UFR-MI / Licence 1 / Maths-Info / 2026
Cours - Éléments de Logique mathématique

Enseignant: E. D. AKEKE

Table des matières

1 Les Ensembles

Définition 1.1: On appelle ensemble une collection d'objets bien déterminés dans laquelle les objets sont uniques (ne se repètent pas). Ces objets sont souvent appelés les **éléments** de cet ensemble.

En général, un ensemble est formé d'éléments susceptibles de posséder certaines propriétés. Par exemple, on peut considérer l'ensemble des entiers pairs. l'ensemble des solutions d'une équation, l'ensemble des triangles équilatéraux du plan, L'ensembles des habitants d'une ville, ...

Pour pouvoir parlé d'un ensemble, il faut lui donner un nom. Si un ensemble quelconque, qui n'a pas de raison d'être précisé, ou si c'est un ensemble particulier mais éventuellement dépourvu d'importance, on lui donne un nom passe-partout du type :≪ l'ensemble E, l'ensemble F, etc. ≫. Certains ensembles portes des noms qui leur sont propres et sont représentés par une lettre écrite dans un alphabet spécial. Par exemple :
l'ensemble des entiers naturels, noté $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers relatifs noté $\mathbb{Z}$.

Pour exprimer que l'objet x est un élément d'un ensemble E, on écrit $x \in E$, qui se lit ≪ x **appartient** à l'ensemble E ≫ ou aussi ≪ x **est un élément** de l'ensemble E ≫.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F, et on note $E \subseteq F$, si tous les éléments de E appartiennent à F.

$$E \subseteq F \quad \text{équivaut à dire que pour tout} \quad x \in E, \quad \text{on a} \quad x \in F.$$

Par exemple, si A est l'ensemble des pays d'Afrique et B l'ensemble des pays du monde, on a $A \subseteq B$.

Remarque 1.1: Soient E, F, G des ensembles.

1) Si $E \subseteq F$ et $F \subseteq G$ alors $E \subseteq G$.

2) $A = B$ équivaut à $(A \subseteq B \quad \text{et} \quad B \subseteq A)$.

Notation 1.1: 1) Un ensemble A qui ne contient aucun élément est dit **vide**, on écrit $A = \emptyset$ pour exprimer que l'ensemble A est vide.

2) Un ensemble E qui n'a qu'un seul élément x est appelé un **singleton** et on écrit $E = \{x\}$. Attention $x \neq \{x\}$.

3) Un ensemble constitué de deux éléments a et b est noté $\{a, b\}$ et est appelé **une paire** .

4) Un ensemble E est dit **fini** si il contient un nombre fini d'éléments, ce nombre est appelé **le cardinal** de E et noté $card(E)$.

5) Soient E et F deux ensembles. Si $E \subseteq F$ on dit que E est une **partie** de F (ou un **sous-ensemble**) de F. On note $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des parties de F. Ainsi, on a

$$E \in \mathcal{P}(F) \quad \text{équivaut à} \quad E \subseteq F$$

Dire que E n'est pas inclus dans F revient à dire qu'il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $x \notin F$. On écrit alors $E \nsubseteq F$.

NB : on convient que l'ensemble vide est un inclus dans tout ensemble.

Considérons à présent une propriété P quelconque relative à une variable liée x d'un ensemble E (cela signifie que la propriété en question a un sens pour tout élément de E et qu'elle est éventuellement vraie pour certains éléments et fausses pour les autres). Les éléments de E qui possèdent cette propriété forment une partie de E notée $\{x \in E \,/\, P(x)\}$. Ainsi si $A = \{x \in E \,/\, P(x)\}$, on a pour tout $x \in E$, $x \in A \Leftrightarrow P(x)$.

Pour décrire une partie d'un ensemble, il suffit de donner une propriété caractéristique de cette partie, c'est-à-dire une propriété telle qu'un élément lui appartienne si et seulement s'iI vérifie celle-ci ; dans ce cas, on dit qu'elle est définie en **compréhension**.
Par exemple, l'ensemble A des solutions réelles de l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ s'écrit $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2-3x+2 = 0\}$. L'intervalle réel $]3, 10]$ est la partie de $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \,/\, 3 < x \leq 10\}$.

Lorsque cela est possible, on peut aussi, pour décrire la partie, dresser la liste de ses éléments (qu'on place entre deux accolades) ; on dit alors qu'elle est décrite ou définie en **extension**.
Par exemple, l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x^2 - 3x + 2 = 0\}$ s'écrit en extension $A = \{1, 2\}$. Si E est l'ensemble des entiers naturels qui divisent 12, on a $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut décrire en extension des ensembles infinis ; par exemple, l'ensemble F des entiers naturels impairs s'écrit : $F = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$.

Question : Peut-on parler de l'ensemble Ω dont les éléments sont tous les ensembles ?

Exercice
Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble contenant 4 éléments. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

On dispose du résultat suivant.

Théorème 1.1: Si E est un ensemble fini alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est un ensemble fini et on a

$$Card\,(\mathcal{P}(E)) = 2^{Card\,(E)}$$

Par exemple si $card(E) = 5$ on a $card(\mathcal{P}(E) = 2^5 = 32$.

Exercice
Soit $E = \emptyset$. Déterminer $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$

2 Éléments de base de logique mathématique

La logique vient du grecque « logos » qui signifie « parole, discours », et par extension « rationalité », la logique est donc la science de la raison. Plus précisément, c'est la sciences qui étudie les règles que doivent respecter tout raisonnement valide, qui permet de distinguer un raisonnement valide d'un raisonnement qui ne l'est pas.

2.1 Notion de Propositions

Définition 2.1: Une **proposition** (ou bien **assertion**) est une affirmation qui est soit vraie, soit fausse, mais qui n'est pas les deux à la fois.

Les propositions se repartissent donc en deux classes : **les propositions vraies** et **les propositions fausses** et toute proposition appartient à une et une seule de ces deux classes. Cette convention fondamentale permet d'associer donc à chaque proposition donnée, l'une des **valeurs de vérité** : **V** si la proposition est vraie, **F** si la proposition est fausse.

Par exemple : l'affirmation
(i) « 2 plus 3 font 5 » est une proposition vraie.
(ii) « Le Liberia est un pays de l'Afrique » est une proposition vraie.
(iii) « Pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que $m^2 = n$ » est une proposition fausse.
(iv) « Il a fait beau le jour J » n'est pas une proposition car les critères de décision sont insuffisants.
(v) « Il y a des formes de vie sur d'autres planètes dans l'univers » est une proposition.

Le but de toute activité scientifique est de distinguer parmi les propositions celles qui sont vraies de celles qui sont faussent. Cette recherche repose sur l'expérience et sur le raisonnement. Raisonner c'est déterminer la valeur de vérité de propositions construites en combinant entre elles des propositions dont les valeurs de vérités sont déjà connues.
Le calcul propositionnel s'intéresse uniquement à la façon dont les propositions sont liées entre elles et aux conséquences qu'on peut en tirer quant à leur valeur de vérité.
Notons que certaines propositions sont considérées comme vérité absolue, qui ne se déduisent pas d'autres propositions vraies, elles traduisent, dans certains cas des propriétés évidentes. On les appelle des **axiomes**. Par exemple, l'énoncé suivant est un axiome de la Géométrie euclidienne : « Par deux points distincts du plan, il passe une droitre et une seule ».
Dans les cours de mathématiques ou informatique une proposition (vraie !), selon l'importance qu'on donne à cette proposition au sein de la théorie étudiée, pourra aussi porter le nom de : théorème, corollaire, lemme. Notons qu'un **théorème** est une proposition (vraie !) jugée

importante dans le développement d'une théorie (mathématique) ; un **corollaire** est une proposition qui est conséquence immédiate d'une proposition déjà démontrée ; un **lemme** est une proposition intermédiaire utilisée au cours de la démonstration de certaines propositions.

Le calcul propositionnel permet de combiner entre elles les propositions au moyen d'opérations appelées **connexions**.

2.2 Connecteurs logiques

Si P, Q, R, ... sont des propositions, tout énoncé formé à partir de ces propositions et des liaisons **et**, **ou**, **non** est encore une proposition puisqu'on peut, dans chaque situation, décider de sa vérité. Cette grammaire des propositions se mathématise à l'aide de signes que l'on nomme **connecteurs**.

a) **La négation** d'une proposition P est notée non(P) (ou bien $\rceil P$). La négation d'une proposition P vraie est fausse et la négation d'une proposition P fausse est vraie. Dans certains ouvrages, le négation d'une proposition P est notée $\overline{P}$.
On a la table de vérité suivante

P	$\rceil P$
V	F
F	V

Par exemple, pour énonçer la négation de « 2 plus 3 font 5 », on doit dire « il est faut que 2 plus 3 font 5 » ou bien aussi « 2 plus 3 ne font pas 5 ».

b) **La conjonction** (P et Q) est une proposition qui est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies. On la note aussi $P \wedge Q$.
La table de vérité correspondante est

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Par exemple, la conjonction des affirmations « 6 est divisible par 2 » et « 6 est divisible par 3 » est l'affirmation « 6 est divisible par 2 et 6 est divisible par 3 ». On peut aussi dire « 6 est à la fois divisible par 2 et par 3 ».

c) **La disjonction** (P ou Q) est une proposition qui est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions P et Q est vraie. (Les deux peuvent être vraies). Le

« ou » a un sens inclusif. On déduit la table de vérité suivantes.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Par exemple, la disjonction des affirmations « **6 est divisible par 2** » et « **6 est divisible par 3** » est l'affirmation : « **6 est divisible par 2 ou 6 est divisible par 3** ».

d) **L'équivalence** ($P \Leftrightarrow Q$) est une proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses, autrement dit, si P et Q ont la même valeur de vérité.

On déduit la table de vérité suivante.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Par exemple, soient x et y des nombres réels,

$$x = \exp(y) \quad \Leftrightarrow \quad (x > 0 \quad \text{et} \quad y = \ln(x))$$

e) **L'implication logique** ($P \Rightarrow Q$) est une proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse ou Q est vraie. Autrement dit,

$$(P \Rightarrow Q) \quad \text{signifie} \, (\rceil P \, \text{ou} \, Q)$$

On est donc amené à écrire des affirmation du genre : « P **implique** Q », « P **entraine** Q », « si P, **alors** Q ».
Cette notion est la plus difficile à maîtriser, contrairement à ce que l'on peut penser au premier abord. On a la table de vérité suivante

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Par exemple, l'affirmation « **Si Yao est à Paris alors Yao est en France** » est une proposition vraie. L'affirmation « **Si** $\frac{1}{2}$ **est un nombre entier, alors** $\frac{1}{2}$ **n'est pas un nombre**

entier ≫ est une proposition vraie.

Soient P et Q des propositions.

1) La négation de $(P\, et\, Q)$ est $(\rceil P\, ou\, \rceil Q)$.

En effet, dire que $(P\, et\, Q)$ est fausse, c'est dire que l'une au moins des deux propositions est fausse.

2) La négation de (P ou Q) est $(\rceil P\, et\, \rceil Q)$.

En effet, nier que l'une au moins des deux propositions est vraie, c'est dire qu'elles sont toutes les deux fausses.

3) La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P\, et\, \rceil Q)$.

En effet, nous avons vu que $P \Rightarrow Q$ est synonyme de $(\rceil P\, ou\, Q)$. La négation est donc bien $(Pet\rceil Q)$. Dire que l'implication est fausse, c'est donc dire que l'on a l'hypothèse P mais pas la conclusion Q.

4) La négation de $(P \Leftrightarrow Q)$ est $((P\, et\, \rceil Q)\, \text{ou}\, (Q\, et\, \rceil P))$.

Remarque 2.1: Étant données des propositions P, Q, pour exprimer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, on peut, selon l'usage, utiliser l'une des expressions suivantes.

(1) P **entraîne** Q.
(2) Si on a P, **alors** on a Q.
(3) Q est **conséquence** de P.
(4) Q est une **condition nécessaire** pour qu'on ait P.
(5) Pour qu'on ait P, **il faut** (il est nécessaire) qu'on ait Q.
(6) P est une **condition suffisante** pour qu'on ait Q.
(7) Pour qu'on ait Q, **il suffit** (il est suffisant) qu'on ait P.

De même, pour exprimer que $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie, on peut utiliser l'une des expressions suivantes :

(a) P **équivaut à** Q.
(b) On a P **si, et seulement si**, on a Q.
(c) P est une **condition nécessaire et suffisante** pour qu'on ait Q.

Propriétés 2.1: les assertions suivantes sont toutes vraies, c'est-à-dire sont des propositions intrinsèquement vraies pour toute valeur de vérité de P, Q, R (on les appelle des **tautologies** ou règles logiques).

1) $(P \vee P) \Leftrightarrow P$

2) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$

3) $((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$

4) $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$

5) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$

6) $((P \wedge Q) \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge (Q \wedge R))$

7) $(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

8) $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$

9) $(P \Rightarrow Q) \ \Leftrightarrow \ (\rceil P \vee Q)$

10) $\rceil(P \vee Q) \ \Leftrightarrow \rceil P \wedge \rceil Q$

11) $\rceil(P \wedge Q) \ \Leftrightarrow \rceil P \vee \rceil Q$

12) $(P \Rightarrow Q) \ \Leftrightarrow \ (\rceil Q \Rightarrow \rceil P)$

13) $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R) \ \Rightarrow \ (P \Rightarrow R)$

14) $(P \Leftrightarrow Q \text{ et } Q \Leftrightarrow R) \ \Rightarrow \ (P \Leftrightarrow R)$

15) $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$

16) $((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$

17) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$

18) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q \,\text{et}\, Q \Rightarrow P)$

Le lecteur est prié de s'en convaincre. Ces résultats peuvent s'obtenir à partir des tables de vérité des assertions étudiées.

Exercice

Soient P et Q des propositions logiques.

1) Exprimer sans connecteur $\Rightarrow$ ni $\Leftrightarrow$ la proposition suivante :

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$

En déduire une proposition équivalente simple.

2) Établir la table de vérité de la proposition suivante :

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$$

3) On considère la proposition suivante

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \;\Rightarrow\; (P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$$

Sans utiliser une table de vérité, vérifier si cette proposition est une tautologie. Justifier la réponse ! (on rappelle qu'une tautologie est une proposition intrinsèquement vraie).

2.3 Quantificateurs logiques

Considérons à présent une proposition P qui dépend de la variable x appartenant à un domaine E. On notera $P(x)$ pour dire que P dépend de x. Lire « P **de** x »

(a) Pour exprimer que la proposition $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x du domaine E, on écrit

$$\exists\, x \in E,\ P(x)$$

On lit « **Il existe au moins un élément** x **appartenant à** E **tel que** $P(x)$ » ou aussi « **Pour au moins un élément** x **appartenant à** E**, on a** $P(x)$ »

Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

Exemple
(i) Considérons l'ensemble $E = \mathbb{N}$ des entiers naturels. On sait qu'un entier naturel x est dit pair si 2 divise x. Si $P(x)$ signifie « 2 divise x », l'affirmation « Il existe au moins un entier naturel divisible par deux » s'écrit « $\exists\, x \in \mathbb{N},\ P(x)$ ».

(ii) L'affirmation « Certains nombres réels sont plus grand que leur carrée » s'écrit

$$\exists\, x \in \mathbb{R},\ x > x^2$$

(b) Pour exprimer que la proposition $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x du domaine E, on écrit :

$$\forall\, x \in E,\ P(x).$$

On lit : ≪ **Quel que soit l'élément x appartenant à E, P(x)** ≫ ou aussi ≪ **Pour tout élément x de E, on a $P(x)$** ≫

Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**.

Par exemple, considérons l'ensemble $E = \mathbb{R}$ des nombres réels. Pour tout nombre réel x, si $P(x)$ signifie ≪ x^2 est positif ≫, l'affirmation ≪ le carrée de tout nombre réel est positif ≫ s'écrit ≪ $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ ≫.

Remarque 2.2: (1) Le symbole $\forall$ n'est pas une abréviation de ≪ pour tout ≫ ou de ≪ quel que soit ≫ ; il faut l'employer, comme dans (a), sous la forme : ≪ $\forall$ ... , ... ≫ qui se lit : ≪ pour tout ... on a ... ≫ sans omettre la virgule qui se lit ≪ on a ≫.

(2) Notons aussi que dans l'expression ≪ $\forall x \in E, P(x)$ ≫ le quantificateur précède la proposition P(x), qui est appelée **portée** du quantificateur.

Il faut également veiller à contrôler dans l'expression ≪ $\forall\, x \in E, P(x)$ ≫, la partie $P(x)$ sur laquelle porte la quantification : par exemple, l'assertion

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x+2} = \sqrt{-x} \Rightarrow x = 0$$

qui est l'assertion

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \left(\sqrt{x+2} = \sqrt{-x} \Rightarrow x = 0\right)$$

(c'est à dire que ici $P(x)$ signifie ≪ $\sqrt{x+2} = \sqrt{-x} \Rightarrow x = 0$ ≫).
Cette assertion ne doit pas être confondue avec l'affirmation

$$\left(\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x+2} = \sqrt{-x}\right) \Rightarrow x = 0$$

La première est fausse, alors que la seconde est vraie puisque l'assertion

$$\left(\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x+2} = \sqrt{-x}\right)$$

est fausse.

c) La négation de l'assertion ≪ $\forall\, x \in E,\ P(x)$ ≫ est ≪ $\exists\, x \in E,\ \rceil P(x)$ ≫. On peut aussi écrire ≪ $\nexists\, x \in E,\ P(x)$ ≫. Lire ≪ il n'existe pas d'élément $x \in E$ tel que $P(x)$ ≫.

En effet, dire qu'il est faux que $P(x)$ soit vraie pour tout $x \in E$, c'est dire que $P(x)$ est fausse pour au moins un $x \in E$.

d) La négation de l'assertion « $\exists\, x \in E,\ P(x)$ » est « $\forall\, x \in E,\ \rceil P(x))$ ».

En effet, dire qu'il n'existe aucun élément $x \in E$ vérifiant $P(x)$, c'est dire que tous les éléments $x \in E$ vérifient la négation de $P(x)$.

Exemple
La négation de « $\forall\, x \in [0,1], \sqrt{x} \leq x$ » est « $\exists\, x \in [0,1], \sqrt{x} > x$ ». La première assertion est fausse, la seconde est donc vraie.

Remarque 2.3: Notons que

(1) il faut prendre garde dans l'application des deux propositions précédentes, à savoir « $\forall\, x \in E, P(x)$ » et « $\exists\, x \in E, P(x)$ ». Faire attention au domaine E. Par exemple, si on est tenté, à tort, de considérer l'affirmation « $\exists\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} < 0$ » comme une assertion, on aurait tendance à considérer qu'elle est fausse ; donc sa négation qui est « $\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \geq 0$ » serait une proposition vraie ; en fait, cette affirmation n'a pas de sens. De même, l'équivalence $(\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9)$ valable sur $[0, +\infty[$, ne nous autorise pas à écrire que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, (\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow\ x > 9)$$

2) une proposition peut éventuellement contenir une succession de quantificateurs. Il faut faire attention à l'ordre des quantificateurs dans une telle proposition. Si on peut intervertir l'ordre d'apparition de deux quantificateurs de même espèce, on ne doit pas intervertir l'ordre d'apparition de $\forall$ et $\exists$ (sous peine de changer le sens de la phrase). Par exemple, étant donnée une suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, considérons la proposition « $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, M \in \mathbb{R}, U_n \leq M$ ». C'est une assertion vraie. Mais l'assertion « $\exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, n \in \mathbb{N},\ U_n \leq M$ » qui n'est pas la négation de la première, n'a pas le même sens qu'elle. Cette assertion est vraie pour certaines suites numériques (suites bornées dans $\mathbb{R}$) et fausses pour d'autres.

Autres exemples
(i) $\forall\, x \in \mathbb{R}_-,\ \forall\, y \in \mathbb{R}_+,\ x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, y \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, x \in \mathbb{R}_-,\ x \leq y.$

(ii) $\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \exists\, n \in \mathbb{N},\ m \leq n \quad \not\Leftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ m \leq n.$

Notons donc que deux quanticateurs de même nature qui se suivent peuvent être échangés. Cela ne doit pas se faire pour deux quantificateurs de nature différente qui se suivent dans une proposition.
Une proposition peut éventuellement dépendre de plusieurs variables lées.

On notera les implications suivantes (il n'y a pas d'équivalence !).

(a) $(\exists\, x \in E,\ P(x) \wedge Q(x)) \ \Rightarrow\ (\exists\, x \in E,\ P(x)) \wedge (\exists\, x \in E,\ Q(x)).$

(b) $(\forall\, x \in E,\, P(x)) \vee (\forall\, x \in E,\, Q(x)) \;\Rightarrow\; (\forall\, x \in E,\, P(x) \vee Q(x))$.

Par exemple, il existe des nombres entiers pairs et il existe des nombres entiers impairs, mais, il n'existe aucun entier qui soit à la fois pair et impair. De même, tout entier est pair ou impair, mais il est faux que tout entier soit pair ou que tout entier soit impair.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Exprimer à l'aide des quantificateurs logiques et de symboles mathématiques les affirmations suivantes :

(1) La fonction f est positive sur l'intervalle $[2, 9]$.

(2) La fonction f n'est pas constante sur l'intervalle $[2, 9]$

(3) La fonction f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$.

(4) La fonction f n'est pas continue au point $x_0 = 5$.

(5) La fonction f s'annule uniquement aux points $x_0 = -3$ et $y_0 = 5$.

2.4 Quelques formes de raisonnements

Un raisonnement consiste à arriver à une conclusion en partant d'une ou plusieurs hypothèses, et en utilisant les règles de déduction d'une proposition à partir d'une autre.

2.4.1 Raisonnement par implication

Principe : si P est vraie et si $P \Rightarrow Q$ est vraie alors Q est vraie. Ainsi, pour démontrer une propriété Q (conséquence) partant d'une proposition vraie P (hypothèse), on démontrera

$$P \Rightarrow P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_{n-1} \Rightarrow P_n \quad \text{et} \quad P_n \Rightarrow Q$$

Exemple

Soit n un entier naturel. Montrons que

$$n^2 \text{ impair} \;\Rightarrow\; n \text{ impair}$$

On a

n^2 impair $\Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$, $n^2 = 2\,k+1 \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$, $n^2 - 1 = 2\,k \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}$, $(n-1)(n+1) = 2\,k \Rightarrow 2$ divise $(n+1)(n-1)$. Ce qui implique que 2 divise $n+1$ ou bien 2 divise $n-1$ car 2 est un entier premier. Par conséquent, il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que $n+1 = 2\,p$, c'est à dire que $n = 2\,p - 1$ ou il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $n - 1 = 2\,k$, c'est à dire que $n = 2\,k+1$. Dans tous les cas n est impair. En somme, n^2 impair $\Rightarrow$ n impair.

2.4.2 Raisonnement par équivalence

Il consiste à établir l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ à l'aide d'une chaîne d'équivalences car l'équivalence est transitive :

$$Q_1 = P \Leftrightarrow Q_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Q_n = Q$$

permet de conclure que $P \Leftrightarrow Q$.

Exemple
Résoudre dans $\mathbb{R}$, en raisonnant par équivalences l'équation suivante.

$$\sqrt{x^2+2} = 3\,x$$

d'inconnue x.

Le domaine de validité de cette équation est $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$

$\sqrt{x^2+2} = 3\,x \Leftrightarrow (\sqrt{x^2+2})^2 = 9\,x^2 \Leftrightarrow x^2+2 = 9\,x^2 \Leftrightarrow 8\,x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow 2(4x^2-1) = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$. Comme $x \in \mathbb{R}_+$, l'unique solution est $x = \dfrac{1}{2}$.

2.4.3 Raisonnement par l'absurde

La démonstration par l'absurde s'appuie sur la règle logique suivante, que le lecteur pourra vérifier sans peine :

$$((\rceil P \Rightarrow Q) \wedge (\rceil P \Rightarrow \rceil Q)) \Leftrightarrow P$$

Autrement dit,

$$(\rceil P \Rightarrow (Q \wedge \rceil Q)) \Leftrightarrow P$$

Ainsi, la règle dite de raisonnement par l'absurde est la suivante : pour montrer la proposition P, ajouter $\rceil P$ à la liste de ses connaissances et montrer une contradiction, autrement dit, si $\rceil P \Rightarrow$ contradiction, on a prouvé P.

Exemple
Montrons que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons le contraire, c-à-d que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Alors il existe des entiers naturels p, q avec $q \neq 0$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. Quitte à réduire cette fraction, on peut supposer que $PGCD(p, q) = 1$.
On a

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow 2\,q^2 = p^2$$

Il s'ensuit que 2 divise p^2. Comme 2 est un nombre premier alors 2 divise p. Ainsi, il existe un entier k tel que $p = 2\,k$. Nous obtenons alors $2\,q^2 = 4\,k^2$. Ceci équivaut à l'égalité $q^2 = 2\,k^2$. On en déduit que 2 divise. Nous avons obtenu que 2 est un commun diviseur des entiers p et q. Ce qui est absurde car $PGCD(p, q) = 1$. Conclusion $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

2.4.4 Raisonnement par contraposée

Noter que l'on a

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil Q \Rightarrow \rceil P)$$

Ceci permet de faire un raisonnement par contraposée). Il s'agit prouver que $\rceil Q$ implique $\rceil P$. Ceci est équivalent à prouver que P implique Q.

Exemple
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$n^2\,\text{impair} \Rightarrow n\,\text{impair}$$

Ceci équivaut à prouver que

$$n\,\text{pair} \Rightarrow n^2\,\text{pair}$$

Supposons l'entier n pair. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2\,k$. Ainsi $n^2 = 2(2k^2)$ est un entier pair. D'où $n\,\text{pair} \Rightarrow n^2\,\text{pair}$. On conclut que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\, n^2\,\text{impair} \quad \Rightarrow n \quad \text{impair}.$$

2.4.5 Raisonnement par récurrence

(1) Récurrence simple

Ce type de démonstration s'applique aux propositions dont l'énoncé dépend d'un

entier naturel n ; ce raisonnement consiste à montrer de la manière suivante qu'une proposition $P(n)$ dépendante de l'entier $n \in \mathbb{N}$ (où n est supérieur ou égal à un certain entier n_0) est vraie :
(i) on montre que $P(n_0)$ est vraie,
(ii) on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$,

$$P(n) \quad \text{implique} \quad P(n+1)$$

Ceci permet de déduire que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'on a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}$$

Cette proposition est vraie pour $n = 0$ car

$$\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0\,(0+1)}{2}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la proposition vraie à l'ordre n. Montrons que c'est vraie à l'ordre $n+1$. On a

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = 0+\cdots+n+(n+1) = \sum_{k=0}^{n} k+n+1 = \frac{n\,(n+1)}{2}+n+1 = (n+1)(\frac{n}{2}+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

La proposition est donc vraie à l'ordre $n+1$. En Somme, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Exercice
Soit $a \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, l'entier $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1$ est multiple de a^2.

(2) **Récurrence généralisée**

Ce raisonnement consiste à montrer de la manière suivante qu'une proposition $P(n)$

dépendante de l'entier $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq n_0)$ est vraie :
(a) on montre que $P(n_0)$ est vraie,
(b) on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$,

$$(\forall\, k \in \mathbb{N},\, n_0 \leq k \leq n,\, P(k)) \;\Rightarrow\; P(n+1).$$

(c) Ceci permet de déduire que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple

Démontrer que tout nombre entier $n \geq 2$ est un nombre entier premier ou le produit d'un nombre fini de nombres entiers premiers.

C'est vrai pour $n = 2$ car 2 est un entier premier. Soit $n \geq 2$, un entier naturel. Supposons que tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$ est premier ou le produit d'un nombre fini de nombres entiers premiers. Montrons que c'est vrai pour l'entier $n+1$. C'est évident si $n+1$ est un entier premier. Supposons que $n+1$ ne soit pas premier. Il existe p, $q \in \mathbb{N}$ tels que $n+1 = pq$ avec $2 \leq p \leq n$ et $2 \leq q \leq n$. D'après l'hypothèse de récurrence, chacun des entiers p et q est premier ou produit fini d'entiers premiers, par conséquent, l'entier $= n+1 = pq$ se décomposent comme produit fini d'entiers premiers. La proposition est donc vraie à l'ordre $n+1$. En somme, tout nombre entier $n \geq 2$ est premier ou le produit d'un nombre fini de nombres entiers premiers.

2.4.6 Une méthode de démonstration de la proposition « $\forall\, x \in E, P(x)$ »

Le plus souvent, pour montrer l'assertion « $\forall\, x \in E, P(x)$ », on écrit lors de la rédaction finale :
Supposons que x est un élément (une variable liée !) de E ; montrons qu'on a $P(x)$ .....
Ou aussi
Soit x un élément (quelconque fixé) de E (ou : prenons x dans E) ; montrons qu'on a $P(x)$ ....

On remarquera que, lorsqu'on écrit : supposons que x est (ou soit x) un élément de E, on « fixe » x, mais on ne lui impose aucune particularité, hormis le fait d'appartenir à E ; cet élément représente donc un élément quelconque de E. La propriété obtenue est, par conséquent, valable pour tout élément de E.

Exemple
Montrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 \geq 0$.

Preuve : soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= x^2+2\,\frac{1}{2}x+1 \\ x^2+x+1 &= x^2+2\,\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1 \\ x^2+x+1 &= (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4} \geq 0 \end{aligned}$$

Donc $x^2+x+1 \geq 0$. En somme, $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2+x+1 \geq 0$.

2.4.7 Une méthode de démonstration de la proposition « $\exists\, x \in E, P(x)$ »

Le plus souvent, on est amené à exhiber un élément x de E vérifiant $P(x)$; on analyse le problème afin de trouver un élément x qui semble convenir ; la démonstration consiste alors à vérifier, tout simplement, que l'élément choisi vérifie la propriété P.
Lors de la rédaction de la démonstration de, on écrit :

Posons $x =$ ... (ou prenons x tel que ...) ; alors $x \in E$ car ... ; montrons P(x) ....
(Ici on désigne, un objet précis de E (contrairement à ce qu'on fait dans le cas de la preuve de la proposition « $\forall\, x \in E, P(x)$ »).

Notons que l'analyse est parfois difficile ; mais la recherche de conditions nécessaires à l'existence de l'élément x (« supposons x élément de E vérifiant $P(x)$ et essayons de mettre en évidence des propriétés nécessairement vérifiées par x ») conduit souvent sur la voie d'une solution. On met ainsi en valeur un certain nombre de **candidats-solutions** qu'il faut examiner et trier. La synthèse consiste alors à prouver que le candidat x retenu (choisi le plus simple possible) vérifie bien la propriété $P(x)$.
NB : les candidats-solutions ne sont pas, en général, tous solution du problème.

Exemple
(1) Montrer que $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x = \sqrt{x}+6$.

Il n'est pas difficile de voir que $x = 9$ est une solution, car $9 = \sqrt{9}+6$.

Ici l'analyse fournit deux candidats-solutions 4 et 9, et seul 9 est utile pour montrer que l'assertion est vraie.

(2) Montrer que $\exists\, x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2-x+9} > \sqrt{x^2+x+3}$.

Preuve :
prenons $x = 0$; alors $x \in \mathbb{R}$ et $\sqrt{x^2-x+9} = 3 > \sqrt{3} = \sqrt{x^2+x+3}$.

Dans cet exemple, il serait long d'étudier l'inéquation donnée.

Exercice
On note $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$.
Montrer que f s'écrit de manière unique, comme somme d'une application paire et d'une application impaire.

2.4.8 Raisonnement par contre-exemple

Rappelons que les propositions $\rceil(\forall\, x \in E,\, P(x))$ et $\exists\, x \in E,\, \rceil P(x)$ sont équivalentes.

Principe du contre-exemple : pour montrer que la proposition « $\forall\, x \in E,\, P(x)$ » est fausse, on exhibe $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ soit fausse.

L'élément x_o est appelé un contre-exemple de l'assertion $\forall\, x \in E, P(x)$.

Exemples
(1) Montrer que l'assertion $\forall\, x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x$ est fausse.

Preuve : donnons un contre-exemple ; posons $x = 2$; alors $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 > x$

(2) Montrer qu'un nombre entier divisible par 6 et 4 n'est pas nécessairement divisible par 24.

Peuve : l'entier $x = 12$ est un contre exemple.

2.4.9 Raisonnement par disjonction des cas

La démonstration par disjonction des cas s'appuie sur la règle logique suivante, que le lecteur pourra vérifier sans peine.

$$((Q \Rightarrow P) \wedge (\rceil Q \Rightarrow P)) \Leftrightarrow P$$

Ainsi, pour montrer qu'une assertion P donnée est vraie, il suffit de trouver une assertion Q telle que $(Q \Rightarrow P)$ et $(\rceil Q \Rightarrow P)$ soient vraies. Précisons, qu'en général, l'assertion Q intervient de façon naturelle au cours de l'analyse.

Ainsi lors de la rédaction, on écrit :
- 1^{er} cas : supposons qu'on a Q et vérifions qu'on a P. ....
- $2^{\text{ème}}$ cas : supposons qu'on a $\rceil Q$ et vérifions qu'on a P. ......

Exemple
Soit n un entier naturel. Montrer que n^2 est divisible par 4 ou $n^2 - 1$ est divisible par 4.

Preuve : On sait que n est pair ou impair.

- 1^{er} cas : supposons n pair. Il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2\,k$. Alors $n^2 = 4\,k^2$ est divisible par 4.
- $2^{\text{ème}}$ cas : supposons n impair. Il existe un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2\,k + 1$. Alors $n^2 = 4k^2 + 4k + 1$. Ainsi $n^2 - 1 = 4(k^2 + k)$ est divisible par 4.

En somme, étant donné un entier naturel n, on a n^2 divisible par 4 ou $n^2 - 1$ divisible par 4.

Exercice
Soit n un entier naturel. Montrer que $n^3 - n$ est divisible par 6.

3 Opérations élémentaires sur les ensembles

3.1 Opérations élémentaires

Soit E un ensemble.

3.1.1 Intersection d'ensembles

Soient A, B deux parties de E. **L'intersection** de A et B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à l'ensemble A et à l'ensemble B. On le note $A \cap B$. Lire ≪ A **inter** B ≫.

$$A \cap B = \{x \in E \,/\, x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Ainsi,

$$\forall\, x \in E,\, x \in A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \in A \text{ et } x \in B.$$

On définit de façon générale $A \cap B \cap C$ ... etc.

Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont des parties **disjointes** de E.

Exemples
1) Soit $E = \mathbb{R}$. Pour $A = [-3, 10[$ et $B = [2, 17]$, on a $A \cap B = [2, 10[$.
2) Soit $E = \mathbb{R}$. Pour $H = [-5, 1[$ et $K = [2, 12]$, on a $H \cap K = \emptyset$.
3) Soit $E = \mathbb{N}$. Soient $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers naturels impairs. On a $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \emptyset$.

Propriétés 3.1: pour tout A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$, on a
(i) $A \cap A = A$,
(ii) $A \cap B = B \cap A$,
(iii) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(iv) $A \cap E = A$.
(v) $A \cap B \subseteq A$
(vi) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Preuve
les propriétés (i)-(v) sont évidentes.
Prouvons la propriété (vi). Soit $x \in E$.
$x \in (A \cap B) \cap C \;\Leftrightarrow\; x \in A \cap B \,\text{et}\, x \in C \;\Leftrightarrow\; x \in A \,\text{et}\, x \in B \,\text{et}\, x \in C \;\Leftrightarrow\; x \in A \,\text{et}\, x \in B \cap C \;\Leftrightarrow\; x \in A \cap (B \cap C)$. Par conséquent, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3.1.2 Réunion d'ensembles

Soient A, B deux parties de E. La réunion de A et B est par définition le sous-ensemble de E contenant exactement A ou B. On le note $A \cup B$. Lire « A **union** B ».

$$A \cup B = \{x \in E / \quad x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B\}$$

Ainsi,

$$\forall x \in E, x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \quad \text{ou} \quad x \in B.$$

On définit de façon générale $A \cup B \cup C$ ...etc.

Exemple
1) Soit $E = \mathbb{R}$. pour $A =]4, 10[$ et $B = [5, 17]$, on a $A \cup B =]4, 10[\cup [5, 17] =]4, 17]$.

2) Soit $E = \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et $\mathcal{I}$ l'ensemble des entiers naturels impairs. Alors on a $\mathcal{P} \cup \mathcal{I} = \mathbb{N}$.

Propriétés 3.2: pour tout A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$, on a

(1) $A \cup A = A$,

(2) $A \cup B = B \cup A$,

(3) $A \cup \emptyset = A$,

(4) $A \cup E = E$,

(5) $A \subseteq A \cup B$,

(6) $A \cap B \subseteq A \cup B$,

(7) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

(8) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$,

(9) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Preuve
Les propriétés (1)-(6) sont évidentes.
Prouvons la propriété (7) : soit $x \in E$.
$x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup B \,\text{ou}\, x \in C \Leftrightarrow x \in A$ ou $x \in B$ ou $x \in C \Leftrightarrow x \in A \,\text{ou}\, x \in$

$B \cup C \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C)$. Par conséquent, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Prouvons la propriété (8) : soit $x \in E$.
$x \in (A \cap B) \cup C \Leftrightarrow x \in A \cap B$ ou $x \in C \Leftrightarrow [x \in A$ et $x \in B]$ ou $x \in C \Leftrightarrow [x \in A$ ou $x \in C]$ et $[x \in B$ ou $x \in C] \Leftrightarrow x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C \Leftrightarrow x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$. Par conséquent, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

La preuve de la propriété (9) est laissée au lecteur ;

3.1.3 Complémentaire d'une partie dans un ensemble

Soit A une partie d'un ensemble E. On appelle complémentaire de A dans E, noté C_E^A, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note aussi $E \setminus A$ ou bien $\overline{A}$.

Par exemple, le complémentaire dans l'ensemble $\mathbb{R}$ de l'intervalle $[3, +\infty[$ est $]-\infty, 3[$.

Propriétés 3.3: pour tout A, B, $C \in \mathcal{P}(E)$, on a :

(1) $A \cap \overline{A} = \emptyset$,

(2) $\overline{\overline{A}} = A$.

(3) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$,

(5) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

(6) $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} \subseteq \overline{A}$.

Preuve
(4) Soit $x \in E$.
$x \in \overline{A \cup B} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ et $x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A}$ et $x \in \overline{B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. Par conséquent, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(5) Soit $x \in E$.

$x \in \overline{A \cap B} \;\Leftrightarrow\; x \notin A \cap B \;\Leftrightarrow\; x \notin A$ ou $x \notin B \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A}$ ou $x \in \overline{B} \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Par conséquent, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(6) Supposons $A \subseteq B$. Soit $x \in \overline{B}$. Alors $x \notin B$ et comme $A \subseteq B$ alors $x \notin A$ donc $x \in \overline{A}$. Par conséquent, $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad \overline{B} \subseteq \overline{A}$. D'autre part, $\overline{B} \subseteq \overline{A} \;\Rightarrow \overline{\overline{A}} \subseteq \overline{\overline{B}}$ et on sait que $\overline{\overline{A}} = A$ et $\overline{\overline{B}}$. En somme, $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} \subseteq \overline{A}$

3.2 Extension des opérations intersection et réunion

Définition 3.1: Soit E un ensemble non vide, I un ensemble non vide, appelé ensemble d'indices. On appelle famille de parties de E, indexée sur I, toute correspondance de I vers $\mathcal{P}(E)$ qui associe, à tout élément $i \in I$, un unique élément $A_i \in \mathcal{P}(E)$. Une telle famille est souvent notée $(A_i)_{i \in I}$.

Exemples
1) $I = \mathbb{N}$, $E = \mathbb{Z}$,
$\mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $n \longmapsto \{n,\, n+1\}$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \{n,\, n+1\}$. Alors la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de parties de $\mathbb{Z}$.

2) $I = \mathbb{N}$, $E = \mathbb{R}$,
$\mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $n \longmapsto]n,\, n+2[$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, posons $B_n =]n,\, n+2[$. Alors la famille $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de parties de $\mathbb{R}$.

Considérons I un ensemble non vide. Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E.

Définition 3.2: On appelle réunion de la famille de parties $(A_i)_{i \in I}$, l'ensemble des éléments de E appartenant à l'une au moins des parties A_i. Cet ensemble est noté $\bigcup_{i \in I} A_i$. On a donc

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E \,/\, \exists\, i \in I,\, x \in A_i\,\}$$

Ainsi

$$\forall\, x \in E,\; x \in \bigcup_{i \in I} A_i \;\Leftrightarrow\; \exists\, j \in I,\, x \in A_j$$

Définition 3.3: On appelle intersection de la famille de parties $(A_i)_{i\in I}$, l'ensemble des éléments de E appartenant à chacune des parties A_i. Cet ensemble est noté $\bigcap_{i\in I} A_i$. On a donc

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \,/\, \forall\, i \in I,\, x \in A_i\,\}$$

Ainsi

$$\forall\, x \in E,\ x \in \bigcap_{i\in I} A_i \ \Leftrightarrow\ \forall\, i \in I,\, x \in A_i$$

Définition 3.4: On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ **partitionne** E ou définie **une partition** de E si, et seulement si, les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

1) $\forall\, i \in I,\ A_i \neq \emptyset$,

2) $\forall\ i, j \in I,\, i \neq j \ \Rightarrow\ A_i \cap A_j = \emptyset$,

3) $E = \bigcup_{i\in I} A_i$.

Exemple de partition

$E = \mathbb{R}_+$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = [n, n+1[$. Alors
$\forall\, n \in \mathbb{N},\, A_n \neq \emptyset$,
$\forall\, m, n \in \mathbb{N},\, n \neq m, \quad A_m \cap A_n = \emptyset$.
On a

$$\mathbb{R}_+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

Donc la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partitionne l'ensemble $\mathbb{R}_+$.

3.3 Produit cartésien d'ensembles

Soient A et B deux ensembles.

Définition 3.5: **Le produit cartésien** de A **par** B noté $A \times B$ est par définition l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$.

$$A \times B = \{\,(a, b) \,/\, a \in A \quad \text{et} \quad b \in B\,\}$$

Exemple
Pour $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{a, b, c\}$, on a

$$A \times B = \{\, (1, a),\ (1, b),\ (1, c),\ (2, a),\ (2, b),\ (2, c),\ (3, a),\ (3, b),\ (3, c),\ (4, a),\ (4, b),\ (4, c)\,\}$$

Remarque 3.1: 1) Si $A \neq B$, on a $A \times B \neq B \times A$.

2) Si $a \neq b$, on a $(a, b) \neq (b, a)$ et $(a, b) \neq \{a, b\}$.

3) $\forall\,(a, b) \in A \times B$ et $\forall\,(x, y) \in A \times B$, $\quad (a, b) = (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad a = x \quad$ et $\quad b = y$.

4) $A \times B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A = \emptyset \quad ou \quad B = \emptyset$.

Proposition 3.1: Si A et B sont des ensembles finis alors $A \times B$ est un ensemble fini et on a

$$card\,(A \times B) = card(A) \times card(B)$$

6) On considère n ensembles ($n \in \mathbb{N}^*$), $A_1, \ldots, A_n$. Le produit cartésien de ces n ensembles est noté

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

C'est par définition l'ensemble de tous les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_i \in A_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Si chaque ensemble A_i, $i = 1, \ldots, n$ est fini alors $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ est fini et on a

$$card\,(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = card(A_1) \times card(A_2) \times \ldots \times card(A_n)$$

Propriétés 3.4: Soient A, B, E, F des ensembles quelconques. On a les propriétés suivantes.

1) $A \times B \subset E \times F \quad \Leftrightarrow \quad A \subset E \quad$ et $\quad B \subset F$,

2) $(A \cap B) \times E = (A \times E) \cap (B \times E)$,

3) $(A \cup B) \times E = (A \times E) \cup (B \times E)$,

4) $(A \cup B) \times (E \cap F) = [A \times (E \cap F)] \cup [B \times (E \cap F)]$,

5) $(A \cup B) \times (E \cap F) = [(A \times E) \cap (A \times F)] \cup [(B \times E) \cap (B \times F)]$.

Preuve (exercice !)

Exercices
Déterminer graphiquement les produits cartésiens suivants.
a) $[1, 3[\times[-2, 0]$

b) $[2, 3[\times\{1\}$

c) $\{2\} \times [-2, 0]$

d) $\mathbb{R} \times [-2, 0]$.

Définition 3.6: Soient E et F deux ensembles. On appelle **relation binaire** de E vers F, tout triplet $\mathcal{R} = (E, F, \Gamma)$ où Γ est une partie du produit cartésien $E \times F$ que l'on appelle **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}\,y$.

Si $E = F$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E, nous noterons en abrégé $(E, \mathcal{R})$.

Exemples
1) Soient $E = \{\,1, 2, 3, 4\}$, $F = \{\,a,\ b,\ c,\ d\,\}$ et $\Gamma = \{\,(2, a),\ (1,\ b),\ (2, c)\,\}$. Alors $\Gamma \subset E \times F$ et (E, F, Γ) est une relation binaire de E vers F.
2) Soit E un ensemble.
a) la relation binaire définie sur E par $\Gamma = \emptyset$ s'appelle la **relation vide** et la relation définie par $\Gamma = E \times E$ la **relation grossière**.
b) La relation définie par $\Gamma = \{(x, x)/\,x \in E\,\}$ est l'égalité dans E, son graphe s'appelle la **diagonale** de $E \times E$.

4 Relations binaires - Fonctions - Applications

4.1 Définitions

Définition 4.1: Soient E et F deux ensembles. On appelle **relation binaire** de E vers F, tout triplet $\mathcal{R} = (E, F, \Gamma)$ où Γ est une partie du produit cartésien $E \times F$ que l'on appelle **graphe** de la relation $\mathcal{R}$.

Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}\, y$.

Si $E = F$, on dit que $\mathcal{R}$ est une relation binaire sur E, nous noterons en abrégé $(E, \mathcal{R})$.

Exemples
1) Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ et $\Gamma = \{(2, a),\ (1,\ b),\ (2, c)\}$. Alors $\Gamma \subseteq E \times F$ et (E, F, Γ) est une relation binaire de E vers F.
2) Soit E un ensemble.
a) la relation binaire définie sur E par $\Gamma = \emptyset$ s'appelle la **relation vide** et la relation définie par $\Gamma = E \times E$ est appelée la **relation grossière**.
b) La relation définie par $\Gamma = \{(x, x)/\, x \in E\}$ est l'égalité dans E, son graphe s'appelle la **diagonale** de $E \times E$.

Définition 4.2: Soit $f = (E, F, \Gamma)$ une relation binaire d'un ensemble E vers un ensemble F.

1) On dit que f est une relation **fonctionnelle** (ou, est une **fonction**) de E vers F si tout élément de E est en relation avec au plus un élément y de F. Un tel élément est souvent noté $f(x)$.

L'ensemble E est appelé **ensemble de départ** de f et l'ensemble F est appelé **ensemble d'arrivé** de f.

L'ensemble des élément x de E pour lesquels $f(x)$ existe, s'appelle **ensemble de définition** de la fonction f et se note souvent D_f.

On note souvent $f : E \to F$ pour la fonction $f = (E, F, \Gamma)$.

On notera $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des fonctions de E vers F.

Exemple
On considère la correspondance $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sqrt{3x - 2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Alors f est une fonction. On a $D_f = \{\, x \in \mathbb{R} \,/\, x \geq \frac{2}{3}\,\}$.

Définition 4.3: Une fonction de E vers F est une **application** si **chaque** élément de E admet une image (unique) dans F.
L'ensemble des applications de E vers F se notera F^E.

L'**application identité** de E est par définition l'application de E vers E qui à tout élément $x \in E$ associe x lui-même, elle est souvent notée id_E.

Exemples
1) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3x-2}$ n'est pas une application.
2) La fonction $g : [\frac{2}{3}, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \sqrt{3x-2}$ est une application.

Définition 4.4: Soient $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. On appelle **restriction** de f à A, l'application notée $f_{/A}$, définie de A vers F, qui coincide avec f dans A. C'est à dire, $\forall\, x \in A$, $f_{/A}(x) = f(x)$. On dit alors que f est un prolongement de $f_{/A}$.

Par exemple, l'application $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $h(n) = n^2 - 3$ est la restriction à $\mathbb{N}$ de l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$.

Théorème 4.1: Si E et F sont des ensembles finis alors le nombre d'applications de E vers F égale

$$card(F)^{card(E)}$$

Par exemple si $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c\}$, le nombre d'applications de E vers F est 3^4, c'est à dire 81.

4.2 Composée d'applications

Définition 4.5: Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On appelle **composé** de l'application g par l'application f et on note $g \circ f$, l'application de E vers G définie par :

$$\forall\, x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Notons que l'écriture $g \circ f$ signifie que l'on effectue d'abord l'opération $x \longmapsto f(x)$ puis l'opération $f(x) \longmapsto g(f(x))$.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On a $f \circ id_E = f$ et $id_F \circ f = f$ mais il ne s'agit pas dans les deux cas de la même application identité.

Exemples
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2 - 1$. Alors $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = x^2$. Noter que $g \circ f \neq f \circ g$.

Propriétés 4.1: Soient $f : E \longrightarrow F, \quad g : F \longrightarrow G, \quad h : G \longrightarrow H$ des applications. Alors : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, et l'on note simplement $h \circ g \circ f$ cette application de E vers H.

Il s'agit d'une propriété très importante et triviale, nous supposerons donc qu'elle fait partie du patrimoine culturel du lecteur.

4.3 Injections, surjections, Bijections

Définition 4.6: Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **injective** si chaque élément de F admet au plus un antécédent dans E par f. Ainsi, l'application f est injective si et seulement si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :
1) $\forall\, x,\, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'$.
2) $\forall\, x,\, x' \in E, \quad x \neq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x')$

Définition 4.7: Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **surjective** (ou est **une surjection**) si chaque élément de F admet au moins un antécédent dans E par f. Ainsi f est surjective si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall\, y \in F, \quad \exists\, x \in E, \quad \text{tel que} \quad y = f(x)$$

Définition 4.8: Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que l'application f est **bijective** (ou est **une bijection**) si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi f est bijective si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall\, y \in F, \quad \exists !\, x \in E, \quad y = f(x).$$

Exemples

1) L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2 + 3$ n'est pas injective. En effet, on a $f(3) = f(-3)$. Elle n'est pas surjective car -10 n'a pas d'antécédent par f.

2) L'application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto x^2$ n'est pas injective mais, elle est surjective.

3) Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{3\,x-1}{x-1}$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Vérifions si f est injective.
Soit $x,\, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors $\dfrac{3\,x-1}{x-1} = \dfrac{3\,y-1}{y-1}$. Ceci équivaut à dire que

$$(3\,x-1)(y-1) = (3\,y-1)(x-1)$$

C'est aussi équivalent à dire que

$$3\,xy - 3x - y + 1 = 3\,yx - 3y - x + 1.$$

On en déduit que $2(x-y) = 0$ Par conséquent $x = y$. l'application f est donc injective.

Vérifions si f est surjective.
Soient $y \in \mathbb{R}$. Existe-t-il un élément $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ tel que $y = f(x)$?

$y = f(x) \;\Leftrightarrow\; y = \dfrac{3\,x-1}{x-1} \;\Leftrightarrow\; yx - y = 3\,x - 1 \;\Leftrightarrow\; x(y-3) = y - 1$. Donc $x = \dfrac{y-1}{y-3}$ si $y \neq 3$. Il n'est pas difficile de voir que 3 n'a pas d'antécédent par f. Donc l'application f n'est pas surjective.

4) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Montrer que f est bijective.

5) Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) = (x+y, x\,y)$. L'application g est-elle injective ? Surjective ?

On a $f(1,0) = (1,0) = f(0,1)$ or $((1,0) \neq (0,1)$, donc cette appliction n'est pas injective.
L'application g n'est pas surjective car par exemple l'élément $(1,1)$ n'a pas d'antécédant par g.

Définition 4.9: Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **inversible** s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$

Théorème 4.2: L'application $f : E \longrightarrow F$ est inversible si et seulement si f est bijective, l'application g de la définition 4.9 est alors unique, on l'appelle l'application **réciproque** de f . On la note f^{-1}, c'est une bijection de F vers E. Elle est définie par :

$$\forall\,(x,y) \in E \times F, \quad x = f^{-1}(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x).$$

Propriétés 4.2: Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. Si f et g sont inversibles alors $g \circ f$ est inversible et on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

En effet, on a $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = id_E$ et $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = id_G$.

Nombres d'applications injectives, surjectives, bijectives

Théorème 4.3: Soient E et F des ensembles finis, non vides, tels que $p = card(E)$ et $n = card(F)$.

(1) Le nombre d'applications injectives de E dans F est

$$A_n^p = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!} = n(n-1)\dots(n-p+1) & \text{si } p \leq n \\ 0 \quad \text{si} \quad p > n \end{cases}$$

(2) Si $p = n$ le nombre d'applications bijectives de E sur F est $n!$.

(3) Le nombres $S_{p,n}$ d'applications surjectives de E sur F est

$$S_{p,n} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k \, k^p & \text{si } n \leq p \\ 0 \quad \text{si} \quad n > p \end{cases}$$

où $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

4.4 Image directe, Image réciproque

Définition 4.10: Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $A \subseteq E$, $B \subseteq F$.

i) On appelle **image directe** de A par f, et on note $f(A)$, l'ensemble de tous les éléments $f(x)$ où $x \in A$. Autrement dit,

$$f(A) = \{y \in F \,/\, \exists\, x \in A, y = f(x)\}.$$

Ainsi, $\forall\, y \in F$, on a :

$$y \in f(A) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, x \in A,\ y = f(x).$$

ii) On appelle **image réciproque** de B par f, et l'on note $f^{-1}(B)$, l'ensemble de tous les éléments $x \in E$ tel que $f(x) \in B$. Autrement dit,

$$f^{-1}(B) = \{\, x \in E \,/\, f(x) \in B\,\}.$$

Ainsi, $\forall\, x \in E$ on a :

$$x \in f^{-1}(B) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in B.$$

On convient que $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

NB : remarquons que ces notations sont abusives, en particulier $f^{-1}(B)$ ne préjuge pas de l'existence de l'application réciproque de f. Évidemment, **si f est inversible** on a $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$, ce qui en quelque sorte justifie la notation. Mais en général $f^{-1}(\{y\})$ peut être vide ou contenir plus d'un élément.

Exemples

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

On pose
$A = \{-3, 2, 3, 7\}$, $B = \{-2, -3, 2, 4, 9\}$, $\quad C = [-2, 6]$, $\quad D = [-5, -1[$.
On a $f(B) = \{5, 10, 17, 82\}$, , $\quad f(C) = [1, 37]$ et $f^{-1}(D) = \emptyset$.

Exercice
Déterminer $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(C)$.

Propriétés 4.3: Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A, A' deux parties quelconque de E et B, B' deux parties quelconque de F. On a les propriétés suivantes.

1) $A \subseteq A' \quad \Rightarrow \quad f(A) \subseteq f(A')$,

2) $B \subseteq B' \quad \Rightarrow \quad f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$.

3) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$,

4) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$,

5) $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$, (attention ! Il n'y a pas égalité en général).

6) Si f est injective alors $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$,

7) $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, (attention ! Il n'y a pas égalité en général)

8) Si f est surjective alors $f(f^{-1}(B)) = B$,

9) $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, (attention ! Il n'y a pas égalité en général)

10) Si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$,

11) $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$

Preuve

1) Supposons $A \subseteq A'$. Soit $y \in f(A)$. Il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $A \subseteq A'$ alors $x \in A'$, d'où $y \in f(A')$. Par conséquent, $f(A) \subseteq f(A'$.

2) Supposons $B \subseteq B'$. Soit $x \in f^{-1}(B)$. Alors $f(x) \in B$. Comme $B \subseteq B'$ alors $f(x) \in B'$, c-à-d, $x \in f^{-1}(B')$. Donc $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$.

3) Montrons que $f(A) \cup f(A') \subseteq f(A \cup A')$.
On sait que $A \subseteq A \cup A'$ et $A' \subseteq A \cup A'$, donc $f(A) \subseteq f(A \cup A')$ et $f(A') \subseteq f(A \cup A')$. Donc $f(A) \cup f(A') \subseteq f(A \cup A')$.
Montrons à présent que $f(A \cup A') \subseteq f(A) \cup f(A')$.
Soit $y \in f(A \cup A')$. Il existe $x \in A \cup A'$ tel que $y = f(x)$. On a $x \in A$ ou $x \in A'$. Si $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$ et si $x \in A'$, $y = f(x) \in f(A')$. Ainsi $y \in f(A) \cup f(A')$. Donc $f(A \cup A') \subseteq f(A) \cup f(A')$.
En somme, on a $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

4) Soit $x \in E$.
$x \in f^{-1}(B \cap B') \Leftrightarrow f(x) \in B \cap B' \Leftrightarrow f(x) \in B \,\text{et}\, f(x) \in B' \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \,\text{et}\, x \in f^{-1}(B') \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$. Donc $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$.

5) On sait que $A \cap A' \subseteq A$ et $A \cap A' \subseteq A'$, donc $f(A \cap A') \subseteq f(A)$ et $f(A \cap A') \subseteq f(A')$. Par conséquent, $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$.

(la suite est laissée à la sagacité du lecteur)

Exercices
Montrer que

(a) f injective $\Leftrightarrow$ $\forall\, A \in \mathcal{P}(E),\ A = f^{-1}(f(A))$.

(b) f surjective $\Leftrightarrow$ $\forall\, B \in \mathcal{P}(F),\ f(f^{-1}(B)) = B$.

(c) f injective $\Leftrightarrow$ $\forall\, A,\ A' \in \mathcal{P}(E),\ f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

4.5 Fonction indicatrice

Définition 4.11: Soient E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction indicatrice** de A, la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, notée χ_A, définie sur E par

$$\forall\, x \in E,\ \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in A \\ 0 & \text{si} \quad x \notin A \end{cases}$$

Propriétés 4.4: Soient E un ensemble et A, B des parties de E. Alors pour tout $x \in E$, on a :

i) $\chi_{\overline{A}}(x) = 1 - \chi_A(x)$,

ii) $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x).\, \chi_B(x)$,

iii) $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_{A\cap B}(x)$,

iv) $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad \chi_A(x) \leq \chi_B(x)$,

v) $\chi_{A\triangle B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - 2\,\chi_A(x).\, \chi_B(x)$.

Exercice
Démontrer les propriétés ci-dessus.

Proposition 4.1: Soient E un ensemble fini et A une partie de E. Alors on a

$$card(A) = \sum_{x\in E} \chi_A(x)$$

Preuve (laissée au lecteur)

4.6 Relation d'équivalence - relation d'ordre

4.6.1 Relations d'équivalence

Définition 4.12: Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur l'ensemble E. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** sur E si les 3 conditions suivantes sont satisfaites.

i) $\mathcal{R}$ est **reflexive**, c'est à dire

$$\forall\, x \in E, \quad x\mathcal{R}\, x$$

ii) $\mathcal{R}$ est **symétrique**, c'est à dire

$$\forall\, x,\, y \in E, \quad x\mathcal{R}\, y \quad \Rightarrow \quad y\mathcal{R}\, x$$

iii) $\mathcal{R}$ est **transitive**, c-à-d

$$\forall\, x,\, y,\, z \in E, \quad x\mathcal{R}\, y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}\, z \quad \Rightarrow \quad x\mathcal{R}\, z$$

Exemples

1) la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}, \quad x \mathcal{R}\, y \quad \Leftrightarrow \quad 3 \quad \text{divise} \quad x - y$$

est une relation d'équivalence.
2) La relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}, \quad x \mathcal{R}\, y \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 2 \quad \text{est pair}$$

est une relation d'équivalence

Définition 4.13: Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, on appelle **classe d'équivalence** d'un élément x de E, l'ensemble

$$\overline{x} = \{\, y \in E \,/\, x \mathcal{R}\, y \,\}$$

L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle **ensemble quotient** de E par $\mathcal{R}$ et se note généralement $E/\,\mathcal{R}$. Tout élément d'une classe d'équivalence s'appelle représentant de cette classe.
L'application $s : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ définie par $x \longmapsto \overline{x}$ est surjective et s'appelle la **surjection canonique** associée à la relation binaire $\mathcal{R}$.

Exemple
1) Vérifions que la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{Z}, \quad x \mathcal{R}\, y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \quad \text{est divisible par} \quad 2$$

est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence de cette relation.

(i) Soit $x \in \mathbb{Z}$. On sait que $x - x = 0 = 2 \times 0$, donc $x \mathcal{R}\, x$. La relation $\mathcal{R}$ est donc réflèxive dans $\mathbb{Z}$.

(ii) Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x \mathcal{R}\, y$. Alors $\exists\, k \in \mathbb{Z}, x - y = 2k$. On a donc $y - x = 2(-k)$ avec $-k \in \mathbb{Z}$, donc $y \mathcal{R}\, x$. Cette relation $\mathcal{R}$ est donc symétrique dans $\mathbb{Z}$.

(iii) Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x \mathcal{R}\, y$ et $y \mathcal{R}\, z$. Alors $\exists\, k, p \in \mathbb{Z},\ x - y = 2k$ et $y - z = 2p$. On a donc $(x - y) + (y - z) = 2\,k + 2\,p$, c'est à dire $x - z = 2(k + p)$ avec $k + p \in \mathbb{Z}$, donc $x \mathcal{R}\, z$. Cette relation $\mathcal{R}$ est donc transitive dans $\mathbb{Z}$.
En somme, cette relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.

2) Vérifions que la relation Δ sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{Z}, \quad x \Delta\, y \quad \Leftrightarrow \quad x + y + 4 \quad \text{est pair}$$

est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{Z}$. On sait que $x + x + 4 = 2(x + 2)$ avec $x + 2 \in \mathbb{Z}$, donc $x\mathcal{R}\, x$. La relation Δ est donc réflèxive dans $\mathbb{Z}$.

(b) Soient $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x\Delta\, y$. Alors $\exists\, k \in \mathbb{Z}, x+y+4 = 2k$. On a donc $y+x++4 = 2k$, donc $y\mathcal{R}\, x$. Cette relation Δ est donc symétrique dans $\mathbb{Z}$.

(c) Soient $x, y, z \in \mathbb{Z}$ tels que $x\Delta\, y$ et $y\Delta\, z$. Alors $\exists\, k, p \in \mathbb{Z}$, $x+y+4 = 2k$ et $y+z+4 = 2p$. On a donc $(x + y + 4) + (y + z + 2) = 2\,k + 2\,p$. On déduit que $x + z + 4 = 2(k + p - y - 2$ avec $k + p - y - 2 \in \mathbb{Z}$, donc $x\Delta\, z$.
Cette relation Δ est donc transitive dans $\mathbb{Z}$.

En somme, cette relation binaire Δ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.

(Remarque : **montrer que** $\forall\, x,\ y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}\, y \quad \Leftrightarrow \quad x\Delta\, y$.)

3) Déterminons les classes déquivalance des éléments $a = 0$, $b = 1$ et $c = 3$ relativement à la relation d'équivalence $\mathcal{R}$.

Classe d'équivalence de $a = 0$.
On sait que $\overline{0} = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x\mathcal{R}\, 0\}$.
Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a $x\mathcal{R}\, 2 \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x - 0 = 2\,k$, donc x est de la forme $x = 2\,k$. On déduit que la classe $\overline{0}$ de 0 est l'ensemble des entiers relatifs pairs. Cet ensemble est souvent noté $2\mathbb{Z}$. Donc $\overline{0} = 2\mathbb{Z}$.

Classe d'équivalence de $b = 1$.
On sait que $\overline{1} = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x\mathcal{R}\, 1\}$.
Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a $x\mathcal{R}\, 1 \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x - 1 = 2\,k$, donc x est de la forme $x = 2\,k+1$. On déduit que la classe $\overline{1}$ de 1 est l'ensemble des entiers relatifs impairs. Cet ensemble est souvent noté $2\mathbb{Z} + 1$. Donc $\overline{1} = 2\mathbb{Z} + 1$.

Classe d'équivalence de $c = 2$.
On sait que $\overline{2} = \{x \in \mathbb{Z} \,/\, x\mathcal{R}\, 2\}$.
Soit $x \in \mathbb{Z}$. On a $x\mathcal{R}\, 2 \Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z},\ x - 2 = 2\,k$, donc x est de la forme $x = 2\,(k + 1)$. On déduit que la classe $\overline{2}$ de 2 est l'ensemble des entiers relatifs pairs. Donc $\overline{2} = 2\mathbb{Z} = \overline{0}$.

Propriétés 4.5: Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On a les propriétés suivantes.

1) $\forall\, x \in E,\ \overline{x} \neq \emptyset$,

2)$\forall\, x, y \in E,\ x\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y}$,

3) $\forall x,\, y \in E,\, \overline{x} \neq \overline{y} \;\Rightarrow\; \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$,

4) $\bigcup_{x \in E} \overline{x} = E$.

Preuve
1) Soit $x \in E$. Comme $x\mathcal{R}x$ alors $x \in \overline{x}$, donc $\overline{x} \neq \emptyset$.

2) Soient $x,\, y \in E$. Montrons que $x\mathcal{R}\, y \;\Leftrightarrow\; \overline{x} = \overline{y}$.
($\Rightarrow$)
Supposons que $x\mathcal{R}\, y$. Soit $z \in \overline{x}$. Alors $z\mathcal{R}\, x$. Comme $x\mathcal{R}\, y$, on déduit par transitivité que $z\mathcal{R}\, y$, c'est à dire que $z \in \overline{y}$, d'où $\overline{x} \subseteq \overline{y}$. On montre de même que $\overline{y} \subseteq \overline{x}$, ainsi $\overline{x} = \overline{y}$.
($\Leftarrow$)
Supposons que $\overline{x} = \overline{y}$. Comme $x \in \overline{x}$ alors $x \in \overline{y}$, c'est à dire que $x\mathcal{R}\, y$.

En somme, $x\mathcal{R}\, y \;\Leftrightarrow\; \overline{x} = \overline{y}$.

3) Soient $x,\, y \in E$ tels que $\overline{x} \neq \overline{y}$. Montrons que $\overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$. Supposons le contraire, c'est à dire $\overline{x} \cap \overline{y} \neq \emptyset$. Alors il existe $z \in E$ tel que $z \in \overline{x}$ et $z \in \overline{y}$. Ceci équivaut à dire que $\overline{x} = \overline{z}$ et $\overline{z} = \overline{y}$. On déduit que $\overline{x} = \overline{y}$, ce qui est absurde. Donc $\overline{x} \neq \overline{y} \;\Rightarrow\; \overline{x} \cap \overline{y} = \emptyset$.

4) Montrons que $\bigcup_{x \in E} \overline{x} = E$.
On sait que $\forall\, x \in E, \overline{x} \subseteq E$, donc $\bigcup_{x \in E} \overline{x} \subseteq E \qquad (1)$.
Réciproquement, pour tout $x \in E$, on a $\{x\} \subseteq \overline{x}$. Par conséquent, on a

$$E = \bigcup_{x \in E} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in E} \overline{x}$$

Donc $E \subseteq \bigcup_{x \in E} \overline{x} \qquad (2)$.
De (1) et (2), on déduit que $\bigcup_{x \in E} \overline{x} = E$.

Théorème 4.4: Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E.

(i) Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E alors les classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ partitionnent l'ensemble E.
(ii) Toute partition de E définit une relation d'équivalence sur E dont les classes sont ces ensembles qui partitionnent E.

Preuve
L'assertion (i) est une conséquence des propriétés ci-dessus (cf. Propriétés 4.5).
(ii) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E qui partitionne E. La relation $\mathcal{R}$ définie sur E par

$$\forall\, x,\, y \in E,\, x\,\mathcal{R}\, y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, i \in I,\, x \in A_i \quad \text{et} \quad y \in A_i$$

est une relation d'équivalence sur E.
Pour tout $x \in E$ et pour $i \in I$ tel que $x \in A_i$, on a $\overline{x} = A_i$.

4.6.2 Décomposition canonique d'une application

(cf. cours magistral)

4.6.3 Relations d'ordre

Définition 4.14: Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur l'ensemble E.
On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** sur E si les 3 conditions suivantes sont satisfaites.
i) $\mathcal{R}$ est **reflexive**, c'est à dire

$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$$

ii) $\mathcal{R}$ est **antisymétrique**, c'est à dire

$$\forall x,\, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}x \Rightarrow \quad x = y$$

iii) $\mathcal{R}$ est **transitive**, c-à-d

$$\forall x,\, y,\, z \in E, \quad x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z \quad \Rightarrow \quad x\mathcal{R}z$$

Une relation d'ordre $\mathcal{R}$ sur E est dite **totale** si deux éléments quelconque de E sont comparables. Une relation d'ordre non totale est dite **partielle**.

Par exemples,

1) la relation $\triangle$ sur $\mathbb{N}$ définie par $\forall x,\, y \in \mathbb{N}, \quad x\triangle y \quad \Leftrightarrow \quad x$ divise y est une relation d'ordre partielle,

2) la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{R}_+$$

est une relation d'ordre totale.

NB : la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x,\, y \in \mathbb{R}, \quad x\mathcal{R}y \quad \Leftrightarrow \quad x < y$$

n'est pas une relation d'ordre. Elle est pourtant appelée relation d'**ordre stricte** sur $\mathbb{R}$.

Définition 4.15: (**Majorants, Minorants**)

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

1) Un élément $M \in E$ est appelé un majorant de la partie A s'il vérifie la propriété suivante.

$$\forall x \in A, \, x\mathcal{R}M.$$

Dans ce cas, on dit que A est majorée par M.

2) Un élément $m \in E$ est appelé un minorant de la partie A s'il vérifie la propriété suivante.

$$\forall x \in A, \quad m\mathcal{R}x$$

Dans ce cas, on dit que A est minorée par m.

3) On dit que A est une partie majorée de E si A possède au moins un majorant dans E, autrement dit,

$$(A \quad \text{est majorée dans E}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, M \in E, \forall\, x \in A, \quad x\mathcal{R}M.$$

4) On dit que A est une partie minorée de E si A possède au moins un minorant dans E, autrement dit,

$$(A \quad \text{est minorée dans E}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, m \in E, \forall\, x \in A, \, m\mathcal{R}x.$$

Définition 4.16: Soient $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

1) On appelle **plus grand élément** de A tout élément M de E qui appartient à A et qui est un majorant de A. On le note $\max_E A$ (s'il existe !).

2) On appelle **plus petit élément** de A tout élément m de E qui appartient à A et qui est un minorant de A. On le note $\min_E A$ (s'il existe !).

Exemples

1) Considérons $\mathbb{R}$, muni de la relation usuelle $\leq$. On pose $A = [2, 9]$. Alors
14 et 18 sont des majorants de A, -3 et $1,5$ sont des minorants de,
2 est le plus petit élément de A. 9 est le plus grand élément de A.

L'ensemble $B = [3, 7[$ n'admet pas de plus grand élément dans $\mathbb{R}$.

Définition 4.17: (**Borne supérieure, Borne inférieure**)
Soient $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

1) On appelle **borne supérieure** de A dans E le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A dans E. Elle est souvent notée $\sup A$.

2) On appelle **borne inférieure** de A dans E le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble des minorants de A dans E. Elle est souvent notée $\inf A$.

Exemples

1) Considérons $\mathbb{R}$ muni de la relation usuelle $\leq$ et $A = [2, 7[, \quad B =]6, 11]$. Alors $\sup A = 7, \quad \inf A = 2, \quad \sup B = 11 \quad \inf B = 6$.

Notons que A n'a pas de plus grand élément dans $\mathbb{R}$ et B n'a pas de plus petit élément dans $\mathbb{R}$. 2) on pose $E = \mathbb{N}$, $A = \{1; 2; 3; 4\}$. On munit E de la relation suivante.

$$x/y \quad \Leftrightarrow \quad x \quad \text{divise} \quad y$$

Le sous-ensemble A n'admet pas de plus grand élément car il n'existe aucun de ses éléments qui soit divisible par les autres. On a $\sup_{x\in A} x = 12$. Mais A admet 1 comme plus petit élément et on a $\inf_{x\in A} x = 1$.

3) On pose $E = \mathbb{N}^*$. On munit E de la relation suivante.

$$x/y \quad \Leftrightarrow \quad x \quad \text{divise} \quad y$$

Toute partie finie A de $\mathbb{N}^*$ possède une borne supérieure qui est le *ppcm* des éléments de A. Toute partie finie A de $\mathbb{N}^*$ possède une borne inférieure qui est le *pgcd* des éléments de A.

4) Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E ordonné par inclusion et H une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$. Alors H admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathcal{P}(E)$ et on a

$$\sup H = \bigcup_{X\in H} X \quad \text{et} \quad \inf H = \bigcap_{X\in H} X.$$

Théorème 4.5: (**Une Caractérisation de la borne supérieure, inférieure**) Soit A une partie non vide de ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$ et m, M des éléments de $\mathbb{R}$. (Ici $\leq$ est l'ordre usuel dans $\mathbb{R}$.

a) On a $M = \sup A$ si, et seulement si, les 2 conditions suivantes sont satisfaites :

i) $\forall\, x \in A,\, x \leq M$,
ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x \in A,\, M - \varepsilon \leq x$.

b) On a $m = \inf A$ si et seulement si les 2 conditions suivantes sont satisfaites :

i) $\forall\, x \in A, \quad m \leq x,$
ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists\, x \in A,\; x < m + \varepsilon.$

Preuve (exercice !)

On retiendra les résultats suivants.

Théorème 4.6: 1) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément dans $\mathbb{N}$.
2) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément dans $\mathbb{N}$.
(relativement à la relation d'ordre usuelle $\leq$ dans $\mathbb{N}$)

Théorème 4.7: On munit $\mathbb{R}$ de la relation d'ordre usuelle "$\leq$". Alors

1) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.
2) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure $\mathbb{R}$.

5 Exercices

Connecteurs logiques, quantificateurs logiques

Exercice 0.1

En notant P et Q les affirmations suivantes :
P : Jean est fort en Maths.
Q : Jean est fort en Chimie.

Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique, à l'aide des lettres P et Q et des **connecteurs** usuels.
1) Jean est fort en Maths mais faible en Chimie.
2) Jean est fort en Math ou il est à la fois fort en chimie et faible en Maths.
3) Jean n'est fort ni en Math ni en Chimie.
4) Jean est fort en Maths s'il est fort en Chimie.

Exercice 0.2
P, Q et R étant des propositions données, construire les tables de vérité des formes propositionnelles suivantes

1) $\rceil P \Rightarrow (P \vee Q)$

2) $P \Rightarrow (Q \vee R)$

3) $\rceil(\rceil P \vee \rceil Q)$

4) $(P \wedge Q) \Rightarrow \rceil Q$

5) $P \vee \rceil(Q \wedge R)$.

Exercice 0.3
En notant P, Q et R les 3 affirmations suivantes :

P : *Pierre fait des Maths*

Q : *Pierre fait de la chimie*

R : *Pierre fait de l'Anglais*

représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres P, Q, R et des connecteurs usuels.

1) Pierre fait des Maths et de l'Anglais mais pas de Chimie.

2) Pierre fait des Maths et de la Chimie mais pas à la fois de la chimie et de l'Anglais.

3) Il est faux que Pierre fasse de l'Anglais sans faire de Maths.

4) Il est faux que Pierre ne fasse pas des Maths et fasse quand même de la Chimie.

5) Il est faux que Pierre fasse de l'Anglais sans faire de Maths.

6) Pierre ne fait ni Anglais ni Chimie mais il fait des Maths.

Exercice 1
1) étant donnés deux entiers a et b, on considère les duex propositions :
P : a et b sont tous les deux pairs
Q : a et b sont de parités différentes. Que signifient les implications suivantes et lesquelles sont vraies pour les valeurs de a et b ?

$$P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow P, \quad \overline{P} \Rightarrow \overline{Q}, \quad \overline{Q} \Rightarrow \overline{P}, \quad P \Rightarrow \overline{Q}, \quad \overline{Q} \Rightarrow P, \quad \overline{P} \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow \overline{P}$$

Exercice 2
Ecrire les implications ou équivalences correctes :

a) $[\forall x \in E,\, p(x)\,\text{et}\, q(x)]$...........$[\forall x \in E,\, p(x)]\,\text{et}\,[\forall x \in E,\, q(x)]$

b) $[\exists x \in E,\, p(x)\,\text{et}\, q(x)]$...........$[\exists x \in E,\, p(x)]\,\text{et}\,[\exists x \in E,\, q(x)]$

c) $[\forall x \in E,\, p(x)\,\text{ou}\, q(x)]$...........$[\forall x \in E,\, p(x)]\,\text{ou}\,[\forall x \in E,\, q(x)]$

d) $[\exists x \in E,\, p(x)\,\text{ou}\, q(x)]$..........$[\exists x \in E,\, p(x)]\,\text{ou}\,[\exists x \in E,\, q(x)]$.

Exercice 3

Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ecrire les négations des propositions suivantes :

1) $1 \leq x < y$

2) $x\,y = 0$

3) $x^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

4) $\forall\, x \in E, \forall\, x^{'} \in E,\, x \neq x^{'} \;\Rightarrow\; f(x) \neq f(x^{'})$

5) $\forall\, \epsilon > 0,\, \exists\, \eta >,\, \forall\, x \in]a, b[,\ |x - x_0| < \eta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

6) $\forall\, a \in \mathbb{Z},\, \forall\, b \in \mathbb{N}^*, \exists\, q \in \mathbb{Z},\ a = b\,q + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$

Exercice 4

VRAI ou **FAUX** ?

1) La négation de $(P \;\Rightarrow\; Q)$ est $(\overline{Q} \;\Rightarrow\; \overline{P})$

2) soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

$$(\forall\, x, y \in E,\ f(x) = f(y) \;\Rightarrow\; x = y) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x, y \in E,\ x = y \,\text{ou}\, f(x) = f(y)$$

3) Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ sont des applications bijectives on a

$$(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

4) Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $A \subset E$.

$$\forall\, x \in E,\ f(x) \in f(A) \;\Rightarrow\; x \in A$$

Exercice 5

P, Q, R, S étant 4 propositions, on désigne par A la proposition : $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$ et par B la proposition : $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$

1) Déterminer une autre proposition équivalente à A et une autre proposition équivenlente à B.

2) x et y étant des nombres réels, en utilisant les résultats de la question précédente, résoudre le système (S) suivant :

$$\begin{cases} (x-1)(y-2) = 0 \\ (x-2)(y-3) = 0 \end{cases}$$

3) x et y étant des nombres réels, en utilisant les résultats de la question précédente, résoudre l'équation (E) suivante :

$$|(x-3)(y-2)| + |(x-1)(y-4)| = 0$$

Exercice 6

Soit P et Q deux propositions. On note $P \uparrow Q$ la proposition $\rceil(P \wedge Q)$.

$\uparrow$ s'appelle la barre de Sheffer.

1) Exprimer $\rceil P, \quad P \wedge Q, \quad P \vee Q$ à l'aide de P, Q et du seul connecteur $\uparrow$.

2) Exprimer de même $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftrightarrow Q$.

Exercice 7
Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes et donner les valeurs de vérité.

1) Le carré de tout réel est positif.

2) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.

3) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

4) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.

5) Il existe un entier multiple de tous les autres.

6) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

7) Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 8

1) Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

a)$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

2) Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, \quad n^2 \leq 2^n$$

Exercice 9

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
1) $n^3 - n$ est divisible par 6,

2) $n^5 - n$ est divisible par 30,

3) Soit 4 divise n^2, soit 4 divise $n^2 - 1$.

Ensembles - Relations binaires - Applications

Exercice 10

Soient A, B et C des parties quelconques d'un ensemble E. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E Simplifier les ensembles suivants :

1) $X = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$,

2) $Y = (\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$,

3) $Z = \overline{\overline{A} \cap B} \cap (\overline{A \cap B})$,

4) $U = [A \cap (B \cup C)] \cap [(B \cap C) \cup \overline{C}]$,

5) $V = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap C) \cup \overline{[(\overline{A} \cup B) \cap (A \cup C)]}$.

Exercice 11

Soient A, B, C des ensembles ; Montrer que :

1) $A \cup B = A \cap C \quad \Rightarrow \quad B \subset A \subset C$,

2) $A \cap B \subset A \cap C \quad \text{et} \quad A \cup B \subset A \cup C \quad \Rightarrow \quad B \subset C$.

Exercice 12

Soient A, B, C des ensembles. Dire si les propositions suivantes sont vraies. (Justifier vos réponses !)

1) $A \subset B \cap C \quad \Rightarrow \quad A \subset B \quad \text{et} \quad A \subset C$

2) $A \subset B \cup C \quad \Rightarrow \quad A \subset B \quad \text{ou} \quad A \subset C$.

3) $A \subset B \cap C \quad \Rightarrow \quad A \subset B \quad \text{ou} \quad A \subset C$.

4) $A \subset B \cup C \quad \Rightarrow \quad A \subset B \quad \text{et} \quad A \subset C$.

5) $B \cap C \subset A \quad \Rightarrow \quad B \subset A \quad \text{et} \quad C \subset A$.

Exercice 13
On appelle *différence symétrique* de deux sous-ensembles A et B de E le sous ensemble noté $A\Delta B$ suivant :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1) Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2) Déterminer $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$, $A\Delta A$, $A \triangle A$, $A \triangle \overline{A}$ où A est une partie de E.
3) Montrer que $A = B \Leftrightarrow A \triangle B = \emptyset$.
4) Soient A, B, C des parties de E. Montrer que

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

Exercice 14

a) Indiquer si la famille d'ensemble partitionne E dans chaque cas suivant :

1) $A_n = \{n, n+2\}$ et $E = \mathbb{N}$,

2) $A_n = \{2\,n, 2\,n+1\}$ et $E = \mathbb{N}$,

3) $A_n = [2\,n, 2\,n+1[$ et $E = \mathbb{R}_+^*$,

4) $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ et $E =]0, 1[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n =]\frac{1}{n}, n+1]$. Caractériser de manière explicite les ensembles suivants :

$$C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n, \qquad D = \bigcup_{n=\in\mathbb{N}^*} B_n$$

Exercice 15

Soit P l'ensemble de tous les pays du monde et V l'ensemble de toutes les villes du monde. On note G l'ensemble de tous les gens qui ont vécu jusqu'à aujourd'hui. Soit I l'ensemble de tous les Ivoiriens.

Soit $c : P \longrightarrow V$ l'application qui associe à $p \in P$ la ville capitale de p.

Soit $m : G \longrightarrow G$ l'application qui associe à $g \in G$ la mère de g.

Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = 2\,x + 5\,y + 1$.

1) Déterminer si ces applications sont injectives, surjectives, bijectives.

2) Quelle est l'image directe $c(P)$ de P par c ?

3) Quelle est l'image directe de G par m ?

4) Quelle est l'image directe de I par m ?

5) Quelle est l'image directe de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par h ?

Exercice 16

1) On considère l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x, x\,y - y^3)$. L'application f est elle injective ? Est elle surjective ?

2) Soit h l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par

$$h(x, y) = (2\,x + y - 1, -3\,x + 2\,y + 2)$$

démontrer que h est une bijection et déterminer sa bijection réciproque h^{-1}.

Exercice 17

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Déterminer les ensembles suivants :
$f([-2, 1]$, $f([0, 3])$, $f^{-1}([-1, 1])$, $f^{-1}([\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]$.

Exercice 18

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

1) L'application f est-elle injective ? Est elle surjective ?

2) On pose $I = [\frac{1}{2}, 4]$. Déterminer $f^{-1}(I)$

3) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

4) Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1], \quad g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 19

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$.
On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

a) Vérifier si la famille de parties $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ partitionne l'ensemble $E =]0, 1[$.

b) L'application f est-elle injective ? Est elle surjective ? Justifier les réponses !

c) Déterminer $f(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) On pose $I = [\frac{1}{4}, 1]$. Déterminer $f^{-1}(I)$.

e) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Exercice 20

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E. Soit f l'application de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ définie par $f(X) = (X \cup A, X \cup B), \quad \forall\, X \in \mathcal{P}(E)$.
Montrer que

$$f \quad \text{injective} \quad \Leftrightarrow \quad A \cap B = \emptyset$$

Exercice 21

1) Déterminer toutes les applications f de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall\, m,\, n \in \mathbb{N}, \quad f(m+n) = f(m) + f(n)$$

2) Déterminer toutes les applications g de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall\, m,\, n \in \mathbb{N}, \quad g(m+n) = g(m)\, g(n)$$

3) Déterminer toutes les applications h de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ telles que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad h(n) \leq n$$

4) Soit E un ensemble **fini**.

a) Montrer que toute application injective de E dans E est une bijection.

b) Montrer que toute application surjective de E sur E est une bijection.

Exercice 22
On considère l'ensemble $E = \{*,\ \bigcirc,\ \triangle,\ \diamondsuit\}$ et les relations binaires suivantes :
$\mathcal{R} = \{(*, *), (\triangle, \triangle)\}, \quad \mathcal{S} = \{(*, *), (\triangle, \triangle), (\diamondsuit, \diamondsuit), (\diamondsuit, \bigcirc), (\triangle, \diamondsuit), (*, \diamondsuit)\}$

Etudier les relations binaires $(E, \mathcal{R})$ et $(E, \mathcal{S})$.

Exercice 23

On considère les deux relations $\mathcal{R}$, Δ suivantes :

a) $E = \mathbb{R}$,
$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R}, \quad x\,\mathcal{R}\,y \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2 x + \sin^2 y = 1.$

b) $E = \mathbb{N}$,
$\forall\, x,\, y \in \mathbb{N}, \quad x\,\Delta\,y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, p,\, q\, \in \mathbb{N}^*, \quad y = p\,x^q.$

1) Pour chacune de ces relations, étudier la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité.

2) La relation Δ est-elle une relation d'ordre totale ? Justifier la réponse.

Exercice 24 : **Relation de congruence modulo n sur $\mathbb{Z}$.**
Soit $n \in \mathbb{N}$. Sur $\mathbb{Z}$, on considère la relation $\equiv$ définie comme suit : pour tout $a,\, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \;\equiv\; b \quad mod \quad n \quad \Leftrightarrow \quad b - a \quad \text{est divisible par} \quad n \quad \text{dans} \quad \mathbb{Z}$$

(lire a **est congru** à b modulo n)

(i)- Montrer que la relation binaire $\equiv$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

(ii)- Montrer que l'ensemble quotient $\mathbb{Z}/\equiv$ a exactement n éléments si $n \neq 0$.

(iii)- Montrer que cette relation binaire $\equiv$ est compatible avec les lois usuelles $+$ et $\times$. C'est à dire que

$$a \equiv b \quad mod\, n \quad \text{et} \quad c \equiv d \quad mod\, n \quad \Rightarrow \quad a + c \equiv b + d \quad mod\, n \qquad (1)$$

$$a \equiv b \quad mod\, n \quad \text{et} \quad c \equiv d \quad mod\, n \quad \Rightarrow \quad a \times c \equiv b \times d \quad mod\, n \qquad (2)$$

(iv)- Décrire les classes d'équivalence dans les cas suivants : $n = 0,\, 1,\, 2,\, 3,\, 4,\, 5$.

Exercice 25
Sur $\mathbb{Z}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ définie comme suit : pour tout $a,\, b \in \mathbb{Z}$,

$$a\,\mathcal{R}\,b \quad \text{si} \quad b^2 - a^2 \in 6\,\mathbb{Z}$$

(i) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.
(ii) Déterminer les classes d'équivalence.

Références

[1] Dupin, *Initiation au Raisonnement mathématique*, éd. Armand Colin, 1993.

[2] J. L. Gersting, *Mathematical Structures for Computer Science* (Discrete Mathematics and Its Applications), W. H. Freeman and Company, Seventh edition, 2014.

[3] R. Hammack, *Book of Proof*, Mathematics Textbook Series. Editor : Lon Mitchell, 2009.

[4] J. Vélu, *Méthodes Mathématiques pour l'Informatique*, DUNOD, 4ème Édition, 2005.