, par conséquent, l'intégrale sur le petit cercle C_r tend vers 0. Il reste donc les deux demi-droites du lacet L .

Sur $[ab]$ l'argument de s est $\pi - \alpha$ tandis que sur $[b'a']$, il est égal à $-\pi + \alpha$. La limite I_+ de l'intégrale sur $[a, b]$ est donc :

$$\begin{aligned} I_+ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^{i(\pi-\alpha)} \int_{+\infty}^0 \frac{(\exp(-\gamma x \sqrt{\rho} \exp(i(\pi-\alpha)/2) + t\rho \exp(i(\pi-\alpha)))}{\rho^2 \exp(-2i\alpha) + \omega^2} d\rho \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-i\gamma x \sqrt{\rho} - t\rho)}{\rho^2 + \omega^2} d\rho \end{aligned}$$

De même, l'intégrale sur $[b'a']$ a pour limite :

$$I_- = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(i\gamma x \sqrt{\rho} - t\rho)}{\rho^2 + \omega^2} d\rho$$

On en déduit que la limite de l'intégrale étendue au lacet s'exprime par :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0, r \rightarrow 0} \int_L F(s) ds = -2i \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\rho t) \sin(\gamma x \sqrt{\rho})}{\rho^2 + \omega^2} d\rho$$

Enfin, la somme des résidus est égale à

$$(2i\omega)^{-1} \left[\exp(-\gamma x \sqrt{\omega} \exp(i\pi/4) + i\omega t) - \exp(-\gamma x \sqrt{\omega} \exp(-i\pi/4) - i\omega t) \right]$$

En rassemblant tous ces résultats, nous obtenons pour la fonction potentiel :

$$v(t, x) = A \left[e^{-x\sqrt{RC\omega/2}} \sin \left[\omega t - x\sqrt{RC\omega/2} \right] - \omega \int_0^{+\infty} e^{-\rho t} \frac{\sin(x\sqrt{RC\rho})}{\rho^2 + \omega^2} d\rho \right]$$

Le problème se termine, en utilisant les équations de départ E_1 , par la détermination de la fonction $i(t, x)$.

On reprend ce problème avec d'autres données.

Exemple 6.17 *Problème d'une ligne demi-infinie, avec $L = G = 0$, le courant et le potentiel étant nuls pour $t \leq 0$ et la donnée initiale au point $x = 0$ étant une série d'impulsions : $A \sum_0^{+\infty} a_k \delta_{ak}$.*

En se reportant aux calculs précédents, la fonction $V(s, x)$ est définie cette fois par :

$$V(s, x) = A \sum_0^{+\infty} a_k \exp(-aks - \sqrt{RC}sx)$$

Si les coefficients a_k sont quelconques, on peut chercher les images inverses de chacune des fonctions $\exp(-aks - \gamma x \sqrt{s})$ ou encore celle de $\exp(-\gamma x \sqrt{s})$. En utilisant les résultats de l'exemple 2.17 (formule 2.18), on voit que cette image inverse est $\frac{\gamma}{2\sqrt{\pi t^3}} \exp(-\frac{\gamma^2}{4t})$. On en déduit la solution sous la forme d'une série de translatées dans le temps t , à savoir :

$$v(x, t) = A \sum_0^{+\infty} a_k \mathcal{U}(t - k) \frac{\sqrt{RC}}{2\sqrt{\pi(t - k)^3}} \exp\left(-\frac{RC}{4(t - k)}\right)$$

Exemple 6.18 *Cas d'une ligne de longueur l finie.*

On suppose que le potentiel initial est la constante v_0 , que la dérivée du potentiel est nulle quel que soit $t > 0$ au point $x = 0$, que le courant initial est nul et qu'en l'extrémité $x = l$, le potentiel est la constante v_1 pour tout $t > 0$. On conserve

toujours $L = G = 0$. Le courant initial étant nul, la première équation de (E_3) nous donne :

$$\frac{d^2V}{dx^2} - RCsV = -CRv_0$$

Cette équation du second ordre, avec des coefficients constants et second membre constant, se résoud immédiatement. On trouve, en posant encore $\gamma^2 = RC$ la relation :

$$V = H_1(s)\text{ch}(\gamma x\sqrt{s}) + H_2(s)\text{sh}(\gamma x\sqrt{s}) + \frac{v_0}{s}$$

Pour $x = 0$, la dérivée par rapport à x est nul, ce qui donne : $\gamma\sqrt{s}H_2(s) = 0$, d'où $H_2(s) = 0$. Pour $x = l$, le potentiel reste égal à v_1 , soit plutôt $v_1(l, t) = \mathcal{U}(t)v_1$ dont l'image de Laplace est $\frac{v_1}{s}$. En remplaçant x par l , on obtient donc :

$H_1(s)\text{ch}(-l\gamma\sqrt{s}) + \frac{v_0}{s} = \frac{v_1}{s}$. On en tire : $H_1(s) = \frac{v_1 - v_0}{s}\text{ch}(l\gamma\sqrt{s})$ et on en déduit l'image de Laplace du potentiel v :

$$V(s, x) = \frac{v_0}{s} + \frac{v_1 - v_0}{s} \frac{\text{ch}(x\gamma\sqrt{s})}{\text{ch}(l\gamma\sqrt{s})}$$

L'image inverse de cette fonction a été calculée dans l'exemple 2.27. On obtient ainsi le résultat valable pour $0 < x < l$ et tout $t > 0$:

$$v(t, x) = v_0 + \frac{4(v_1 - v_0)}{\pi} \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)} \exp\left[-\frac{(n+1/2)^2\pi^2 t}{l^2 RC}\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right]$$

Pour un autre problème concernant une ligne finie, voir l'exercice 7.41.

6.2.5 Problèmes de vibrations des tiges

On ne considère que les tiges qui sont des milieux à une dimension d'espace et deux sortes de vibrations, les vibrations longitudinales et les vibrations transversales. La encore, la tige peut être infinie semi-infinie ou de longueur finie.

Cas des vibrations longitudinales

La tension $p(t, x)$ s'applique au point de la tige d'abscisse x à l'instant t ; ces points suffisent des déplacements longitudinaux se traduisant par la fonction $y(t, x)$.

On note ρ la densité constante de la barre (barre uniforme), E module de Young, P la force appliquée à la barre et M la masse de la barre. On pose : $\frac{E}{\rho} = c^2$.

Alors, les équations du phénomène s'écrivent :

$$p(t, x) = E \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\rho P}{M}$$

Par élimination de p , on en déduit l'équation vérifiée par la fonction y , à savoir :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{P}{M}$$

Cas des vibrations transversales

On note toujours $y(t, x)$ le déplacement en un point d'abscisse x de la tige. En désignant par S et I l'aire et le moment d'inertie de la section droite de la tige et en posant $K^2 = \frac{EI}{\rho S}$, l'équation (E_1) des vibrations transversales de la tige sous l'action d'une force $F(t, x)$ appliquée en chacun des points de la tige, s'écrit :

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}(t, x) + \frac{1}{K^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(t, x) = \frac{F(t, x)}{EI}$$

Exemple 6.19 *Etude des vibrations longitudinales d'une barre soumise à une force axiale en une des extrémités.*

La tige est de longueur L , en position horizontale, encastée en l'extrémité $x = 0$, l'autre extrémité $x = L$ étant soumise, à l'instant $t = 0$, instant où la barre est supposée en équilibre, à une force axiale de type sinusoïdal : $p(t, L) = A \sin(\omega t)$. Le poids de la barre étant perpendiculaire à l'axe horizontal sur lequel on projette, ce poids n'intervient pas. Il nous faut ainsi trouver une solution de l'équation (E_1) : $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ qui vérifie les conditions initiales $y(0+, x) = 0$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(0+, x) = 0$. L'équation (E_2) transformée par \mathcal{L} est alors :

$$\frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} Y_s(x) = 0$$

Les conditions au bord, c'est-à-dire aux points $x = 0$ et $x = L$ s'écrivent : $y(t, 0) = 0$ et $A \sin(\omega t) = E \frac{\partial y}{\partial x}(t, L)$. Elles deviennent les conditions limites pour (E_2) : $Y_s(0+) = 0$ et $E \frac{dY_s}{dx}(L - 0) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$.

La solution générale de (E_2) s'exprime par : $Y_s(x) = C_1(s) \operatorname{sh}\left(\frac{sx}{c}\right) + C_2(s) \operatorname{sh}\left(\frac{sx}{c}\right)$.

Les constantes C_1 et C_2 vérifient $C_2 = 0$ et $\frac{sEC_1(s)}{c} \operatorname{ch}\left(\frac{sL}{c}\right) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$. On en déduit l'image de Laplace cherchée :

$$Y_s(x) = \frac{A\omega}{Ec} \frac{s \operatorname{sh}(sx/c)}{(s^2 + \omega^2) \operatorname{ch}(sL/c)}$$

Application de la formule intégrale d'inversion

La fonction $s \mapsto Y_s(x)$ précédente est holomorphe dans Π_0 . Le calcul des modules des fonctions hyperboliques nous donne, en posant $\Re e(s) = a$ et $\Im m(s) = b$, la majoration :

$$\left| \frac{\operatorname{sh}(sx/c)}{\operatorname{ch}(sL/c)} \right| = \frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2(ax/c) - \cos^2(bx/c)}}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(aL/c) - \sin^2(bL/c)}} \leq \frac{\operatorname{ch}(ax/c)}{\operatorname{sh}(aL/c)}$$

Cette dernière expression a le comportement de $\exp\left(\frac{a}{c}(x - L)\right)$, avec $x - L \leq 0$. On en déduit que, dans Π_0 , le théorème d'inversion 1.4 s'applique. Ainsi, le

résultat s'obtient en intégrant $s \mapsto (z) = Y_z(x)e^{st}$ sur une droite Δ d'abscisse a_0 dans Π_0 .

Cette fonction F est prolongeable holomorphiquement au point $z = 0$. Les points singuliers de F sont, d'une part, $i\omega$ et $-i\omega$ et, d'autre part, les points de la suite s_n où $s_n = i(2n + 1)\frac{\pi c}{2L}$.

En prenant le contour $\Gamma_n = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, D] \cup [D, A]$ (voir figure ci-après) où les ordonnées des segments horizontaux sont $\pm R_n = \pm \frac{n\pi c}{L}$, les segments verticaux étant d'une part placés sur Δ et d'autre part d'abscisse $a_n = -n$. Le théorème des résidus nous donne :

$$\int_{\Gamma_n} F(z)dz = 2i\pi \left[Res(F; i\omega) + Res(F; -i\omega) + \sum_{-\infty}^{+\infty} Res(F; s_n) \right]$$

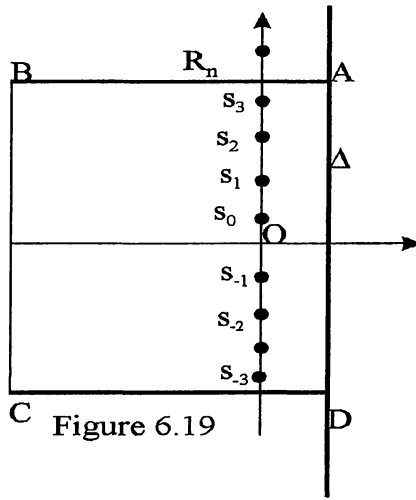


Figure 6.19

En utilisant les majorations précédentes des modules des sh et des ch, on obtient sur les segments $[AB]$ et $[CD]$ l'égalité : $|\text{ch}(zL/c)| = \text{ch}(aL/c)$ puis la majoration $\left| \frac{\text{sh}(sx/c)}{\text{ch}(sL/c)} \right| \leq \frac{\text{ch}(ax/c)}{\text{ch}(aL/c)} \leq 1$ et, par conséquent, en posant $K = \frac{A\omega}{cE}$:

$$\left| \int_{[AB]} F(z)dz \right| \leq \frac{K(n + a_0)}{|R_n|(R_n^2 - \omega^2)} e^{a_0 t} \rightarrow 0$$

La même propriété est vraie sur $[CD]$. Sur le segment $[BC]$, on a :

$$\left| \frac{\text{sh}(sx/c)}{\text{ch}(sL/c)} \right| \leq \frac{\text{ch}(|a_n|x/c)}{\text{sh}(a_nL/c)} \leq \coth(|a_n|x/c) \leq \coth(|a_1|x/c) = C$$

On en déduit :

$$\int_{[BC]} F(z)dz \leq 2KC \frac{|R_n|}{n(n^2 - \omega^2)} e^{-nt} \rightarrow 0$$

Concluons que la passage à la limite se solde par

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta} F(z)dz = \left[Res(F; i\omega) + Res(F; -i\omega) + \sum_{-\infty}^{+\infty} Res(F; s_n) \right]$$

Les résidus sont exprimés par : $Res(F; \pm i\omega) = \pm \frac{i \sin(\omega x/c)}{2 \cos(\omega L/c)}$ et par

$$Res(F; s_n) = 2\pi c^2 i \frac{(-1)^n \sin((2n+1)\pi x/2L)}{[(2n+1)^2 \pi^2 c^2 - 4L^2 \omega^2]}$$

On en conclut :

$$y(t, x) = \frac{1}{4\pi} \frac{\sin(\omega x/c)}{\cos(\omega L/c)} + c^2 \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin((2n+1)\pi x/2L)}{[(2n+1)^2 \pi^2 c^2 - 4L^2 \omega^2]}$$

Exemple 6.20 *Etude des vibrations longitudinales d'une barre verticale soumise à son propre poids.*

La tige est de longueur L , elle est fixée dans une position verticale en ses deux extrémités. A l'instant $t = 0$ on la libère de sa fixation en son extrémité supérieure, sans vitesse initiale.

L'accélération de la pesanteur étant notée g , l'équation (E_1) s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = g$$

Puisque les valeurs initiales $y(0+, x)$ et de $\frac{\partial y}{\partial t}(0+, x)$ sont nulles, l'équation (E_2) transformée de (E_1) par \mathcal{L} s'écrit : $\frac{d^2 Y_s(x)}{dx^2} - \frac{s^2}{c^2} Y_s(x) = -\frac{g}{c^2 s}$. Cette équation est soumise aux conditions au bord suivantes :

$$\forall t > 0, \quad Y_s(0) = 0, \quad \forall t > 0, \quad \frac{dY_s}{dx}(L) = 0$$

La solution de (E_2) est obtenue en ajoutant à la solution $A \operatorname{ch}(\frac{sx}{c}) + B \operatorname{sh}(\frac{sx}{c})$ de l'équation sans second membre, la solution particulière constituée par la constante g/s^3 . A l'aide des conditions aux extrémités $x = 0$ et $x = L$, on trouve facilement

$$Y_s(x) = \frac{g}{s^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch}(s(L-x)/c)}{\operatorname{ch}(sL/c)} \right].$$

Le premier terme a pour image inverse $\frac{\mathcal{U}(t)t^2}{2}$. Pour le deuxième terme, on peut appliquer le théorème d'inversion. En effet, la fonction $\frac{\operatorname{ch}(s(L-x)/c)}{\operatorname{ch}(sL/c)}$ reste bornée dans le demi-plan Π_0 , ce qui implique que la fonction à étudier est majorée par K/s^3 . La fonction admet les pôles $s = 0$ et $s_n = (2n+1)ic \frac{\pi}{2L}$.

On en déduit que ce deuxième terme est égal à la somme de tous les résidus associés à ces pôles. Cette fin de calcul ne présente pas de difficultés.

6.2.6 Problèmes concernant le champ électromagnétique dans l'espace

Les équations des problèmes qui suivent sont des conséquences des équations de Maxwell (Cf. [[20]]) écrites ci-après. On y utilise les caractères gras pour désigner

des vecteurs.

Une distribution de charges étant caractérisée par la densité de charge $\rho(\mathbf{m}, t)$, la densité de courant $\mathbf{j}(\mathbf{m}, t)$, le champ électromagnétique créé $(\mathbf{E}(\mathbf{m}, t), \mathbf{B}(\mathbf{m}, t))$ est relié aux densités précédentes par les équations :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.1)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (6.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.3)$$

$$\nabla \wedge \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) \quad (6.4)$$

Les constantes qui y figurent ε_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité du vide et la perméabilité du vide. On suppose être dans un milieu donné où la densité de charge est liée au champ électrique par : $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, σ étant la conductivité de ce milieu.

Images de Laplace des équations de Maxwell

Ces équations vectorielles se projettent sur les axes orthonormés d'un repère et fournissent un système (E_1) d'équations aux dérivées partielles dont les fonctions inconnues sont les composantes des fonctions vectorielles considérées. En transformant par \mathcal{L} en la variable t ces équations scalaires, on obtient un système (E_2) d'équations dont la variable, comme à l'habitude, est la variable d'espace.

A la place des projections sur les axes, on peut multiplier les équations de Maxwell par e^{-st} et intégrer les égalités obtenues sur $[0, +\infty[$ en supposant que ces intégrations commutent aux opérations de divergence et de rotationnel. Cela nous permet d'ailleurs d'obtenir d'une part des équations transformées indépendantes des axes et, d'autre part une écriture plus globale du système (E_2) .

Les transformées de Laplace du champ électrique et du champ magnétique sont notées $\mathcal{E}(s)$ et $\mathcal{B}(s)$. Les valeurs initiales de ces champs, c'est-à-dire leurs valeurs à l'instant $t = 0$ étant notées \mathbf{E}_0 et \mathbf{B}_0 , les images de Laplace des dérivées de ces champs s'écrivent :

$$\mathcal{L} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) (s) = s\mathcal{E}(s) - \mathbf{E}_0$$

et, de même :

$$\mathcal{L} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right) (s) = s\mathcal{B}(s) - \mathbf{B}_0$$

pour ces transformées de Laplace (6. 2) et (6.4) nous donnent :

$$\left[\nabla \wedge \mathcal{E} \right] (s) = -s\mathcal{B}(s) + \mathbf{B}_0 \quad (6.5)$$

$$\left[\nabla \wedge \mathcal{B} \right] (s) = (\mu_0 \sigma + \varepsilon_0 s) \mathcal{E}(s) - \mu_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_0 \quad (6.6)$$

Pour éliminer l'une des deux inconnues dans ce système, nous utilisons la formule classique du double rotationnel qui va se transporter, par linéarité, sur les

transformées de Laplace à valeurs vectorielles. Par exemple, pour \mathbf{B} , on a :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathbf{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B},$$

Cette formule devient :

$$\nabla \wedge (\nabla \wedge \mathcal{B}) = \nabla (\nabla \cdot \mathcal{B}) - \nabla^2 \mathcal{B}(s)$$

En tenant compte des divergences de \mathbf{B} et de \mathbf{E} données par les relations (6.1) et (6.3) et en posant $\omega^2(s) = s\mu_0(\sigma + s\varepsilon_0)$, les équations précédentes fournissent :

$$-\nabla^2 \mathcal{B}(s) = -\omega^2(s)\mathcal{B}(s) + (\mu_0\sigma + s\varepsilon_0)\mathbf{B}_0 - \mu_0\varepsilon_0\nabla\wedge\mathbf{E}_0 \quad (6.7)$$

$$\nabla (\nabla \cdot \mathcal{E}(s))(s) = \nabla^2 \mathcal{E}(s) - \omega^2(s)\mathcal{E}(s) + \mu_0\varepsilon_0s\mathbf{E}_0 + \nabla\wedge\mathbf{B}_0 \quad (6.8)$$

On peut améliorer la dernière équation en se servant de la relation (6.3), mais les problèmes que nous allons traiter exigent plutôt les coordonnées cylindriques.

Utilisation des coordonnées cylindriques

On reprend les relations de Maxwell en coordonnées cylindriques. Nous obtenons ainsi 6 équations concernant les composantes des vecteurs \mathcal{B} et \mathcal{E} qui sont notées \mathcal{B}_z , \mathcal{B}_r , \mathcal{B}_θ et \mathcal{E}_z , \mathcal{E}_r , \mathcal{E}_θ . En utilisant les formules classiques définissant ces composantes pour le rotationnel, les équations précédentes deviennent d'abord :

$$\left(\nabla\wedge\mathcal{B}\right)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{B}_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\mathcal{B}_\theta}{\partial z} = \mu_0\sigma\mathbf{E}_r + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}_r}{\partial t} \quad (6.9)$$

$$\left(\nabla\wedge\mathcal{B}\right)_\theta = \frac{\partial\mathcal{B}_r}{\partial z} - \frac{\partial\mathcal{B}_z}{\partial r} = \mu_0\sigma\mathbf{E}_\theta + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}_\theta}{\partial t} \quad (6.10)$$

$$\left(\nabla\wedge\mathcal{B}\right)_z = \frac{1}{r}\mathcal{B}_\theta + \frac{\partial\mathcal{B}_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{B}_r}{\partial\theta} = \mu_0\sigma\mathbf{E}_z + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\mathbf{E}_z}{\partial t} \quad (6.11)$$

$$\left(\nabla\wedge\mathcal{E}\right)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\mathcal{E}_\theta}{\partial z} = -\frac{\partial\mathcal{B}_r}{\partial t} \quad (6.12)$$

$$\left(\nabla\wedge\mathcal{E}\right)_\theta = \frac{\partial\mathcal{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial\mathcal{E}_z}{\partial r} = -\frac{\partial\mathcal{B}_\theta}{\partial t} \quad (6.13)$$

$$\left(\nabla\wedge\mathcal{E}\right)_z = \frac{1}{r}\mathcal{E}_\theta + \frac{\partial\mathcal{E}_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{E}_r}{\partial\theta} = -\frac{\partial\mathcal{B}_z}{\partial t} \quad (6.14)$$

On passe ensuite aux équations vérifiées par les transformées de Laplace de ces composantes. Dans le cadre des deux exemples qui seront traités ci-dessous, on fait l'hypothèse que ces composantes sont indépendantes de z , ce qui annule les dérivées partielles en z et, par ailleurs, que toutes les conditions initiales sont nulles. Sous ces hypothèses, les équations (6.9), (6.10) et (6.14) nous fournissent :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{B}_z}{\partial\theta} = \mu_0(\sigma + s\varepsilon_0)\mathcal{E}_r \quad (6.15)$$

$$-\frac{\partial\mathcal{B}_z}{\partial r} = \mu_0(\sigma + s\varepsilon_0)\mathcal{E}_\theta \quad (6.16)$$

$$\frac{1}{r}\mathcal{E}_\theta + \frac{\partial\mathcal{E}_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\mathcal{E}_r}{\partial\theta} - s\mathcal{B}_z \quad (6.17)$$

En appliquant l'opérateur $\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r}$ à l'équation (6.16), l'opérateur $-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ à l'équation (6.15), en ajoutant et en substituant dans (6.17), on obtient une équation ne concernant que la composante B_z :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right] = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial \theta^2} + \omega^2(s) B_z \tag{6.18}$$

Les autres équations (6.11), (6.12) et (6.13) fournissent un système duquel on pourrait tirer une équation dont la seule inconnue est \mathcal{E}_z . En particulier, nous obtenons :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial \theta} = -s B_r \tag{6.19}$$

$$-\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial r} = -s B_\theta \tag{6.20}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial r} \right] = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_z}{\partial \theta^2} + \omega^2(s) \mathcal{E}_z \tag{6.21}$$

6.2.7 Exemples de problèmes de détermination de champs

Exemple 6.21 *Etude du champ magnétique produit par une plaque conductrice s'identifiant à un plan d'épaisseur $2a$.*

On suppose que les conditions initiales sont nulles et d'autre part que $\omega^2(s) = sk^2$ avec $k^2 = \mu_0 \sigma$, ce qui revient à négliger ϵ_0 . Cette simplification correspond à la propriété physique selon laquelle, dans tout le volume d'un conducteur métallique, le courant de déplacement $\mathbf{j}_D = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ est négligeable devant la densité de courant $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, dans le domaine des fréquences industrielles et hertziennes (Cf. [[20]]). A l'instant initial, un champ magnétique $\mathbf{B}_0 = k \cos(\omega t)$, où le vecteur \mathbf{k} est le vecteur unitaire de l'axe Oz , est établi sur les deux faces $x = a$ et $x = -a$. Il est facile de voir que la connaissance de $B(s)$ résulte de celle de sa composante sur cet axe z/z . Comme on peut prouver que le champ magnétique est indépendant de l'angle θ , on est amené à résoudre l'équation (6.18) dans laquelle la dérivée partielle en θ est nulle et dans laquelle on assimile r à la variable x :

$$\frac{d^2}{dx^2} B_z - k^2 s B_z = 0$$

La solution générale de cette équation, en posant pour simplifier $Y = B_z$ s'exprime donc par : $Y(x) = A \operatorname{ch}(k\sqrt{s}x) + B \operatorname{sh}(k\sqrt{s}x)$. Il suffit maintenant de tenir compte des deux conditions sur les surfaces de la plaque. Pour $x = \epsilon a = \pm a$, on obtient : $\frac{s}{s^2 + \omega^2} = A \operatorname{ch}(k\sqrt{s}a) + \epsilon B \operatorname{sh}(k\sqrt{s}a)$. On en déduit $B = 0$ et $A = \frac{s}{(s^2 + \omega^2) \operatorname{ch}(k\sqrt{s}a)}$. L'image de Laplace de la fonction cherchée est donc :

$$B_z(x) = \frac{s \operatorname{ch}(k\sqrt{s}x)}{(s^2 + \omega^2) \operatorname{ch}(k\sqrt{s}a)}$$

On laisse le soin au lecteur de terminer les calculs en appliquant la formule intégrale d'inversion, comme dans l'exemple 2.27 et la proposition 2.4 ; les majorations étant analogues puisque s^{-1} est remplacé par $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$.

Exemple 6.22 *Etude du champ à l'intérieur d'un cylindre conducteur de rayon a , après qu'à l'instant $t = 0$, un champ magnétique constant parallèle à l'axe du cylindre ait été établi à l'extérieur de ce cylindre.*

Le cylindre est supposé de longueur infinie, d'axe Oz . Pour des raisons géométriques et physiques évidentes, la fonction étudiée $Y = B_z$ ne dépend que de la variable r supposée vérifier $0 \leq r < a$. On suppose que les conditions initiales sont nulles et d'autre part que $\omega^2(s) = s\mu_0\sigma$, ce qui revient à négliger ϵ_0 , cette simplification ayant été déjà expliquée et exploitée dans l'exemple précédent.

Il en résulte que $Y = B_z$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial B_z}{\partial r} \right] = \omega^2(s) B_z$$

En prenant pour variable $\omega(s)r$, cette équation devient l'équation de Bessel d'indice 0 dont on sait (Cf. Annexe 2) qu'une base de solutions est constituée par les fonctions : I_0 et K_0 . Comme seule la fonction I_0 reste finie lorsque $r \rightarrow 0$, on en déduit : $Y(s, r) = AI_0(\omega(s)r)$. Il suffit maintenant de tenir compte de la condition initiale pour $r = a$ qui s'écrit : $Y(s, a) = \frac{B_0}{s}$. On obtient ainsi A , d'où la solution : $Y(s, r) = \frac{B_0}{s} \frac{I_0(\omega r)}{I_0(\omega a)}$.

Retour à la fonction inconnue $B_z(t, r)$

On sait que $I_0(iu) = J_0(u)$ et que les seules zéros de J_0 sont réels, simples et constituent une suite de réels strictement positifs (α_n) et la suite de leurs opposés $(-\alpha_n)$. Il en résulte que le dénominateur $I_0(a\sqrt{s\mu_0\sigma})$ ne s'annule que pour les valeurs réelles négatives $s_n = -\frac{\alpha_n^2}{a\sigma\mu_0}$. De plus, malgré la présence de la variable $r\sqrt{s\mu_0\sigma}$, la parité de la fonction I_0 entraîne que cette fonction ne dépend pas de la détermination choisie pour la puissance 1/2 de s . La fonction précédente précédente $s \mapsto Y(s, r)$ est donc holomorphe dans le demi-plan Π_0 et, en utilisant le comportement asymptotique de la fonction I_0 (Cf. Exemple 6.15), on voit que l'on peut utiliser la formule d'inversion, à savoir :

$$B_z(t, r) = \frac{B_0}{2i\pi} \int_{\Delta} e^{st} \frac{I_0(\sqrt{s\mu_0\sigma}r)}{sI_0(a\sqrt{s\mu_0\sigma})} ds$$

On utilise le contour composé d'un segment de la droite Δ et d'un arc de cercle de rayon $R_n = \frac{\sigma\mu_0}{4}(\alpha_{n+1} + \alpha_n)^2$. En utilisant l'équivalent, pour les grandes valeurs de s : $\frac{I_0(B\sqrt{s})}{I_0(A\sqrt{s})} \sim \sqrt{\frac{A}{B}} e^{\sqrt{s}(B-A)}$ (Cf. [[29]] ou Annexe 2), on montre que l'intégrale sur ce cercle tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

En définitive, en posant : $F(s) = e^{st} \frac{I_0(\sqrt{s\mu_0\sigma}r)}{sI_0(a\sqrt{s\mu_0\sigma})}$, il vient la formule :

$$B_z(t, r) = B_0 \left[Res(F; 0) + \sum_1^{+\infty} Res(F; s_n) \right]$$

Le calcul des résidus est immédiate. On trouve :

$$Res(F; 0) = 1, \quad Res(F; s_n) = e^{s_n t} \frac{J_0(r\alpha_n)}{s_n J'_0(a\alpha_n)}$$

On en conclut :

$$B_z(t, r) = B_0 \left[1 + \sum_1^{+\infty} e^{s_n t} \frac{J_0(r\alpha_n)}{s_n J'_0(a\alpha_n)} \right]$$

Exemple 6.23 *Etude des champs électrique et magnétique à l'intérieur d'un conducteur cylindrique après qu'à l'instant $t = 0$ un champ magnétique uniforme, dont la direction est orthogonale à l'axe du cylindre, ait été établi à une grande distance de l'axe du cylindre.*

On suppose toujours les conditions initiales nulles et on fait toujours l'hypothèse $\omega^2(s) = s\mu_0\sigma$. On détermine d'abord la fonction $(r, \theta) \mapsto \mathcal{E}_z(s, r, \theta)$ qui est solution de l'équation (6.21). En posant : $\mathcal{E}_z(s, r, \theta) = U(\omega r) \sin \theta$ dans l'équation (6.21), on voit que U vérifie l'équation de Bessel d'indice 1, à savoir :

$$(\omega r)^2 U'' + (\omega r) U' - (1 + (\omega r)^2) U = 0$$

Cette équation admet pour base de solutions (Cf. Annexe 2) $(I_1(\omega r), K_1(\omega r))$. Lorsque $r \rightarrow 0$, cette dernière n'étant pas finie, les seules solutions à retenir, quand $0 \leq r < a$, s'écrivent : $\mathcal{E}_z = AI_1(\omega r) \sin \theta$.

A l'aide des équations (6.19) et (6.20), on en déduit , lorsque $0 \leq r < a$:

$$B_r = -\frac{1}{sr} AI_1(\omega r) \cos \theta, \quad B_\theta = -\frac{\omega}{s} AI'_1(\omega r) \sin \theta$$

Utilisation des conditions initiales

La difficulté réside ici dans le fait que la condition initiale concerne l'extérieur du cylindre. Elle ne peut se traduire qu'au travers de la surface externe du cylindre en imposant la continuité des composantes B_r et B_θ pour $r = a$. Par hypothèse :

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} B_r = \frac{B_0}{s} \cos \theta, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} B_\theta = -B_0 \sin \theta$$

Ces formules suggèrent d'utiliser la fonction potentiel ϕ dont dérive le champ à l'extérieur du cylindre, vérifiant donc : $B_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}$ et $B_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$. Lorsque r est à gauche de a , les composantes précédentes contiennent $\cos \theta$ et $\sin \theta$ en facteurs; cela impose, pour réaliser la continuité précédente, qu'il en soit de même pour B_r et B_θ .

On cherche donc $r \rightarrow f(r, s)$ qui tend vers 0 lorsque $r \rightarrow +\infty$ et telle que :

$$B_r = (f(r, s) + B_0) \cos \theta, \quad B_\theta = (f(r, s) - B_0) \sin \theta$$

Déterminons alors la fonction ϕ . Soit F une primitive en r de f . On obtient d'abord en intégrant par rapport à r : $\phi = -(F + rB_0) \cos \theta + C(s, \theta)$. En dérivant ensuite par rapport à θ , on a :

$$\left[f - B_0 \right] \sin \theta = -\frac{1}{r} \left[(F + rB_0) \sin \theta + C'_\theta(t, \theta) \right]$$

On en déduit la fonction $C(t, \theta)$ puis la formule $\phi = r \cos \theta \left(f - B_0 \right) + H(s)$. Enfin, en exprimant que : $\Delta \phi = 0$, soit encore : $\Delta \phi = \cos \theta \left(r f'' + 3f' \right) = 0$, on obtient $r f'' + 3f' = 0$, d'où $f(r, s) = \frac{K(s)}{r^2}$. Finalement :

$$\forall r > a : \quad , B_r = \left(\frac{K(s)}{r^2} + \frac{B_0}{s} \right) \cos \theta, \quad B_\theta = \left(\frac{K(s)}{r^2} - \frac{B_0}{s} \right) \sin \theta$$

La continuité dont il est question ci-dessus fournit donc :

$$\frac{K(s)}{a^2} - \frac{B_0}{s} = \frac{\omega}{s} A I'_1(\omega a), \quad \frac{K(s)}{a^2} + \frac{B_0}{s} = -\frac{1}{sa} A I_1(\omega a)$$

On peut ainsi déterminer $A(s)$ et $K(s)$. Désormais, on limite l'étude à celle d'une composante du champ magnétique à l'intérieur du conducteur.

Détermination d'une composante du champ, par exemple, B_r

Ce qui précède fournit :

$$B_r = \frac{2aB_0 \cos \theta}{sr} \frac{I_1(\omega r)}{\omega I'_1(\omega a) + I_1(\omega a)}$$

Malgré la présence de la variable \sqrt{s} , en raison de l'imparité de I_1 , les fonctions $\frac{ak\sqrt{s}I'_1(k\sqrt{s}) + I_1(k\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$ et $\sqrt{s}I_1(k\sqrt{s})$ sont des fonctions uniformes et holomorphes. D'ailleurs, en utilisant la relation de récurrence, pour $n = 1$, $zI'_n(z) + nI_n(z) = zI_{n-1}(z)$, le dénominateur devient $\omega I_0(\omega a)$. Les zéros de ce dénominateur sont donc : $s_n = -\frac{\alpha_n^2}{a^2 \sigma \mu_0}$ où les nombres $\pm \alpha_n$ sont les zéros de la fonction J_0 . Il en résulte que la fonction $s \mapsto B_r(s, r, \theta)$ est holomorphe dans le demi-plan Π_0 . Les comportements asymptotiques déjà signalés dans d'autres exemples montrent que la formule intégrale d'inversion est applicable, à savoir :

$$B_r(t, r, \theta) = \frac{2B_0 \cos \theta}{2i\pi r} \int_{\Delta} e^{st} \frac{I_1(r\sqrt{s\sigma\mu_0})}{s\sqrt{s\sigma\mu_0}I_0(\sqrt{s\sigma\mu_0})} ds$$

En utilisant le contour habituel, les formules de comportements asymptotiques montrent que l'intégrale sur le cercle tend vers 0. Comme le résidu de l'intégrand au point $s = 0$ est égal à $\frac{r \cos \theta}{2}$ et que ces résidus au point $s = s_n$ sont égaux à $e^{s_n t} \frac{I_1(r\sqrt{s_n\sigma\mu_0})}{s_n\sqrt{s_n\sigma\mu_0}I'_0(a\sqrt{s_n\sigma\mu_0})}$, on en déduit, à l'aide des relations entre les fonctions de Bessel I_n et J_n , la formule finale :

$$B_r(t, r, \theta) = \frac{2B_0 \cos \theta}{r} \left[\frac{r}{2} + \sum_1^{+\infty} \exp\left(-\frac{\alpha_n^2}{a^2 \sigma \mu_0} t\right) \frac{J_1(\alpha_n r/a)}{\alpha_n^2 J_1(\alpha_n)} \right]$$

Chapitre 7

Exercices des chapitres 4, 5 et 6

Exercice 7.1 (★★)

Soient φ_ε une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$, positive, de support $[-\varepsilon, \varepsilon]$ dont l'intégrale sur \mathbb{R} vaut 1 et \mathcal{U}_ε une fonction continue, valant 1 sur $[-2\varepsilon, +\infty[$ et nulle sur $]-\infty, -4\varepsilon[$.

1) Expliciter de telles fonctions (la première, classique, peut être définie par une exponentielle sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$, la deuxième peut être choisie affine par morceaux).

2) On considère la convolée $\alpha_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \star \mathcal{U}_\varepsilon$. Montrer que $\alpha_\varepsilon(x) = 0$ si $x < -5\varepsilon$ et exprimer $\alpha_\varepsilon(x)$ par une intégrale sur $[-4\varepsilon, x + \varepsilon]$. Montrer que α_ε est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur $[-\varepsilon, +\infty[$.

3) Montrer que $\alpha_\varepsilon(t) \exp(-xt)$, où $x > 0$ est fixé, est une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. À l'aide de cette fonction α_ε , justifier les affirmations contenues dans la démonstration de la proposition 4.2.

Exercice 7.2 (★)

Justifier les convergences et divergences des séries utilisées dans les exemples 5.8 et les suivants

Exercice 7.3 (★)

Soient les demi-peignes $T = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} \delta_{(2k)}$ et $S = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \delta_{(2k+1)}$. Effectuer les produits de convolution $T \star T$, $S \star S$, $T \star S$. Effectuer également cette convolution pour les peignes $T = \sum_0^{+\infty} k \delta_{(2k)}$ et $S = \sum_0^{+\infty} \delta_{(2k)}$.

Exercice 7.4 (★)

1) En utilisant une série entière, convergente sur $] -1, +1[$, solution de l'équation différentielle : $(1-u^2)y'(u) - uy(u) = 1$, trouver le développement en série entière de $u \mapsto \frac{\arcsin u}{\sqrt{1-u^2}}$.

2) On pose : $a_k = \frac{1.3.5 \cdots (2k+1)}{2.4 \cdots (2k)}$. Effectuer la convolution des deux peignes
 $T = \delta + \sum_1^{+\infty} a_k \delta_{2k}$ et $S = \delta' + \sum_1^{+\infty} \frac{a_k}{2k+1} \delta_{2k+1}$.

Exercice 7.5 (★★)

1) On rappelle la définition : $Ei(-t) = - \int_t^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u} du$.

On se propose de déterminer la dérivée au sens des distributions de la fonction f définie par $f(t) = \mathcal{U}(t)Ei(-t)$.

Pour cela, on montrera, après avoir interverti l'ordre de deux intégrations, que cette dérivée est définie par :

$$\langle [f]', \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} \int_{\epsilon}^u \varphi'(t) dt du$$

En faisant ensuite apparaître la partie finie de $\text{Pf} \left[\frac{\mathcal{U}(t)e^{-t}}{t} \right]$ et, en utilisant (Cf.

Exercice 3.19) la formule : $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\int_x^{+\infty} \frac{e^{-v}}{v} dv + \ln x + \gamma \right] = 0$, montrer que :

$$[f]' = \text{Pf} \left[\frac{\mathcal{U}(t)e^{-t}}{t} \right] + \gamma \delta$$

Vérifier ce résultat à l'aide de la transformation de Laplace.

2) Déterminer à l'aide d'autres parties finies et éventuellement de dérivées de la distribution δ , les dérivées des distributions suivantes, J_0 étant la fonction de Bessel d'indice 0 :

$$\mathcal{U}(t) \frac{J_0(t)}{t^{1/2}}, \quad \text{Pf} \left[\mathcal{U}(t) \frac{J_0(t)}{t} \right], \quad \text{Pf} \left[\mathcal{U}(t) \frac{J_0(t)}{t^{3/2}} \right], \quad \text{Pf} \left[\mathcal{U}(t) \frac{J_0(t)}{t^2} \right], \quad \left[\mathcal{U}(t) \frac{J_0(t)}{t^n} \right]$$

Exercice 7.6 (★)

Soit la fonction f polynômiale par morceaux, causale et définie sur tout intervalle $[n, n+1[$ par : $f(t) = n^2 t^2 + nt + 1$.

Comme dans l'exemple 5.16, calculer la dérivée $[f]''$, puis sa transformée de Laplace et en déduire la transformée de Laplace de f . Retrouver cette transformée par un calcul direct.

Exercice 7.7 (★)

Déterminer par la formule de définition les transformées des deux parties finies suivantes : $\text{Pf} \left(\mathcal{U}(t)(t^{-2}) \right)$ et $\text{Pf} \left(\mathcal{U}(t)(t^{-2} \ln t) \right)$.

Trouver également les définitions des parties finies de $\text{Pf} \left(\mathcal{U}(t)(t^{-3/2}) \right)$ et de $\text{Pf} \left(\mathcal{U}(t)(t^{-5/2}) \right)$ ainsi que leurs produits par le logarithme.

Vérifier les résultats par des dérivations à partir de $\text{Pf} \left(\mathcal{U}(t)(t^{1/2}) \right)$.

Exercice 7.8 (★)

Etablir la formule de définition de la distribution régulière T et de la partie finie S définies par :

$$T = [\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(1-t)\ln(1-t)], \quad \text{Pf}\left[\frac{\mathcal{U}(t)\mathcal{U}(1-t)}{t-1}\right]$$

Comparer la dérivée de T et S .

Exercice 7.9 (★)

On se réfère à §4.8. Montrer qu'effectivement la forme linéaire obtenue (en retranchant la partie infinie) dans la formule de la définition 4.5 est bien une distribution.

Exercice 7.10 (★★★)

Les symboles $\eta_{k,p}$ introduits dans la démonstration de la proposition 4.1 constituent une base de semi-normes dans l'espace \mathcal{S} . Il en résulte que si T est une forme linéaire continue sur \mathcal{S} , alors il existe (k, p) telle que l'image de T soit bornée sur la boule unité fermée associée à $\eta_{k,p}$. En déduire qu'il existe également un réel $c > 0$ tel que :

$$\eta_{k,p}(\varphi) \leq 1 \Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \leq c$$

Montrer alors, en utilisant les fonctions $\frac{\varphi}{\eta_{k,p}(\varphi)}$, que, quel que soit $\varphi \in \mathcal{S}$, on a : $|\langle T, \varphi \rangle| \leq c\eta_{k,p}(\varphi)$. Montrer que, réciproquement si cette dernière relation est vérifiée pour un certain couple (k, p) et un certain réel c , la forme linéaire T est continue. Expliquer ainsi l'argument contenu dans la preuve de *ii*) de la proposition 4.1.

Exercice 7.11 (★★)

Soit f définie par $f(t) = \frac{(\ln t)^2}{t^2}$.

On utilise le polynôme de Taylor de degré 1. La partie infinie est contenue dans :

$$\int_{\varepsilon}^A \left[\varphi(0) \frac{(\ln t)^2}{t^2} + \varphi'(0) \frac{(\ln t)^2}{t} \right]$$

Montrer alors, en utilisant deux intégrations par parties, que la distribution $Pf(f)$ est définie par :

$$\langle Pf\left[\frac{(\ln t)^2}{t^2}\right], \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^A \frac{(\ln t)^2}{t^2} \varphi(t) dt + \frac{(\ln \varepsilon)^2}{\varepsilon} + 2 \frac{(\ln \varepsilon)}{\varepsilon} + \frac{2}{\varepsilon} - \frac{(\ln \varepsilon)^3}{3} \right]$$

Exercice 7.12 (★★)

On propose de définir, pour α non entier et m entier, la partie finie de $\mathcal{U}(t)t^{\alpha}(\ln t)^m$. Comme pour la partie finie de t^{-n} , on utilise, pour $-n-1 < \Re(\alpha) < -n$, ou pour $\alpha = -n$, le polynôme de Taylor de degré $n-1$ en écrivant :

$$\int_{\varepsilon}^A t^{\alpha}(\ln t)^m \varphi(t) dt = \int_{\varepsilon}^A t^{\alpha}(\ln t)^m \left[\varphi(t) - T_{n-1}(\varphi) \right] dt + \int_{\varepsilon}^A t^{-n}(\ln t)^m T_{n-1}(\varphi) dt$$

Exercice 7.13 (★★)**Dérivation d'une partie finie par rapport à l'exposant**

On rappelle la formule de définition, pour α réel, non entier d'abord :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(t) t^{\alpha} dt + \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \left[\frac{\varepsilon^{k+\alpha+1}}{k+\alpha+1} \right] \right]$$

Montrer que la dérivation d'ordre 1 par rapport à α conduit au résultat :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(t) t^{\alpha} \ln t dt + \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0) \varepsilon^{k+\alpha+1}}{k!} \left[\frac{\ln t}{k+\alpha+1} - \frac{1}{(k+\alpha+1)^2} \right] \right]$$

Effectuer également la dérivation d'ordre 2. Comparer avec la définition de l'exercice précédent pour $m = 1$ et pour $m = 2$. Les formules obtenues peuvent ensuite, grâce au prolongement analytique, être étendues au cas où α est complexe. Détailler pour $-n - 1 < \Re(\alpha) < -n$, toujours non entier.

Exercice 7.14 (★★)

Déterminer les distributions parties finies de $\mathcal{U}(t) \frac{\ln t}{t}$ et $\mathcal{U}(t) \frac{(\ln t)^2}{t}$. En déduire, par dérivation, celle de $\mathcal{U}(t) \frac{\ln^2 t}{t^2}$. Comparer avec le résultat de l'exercice 7.11.

Exercice 7.15 (★)

Déterminer les images de Laplace des parties finies des fonctions $\mathcal{U}(t) \frac{J_{1/2}(t)}{t^{3/2}}$ et $\mathcal{U}(t) \frac{J_{1/2}(t)}{t^{5/2}}$.

Exercice 7.16 (★)

Définir la distribution régulière : $[f] = \frac{\mathcal{U}(t)}{\sqrt{|1-t|}}$. En déduire la définition de la partie finie de $[g] = \frac{\mathcal{U}(t)}{\sqrt{|1-t|^3}}$.

Exercice 7.17 (★)

En utilisant les résultats donnés, dans le cas où ν est non entier, par les formules (5.10) et (5.11) (Exemple 5.26), montrer les relations de récurrence : $J'_{-\nu}(t) = -\frac{\nu}{t} J_{-\nu}(t) - J_{-\nu+1}(t)$ et $J'_{-\nu}(t) = \frac{\nu}{t} J_{-\nu}(t) + J_{-\nu-1}(t)$.

Ces formules, qui peuvent se mettre sous la forme $t^{-\nu} J_{\nu+1} = -\frac{d}{dt} t^{-\nu} J_{\nu}$ et $t^{\nu} J_{\nu-1} = \frac{d}{dt} t^{\nu} J_{\nu}$, sont encore valables si ν est un entier n .

Démontrer ces formules directement dans ce dernier cas en utilisant les séries entières de définition.

Exercice 7.18 (★★)

- a) En utilisant la relation précédente et en dérivant le résultat donné, pour $n = 2$, dans l'exemple 5.30 (formule (5.15)), ce qui fournira l'image de $\mathcal{U}(t) \frac{J_2(t)}{t^2}$, déterminer l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t) \frac{J_2'(t)}{t^2}$. Faire une vérification du résultat trouvé.
- b) Déterminer, par une intégration à partir de la formule (5.15), l'image de Laplace de $\mathcal{U}(t) \frac{J_1(t)}{t^3}$.
- c) Par la même démarche, déterminer l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t) \frac{J_n(t)}{t^n}$ et en déduire l'image de $\mathcal{U}(t) \frac{J_n'(t)}{t^n}$.

Exercice 7.19 (★★)

- a) En utilisant, par exemple un développement en série entière, déterminer la transformée de la partie finie de $\mathcal{U}(t) J_0(2\sqrt{t}) t^{-1}$. Indications : On sera amené à trouver la somme $f(u) = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} u^{n+1}}{(n+1)!(n+1)}$. On montre que cette fonction s'exprime à l'aide de la fonction $u \mapsto Ei(-u)$ et on aboutit ainsi à l'image de $\mathcal{U}(t) J_0(2\sqrt{t}) t^{-1}$ qui est : $Ei(-1/s) - 2\gamma$. Comparer avec l'exemple 5.25.
- b) Utiliser la même méthode pour l'image de la partie finie de $\mathcal{U}(t) J_0(2\sqrt{t}) t^{-2}$.
- c) Déduire des deux résultats précédents, l'image de $\text{Pf}[\mathcal{U}(t) J_1(2\sqrt{t}) t^{-3/2}]$.

Exercice 7.20 (★)

Mettre formellement le développement de l'image de la partie finie de $\frac{J_{-\lambda}(t)}{t}$ sous la forme du produit par s^λ par une série entière de la variable s^{-2} . En posant $s = u^{-1}$ et en utilisant la formule (5.10) de l'exemple 5.25, déterminer le développement en série entière de la fonction : $u \mapsto (1 + \sqrt{1 + u^2})^\lambda$.

Exercice 7.21 (★)

Déterminer les parties finies $\text{Pf}[\mathcal{U}(t(1-t))(1-t)^\alpha]$ et $\text{Pf}[\mathcal{U}(t(t-1))(t-1)^\alpha]$. En discutant suivant que α est entier ou non, calculer les dérivées de ces parties finies.

Exercice 7.22 (★)

Les parties finies $\text{Pf}[\mathcal{U}(t(1-t))(1-t)^\alpha]$ et $\text{Pf}[\mathcal{U}(t(t-1))(t-1)^\alpha]$ ayant été définies dans l'exercice précédent, dériver ces distributions par rapport à l'exposant α en supposant que $\alpha < 0$ et non entier.

Exercice 7.23 (★)

Définir les distributions $\text{Pf}\left(\frac{\mathcal{U}(t) \cos t}{t^n}\right)$ et $\text{Pf}\left(\frac{\exp t}{t^n}\right)$ pour $n = 1$ et $n = 2$. Donner les formules exprimant leurs dérivées.

Exercice 7.24 (★★)

On propose des applications de la proposition 4.12. En vérifiant les hypothèses de cette proposition dans l'exemple précisé ci-dessous, montrer, en utilisant les images inverses de $s^{n+\lambda}$, qu'au sens des distributions :

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \text{Pf} \left[\mathcal{U}(t) \frac{t^{-n-1-\lambda}}{\Gamma(-n-\lambda)} \right] = \delta^{(n)}$$

Exercice 7.25 (★★)

Cet exercice est encore basé sur la proposition 4.12. Montrer que dans l'espace des distributions, on a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda e^{-\lambda t} = 0$. Plus généralement, montrer que la limite lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ de $\frac{\lambda^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{dt^n} [\mathcal{U}(t) e^{-\lambda t} t^{n-1}]$ est égale à $\delta^{(n)}$.

Exercice 7.26 (★★)

A l'aide de $f(t) = \exp(-s^2)$, pour laquelle on sait que $\hat{f} = f$ et d'un peigne $\sum_0^{+\infty} n \delta_n$, vérifier la proposition 4.13.

Exercice 7.27 (★★★)

Trouver des primitives généralisées pour les fonctions suivantes :

$$\mathcal{U}(t-1) \frac{\ln t}{(t-1)^n}, \quad \mathcal{U}(t(t-1)) \frac{\ln t}{(1-t)^n}$$

Exercice 7.28 (★★)

On propose une autre méthode que celle de l'exemple 5.33 pour calculer l'image de Laplace de $\frac{\mathcal{U}(t)}{\sin t}$. On se base sur la primitive de $\frac{1}{\sin t}$ qui est la fonction localement sommable $f(t) = \ln |\cotan(t/2)|$, toutes deux 2π -périodiques, cette dernière étant même développable en série de Fourier au sens des fonctions.

1) Montrer que f est paire et que ses seuls coefficients non nuls sont les a_n pour n impair. Montrer, par une intégration par parties que, C étant le cercle unité de \mathbb{C} , on a :

$$n\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(nt)}{\sin t} dt = \frac{1}{i} \int_C \frac{z^{2n} - 1}{(z^2 - 1)z^n} dz$$

En déduire le résultat et conclure à

$$f(t) = -2 \sum_0^{+\infty} \frac{\sin((2k+1)t)}{2k+1} \quad [*]$$

2) Exprimer l'action $\langle [f]', \varphi \rangle$ sous la forme de la série de terme général :

$$U_n = \int_{n\pi}^{(n+1/2)\pi} f(t)\varphi'(t)dt + \int_{(n+1/2)\pi}^{(n+1)\pi} f(t)\varphi'(t)dt$$

Montrer que l'on a : $\int_0^{\pi/2} f(t)\varphi'(t)dt = -\ln 2\varphi(0) + \text{Pf} \int_0^{\pi/2} \frac{\varphi(t)}{\sin t} dt$. Détailler les calculs pour le terme général U_n et en déduire la formule :

$$[f]' = -\ln 2\delta - \text{Pf}\left(\frac{1}{\sin t}\right)$$

3) En multipliant par \mathcal{U} la relation (*) et en justifiant la commutation entre \mathcal{L} et la sommation d'une série, montrer que $\mathcal{L}(\mathcal{U}f)(s) = -2 \sum_0^{+\infty} \frac{s}{(2k+1)[s^2 + (2k+1)^2]}$. En déduire l'image de la dérivée et, par utilisation de la question 2), donner l'image de Laplace de la partie finie de $\frac{\mathcal{U}(t)}{\sin t}$.

Exercice 7.29 (*)

En utilisant éventuellement la formule 4.22 et en se servant de la méthode de l'exemple 4.18, montrer les formules suivantes où on a posé $\theta = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $\psi(t) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ et $r = \sqrt{x^2 + 1}$:

$$\mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\mathcal{U}(t)\frac{\sin t}{t^{n+1}}\right)\right) = \frac{(-1)^n r^n}{n!} \left[\theta \cos(n\theta) + [\ln r - \psi(n+1)] \sin(n\theta) \right]$$

$$\mathcal{L}\left(\text{Pf}\left(\mathcal{U}(t)\frac{\cos t}{t^{n+1}}\right)\right) = \frac{(-1)^n r^n}{n!} \left[\theta \sin(n\theta) - [\ln r - \psi(n+1)] \cos(n\theta) \right]$$

Exercice 7.30 (*)

Continuer les calculs de l'exemple 5.3, de détermination de l'image de Laplace de : $\mathcal{U}(t)\frac{\ln^n t}{t}$ pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 7.31 (*)

Calculer la convolée des parties finies de $\mathcal{U}(t)t^{-1}$ par $\mathcal{U}(t)t^{-2}$

Exercice 7.32 (*)

Déterminer la convolée : $\mathcal{U}(t) \star \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-n})$. On se servira de l'exemple 5.18.

Exercice 7.33 (★★)

On propose de calculer $T = \text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-1}) \star [g]$ avec $g(t) = \mathcal{U}(t)\frac{1}{t - ib}$.

a) Montrer que cette convolution est définie par :

$$\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \varphi(u) \int_{\varepsilon}^u \frac{dx}{x(u-x-ib)} du + \ln \varepsilon \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(u) du}{u-ib} \right]$$

b) Calculer de façon élémentaire $\int_{\varepsilon}^u \frac{dx}{(u-x-ib)}$ et en déduire la valeur de $\int_{\varepsilon}^u \frac{dx}{x(u-x-ib)}$.

Montrer que le terme en $\ln \varepsilon$ se supprime dans la formule et que l'on a :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(u)}{u-ib} \left[\ln(u\sqrt{u^2+b^2}) - \ln b + i \arctan\left(\frac{u}{b}\right) \right] du$$

c) En déduire la convolée de $\text{Pf}(\mathcal{U}(t)t^{-1})$ par $\frac{\mathcal{U}(t)}{t^2+b^2}$.

Exercice 7.34 (★)

Résoudre l'équation intégrale où λ est donné vérifiant $\lambda > 0$:

$$\int_0^t \text{ch}(t-u)y(u)du - t \frac{y(t)}{2\lambda+1} = \frac{t^\lambda}{2\lambda+1} I_\lambda(t)$$

Exercice 7.35 (★)

Résoudre l'équation intégral-différentielle générale

$$a \int_0^t y(u)du + by(t) + cy'(t) = f(t)$$

Exercice 7.36 (★)

Déterminer, soit avec \mathcal{L} , soit avec le calcul symbolique (Cf. §5.6.3) les inverses de convolution des fonctions ou distributions suivantes :

$$\mathcal{U}(t)[1+\cos(2t)-12\cos(3t)], \quad \delta+\mathcal{U}(t)(\cos t+e^t), \quad (\delta''+2\delta'+\delta) \star (\delta''+\mathcal{U}(t)(\text{sh}t+\sin t))$$

Exercice 7.37 (★)

Trouver toutes les solutions causales de l'équation différentielle : $t^2 y'' + 3t y' + y = \delta$

Exercice 7.38 (★)

Résoudre l'exemple 6.13 lorsque la poutre est encastree à l'extrémité $x = 0$ avec, en l'autre extrémité $x = L$, la condition : $y = y'' = 0$, la charge étant Px sur $[0, a[$ et $P(L-x)$ lorsque $a < x < L$.

Exercice 7.39 (★)

On modifie l'énoncé de l'exemple 6.15. A l'extérieur du cylindre, la température est nulle à l'instant $t = 0$. Sur la surface du cylindre, en contact avec ce milieu extérieur, la température est maintenue constante $u(a, t) = u_a$. La température en un point quelconque extérieur au cylindre ne dépend que de t et de la distance r du point à l'axe du cylindre. Le problème ne concerne donc que ces deux variables et l'équation de la chaleur, traduite en utilisant les coordonnées polaires, reste celle de l'exemple 6.15.

On impose également à la température de tendre vers 0 lorsque la distance au cylindre devient infinie ; autrement dit : $\forall t > 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} u(t, r) = 0$.

Montrer que la température g est donnée par :

$$g(r, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Delta} e^{st} \frac{K_0(r\sqrt{s/k})}{K_0(a\sqrt{s/k})} \frac{ds}{s}$$

On transformera cette intégrale en utilisant un lacet le long de la coupure identifiée à l'axe des réels négatifs et un arc de cercle. Trouver la limite de l'intégrale sur cet arc à l'aide de l'équivalence $\frac{K_0(\mu r)}{K_0(\mu a)} \sim \sqrt{\frac{a}{r}} e^{\mu(r-a)}$. Le calcul est ainsi ramené au calcul le long du lacet bordant la coupure. En se servant des formules $K_0(zi) = -\pi i(J_0(z) - iY_0(z))$ et $K_0(-zi) = \pi i(J_0(z) + iY_0(z))$, montrer que :

$$g(t, r) = g_0 - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{J_0(\mu a)Y_0(\mu r) - J_0(\mu r)Y_0(\mu a)}{J_0^2(\mu a) + Y_0^2(\mu a)} \frac{e^{-\rho t}}{\rho} d\rho$$

Exercice 7.40

La fonction H étant l'image de Laplace de h , montrer la relation suivante :

$$\mathcal{L}\left[\mathcal{U}(t)h(t^2)\right](s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} x^{-3/2} H\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(-\frac{s^2 x}{4}\right) dx$$

On calculera l'intégrale du second membre en exprimant $H(1/x)$ et en appliquant la formule de Fubini, l'intégrale restante se calculant par des procédés classiques.

Exercice 7.41

Problème où des ajustements interviennent en fonction de l'évolution d'une des fonctions inconnues.

On considère un circuit faisant intervenir deux courants, par exemple, i_1 et i_2 . Une première équation, dite principale, s'écrit :

$$i_1''(t) + \omega^2 i_1(t) - (\omega^2 + 1) i_2(t) = v(t) \quad (*)$$

Mais la deuxième équation dépend des valeurs atteintes par $i_1(t)$. On démarre à l'instant $t = 0$ avec les valeurs nulles pour i_1 et pour i_2 . Tant que $|i_1| \leq 1$, le courant i_2 reste constant, sinon, c'est-à-dire si, à un certain instant, $|i_1| > 1$, alors les deux courants vérifient, à partir de cet instant, une deuxième relation : $i_2' + i_1 = \text{sgn}(i_1)$, (**).

On suppose que $v(t)$ s'identifie à une impulsion : $C\delta$.

Puisque la valeur initiale de i_1 est nulle, l'équation à prendre en compte au démarrage est donc $i_1''(t) + \omega^2 i_1(t) = C\delta$ et on sait que la condition initiale $i_1(0+) = 0$ est cohérente (Cf. §6.1.1) avec la nature du second membre.

Etude de la première phase du phénomène

Trouver la transformée $I_1 = \mathcal{L}(i_1)$, puis la fonction i_1 dont on prouvera qu'elle démarre en croissant à partir de la valeur nulle.

Discuter la suite du problème selon que : $C \leq \omega$ ou non. Dans ce dernier cas, montrer que la fonction i_1 atteint la valeur $+1$ à l'instant : $t_1 = \arcsin\left(\frac{\omega}{C}\right)$. On en déduira qu'à cet instant, on passe à une deuxième phase du phénomène où les deux courants sont régis par le système :

$$i_1''(t) + \omega^2 i_1(t) - (\omega^2 + 1)i_2(t) = 0, \quad i_2' + i_1 = 1$$

Etudier cette deuxième phase du phénomène en utilisant les nouvelles conditions initiales : $i_1(t_1 + 0) = 1$, $i_1'(t_1) = C \cos(\omega t_1)$, $i_2(t_1) = 0$. En utilisant une translation, on peut prendre l'origine de cette phase en $t = 0$. A l'aide de la transformation \mathcal{L} , déterminer les deux courants en posant : $a_1 = C \cos(\omega t_1)$.

Pour continuer la démarche, on prendra les valeurs particulières : $C = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\omega = \frac{1}{2}$. Etudier la fin de cette deuxième phase en utilisant, par exemple des intersections de courbes. Amorcer alors la troisième phase du phénomène.

Exercice 7.42

Etude d'une ligne électrique de longueur finie.

La ligne est de longueur l et ses caractéristiques sont R et L . L'extrémité d'abscisse $x = l$ est reliée à la terre par l'intermédiaire d'une capacité C_l . Le courant et la charge initiaux étant nuls, on applique à la ligne une force électromotrice constante $v = V$ en $x = 0$ à l'instant $t=0$. on montre que l'équation E_2 du problème se transforme par \mathcal{L} en : $\frac{d^2}{dx^2}V(x, s) - (Ls + R)CsV = 0$. Cette équation a pour conditions aux bords aux points $x = 0$ et $x = l$ les relations $V(0, s) = \frac{V}{s}$ et $V(l, s) = \frac{I(l, s)}{C_l}$. On admet que cette dernière condition se traduit, par l'égalité qui relie les valeurs d'une fonction et de sa dérivée au point $x = l$, à savoir : $V(l, s) = -\frac{1}{(Ls + R)C_l} \frac{d}{dx}V(l, s)$.

On pose pour $s > 0$, $\sqrt{(Ls + R)C} = \omega$ et $K(s) = \frac{\omega}{Ls + R)C_l}$. Montrer que la solution de l'équation E_2 s'écrit :

$$V(x, s) = \frac{V}{s} \frac{-\text{sh}(\omega(x - l)) + K(s)\text{ch}(\omega(x - l))}{\text{sh}(\omega l) + K(s)\text{ch}(\omega l)}$$

Appliquer la formule d'inversion en utilisant au préalable un changement de variable sur s de type affine réel.

Annexes

Annexe 1 : Fonctions eulériennes

1. Définitions et premières propriétés

Par définition, la fonction eulérienne est définie dans le demi-plan Π_0 par une intégrale :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

On démontre, en effet, que l'intégrale converge si $\Re(z) > 0$.

L'intégrale de la dérivée est uniformément convergente sur les demi-droites $[a, +\infty[$ où $a > 0$. Il en résulte que Γ est holomorphe dans Π_0 , avec la première dérivée donnée par la formule : $\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \ln t dt$.

La fonction Γ vérifie la relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et comme $\Gamma(1) = 1$, cette fonction prolonge la fonction factorielle par la formule $\Gamma(n+1) = n!$.

2. Prolongement analytique

La relation fonctionnelle précédente permet de prouver que, étant donné z non entier négatif et de partie réelle négative ou nulle, et un entier n quelconque tel que $n + \Re(z) > 0$, la relation :

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)(z+n-2)\cdots(z+1)z}$$

définit une fonction (le second membre est en effet indépendant de n) analytique de z dans le champ complexe privé de tous les réels entiers négatifs ou nuls. Ces points sont des pôles simples.

3. Fonction \mathcal{B}

Définition

Cette fonction est définie dans $\Pi_0 \times \Pi_0$ par :

$$(z, u) \mapsto \mathcal{B}(z, u) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{u-1} dt$$

ou encore

$$\mathcal{B}(z, u) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos(\theta))^{2z-1} (\sin(\theta))^{2u-1} d\theta$$

Relation avec Γ

On prouve que :

$$\mathcal{B}(z, u) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(u)}{\Gamma(z+u)}$$

En particulier, en utilisant un changement de variable et, via un contour convenable, le théorème des résidus, on obtient la formule dite «**des compléments**» :

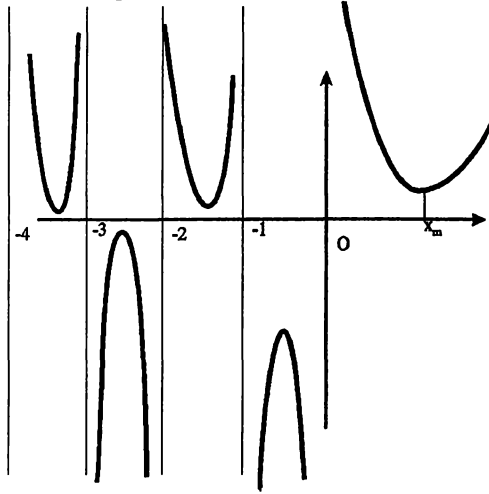
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \mathcal{B}(z, 1-z) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{z-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

4. Etude de la fonction Γ pour $z = x$ réel

Pour $x > 0$, la dérivée seconde vérifie : $\Gamma''(x) > 0$, donc la fonction est convexe. On montre que son minimum est obtenu en un point x_m tel que $1 < x_m < 2$. Au voisinage de $x = 0$, par la formule des compléments, on a l'équivalence : $\Gamma(x) \sim \frac{1}{x}$. Au voisinage de $+\infty$, le comportement est donné par la formule de Stirling :

$$\Gamma(x) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$$

Lorsque $x < 0$, la formule de prolongement prouve que, dans $] -n - 1, -n[$ où $n \in \mathbb{N}$, la fonction reste du signe de $(-1)^{n+1}$. On prouve également que $(\Gamma''\Gamma - \Gamma'^2)(x) > 0$, ce qui revient à dire que dans chaque intervalle $] -n - 1, -n[$, la fonction est logarithmiquement convexe. Il en résulte que le produit $\Gamma''\Gamma$ est positif, donc que la fonction est convexe si la fonction est positive et concave si la fonction est négative. Ces propriétés sont résumées sur le graphe ci-après.



5. Formules utiles

En utilisant la relation entre \mathcal{B} et Γ , on évalue, pour $\Re(z) > 0$, la dérivée logarithmique : $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = -\gamma + \int_0^1 \frac{1 - (1-t)^{z-1}}{t} dt$.

On en tire en particulier : $\Gamma'(1) = -\gamma$.

Formule de duplication : $\Gamma(2x) = \frac{2^{2x-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(x) \Gamma(x + \frac{1}{2})$.

Autres formules : On a : $\frac{1}{\Gamma(z)} = z \exp(\gamma z) \prod_1^{+\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right) \exp\left(-\frac{z}{n}\right) \right]$ d'où, par deux dérivations successives :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad -z \notin \mathbb{N} \Rightarrow \frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma} \right) (z) = \sum_0^{+\infty} \frac{1}{(n+z)^2}$$

On a aussi, la formule réelle : $\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \cdots (x+n)}$.

Annexe 2 : Fonctions de Bessel

1. Equations différentielles de Bessel

Elles s'écrivent :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (E_\nu)$$

Parmi les solutions, on distinguent celles qui sont le produit de x^ν par des séries entières. On trouve ainsi les fonctions J_ν , dites «**fonctions de Bessel de première espèce**», équivalentes à $(x/2)^\nu$ en $x = 0$, définies par :

$$J_\nu(x) = \sum_0^{+\infty} \frac{(-1)^n (x/2)^{2n+\nu}}{n! \Gamma(n + \nu + 1)}$$

Le rayon de convergence de la série entière est infini ; les fonctions de Bessel d'indices entiers sont donc des fonctions entières. Dans le cas où ν est non entier, ces fonctions ont pour domaines d'holomorphie ceux des branches de x^ν .

Solutions fondamentales

Si ν est non entier, un système de solutions fondamentales pour (E_ν) est le couple $\{J_\nu, J_{-\nu}\}$. Un autre système est le couple $\{J_\nu, Y_\nu\}$ où Y_ν , notée aussi N_ν , est la «**fonction de Bessel de deuxième espèce**», définie par ;

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}$$

On peut également, en utilisant les fonctions de Bessel «**de troisième espèce**», dites aussi de Hankel, définies par :

$$H_\nu^{(1)} = J_\nu + iY_\nu, \quad H_\nu^{(2)} = J_\nu - iY_\nu,$$

constituer un troisième couple de solutions fondamentales : $\{H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}\}$.

Dans le cas de $\nu = n$ entier, les couples de solutions précédentes ne sont plus des bases, mais un passage à la limite fournit la base $\{J_n, Y_n\}$ avec la définition : $Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x)$. On en déduit l'autre base $\{H_n^{(1)}, H_n^{(2)}\}$.

2. Fonctions de Bessel d'argument purement imaginaire

En utilisant la variable ix , on obtient l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0 \quad (E^*)$$

On déduit de ce qui précède, d'abord la solution I_ν , dite fonction de Bessel «**modifiée de première espèce**», définie par :

$$I_\nu(z) = \sum_0^{+\infty} \frac{(z/2)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}$$

Compte tenu des définitions des puissances à exposants non entiers, les relations entre I_ν et J_ν s'écrivent :

$$\begin{aligned} I_\nu(z) &= \exp(-\nu i\pi/2) J_\nu(z \exp(\nu i\pi/2)) & (-\pi < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}) \\ I_\nu(z) &= \exp(\nu i\pi/2) J_\nu(z \exp(-\nu i\pi/2)) & (\frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \pi) \end{aligned}$$

On définit également, dans le cas où ν est non entier, les fonctions de Bessel «**modifiées de deuxième espèce**» K_ν définies par :

$$K_\nu(z) = \frac{\pi I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{2 \sin \nu\pi}$$

Ces fonctions deviennent, dans le cas d'un indice entier n :

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} \frac{(-1)^n I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{2 \nu - n} = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z)$$

Les fonctions de Hankel :

$$H_\nu^{(1)}(iz) = J_\nu(iz) + iY_\nu(iz), \quad H_\nu^{(2)}(iz) = J_\nu(iz) - iY_\nu(iz),$$

sont reliées à ces fonctions par :

$$K_\nu(z) = i\pi/2 \exp(i\nu\pi/2) H_\nu^{(1)}(iz)$$

En passant aux arguments imaginaires, les diverses bases de solutions de E_ν deviennent des bases de solutions pour E_ν^* . Les wronskiens associés aux bases citées fournissent les relations :

$$\begin{aligned} J_n(z)Y_n'(z) - Y_n(z)J_n'(z) &= \frac{2}{z} \\ I_n(z)K_n'(z) - K_n(z)I_n'(z) &= -\frac{1}{z} \end{aligned}$$

3. Relations de récurrence

$$\begin{aligned} zJ_n'(z) &= nJ_n(z) - zJ_{n+1}(z) \\ zJ_n'(z) &= -nJ_n(z) + zJ_{n-1}(z) \\ zI_n'(z) &= nI_n(z) - zI_{n+1}(z) \\ zI_n'(z) &= -nI_n(z) + zI_{n-1}(z) \\ zK_n'(z) &= nK_n(z) - zK_{n+1}(z) \\ zK_n'(z) &= -nK_n(z) + zK_{n-1}(z) \\ I_n(z)K_{n+1}(z) &= -K_n(z)I_{n+1}(z) + \frac{1}{z} \end{aligned}$$

4. Représentations intégrales

Dans le cas où $\Re(\nu + 1/2) > 0$, on a :

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 1/2)} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{-1/2} e^{itx} dt, \\ J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 1/2)} \int_0^\pi e^{ix \cos \theta} [\sin \theta]^{2\nu} d\theta \end{aligned}$$

Pour n entier, J_n apparaît comme un coefficient de Fourier :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin \theta} e^{-in\theta} d\theta$$

Il en résulte le développement en série de Fourier : $e^{ix \sin \theta} = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n(x) e^{in\theta}$.

5. Représentations par des séries

$$\frac{\pi}{2} Y_0(z) = J_0(z) \left[\log\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \right] + \left(\frac{z}{2}\right)^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots$$

$$\frac{\pi}{2} Y_n(z) = J_n(z) \left[\log\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \right] - \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{(z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[\sum_{r=1}^{r=k+n} \frac{1}{r} + \sum_{r=1}^{r=k} \frac{1}{r} \right] - \sum_{k=0}^{k=n-1} (z/2)^{2k-n} \frac{(n-k-1)!}{k!} \right]$$

$$K_0(z) = -I_0(z) \left[\log\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \right] + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{(z/2)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{(z/2)^6}{(3!)^2} + \dots$$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} I_n(z) \left[\log\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma \right] + \frac{1}{2} (-1)^n \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(z/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[\sum_{r=1}^{r=k+n} \frac{1}{r} + \sum_{r=1}^{r=k} \frac{1}{r} \right] + \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^k (z/2)^{2k-n} \frac{(n-k-1)!}{k!} \right]$$

6. Comportements asymptotiques

Les fonctions U et V ayant des développements asymptotiques commençant par $1 + \mp \frac{(4n^2 - 1)}{8z}$, on a : $|\arg(z)| < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow K_n(z) = \frac{\sqrt{\pi} e^{-z}}{\sqrt{2z}} V(z)$ et, d'autre part :

$$\frac{\pi}{2} < \arg(z) < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow I_n(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} U(z) + \frac{e^{-z+(n+1/2)i\pi}}{\sqrt{2\pi z}} V(z)$$

Dans le cas où $-\frac{3\pi}{2} < \arg(z) < \frac{\pi}{2}$, on remplace, dans la deuxième exponentielle, l'exposant $-z + (n + 1/2)i\pi$ par $-z - (n + 1/2)i\pi$.

Bibliographie

- [1] L. Berg. *Asymptotische Auffassung der Operatorenrechnung* Studia math. 21. 1962.
- [2] a) H.S Carslaw. *Operationnal Methods in Math Applied*. Oxford Univ Press New York 1941.
b) H.S Carslaw et J.C.Jaeger. *Operational Methods in Applied Mathematics*. Dover Publications, Inc. New York 1989.
- [3] a) S. Colombo. *Utilisation du Calcul symbolique*.
b) S.Colombo et P.Humbert. *Calcul symbolique et appl à la phys math*. Mém des Sc Math. 1947.
c) S. Colombo et J. Lavoine. *Transformations de Laplace et de Mellin*. Mémorial des Sciences Mathématiques. Gauthier Villars. 1972.
- [4] R. Courant et D. Hilbert *Methods of Math Physics* . New York. 1953.
- [5] a) F. Demengel et G. Demengel. *Mesures et distributions*.Ellipses. 2000.
b) G. Demengel, P. Bénichou, N.Boy, J.P. Pouget. *Distributions*. Ellipses. 1996.
- [6] V. Ditkine et A. Proudnikov. *Calcul Opérationnel*. Editions MIR Moscou. 1979.
- [7] G. Doetsch. *Introduction à l'utilisation pratique de la Transformation de Laplace (Traduction de M. Parodi)*. Gauthier-Villars. Paris. 1959.
- [8] A. Erdelyi. *Operational calculus and generalized functions*. Holt, Reinhart and Wiston.
- [9] A. Friedman. *Generalized Functions and partial diff equations*. Princeton-Hall. 1963.
- [10] H.G. Garnir. *Sur la transformation de Laplace des distributions*. CRAS, t 234. 1952.
- [11] J. Gilly. *Parties finies d'intégrales et Transformation de Laplace*. Rev scientifique 1945, fasc 5.
- [12] J.C. Jaeger. *Applications of distributions in math physics*. Studies in appl Math. 1969.
- [13] P. Krée. *Intégration et théorie de la mesure*. Mathématiques 2ième cycle. Ellipses. 1997.
- [14] a) J. Lavoine. *Calcul symbolique*. CNRS. 1959.
b) J. Lavoine. *Sur les transformations de Laplace de certaines distributions*. CRAS, t.242.
c) J. Lavoine. *Sur le passage de l'image de g à celle de $g(at)$, a complexe*. CRAS, t 244. 1957.
- [15] a) N.W. Mc Lachlan. *Modern Operational Calculus*. Dover Publications, Inc. New York, 1954.
b) N.W. Mc Lachlan. *Complex variable and Operational Calculus*. Cambridge, University Press 1939.
- [16] Mikusinski. *The of operators*. Pergaman Press, Oxford .1959.
- [17] O.P.Misra and J.L. Lavoine. *Transform Analysis of Generalized Functions*. Math Studies N 119 North Holland. 1988
- [18] G Petiau. *La théorie des fonctions de Bessel en vue de ses applications*. CNRS. 1955.
- [19] Roddier. *Distributions et transformation de Fourier*. Mac Graw Hill. 1991.
- [20] J.P. Sarmant, H.Gié, S.Olivier, C.More. *Physique Spé. MP*,MP et PT*,PT*. Editions TEC et DOC, 2000.
- [21] a)L. Schwartz. *Théorie des distributions. 1*. Hermann. 1966
b)L. Schwartz.*Math pour les sciences Physiques*. Hermann. 1966.
c) L. Schwartz.*Séminaire de l'Université de Lund*.Tome supplémentaire el dédié à Marcel Riesz. 1952.
- [22] M. Smith. *Laplace transform theory*. Van Nostrand-Reinholt. 1966.
- [23] Sobolev. *Applications of fonctionnal analysis in maths physics*. Amer Math Soc. Providence VII. 1963.
- [24] I. Stakgold. *The applic of Generalized function*. State Univ . 1966.
- [25] E.C. Titchmarsh. *Fourier Integrals*. Oxford at the Clarendon Press. Ed 1971.
- [26] Vladimirov V.S. *Generalized funct in math phys*. Mir Publi Moscou.1969.
- [27] Vo KhacKhoan. *Distributions. analyse de Fourier ? opérateurs aux DP*. Vuibert. 1977.
- [28] Widder. *An Introduction to Transform Theory*. Academic Press New York and London. 1971.
- [29] G. Watson. *A treatise on the theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press. 1945.
- [30] A.Yger. *Analyse complexe et Distributions*. Mathématiques 2 ième cycle. Ellipses. 2001.
- [31] A.H. Zemanian. *Distributions theory and transforms analysis*. Mc Graw-Hill Book Company. 1965

Conçu en quelque sorte comme la suite naturelle de l'ouvrage intitulé *Mesures et distributions. Théorie et illustration par les exemples*, ce livre donne une présentation théorique de la transformation de Laplace unilatérale des fonctions et des distributions (chapitres 1 et 4), consolidée par l'étude de nombreux exemples utilisant des méthodes diverses (chapitres 2 et 5). Le chapitre 6 donne des exemples de résolution de problèmes de Physique dans différents domaines (vibrations mécaniques, circuits électriques, signal, diffusion de la chaleur, équations de Maxwell dans des cas particuliers). Les autres chapitres proposent des exercices. Bien entendu, il est utilisable par la plupart des étudiants engagés dans une maîtrise scientifique. Outre la transformation en elle-même, qui constitue un des exemples les plus fructueux, après la transformation de Fourier, de correspondance entre fonctions ou entre distributions et fonctions, le livre fournit, pour le calcul des images, un grand nombre d'occasions de manipuler les procédés de l'analyse classique des fonctions et des distributions.

La construction de la transformation, la mise en place de l'inversion de la transformation, l'étude des comportements au voisinage de l'infini, l'utilisation de la théorie des résidus, sont beaucoup de notions qui peuvent présenter de l'intérêt pour les étudiants en Mathématiques. Les diverses méthodes utilisées dans les recherches d'images de Laplace et dans les résolutions d'équations fonctionnelles peuvent leur apparaître comme de bonnes illustrations des cours d'analyse des fonctions et de calcul différentiel, orientées vers les déterminations explicites de solutions.

Aux étudiants des maîtrises de Physique ou de Physique appliquée, notamment celles qui sont tournées vers le traitement du signal ou vers l'automatisme, l'ouvrage apporte, outre les justifications théoriques indispensables des fonctions spéciales et des exemples, dans des domaines variés de la Physique, des problèmes de physique régis par des équations différentielles ou des équations aux dérivées partielles et par des conditions limites interprétables en termes concrets.

Gilbert Demengel est ancien élève de l'ENS de Cachan, professeur agrégé de l'Université, ex-maître de conférences à l'ENS de Cachan, inspecteur général honoraire de l'Éducation nationale en Mathématiques.

Illustration de couverture : Portrait de P.S. Laplace



9 782729 811440