Cours d'Analyse réelle

Ibrahima TOURE

Décembre 2020

50H $\times \equiv$ 2H

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions d'une variable réelle

1.1 Limite et continuité

Définition 1.1.1. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.*
On dit que f

- *minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A$ on a $f(x) =\geq m$.*
- *majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A$ on a $f(x) \leq M$.*
- *bornée si f est majorée et minorée.*

Si f est majorée, on appelle borne supérieure de f le nombre réel

$$Sup_{x \in A} f = Sup \{f(x) | x \in A\}.$$

On définit de même la borne inférieure.
On dit que f admet un maximum en $a \in A$ si $f(a)$ est le maximum de la partie $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$.
On dit que f admet un maximum local en $a \in A$ s'il existe un intervalle ouvert I contenant tel que $f(a)$ soit le maximum de $f(A \cap I)$.
On définit de même la notion de minimum local.
Un extremum (local) est un maximum (local) ou un minimum (local).

Ces définitions ne sont que des généralisations des mêmes notions vues dans le cas des suites.

Remarque 1.1.2. *Une fonction bornée possède toujours une borne supérieure et une borne inférieure mais pas forcément un maximum et un minimum.*

Exemple 1.1.3.

1. *Soit $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors f est bornée. On a $Sup_{]0,1[} f = 1$, mais $max_{]0,1[} f$ n'existe pas.*
   On a $inf_{]0,1[} f = o$, mais $min_{]0,1[} f$ n'existe.

2. *Une fonction peut admettre un maximum en plusieurs points. Ainsi $f(x) = sinx$ admet un maximum en les points $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.*

Dans la suite on prendra comme domaine de définition A l'un des intervalles de la forme

- $A =]x, y[, [x, y[,]x, y]$ ou $[x, y]$ avec $x < y$. On notera $\overline{A} = [x, y]$.
- $A =]-\infty, x]$ ou $]-\infty, x[$. On notera alors $\overline{A} =]-\infty, x]$
- $A = [x, +\infty[$ ou $]x, +\infty[$. On notera $\overline{A} = [x, +\infty[$.
- $A =]-\infty, +\infty[$ alors $\overline{A} =]-\infty, +\infty[$.

On dit que $\overline{A}$ est l'adhérence de A.

On généralise la notion de limite d'une suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$ à la limite d'une fonction $f(x)$ quand x tend vers a.

Définition 1.1.4. ***(Limite d'une suite)***
Soit A un intervalle et $\overline{A}$ son adhérence. Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \overline{A}$.

1. *On dit que f admet l comme limite en a si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \textit{tel que} \quad \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

   On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

2. *On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si*

$$\forall K \in \mathbb{R}, \exists \alpha > 0 \ \textit{tel que} \ \forall x \in A, |x - \alpha| < \alpha \Longrightarrow f(x) > K.$$

   On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

3. *On dit que f admet l comme limite quand x tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists K \ \textit{tel que} \ \forall x \in A, x > K \Longrightarrow |f(x) - l| < \epsilon.$$

   On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

4. *On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si*

$$\forall K, \exists M \ \textit{tel que} \ \forall x \in A, x > M \Longrightarrow f(x) > K.$$

   On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On définit de même $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Exemple 1.1.5. 1. *Soient* $A =]0,1[, a = 1 \in \overline{A}$ *et* $f(x) = x$. *Alors* $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$.

2. *Soient* $A =]0,1[, a = 0 \in \overline{A}$ *et* $f(x) = \frac{sinx}{x}$. *Alors* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.
3. *Soient* $A =]0,1[, a = 0 \in \overline{A}$ *et* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Alors* $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$.
4. *Soient* $A =]-\infty, +\infty[$ *et* $f(x) = e^{-x}$. *Alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
5. *Soient* $A =]-\infty, +\infty[$ *et* $f(x) = x$. *Alors* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Propriété 1.1.6. *Si* f *admet une limite* a, *cette limite est unique.*

Démonstration. La démonstration est identique à celle donnée pour les suites. On procède par l'absurde en supposant que f admet deux limites l et l' avec $l < l'$ en a. On prend $\epsilon = \frac{l'-l}{2}$. Il existe alors $\alpha > 0$ tel que $|x - a|$ implique que $|f(x) - l| < \epsilon$ et $\alpha' > 0$ tel que $|x - a| < \alpha'$ implique que $|f(x) - l'| < \epsilon$. On a $l' - l = |l' - f(x) + f(x) - l| \leq |l' - f(x)| + |f(x) - l|$ par l'inégalité triangulaire. Si $|x - a| < min(\alpha, \alpha')$, on déduit que $l' - l << 2\frac{l'-l}{2}$, ce qui est absurde.

$\square$

Définition 1.1.7. ***(Continuité)***
Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $a \in A$. *On dit que* f *est continue en* a *si* f *admet* $f(a)$ *comme limite en* a. *Autrement dit*

$$\forall \epsilon > 0, \exists a > 0 \ \textit{tel que} \ \ \forall x \in A, |x - a| < \alpha \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

On dit que f *est continue sur* A *si* f *est continue en tout point de* A.

Exemple 1.1.8. 1. *Les fonctions exponentielles et trigonométriques sont continues sur leurs domaines de définitions.*

2. *Soit* $E(x)$ *le plus grand entier supérieur ou égale à* x. *C'est la partie entière de* x. *O montre que la fonction* $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Définition 1.1.9. ***(Prolongement par continuité)***
Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et* $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $A \subset B$. *On dit que* g *est un prolongement par continuité de* f *si*

1. g *est le prolongement de* f*(c'est-à-dire* $g(x) = f(x)$ *pour tout* $x \in A$.*)*
2. g *est continue en tout point de* B.

Exemple 1.1.10. *Prenons* $A =]0,1]$ *et* $B = [0,1]$. *Soit* $f(x) = \frac{sinx}{x}$. *Alors la fonction* g *définie par*

$$g(x) = \frac{sinx}{x} \ \ si \ x \neq 0 \ \ et \ g(x) = 1 \ \ si \ x = 0$$

est un prolongement par continuité de f.

1.2 Propriétés de la limite d'une fonction

Les propriétés des limites de suites de fonctions se généralisent facilement au cas des fonctions.

Propriété 1.2.1. *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions.*

1. *Si f admet une limite l en $a \in \mathbb{R}$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que f soit bornée sur $A \cap I$. Si f admet une limite l lorsque x tend vers $+\infty$ alors il existe un intervalle $I =]b, +\infty[$ tel que f soit bornée sur $A \cap I$.*
2. *Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et si g est bornée sur un intervalle ouvert contenant a alors $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.*
3. *Si f et g ont une limite dans $\mathbb{R}$ quand x tend vers a, alors*
$$(\lim_{x \to a} f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$
et
$$(\lim_{x \to a} f(x)g(x)) = (\lim_{x \to a} f(x))(\lim_{x \to a} g(x)).$$
4. *Si f ne s'annule pas sur A et*

a) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, alors
$$Si \lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$$

b) Si $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$, alors
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

c) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ et si $f(x) \geq 0$ sur un intervalle ouvert contenant a, alors
$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

5. *Si $f(x) \leq g(x)$ sur un intervalle ouvert contenant a, alors*
$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$
6. ***Théorème des gendarmes***
Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ sur un intervalle ouvert contenant a et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.

Démonstration. Les démonstrations sont les mêmes dans le cas des suites. Démontrons par exemple le théorème des gendarmes. Fixons $\epsilon > 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique $|f(x) - l| < \epsilon$, d'où $l - \epsilon < f(x)$. De même il existe $\alpha' > 0$ tel que $|x - \alpha'| < \alpha'$ implique $|h(x) - l|\epsilon$, d'où $h(x) < l + \epsilon$. Donc si $|x - a| < min(\alpha, \alpha')$, alors $l - \epsilon < g(x) < l + \epsilon$. □

Propriété 1.2.2. ***(Critère séquentiel de continuité)***
Soient une fonction $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *f est continue en a.*
2. *Pour toute suite u_n à valeurs dans A telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$, on a $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.*

Démonstration. Supposons que f est continue en a. Fixons $\epsilon > 0$. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que $|x - a| < \alpha$ implique $|f(x) < -f(a)| < \epsilon$. Comme (u_n) tend vers a, il existe un entier N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - a| < \alpha$. Mais alors $|f(u_n) - f(a)| < \epsilon$. Donc la suite $(f(u_n))$ a pour limite $f(a)$.
Pour montrer la réciproque nous allons prouver la contraposée : en supposant que f n'est pas continue en a, il s'agit de trouver une suite (u_n) qui converge vers a et telle que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) \neq f(a)$.
Dire que f n'est pas continue en a est la négation de $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire

$$\text{non}\ (\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A \cap]a - \alpha, a + \alpha[|\ f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

qui équivaut à

$$(*) \qquad \exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in A \cap]a - \alpha, a + \alpha[\quad |f(x) - f(a)| \geq \epsilon.$$

On a le droit de choisir α. Prenons par exemple $\alpha = \frac{1}{2^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$. La relation $(*)$ implique alors qu'il existe $u_n \in A \cap]a - \alpha, a + \alpha[$ tel que $|f(u_n) - f(a)| \geq \epsilon$. Alors $|u_n - a| < \frac{1}{2^n}$, donc (u_n) tend vers a et comme $|f(u_n) - f(a)| \geq \epsilon$ la suite $(f(u_n))$ ne converge pas vers $f(a)$.

□

1.3 Propriétés des fonctions continues

Théorème 1.3.1. ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \leq f(b)$. Alors pour tout $y \in [f(a), f(b)]$ il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Démonstration. On va définir par récurrence deux suites (a_n) et (b_n). On commence par $a_0 = a$ et $b_0 = b$. supposons (a_n) et (b_n) construits.
Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y$, on pose

$$a_{n+1} = a_n \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$, on pose

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = b_n.$$

On va montrer que pour tout n on a

$$(*) \qquad\qquad f(a_n) \leq y \leq f(b_n).$$

Au rang $n = 0$ la relation (*) équivaut à $f(a) \leq y \leq f(b)$, qui est l'hypothèse.
supposons que (*) est vraie au rang n. On distingue deux cas.

- si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq y$ alors

$$f(a_{n+1}) = f(a_n) \leq y \leq f(\frac{a_n + b_n}{2}) = f(b_{n+1}).$$

- Si $f(\frac{a_n+b_n}{2}) < y$ alors

$$f(a_{n+1}) = f(\frac{a_n + b_n}{2}) < y \leq f(b_n) = f(b_{n+1}).$$

D'où (*) est vraie au rang $n + 1$.

Par définition de a_n et de b_n on voit que $a_n \leq b_n$, que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante. Enfin on a

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = ... = \frac{b - a}{2^{n+1}}.$$

Donc la suite $(b_n - a_n)$ tend vers 0.
On a donc deux suites adjacentes. Ainsi elles convergent vers la même limite.
Appelons x cette limite.
Vérifions que $x \in [a, b]$. En effet on a $a = a_0 \leq a_n \leq x \leq b_n \ni_0 = b$.
Vérifions que $f(x) = y$. Comme ff est continue sur $[a, b]$, elle est continue en x et donc $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(x)$ et $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x)$. Mais par la propriété (*) on a $f(a_n) \leq y \leq f(b_n)$. Finalement par le théorème des gendarmes on obtient $f(x) = y$.

□

Théorème 1.3.2. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur un segment. Alors f a un minimum et un maximum sur $[a,b]$.*

Démonstration. il suffit de montrer le résultat pour le maximum (pour le minimum, on prend $-f$ à la place de f).
Montrons d'abord par l'absurde que f est majorée. Supposons que f n'est pas majorée. Cela implique que pour tout entier n il existe un réel $x \in [a,b]$ tel que $f(x) > n$. Appelons x_n cet élément. on a donc une suite (x_n) à valeurs dans le segment $[a,b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite convergente (y_n) de la suite (x_n). On obtient ainsi une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que $y_n = x_{\varphi(n)}$. Donc

$$f(y_n) = f(x_{\varphi(n)}) > \varphi(n) \geq n,$$

ce qui implique que la suite $f((y_n))$ tend vers $+\infty$.
Notons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Comme f est continue on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = f(l)$, ce qui contredit $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = +\infty$. Donc f est majorée et $Sup_{[a,b]}f$ existe.
Soit M cette borne supérieure. Il suffit de montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $f(x) = M$. Soit n un entier. Par définition de la borne supérieure, $M - \frac{1}{2^n}$ n'est pas un majorant des valeurs de f, donc il existe $x_n \in [a,b]$ tel que

$$M - \frac{1}{2^n} < f(x_n) \leq M.$$

on a donc une suite (x_n) dans $[a,b]$. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite convergente (y_n) de (x_n) avec $y_n = x_{\varphi(n)}$, où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Soit x la limite de la suite (y_n). On a les égalités

$$M - \frac{1}{2^n} \leq M - \frac{1}{2^{\varphi(n)}} < f(y_n) \leq M.$$

Par le théorème des gendarmes on conclut que la suite $(f(y_n))$ tend vers M. Comme f est continue, on aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = f(x)$. Finalement on obtient $f(x) = M$. □

1.4 Fonctions dérivables

Soient : $A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in A$.

Définition 1.4.1. *On dit que f est dérivable en a si la limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe dans ($\mathbb{R}$). On note $f'(a)$ cette limite.

Exemple 1.4.2. *1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. On vérifie facilement que f est continue sur $\mathbb{R}$. On a*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

Donc f n'est pas dérivable en 0. Par contre f est dérivable en tout point $a \neq 0$.

2. Les fonctions classiques

- *trigonométriques : $sin, cos, tan, ...$*
- *polynomiales : $ax^2 + bx + c, ...$*
- *exponentielles : e^x*
- *rationnelles : $\frac{ax+b}{cx+d}, ...$*

Interprétation géométrique.

La dérivée $f'(a)$ de f en a donne la pente de la tangente au point $(a, f(a))$ au graphe de f.

Propriété 1.4.3. *Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in A$. Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Soit $l = \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Comme la fonctions x est continue en a, on a $\lim\limits_{x\to x}(x-a) = 0$. D'où en utilisant la propriété des limites par rapport au produit,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} (f(x) - f(a)) &= \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right] \\ &= \lim_{x\to a} \left[\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right] \lim_{x\to a}(x - a) = l.0 = 0\end{aligned}$$

Donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ et f est continue en a.

□

Remarque 1.4.4. *1. la réciproque n'est pas toujours vraie, comme le prouve l'exemple $f(x) = |x|$ en $x = 0$.*

2. Il existe de même des fonctions continues qui ne sont dérivables en aucun point de leur ensemble de définition.

Propriété 1.4.5. *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local en a. Si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Supposons que l'extremum est un maximum (le cas du minimum se traite en remplaçant f par $-f$). Alors par définition il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que pour tout $x \in I \cap A$ on a $f(x) \leq f(a)$.
Si $x > a$, on a $x - a > 0$ et $f(x) - f(a) \leq 0$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ et par passage à la limite on obtient $f'(a) \leq 0$.
Si $x < a$, on a $x - a < 0$ et $f(x) - f(a) \leq 0$, donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ et par passage à la limite on obtient $f'(a) \geq 0$.
En combinant les deux inégalités on obtient $f'(a) = 0$.

□

Remarque 1.4.6. *La réciproque n'est pas toujours vraie. si $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais 0 n'est pas un extremum local.*

Définition 1.4.7. ***Fonction dérivée***
Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en tout point de A, alors f est dérivable sur A et on définit sa fonction dérivée f' par

$$f' : A \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f'(x).$$

Propriété 1.4.8.

1. *Si f et g sont dérivables sur A, alors $f + g$ et fg sont dérivables sur A et*

$$(f + g)' = f' + g' \quad et \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

2. *Si f ne s'annule pas sur A, alors $\frac{1}{f}$ est dérivable sur A et*

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

Démonstration.

1. Le cas de l'addition résulte facilement du résultat concernant l'addition des limites.
Pour le produit, on écrit

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = (f(x) - g(a))\, g(x) + f(a)\, (g(x) - g(a))\, .$$

On divise par $(x - a)$ et on passe à la limite quand x tend vers a ce qui donne le résultat grâce aux propriétés des limites de produit et de somme. De plus on sait que $g(x)$ tend vers $g(a)$ par la continuité de g.

2. Pour l'inverse, on écrit :

$$\left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}\right)\frac{1}{x-a} = -\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\frac{1}{f(x)}\frac{1}{f(a)}$$

qui a un sens pour $|x-a|$ assez petit.
Quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers $f(a)$, car f est continue. On obtient alors l formule désirée.

□

Propriété 1.4.9. ***Dérivée de la composée de deux fonctions***
Soient $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(A) \subset B$ (pour tout $x \in A$ on a $f(x) \in B$). Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a) \in B$, alors la composée $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

Démonstration. Soit $a \in A$. Par définition de la dérivée, on a

$$(g \circ f)'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a}.$$

On suppose pour simplifier qu'il existe un intervalle I contenant a tel que $f(x) \neq f(a)$ pour tout $x \in (I \cap A) \setminus \{a\}$. On peut écrire alors :

$$\begin{aligned}\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)}.\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)}.\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\end{aligned}$$

Le premier facteur est la composée des fonctions

$$x \mapsto f(x) \quad \text{et} \quad y \mapsto \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)}.$$

Comme f est continue, $f(x)$ tend vers $f(a)$. Comme g est dérivable en $f(a)$, on a

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{g(y) - g(f(a))}{y - f(a)} = g'(f(a)).$$

En composant, on trouve

$$\lim_{x \to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x)-f(a)} = g'(f(a)).$$

D'où la formule de la proposition. □

1.5 Propriétés des fonctions dérivables

Théorème 1.5.1. ***(Théorème de Rolle)***
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe xc $\in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Comme f est continue sur un segment, f admet un maximum et un minimum. Soit $M = max_{[a,b]} f$ et $min_{[a,b]} f$.
Si $m \neq f(a)$ ou $M \neq f(a)$ il existe $c \in]a,b[$ tel que f possède un extremum en c. On sait alors que $f'(c) = 0$.
Sinon on a $m = f(a) = f(b)$ et $M = f(a) = f(b)$. Donc f est constante sur $[a,b]$ et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a,b[$. □

Théorème 1.5.2. ***(Théorème des accroissements finis)***
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. On introduit la fonction auxiliaire suivante

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. La fonction φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. Comme

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

on obtient bien la formule annoncée en posant $x = c$.

□

Propriété 1.5.3. *Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur A. A1ors*

1. *f est constante si et seulement si $f'(x) =$ pour tout $x \in A$.*
2. *f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout $x \in A$.*
3. *Si $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) pour tout $x \in A$, alors f est strictement croissante (resp. décroissante).*

Démonstration. 1. Si f est constante, sa dérivée est nulle. Réciproquement, soient $a, b \in A$ avec $a < b$. On applique le théorème des accroissements finis à la fonction f sur $[a,b]$: il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Comme f' est nulle, on obtient $f(b) = f(a)$. Par conséquent f est constante.

2. Si f est croissante, on a $f'(x) \geq f(a)$ pour $x > a$ et alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. De même si $x < a$, on a $f(x) \leq f(a)$ et $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$. Comme les inégalités passent à la limite, en faisant tendre x vers a on voit que $f'(a) \geq 0$.
   Réciproquement, on procède comme dans la première partie : on obtient $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$. Donc $f(b)-f(a) \geq 0$ si $b > a$ et $f(b)-f(a) \leq 0$ si $b < a$. Donc f est croissante. On traite le cas f décroissante en remplaçant f par $-f$.
3. Pareil que pour 2 sauf qu'on a des inégalités strictes.

□

Remarque 1.5.4. *La réciproque de 3 n'est pas vraie. En effet, la fonction $f(x) = x^3$ est strictement croissante, mais sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en $x = 0$.*

1.6 Application aux suites réelles

Théorème 1.6.1. ***(Théorème du point fixe)***
Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Supposons qu'il existe un point fixe $l \in A$ pour f, c'est-à-dire un point l tel que

$$f(l) = l,$$

et qu'il existe un intervalle $I = [l-a, l+a]$ et un réel $\lambda < 1$ tel que pour tout $x \in I$

$$|f'(x)| \leq 1.$$

Alors la suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et la formule de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers l.

Démonstration. On a $v_n = u_n - l$. Il suffit de montrer que (v_n) tend vers 0. Montrons que par récurrence que $u_n \in I$ pour tout n. Par hypothèse u_0 Supposons $u_n \in I$. Alors si l'on applique le théorème des accroissements finis à la fonction f et à l'intervalle $[u_n, l]$ si $u_n \leq l$ (ou bien $[l, u_n]$ si $u_n > l$) on obtient qu'il existe $c \in]u_n, l[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(u_n) - f(l)}{u_n - l} = \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l}.$$

la dernière égalité résulte de $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(l) = l$. Comme $]u_n, l[\subset I$ on sait que $|f'(c)| \leq \lambda < 1$. D'où

$$\frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} \leq \lambda \qquad (*).$$

Comme $\lambda < 1$, on obtient $|v_{n+1}| <$, ce qui implique que $u_{n+1} \in I$.
En itérant l'égalité (*), on trouve

$$|v_{n+1}| \leq |v_n| \leq \lambda^2 |v_{n-1}| \leq \ldots \leq \lambda^{n+1}|v_0|.$$

Comme $0 \leq \lambda < 1$, la suite (λ^n) tend vers 0. Par conséquent la suite (v_n) tend ainsi vers 0.

$\square$

Remarque 1.6.2. *Si de plus la fonction dérivée f' est continue, alors la condition $|f'(l)| < 1$ implique l'existence d'un intervalle $I = [l - a, l + a]$ tel que pour tout $x \in I$ on a $|f'(x)| \leq \lambda < 1$.*

Exemple 1.6.3. *Prenons $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Soit $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or, c'est-à-dire le réel positif satisfaisant l'équation $l^2 = l + 1$, qui est équivalente à $l = f(l)$. Donc l est un point fixe.*
On a $f'(x) - \frac{1}{x^2}$, donc $|f'(x)| < 1$ pour $x > 1$. Ainsi on peut prendre un intervalle $I = [l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}]$. le théorème du point fixe implique alors la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$ converge vers l.

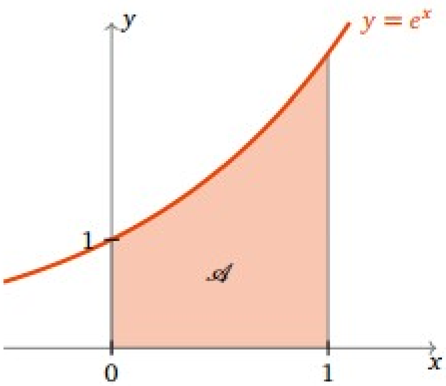
Chapitre 2

Intégration

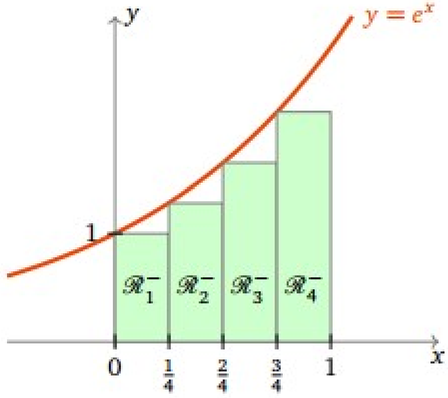
Soient a et b deux réels. On supposera dans toute la suite, sauf mention du contraire, que $a < b$ et toutes les fonctions sont supposées définies sur $[a, b]$ et a valeurs réelles.

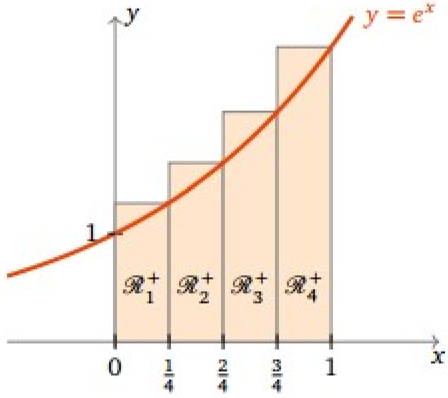
Exemple introductif

Considérons la fonction $f : x \longrightarrow e^x$. On souhaite calculer l'aire en dessous du graphe de f et entre les droites d'équations $(x = 0), (x = 1)$ et l'axe (Ox).



Nous approchons cette aire par des sommes d'aires des rectangles situées sous la courbe, puis par des sommes de rectangles situées au-dessus de la courbe. Découpons l'intervalle $[0, 1]$ a l'aide des réels $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1$ Une telle suite de réels sera appelée une subdivision de l'intervalle $[0, 1]$.
Considérons d'abord les rectangles en dessous de la courbe (voir figure ci-dessus).

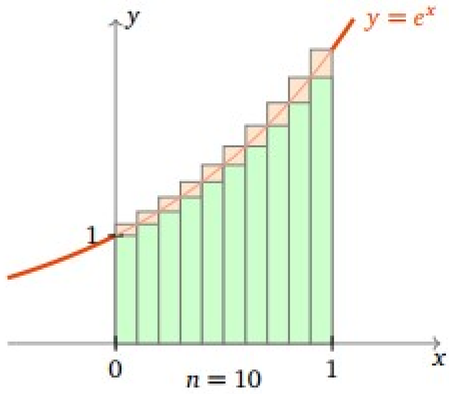




Chaque rectangle a pour base $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ et pour hauteur $f(\frac{i-1}{n}) = e^{\frac{i-1}{n}}$, pour $i \in \{1, 2, \cdots n\}$. Ainsi l'aire d'un tel rectangle est $(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n})e^{\frac{i-1}{n}} = \frac{1}{n}e^{\frac{i-1}{n}}$
La somme des aires des rectangles est :

$$\begin{aligned} \mathsf{A}_s^n &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}} = \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n}} \sum_{i=1}^{n} (e^{\frac{1}{n}})^i \\ &= \frac{1}{n} e^{-\frac{1}{n}}.e^{\frac{1}{n}}.\frac{1-(e^{\frac{1}{n}})^n}{1-e^{1/n}} = \frac{1}{n}.\frac{1-e}{1-e^{1/n}} = (e-1).\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1} \end{aligned}$$

Considérons maintenant les rectangles suivants :



Chaque rectangle a pour base $[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$ et pour hauteur $f(\frac{i}{n}) = e^{\frac{i}{n}}$ pour $i \in \{1, 2, \cdots n\}$.
Ainsi l'aire d'un tel rectangle est $(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n})f(\frac{i}{n}) = \frac{1}{n}e^{\frac{i}{n}}$. La somme des aires

des rectangles est :

$$\begin{aligned}\mathsf{A}_S^n &= \sum_{i=1}^{n}(\frac{i}{n}-\frac{i-1}{n})f(\frac{i}{n}) = \frac{1}{n}.e^{\frac{1}{n}} \quad \frac{1-(e^{\frac{k}{n}})^n}{1-e^{\frac{k}{n}}} \\ &= \frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}} = (e-1)\frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}e^{\frac{1}{n}}\end{aligned}$$

Remarquons que $\mathsf{A}_s^n \leq \mathsf{A} \leq \mathsf{A}_S^n$
Lorsque l'on considère des subdivisions de plus en plus petites (c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$) alors on obtient à la limite que :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathsf{A}_s^n \leq \lim_{n\to+\infty} \mathsf{A} \leq \lim_{n\to+\infty} \mathsf{A}_S^n$$
$$\text{soit } e-1 \leq \mathsf{A} \leq e-1$$

Donc l'aire de notre région est $\mathsf{A} = e-1$

2.1 Intégration des fonctions en escalier

2.1.1 Subdivision d'un segment

Définition 2.1.2. .

- *On appelle subdivision d'ordre n de* $[a,b]$ *toute partie finie* $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset [a,b]$ *telle que* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$
- *On appelle par ou module de la subdivision* X, *le réel :* $\delta(X) = \max_{i\in\{1,2,\cdots,n\}}(x_i - x_{i-1})$

n^o Nous noterons $S_{a,b}$ *l'ensemble des subdivisions de* $[a,b]$

Exemple 2.1.3. *Soit n un entier naturel non nul, on définit une subdivision* $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ *de* $[a,b]$ *par* $\forall i \in \{0,1,2,\cdots,n\}, x_i = a + i\frac{b-a}{n}$.
Elle est appelée subdivision équidistante ou à pas constant $\delta(x) = \frac{b-a}{n}$

Définition 2.1.4. *Soient* X *et* Y *deux subdivisions de* $[a,b]$ *on dit que* X *est plus finie que* Y *si tout élément de* Y *est élément de* X . *On note* $Y \subset X$.

Remarque 2.1.5. .

- *La relation "est plus fine que" définit une relation d'ordre sur* $S_{a,b}$
- *Si* X *et* Y *sont deux subdivisons de* $[a,b]$ *alors* $X \cup Y$ *est une deux subdivisions de* $[a,b]$ *plus finie que* X *et* Y.

2.1.6 Fonctions en escalier

Définition 2.1.7. *Une fonction* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction en escalier s'il existe une subdivision* $x = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ *de* $[a, b]$ *et des nombres réels* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *tels que pour tout* $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ *on ait* $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, f(x) = c_i$
Une telle subdivision X *est appelée subdivision adaptée à* f.
n^o *On notera* $\mathcal{E}([a, b])$ *l'ensemble des fonctions en escalier sur* $[a, b]$

Exemple 2.1.8. .

- *Une fonction constante sur le segment* $[a, b]$ *est une fonction en escalier sur* $[a, b]$
- *La fonction partie entière est une fonction en escalier sur tout segment* $[a, b]$*, une subdivision adaptée étant constituée de* a, b *et de tous les entiers*

Soit $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ $\quad Y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$ *une subdivision adaptée a* f*(resp. a* g*).*
Alors $Z = X \cup Y = (z_i)_{1\leq i\leq n}$ *est une subdivision adaptée a* f *et* g.
Pour chaque $i \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$*, il existe* $!h \in \{0, 1, \cdots, n\}$ *et* $!j \in \{0, 1, 2, \cdots, n\}$ *tels que* $]z_{i-1}, z_i[\subset]x_{k-1}, x_k[$ *et* $]z_{i-1}, z_i[\subset]y_{k-1}, y_k[$.

Ainsi $\forall x \in]z_{i-1}, z_i[\,;\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) = c_h + d_j = A_{hj}$ *donc* $f + g \in \mathcal{E}([a, b])$.

- *Soit* $\lambda \in \mathcal{C}, V = \{x_i\}_{1\leq i\leq n}$ *est une subdivision adaptée à* λf *et* $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[$,
  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda c_i$. *D'ou* $\lambda f \in \mathcal{E}([a, b])$

2.1.9 Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $f \in \mathcal{E}([a, b])$ *et* $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ *une subdivision adaptée à* f *telle que* $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, f(x) = c_i, c_i \in \mathcal{R}$.
Posons $s(f, X) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_{i-1} - x_i)$

Propriété 2.1.10. *Soit* $Y = (y_i)_{1\leq i\leq n}$ *une subdivision adaptée à* f *telle que* $\forall x \in]y_{i-1}, y_i[, f(x) = d_i, d_i \in \mathcal{R}$.

Montrons que $\sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{m} d_i(y_i - y_{i-1})$

C'est-à-dire la somme $s(f, x)$ *ne dépend pas de la subdivision donnée.*

- *Supposons que Y est une subdivision obtenue en ajoutant un élément x' (entre x_{i-1} et x_i) à X. Alors*

$$\begin{aligned}
\rho(f,Y) &= \sum_{j=1}^{n+1}(y_j - y_{j-1})d_j \\
&= \sum_{j=1}^{i-1}(y_j - y_{j-1})d_j + (x^* - y_{i-1})d_i + (y_{i+1} - x^*)d_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{n+1}(y_j - y_{j-1})d_j \\
&= \sum_{j=1}^{i-1}(x_j - x_{j-1})c_j + (x^* - x_{i-1})c_i + (x_{i+1} - x^*)c_{i+1} + \sum_{j=i+2}^{n+1}(y_j - y_{j-1})d_j \\
&= \sum_{j=1}^{i-1}(x_j - x_{j-1})c_j + (x_i - x_{i-1})c_i + \sum_{j=i+1}^{n}(y_{j+1} - y_j)d_{j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{i-1}(x_j - x_{j-1})c_j + (x_i - x_{i-1})c_i + \sum_{j=i+1}^{n}(x_j - x_{j-1})c_j \\
&= \sum_{j=1}^{n}(x_j - x_{j-1})c_j
\end{aligned}$$

Maintenant soit Y une subdivision plus finie que X, alors Y est obtenue en rajoutant un nombre finie d'éléments a X. Ainsi d'après le cas précédent, on montre que $s(f,X) = s(f,Y)$.
Enfin si X et Y sont deux subdivisions adaptée a f alors il existe une subdivision Z plus finie que X et Y. D'apres le cas précédent on a $\rho(f,Z) = \rho(f,Y) = \rho(f,X)$.
On a la définition suivante.

Définition 2.1.11. *Soit f une définition en escalier sur $[a,b]$ et $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f.*
Soient $c_1, c_2, \cdots, c_n$ les nombres réels tels que $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[, f(x) = c_i$. On appelle intégrale de f sur $[a,b]$ et on la note $\int_a^b f(x)dx$ le nombre réel $\sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})}$$

2.2 Intégrale d'une fonction bornée

On rappelle qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée s'il existe $M \geq 0$ tel que

$\forall x \in [a, b], -M \leq f(x) \leq M$
Posons $m(f) = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ *et* $M(f) = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$

2.2.1 Somme de Darboux

Soit $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ *une subdivision de* $[a, b]$. *Pour tout* $i \in \{1, \cdots, n\}$, *Posons*
$m_i(f) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$ *et* $M_i(f) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

Définition 2.2.2. *Soit* f *une fonction bornée sur* $[a, b]$ *et* $X = \{x_i\}_{1\leq x\leq n}$ *une subdivision de* $[a, b]$.

- *On appelle somme de Darboux inférieure de* f *relativement a* X, *le nombre réel*

$$\rho(f, X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) m_i(f)$$

- *On appelle somme de Darboux supérieure de* f *relativement a* X, *le nombre réel*

$$S(f, X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) M_i(f)$$

Remarque 2.2.3. *Pour une fonction positive, la somme de Darboux inférieure de* f *est l'aire de la somme des rectangles en dessous de la courbe (comme dans l'exemple introductif) et la somme de Darboux supérieure de* f *est l'aire de la somme des rectangles au dessus de la courbe (comme dans l'exemple introductif).*

Exemple 2.2.4. *Écrire les sommes de Darboux inférieure et supérieure de la fonction* $f : x \mapsto x$ *sur l'intervalle* $[-1, 1]$, *relativement à la subdivision* $X = (-1 + \frac{i}{n})_{0\leq i\leq 2n}$.

Somme de Darboux inférieure

$$\rho(f, X) = \sum_{i=1}^{2n} (x_i - x_{i-1}) m_i(f)$$

$$x_i - x_{i-1} = -1 + \frac{i}{n} + i - \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$m_i(f) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]} x = x_i - x_{i-1} = -1 + \frac{i-1}{n}$$

$$\begin{aligned}
\textit{et} \quad \rho(f,X) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}\left(-1+\frac{i-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{2n}(-1)+\sum_{i=1}^{2n}\frac{(-1)}{n}\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(-2n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}(i-1)\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(-2n+\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{2n-1} i\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(-2n+\frac{1}{n}\ \frac{2n(2n-1)}{2}\right) = -\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Somme de Darboux supérieure

$$\begin{aligned}
\textit{et} \quad S(f,X) &= \sum_{i=1}^{2n}(x_i - x_{i-1}) \sup_{x\in]x_{i-1},x_i[}(f)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} x_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}(-1+\frac{i}{n})\\
&= \frac{1}{n}\left(-2n+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n} i\right)\\
&= \frac{1}{n}\left(-2n+\frac{1}{n}\ \frac{2n(2n+1)}{2}\right) = \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Exemple 2.2.5. *Écrire les sommes de Darboux inférieure et supérieure de la fonction $f : x \mapsto e^x$ sur l'intervalle $[0,1]$ relativement à la subdivision $X = \left(\frac{i}{n}\right)_{1\leq i\leq n}$. Il s'agit bel et bien de l'exemple introductif.*

Propriété 2.2.6. *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ et X, Y deux subdivisions de $[a,b]$ telles que $X \subset Y$. On a*

i) $\delta(Y) \leq \delta(X)$

ii) $s(f,X) \leq s(f,X), \quad s(f,X) \geq s(f,Y)$

Démonstration

Soit $X = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ et $Y = (y_j)_{0\leq j\leq n}$ telles que Y soit plus fine que X.

(1) $\delta(Y) = \max_{0\leq i\leq n}(y_i - y_{i-1})$ *et* $\delta(X) = \max_{0\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$
Comme $X \subset Y$ alors $\forall i \in 0,1,2,\cdots,n$ tel que
$x_{i_0-1} < y_j < x_{i_0}$. Donc pour tout $j \in \{1,2,\cdots,m\}$, il existe $i \in \{1,2,\cdots,n\}$ tel que $[y_{j-1}, y_j] \subset [x_{i-1}, x_i]$. D'ou $\forall j \in \{1,2,\cdots,n\}; y_j - y_{j-1} \leq x_i - x_{i-1} \leq \delta(X)$ et par suite $\max_{0\leq i\leq n}(y_i - y_{i-1}) \leq \delta(X)$
C'est-à-dire $\delta(Y) \leq \delta(X)$

(2) *Comme* $X \subset Y$, *alors* Y *est obtenue en ajoutant un membre finie d'élément, à* X. *Il suffit alors de faire la démonstration pour la subdivision* Y *obtenue en ajoutant un point* x^**(entre* x_{i-1} *et* x_i*) à* X.
Notons que

$$y_j = \begin{cases} x_j & si \quad j \in \{0, 1, \cdots, i-1\} \\ x^* & si \quad j = i \\ x_{j-1} & si \quad j \in \{i+1, i+2, \cdots, m\} \end{cases}$$

$$s(f,X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(y))$$

$$\begin{aligned} s(f,X) &= \sum_{j=1}^{n+1} (y_i - y_{i-1}) \inf_{x \in [y_{j-1}, y_j]} (f(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} (y_i - y_{i-1}) \inf_{x \in [y_{j-1}, y_j]} (f(x)) + (x^* - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x^*]} (f(x)) + \\ &(x_i - x^*) \inf_{x \in [x_{i-1}, x^*]} (f(x)) + \sum_{j=i+2}^{n+1} (y_j - y_{j-1}) \inf_{x \in [y_{j-1}, y_j]} (f(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{i-1} (x_j - x_{j-1}) \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} (f(x)) + (x^* - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x^*]} (f(x)) + \\ &(x_i - x^*) \inf_{x \in [x^*, x_i]} (f(x)) + \sum_{j=i+2}^{n+1} (x_{j-1} - x_{j-2}) \inf_{x \in [x_{j-2}, x_{j-1}]} (f(x)) \end{aligned}$$

$$[x^*, x_i] \subset [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x)) \leq \inf_{x \in [x^*, x_i]} (f(x))$$

$$[x_{i-1}, x^*] \subset [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x)) \leq \inf_{x \in [x_{i-1}, x^*]} (f(x))$$

Ainsi

$$\begin{aligned} (x^* - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x^*]} (f(x)) + (x_i - x^*) \inf_{x \in [x^*, x_i]} (f(x) &\geq (x^* - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x^*]} (f(x)) + \\ &(x_i - x^*) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x)) \\ &= (x_i - x_{i-1}) \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} (f(x)) \end{aligned}$$

Par conséquent

$$s(f,Y) \geq \sum_{j=1}^{i-1}(x_j - x_{j-1}) \inf_{x\in[y_{j-1},y_j]}(f(x)) + (x_i - x_{i-1}) \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f(x))$$
$$+ \sum_{j=i+2}^{n+1}(x_{j-1} - x_{j-2}) \inf_{x\in[x_{j-2},x_{j-1}]}(f(x))$$

En faisant le changement de variable $k = j-1$ dans la dernière somme on a :

$$s(f,Y) \geq \sum_{k=1}^{i-1}(x_j - x_{j-1}) \inf_{x\in[y_{j-1},y_j]}(f(x)) + (x_i - x_{i-1})$$
$$\inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f(x)) + \sum_{k=i+1}^{n}(x_k - x_{k-1}) \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]}(f(x))$$

soit $s(f,Y) \geq s(f,X)$.

Propriété 2.2.7. *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ et X, Y deux subdivisions de $[a,b]$, on a :*

(i) $s(f,X) \leq S(f,Y)$

(ii) $m(f)(b-a) \leq s(f,X) \leq S(f,X)M(f)(b-a)$

Démonstration

(i) *Posons $Z = X \cup Y$ On a $X \subset Z$, d'après la* ***proposition1.2.6.****,* $s(f,X) \leq s(f,Z)$ *or* $s(f,Z) \leq s(f,Z)$

$$d\text{'où } s(f,X) \leq S(f,Z) \tag{2.1}$$

On a aussi $Y \subset Z$ et d'après la ***proposition1.2.6.****,*

$$S(f,Z) \leq S(f,X) \tag{2.2}$$

de (**??**) *et* (**??**)*, On déduit que* $s(f,X) \leq s(f,Y)$.

(ii) $\forall i \in \{1,2,\cdots,n\}, [x_{i-1},x_i] \subset [a,b]$

$$D\text{'où} \quad m_i(f) = \inf_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f(x)) \geq m(f) = \inf_{x\in[x_a,x_b]}(f(x))$$
$$\text{et} \quad M_i(f) = \sup_{x\in[x_{i-1},x_i]}(f(x)) \leq M(f) = \sup_{x\in[a,b]}(f(x))$$
$$\text{Ainsi} \quad m(f) \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M(f)$$

Ce qui implique

$$m(f)(x_i - x_{i-1}) \leq m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq M(f)(x_i - x_{i-1})$$

et par la suite

$$\begin{aligned} m(f)\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i(f)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(f)(x_i - x_{i-1}) \\ \leq M(f)\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

soit $m(f)(b-a) \leq s(f,X) \leq S(f,X) \leq M(f)(b-a)$

2.2.8 Intégrale supérieure et inférieure

Définition 2.2.9. *Soit f un élément de $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$.*

1. *L'intégrale supérieure de f sur I est le nombre réel*

$$\overline{\int_I} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(f,X)/X \in \mathfrak{S}_I\}$$

2. *L'intégrale inférieure de f sur I est le nombre réel*

$$\underline{\int_I} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{S(f,X)/X \in \mathfrak{S}_I\}$$

Proposition 2.2.10. *Soit $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{R})$. X et Y deux subdivisions de I. Alors on a*

$$s(f,X) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f,Y)$$

Démonstration. Nous avons $X \subset X \cup Y$ et $Y \subset X \cup Y$ et d'après la proposition1.1.6, on a $s(f,X) \leq s(f, X \cup Y) \leq S(f,Y)$, pour toutes subdivisions X et Y de I. En prenant le sup sur les X et ensuite inf sur les Y, on a

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$\square$

Exemple 2.2.11. *1. Considérons la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0,1]$ et la suite de subdivisions $X_n = (\frac{i}{n})_{0\leq i\leq n}$. On peut voir que $s(f,X_n) = \frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ et $S(f,X_n) = e^{\frac{1}{n}}s(f,X_n)$. Donc*

$$\underline{\int_0^1} f(x)dx \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}} = e-1$$

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx \leq \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}}s(f,X_n) = e-1$$

Par suite $\underline{\int_0^1} f(x)dx = e-1 = \overline{\int_0^1} f(x)dx$

2. *Considérons la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[-1,1]$ et la suite de subdivision $X_n = (-1+\frac{i}{n})_{0\leq i\leq 2n}$. On peut voir que $s(f,X_n) = \frac{2}{n^3}\frac{(n-1)n(2n+1)}{6}$ et $S(f,X_n) = s(f,X_n) + \frac{2}{n^2}$. Donc*

$$\underline{\int_{-1}^1} f(x)dx \geq \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^3}\frac{(n-1)n(2n+1)}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\overline{\int_{-1}^1} f(x)dx \leq \lim_{n\to+\infty} s(f,X_n) + \frac{2}{n^2} = \frac{2}{3}$$

Par suite $\underline{\int_{-1}^1} f(x)dx = \frac{2}{3} = \overline{\int_{-1}^1} f(x)dx$

3. *Considérons la fonction $f(x) = \Psi$ sur l'intervalle $[0,1]$. Pour toute subdivision X de I, on a $m_i(f) = 0$ et $M_i(f) = 1$. On peut voir que $s(f,X_n) = 0$ et $S(f,X_n) = 1$. Donc*

$$\underline{\int_{-1}^1} f(x)dx = 0 \text{ et} \overline{\int_{-1}^1} f(x)dx = 1$$

Proposition 2.2.12. *Soient f et g deux fonctions bornées sur $I, k \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$ et X une subdivision de I.*

1. $[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0] \Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)dx \geq 0$
2. $[\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = k] \Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)dx = k(b-a) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$
3. $[\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) + k] \Rightarrow \underline{\int_a^b} g(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx + k(b-a) \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + k(b-a) = \overline{\int_a^b} g(x)dx$

4. $\underline{\int_a^b} g(x)dx + \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b}(f+g)(x)dx \leq \overline{\int_a^b}(f+g)(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_a^b} g(x)dx$
5. $\underline{\int_a^b}(\lambda f)(x)dx = \lambda \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} \lambda f(x)dx = \lambda \overline{\int_a^b} f(x)dx$
6. $\underline{\int_a^b}(-f)(x)dx = -\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq -\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b}(-f)(x)dx$

Démonstration. Conséquence immédiate de la Proposition □

Proposition 2.2.13. *Soit f une fonction bornée sur I. Alors*

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \forall \delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall X \in \mathfrak{G}_I \ p(X) \leq \delta \begin{cases} 0 \leq S(f,X) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon \\ \\ 0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx - s(f,X) < \varepsilon \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \lim\limits_{p(X)\to 0} \leq S(f,X) = \overline{\int_a^b} f(x)dx \\ \\ \lim\limits_{p(X)\to 0} \leq s(f,X) = \underline{\int_a^b} f(x)dx \end{cases}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$
$1^{er} cas$: $f = k$. Alors, Pour toute subdivision X de I on a

$$s(f,X) = k(b-a) = S(f,X) = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Donc, pour toute subdivision X de I, on a

$$S(f,X) - \overline{\int_a^b} f(x)dx = s(f,X) - \underline{\int_a^b} f(x)dx = 0 < \varepsilon$$

$1^{er} cas$: f n'est pas constante. Alors on a $m(f) < M(f)$. Puisque

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{X \in G_I} S(f,X),$$

il existe une subdivision X_ε de I telle que

$$0 \leq S(f,X_\varepsilon) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons

$$\delta_1 = \frac{\epsilon}{2card(X_\varepsilon)(M(f) - m(f))}$$

D'après le corollaire 1.1.9, on a pour toute subdivision X de I

$\mathfrak{p}(X) < \delta_1 \Rightarrow S(f, X) - \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f, X_\varepsilon) + card(X_\varepsilon)\mathfrak{p}(X)(M(f) - m(f)) - \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

De même, puisque $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{X\in\mathfrak{G}_I} s(f, X)$ il existe une subdivision X'_ϵ de I telle que

$$0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx - s(f, X'_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons

$$\delta_2 = \frac{\varepsilon}{2card(X'_\varepsilon)(M(f) - m(f))}$$

D'après le corollaire1.1.9, on a pour toute subdivision X de I

$\mathfrak{p}(X) < \delta_2 \Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)dx - s(f, X) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx - s(f, X'_\varepsilon) + card(X'_\varepsilon)\mathfrak{p}(X)(M(f) - m(f)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ alors

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \ \forall\delta \in \mathbb{R}_+^* \ \forall X \in \mathfrak{G}_I \ \mathfrak{p}(X) \leq \delta \begin{cases} 0 \leq S(f, X) - \overline{\int_a^b} f(x)dx < \epsilon \\ \\ 0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx - s(f, X) < \varepsilon \end{cases}$$

□

Proposition 2.2.14. *Si $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ alors pour tout $c \in]a, b[$*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \tag{2.3}$$

Démonstration. Soit $c \in]a, b[$

(a) Pour toutes subdivisions $X = \{x_0, \cdots, x_n\}$ de $[a, c[$ et $Y = \{y_0, \cdot, y_n\}$ de $[c, b[$, on a $Z = x_0, \cdots, x_n = c = y_o, \cdots, y_n$ est une subdivision de $[a, b]$ et

$$s(f, X) + s(f, Y) \leq s(f, Z) \leq \underline{\int_a^c} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(f, Z)$$
$$\leq S(f, X) + S(f, Y)$$

par suite,

$$\underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx$$

(b) Supposons que $X = \{x_0, \cdots, x_n\}$ soit une subdivision de $[a, b]$.

<u>1^{er}*cas*</u> Il existe $i_0 \in \{1, \cdots, n-1\}$ tel $c = x_{i0}$. Alors $X_1 = \{x_0, \cdots, x_{i0}\}$ est une subdivision de $[a, c[$ et $X_2 = \{x_{i0}, \cdots, x_n\}$ est une subdivision de $[c, b[$. Donc,

$$s(f, X) = s(f, X_1) + s(f, X_2) \leq \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$$
$$\leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq S(f, X_1) \leq S(f, X_2) = S(f, X)$$

<u>2^{er}*cas*</u> Il existe $i_0 \in \{1, \cdots, n-1\}$ tel que $c =]x_{i0}, x_{i0+1}[$. Alors $X_1 = \{x_0, \cdots, x_{i0}, c\}$ est une subdivision de $[a, c[$ et $X_2 = \{c, x_{i0}, \cdots, x_n\}$ est une subdivision de $[c, b[$ et $Z = x_0, \cdots, x_{i0}, c, x_{io+1}, \cdots, x_n$ est une subdivision de $[a, b]$ plus fine que X. Ainsi on a,

$$s(f, X) \leq s(f, Z) = s(f, X_1) + s(f, X_2) \leq \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx$$
$$\leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq S(f, X_1) \leq S(f, X_2) = S(f, X) \leq S(f, X)$$

Donc dans tous les cas on a

$$s(f, X) \leq \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq S(f, X)$$
$$\leq S(f, X)$$

Par suite,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \underline{\int_a^c} f(x)dx + \underline{\int_c^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^c} f(x)dx + \overline{\int_c^b} f(x)dx \leq S(f,X)$$
$$\leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

□

Définition 2.2.15. *$f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier s'il existe une subdivision $X = \{x_0, \cdots, x_n\}$ de I et une suite de réels $(k_i)_{0\leq i\leq n}$ telles que*

$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}\ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[f(x) = k_i.$$

On dit alors que X est adaptée a f.

Proposition 2.2.16. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier et $X = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée a f telle que*

$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}\ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[f(x) = k_i.$$

Alors

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sum_i^n k_i(x_i - x_{i-1}) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Démonstration. Considérons une subdivision Y plus fine que la subdivision X.

$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}\ \exists j_i \in \{1, \cdots, m\} : [x_{i-1}, x_i] \cup_{j=j_{i-1}+1}^{j_1} [\mathrm{y}_{j-1}, \mathrm{y}_j]$$

Avec $j_0 = 0$. remarquons que

$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}\ \exists j \in \{j_{i-1} + 2, \cdots, j_{i-1}\}\ m_j(f) \leq k_i \leq M_j(f)$$

Donc

$$\begin{aligned}
s(f,Y) &= \sum_{i}^{m} m_j(f)(\mathrm{y}_j - \mathrm{y}_{j-1})\\
&= \sum_{i}^{n} (m_{j_{i-1}+1}(f)(\mathrm{y}_{j_{i-1}+1} - \mathrm{y}_{j_{i-1}}) + \sum_{j=j_{i-1}+2}^{j_i-1} m_j(f)(\mathrm{y}_{j_i} - \mathrm{y}_{j_i}) +\\
&\quad m_{j_i}(f)(\mathrm{y}_{j_i} - \mathrm{y}_{j_{i-1}}))\\
&= \sum_{i}^{n} (m_{j_{i-1}}(f)(\mathrm{y}_{j_{i-1}+1} - \mathrm{y}_{j_{i-1}}) + \sum_{j=j_{i-1}+2}^{j_i-1} k_i(\mathrm{y}_j - \mathrm{y}_{j-1}) +\\
&\quad m_{j_i}(f)(\mathrm{y}_{j_i} - \mathrm{y}_{j_{i-1}}))\\
&= \sum_{i}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i}^{n} \left[m_{j_{i-1}+1}(f) - k_i\right](\mathrm{y}_{j_{i-1}+1} - \mathrm{y}_{j_{i-1}}) +\\
&\quad \sum_{i=1}^{n} \left[m_{j_i}(f) - k_i\right](\mathrm{y}_{j_i} - \mathrm{y}_{j_{i-1}})
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{i}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) - s(f,Y) &\leq \sum_{i}^{n} \left[(k_i - m_{j_{i-1}+1}(f) + (k_i - m_{j_i}(f))\right]\mathfrak{p}(Y)\\
&\leq 2n(M(f) - m(f))\mathfrak{p}(Y)
\end{aligned}$$

De façon analogue, on a

$$\begin{aligned}
0 \leq S(f,Y) - \sum_{i}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) &\leq \sum_{i}^{n} \left[(M_{j_i}(f) - k_i) + M_{j_{i-1}+1}(f) - k_i)\right]\mathfrak{p}(Y)\\
&\leq 2n(M(f) - m(f))\mathfrak{p}(Y)
\end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{\substack{X\subset Y\\ p(Y)\to 0}} s(f,Y) = \sum_{i}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\substack{X\subset Y\\ \mathfrak{p}(Y)\to 0}} S(f,Y)$$

Ainsi,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sum_{i}^{n} k_i(x_i - x_{i-1}) = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

$\square$

Remarque 2.2.17. 1. *La proposition 1.2.8 montre que si l'on modifie la valeur d'une fonction en escalier en un nombre fini de points alors les intégrales supérieures et inférieures de f sur I ne changent pas.*

2. *Soit f un élément de $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$. Alors*

$$\forall X \in \mathfrak{S}_I \quad s(f,X) = \underline{\int_a^b} \varphi_X(x)dx \text{ et } S(f,X) = \overline{\int_a^b} \psi_X(x)dx$$

ou φ_X et ψ_X sont des fonctions en escaliers sur I définies par :

$$\forall i \in \{0,\cdots,n\} \forall x \in]x_{i-1},x_i[\ \varphi_X(x) = m_i(f) \text{ et } \psi_X(x) = M_i(f)$$

Donc,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\left\{\underline{\int_a^b} \varphi(x)dx : \varphi \text{ en escalier }, \varphi \leq f\right\}$$
$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\left\{\overline{\int_a^b} \psi(x)dx : \psi \text{ en escalier }, f \leq \psi\right\}$$

En prenons en compte(1), il apparait donc que $\underline{\int_a^b} f(x)dx$ et $\overline{\int_a^b} \psi(x)dx$ ne varient pas lorsqu'on modifie la valeur de f en nombre fini de point de I.

2.2.18 Intégrale de Riemann

Définition 2.2.19. *Un élément f de $\mathcal{B}(I,\mathbb{R})$ est dit Riemann intégrale sur I si*

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \text{ ou } \lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0} [S(f,X) - s(f,X)] = 0 \tag{2.4}$$

Si f est Riemann intégrale sur I, alors son intégrale de Riemann est

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \tag{2.5}$$

Exemple 2.2.20. 1. *D'après Exemple 1.2.3 sur l'intégrale supérieure et infrieure, nous avons :*

(a) *La fonction* $f(x) = e^x$ *est intégrable dur* $[0, 1]$ *et on a*

$$\int_0^1 e^x dx = \overline{\int_0^1} e^x dx = \underline{\int_0^1} e^x dx = e - 1$$

(b) *La fonction* $g(x) = x^2$ *est Riemann intǵrale sur l'intervalle* $[-1, 1]$ *et on a*

$$\int_0^1 f(x)dx = \underline{\int_{-1}^1} f(x)dx = \overline{\int_{-1}^1} f(x)dx = \frac{2}{3}$$

2. *Toute fonction en escalier sur intervalle.*
L'ensemble des fonctions rélles Riemann intégrables sur I *sera note* $\mathcal{R}(I, \mathbb{R})$

Proposition 2.2.21. *Soient* f *et* g *deux fonctions Riemann intégrables sur* I, k *et* λ *deux réels et* $c \in]a, b[$.

1. $m(f)(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(f)(b - a)$ *(inégalité de la moyenne). En particulier* $\int_a^b kdx = k(b - a)$
2. $[\forall x \in I f(x) \leq g(x)] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$
3. $f + g \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ *et* $\int_a^b [f(x + g(x))]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
4. $\lambda f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ *et* $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$
5. $f \in \mathcal{R}([a, c], \mathbb{R}) \cap \mathcal{R}([c, b], \mathbb{R})$ *et* $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ *(relation de Chasles).*

Démonstration. 1) Découle de la proposition 1.1.6.3 et 1.2.2, tandis que 2), 3) et 4) sont des conséquences immédiates de la proposition 1.2.4 5) quand a lui, découle de la proposition 1.2.5

□

Remarque 2.2.22. *Soit* f *une fonction Riemann intégrale sur* I. *La remarque 1.2.9 donne :*

1.

$$\int_a^b f(x)dx = sup \left\{ \int_a^b \varphi(x)dx : \varphi \text{ en escalier }, \varphi \leq f \right\}$$
$$= \inf \left\{ \int_a^b \psi(x)dx : \psi \text{ en escalier }, f \leq \psi \right\}$$

2. *Supposons que g est bornée et que $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$ a un nombre fini d'éléments. Alors g est Riemann intégrable sur I et on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Définition 2.2.23. *Soit f une fonction définie sur I et $X = (x_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathfrak{G}_I$. Alors la somme*

$$\sigma_X = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

avec $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$ est une somme de Riemann de f relativement a la subdivision X.

Proposition 2.2.24. *Soit f une fonction Riemann intégrable sur I. A chaque subdivision $X = \{x_0, \cdots, x_n\}$ associons une suite $(t_i)_{1\leq i\leq n}$ telle que*

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} t_i \in [x_{i-1}, x_i].$$

Alors

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{2.6}$$

Démonstration. Pour tout $X = \{x_0, \cdots, x_n\}$ et tout $(t_i)_{1\leq i\leq n} \in \prod[x_{i-1}, x_1]$, on a pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}, m_i(f) \leq f(t_i) \leq M_i(f)$. D'ou

$$s(f, X) \leq \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(t_i) \leq S(f, X)$$

Donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx \leq \lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0} \inf \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(t_i) &\leq \lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0} \sup \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})f(t_i) \\ &\leq \int_a^b f(x)\end{aligned}$$

D'où

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

□

Corollaire 2.2.25. *Soit f une fonction Riemann intégrable sur I. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = \int_a^b f(x)dx$$

Par convention, si f est intégrable sur $I = [a, b]$, on pose

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \ et \int_a^a f(x)dx = 0 \tag{2.7}$$

Proposition 2.2.26. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction monotone, alors elle est Riemann intégrale sur I.*

Démonstration. (a) supposons que f est croissante. Soit X une subdivision de I. On a pour tout i dans $\{1, \cdots, n\}$

$$f(x_{i-1}) = m_i(f) \leq M_i(f) \leq f(x_i)$$

ce qui permet d'avoir $M_i(f) - m_i(f) \leq f(x_i) - f(x_{i-1})$. Ainsi

$$\begin{aligned} 0 < S(f, X) - s(f, X) &= \sum_{i=1}^{n}[M_i(f) - m_i(f)](x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n}[f(x_i) - f(x_{i-1})]\mathfrak{p}(X) = (f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

Or $\lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0}(f(b)-f(a))\mathfrak{p}(X) = 0$ donc $\lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0}(S(f, X)-s(f, X)) = 0$. Si

(b) Supposons que f est décroissante ; alors $-f$ est croissante et d'après ce qui précède, est Riemann intégrable. Donc f est Riemann intégrable d'après la Proposition 1.3.3

□

Proposition 2.2.27. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle est Riemann Intégrable sur I.*

Démonstration. f étant continue sur I compact, y est uniformément continue. Soit ε un élément de $\mathbb{R}_+^*$. Il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall x, y \in |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Soit $X = \{x_0, \cdots, x_n\}$ une subdivision de I telle que $\mathfrak{p}(X) < \delta$. On a

$$\begin{aligned}
\forall i \in \{1, \cdots, n\}\ \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]\ |y - x| \leq x_i - x_{i-1} < \delta \\
\forall i \in \{1, \cdots, n\}\ \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]\ |f(y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \\
\forall i \in \{1, \cdots, n\}\ \forall x, y \in [x_{i-1}, x_i]\ f(y) - \frac{\varepsilon}{b-a} < f(x) < f(y) + \frac{\varepsilon}{b-a} \\
\forall i \in \{1, \cdots, n\}\ m_i(f) \leq M_i(f) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} + m_i(f) \\
\forall i \in \{1, \cdots, n\}\ 0 \leq M_i(f) - m_i(f) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \\
S(f, X) - s(f, X) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1} n(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{\mathfrak{p}(X) \to 0} (S(f, X) - s(f, X)) = 0$$

□

Définition 2.2.28. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On appelle*

1. *Partie position de f, l'application*

$$\begin{array}{cccc} f^+ & : & I & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & f^+(x) = \max(f(x), 0) \end{array}$$

2. *Partie négative de f, l'application*

$$\begin{array}{cccc} f^- & : & I & \to & \mathbb{R}_+ \\ & & x & \mapsto & f^-(x) = \max(-f(x), 0) \end{array}$$

Remarque 2.2.29. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors*

1. $f = f^+ - f^-$ *et* $|f| = f^+ + f^-$
2. $f \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R}) \Leftrightarrow f^+, f^- \in \mathcal{B}(I, \mathbb{R})$

Proposition 2.2.30. *Supposons que f est Riemann Intégrable sur I. Alors*

1. $f^+, f^- \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ *et*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

2. $|f| \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ *et*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Démonstration. Soit $X = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de I. On a

$$f \leq f^+ \text{ et } f \leq f^-,$$

de sorte que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.

$$0 \leq M_i(f) \Rightarrow m_i(f) \leq m_i(f^+) \leq M_i(f^+) \leq M_i(f),$$

Soit $M_i(f^+) - m_i(f^+) \leq M_i(f) - m_i(f)$.

$M_i(f) < 0 \Rightarrow \forall x \in [x_{i-1}, x_i) f^+(x) = 0 \Rightarrow 0 = M_i(f^+) - m_i(f) \leq M_i(f) - m_i(f)$,

Donc

$$0 \leq S(f^+, X) - s(f^+, X) \leq S(f, X) - s(f, X).$$

Or $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ d'où

$$\lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0} (S(f^+, X) - s(f^-, X)) \leq \lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0} (S(f, X) - s(f, X)).$$

Ainsi $f^+ \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$. f et f^+ étant Riemann Intégrable, la différence $f^- = f - f^+$ l'est aussi, et on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

De même, $|f| = f^+ + f^- \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ et on a

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int_a^b f^+(x)dx\right| + \left|\int_a^b f^-(x)dx\right| \int_a^b |f(x)|dx$$

□

Lemme 2.2.31. *Supposons que* $p \in]1, \infty[$ *et* $q = \frac{p}{p-1}$

1. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $q \in]1, \infty[$
2. $\forall A, B \in \mathbb{R}_+ A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}A + \frac{1}{q}B$
3. $\forall (a_i, b_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})^n \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

4. $\forall M, m \in \mathbb{R}, 0 \leq m \leq M$ *on a* $pm^{p-1}(M-m) \leq M^p - m^p \leq pM^{p-1}(M-m)$

Démonstration. 1. évident

2. On considère la fonction $f(x) = e^x . f"(x) = e^x > 0$ donc f est convexe. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(\frac{1}{p}x + (1 - \frac{1}{p})y) \leq \frac{1}{p}f(x) + (1 - \frac{1}{p})f(y)$$

Choisir x et y tels que $A = e^x$ et $B = e^y$ et le résultat s'ensuit.

3. Soit $(a_i b_i)_{1 \leq i \leq n} \in (\mathbb{R} \times \mathbb{R})^n$
Si $\sum a_i$ ou $\sum b_i = 0$ alors

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}\ a_i = 0 \text{ ou} \forall i \in \{1, \cdots, n\}\ b_i = 0$$

Donc pour tout i, on a $a_i b_i = 0$.
si $\sum a_i \neq 0$ et $\sum b_i \neq 0$ alors nous posons

$$A_i = \frac{a_i^p}{\sum_{j=1}^n a_j^p} \text{ et } B_i = \frac{b_i^p}{\sum_{j=1}^n b_j^p}$$

D'après 2), nous aurons

$$A_i^{\frac{1}{p}} B_i^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}A_i + \frac{1}{q}B_i$$

$$\sum_{i=1}^n A_i^{\frac{1}{p}} B_i^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n A_i + \frac{1}{q}\sum_{i=1}^n B_i = 1$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{(\sum_{j=1}^n a_j^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{j=1}^n a_j^q)^{\frac{1}{q}})} \leq 1,$$

et le résultat s'ensuit.
Soient m et M deux nombres réels tels que : $0 \leq m \leq M$. La fonction g définie par $g(t) = t^p$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, g"(t) = p(p-1)t^{p-2} > 0$$

donc g est convexe et par suite

$$pm^{p-1} = g'(m) \leq \frac{g(M) - g(m)}{M - m} = \frac{M^p - m^p}{M - m} \leq g'(M) = pM^{p-1}$$

□

Proposition 2.2.32. *Supposons que f et g sont Riemann intégrables sur I, $p \in]1, \infty[$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Alors*

1. *$fg, |f^p|, |g^p|$ sont intégrables sur I*
2. $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q)dx\right)^{\frac{1}{q}}$

Démonstration. Soit $f, g \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$.

1. (a) Montrons que $|f|^p \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$
   Soit $X = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de I. On a pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$
   $$m_i(|f|^p) = [m_i(|f|)]^p \leq [M_i(|g|)]^p = M_i(|f|^p)$$
   Ainsi,
   $$\begin{aligned} 0 &\leq S(|f|^p, X) - s(|g|^p, X) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [M_i(|f|)^p - m_i(|f|)^p](x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} pM_i(|f|)^{p-1} - (M_i(|f|) - m_i(|f|))(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq pM(|f|)^{p-1}[S(|f|, X) - s(|f|, X)] \end{aligned}$$
   La dernière inégalite provenant du Lemme 1.3.13. En faisant tendre le pas $p(X)$ de X vers 0, le résultat s'ensuit, vu que $|f| \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$.

   (b) Montrons que $fg \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$
   Puisse $q = \frac{p}{p-1} \in]1, \infty[$, on a donc que $|g|^q \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R}).f$ et g sont Riemann intégrable implique que $f - g$ l'est aussi, et par suite $|f - g|$. On a aussi $fg = \frac{1}{2}((f-g)^2 - f^2 - g^2)$. Donc fg est Riemann intégrable.
2. <u>Établissons l'inégalite de Hölder</u>
   Soit X comme ci-dessous un découpage de I. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ on a $M_i(|fg|) \leq M_i(|f|)M_i(|g|)$ ce qui permet d'avoir
   $$S(|fg|, X) = \sum_{i=1}^{n} M_i(|fg|)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \left[M_i(|f|)(x_i - x_{i-1})^{\frac{1}{p}}\right] \left[M_i(|g|)(x_i - x_{i-1})^{\frac{1}{q}}\right]$$
   Donc d'après l'inégalite de Hölder discret, on a
   $$\begin{aligned} S(|fg|, X) &= \sum_{i=1}^{n} \left[M_i(|f|)^p(x_i - x_{i-1})^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{1}{p}} \left[M_i(|g|)^q(x_i - x_{i-1})^{\frac{1}{q}}\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= S(|f|^p, X)S(|g|^q, X) \end{aligned}$$

Puisque les fonctions intervenant dans l'inégalite sont Riemann intégrables, nous obtenons le résultat en faisant tendre le pas vers 0.

□

Proposition 2.2.33. *Supposons que f et g sont Riemann intégrable sur I,*

1. *Si g est positive sur I alors*

$$m(f)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M(f)\int_a^b g(x)dx$$

2. *Si g est positive sur I et f continue sur I alors*

$$\exists c \in [a,b] : \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx \text{ (1ère formule de la moyenne)}$$

Démonstration. Puisque les fonctions f et g sont Riemann intégrables sur I,

1. Supposons que g est positive sur I. $\forall x \in Im(f)g(x) \leq f(x)g(x) \leq M(f)g(x)$. Donc d'après la Proposition 1.3.3 nous avons

$$m(f)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M(f)\int_a^b g(x)dx$$

2. Si g est positive et f continue. D'après ce qui précède, on a

$$m(f)\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M(f)\int_a^b g(x)dx$$

L'application $t \mapsto f(t)\int_a^b g(x)dx$ est continue sur I. Donc d'après le théorème de valeurs intermédiares, on a

$$\exists c \in [a,b]\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

□

Proposition 2.2.34. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions Riemann intégrables sur I, et f une fonction définie sur I. $(f_n)_{n\leq n}$ converge uniformément vers f dans I alors f est Riemann intégrable sur I et*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

Démonstration. 1. Considérons un $\varepsilon > 0$. Puisque la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f, il existe un entier N_ε tel que pour tout entier $n > N_\varepsilon$ on ait

$$\forall x \in I \ f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon$$

En considérant une subdivision $X = (x_i)$ de I, on a pour tout $n \geq N_\varepsilon$

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \ m_i(f_n) - \varepsilon \leq m_i(f) \leq M_i(f) \leq M_i(f_n) + \varepsilon$$

Soit

$$s(f_n, X) - \varepsilon(b-a) \leq s(f, X) \leq S(f, X) \leq S(f_n, X) + \varepsilon(b-a).$$

De sorte que

$$0 \leq S(f, X) - s(f, X) \leq S(f_n, X) - s(f_n, X) + 2\varepsilon(b-a).$$

Chaque f_n étant Riemann intégrable, on a pour tout $n > N_\varepsilon$

$$\lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0} (S(f_n, X) - s(f_n, X)) = 0$$

Soit

$$\lim_{\mathfrak{p}(X)\to 0} (S(f, X) - s(f, X)) = 2\varepsilon(b-a)$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a le résultat.

2. D'après 1., nous avons
$\forall \varepsilon \ \mathbb{R}_+^* \ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \ \forall X \in \mathfrak{G}_I$,

$$s(f_n, X) - \varepsilon(b-a) \leq s(f, X) \leq S(f, X) \leq S(f_n, X) + +\varepsilon(b-a)$$

En faisant tendre $\mathfrak{p}(X)$ vers 0, nous obtenons

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx - \varepsilon(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f_n(x)dx + \varepsilon(b-a)$$

$$\forall \varepsilon \ \mathbb{R}_+^* \ \exists N_\varepsilon : \forall n > N_\varepsilon \ \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| \leq 2\varepsilon(b-a)$$

et le résultat s'ensuit

□

Définition 2.2.35. *Soit* $f : I \to \mathbb{C}$

1. f *est dite Riemann intégrable sur* I *si* $\mathcal{R}ef$ *et* Imf *le sont.*
2. *Si* f *est Riemann intégrable, sont intégrable de Riemann sur* I *est le nombre complexe*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathcal{R}ef(x)dx + i\int_a^b Imf(x)dx$$

Exemple 2.2.36. *1)* $\forall\, t \in \mathbb{R},\, f(t) = te^{2t}$. *La fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc l'application* $F : x \mapsto \int_0^x te^{2t}dt$ *est une application dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *avec*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\; F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x te^{2t}dt = xe^{2x}.$$

2) $\forall\, t \in \mathbb{R},\, f(t) = e^{i2t}ln(t^2+1)$. *La fonction* f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *donc l'application* $F : x \mapsto \int_0^x e^{i2t}ln(t^2+1)dt$ *est une application dérivable de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *avec*

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\; F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x e^{i2t}ln(t^2+1)dt = e^{i2x}ln(x^2+1).$$

Si nous considérons la fonction φ *définie par* $\varphi(u) = u^3 + 2u + 1$ *qui est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *la fonction*

$$u \mapsto G(u) = F \circ \varphi(u) = \int_0^{u^3+2u+1} e^{i2t}ln(t^2+1)dt$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ *avec* $\forall\, u \in \mathbb{R}$,
$G'(u) = F'(\varphi(u))\varphi'(u) = f(\varphi(u))\varphi'(u) = e^{i2(u^3+2u+1)}[ln((u^3+2u+1)^2+1)](3u^2+2)$

Soit $D \subset \mathbb{R}$ *et* $f : D \to \mathbb{R}$ *une fonction numérique définie sur* D.

Définition 2.2.37. *Une fonction* F *de* $D \to \mathbb{R}$ *est une primitive de* f *sur* D *si et seulement si*

1) F *est dérivable sur* D.

2) Pour tout $x \in D$, $F'(x) = f(x)$.

Proposition 2.2.38. *Si* F *et* G *sont deux primitives de* f *sur* D *alors* $F - G$ *est une constante sur chaque intervalle* $I \subset D$.

Démonstration. Soit a, x appartenant à I. On applique le Théorème des accroissements finis à la fonction $h = F - G$, dérivable sur $[a, x] \subset I$, comme somme de fonctions dérivables. On a donc

$$\exists c \in]a, x[: (F-G)(x)-(F-G)(a) = (x-a)(F-G)'(c) = F'(c)-G'(c) = 0.$$

Donc $F(x) - G(x) = F(a) - G(a)$, qui est une constante, indépendante de x qui peut parcourir l'ensemble des points de I. □

n^o Si f admet G comme primitive sur un intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est noté :

$$\int f(x) = G(x) + C$$

Théorème 2.2.39. *Toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possède une primitive, donnée par*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Démonstration. Cette intégrale existe pour tout $x \in [a, b]$ car f est continue sur cet intervalle, donc est Riemann intégrable. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} &= \frac{1}{h}[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt] \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \quad \text{(relat. de Chasles)} \end{aligned}$$

D'après le thérème de la moyenne,

$$\exists \xi \in [x, x+h], \text{ tel que } \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)$$

Donc,

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$$

(NB : $x = a$ ou $x = b$ on ne peut considérer que la limite à gauche ou à droite) □

Remarque 2.2.40. *Supposons que f est une fonction continue sur un intervalle compact $I = [a, b]$ Le Théorème* 1.4.7 *permet d'identifier l'intégration comme une antidifférentiation (à une constante près), puisque $F' = f$ pour $F(x) = \int_a^x f(t)dt$*

Proposition 2.2.41. *Supposons que f est Riemann intégrable sur tout intervalle compact $[\alpha, \beta]$ inclus dans D et admet G comme primitive sur D. Alors*

$$\forall\ [\alpha, \beta] \subset D,\ \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha) = [G(x)]_{\alpha}^{\beta}$$

Démonstration. Considérons une subdivision $X = \{x_0, ..., x_n\}$ de $[\alpha, \beta]$. Pour tout $x \in D$, $G'(x) = f(x)$ et pour tout $1 \leq i \leq n$, G est continue sur $[x_{i-1}, x_i]$ et dérivable sur $]x_{i-1}, x_i[$. D'après le théorème des accroissements finis,

$$\forall\ i \in \{1, ..., n\}, \exists\ t_i \in]x_{i-1}, x_i[: G(x_i) - G(x_{i-1}) = G'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

or

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^{n} [G(x_i) - G(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Ceci étant vrai pour toute subdivision $X \in \mathfrak{S}_{[\alpha,\beta]}$, on fait tendre le pas vers 0, et le résultat s'ensuit. □

Exemple 2.2.42. *1)* $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C$.

2) $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}^*,\ \int e^{\alpha t} dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + C$.

3) Soit $r \in]-1; +\infty[$,

$$\forall\ n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^{r+1}} \sum_{i=1}^{n} i^r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\frac{i}{n})^r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n})$$

où $f(x) = x^r$. f est continue sur $[0, 1]$, donc Riemann intégrable sur cet intervalle. En plus,

$$\int f(t)dt = \int x^r dt = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \textit{ sur } \mathbb{R}_+^*$$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f(x)dx = [\frac{x^{r+1}}{r+1}]_0^1 = \frac{1}{r+1}$$

2.2.43 Primitive des fonctions usuelles

fonctions	*primitives*	*intervalles*
$x^n n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & si \quad n \geq 0 \\ \mathbb{R}^* & si \quad n < 0 \end{cases}$
$(ax + b)^n \quad n \in \mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$	$\begin{cases} \mathbb{R} & si \quad n \geq 0 \\ \mathbb{R}^* & si \quad n < 0 \end{cases}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^*$
$x^\alpha \ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}^*_+$
$e^{\alpha x} \ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$	$\mathbb{R}$
$a^x \ a \in \mathbb{R}^*_+\setminus\{1\}$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$-\ln \lvert \cos x \rvert$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\ k \in \mathbb{Z}$
$cotanx$	$\ln \lvert \sin x \rvert$	$]k\pi, (k+1)\pi[\ k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + cotan^2 x$	$-cotanx$	$]k\pi, (k+1)\pi[\ k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[\ k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\begin{cases} Argthx \\ Argcothx \\ \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]-1, 1[\\ ]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\\ \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\} \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$]-1, 1[$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\begin{cases} Argchx \\ \text{-}Argch(\text{-}x) \\ \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - 1}\right\rvert \end{cases}$	$\begin{cases}]-1, 1[\\ ]-\infty, -1[\\ ]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[\end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$Argshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+h}} \ h \in \mathbb{R}^*$	$\ln(x + \sqrt{x^2 + h})$	$\begin{cases} \mathbb{R} & si \quad h > 0 \\ ]-\infty, -\sqrt{\lvert h \rvert}[\cup]\sqrt{\lvert h \rvert}, +\infty[& si \quad h < 0 \end{cases}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\ln \cosh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$-\tanh x$	$\mathbb{R}$

2.2.44 Règles de calcul

Proposition 2.2.45. *Soit* $(f_i, \alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ *un élément de* $(\mathbb{C}^I \times \mathbb{C})^n$*. Supposons que pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$*,* F_i *est une primitive de* f_i *sur* I*. Alors* $F =$

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i$ *est une primitive de* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ *sur* I.

Démonstration.

$$\forall\, x \in I, \forall\, i \in \{1, ..., n\},\ F_i'(x) = f_i(x)$$

$$\forall\, x \in I, (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i)'(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i F_i'(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x) = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i)(x)$$

□

Exemple 2.2.46.

$$(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1} \Longrightarrow \int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^i dx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{x^{i+1}}{i+1} + C$$

Proposition 2.2.47. *(Intégration par parties)*
Supposons que F *et* G *sont deux fonctions dérivables sur* D.

1) $\int F(x)G'(x)dx = F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)dx$.

2) si F' *et* G' *sont Riemann intégrables sur l'intervalle compact* $[a, b] \subset D$ *alors*

$$\int_a^b F(x)G'(x)dx = [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)dx$$

Démonstration. 1) On suppose F et G dérivable sur D.

$$\forall\, x \in D, (F(x)G(x))' = F'(x)G(x) + F(x)G'(x),$$

soit

$$\forall\, x \in D, F(x)G'(x) = (F(x)G(x))' - F'(x)G(x)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int F(x)G'(x)dx &= \int (F(x)G(x))'dx - \int F'(x)G(x)dx \\ &= F(x)G(x) - \int F'(x)G(x)dx \end{aligned}$$

2) On suppose F et G Riemann intégrables sur $[a, b]$, alors $F'G$ et FG' le sont aussi sur $[a, b]$. D'après la Proposition 0.0.9 on a

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x)G'(x)dx &= \int_a^b (F(x)G(x))'dx - \int_a^b F'(x)G(x)dx \\ &= [F(x)G(x)]_a^b - \int_a^b F'(x)G(x)dx \end{aligned}$$

□

Exemple 2.2.48. *Calculons la primitive* $\int e^x sin(x)dx$. *On posera successivement* $f = sin(x)$, *puis* $f = cos(x)$

$$\begin{aligned}\int e^x sin(x)dx &= e^x sin(x) - \int e^x cos(x)dx \\ &= e^x sin(x) - [e^x cos(x) - \int e^x(-sin(x))dx] \\ &= (sin(x) - cos(x))e^x - \int e^x sin(x)dx\end{aligned}$$

On met tous les intégrales dans le membre de gauche et obtient après division par 2 :

$$\int e^x sin(x)dx = \frac{(sin(x) - cos(x))e^x}{2} + C$$

Théorème 2.2.49. *(Formule de Taylor avec reste intégrable)*
Supposons que f *est de classe* $\mathcal{C}^{n+1}$ *sur l'intervalle* I, *avec* n *entier naturel. Alors pour tout* $x_0, x \in I$, *on a*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x - x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \tag{2.8}$$

Démonstration. Pour n = 0, la formule est vraie : en effet, elle s'écrit dans ce cas

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

Supposons maintenant (0.09) vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et que $f^{(n+1)}$ admette une derivée $f^{(n+2)}$ continue sur $[x_0, x]$. Ainsi les deux facteurs dans le reste intégral vérifient les conditions suivantes

$$u = f^{(n+1)} \Rightarrow u' = f^{(n+2)} \text{et } v'(t) = (x - t)^n \Rightarrow v(t) = \frac{1}{n+1}(x - t)^{n+1},$$

de sorte que nous avons par intégration par parties

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt = \left[f^{(n+1)}(t)\frac{-1}{n+1}(x - t)^{n+1}\right]_{x_0}^{x} + \frac{1}{n+1}\int_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(x-t)^{n+1}dt.$$

Et le résultat s'ensuit. □

Proposition 2.2.50. *Supposons que* $\varphi : J \to I$ *est dérivable sur l'intervalle* J *de* $\mathbb{R}$.
1. *Si* F *est une primitive de* f *sur* I

(a) *alors* $G = F \circ \varphi$ *est une primitive de* $(f \circ \varphi)\varphi'$ *sur* J.

(b) *et si* $(f \circ \varphi)\varphi'$ *est Riemann intégrable sur l'intervalle compact* $[\alpha, \beta]$ *inclus dans* J *et* f *Riemann intégrable sur* $\varphi([\alpha, \beta])$ *alors*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt$$

.

2. *Si* φ *est bijective et* G *est une primitive de* $(f \circ \varphi)\varphi'$ *sur* J

(a) *alors* $G = F \circ \varphi^{-1}$ *est une primitive de* f *sur* I,

(b) *et si* f *est Riemann intégrable sur l'intervalle compact* $[c, d]$ *inclus dans* I *et* $(f \circ \varphi)\varphi'$ *Riemann intégrable sur* J *alors*

$$\int_{c}^{d} f(t)dt = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = G(\varphi^{-1}(d)) - G(\varphi^{-1}(c))$$

Démonstration. 1) Si F est une primitive de f sur I

(a) $F \circ \varphi$ étant la composée de deux applications dérivables l'est aussi et

$$\forall\, t \in J, (F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

(b) D'après la Proposition 0.0.9 et 1, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = [F(x)]_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) &= [F \circ \varphi(t)]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\end{aligned}$$

2) Si φ est bijective et G est une primitive de $(f \circ \varphi)\varphi'$ sur J

(a) φ^{-1} est dérivable sur I avec : $\forall\, x \in I, (\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))}$ $F = G \circ \varphi^{-1}$ est dérivable sur I et $\forall\, x \in I$,

$$\begin{aligned}F'(x) = G'(\varphi^{-1}(x))(\varphi^{-1})'(x) &= f \circ \varphi(\varphi^{-1}(x))\varphi'(\varphi^{-1}(x))\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} \\ &= f(x)\end{aligned}$$

(b) D'après la Proposition 0.0.9 et 1, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{c}^{d} f(x)dx = [F(x)]_{c}^{d} = F(d) - F(c) &= F \circ \varphi(\varphi^{-1}(d)) - F \circ \varphi(\varphi^{-1}(c)) \\ &= G(\varphi^{-1}(d)) - G(\varphi^{-1}(c)) = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 2.2.51. *Calculons les intégrales suivantes :*

$$A = \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad B = \int_0^{5\pi} \frac{sin(t)}{2+cos(t)}dt$$

1. *Pour le calcul de A, nous posons* $f(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ *et nous considérons le changement de variable* $x = \phi(t) = sin(t)$*. On a*

$$-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4} \ \ et \ \ \phi'(t) = cos(t)$$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(sint)cos(t)dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-2sin^2(t)}{\sqrt{1-sin^2(t)}}cos(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} cos(2t)dt, \end{aligned}$$

   car pour $-\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$*, on a* $\sqrt{1-sin^2(t)} = cos(t)$ *et* $1-2sin^2(t) = cos(2t)$*. D'où* $A = \frac{sin(2t)}{2}|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$.

2. *Pour le calcul de B, nous posons* $\varphi(t) = cos(t)$*, soit* $\varphi'(t) = -sin(t)$ *de sorte que*

$$B = \int_0^{5\pi} \frac{sin(t)}{2+cos(t)}dt = \int_0^{5\pi} \frac{\varphi'(t)}{2+\varphi(t)}dt = \int_0^{5\pi} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

   avec $f(x) = \frac{1}{2+x}$*. Puisque* $\varphi(0) = 0$ *et* $\varphi(5\pi) = -1$ *nous obtenons*

$$B = \int_0^{5\pi} \frac{sin(t)}{2+cos(t)}dt = -\int_1^{-1} f(x)dx = -ln(x+2)|_{-1}^{1}$$

Corollaire 2.2.52. *(Changement de variable)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *continue et* $\varphi : J \to I$ *un difféomorphisme, c'est à dire une bijection telle que* φ *et* φ^{-1} *soient continument dérivables. Dans ce cas,*

$$\int f(x)dx = F(\varphi(x)) \ avec \ F(t) = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{2.9}$$

Autrement dit, $F \circ \varphi^{-1}$ *est une primitive de* f*. En termes d'intégrale définis, on a*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \tag{2.10}$$

Proposition 2.2.53. *Supposons que*

1. *f est positive et décroissante sur $[a, b]$*
2. *g est Riemann intégrable sur $[a, b]$*

Alors il existe un élément $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt$$

Démonstration. f étant monotone est Riemann intégrable sur $[a, b]$; par suite, fg est Riemann intégrable sur $[a, b]$. Posons pour tout $t \in [a, b]$, $G(t) = \int_a^t g(x)dx$. G est continue, donc bornée sur $[a, b]$. Posons

$$m = \inf\{G(t) : t \in [a, b]\} \text{ et } M = \sup\{G(t) : t \in [a, b]\}$$

Considérons un nombre réel $\epsilon > 0$, g et fg étant Riemann intégrable sur $[a, b]$, il existe un nombre $\delta > 0$ tel que

$$\forall\ X = (x_i)_{0\le i\le n} \in \mathfrak{S}_{[a,b]}\ p(X) < \delta \Rightarrow \begin{cases} \quad \int_a^b f(x)dx \le s(f, X) \le S(f, X) \\ \le \int_a^b f(x)dx + \varepsilon \\ \\ \quad (t_i)_{0\le i\le n} \in \prod_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i] \Rightarrow \\ \left|\sum_{i=1}^n f(t_i)g(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)g(t)dt\right| \\ < \varepsilon \end{cases}$$

Considérons un élément $X \in \mathfrak{S}_{[a,b]}$ vérifiant $p(X) < \delta$ et un élément $(t_i)_{0\le i\le n}$ de $\prod_{i=1}^n [x_{i-1}, x_i]$ alors

$$\forall\ i \in \{1, ..., n\}, m_i(g) = \inf_{t\in[x_{i-1},x_i]} g(t) \le \frac{1}{x_i - x_{i-1}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(t)dt \le \sup_{t\in[x_{i-1},x_i]} g(t) = M_i(g)$$

par conséquent

$$\forall\ i \in \{1, ..., n\}, \exists\ k_i[m_i(g), M_i(g)] : k_i(x_i - x_{i-1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(t)dt = G(x_i) - G(x_{i-1})$$

de sorte que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)k_i(x_i - x_{i-1}) &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(G(x_i) - G(x_{i-1}))\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)G(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)G(x_{i-1})\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)G(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} f(t_{i+1})G(x_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (f(t_i) - f(t_{i+1}))G(x_i) + G(b)f(t_n) - G(a)f(t_1)\end{aligned}$$

Donc

$$mf(t_1) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)k_i(x_i - x_{i-1}) \leq Mf(t_1) \tag{2.11}$$

ceci venant du fait que $m \leq G(t) \leq M$. Or

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)k_i(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)g(t)dt\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)g(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)g(t)dt\right|\\ &+ \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)k_i(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_i)g(t_i)(x_i - x_{i-1})\right|\\ &\leq \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(k_i) - g(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| + \epsilon\\ &\leq \sum_{i=1}^{n} f(a)(M_i(g) - m_i(g))(x_i - x_{i-1}) + \epsilon\\ &= f(a)(S(g, X) - s(g, X)) + \epsilon\end{aligned}$$

Soit

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)k_i(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq (2f(a) + 1)\epsilon \tag{2.12}$$

Des Relations (4) et (5) nous obtenons

$$mf(t_1) - (2f(a) + 1)\epsilon \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq Mf(t_1) + (2f(a) + 1)\epsilon$$

Celà donne, en prenant $t_1 = a$,

$$mf(a) - (2f(a)+1)\epsilon \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq Mf(a) + (2f(a)+1)\epsilon.$$

ϵ étant quelconque dans $\mathbb{R}_+^*$,nous avons en fait

$$mf(a) \leq \int_a^b f(t)g(t)dt \leq Mf(a).$$

Puisque G est continue sur $[a,b]$, le Théorème des valeurs intermédiaires donne

$$\exists\, c \in [a,b] : \int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)G(c)$$

C'est à dire

$$\exists\, c \in [a,b] : \int_a^b f(t)g(t)dt = f(a)\int_a^c g(t)dt$$

□

2.2.54 Exemples classiques

2.2.55 Formes $\int sin^p(x)cos^q(x)dx$, $(p,q) \in \mathbb{N}^2$

1. *1er cas : p ou q est impair.*
   $p = 2n+1$ *avec* $n \in \mathbb{N}$.*En utilisant le changement de variables* $t = cos(x)$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
\int sin^p(x)cos^q(x)dx &= \int sin^{2n}(x)cos^q(x)sin(x)dx \\
&= -\int (1-cos^2(x))^n cos^q(x)(cos(x))'dx \\
&= -\int (1-t^2)^n t^q dt \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int t^{2k+q}dt \\
&= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{t^{2k+q+1}}{2k+q+1} + C \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \frac{cos^{2k+q+1}(x)}{2k+q+1} + C
\end{aligned}$$

   $q = 2m+1$ *avec* $m \in \mathbb{N}$. *Utiliser le changement de variables* $t = sinx$ *et procéder comme précédemment.*

2. *2ème cas : p et q sont pairs.*
   Il convient de linéariser $sin^p(x)cos^q(x)$ *en utilisant les formules*
   $$cos^2(\varphi) = \frac{1+cos(2\varphi)}{2},\ sin^2(\varphi) = \frac{1-cos(2\varphi)}{2}\ et\ sin(\varphi)cos(\varphi) = \frac{1}{2}sin(2\varphi)$$
   ou les formules d'Euler
   $$cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\ et\ sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$

Exemple 2.2.56. *1) calcul des primitives de* $\int sin^3(x)cos^{15}(x)dx$

$$\begin{aligned}\int sin^3(x)cos^{15}(x)dx &= -\int(1-cos^2(x))cos^{15}(x)(cos(x))'dx\\ &= -\int(1-t^2)t^{15}dt\end{aligned}$$

$$\int sin^3(x)cos^{15}(x)dx = -\frac{t^{16}}{16}+\frac{t^{18}}{18}+C$$

2) Calcul des primitives de $\int sin^2(x)cos^4(x)dx$

$$\begin{aligned}sin^2(x)cos^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\\ &= -\frac{1}{2^2}(e^{i2x}-2+e^{-i2x})\frac{1}{2^4}(e^{i4x}+4e^{i2x}+6+4e^{-i2x}+e^{-i4x})\\ &= \frac{1}{64}(e^{i6x}+2e^{i4x}-e^{i2x}-4-e^{-i2x}+2e^{-i4x}+2e^{i6x})\\ &= -\frac{1}{32}(-2-cos(2x)+2cos(4x)+cos(6x))\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\int sin^2(x)cos^4(x)dx &= \int -\frac{1}{32}(-2-cos(2x)+2cos(4x)+cos(6x))dx\\ &= -\frac{1}{32}(-2x-\frac{1}{2}sin(2x)+\frac{1}{2}sin(4x)+\frac{1}{6}sin(6x))+C\end{aligned}$$

2.2.57 Primitive des fractions rationnelles

En utilisant la division euclidienne, toute fonction rationnelle R peut se mettre sous la forme

$$R(x) = \mathcal{Q}(x)+\frac{N(x)}{D(x)}$$

oú $\mathcal{Q}$,*N et D sont des polynômes vérifiant* $d°(N) < d°(D)$.*La recherche de la primitive de Q ne posant pas de difficulté, nous nous occupons de* $\frac{N}{D}$.

Proposition 2.2.58. *Supposons que le nombre réel a est un zéro d'ordre $k \geq 1$ de D : $D(x) = (x-a)^k D_1(x)$ avec $D_1(a) \neq 0$. Alors*

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{s=1}^{k} \frac{A_s}{(x-a)^s} + \frac{N_1(x)}{D_1(x)} \text{ avec } d^\circ(N_1) < d^\circ(D_1)$$

Démonstration.

$$\forall\, A \in \mathbb{R},\ \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{N(x) - AD_1(x)}{(x-a)^k D_1(x)}$$

Déterminons A_k de façon à avoir $N(a) - AD_1(a) = 0$. Alors $A_k = \frac{N(a)}{D(a)}$ et $N(x) - A_k D_1(x) = (x-a)N_k(x)$. Par suite,

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{N_k(x)}{(x-a)^{k-1}D_1(x)} \text{ avec } d^\circ(N_k) < k-1+d^\circ(D)$$

En ittérant k fois ce procédé nous obtiendrons le résultat anoncé. □

Proposition 2.2.59. *Supposons que $D(x) = (x^2+px+q)^2 D_1(x)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, $D_1(x)$ n'est pas divisible par x^2+px+q et $\Delta = p^2 - 4q < 0$. Alors,*

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{s=1}^{k} \frac{A_s x + B_s}{(x^2+px+q)^s} + \frac{N_1(x)}{D_1(x)} \text{ avec } d^\circ(N_1) < d^\circ(D_1)$$

Démonstration.

$$\forall\, A, B \in \mathbb{R},\ \frac{N(x)}{D(x)} = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} + \frac{N(x) - (Ax+B)D_1(x)}{(x^2+px+q)^k D_1(x)}$$

Déterminons A_k et B_k de sorte que $N(x) - (Ax+B)D_1(x)$ soit divisible par x^2+px+q. Pour celà il suffit que $N(x) - (A_k x + B_k)D_1(x)$ admette les mêmes zéros $\alpha \pm i\beta$ que x^2+px+q :

$$N(\alpha+i\beta) - (A_k(\alpha+i\beta) + B_k)D_1(\alpha+i\beta) = 0$$

,

$$A_k(\alpha+i\beta) + B_k = \frac{N(\alpha+i\beta)}{D_1(\alpha+i\beta)} = K + iL \text{ avec } L, K \in \mathbb{R}$$

,

$$\begin{cases} A_k\alpha + B_k = K \\ A_k\beta = L \end{cases} \Rightarrow A_k = \frac{L}{\beta} \text{ et } B_k = K - \frac{L}{\beta}\alpha.$$

Alors $N(x) - (A_k x + B_k)D_1(x) = (x^2+px+q)N_k(x)$ et

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A_k x + B_k}{(x^2+px+q)^k} + \frac{N_k(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}D_1(x)} \text{ avec } d^\circ(N_k) < k-1+d^\circ(D)$$

En ittérant k fois ce procédé nous obtiendrons le résultat anoncé. □

Corollaire 2.2.60. *Supposons que*

$$D(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^{k_i}\prod_{j=1}^{m}(x^2+p_jx+q_j)^{l_j} \text{ avec } p_j^2-4q_j<0 \text{ pour } 1\leq j\leq m$$

Alors $\frac{N(x)}{D(x)}$ *se decompose en éléments simples comme suit*

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{s=1}^{k_i}\frac{A_{is}}{(x-a_i)^s}\right] + \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{s=1}^{l_j}\frac{B_{js}x+C_{js}}{(x^2+p_jx+q_j)^s}\right]$$

Démonstration. Conséquence immédiate des Propositions 0.0.19 et 0.0.20 □

La recherche des primitives de $\frac{N}{D}$ *se ramène donc au calcul de primitives de la forme*

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n} \text{ et } \int\frac{(ax+b)}{(x^2+px+q)^n}dx \text{ avec } p^2-4q<0$$

Or nous avons

$$\int\frac{dx}{x-a} = ln|x-a|+C \tag{2.13}$$

$$\int\frac{dx}{(x-a)^n} = \frac{1}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C \text{ si } n\geq 2 \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{(ax+b)}{x^2+px+q}dx &= \frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + (b-\frac{ap}{2})\int\frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}} \\ &= \frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + (b-\frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}})\int\frac{\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}}{(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1}dx \\ &= \frac{a}{2}ln(x^2+px+q) + \frac{2b-ap}{\sqrt{4q-p^2}}Arctan(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})+C\end{aligned}$$

Pour $n\geq 2$

$$\begin{aligned}\int\frac{(ax+b)}{(x^2+px+q)^n}dx &= \frac{a}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx + (b-\frac{ap}{2})\int\frac{dx}{\left[(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}\right]^n} \\ &= \frac{a}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{2b-ap}{2}\left(\frac{4}{4q-p^2}\right)^n \\ &\int\frac{dx}{\left[(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1\right]^n}\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variables $t = \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}$*, nous avons*

$$\int \frac{dx}{\left[(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1\right]^n} = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\int \frac{dx}{(t^2+1)^n}.$$

En posant $t = tan(\varphi)$*, nous obtenons*

$$\int \frac{dx}{(t^2+1)^n} = \int \frac{d\varphi}{(1+tan^2(\varphi))^{n-1}} = \int cos^{2n-2}(\varphi)d\varphi$$

qui est une primitive déjà étudiée.

Exemple 2.2.61. *1) Calcul de* $\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx$
La décomposition en éléments simple donne

$$\frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)} = -\frac{2}{9}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{2}{9}\frac{1}{x-2}$$

D'où les primitives

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{(x+1)^3(x-2)}dx &= -\frac{2}{9}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{(x+1)^2}dx - \\ &\int \frac{1}{(x+1)^3}dx + \frac{2}{9}\int \frac{1}{x-2}dx \\ &= \frac{2}{9}ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right| - \frac{2x-1}{(x+1)^2} + C\end{aligned}$$

2) Calcul de $\int \frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)}dx$
Décomposition en éléments simple

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+2x+3} + \frac{dx+e}{(x^2+2x+3)^2}$$

En développant et en identifiant les coéfficients ou par autres méthodes, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} &= \frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{(x^2+2x+3)^2} \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} - \frac{2}{(x^2+2x+3)^2}\end{aligned}$$

Calcul de

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}dx = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \int \frac{dx}{4\left[(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1\right]^2}$$

Posons $\frac{x+1}{\sqrt{2}} = t$ *et donc* $dx = \sqrt{2}t$. *On obtient*

$$\int \frac{dx}{4\left[(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1\right]^2} = \int \frac{\sqrt{2}}{4(t^2+1)^2}dt = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$$

Posons $t = tan(\phi)$ *on a* $d\phi = \frac{dt}{t^2+1}$. *D'où*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}dx &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int \frac{d\phi}{tan^2(\phi)+1} = \frac{\sqrt{2}}{8}Arctan(t) + \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{t}{t^2+1} + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}Arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{8}\sqrt{2}\frac{x+1}{x^2+2x+3} + C\end{aligned}$$

Conclusion

$$\frac{x^4+4x^3+11x^2+12x+8}{(x^2+2x+3)^2(x+1)} = ln|x+1| - \frac{1}{2}\frac{x+2}{x^2+2x+3} - \frac{\sqrt{2}}{4}Arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C$$

2.2.62 Primitive des fonctions rationnelles en *sin* et *cos*

Règle de Bioche

Posons $f(x) = F(sin(x), cos(x))$. *On étudie l'invariance de* $f(x)dx$ *quand on remplace* x *ou par* $-x$, *ou* $\pi - x$ *ou par* $\pi + x$

1. *Si deux au moins des changements laissent* $f(x)dx$ *invariant, alors on utilise le changement de variables* $cos2x = t$
2. *Si* $f(x)dx$ *est invariant quand on remplace* x *par :*
   (a) $-x$ *alors on pose* $cosx = t$
   (b) $\pi - x$ *alors on pose* $sinx = t$
   (c) $\pi + x$ *alors on pose* $tanx = t$
3. *Dans tous les cas on peut utiliser le changement de variables* $tan(\frac{x}{2}) = t$

Exemple 2.2.63. 1. *Calcul de* $\int \frac{sinx}{1+sinx}dx$
Le changement de variable préconisé par la règle Bioche est $tan(\frac{x}{2}) = t$. *Alors* $sinx = \frac{2t}{1+t^2}$ *et* $dt = (1+tan^2(\frac{x}{2}))\frac{1}{2}dx$, *soit* $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$ *donc*

$$\int \frac{sinx}{1+sinx}dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = 4\int \frac{t}{(1+t^2)(1+t)^2}dt$$

$$\begin{aligned}\frac{t}{(1+t^2)(1+t)^2} &= \frac{at+b}{t^2+1}+\frac{c}{t+1}+\frac{d}{(t+1)^2}\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{t^2+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right]\end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{t}{(1+t^2)(1+t)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2+1}dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(t+1)^2}dt$$

et par suite

$$\int \frac{sinx}{1+sinx}dx = 2\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{tan(\frac{x}{2})+1}\right]+C = x+\frac{2}{tan(\frac{x}{2})+1}+C$$

1. *Calcul de* $\int \frac{dx}{2-sin^2(x)}$.
   Le changement de variable préconis par la règle Bioche est $tanx = t$. *Alors* $sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$ *et* $(1+t^2)dx = dt$, *donc*

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2-sin^2(x)} &= \int \frac{1}{2-\frac{t^2}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(\frac{t}{\sqrt{2}})^2+1}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{d(\frac{t}{\sqrt{2}})}{(\frac{t}{\sqrt{2}})^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}Arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C = \frac{1}{\sqrt{2}}Arctan\frac{tanx}{\sqrt{2}}+C\end{aligned}$$

2.2.64 Primitive de fonctions rationnelle de fonctions hyperboliques

$\int R(chx, shx)dx$ *où* $R(X,Y)$ *est une fonction rationnelle en* X *et* Y. *En utilisant le règle de Bioche*

1. $\int R(cosx, sinx)dx$ *se calcule en utilisant* $cos2x = t$ *alors* $\int R(chx, shx)dx$ *se calcule avec* $ch2x = t$.
2. $\int R(cosx, sinx)dx$ *se calcule en utilisant* $cosx = t$ *alors* $\int R(chx, shx)dx$ *se calcule avec* $chx = t$.
3. $\int R(cosx, sinx)dx$ *se calcule en utilisant* $sinx = t$ *alors* $\int R(chx, shx)dx$ *se calcule avec* $shx = t$.
4. $\int R(cosx, sinx)dx$ *se calcule en utilisant* $tanx = t$ *alors* $\int R(chx, shx)dx$ *se calcule avec* $thx = t$.
5. *dans tous les cas on peut utiliser* $e^x = t$ *ou* $th(\frac{x}{2}) = t$

Exemple 2.2.65. *1. Calcul de* $\int \frac{dx}{sh^3x}$.
Les règles de Bioche préconisent pour $\int \frac{dx}{sin^3x}$ *le changement de variable* $cosx = t$. *Posons* $chx = t$. *Alors,*

$$ch^2x - sh^2x = 1 \Rightarrow sh^2x = ch^2x - 1 \text{ et } dt = shxdx$$

donc

$$\int \frac{dx}{sh^3x} = \int \frac{shxdx}{sh^4x} = \int \frac{dt}{(t^2-1)^2}$$

or

$$\begin{aligned}\frac{1}{(t^2-1)^2} &= \frac{1}{(t-1)^2(t+1)^2} = \frac{a}{t+1} + \frac{b}{(t+1)^2} + \frac{c}{t-1} + \frac{d}{(t-1)^2} \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{t+1} + \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{(t-1)^2}\right]\end{aligned}$$

D'où

$$\int \frac{1}{(t^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left[ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-1}\right] + C = \frac{1}{4}ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - \frac{1}{2}\frac{1}{t^2-1} + C$$

soit

$$\int \frac{dx}{sh^3x} = \frac{1}{4}ln\left|\frac{chx+1}{chx-1}\right| - \frac{chx}{2shx} + C$$

2. *Calcul de* $\int_0^{ln2} \frac{dx}{5shx - 4chx}$.
Posons $e^x = t$ *et donc* $dx = \frac{dt}{t}$, $x = 0 \Leftrightarrow t = 1$ *et* $x = ln2 \Leftrightarrow t = 2$

$$\begin{aligned}\int_0^{ln2} \frac{dx}{5shx - 4chx} &= \int_0^{ln2} \frac{dx}{\frac{5}{2}(e^x - e^{-x}) - 2(e^x + e^{-x})} = 2\int_0^{ln2} \frac{dx}{e^x - 9e^{-x}} \\ &= 2\int_1^2 \frac{dx}{t^2 - 9} = 2\int_1^2 \frac{1}{6}\left(\frac{1}{t-3} - \frac{1}{t+3}\right)dt \\ &= \frac{1}{3}\left[ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\right]_1^2 = \frac{1}{3}ln\frac{2}{5}\end{aligned}$$

2.2.66 Intégrales abéliennes

Ce sont les intégrales de la forme $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$ *ou* $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ *avec* $R(X, Y)$ *une fonction rationnelle en* X *et* Y *et* n *entier.*

1. *Dans le cas de* $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}})dx$, *le changement de variables* $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ *nous ramène à un calcul de primitive de fonction rationnelle en* t.

2. *Dans le cas de* $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, *les changements de variables*
   - $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x$ *si* $a > 0$.
   - $\sqrt{a\frac{x-\alpha}{x-\beta}} = t$ *si* $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$ *avec* $\alpha \neq \beta$, *nous ramène à des calculs de primitives de fonctions rationnelles en* t.

Exemple 2.2.67. 1. *Calcul de* $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$
On a : $\sqrt{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^3$ *et* $\sqrt[3]{x+1} = (\sqrt[6]{x+1})^2$. *Posons* $t = \sqrt[6]{x+1}$ *et on a* $dx = 6t^5dt$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx &= \int \frac{t^3-t^2}{t^3+t^2}6t^5dt = \int 6\frac{t^6-t^5}{t+1}dt \\ &= 6\int \left(t^5-2t^4-2t^3-2t^2+2t-2+\frac{2}{t+1}\right)dt \\ &= 6\left(\frac{1}{6}t^6-\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{4}t^4-\frac{2}{5}t^3+t^2-2t+2ln|t+1|\right)+C\end{aligned}$$

En remplaçant t *par sa valeur en* x, *on obtient*

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx &= 1+x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{x+1}^5+3\sqrt[6]{x+1}^4-4\sqrt[6]{x+1}^3 \\ &+6\sqrt[6]{x+1}^2-12\sqrt[6]{x+1}+12ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right|+C \\ &= 1+x-\frac{12}{5}\frac{(x+1)^5}{\sqrt[6]{x+1}}+3\sqrt[6]{x+1}^4-4\sqrt[6]{x+1}^3+6\sqrt[6]{x+1}^2 \\ &-12\sqrt[6]{x+1}+12ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right|+C\end{aligned}$$

2. *Calcul de* $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$
Posons $\sqrt{x^2+x+1} = x+t$. *On a* $x^2+x+1 = x^2+2tx+t^2$,
$x(1-2t) = t^2-1 \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{1-2t}$,

$$dx = -2\frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2}dt$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{-2(t^2-t+1)dt}{(1-2t)^2(2\frac{t^2-1}{1-2t}+t)} &= -2\int \frac{t^2-t+1)dt}{(1-2t)(t-2)} \\
&= -2\int \left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{t}{(1-2t)(t-2)}\right) dt \\
&= -2\int \left[-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\frac{1}{(1-2t)}-\frac{2}{3}\frac{1}{t-2}\right)\right] dt \\
&= -2\left(\frac{-t}{2}+\frac{1}{4}ln|1-2t|-ln|t-2|\right)+C \\
&= t+ln\frac{(t-2)^2}{\sqrt{1-2t}}+C \\
&= \sqrt{x^2+x+1}-x+ln\left(\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x-2)^2}{\sqrt{|1-2\sqrt{x^2+x+1}-2x|}}\right)+C
\end{aligned}$$

3. *Calcul de* $\int \frac{x-1}{x+1}\sqrt{2x-x^2}dx$.
En remarquant que $2x-x^2=-x(x-2)$, *posons* $t=\sqrt{\frac{2-x}{x}}$ *et* $t^2=\frac{2-x}{2}$ *donc* $2tdt=\frac{-x-2+x}{x^2}dx=\frac{-2}{x^2}dx$,

$$\frac{x-1}{x+1}=\frac{\frac{2}{t^2+1}-1}{\frac{2}{t^2+1}+1}=\frac{2-t^2-1}{2+t^2+1}=\frac{1-t^2}{3+t^2}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x+1}\sqrt{2x-x^2}dx = \int \frac{x-1}{x+1}\sqrt{-(2-x)x}dx &= \int \frac{x-1}{x+1}\sqrt{\frac{2-x}{x}}x^2dx \\
&= \int \frac{1-t^2}{3+t^2}t\frac{4t}{(t^2+1)^2}(-1)\frac{2}{t^2+1}dt = -8\int \frac{(1-t^2)t}{(3+t^2)(t^2+1)^3}
\end{aligned}$$

qui est une primitive déjà étudiée.

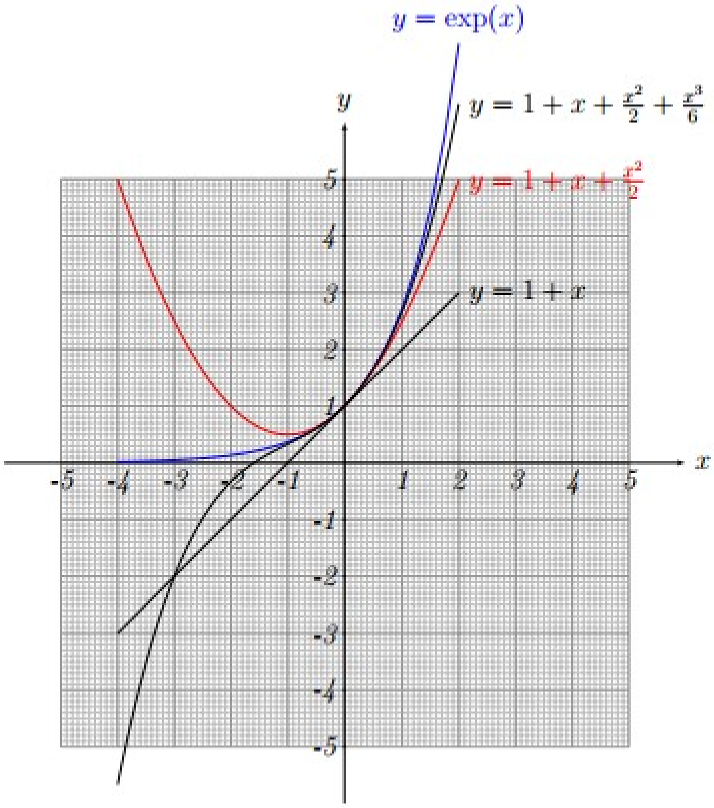
Chapitre 3

Développements limités

Motivation

Prenons l'exemple de la fonction exponentielle. Une idée du comportement de la fonction $f(x) = expx$ *autour du point* $x = 0$ *est donné par sa tangente, dont l'équation est* $y = 1+x$. *Nous avons approximé le graphe par une droite. Si l'on souhaite faire mieux, quelle parabole d'équation* $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$ *approche le mieux le graphe de* f *autour de* $x = 0$? *Il s'agit de la parabole d'équation* $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$.

Cette équation a la propriété remarquable que si on note $g(x) = \exp(x) - (1 + x + \frac{1}{2}x^2)$ *alors* $g(0) = 0$, $g^{'}(0) = 0$ *et* $g^{''}(0) = 0$. *Trouver l'équation de cette parabole c'est faire un développement limité à l'ordre 2 de la fonction* f . *Bien sûr si l'on veut être plus précis, on continuerait avec une courbe du troisième degré qui serait en fait* $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + 16x^3$.



Dans ce chapitre, pour n'importe quelle fonction, nous allons trouver le polynôme de degré n qui approche le mieux la fonction. Les résultats ne sont valables que pour x autour d'une valeur fixée (ce sera souvent autour de 0). Ce polynôme sera calculé à partir des dérivées successives au point considéré. Sans plus attendre, voici la formule, dite formule de Taylor-Young

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x).$$

La partie polynomiale $f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n$ est le polynôme de degré n qui approche le mieux $f(x)$ autour de $x = 0$. La partie $x^n\epsilon(x)$ est le reste dans lequel $\epsilon(x)$ est une fonction qui tend vers 0 (quand x tend vers 0) et qui est négligeable devant la partie polynomiale.

3.1 Formules de Taylor

Nous allons voir trois formules de Taylor, elles auront toutes la même partie polynomiale mais donnent plus ou moins d'informations sur le reste.

Nous commencerons par la formule de Taylor avec reste intégral qui donne une expression exacte du reste. Puis la formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$ qui permet d'obtenir un encadrement du reste et nous terminons avec la formule de Taylor-Young très pratique si l'on n'a pas besoin d'information sur le reste.
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue. f est de classe $\mathcal{C}^0$ si f est continue sur I. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.1.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 3.1.2. *(Formule de Taylor avec reste intégral).*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ et soit $a, x \in I$. Alors

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Nous noterons $T_n(x)$ la partie polynomiale de la formule de Taylor (elle dépend de n mais aussi de f et a) :

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Remarque
En écrivant $x = a+h$ (et donc $h = (x-a)$) la formule de Taylor précédente devient (pour tout a et $a+h$ de I) :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \int_0^h \frac{f^{(n+1)}(a+t)}{n!}(h-t)^n dt.$$

Exemple 3.1.3. *La fonction $f(x) = \exp(x)$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $I = \mathbb{R}$ pour tout n. Fixons $a \in \mathbb{R}$. Comme $f'(x) = \exp(x)$, $f''(x) = \exp(x), \cdots$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\exp(x) = \exp(a) + \exp(a)(x-a) + \cdots + \frac{\exp(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{\exp(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Bien sûr si l'on se place en $a = 0$ alors on retrouve le début de notre approximation de la fonction exponentielle en $x = 0$: $\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

Preuve du théorème. *Montrons cette formule de Taylor par récurrence sur $k \leq n$:*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}dt.$$

(Pour éviter les confusions entre ce qui varie et ce qui est fixe dans cette preuve on remplace x par b.)
Initialisation. *Pour $n = 0$, une primitive de $f'(t)$ est $f(t)$ donc $\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)$, donc $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)dt$. (On rappelle que par convention $(b-t)^0 = 1$ et $0! = 1$.)*
Hérédité. *Supposons la formule vraie au rang k-1. Elle s'écrit $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}(b-a)^{k-1} + \int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt$.*
On effectue une intégration par parties dans l'intégrale $\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt$. En posant $u(t) = f^{(k)}(t)$ et $v'(t) = \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}$, on a $u' = f^{(k+1)}(t)$ et $v = -\frac{(b-t)^k}{k!}$; alors

$$\begin{aligned}\int_a^b f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt &= \left[-f^{(k)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}\right]_a^b + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}dt \\ &= f^{(k)}(a)\frac{(b-t)^k}{k!} + \int_a^b f^{(k+1)}(t)\frac{(b-t)^k}{k!}dt.\end{aligned}$$

Ainsi lorsque l'on remplace cette expression dans la formule au rang $k-1$ on obtient la formule au rang k.
Conclusion. *Par le principe de récurrence la formule de Taylor est vraie pour tous les entiers n pour lesquels f est classe $\mathcal{C}^{n+1}$.* □

3.1.4 Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$

Théorème 3.1.5. *(Formule de Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ et soit $a, x \in I$. Il existe

un réel c entre a et x tel que :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Exemple 3.1.6.
Soit $a, x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $n \geq 0$ il existe c entre a et x tel que $\exp(x) = \exp(a)(x-a) + \cdots + \dfrac{\exp(a)}{n!} + \dfrac{\exp(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$.
Dans la plupart des cas on ne connaîtra pas ce c. Mais ce théorème permet d'encadrer le reste. Ceci s'exprime par le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.7.
Si en plus la fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ est majorée sur I par un réel M, alors pour tout $a, x \in I$, on a :

$$|f(x) - T_n(x)| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple 3.1.8.
Approximation de $\sin(0.01)$
Soit $f(x) = \sin(x)$. Alors $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f^{(3)}(x) = -\cos(x)$, $f^{(4)}(x) = \sin(x)$. On obtient donc $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$. La formule de Taylor ci-dessus en $a = 0$ àà l'ordre 3 devient $f(x) = 0 + 1.x + 0.\dfrac{x^2}{2!} - 1.\dfrac{x^3}{3!} + f^{(4)}(c)\dfrac{x^4}{4!}$, c'est à dire $f(x) = x - \frac{x^3}{6} + f^{(4)}(c)\frac{x^4}{24}$, pour un certain c entre 0 et x.
Appliquons ceci pour $x = 0,01$. Le reste étant petit on trouve alors

$$\sin(0,01) \approx 0,01 - \frac{(0,01)^3}{6} = 0,00999983333\cdots$$

On peut même savoir quelle est la précision de cette approximation : Comme $f^{(4)}(x) = \sin(x)$ alors $|f^{(4)}(c)| \leq 1$. Donc $\left|f(x) - \frac{x^3}{6}\right| \leq \frac{x^4}{4!}$. Pour $x = 0,01$ cela donne $|\sin(0,01) - (0,01 - \frac{(0,01)^3}{6})| \leq \frac{(0,01)^4}{24}$. Comme $\frac{(0,01)^4}{24} \approx 4,16.10^{-10}$ alors notre approximation donne au moins 8 chiffres exacts après la virgule.

Remarque

- *Dans ce théorème, l'hypothèse f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ peut-être affaiblie en f $n+1$ fois dérivable sur I,*
- *le réel c entre a et x signifie $c \in]a, x[$ ou $c \in]x, a[$,*
- *Pour $n = 0$ c'est exactement l'énoncé du théorème des accroissements finis : il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$.*
- *Si I est un intervalle borné et f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, alors $f^{(n+1)}$ est continue sur I donc il existe un M tel que $|f^{(n+1)}(x) \leq M$ pour tout $x \in i$. Ce qui permet toujours d'appliquer le corollaire.*
  Pour la preuve du théorème nous aurons besoin d'un résultat préliminaire.

Lemme 3.1.9. *(Egalité de la moyenne)*
supposons $a < b$ et soient $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec v positive ou nulle . Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b u(t)v(t)dt = u(c) \int_a^b v(t)dt$.

Démonstration *Notons $m = \inf\limits_{t \in [a,b]} u(t)$ et $M = \sup\limits_{t \in [a,b]} u(t)$. On a alors $\int_a^b v(t)dt \leq \int_a^b u(t)v(t)dt \leq M \int_a^b v(t)dt$ (car $v \geq 0$). Ainsi $m \leq \frac{\int_a^b u(t)v(t)dt}{\int_a^b v(t)dt} \leq M$. Puisque u est continue sur $[a, b]$ elle prend toutes les valeurs comprises entre m et M (théorème des valeurs intermédiaires). Donc il existe $c \in [a, b]$ avec $u(c) = \frac{\int_a^b u(t)v(t)dt}{\int_a^b v(t)dt}$*

Preuve du théorème *Pour la preuve nous montrerons la formule de Taylor pour $f(b)$ en supposant $a < b$. Nous montrerons seulement $c \in [a, b]$ au lieu de $c \in]a, b[$.*
Posons $u(t) = f^{(n+1)}(t)$ et $v(t) = \frac{(b-t)^n}{n!}$ (qui est bien positive ou nulle). La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :$f(b) = T_n(a) + \int_a^b u(t)v(t)dt$. Par le lemme 1, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b u(t)v(t)dt = u(c) \int_a^b v(t)dt$. Ainsi le reste est $\int_a^b u(t)v(t)dt = f^{(n+1)}(c) \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!}dt = f^{(n+1)}(c) \left[-\frac{(b-t)^(n+1)}{(n+1)!} \right] = f^{(n+1)}(c) \frac{(b-a)^(n+1)}{(n+1)!}$. Ce qui donne la formule recherchée.

3.1.10 Formule de Taylor-Young

Théorème 3.1.11. *(Formule de Taylor-Young)*
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et soit $a \in I$. Alors pour tout $x \in I$

on a :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdot + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x),$$

où ϵ *est une fonction définie sur* I *telle que* $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

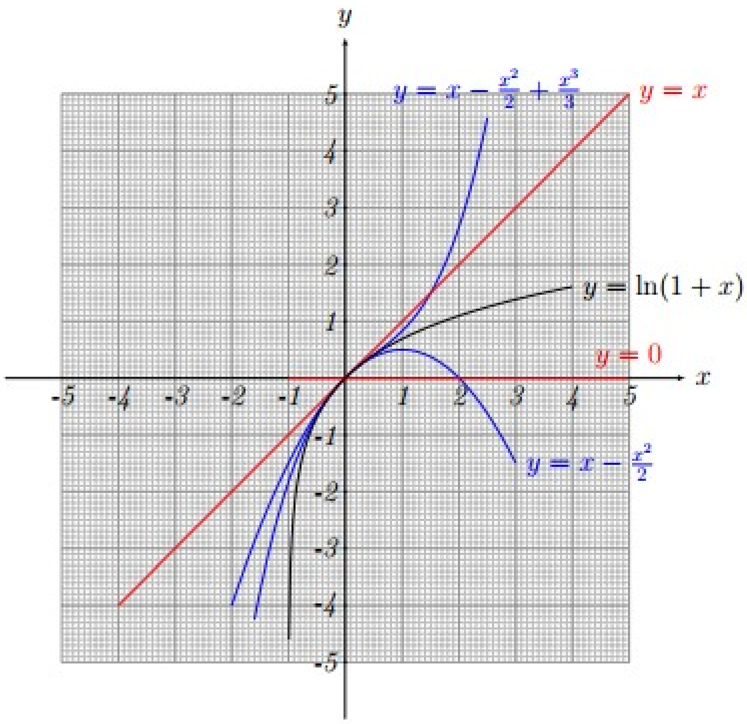
Preuve *f étant une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ nous appliquons la formule de Taylor avec reste $f^{(n)}(c)$ au rang n-1. Pour tout x, il existe $c = c(x)$ compris entre a et x tel que $f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdot+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n$. Que nous réécrivons $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdot + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$. On pose $\epsilon(x) = \frac{f^{(n)}(c) - f^{(n)}(a)}{n!}$. Puisque $f^{(n)}$ est continue et que $c(x) \to a$ alors $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.*

3.1.12 Un exemple

Soit $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto ln(1+x)$; r est infiniment dérivable. Nous allons calculer les formules de Taylor en 0 pour les premiers ordres. Tous d'abord $f(0) = 0$. Ensuite $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ donc $f'(0) = 1$. Ensuite $f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ donc $f''(0) = -1$. Puis $f^{(3)}(x) = +2\frac{1}{(1+x)^3}$ donc $f^{(3)}(0) = +2$. Par récurrence on montre que $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{(1+x)^n}$ et donc $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Ainsi pour $n > 0$: $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n = (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$. Voici donc les premiers polynômes de Taylor :

$$T_0(x) = 0 \quad T_1(x) = x \quad T_2(x) = x - \frac{x^2}{2} \quad T_3(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Les formules de Taylor nous disent que les restes sont de plus en plus petits lorsque n croît. Sur le dessins les graphes des polynômes T_0, T_1, T_2, T_3 s'approchent de plus en plus du graphe de f . Attention ceci n'est vrai qu'autour de 0.



Pour n quelconque nous avons calculé que le polynôme de Taylor en 0 est

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdot + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

3.1.13 Résumé

Il y a donc trois formules de Taylor qui s'écrivent toutes sous la forme

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

où $T_n(x)$ est toujours le même polynôme de Taylore :

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

C'est l'expression du reste $R_n(x)$ qui change (attention le reste n'a aucune raison d'être un polynôme).

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt \qquad \textit{Taylor avec reste intégral}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \textit{Taylor avec reste } f^{(n+1)}(c), c \textit{ entre } a \textit{ et } x$$

$$R_n(x) = (x-a)^n \epsilon(x) \qquad \textit{Taylor-Young avec } \epsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Selon les situations l'une des formulations est plus adaptée que les autres. Bien souvent nous n'avons pas besoin de beaucoup d'information sur le reste et c'est donc la formule de Taylor-Young qui sera la plus utile.
Notons que les trois formules ne requièrent pas exactement les mêmes hypothèses : Taylor avec reste intégral à l'ordre n exige une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, Taylor avec reste une fonction n+1 fois dérivable, et Taylor-Young une fonction $\mathcal{C}^n$. Une hypothèse plus restrictive donne logiquement une conclusion plus forte. Cela dit, pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ que l'on manipule le plus souvent, les trois hypothèses sont toujours vérifiées.
Notation *Le terme $(x-a)^n\epsilon(x)$ où $\epsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ est souvent abrégé en ≪ petit o≫ de $(x-a)^n$ et est noté $o((x-a)^n)$. Donc $o((x-a)^n)$ est une fonction telle que $\lim_{x\to a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$. Il faut s'habituer à cette notation qui simplifie les écritures, mais il faut toujours garder à l'esprit ce qu'elle signifie.*
Cas particulier : Formule de Taylor-Young au voisinage de 0*. On se ramène souvent au cas particulier où $a = 0$, la formule de Taylor-Young s'écrit alors*

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdot + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x)}$$

où $\lim_{x\to 0} \epsilon(x) = 0$.
Et avec la notation ≪ petit o≫ cela donne

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdot + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Mini-exercice

1. *Écrire les trois formules de Taylor en 0 pour* $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \exp(\, x)$, $x \mapsto \sinh(x)$.
2. *Écrire les formules de Taylor en 0 à l'ordre 2 pour* $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $x \mapsto \tan(x)$.

3. *Écrire les formules de Taylor en 1 pour* $x \mapsto x^3 - 9x^2 + 14x + 3$.
4. *Avec une formule de Taylor en 1 à l'ordre 2 de* $x \mapsto \sqrt{1+x}$, *trouve une approximation de* $\sqrt{1,01}$. *Idem avec* $ln(0,99)$.

3.2 Développement limités au voisinage d'un point

3.2.1 Définition et existence

Soit I *un intervalle ouvert et* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction quelconque.*

Définition 3.2.2. *Pour* $a \in I$ *et* $n \in \mathbb{N}$, *on dit que* f *admet un développement limité (DL) au point* a *et à l'ordre* n, *s'il existe des réels* $c_0, c_1, \cdots, c_n$ *et une fonction* $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ *telle que* $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$ *de sorte que pour tout* $x \in I$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x).$$

- *L'égalité précédente s'appelle un DL de* f *au voisinage de* a *à l'ordre* n.
- *Le terme* $c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n$ *est appelé la partie polynomiale du DL.*
- *Le terme* $(x-a)^n\epsilon(x)$ *est appelé le reste du DL.*

La formule de Taylor-Young permet d'obtenir immédiatement des développements limités en posant $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$

Propriété 3.2.3. *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *au voisinage d'un point* a *alors* f *admet un DL au point* a *à l'ordre* n, *qui provient de la formule de Taylor-Young :*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdot + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x),$$

où $\lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0$.

Remarque

1. *si* f *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *au voisinage d'un point 0, un DL en 0 à l'ordre* n *est l'expression :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdot + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + x^n\epsilon(x).$$

2. *Si f admet un DL en un point n alors elle en possède un pour tout $k \leq n$. En effet*

$$\begin{aligned}f(x) &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n \\ &\quad \underbrace{+(x-a)^n + \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + +(x-a)^n\epsilon(x)}_{=(x-a)^k\eta(x)}\end{aligned}$$

où $\lim_{x\to a}\eta(x) = 0$.

3.2.4 Unicité

Propriété 3.2.5. *Si f admet un DL alors ce DL est unique.*

Preuve *Écrivons deux DL de f : $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_1(x)$ et $f(x) = d_0 + d_1(x-a) + \cdots + d_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon_2(x)$. En effectuant la différence on obtient :*

$$(d_0 - c_0) + (d_1 - c_1)(x-a) + \cdots + (d_n - c_n)(x-a)^n + (x-a)^n(\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)) = 0.$$

Lorsque l'on fait $x = a$ dans cette égalité alors on trouve $d_0 - c_0 = 0$. Ensuite on peut diviser cette égalité par $x - a$: $(d_1 - c_1) + (d_2 - c_2)(x-a)\cdots + (d_n - c_n)(x-a)^{n-1} + (x-a)^{n-}(\epsilon_2(x) - \epsilon_1(x)) = 0$. En évaluant en $x = a$ on obtient $d_1 - c_1 = 0$, etc. On trouve $c_0 = d_0$, $c_1 = d_1, \cdots, c_n = d_n$. Les parties polynomiales sont égales et donc les restes aussi.

Corollaire 3.2.6. *Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).*

Par exemple $x \mapsto \cos(x)$ est pare et nous verrons que son DL en 0 commence par : $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$
Preuve *$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots + c_nx^n + x^n\epsilon(x)$. Si f est paire alors $f(x) = f(-x) = c_0 - c_1x + c_2x^2 - c_3x^3 + \cdots + (-1)^nc_nx^n + x^n\epsilon(x)$. Par unicité du DL en 0 on trouve $c_1 = -c_1$, $c_3 = -c_3, \cdots$, et donc $c_1 = 0$, $c_3 = 0, \cdots$.*
Remarque

1. *L'unicité du DL et la formule de Taylor-Young prouve que si l'on connaît le DL et que f est de classe $\mathcal{C}^n$ alors on peut calculer les nombres dérivés à partir de la partie polynomiale par la formule $c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Cependant dans la majorité des cas on fera l'inverse : on trouve le DL à partir des dérivées.*

2. *Si f admet un DL en un point a à l'ordre $n > 0$ alors f est continue en a et $c_0 = f(a)$.*
3. *Si f admet un DL en un point a à l'ordre $n > 1$, alors f est dérivable en a et on a $c_0 = f(a)$ et $c_1 = f'(a)$. Par conséquent $y = c_0 + c_1(x - a)$ est l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a.*
4. *Plus subtil : f peut admettre un DL à l'ordre 2 en un point a sans admettre une dérivée seconde en a. Soit par exemple $f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x})$. Alors f est dérivable mais f' ne l'est pas. Pourtant f admet un DL en 0 à l'ordre 2 : $f(x) = x^2\epsilon(x)$ (la partie polynomiale est nulle).*

3.2.7 DL des fonctions usuelles à l'origine

Les DL suivants en 0 proviennent de la formule de Taylor-Young.

$$\boxed{\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + x^n\epsilon(x)}$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$\sinh(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\epsilon(x)$$

$$\sin(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\epsilon(x)$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\epsilon(x)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots + x^n + x^n\epsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1.1.3.5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + x^n\epsilon(n)$$

Ils sont tous à apprendre par cœur. C'est facile avec les remarques suivantes :

- *Le DL de* $\cosh(x)$ *est la partie paire du DL de* $\exp(x)$*. C'est-à-dire que l'on ne retient que les monômes de degré pair. Alors que le DL de* $\sinh(x)$ *est la partie impaire.*
- *Le DL de* $\cos(x)$ *est la partie paire du DL de* $\exp(x)$ *en alternant le signe* $+/-$ *du monôme. Pour* $\sin(x)$ *c'est la partie impaire de* $\exp(x)$ *en alternant aussi les signes.*
- *On notera que la précision du DL de* $\sin x$ *est meilleure que l'application naïve de la formule de Taylor le prévoit* ($x^{2n+2}\epsilon(x)$ *au lieu de* $x^{2n+1}\epsilon(x)$ *; c'est parce que le DL est en fait à l'ordre* $2n+2$*, avec un terme polynomial en* x^{2n+2} *nul (donc absent). Le même phénomène est vrai pour tous les DL pairs ou impairs (dont* $\sinh x, \cos x, \cosh x$*).*
- *Pour* $\ln(1+x)$ *n'oubliez pas qu'il n'y a pas de terme constant, pas de factorielle aux dénominateurs, et que les signes alternent.*
- *Il faut aussi savoir écrire le DL à l'aide des sommes formelles (et ici des* $\ll$ *petits o* $\gg$*) :*

$$\exp(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \qquad et \qquad \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

- *La DL de* $(1+x)^\alpha$ *est valide pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Pour* $\alpha = -1$ *on retombe sur le DL de* $(1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x}$*. Mais on retient souvent le DL de* $\frac{1}{1-x}$ *qui est très facile. Il se retrouve aussi avec la somme d'une suite géométrique :*$1 + x + x^{+} \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} + x^n\epsilon(x)$.
- *Pour* $\alpha = \frac{1}{2}$ *on retrouve* $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{8}x^2 + \cdots$*. Donc il faut connaître les trois premiers termes.*

3.2.8 DL de fonction en un point quelconque

La fonction f *admet un DL au voisinage d'un point* a *si et seulement si la fonction* $x \mapsto f(x+a)$ *admet un DL au voisinage de 0. Souvent on ramène donc le problème en 0 en faisant le changement de variables* $h = x - a$*.*

Exemple 3.2.9.

1. *DL de* $f(x) = \exp(x)$ *en 1.*
   On pose $h = x - 1$*. Si* x *est proche de 1 alors* h *est proche de 0. Nous*

allons nous ramener à un DL de $\exp(h)$ *en* $h = 0$. *On note* $e = \exp(1)$.

$$\begin{aligned}\exp(x) &= \exp(1 + (x-1)) = \exp(1)\exp(x-1) = e\exp(h)\\ &= e\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots + \frac{h^n}{n!} + h^n\epsilon(h)\right)\\ &= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + (x-1)^n\epsilon(x-1)\right)\end{aligned}$$

où $\lim_{x\to 1}\epsilon(x-1) = 0$.

2. *DL de* $g(x) = \sin(x)$ *en* $\frac{\pi}{2}$.
   Sachant que $\sin(x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x - \frac{\pi}{2}) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ *on se ramène au DL de* $\cos(h)$ *quand* $h = x - \frac{\pi}{2} \to 0$. *On a donc* $\sin(x) = 1 - \dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\dfrac{(x-\frac{\pi}{2})^{2n}}{(2n)!} + (x - \dfrac{\pi}{2})^{2n+1}\epsilon(x - \dfrac{\pi}{2})$ *où* $\lim_{x\to 1}\epsilon(x-1) = 0$.
3. *DL de* $l(x) = \ln(1+3x)$ *en 1 à l'ordre 3.*
   Il faut se ramener à un DL du type $\ln(1+h)$ *en* $h = 0$. *On pose* $h = x-1$ *(et donc* $x = 1+h$*).*
   On a $l(x) = \ln(1+3x) = \ln(1+3(1+h)) = \ln(4+3h) = \ln(4(1+\frac{3h}{4})) = ln(4) + ln(1+\frac{3h}{4}) = \ln(4) + \frac{3h}{4} - \frac{1}{2}(\frac{3h}{4})^2 + \frac{1}{3}(\frac{3h}{4})^3 + h^3\epsilon(h) = \ln(4) + \frac{3(x-1)}{4} - \frac{9}{32}(x-1)^2 + \frac{9}{64}(x-1)^3 + (x-1)^3\epsilon(x-1)$ *où* $\lim_{x\to 1}\epsilon(x-1) = 0$.

Mini-exercices.

1. *Calculer le DL en 0 de* $x \mapsto \cosh x$ *par la formule de Taylor-Young. Retrouver ce DL en utilisant que* $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
2. *Écrire le DL en 0 à l'ordre 3 de* $\sqrt[3]{1+x}$. *Idem avec* $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.
3. *Écrire le DL en 2 à l'ordre 2 de* $\sqrt{x}$.
4. *Justifier l'expression du DL de* $\frac{1}{1-x}$ *à l'aide de l'unicité du DL et de la somme d'une suite géométrique.*

3.3 Opérations sur les développements limités

3.3.1 Somme et produit

On suppose que f *et* g *sont deux fonctions qui admettent des DL en 0 à l'ordre* n *:*

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\epsilon_1(x) \qquad g(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$$

Propriété 3.3.2.

- *$f+g$ admet un DL en 0 l'ordre n qui est :*

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (c_0+d_0)+(c_1+d_1)x+\cdots+(c_n+d_n)x^n+x^n\epsilon(x).$$

- *$(f\times g)$ admet un DL en 0 l'ordre n qui est : $(f\times g)(x) = f(x)\times g(x) = T_n(x)+x^n\epsilon(x)$ où $T_n(x)$ est le polynôme $(c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n)\times(d_0+d_1x+\cdots+d_nx^n)$ tronqué à l'ordre n.*
  Tronquer un polynôme à l'ordre n signifie que l'on conserve seulement les monômes de degré $\leq n$.

Exemple 3.3.3.
Calculer le DL de $\cos x\times\sqrt{1+x}$ en 0 à l'ordre 2. On sais qu $\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+x^2\epsilon_1(x)$ et $\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x)$. Donc

$$\begin{aligned}
\cos x\times\sqrt{1+x} &= (1-\frac{1}{2}x^2+x^2\epsilon_1(x))\times(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x))\\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x)\\
&\quad -\frac{1}{2}x^2(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x))\\
&\quad +x^2\epsilon_1(x)(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x))\\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+x^2\epsilon_2(x)\\
&\quad -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^4\epsilon_2(x)\\
&\quad +x^2\epsilon_1(x)+\frac{1}{2}x^3\epsilon_1(x)-\frac{1}{8}x^4\epsilon_1(x)+x^4\epsilon_1(x)\epsilon_2(x)\\
&= \underbrace{1+\frac{1}{2}x+(-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x^2)}_{\textit{partie tronquée à l'ordre 2}} \qquad \textit{termes de degré 0, 1 et 2}\\
&\quad \underbrace{+x^2\epsilon_2(x)-\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2}x^4\epsilon_2(x)+x^2\epsilon_1(x)
+\frac{1}{2}x^3\epsilon_1(x)-\frac{1}{8}x^4\epsilon_1(x)+x^4\epsilon_1(x)\epsilon_2(x)}_{\textit{reste de la forme } x^2\epsilon(x)}\\
&= 1+\frac{1}{2}x-\frac{5}{8}x^2+x^2\epsilon(x).
\end{aligned}$$

On a en fait écrit beaucoup de choses superflues, qui à la fin sont dans le reste et n'avaient pas besoin d'être explicitées ! Avec l'habitude les calculs se font très vite car on n'écrit plus les termes inutiles. Voici le même calcul avec la *notation ≪ petit o ≫ : dès qu'apparaît un terme $x^2\epsilon_1(x)$ ou un terme $x^3, \cdots$ on écrit juste $o(x^2)$ (ou si l'on préfère $x^2\epsilon(x)$).*

$$\begin{aligned}
\cos x \times \sqrt{1+x} &= (1 - \frac{1}{2}x^2 + x^2\epsilon_1(x)) \times (1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\epsilon_2(x)) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \\
&\quad + o(x^2) \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

La notation ≪ petit o ≫ évite de devoir donner un nom à chaque fonction, en ne gardant que sa propriété principale, qui est de décroître vers 0 au moins à une certaine vitesse. Comme on le voit dans cet exemple, $o(x^2)$ absorbe les éléments de même ordre de grandeur ou plus petits que lui : $o(x^2) - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 o(x^2) = o(x^2)$. Mais il faut bien comprendre que les différents $o(x^2)$ écrits ne correspondent pas à la même fonction, ce qui justifie que cette égalité ne soit pas fausse !

3.3.4 Composition

On écrit

$$\begin{aligned}
f(x) &= C(x) + x^n\epsilon_1(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\epsilon_1(x) \\
g(x) &= D(x) + x^n\epsilon_2(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)
\end{aligned}$$

Propriété 3.3.5.
Si $g(0) = 0$ (c'est-à-dire $d_0 = 0$) alors la fonction $f \circ g$ admet un DL en 0 à l'ordre n dont la partie polynomiale est le polynôme tronqué à l'ordre n de la composition $C(D(x))$.

Exemple 3.3.6.
Calculons le DL de $h(x) = \sin(\ln(1+x))$ à l'ordre 3.

- *On pose ici $f(u) = \sin(u)$ et $g(x) = \ln(1+x)$ (pour plus de clarté il est préférable de donner des noms différents aux différentes variables des deux fonctions, ici x et u). On a bien $f \circ g(x) = \sin(\ln(1+x))$ et $g(0) = 0$.*
- *On écrit DL à l'ordre 3 de $f(u) = \sin(u) = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u)$ pour u proche de 0.*

- *Et on pose* $u = g(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x)$ *pour* x *proche de 0.*
- *On aura besoin de calculer un DL à l'ordre 3 de* u^2 *(qui est bien sûr le produit* $u \times u$*) :* $u^2 = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon_2(x))^2 = x^2 - x^3 + x^3\epsilon_3(x)$ *et aussi* u^3 *qui est* $u \times u^2$, $u^3 = x^3 + x^3\epsilon_4(x)$.
- *Donc* $h(x) = f \circ g(x) = f(u) = u - \frac{u^3}{3!} + u^3\epsilon_1(u) = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) - \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\epsilon(x)$.

Exemple 3.3.7.
Soit $h(x) = \sqrt{\cos(x)}$. *On cherche le DL de* h *en 0 à l'ordre 4.*
On utilise cette notion de ≪ petit o ≫. On connaît le DL de $f(u) = \sqrt{1+u}$ *en* $u = 0$ *à l'ordre 2 :* $f(u) = \sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)$.
Et si on pose $u(x) = \cos(x) - 1$ *alors on a* $h(x) = f(u(x))$ *et* $u(0) = 0$. *D'autre part le DL de* $u(x)$ *en* $x = 0$ *à l'ordre 4 est :* $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$. *On trouve alors* $u^2 = \frac{1}{4} + o(x^4)$.
Et ainsi

$$\begin{aligned} h(x) = f(u) &= 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4) - \frac{1}{8}(\frac{1}{4}x^4) + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{32}x^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

3.3.8 Division

Voici comment calculer le DL d'un quotient $\frac{f}{g}$. *Soient*

$$f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\epsilon_1(x) \qquad g(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x).$$

Nous allons utiliser le DL de $\frac{1}{1+u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots$.

1. *Si* $d_0 = 1$ *on pose* $u = d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\epsilon_2(x)$ *et le quotient s'écrit* $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{1+u}$.
2. *Si* d_0 *est quelconque avec* $d_0 \neq 0$ *alors on se ramène au cas précédent en écrivant*

$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{d_0}\frac{1}{1 + \frac{d_1}{d_0}x + \cdots + \frac{d_n}{d_0}x^n + \frac{x^n\epsilon_2(x)}{d_0}}.$$

3. *Si* $d_0 = 0$ *alors on factorise par* x^k *(pour un certain* k*) afin de se ramener aux cas précédents.*

Exemple 3.3.9.

1. *DL de* $\tan(x)$ *en 0 à l'ordre 5.*
   Tout d'abord $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)$. *D'autre par* $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x) = 1 + u$ *en posant* $u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)$.
   Nous aurons besoin de u^2 *et* u^3 : $u^2 = (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)) = \frac{x^4}{4} + x^5\epsilon(x)$ *et en fait* $u^3 = x^5\epsilon(x)$. *(On note abusivement* $\epsilon(x)$ *pour différents restes.)*
   Ainsi
$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1+u} &= 1 - u + u^2 - u^3 + u^3\epsilon(u)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + x^5\epsilon(x)\\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$
   Finalement
$$\begin{aligned}\tan(x) &= \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)}\\ &= (x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\epsilon(x)) \times (1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + x^5\epsilon(x))\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + x^5\epsilon(x).\end{aligned}$$
2. *DL de* $\frac{1+x}{2+x}$ *en 0 à l'ordre 4.*
$$\begin{aligned}\frac{1+x}{2+x} &= (1+x)\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\\ &= \frac{1}{2}(1+x)(1 - \frac{x}{2} + (\frac{x}{2})^2 - (\frac{x}{2})^3 + (\frac{x}{2})^4) + o(x^4)\\ &= \frac{1}{2} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{x^4}{32} + o(x^4)\end{aligned}$$
3. *Si on souhaite calculer le DL de* $\frac{\sin(x)}{\sinh(x)}$ *en 0 à l'ordre 4 alors on écrit*
$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{\sinh(x)} &= \frac{\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{\frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} = \frac{x(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4))}{x(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4))}\\ &= (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)) \times \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4))}\\ &= \cdots = 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} + o(x^4).\end{aligned}$$

Autre méthode. *Soit $f(x) = C(x) + x^n\epsilon_1(x)$ et $g(x) = D(x) + x^n\epsilon_2(x)$. Alors on écrit la division suivant les puissances croissantes de C par D à l'ordre n : $C = DQ+x^{n+1}R$ avec $\deg Q \leq n$. Alors Q est la partie polynomiale du DL en 0 à l'ordre n de $\frac{f}{g}$.*

Exemple 3.3.10.
DL de $\frac{2+x+2x^3}{1+x^2}$ à l'ordre 2. On pose $C(x) = 2+x+2x^3$ et $D(x) = 1+x^2$ alors $C(x) = D(x) \times (2 + x - 2x^2) + x^3(1 + 2x)$. On a donc $Q(x) = 2 + x - 2x^2$, $R(x) = 1 + 2x$. Et donc lorsque l'on divise cette égalité par $D(x)$ on obtient $\frac{f(x)}{g(x)} = 2 + x - 2x^2 + x^2\epsilon(x)$.

3.3.11 Intégration

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ dont le DL en $a \in I$ à l'ordre n est $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + (x-a)^n\epsilon(x)$.

Théorème 3.3.12.
Notons F une primitive de f . Alors F admet un DL en a à l'ordre $n+1$ qui s'écrit :

$$\begin{aligned} F(x) = F(a) + c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + \frac{(x-a)^3}{3} + \cdots + \\ c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + (x-a)^{n+1}\eta(x) \end{aligned}$$

où $\lim_{x\to a}\eta(x) = 0$.
Cela signifie que l'on intègre la partie polynomiale terme à terme pour obtenir le DL de $F(x)$ à la constante $F(a)$ près.

Preuve. *On a $F(x)-F(a) = \int_a^x f(t)dt = a_0(x-a)+\cdots+\frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}+\int_a^x(t-a)^{n+1}\epsilon(t)dt$. Notons $\eta(x) = \frac{1}{(x-a)^{n+1}}\int_a^x(t-a)^n\epsilon(t)dt$. (Remarque : la fonction ϵ est continue : elle est continue en a par définition, et elle est continue en dehors de a en écrivant $\epsilon(x) = \frac{1}{(x-a)^n}(f(x) - (c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n)))$. Alors*

$$\begin{aligned} |\eta(x)| &\leq \left|\frac{1}{(x-a)^{n+1}}\int_a^x |(t-a)^n| \sup_{t\in[a,x]}|\epsilon(t)|dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{(x-a)^{n+1}}\right| \sup_{t\in[a,x]}|\epsilon(t)| \int_a^x |(t-a)^n|dt = \frac{1}{n+1}\sup_{t\in[a,x]}|\epsilon(t)|. \end{aligned}$$

Mais $\sup_{t\in[a,x]}|\epsilon(t)| \to 0$ lorsque $x \to a$. Donc $\eta(x) \to 0$ quand $x \to a$.

Exemple 3.3.13.
Calcul du DL de $\arctan(x)$.
On sait que $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. *En posant* $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ *et* $F(x) = \arctan(x)$, *on écrit*

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k} + x^{2n}\epsilon(x).$$

Et comme $\arctan(0) = 0$ *alors* $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k+1} + x^{2n+1}\epsilon(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$

Exemple 3.3.14.
La méthode est la même pour obtenir un DL de $\arcsin x$ *en 0 à l'ordre 5.* $\arcsin' x = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}(-x^2) + \frac{-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2}-1)}{2}(-x^2)^2 + x^4\epsilon(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + x^4\epsilon(x)$.
Donc $\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + x^5\epsilon(x)$.

Mini-exercices.

1. *Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de* $\exp(x) - \frac{1}{1+x}$, *puis de* $x\cos(2x)$ *et* $\cos(x) \times \sin(2x)$.
2. *Calculer le DL en 0 à l'ordre 2 de* $\sqrt{1+\cos(x)}$, *puis de* $\exp(\sqrt{1+\cos(x)})$.
3. *Calculer le DL en 0 à l'ordre 3 de* $\ln(1+\sin x)$. *Idem à l'ordre 6 pour* $\ln(1+x^2)^2$.
4. *Calculer le DL en 0 à l'ordre n de* $\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}$. *Idem à l'ordre 3 avec* $\frac{e^x}{1+x}$.
5. *Par intégration retrouver la formule du DL de* $\ln(1+x)$. *Idem à l'ordre 3 pour* $\arccos x$.

3.4 Applications des développements limités

Voici les applications les plus remarquables des développements limités. On utilisera aussi les DL lors de l'étude locale des courbes paramétrées lorsqu'il y a des points singuliers.

3.4.1 Calculs de limites

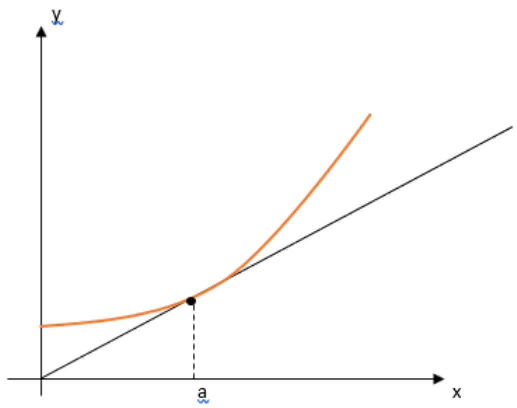
Les DL sont très efficaces pour calculer des limites ayant des formes indéterminées ! Il suffit juste de remarquer que si $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots$ *alors* $\lim_{x\to a} f(x) = c_0$.

Exemple 3.4.2.
Limite en 0 de $\frac{\ln(1+x)-\tan(x)+\frac{1}{2}\sin^2(x)}{3x^2\sin^2(x)}$.
Notons $\frac{f(x)}{g(x)}$ *cette fraction. En 0 on a* $f(x) = \ln(1+x) - \tan(x) + \frac{1}{2}\sin^2(x) = (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)) - (x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{3}x^4) + o(x^4) = -\frac{5}{12}x^4 + o(x^4)$ *et* $g(x) = 3x^2\sin^{(} x) = 3x^2(x + o(x))^2 = 3x^4 + o(x^4)$.
Ainsi $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-\frac{5}{12}x^4+o(x^4)}{3x^4+o(x^4)} = \frac{-\frac{5}{12}+o(1)}{3+o(1)}$ *en notant* $o(1)$ *une fonction (inconnue) tendant vers* 0 *quand* $x \to 0$*. Donc* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{5}{36}$.
Note : en calculant le DL à un ordre inférieur (2 par exemple), on n'aurait pas pu conclure, car on aurait obtenu $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{o(x^2)}{o(x^2)}$*, ce qui ne lève pas l'indétermination. De façon générale, on calcule les DL à l'ordre le plus bas possible, et si cela ne suffit pas, on augmente progressivement l'ordre (donc la précision de l'approximation).*

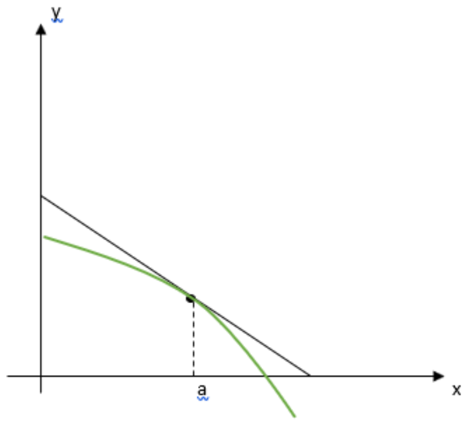
3.4.3 Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Propriété 3.4.4.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction admettant un DL en a :* $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + (x-a)^k\epsilon(x)$*, où* k *est le plus petit entier* ≥ 2 *tel que le coefficient* c_k *soit non nul. Alors l'équation de la tangente à la courbe de* f *en* a *est :* $y = c_0 + c_1(x-a)$ *et la position de la courbe par rapport à la tangente pour* x *proche de* a *est donnée par le signe* $f(x) - y$*, c'est-à-dire le signe de* $c_k(x-a)^k$.
Il y a 3 cas possibles.

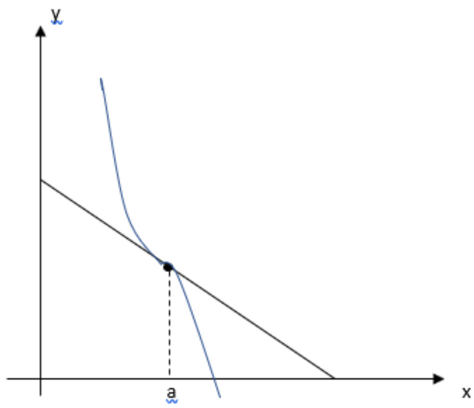
- *Si ce signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.*



- *Si ce signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.*



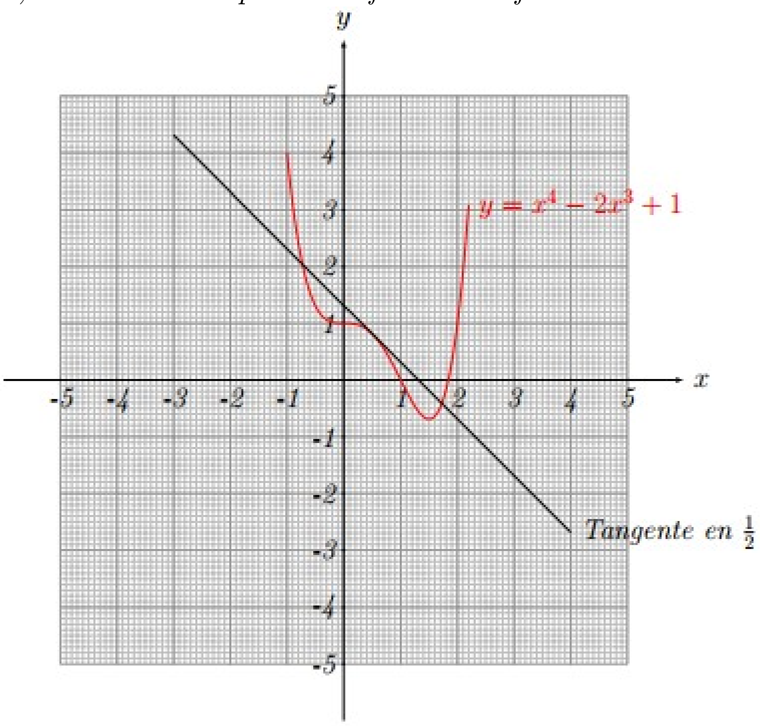
- *Si ce signe change (lorsque l'on passe de $x < a$ à $x > a$) alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a. C'est un point d'inflexion.*

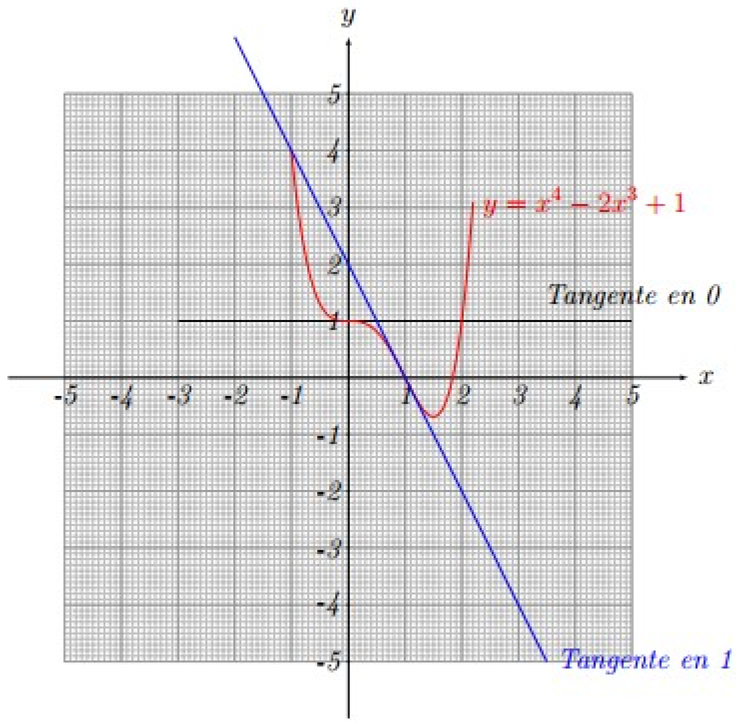


Comme le DL de f en a à l'ordre 2 s'écrit aussi $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + (x-a)^2\epsilon(x)$, alors l'équation de la tangente est aussi $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Si en plus $f''(a) \neq 0$ alors $f(x) - y$ garde un signe constant autour de a. En conséquence si a est un point d'inflexion alors $f''(a) = 0$. (La réciproque est fausse.)

Exemple 3.4.5.
Soit $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$.

1. *Déterminons la tangente en* $\frac{1}{2}$ *du graphe de* f *et précisons la position du graphe par rapport à la tangente.*
   On a $f'(x) = 4x^3 - 6x^2$, $f''(x) = 12x^2 - 12x$ *donc* $f''(\frac{1}{2}) = -3 \neq 0$ *et* $k = 2$.
   On en déduit le DL de f *en* $\frac{1}{2}$ *par la formule de Taylor-Young :* $f(x) = f(\frac{1}{2}) + f'(\frac{1}{2})(x - \frac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(x - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{1}{2})^2\epsilon(x) = \frac{13}{16} - (x - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2}(x - \frac{1}{2})^2 + (x - \frac{1}{2})^2\epsilon(x)$.
   Donc la tangente en $\frac{1}{2}$ *est* $y = \frac{13}{16} - (x - \frac{1}{2})$ *et le graphe est en dessous de la tangente car* $f(x) - y = (-\frac{3}{2} + \epsilon(x))(x - \frac{1}{2})^2$ *est négatif autour de* $x = \frac{1}{2}$.
2. *Déterminons les points d'inflexion.*
   Les points d'inflexion sont à chercher parmi les solutions de $f''(x) = 0$. *Donc parmi* $x = 0$ *et* $x = 1$.
   - *Le DL en 0 est* $f(x) = 1 - 2x^3 + x4$ *(il s'agit juste d'écrire les monômes par degrés croissants !). L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donc* $y = 1$ *(une tangente horizontale). Comme* $-2x^3$ *change de signe en 0 alors 0 est un point d'inflexion de* f.
   - *Le DL en 1 : on calcule* $f(1)$, $f'(1), \cdots$ *pour trouver le DL en 1* $f(x) = -2(x-1) + 2(x-1)^3 + (x-1)^4$. *L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donc* $y = -2(x-1)$. *Comme* $2(x-1)^3$ *change de signe en 1, 1 est aussi un point d'inflexion de* f.





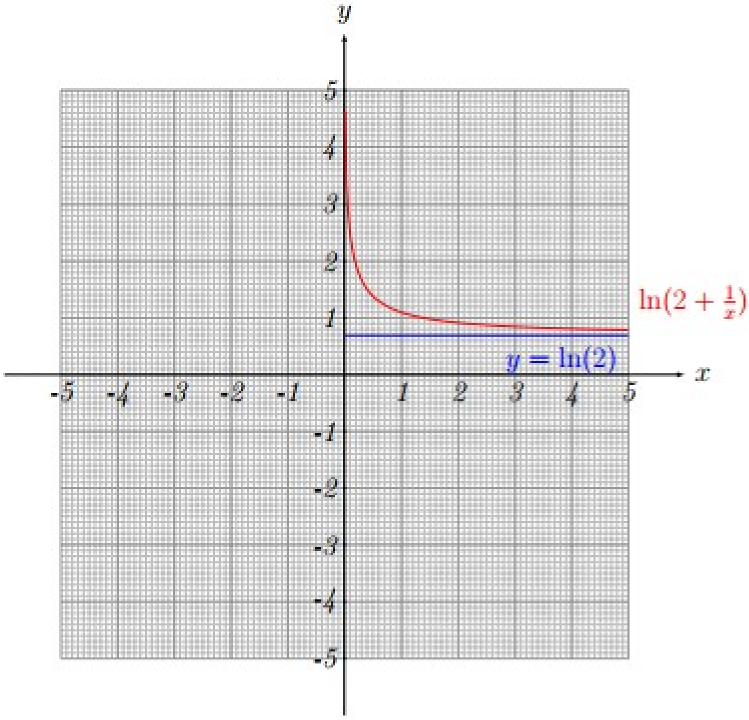
3.4.6 Développement limité en $+\infty$

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]x_0, +\infty[$. On dit que f admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n s'il existe des réels $c_0, c_1, \cdots, c_n$ tels que

$$f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_n}{x^n}\epsilon(\frac{1}{x})$$

où $\epsilon(\frac{1}{x})$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.

Exemple 3.4.7.
$f(x) = \ln(2 + \frac{1}{x}) = \ln(2) + \ln(1 + \frac{1}{2x}) = \ln(2) + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{24x^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n2^n x^2} + \frac{1}{x^n}\epsilon(\frac{1}{x})$, *où* $\lim_{x\to+\infty} \epsilon(\frac{1}{x}) = 0$.

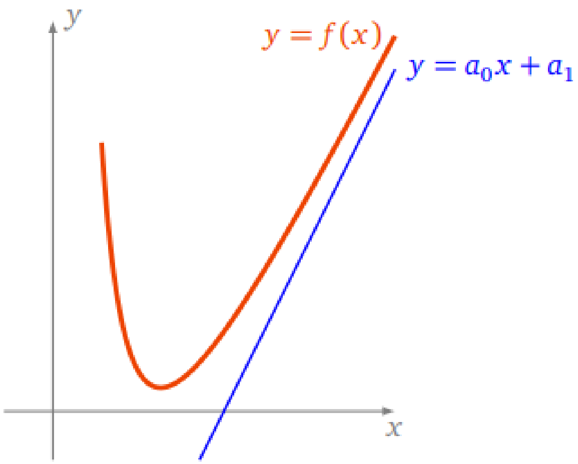


Cela nous permet d'avoir une idée assez précise du comportement de f au voisinage de $+\infty$. Lorsque $x \to +\infty$ alors $f(x) \to ln(2)$. Et le second terme est $+\frac{1}{2}x$, donc est positif, cela signifie que la fonction $f(x)$ tend vers $\ln(2)$ tout en restant au-dessus de $\ln(2)$.

Remarque.

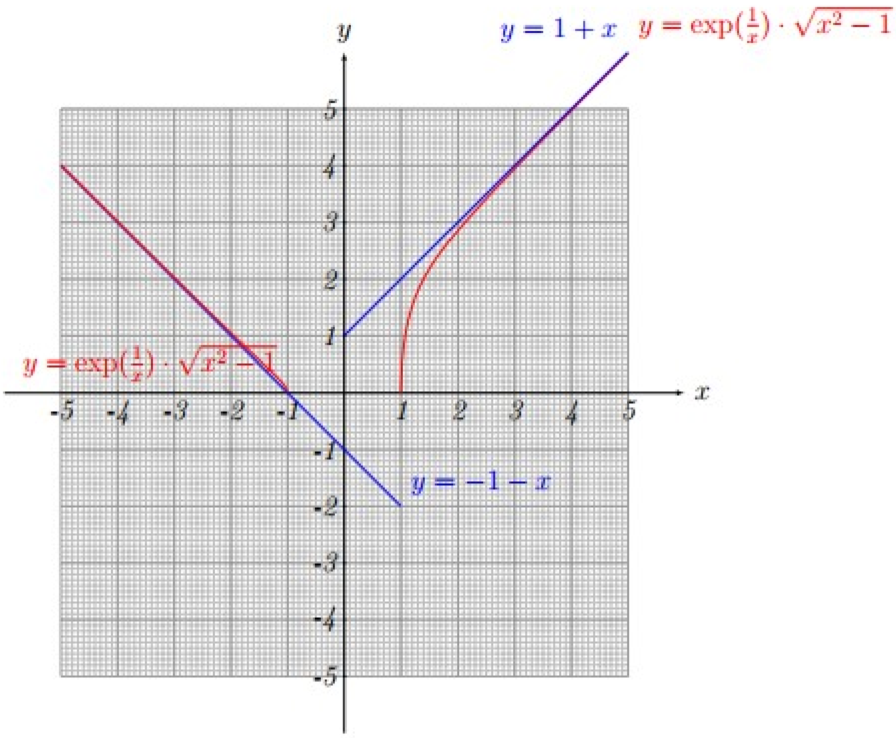
1. *Un DL en $+\infty$ s'appelle aussi un développement asymptotique.*
2. *Dire que la fonction $x \mapsto f(x)$ admet un DL en $+\infty$ à l'ordre n est équivalent à dire que la fonction $x \mapsto f(\frac{1}{x})$ admet un DL en 0^+ à l'ordre n.*
3. *On peut définir de même ce qu'est un DL en -1.*

Propriété 3.4.8.
On suppose que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admet un DL en $+\infty$ (ou en $-\infty$) : $\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^k}\epsilon(\frac{1}{x})$, où k est le plus petit entier ≥ 2 tel que le coefficient de $\frac{1}{x^k}$ soit non nul. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (a_0x + a_1) = 0$ (resp $x \to -\infty$) : la droite $y = a_0x + a_1$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $\frac{a_k}{x^{k-1}}$.



Preuve. *On a* $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-a_0x-a_1) = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_k}{x^{k-1}} + \frac{1}{x^{k-1}}\epsilon(\frac{1}{x}) = 0$. *Donc* $y = a_0x + a_1$ *est une asymptote à la courbe de* f*. Ensuite on calcule la différence* $f(x) - a_0x - a_1 = \frac{a_k}{x^{k-1}} + \frac{1}{x^{k-1}}\epsilon(\frac{1}{x}) = \frac{a_k}{x^{k-1}}(1 + \frac{1}{a_k}\epsilon(\frac{1}{x}))$. □

Exemple 3.4.9.
Asymptote de $f(x) = \exp(\frac{1}{x}) \cdot \sqrt{x^2-1}$.



1. *En* $+\infty$,

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x} &= \exp(\frac{1}{x})\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = \exp(\frac{1}{x})\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\\ &= (1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x}))\cdot(1-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x}))\\ &= \cdots = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x}).\end{aligned}$$

   Donc l'asymptote de f *en* $+\infty$ *est* $y = x+1$*. Comme* $f(x)-x-1 = -\frac{1}{3x^2}+\frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})$ *quand* $x \to +\infty$*, le graphe de* f *reste en dessous de l'asymptote.*

2. *En* $-\infty$.
   $\frac{f(x)}{x} = \exp(\frac{1}{x})\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} = -\exp(\frac{1}{x})\cdot\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} = -1-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{x^3}\epsilon(\frac{1}{x})$.
   Donc $y = -x-1$ *est une asymptote de* f *en* $-\infty$*. On a* $f(x)+x+1 = \frac{1}{3x^2}+\frac{1}{x^2}\epsilon(\frac{1}{x})$ *quand* $x \to -\infty$*; le graphe est au-dessus de l'asymptote.*

Mini-exercices.

1. *Calculer la limite de* $\frac{\sin(x)-x}{x^3}$ *lorsque* x *tens vers 0. Idem avec* $\frac{\sqrt{1+x}-\sinh(\frac{x}{2})}{x^k}$ *(pour* $k = 1,2,3,\cdots$ *).*
2. *Calculer la limite de* $\frac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)}$ *lorsque* x *tend vers 1. Idem pour* $(\frac{1-x}{1+x})^{\frac{1}{x}}$*, puis* $\frac{1}{\tan^2(x)}-\frac{1}{x^2}$ *lorsque* x *tend vers 0.*
3. *Soit* $f = \exp(x)+\sin(x)$*. Calculer l'équation de la tangente en* $x = 0$ *et la position du graphe. Idem avec* $g(x) = \sinh(x)$.
4. *Calculer le DL en* $+\infty$ *à l'ordre 5 de* $\frac{x}{x^2-1}$*. Idem à l'ordre 2 pour* $(1+\frac{1}{x})^x$.
5. *Soit* $f(x) = \sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}}$*. Déterminer l'asymptote en* $+\infty$ *et la position du graphe par rapport à l'asymptote.*

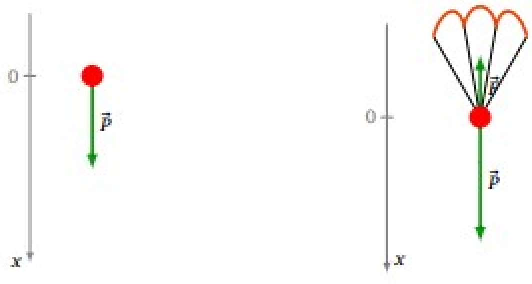
Chapitre 4

Équations différentielles

Lorsqu'un corps tombe en chute libre sans frottement, il n'est soumis qu'à son poids $\overrightarrow{P}$. Par le principe fondamental de la mécanique : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{a}$. *Tous les vecteurs sont verticaux donc* $mg = ma$, *où* g *est la constante de gravitation,* a *l'accélération verticale et* m *la masse. On obtient* $a = g$. *L'accélération étant la dérivée de la vitesse par rapport au temps, on obtient :*

$$\frac{dv(t)}{dt} = g$$

Il est facile d'en déduire la vitesse par intégration : $v(t) = gt$ *(en supposant que la vitesse initiale est nulle), c'est-à-dire que la vitesse augmente de façon linéaire au cours du temps. Puisque la vitesse est la dérivée de la position, on a* $v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$, *donc par une nouvelle intégration on obtient* $x(t) = \dfrac{1}{2}gt^2$ *(en supposant que la position initiale est nulle).*



Le cas d'un parachutiste est plus compliqué. Le modèle précédent n'est pas applicable car il ne tient pas compte des frottements. Le parachute fait subir une force de frottement opposée à sa vitesse. On suppose que le frottement est proportionnel à la vitesse : $F = -fmv$ *(f est le coefficient de frottement). Ainsi le principe fondamental de la mécanique devient* $mg - f\,mv = ma$, *ce qui conduit à la relation :*

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - fv(t)$$

C'est une relation entre la vitessev et sa dérivée : il s'agit d'une équation différentielle. Il n'est pas évident de trouver quelle est la fonction v qui convient. Le but de ce chapitre est d'apprendre comment déterminer $v(t)$, ce qui nous permettra d'en déduire la position $x(t)$ à tout instant.

4.1 Définition

4.1.1 Introduction

Une équation différentielle est une équation :

1. *dont l'inconnue est une fonction (généralement notée $y(x)$ ou simplement y) ;*
2. *dans laquelle apparaissent certaines des dérivées de la fonction (dérivée première y', ou dérivées d'ordres supérieurs y'', $y^{(3)}$,...).*

Voici des équations différentielles faciles à résoudre.

Exemple 4.1.2. *De tête, trouver au moins une fonction, solution des équations différentielles suivantes :*

$y' = \sin x$	$y(x) = ae^{x} + be^{-x}$ où $a, b \in \mathbb{R}$
$y' = 1 + e^{x}$	$y(x) = -\cos x + ax + b$ où $a, b \in \mathbb{R}$
$y' = y$	$y(x) = ke^{3x}$ où $k \in \mathbb{R}$
$y' = 3y$	$y(x) = ke^{x}$ où $k \in \mathbb{R}$
$y'' = \cos x$	$y(x) = x + e^{x} + k$ où $k \in \mathbb{R}$
$y'' = y$	$y(x) = -\cos x + k$ où $k \in \mathbb{R}$

Il est aussi facile de vérifier qu'une fonction donnée est bien solution d'une équation.

Exemple 4.1.3.
1. *Soit l'équation différentielle $y' = 2xy + 4x$. Vérifier que $y(x) = k\ exp(x^2) - 2$ est une solution sur $\mathbb{R}$, ceci quel que soit $k \in \mathbb{R}$.*
2. *Soit l'équation différentielle $x^2y'' - 2y + 2x = 0$. Vérifier que $y(x) = kx^2 + x$ est une solution sur $\mathbb{R}$, pour tout $k \in \mathbb{R}$.*

4.1.4 Définition

Passons à la définition complète d'une équation différentielle et surtout d'une solution d'une équation différentielle.

Définition 4.1.5. *Une équation différentielle d'ordre n est une équation de la forme :*

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \qquad (E)$$

où F est une fonction de $(n + 2)$ variables.
Une solution d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (E).

Remarque 4.1.6. • *C'est la coutume pour les équations différentielles de noter y au lieu de $y(x)$, y' au lieu $y'(x)$,...On note donc "$y' = sinx$" ce qui signifie "$y'(x) = sinx$".*
• *Il faut s'habituer au changement de nom pour les fonctions et les variables. Par exemple $(x'')^3 + t(x')^3 + (sint)x^4 = e^t$ est une équation différentielle d'ordre 2, dont l'inconnue est une fonction x qui dépend de la variable t. On cherche donc une fonction $x(t)$, deux fois dérivable, qui vérifie $(x''(t))^3 + t(x'(t))^3 + (sint)(x(t))^4 = e^t$.*
• *Rechercher une primitive, c'est déjà résoudre l'équation différentielle $y' = f(x)$. C'est pourquoi on trouve souvent « intégrer l'équation différentielle » pour « trouver les solutions de l'équation différentielle ».*
• *La notion d'intervalle dans la résolution d'une équation différentielle est fondamentale. Si on change d'intervalle, on peut très bien obtenir d'autres solutions. Par exemple, si on se place sur l'intervalle $I_1 =]0, +\infty[$, l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}$ a pour solutions les fonctions $y(x) = ln(x)+k$. Alors que sur l'intervalle $I_2 =]-\infty, 0[$, les solutions sont les fonctions $y(x) = ln(-x)+k$ (k est une constante).*
• *Si aucune précision n'est donnée sur l'intervalle I, on considérera qu'il s'agit de $I = \mathbb{R}$.*

Exemple 4.1.7. *(Équation à variables séparées). Une équation différentielle à variables séparées est une équation du type :*

$$y' = \frac{g(x)}{f(y)} \text{ ou } y'f(y) = g(x)$$

Une telle équation se résout par calcul de primitives. Si $G(x)$ est une primitive de $g(x)$ alors $G'(x) = g(x)$. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$ alors $F'(x) = f(x)$, mais surtout, par dérivation d'une composition, $(F(y(x)))' =$

$y'(x)F'(y(x)) = y'f(y)$. *Ainsi l'équation différentielle* $y'f(y) = g(x)$ *se réécrit* $(F(y(x)))' = G'(x)$ *ce qui équivaut à une égalité de fonctions :* $F(y(x)) = G(x) + c$.
Voici un exemple concret : $x^2y' = e^{-y}$ *On commence par séparer les variables* x *d'un côté et* y *de l'autre :* $y'e^y = \frac{1}{x^2}$ *(en supposant* $x \neq 0$*). On intègre des deux côtés :*

$$e^y = -\frac{1}{x} + c \ (c \in \mathbb{R})$$

Ce qui permet d'obtenir y *(en supposant* $-1x + c > 0$*) :*
$y(x) = ln(-\frac{1}{x} + c)$
qui est une solution sur chaque intervalle I *où elle est définie et dérivable. Cet intervalle dépend de la constante* c *: si* $c < 0$*,* $I =]\frac{1}{c}, 0[$ *; si* $c = 0$*,* $I =]-\infty, 0[$ *; si* $c > 0$*,* $I =]\frac{1}{c}, +\infty[$.

4.1.8 Équation différentielle linéaire

On ne sait pas résoudre toutes les équations différentielles. On se concentre dans ce chapitre sur deux types d'équations : les équations différentielles linéaires du premier ordre et celles du second ordre à coefficients constants.
Une équation différentielle d'ordre nest linéaire si elle est de la forme :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i *et* g *sont des fonctions réelles continues sur un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$*. Le terme linéaire signifie grosso modo qu'il n'y a pas d'exposant pour les termes* $y, y', y'', ...$
Une équation différentielle linéaire est homogène, ou sans second membre, si la fonction g *ci-dessus est la fonction nulle :*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = 0$$

Une équation différentielle linéaire est à coefficients constants si les fonctions ai ci-dessus sont constantes :

$$a_0y + a_1y' + ... + a_ny^{(n)} = g(x)$$

où les ai sont des constantes réelles et g une fonction continue.

Exemple 4.1.9. *1.* $y' + 5xy = e^x$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre.*

2. $y' + 5xy = 0$ *est l'équation différentielle homogène associée à la précédent.*
3. $2y'' - 3y' + 5y = 0$ *est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, sans second membre.*
4. $y'^2 - y = x$ *ou* $y''.y' - y = 0$ *ne sont pas des équations différentielles linéaires.*

Propriété 4.1.10. *(Principe de linéarité).*
Si y_1 *et* y_2 *sont solutions de l'équation différentielle linéaire homogène*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = 0 \qquad (E_0)$$

alors, quels que soient $\lambda, \mu, \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ *est aussi solution de cette équation.*

C'est une simple vérification. On peut reformuler la proposition en disant que l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel.
Pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = g(x)$$

on décompose souvent la résolution en deux étapes :
- *trouver une solution particulière* y_0 *de l'équation* (E),
- *trouver l'ensemble* $\mathrm{S_h}$ *des solutions* y *de l'équation homogène associée*

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + ... + a_n(x)y^{(n)} = 0$$

ce qui permet de trouver toutes les solutions de (E) *:*

Propriété 4.1.11. *(Principe de superposition).*
L'ensemble des solutions S *de* (E) *est formé des*

$$y' + y \text{ avec } y \in \mathrm{S_h}.$$

Autrement dit, on trouve toutes les solutions en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène. C'est une conséquence immédiate du caractère linéaire des équations.
Mini-exercices

1. *Chercher une solution « simple » de l'équation différentielle* $y' = 2y$. *Même question avec* $y'' = -y$; $y'' + cos(2x) = 0$; $xy'' = y'$.
2. *Résoudre l'équation différentielle à variables séparées* $y'y^2 = x$. *Même question avec* $y' = ylnx$; $y' = \frac{1}{y^n}(n > 1)$.
3. *Soit l'équation* $y' = y(1 - y)$. *Montrer que si* y *est une solution non nulle de cette équation, alors* $z = 2y$ *n'est pas solution. Que peut-on en conclure ?*

4.2 Équation différentielle du premier ordre

Équation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 4.2.1. *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type :*

$$y' = a(x)y + b(x) \qquad (E)$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Dans la suite on supposera que a et b sont des fonctions continues sur I. On peut envisager la forme : $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$. On demandera alors que $\alpha(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. La division par α permet de retrouver la forme (E).
On va commencer par résoudre le cas où a est une constante et $b = 0$. Puis a sera une fonction (et toujours $b = 0$). On terminera par le cas général où a et b sont deux fonctions.

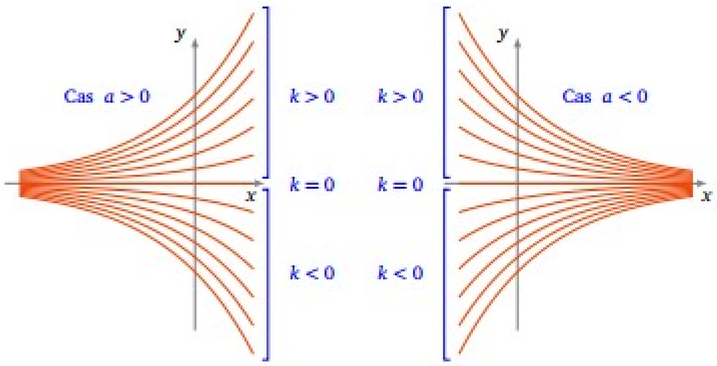
4.2.2 $y' = ay$

Théorème 4.2.3. *Soit a un réel. Soit l'équation différentielle :*

$$y' = ay \qquad (E)$$

Les solutions de (E), sur $\mathbb{R}$, sont les fonctions y définies par : $y(x) = ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$, est une constante quelconque.

Ce résultat est fondamental. Il est tout aussi fondamental de comprendre d'où vient cette formule, via une preuve rapide (mais pas tout à fait rigoureuse). On réécrit l'équation différentielle sous la forme $\dfrac{y'}{y} = a$, que l'on intègre à gauche et à droite pour trouver : $ln|y(x)| = ax + b$ On compose par l'exponentielle des deux côtés pour obtenir : $|y(x)| = e^{ax+b}$. Autrement dit $y(x) = \pm e^b e^{ax}$. En posant $k = \pm e^b$ on obtient les solutions (non nulles) cherchées. Nous verrons une preuve rigoureuse juste après.



Exemple 4.2.4. *Résoudre l'équation différentielle :* $3y' - 5y = 0$
On écrit cette équation sous la forme $y' = \frac{5}{3}y$*. Ses solutions, sur* $\mathbb{R}$*, sont donc de la forme :* $y(x) = ke^{\frac{5}{3}x}$*, où* $k \in \mathbb{R}$*.*

Remarque 4.2.5. • *L'équation différentielle* (E) *admet donc une infinité de solutions (puisque l'on a une infinité de choix de la constante* k*).*
• *La constante* k *peut être nulle. Dans ce cas, on obtient la « solution nulle » :* $y = 0$ *sur* $\mathbb{R}$*, qui est une solution évidente de l'équation différentielle.*
• *Le théorème* 1 *peut aussi s'interpréter ainsi : si* y_0 *est une solution non identiquement nulle de l'équation différentielle* (E)*, alors toutes les autres solutions* y *sont des multiples de* y_0*. En termes plus savants, l'ensemble des solutions forme un espace vectoriel de dimension* 1 *(une droite vectorielle).*

Démonstration. théorème 2.2

1. On vérifie que les fonctions proposées sont bien solutions de (E). En effet, pour $y(x) = ke^{ax}$, on a $y'(x) = ake^{ax} = ay(x)$.
2. Montrons que les fonctions proposées sont les seules solutions. (C'est-à-dire qu'il n'y en a pas d'un autre type que $y(x) = ke^{ax}$.) Soit y une solution quelconque de (E) sur $\mathbb{R}$. Considérons la fonction z définie par : $z(x) = y(x)e^{-ax}$. Alors, par la formule de dérivation d'un produit :
$$z'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x)(-ae^{-ax}) = e^{-ax}(y'(x) - ay(x))$$
Mais, par hypothèse, y est une solution de (E), donc $y'(x) - ay(x) = 0$. On en déduit que $z'(x) = 0$, pour tout réel x. Ainsi z est une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, il existe une constante k telle que $z(x) = k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où : $z(x) = k$ donc $y(x)e^{-ax} = k$ donc $y(x) = ke^{ax}$. Ce qui termine la preuve du théorème.

□

4.2.6 $y' = a(x)y$

Le théorème suivant affirme que, lorsque a est une fonction, résoudre l'équation différentielle $y' = a(x)y$ revient à déterminer une primitive A de a (ce qui n'est pas toujours possible explicitement).

Théorème 4.2.7. *Soit $a : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $A : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une primitive de a. Soit l'équation différentielle :*

$$y' = a(x)y \qquad (E)$$

Les solutions sur Ide (E) sont les fonctions y définies par : $y(x) = ke^{A(x)}$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Si $a(x) = a$ est une fonction constante, alors une primitive est par exemple $A(x) = ax$ et on retrouve les solutions du théorème 2.2 Une preuve rapide du théorème 2.4 est la suivante :
$\dfrac{y'}{y} = a(x) \Leftrightarrow ln|y(x)| = A(x) + b \Leftrightarrow |y(x)| = e^{A(x)} + b \Leftrightarrow y(x) = \pm e^b e^{A(x)} \Leftrightarrow$ $y(x) = ke^{A(x)}$ *avec* $k = \pm e^b$. *Une preuve rigoureuse (puisque l'on évite de diviser par quelque chose qui pourrait être nul) :*

Démonstration. $y(x)$ solution de (E)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y'(x) - a(x)y(x) = 0\\
&\Leftrightarrow e^{-A(x)}(y'(x) - ay(x)) = 0\\
&\Leftrightarrow (y(x)e^{-A(x)})' = 0\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, y(x)e^{-A(x)} = k\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}, y(x) = ke^{A(x)}
\end{aligned}$$

□

Exemple 4.2.8. *Comment résoudre l'équation différentielle $x^2y' = y$? On se place sur l'intervalle $I_+ =]0, +\infty[$ ou $I_- =] - \infty, 0[$. L'équation devient $y' = \dfrac{1}{x^2}y$. Donc $a(x) = \dfrac{1}{x^2}$, dont une primitive est $A(x) = \dfrac{-1}{x}$. Ainsi les solutions cherchées sont $y(x) = ke^{-\frac{1}{x}}$, où $k \in \mathbb{R}$.*

4.2.9 $y' = a(x)y + b(x)$

Il nous reste le cas général de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 *avec second membre : $y' = a(x)y + b(x) \qquad (E)$*
où $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. L'équation homogène associée est :

$$y' = a(x)y \qquad (E_0)$$

Il n'y a pas de nouvelle formule à apprendre pour ce cas. Il suffit d'appliquer le principe de superposition : les solutions de (E) s'obtiennent en ajoutant à une solution particulière de (E) les solutions de (E_0). Ce qui donne :

Propriété 4.2.10. *Si y' est une solution de (E), alors les solutions de (E) sont les fonctions $y : I \to \mathbb{R}$ définies par :*

$$y(x) = y_0(x) + ke^{A(x)} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

où $x \mapsto A(x)$ est une primitive de $x \mapsto a(x)$.

La recherche de la solution générale de (E) se réduit donc à la recherche d'une solution particulière. Parfois ceci se fait en remarquant une solution évidente. Par exemple, l'équation différentielle $y' = 2xy + 4x$ a pour solution particulière $y_0(x) = -2$; donc l'ensemble des solutions de cette équation sont les $y(x) = -2 + ke^{x^2}$,où $k \in \mathbb{R}$.
Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante *Le nom de cette méthode est paradoxal mais justifié ! C'est une méthode générale pour trouver une solution particulière en se ramenant à un calcul de primitive. La solution générale de (E_0) $y' = a(x)y$ est donnée par $y(x) = ke^{A(x)}$, avec $k \in \mathbb{R}$ une constante. La méthode de la variation de la constante consiste à chercher une solution particulière sous la forme $y_0(x) = k(x)e^{A(x)}$, où k est maintenant une fonction à déterminer pour que y_0 soit une solution de (E) $y' = a(x)y + b(x)$. Puisque $A' = a$, on a :*

$$y_0'(x) = a(x)k(x)e^{A(x)} + k'(x)e^{A(x)} = a(x)y_0(x) + k'(x)e^{A(x)}$$

Ainsi :

$$y_0'(x) - a(x)y_0(x) = k'(x)e^{A(x)}$$

Donc y_0 est une solution de (E) si et seulement si

$$k'(x)e^{A(x)} = b(x) \Leftrightarrow k'(x) = b(x)e^{-A(x)} \Leftrightarrow k(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx.$$

Ce qui donne une solution particulière $y_0(x) = (\int b(x)e^{-A(x)}dx)e^{A(x)}$ de (E) sur I. La solution générale de (E) est donnée par

$$y(x) = y_0(x) + ke^{A(x)}, k \in \mathbb{R}.$$

Exemple 4.2.11. *Soit l'équation $y' + y = e^x + 1$. L'équation homogène est $y' = -y$ dont les solutions sont les $y(x) = ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$.*
Cherchons une solution particulière avec la méthode de variation de la constante : on note $y_0(x) = k(x)e^{-x}$. On doit trouver $k(x)$ afin que y_0 vérifie l'équation différentielle $y' + y = e^x + 1$.

$$\begin{aligned} y_0' + y_0 &= e^x + 1 \\ \Leftrightarrow (k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x}) + k(x)e^{-x} &= e^x + 1 \\ \Leftrightarrow k'(x)e^{-x} &= e^x + 1 \\ \Leftrightarrow k'(x) &= e^{2x} + e^x \\ \Leftrightarrow k(x) &= \frac{1}{2}e^{2x} + e^x + c \end{aligned}$$

On fixe $c = 0$ (n'importe quelle valeur convient) :

$$y_0(x) = k(x)e^{-x} = (\frac{1}{2}e^{2x} + e^x)e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + 1$$

Nous tenons notre solution particulière ! Les solutions générales de l'équation $y' + y = e^x + 1$ s'obtiennent en additionnant cette solution particulière aux solutions de l'équation homogène : $y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$

4.2.12 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Voici l'énoncé du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas des équations différentielles linéaires du premier ordre.

Théorème 4.2.13. *(Théorème de Cauchy-Lipschitz). Soit $y' = a(x)y + b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Alors, pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution y telle que $y(x_0) = y_0$.*

D'après nos calculs précédents cette solution est :

$$y(x) = (\int_{x_0}^{x} b(t)e^{-A(t)}dt)e^{A(x)} + y_0 e^{A(x)}$$

où A est la primitive de a s'annulant en x_0, et cette solution vérifie bien $y(x_0) = y_0$.

Exemple 4.2.14. *Trouver la solution de $y' + y = e^x + 1$ vérifiant $y(1) = 2$. Nous avons déjà trouvé toutes les solutions de cette équation dans l'exemple 7 : $y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + ke^{-x}$, $k \in \mathbb{R}$. Nous allons déterminer la constante k afin que la condition initiale $y(1) = 2$ soit vérifiée :*

$$y(1) = 2 \Leftrightarrow \tfrac{1}{2}e^1 + 1 + ke^{-1} = 2 \Leftrightarrow \tfrac{k}{e} = 1 - \frac{e}{2} \Leftrightarrow k = e - \tfrac{e^2}{2}$$

Ainsi la solution cherchée est $y(x) = \frac{1}{2}e^x + 1 + (e - \frac{e^2}{2})e^{-x}$*, et c'est la seule solution.*

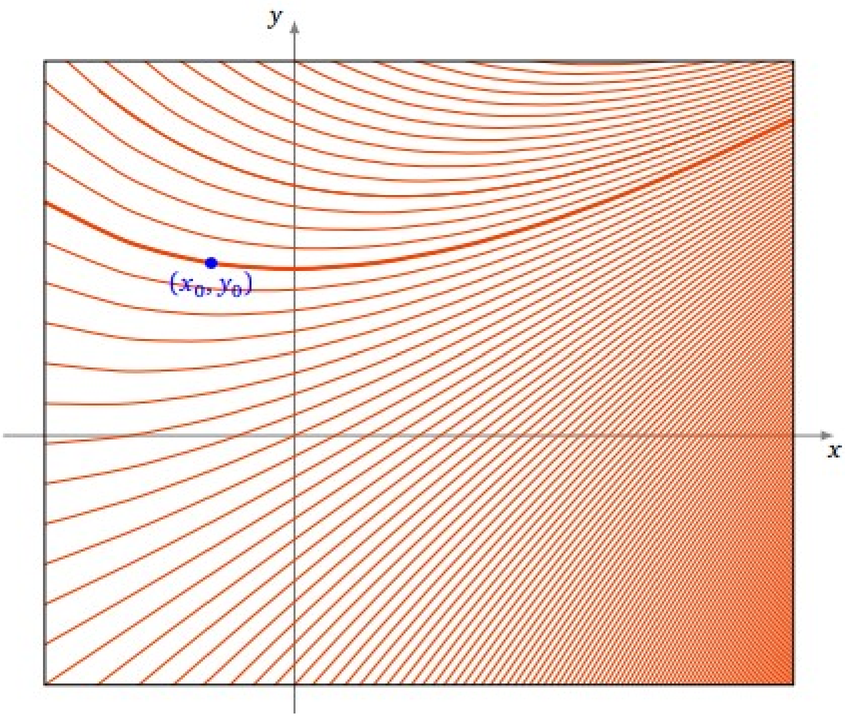
4.2.15 Courbes intégrales

Une courbe intégrale d'une équation différentielle (E) *est le graphe d'une solution de* (E)*. Le théorème 0.0.10 pour les équations différentielles linéaires du premier ordre* $y' = a(x)y + b(x)$ *se reformule ainsi : « Par chaque point* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ *passe une et une seule courbe intégrale. »*

Exemple 4.2.16. *Les solutions de l'équation différentielle* $y' + y = x$ *sont les*

$$y(x) = x - 1 + ke^{-x} \quad k \in \mathbb{R}$$

et sont définies sur $I = \mathbb{R}$*. Pour chaque point* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*, il existe une unique solution* y *telle que* $y(x_0) = y_0$*. Le graphe de cette solution est la courbe intégrale passant par* (x_0, y_0)*.*



4.2.17 Exemples

Exemple 4.2.18. *On considère l'équation différentielle* (E) : $x^3y' + (2 - 3x^2)y = x^3$.

1. *Résoudre l'équation différentielle* (E) *sur* $]0, +\infty[$ *et* $] - \infty, 0[$.
2. *Peut-on trouver une solution sur* $\mathbb{R}$ *?*
3. *Trouver la solution sur* $]0, +\infty[$ *vérifiant* $y(1) = 0$.

Correction 4.2.19.

1. *(a) Résolution de l'équation homogène* (E_0) : $x^3y' + (2 - 3x^2)y = 0$. *Pour* $x \neq 0$, *on a* $y' = -\dfrac{2 - 3x^2}{x^3}y$. *Donc la solution générale de* (E_0) *est* $y(x) = ke^{\int -\frac{2-3x^2}{x^3}dx} = ke^{3ln|x|}e^{\frac{1}{x^2}} = k|x|^3e^{\frac{1}{x^2}}$. *Donc la solution générale de* (E_0) *sur* $]0, +\infty[$ *est :* $y(x) = k_1x^3e^{\frac{1}{x^2}}$; *et sur* $] - \infty, 0[$: $y(x) = k_2x^3e^{\frac{1}{x^2}}$
   (b) Résolution de l'équation avec second membre (E) *par la méthode de variation de la constante. On cherche une solution sous la forme* $y(x) = k(x)x^3e^{\frac{1}{x^2}}$. *En dérivant et en remplaçant dans l'équation différentielle, on obtient* $k^{'}(x)x^3e^{\frac{1}{x^2}} = 1$ *Donc* $k(x) = \int \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}dx = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{x^2}} + c$. *D'où une solution particulière de* (E) *sur* $]0, +\infty[$ *ou* $]-\infty, 0[$: $y_0(x) = k(x)x^3e^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}x^3$
   (c) Solution générale sur $]0, +\infty[$: $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + k_1x^3e^{\frac{1}{x^2}}$.
   Solution générale sur $] - \infty, 0[$: $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + k_2x^3e^{\frac{1}{x^2}}$.
2. $x^3e^{\frac{1}{x^2}}$ *tend vers* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*) lorsque* $x \longrightarrow 0^+$ *(resp.* 0^-*), donc pour* k_1 *ou* k_2 *non nul,* y *ne peut pas être prolongée par continuité en* 0. *Pour* $k_1 = k_2 = 0$, $y(x) = \frac{1}{2}x^3$ *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$. *C'est la seule solution sur* $\mathbb{R}$.
3. *Si l'on cherche une solution particulière vérifiant* $y(1) = 0$, *alors on a* $y(x) = \frac{1}{2}x^3 + kx^3e^{\frac{1}{x^2}}$, $y(1) = \frac{1}{2} + ke = 0$, *donc* $k = -\dfrac{1}{2e}$. *Donc* $y(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2e}x^3e^{\frac{1}{x^2}}$

Exemple 4.2.20. *Résoudre* $x(1 + x)y' - (x + 2)y = 2x$.

1. ***Équation homogène.***
   L'équation homogène est $x(1 + x)y' - (x + 2)y = 0$. *Pour* $x \neq 0$ *et* $x \neq -1$, *l'équation s'écrit* $y' = \dfrac{x + 2}{x(1 + x)}y$. *La décomposition de la fraction en éléments simples est :* $a(x) = \dfrac{x + 2}{x(1 + x)} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{1 + x}$. *Une primitive*

de $a(x)$ est donc $A(x) = \int \frac{x+2}{x(1+x)}dx = 2ln|x| - ln|x+1|$. La solution générale de l'équation homogène est $y(x) = ke^{A(x)} = ke^{2ln|x|-ln|x+1|} = ke^{ln\frac{x^2}{|x+1|}} = k\frac{x^2}{|x+1|} = \pm k\frac{x^2}{x+1}$. Cette solution est bien définie en $x = 0$. On obtient donc la solution générale de l'équation homogène : $y(x) = k\frac{x^2}{x+1}$ sur $]-\infty,-1[$ ou sur $]-1,+\infty[$.

2. **Solution particulière**
   On cherche une solution de l'équation non homogène sous la forme $y_0(x) = k(x)\frac{x^2}{x+1}$ par la méthode de variation de la constante. En remplaçant dans l'équation, on obtient $k'(x)x^3 = 2x$. Donc pour $x \neq 0$, on a $k'(x) = \frac{2}{x^2}$, et $k(x) = -\frac{2}{x}$. D'où la solution générale de l'équation non homogène $y(x) = -\frac{2x}{x+1} + k\frac{x^2}{x+1}$. Cette solution est définie sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.
3. **Existe-t-il une solution définie sur $\mathbb{R}$?**
   On a $y(x) = \frac{x(kx-2)}{x+1}$ Donc pour $k \neq -2$, on ne peut prolonger y en -1. Pour $k = -2$, on peut prolonger y en -1. On obtient une solution définie sur $\mathbb{R}$: $y = -2x$.

Mini-exercices.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + yln2 = 0$. Tracer les courbes intégrales. Trouver la solution vérifiant $y(1) = \dfrac{1}{2}$
2. Résoudre l'équation différentielle $2y' + 3y = 5$. Trouver la solution vérifiant $y(0) = -\dfrac{1}{3}$. Tracer la courbe intégrale.
3. Trouver une solution évidente, puis résoudre l'équation différentielle $2xy' + y = 1$. Trouver la solution vérifiant $y(1) = 2$. Tracer la courbe intégrale. Même travail avec l'équation $xy' - y = x^2$.
4. Par la méthode de variation de la constante, trouver une solution particulière de l'équation différentielle $y' - 2xy = 3xe^{x^2}$. Même travail avec $y' + 2y = sin(3x)e^{-2x}$.

4.3 Équation différentielle du second ordre

Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

4.3.1 Définition

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme

$$ay" + by' + cy = g(x) \qquad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle ouvert I. L'équation

$$ay" + by' + cy = 0 \qquad (E_0)$$

est appelée l'équation homogène associée à (E). La structure des solutions de l'équation est très simple :

Théorème 4.3.2. *L'ensemble des solutions de l'équation homogène (E_0) est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.*

Nous admettons ce résultat.

4.3.3 Équation homogène

On cherche une solution de (E_0) sous la forme $y(x) = e^{rx}$ où $r \in \mathbb{C}$ est une constante à déterminer. On trouve

$$\begin{aligned} &ay'' + by' + cy = 0 \\ \Leftrightarrow\ &(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0 \\ \Leftrightarrow\ &ar^2 + br + c = 0. \end{aligned}$$

Définition 4.3.4. *L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée l'équation caractéristique associée à (E_0)*

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E_0).

Théorème 4.3.5.

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_0) sont les $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et les solutions de (E_0) sont les $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
3. *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (E_0) sont les $y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$..*

Exemple 4.3.6. 1. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - y' - 2y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, qui s'écrit aussi $(r+1)(r-2) = 0$ $(\Delta > 0)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

2. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, soit $(r-2)2 = 0$ $(\Delta = 0)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{2x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*
3. *Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 5y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$. Elle admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = 1 + 2i$, et $r_2 = 1 - 2i$ $(\Delta < 0)$. D'où, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos(2x)\ + \mu \sin(2x))$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. La preuve consiste à trouver deux solutions linéairement indépendantes, ce qui permet d'affirmer qu'elles forment une base d'après le théorème 0.0.11 (que l'on a admis).

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes r_1, r_2. On obtient ainsi deux solutions $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$ qui sont linéairement indépendantes car $r_1 \neq r_2$. Comme l'espace des solutions est un espace vectoriel de dimension 2 (par le théorème 0.0.11), alors une base de l'espace des solutions de (E_0) est $\{e^{r_1 x},\ e^{r_2 x}\}$. La solution générale de (E_0) s'écrit $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation caractéristique a une racine réelle double r_0. On obtient ainsi une solution $y_1 = e^{r_0 x}$. On vérifie que $y_2 = xe^{r_0 x}$ est aussi une solution : $ay_2'' + by_2' + cy_2 = (2ar_0 + ar_0^2 x)e^{r_0 x} + (b + br_0 x)e^{r_0 x} + cxe^{r_0 x} = (2ar_0 + b)e^{r_0 x} = 0$ car $2ar_0 + b = P'(r_0) = 0$, où $P(r) = ar^2 + br + c$. Ces deux solutions sont linéairement indépendantes. Une base de l'espace des solutions est $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}$, et la solution générale de (E_0) s'écrit $y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. On obtient deux solutions complexes $Y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x}$, $Y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{-i\beta x}$ Comme les parties réelles et imaginaires sont des solutions réelles, on obtient deux solutions réelles $y_1 = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, qui sont linéairement indépendantes. Alors, une base de l'espace des solutions est $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}$. La solution générale de (E_0) s'écrit $y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

□

4.3.7 Équation avec second membre

Nous passons au cas général d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2, à coefficients constants, mais avec un second membre g qui est une fonction *continue sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$:*

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E)$$

Pour ce type d'équation, nous admettons le théorème de Cauchy-Lipschitz qui s'énonce ainsi :

Théorème 4.3.8. *(Théorème de Cauchy-Lipschitz).*
Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque couple $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, l'équation (E) admet une unique solution y sur I satisfaisant aux conditions initiales : $y(x_0) = y_0 et y'(x_0) = y_1$.

Dans la pratique, pour résoudre une équation différentielle linéaire avec second membre (avec ou sans conditions initiales), on cherche d'abord une solution de l'équation homogène, puis une solution particulière de l'équation avec second membre et on applique le principe de superposition :

Propriété 4.3.9. *Les solutions générales de l'équation (E) s'obtiennent en ajoutant les solutions générales de l'équation homogène (E_0) à une solution particulière de (E).*

Il reste donc à déterminer une solution particulière.

4.3.10 Recherche d'une solution particulière

On donne deux cas particuliers importants et une méthode générale.
Second membre du type $e^{\alpha x}P(x)$
Si $g(x) = e^{\alpha x}P(x)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, alors on cherche une solution particulière sous la forme $y_0(x) = e^{\alpha x}x^m Q(x)$, où Q est un polynôme de même degré que P avec :
• $y_0(x) = e^{\alpha x}Q(x)$ $(m = 0)$, *si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique,*
• $y_0(x) = xe^{\alpha x}Q(x)$ $(m = 1)$, *si α est une racine simple de l'équation caractéristique,*
• $y_0(x) = x^2e^{\alpha x}Q(x)$ $(m = 2)$, *si α est une racine double de l'équation caractéristique.*
Second membre du type $e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$.
Si $g(x) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x))$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, on cherche une solution particulière sous la forme :
• $e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$, *si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique,*
• $xe^{\alpha x}(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x))$, *si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique. Dans les deux cas, Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $n = max\{degP_1, degP_2\}$.*

Exemple 4.3.11. *Résoudre les équations différentielles :*
(E_0) $y'' - 5y' + 6y = 0$ (E_1) $y'' - 5y' + 6y = 4xe^x$ (E_2) $y'' - 5y' + 6y = 4xe^{2x}$.
Trouver la solution de (E_1) *vérifiant* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 0$.

1. ***Équation*** (E_0). *L'équation caractéristique est* $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$, *avec deux racines distinctes* $r_1 = 2, r_2 = 3$. *Donc l'ensemble des solutions de* (E_0) *est* $\{\lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.
2. ***Équation*** (E_1).
   (a) On cherche une solution particulière à (E_1) *sous la forme* $y_0(x) = (ax+b)e^x$. *Lorsque l'on injecte* y_0 *dans l'équation* (E_1), *on obtient :*

$$\begin{aligned}(ax+2a+b)e^x - 5(ax+a+b)e^x + 6(ax+b)e^x &= 4xe^x \\ \Leftrightarrow (a-5a+6a)x + 2a + b - 5(a+b) + 6b &= 4x \\ \Leftrightarrow 2a = 4 \quad et \quad -3a + 2b &= 0 \\ \Leftrightarrow a = 2 \quad et \quad b &= 3\end{aligned}$$

   Donc $y_0(x) = (2x+3)e^x$.
   (b) L'ensemble des solutions de (E_1) *est* $\{(2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$
   (c) On a $y(x) = (2x+3)e^x + \lambda e^{2x} + \mu e^{3x}$. *On cherche* λ, μ *tels que* $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. *C'est-à-dire que* $3 + \lambda + \mu = 1, 5 + 2\lambda + 3\mu = 0$. *Donc* $\lambda = -1, \mu = -1$, *c'est-à-dire que* $y(x) = (2x+3)e^x - e^{2x} - e^{3x}$.
3. ***Équation*** (E_2). *Comme 2 est une racine de l'équation caractéristique, on cherche une solution particulière sous la forme* $y_0(x) = x(ax+b)e^{2x}$. *On obtient* $y_0(x) = x(-2x-4)e^{2x}$.

Méthode de variation des constantes.
Si $\{y_1, y_2\}$ *est une base de solutions de l'équation homogène* (E_0), *on cherche une solution particulière sous la forme* $y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2$, *mais cette fois* λ *et* μ *sont deux fonctions vérifiant :*

$$(S)\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 &= 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' &= \dfrac{g(x)}{a}\end{cases}$$

Pourquoi cela ? Si $y_0 = \lambda y_1 + \mu y_2$ *est une telle fonction, alors :*
$y_0' = \lambda' y_1 + \mu' y_2 + \lambda y_1' + \mu y_2' = \lambda y_1' + \mu y_2'$
$y_0'' = \lambda' y_1' + \mu' y_2' + \lambda y_1'' + \mu y_2'' = \dfrac{g(x)}{a} + \lambda y_1'' + \mu y_2''$

Ainsi l'équation (E) est vérifiée par y_0 :

$$\begin{aligned} ay_0'' + by_0' + cy_0 &= a(\frac{g(x)}{a} + \lambda y_1'' + \mu y_2'') + b(\lambda y_1' + \mu y_2') + c(\lambda y_1 + \mu y_2) \\ &= g(x) + \lambda(ay_1'' + by_1' + cy_1) + \mu(ay_2'' + by_2' + cy_2) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que y_1 et y_2 sont solutions de l'équation homogène. Le système (S) se résout facilement, ce qui donne λ' et μ' puis λ et μ par intégration.

Exemple 4.3.12. *Résoudre l'équation suivante, sur l'intervalle $]\frac{-\pi}{2}, \frac{+\pi}{2}[$:*

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Les solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ sont $\lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ On cherche une solution particulière de l'équation avec second membre sous la forme

$$y_0(x) = \lambda(x) \cos x + \mu(x) \sin x$$

où cette fois $\lambda(x)$, $\mu(x)$ sont des fonctions à trouver et qui vérifient (S) :

$$\begin{cases} \lambda' y_1 + \mu' y_2 &= 0 \\ \lambda' y_1' + \mu' y_2' &= \dfrac{g(x)}{a} \end{cases} \quad \textit{donc} \quad \begin{cases} \lambda' \cos x + \mu' \sin x &= 0 \\ -\lambda' \sin x + \mu' \cos x &= \dfrac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

En multipliant la première ligne par $\sin x$et la seconde par $\cos x$, on obtient

$$\begin{cases} \lambda' \cos x \sin x + \mu' (\sin x)^2 &= 0 \\ -\lambda' \cos x \sin x + \mu' (\cos x)^2 &= 1 \end{cases}$$

donc par somme $\mu' = 1$. Ainsi $\mu(x) = x$ et la première ligne des équations devient $\lambda' = \dfrac{-\sin x}{\cos x}$ donc $\lambda(x) = ln(\cos x)$. On vérifie pour se rassurer que $y_0(x) = ln(\cos x) \cos x + x \sin x$ est une solution de l'équation. Ainsi les fonctions solutions sont de la forme :

$$\lambda \cos x + \mu \sin x + ln(\cos x) \cos x + x \sin x$$

quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Mini-exercices.

1. *Résoudre l'équation différentielle* $y'' + \omega^2 y = 0$. *Trouver la solution vérifiant* $y(0) = 1$ *et* $y'(0) = 1$. *Tracer la courbe intégrale. Résoudre l'équation différentielle* $y'' + \omega^2 y = \sin(\omega x)$.
2. *Résoudre l'équation différentielle* $y'' + y' - 6y = 0$. *Trouver la solution vérifiant* $y(-1) = 1$ *et* $y'(-1) = 0$. *Tracer la courbe intégrale. Résoudre l'équation différentielle* $y'' + y' - 6y = e^x$.
3. *Résoudre l'équation différentielle* $2y'' - 2y' + \frac{1}{2}y = 0$. *Trouver la solution ayant une limite finie lorsque* $x \to +\infty$. *Résoudre* $2y'' - 2y' + \frac{1}{2}y = x - 1$.

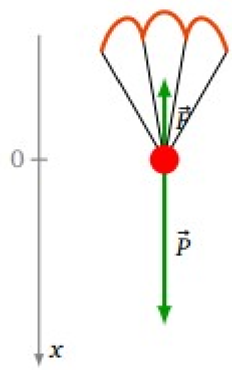
4.4 Problèmes et équations différentielles

4.4.1 Parachutiste

Revenons sur l'exemple du parachutiste de l'introduction : sa vitesse verticale vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dv(t)}{dt} = g - fv(t)$$

où g *(la constante de gravitation) et* f *(le coefficient de frottement) sont des constantes.*



Nous avons tous les ingrédients pour trouver v.

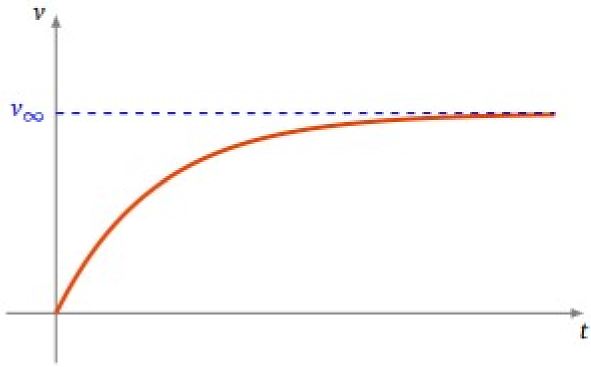
• ***Équation homogène.*** *Les solutions de l'équation homogène* $v'(t) = -fv(t)$ *sont les* $v(t) = ke^{-ft}, k \in \mathbb{R}$

• ***Solution particulière.*** *On cherche une solution particulière* $v_p(t) = k(t)e^{-ft}$ *de l'équation* $v' = g - fv$ *par la méthode de variation de la constante :* $v_p'(t) = k'(t)e^{-ft} - fk(t)e^{-ft}$. *Pour que* v_p *soit solution de l'équation différentielle il faut et il suffit donc que* $k'(t)e^{-ft} = g$. *Ainsi* $k'(t) = ge^{ft}$ *donc, par exemple,* $k(t) = \frac{g}{f}e^{ft}$. *Ainsi* $v_p(t) = \frac{g}{f}$.

• ***Solutions générales.*** *La solution générale de l'équation est donc* $v(t) =$

$\frac{g}{f} + ke^{-ft}, k \in \mathbb{R}$
• ***Condition initiale.*** *Si à l'instant* $t = 0$ *le parachute se lance avec une vitesse initiale nulle, c'est-à-dire* $v(0) = 0$*, alors sa vitesse est :*

$$v(t) = \tfrac{g}{f} + \tfrac{g}{f}e^{-ft}$$



• ***Vitesse limite.*** *Lorsque* $t \to +\infty$, $v(t) \to v_\infty = \frac{g}{f}$*, qui représente la vitesse limite que le parachutiste ne peut dépasser. Expérimentalement, on mesure que* v_∞ *vaut environ* $5m/s$ *(soit environ* $20km/h$*), et comme* $g \approx 9,81m/s^2$*, cela permet de calculer le coefficient de frottement* f*.*
• ***Position.*** *Comme* $v(t) = \frac{dx}{dt}$*, trouver la position* x *revient à trouver une primitive de* v *:*

$$x(t) = \frac{g}{f}t + \frac{g}{f^2}(e^{-ft} - 1)$$

en prenant comme convention $x(0) = 0$*.*
Ceci n'est bien sûr qu'un modèle qui ne correspond pas parfaitement à la réalité, mais permet cependant de mettre en évidence des propriétés vérifiées par les conditions expérimentales, comme la vitesse limite par exemple.

4.4.2 Demi-vie

Dans un tissu radioactif, la vitesse de désintégration des noyaux radioactifs est proportionnelle au nombre de noyaux radioactifs $N(t)$ *présents dans le tissu à l'instant* t*. Il existe donc une constante* λ *strictement positive telle que :*

$$N'(t) = -\lambda N(t)$$

Le signe «- » de cette équation différentielle traduit la décroissance du nombre de noyaux. Si N_0 *désigne le nombre de noyaux à l'instant initial, on a donc :*

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

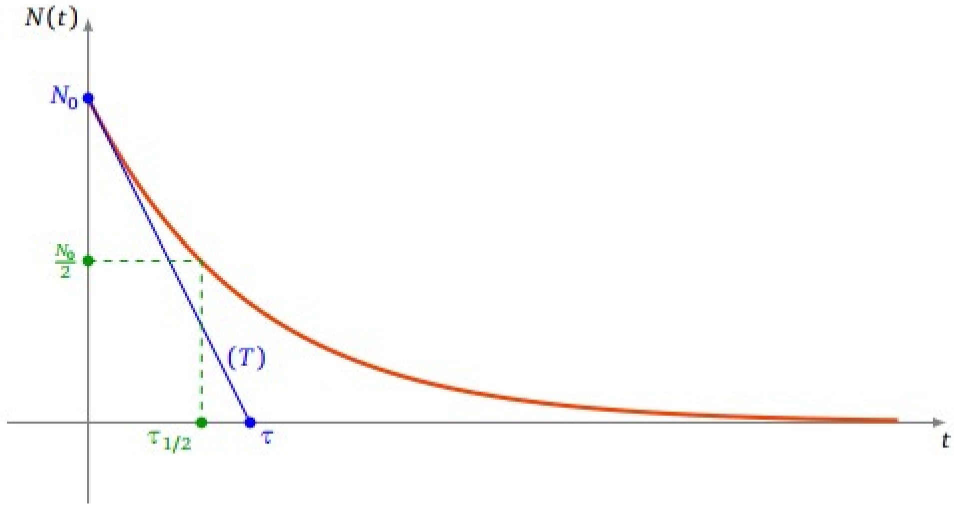
Dans ce contexte apparaissent souvent deux grandeurs qu'il est bon de savoir interpréter graphiquement :
• *Le temps caractéristique, noté τ, est défini par :*

$$\tau = \frac{1}{\lambda}$$

Si (T) désigne la tangente à l'origine de la courbe (C) de la fonction N, le temps caractéristique τ est l'abscisse du point d'intersection de la droite (T) avec l'axe du temps. En effet, une équation de (T) est :

$$y = N'(0)t + N(0) = -\lambda N_0 t + N_0$$

On constate que si $t = \tau$, on a bien $y = 0$. Plus le temps caractéristique est petit, plus la vitesse de désintégration initiale est élevée.



• *La période de demi-vie, notée $\tau_{1/2}$, est la période au bout de laquelle la moitié des noyaux se sont désintégrés. On a donc :*

$$N(\tau_{1/2}) = \frac{N_0}{2}$$

Donc $N_0 e^{-\lambda \tau_{1/2}} = \dfrac{N_0}{2}$, d'où $\lambda \tau_{1/2} = ln2$. Ainsi :

$$\tau_{1/2} = \frac{ln2}{\lambda} = \tau ln2$$

On peut aussi exprimer $N(t)$ en fonction de la période de demi-vie : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\tau t} = N_0 e^{\frac{-t}{\tau_{1/2}} ln2} = N_0 2^{\frac{-t}{\tau_{1/2}}}$.
Notez que $\tau_{1/2}$ ne dépend pas de N_0, et c'est bien le temps nécessaire pour que la moitié des noyaux se soient désintégrés, ce quel que soit l'instant initial :

$$N(t+\tau_{1/2}) = N_0 e^{-\frac{t+\tau_{1/2}}{\tau_{1/2}}} = N_0 e^{\frac{-t}{\tau_{1/2}}-1} = \frac{1}{2} N_0 2^{\frac{-t}{\tau_{1/2}}} = \frac{N(t)}{2}.$$

4.4.3 Modèles d'évolution

On considère une culture de bactéries en milieu clos. Soit N_0 le nombre de bactéries introduites dans la culture à l'instant $t = 0$.
Loi de Malthus.
Un premier modèle est de supposer que la vitesse d'accroissement des bactéries est proportionnelle au nombre de bactéries en présence. Cela signifie que le nombre $N(t)$ de bactéries vérifie l'équation différentielle

$$y' = ay,$$

où $a > 0$ est une constante dépendant des conditions expérimentales. Nous savons résoudre cette équation ! Ainsi selon ce modèle

$$N(t) = N_0 e^{at}.$$

Le milieu étant limité (en volume, en éléments nutritifs,...), le nombre de bactéries ne peut pas croître indéfiniment de façon exponentielle. Ce modèle ne peut donc s'appliquer sur une longue période.
Modèle de Verhulst
Pour tenir compte de ces observations, on présente un autre modèle d'évolution. On suppose que le nombre N(t) de bactéries vérifie l'équation différentielle

$$y' = ay(M-y), \qquad (E)$$

où $a > 0$ et $M > 0$sont des constantes. On cherche les solutions y de (E) telles que $y(t) > 0$ pour $t \in I = [0, +\infty[$. Supposons qu'une telle solution y existe.
• ***Changement de fonction.***
On transforme l'équation (E) en une équation plus facile à résoudre. Pour cela on pose $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$. La fonction z est dérivable sur I et :

$$z' = \frac{y'}{y^2} = \frac{ay(y-M)}{y^2} = a - \frac{aM}{y} = a - aMz.$$

• ***Solutions z.***
Ainsi la fonction z doit vérifier l'équation différentielle

$$z' = a - aMz,$$

qui est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants avec second membre constant. On en déduit que, pour tout $x \in I$,

$$z(x) = ke^{-aMx} + \frac{1}{M}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante.
• ***Solutions y.***
Cela permet d'obtenir y :

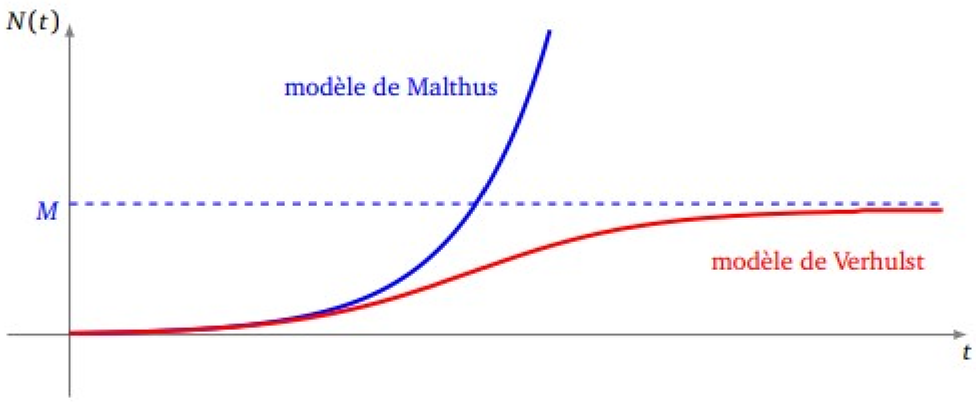
$$y(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{ke^{-aMx} + \frac{1}{M}} = \frac{M}{kMe^{-aMx} + 1}$$

La constante k est déterminée par la condition initiale $y(0) = \frac{M}{kM+1} = N_0$, ainsi $k = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{M}$.

Exemple 4.4.4. *On suppose $N_0 = 0,01$ (en million de bactéries) et $M = 1$, $a = 1$. Alors $k = \frac{1}{N_0} - \frac{1}{M} = 99$. Ainsi selon ce modèle :*

$$N(t) = \frac{1}{1 + 99e^{-t}}$$

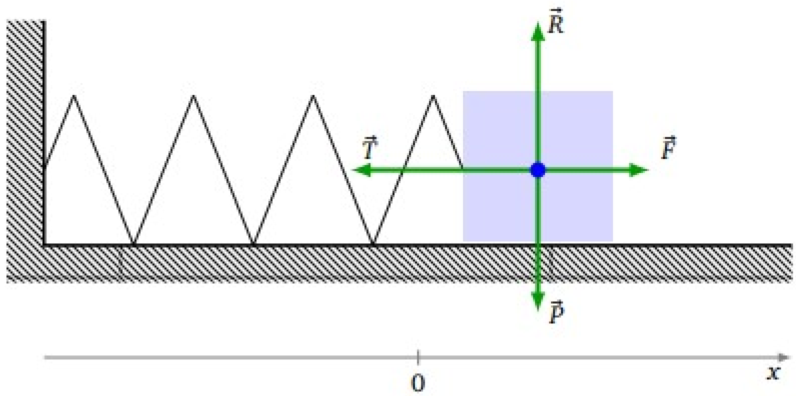
Il est clair que $0 < N(t) < 1$ pour tout $t > 0$, et $N(t) \to 1$ lorsque $t \to +\infty$. Pour connaître les variations de la fonction N, nul besoin de calculs car on sait déjà que N est solution de l'équation différentielle (E), donc $N'(t) = N(t)(1 - N(t))$. Ainsi $N'(t) > 0$, donc la fonction N est croissante.



Le modèle de Verhulst a l'avantage de bien faire apparaître un comportement asymptotique particulier : le nombre de bactéries finit par se stabiliser.

4.4.5 Masse attachée à un ressort

Une masse est attachée à un ressort. Quelles sont les forces qui s'appliquent à cette masse ?
- *Un poids* $\overrightarrow{P}$,
- *une réaction* $\overrightarrow{R} = -\overrightarrow{P}$ *qui s'oppose au poids,*
- *une force de rappel* $\overrightarrow{T}$,
- *une force de frottement* $\overrightarrow{F}$.



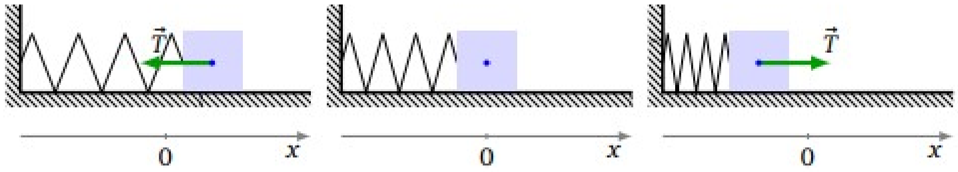
Principe fondamental de la mécanique
Le principe fondamental de la mécanique s'écrit :

$$\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

Il est à noter que la réaction s'opposant au poids, on a $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} = \overrightarrow{0}$, *et l'équation devient :*

$$\overrightarrow{T} + \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

Force de rappel
La force de rappel est une force horizontale. Elle est nulle à la position d'équilibre, qui sera pour nous l'origine $x = 0$. *Si on écarte davantage la masse du mur, la force de rappel est un vecteur horizontal qui pointe vers la position d'équilibre (vers la gauche sur le dessin). Si on rapproche la masse du mur, le ressort se comprime, et la force de rappel est un vecteur horizontal qui pointe encore vers la position d'équilibre (cette fois vers la droite sur le dessin). On modélise la force de rappel par* $\overrightarrow{T} = -kx\overrightarrow{i}$ *où* x *est la position de la masse (on peut avoir* $x > 0$ *ou* $x \leqslant 0$*), et* $k > 0$ *est une constante qui dépend du ressort.*



Oscillations sans frottements *Dans un premier temps, on suppose qu'il n'y a pas de frottement :* $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$. *Le principe fondamental de la mécanique, considéré uniquement sur l'axe horizontal, s'écrit alors :*

$$-kx(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' + \frac{k}{m}y = 0.$$

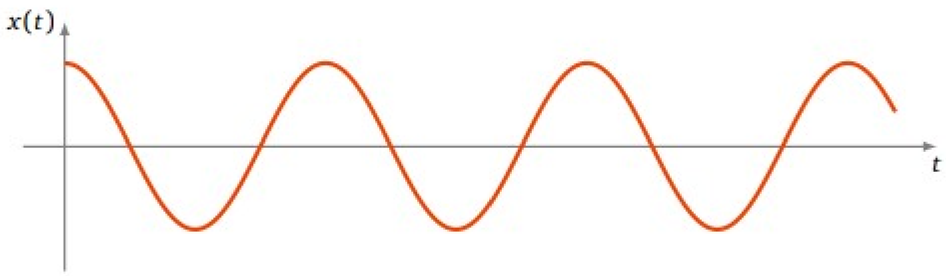
L'équation caractéristique est $r^2 + \dfrac{k}{m} = 0$, *dont les solutions sont les nombres complexes* $r_1 = +i\sqrt{\frac{k}{m}}$ *et* $r_1 = -i\sqrt{\frac{k}{m}}$. *Nous sommes dans le cas* $\Delta = -4mk < 0$. *Les solutions de cette équation caractéristique sont de la forme* $\alpha \pm i\beta$ *avec* $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{\frac{k}{m}}$, *ce qui fait que les solutions de l'équation différentielle sont les :*

$$y(x) = e^{\alpha x}(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x))$$

Dans notre situation (la fonction inconnue est x *et la variable* t*) :*

$$x(t) = \lambda\cos(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t) + \mu\sin(\sqrt{\tfrac{k}{m}}t)) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ )$$

Exemple 4.4.6. *On lâche la masse au point d'abscisse 1, sans vitesse initiale. Cela nous donne les conditions initiales* $x(0) = 1$ *et* $x'(0) = 0$. *Comme* $x(0) = 1$ *alors* $\lambda = 1$. *Comme* $x'(0) = 0$ *alors* $\mu = 0$. *Ainsi on trouve une solution périodique :* $x(t) = \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)$



Oscillations avec faibles frottements

On rajoute une force de frottement $\overrightarrow{F} = -fm\dfrac{dx}{dt}$ *qui est proportionnelle à la vitesse et s'oppose au déplacement (*f *est le coefficient de frottement). Le principe fondamental de la mécanique devient :*

$$-kx(t) - fm\frac{dx(t)}{dt} = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Il s'agit donc de résoudre l'équation différentielle : $y'' + fy' + \dfrac{k}{m}y = 0$

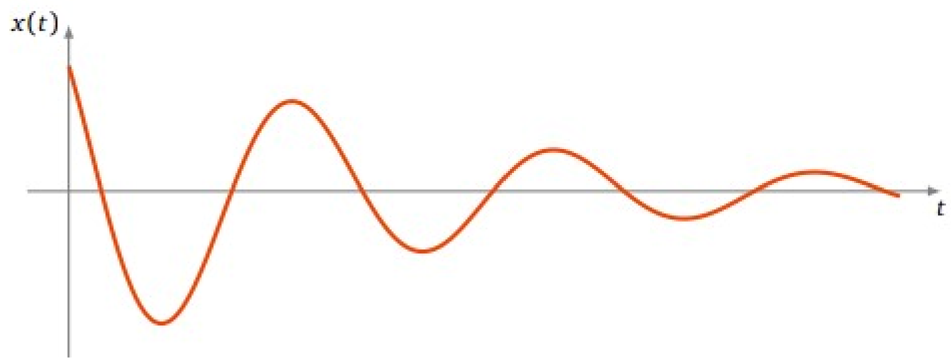
L'équation caractéristique est cette fois $r^2+fr+\dfrac{k}{m} = 0$. *Son discriminant est* $\Delta = f^2 - 4\dfrac{k}{m}$. *Supposons que le coefficient de frottement* f *soit faible, c'est-à-dire que* $\Delta = f^2 - 4\dfrac{k}{m} < 0$, *comme dans le cas sans frottement. On note* $\delta = \sqrt{|\Delta|} = \sqrt{4\frac{k}{m} - f^2}$. *Les deux solutions sont* $r_1 = \alpha + i\beta$ *et* $r_2 = \alpha - i\beta$ *avec* $\alpha = -\frac{f}{2}$ *et* $\beta = \frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{f^2}{4}}$. *Les solutions de l'équation différentielle sont encore de la forme :*

$$y(x) = e^{\alpha x}(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x))$$

Ce qui donne ici :

$$x(t) = e^{\frac{-f}{2}t}(\lambda\cos(\tfrac{\delta}{2}t) + \mu\sin(\tfrac{\delta}{2}t)) \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ )$$

Cette fois la solution n'est plus périodique, mais correspond à un mouvement oscillant amorti, qui tend vers la position d'équilibre $x = 0$.



Mini-exercices.

1. *Un circuit électrique constitué d'un condensateur de capacité C se décharge dans une résistance R. Calculer l'évolution de la charge électrique qui vérifie $q(t) = -RC\dfrac{dq(t)}{dt}$.*
2. *Calculer et tracer les solutions du système masse-ressort pour différents niveaux de frottements.*
3. *Une tasse de café de température $T_0 = 100°C$ est posée dans une pièce de température $T_\infty = 20°C$. La loi de Newton affirme que la vitesse de décroissance de la température $\dfrac{dT(t)}{dt}$ est proportionnelle à l'écart entre sa température $T(t)$ et la température ambiante T_∞. Sachant qu'au bout de 3 min la température du café est passée à $80°C$, combien de temps faudra-t-il pour avoir un café à $65°C$?*