

UNISAT 2018 - Licence 1 -
Cours - **Éléments de Logique mathématique**

Dr AKEKE

Table des matières

1	Éléments de logique	7
1.1	Propositions	7
1.2	Connecteurs	8
1.3	Quantificateurs	10
1.4	Règle générale d'application	12
1.5	Quelques formes de raisonnement	12
2	Opérations sur les ensembles	15
2.1	Opérations élémentaires	16
2.2	Extension des opérations intersection et réunion	18
2.3	Produit cartésien	19
3	Applications	21
3.1	Définitions	21
3.2	Composée d'applications	22
3.3	Injections, surjections, Bijections	23
3.4	Image directe, Image réciproque	24

3.5	Fonction indicatrice	26
4	Relations binaires	27
4.1	Relations d'équivalence	27
4.2	Décomposition canonique d'une application	29
4.3	Relations d'ordre	29

AVERTISSEMENT

Ce document contient < les grandes lignes > de mon cours

Éléments de Logique mathématique, destiné principalement aux étudiants des Licence 1 scientifiques, aux élèves des classes de Mathématiques Supérieures et Mathématiques Spéciales (Première année). Les détails et exemples d'applications seront donnés au cours magistral. L'étudiant est donc tenu d'assister au cours magistral et aux séances de TD.

Malgré des soins particuliers consacrés à sa conception, l'auteur ne doute pas de la présence d'erreurs. Le lecteur est donc prié d'être indulgent. Nous remercions le lecteur de nous signaler les erreurs potentielles et des améliorations éventuelles. L'adresse électronique de l'auteur est ericdago@yahoo.fr.

Chapitre 1

Éléments de logique

1.1 Propositions

Définition 1.1.1 Une **proposition** P est un énoncé qui est vrai dans certaines conditions, faux dans d'autres, mais dont on peut décider dans toute situation donnée, s'il est vrai ou faux.

On attribue donc, à chaque situation donnée, l'une des **valeurs de vérité** V (vrai) ou F (Faux) à la proposition P .

Par exemple :

P < Le Liberia est un pays de l'Afrique > est un énoncé vrai.

Q < Pour tout entier naturel n il existe un entier naturel m tel que $m^2 = n$ >. La proposition Q est fausse.

R < Quelle belle maison! >. L'énoncé R n'est pas une proposition.

< Il a fait beau le jour J > n'est pas une proposition car les critères de décision sont insuffisants.

Notons que certaines propositions sont considérées comme vérité absolue, qui ne se déduisent pas d'autres propositions vraies, elles traduisent, dans certains cas des propriétés évidentes. On les appelle des **axiomes**. Par exemple, l'énoncé suivant est un axiome de la Géométrie euclidienne. < Par deux points distincts du plan, il passe une droite et une seule. >

Etant donnée une proposition, on est souvent amené à déterminer si elle est vraie ou fausse. On regroupe diverses propositions de la façon suivante :

1.2 Connecteurs

Si P, Q, R, \dots sont des propositions, tout énoncé formé à partir de ces propositions et des liaisons **et**, **ou**, **non** est encore une proposition puisqu'on peut, dans chaque situation, décider de sa vérité. Cette grammaire des propositions se mathématise à l'aide de signes que l'on nomme **connecteurs**.

- a) **La négation** d'une proposition P est notée $\text{non}(P)$ (ou bien $\neg P$). La négation d'une proposition P vraie sera fausse et la négation d'une proposition P fausse sera vraie.

On a la table de vérité suivante

P	$\neg P$
V	F
F	V

- b) **La conjonction** (P et Q) est une proposition qui est vraie si et seulement si les deux propositions P et Q sont simultanément vraies. On la note aussi $P \wedge Q$.

La table de vérité correspondante est

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

- c) **La disjonction** (P ou Q) est une proposition qui est vraie si et seulement si au moins une des deux propositions P et Q est vraie. (Les deux peuvent être vraies). Le "ou" a un sens inclusif. On a la table de vérité suivantes.

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

- d) **L'équivalence** ($P \Leftrightarrow Q$) est une proposition qui est vraie si et seulement si P et Q sont simultanément vraies ou simultanément fausses, autrement dit si P et Q ont la même valeur de vérité.

On a la table de vérité suivante.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Par exemple, soit $x, y \in \mathbb{R}$,

$$x = \exp(y) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } y = \ln(x))$$

- e) **L'implication logique** ($P \Rightarrow Q$) est une proposition qui est vraie si et seulement si P est fausse ou Q est vraie.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}(P) \text{ ou } Q)$$

Cette notion est la plus difficile à maîtriser, contrairement à ce que l'on peut penser au premier abord. On a la table de vérité suivante

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- 1) La négation de (P et Q) est ($\text{non}(P)$ ou $\text{non}(Q)$).

En effet, dire que (P et Q) est fausse, c'est dire que l'une au moins des deux propositions est fausse.

- 2) La négation de (P ou Q) est ($\text{non}(P)$ et $\text{non}(Q)$).

En effet, nier que l'une au moins des deux propositions est vraie, c'est dire qu'elles sont toutes les deux fausses.

- 3) La négation de ($P \Rightarrow Q$) est (P et $\text{non}(Q)$).

En effet, nous avons vu que $P \Rightarrow Q$ est synonyme de ($\text{non}(P)$ ou Q). La négation est donc bien (P et $\text{non}(Q)$). Dire que l'implication est fausse, c'est donc dire que l'on a l'hypothèse P mais pas la conclusion Q .

- 4) La négation de ($P \Leftrightarrow Q$) est ($(P$ et $\text{non}(Q))$ ou $(Q$ et $\text{non}(P))$).

Propriétés 1 *Les propriétés suivantes dérivent de ce qui précède.*

$$1) P \vee P \equiv P$$

$$2) P \vee Q \equiv Q \vee P$$

$$3) (P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$$

$$4) P \wedge P \equiv P$$

$$5) P \wedge Q \equiv Q \wedge P$$

$$6) (P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$$

$$7) P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

$$8) P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

$$9) P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

$$10) \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

$$11) \neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$12) P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$$

$$13) (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

$$14) (P \Leftrightarrow Q \text{ et } Q \Leftrightarrow R) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$$

Le lecteur est prié de s'en convaincre via les tables de vérités.

Remarque 1.2.1 *Il n'est pas difficile de prouver que*

$$(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$$

1.3 Quantificateurs

Considérons à présent une proposition P qui dépend de la variable x appartenant à un domaine E . On notera $P(x)$ pour dire que P dépend de x . Pour exprimer que la proposition P est vraie pour au moins un élément x du domaine E , on écrit

$$\exists x \in E, P(x).$$

Le symbole \exists est appelé **quantificateur existentiel**.

Pour exprimer que la proposition P est vraie pour tout les éléments x du domaine E , on écrit

$$\forall x \in E, P(x).$$

Le symbole \forall est appelé **quantificateur universel**.

1) La négation de $\forall x, P(x)$ est $\exists x, \text{non}(P(x))$.

En effet, dire qu'il est faux que $P(x)$ soit vraie pour tout x , c'est dire que $P(x)$ est fausse pour au moins un x .

2) La négation de $\exists x, P(x)$ est $\forall x, \text{non}(P(x))$.

Dire qu'il n'existe aucun x vérifiant $P(x)$ c'est dire que tous les x vérifient la négation de P .

Remarque 1.3.1 (*très important!*) Une proposition peut éventuellement contenir une succession de quantificateurs. Il faut faire attention à l'ordre des quantificateurs dans une telle proposition. Notons que deux quantificateurs de même nature qui se suivent peuvent être échangés. Cela ne doit pas se faire pour deux quantificateurs de nature différente qui se suivent dans une proposition.

Par exemples

$$1) \forall x \in \mathbb{R}_-, \forall y \in \mathbb{R}_+, x \leq y \Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_-, x \leq y.$$

$$2) \forall m \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, m \leq n \not\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n.$$

On notera les implications suivantes (il n'y a pas d'équivalence!).

$$i) (\exists x \in E, P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in E, P(x)) \wedge (\exists x \in E, Q(x)).$$

$$ii) (\forall x \in E, P(x)) \vee (\forall x \in E, Q(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, P(x) \vee Q(x)).$$

Par exemple, il existe des nombres entiers pairs et il existe des nombres entiers impairs, mais, il n'existe aucun entier qui soit à la fois pair et impair. De même, tout entier est pair ou impair, mais il est faux que tout entier soit pair ou que tout entier soit impair.

1.4 Règle générale d'application

Pour montrer :

- i) une conjonction P et Q : montrer P et montrer Q ,
- ii) une disjonction P ou Q : montrer P ou montrer Q ,
- iii) une implication $P \Rightarrow Q$: ajouter P comme hypothèse à sa liste de connaissances et montrer Q .
- iv) une négation $\text{non}(P)$: ajouter P comme hypothèse à sa liste de connaissances et montrer qu'on aboutit à une contradiction. La proposition P est alors nécessairement fausse, autrement dit $\text{non}(P)$ est synonyme de $P \Rightarrow \text{contradiction}$.
- v) $\exists x \in E, P(x)$: exhiber un élément t de E bien choisi et montrer qu'on a $P(t)$,
- vi) $\forall x \in E, P(x)$: montrer $P(x)$ pour tout $x \in E$.

1.5 Quelques formes de raisonnement

Un raisonnement consiste à arriver à une conclusion en partant d'une ou plusieurs hypothèses, et en utilisant les règles de déduction d'une proposition à partir d'une autre.

Raisonnement par implication

Principe : si P est vraie et si $P \Rightarrow Q$ est vraie alors Q est vraie. Ainsi, pour démontrer une propriété C (conséquence) partant d'une proposition vraie H (hypothèse), on démontrera

$$H \Rightarrow P_0 \Rightarrow P_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow P_{n-1} \Rightarrow P_n \quad \text{et} \quad P_n \Rightarrow C$$

Raisonnement par équivalence

Il consiste à établir l'équivalence $P \Leftrightarrow Q$ à l'aide d'une chaîne d'équivalences car l'équivalence est transitive.

Exemple

Résoudre dans \mathbb{R} , en raisonnant par équivalences l'équation suivante.

$$\sqrt{x^2 + 2} = 3x$$

d'inconnue x .

Le raisonnement par l'absurde

En logique classique, on ajoute la règle suivante dite de raisonnement par l'absurde. Pour montrer la proposition P , ajouter $\text{non}(P)$ à la liste de ses connaissances et montrer une contradiction, autrement dit, si $\text{non}(P) \Rightarrow \text{contradiction}$, on a prouvé P .

Noter que l'on a

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P))$$

(qui permet de faire un raisonnement par contraposée).

Exemples

1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n^2 \text{ impair} \Rightarrow n \text{ impair}$$

2) Montrer que

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

3) Montrer que la proposition suivante est vraie :

$$\exists x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, x^{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}.$$

Raisonnement par récurrence**- Récurrence simple**

Ce raisonnement consiste à montrer qu'une proposition $P(n)$ dépendante de l'entier $n \in \mathbb{N}$ est vraie de la manière suivante : - on montre que $P(n_0)$ est vraie,

- on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$P(n) \text{ vraie} \Rightarrow P(n+1) \text{ vraie}$$

On déduit que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\geq n_0$.

Exemples

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'on a

$$\sum_{k=0}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Montrer que, si $a \in \mathbb{N}$ alors l'entier $(a+1)^{n+1} - a(n+1) - 1$ est multiple de a^2 .

- Récurrence généralisée

Ce raisonnement consiste à montrer qu'une proposition $P(n)$ dépendante de l'entier $n \in \mathbb{N}$ est vraie de la manière suivante :

- i) on montre que $P(n_0)$ est vraie,
- ii) on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$,

$$(\forall m \leq n, m \geq n_0, P(m) \text{ vraie} \Rightarrow P(n+1) \text{ vraie.})$$

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice

Démontrer que tout nombre entier $n > 0$ est le produit d'un nombre fini de nombres entiers premiers.

Raisonnement par contre-exemple

Rappelons que les propositions $\neg(\forall x \in E, P(x))$ et $\exists x \in E, \neg P(x)$ sont équivalentes.

Principe du contre-exemple : pour montrer que la proposition $\forall x \in E, P(x)$ est fautive, on exhibe $x_0 \in E$ tel que $\neg P(x_0)$ soit vraie.

Exemple

Montrer qu'un nombre entier divisible par 6 et 4 n'est pas nécessairement divisible par 24.

NB : il y a d'autres formes de raisonnement par exemples le **raisonnement par disjonction des cas**, le **raisonnement par exclusion** ...etc...

Chapitre 2

Opérations sur les ensembles

Définition 2.0.1 On appelle ensemble une collection d'objets bien déterminés dans laquelle les objets sont uniques (ne se repètent pas). Ces objets sont souvent appelés les **éléments** de cet ensemble.

Pour exprimer que x est un élément de l'ensemble E , on écrit $x \in E$.

Soient E et F deux ensembles. On dit que E est **inclus** dans F , et on note $E \subset F$, si tous les éléments de E appartiennent à F .

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E, x \in F.$$

Par exemple

A = ensemble des pays d'Afrique.

B = ensemble des pays du monde. On a $A \subset B$.

L'ensemble des entiers naturels, noté \mathbb{N} . L'ensemble des entiers relatifs noté \mathbb{Z} . On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

Remarque 2.0.1 1) Si $E \subset F$ et $F \subset G$ alors $E \subset G$.

$$2) A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A.$$

Notation 2.0.1 1) Un ensemble A qui ne contient aucun élément est dit **vide**, on note $A = \emptyset$.

2) Un ensemble E qui n'a qu'un seul élément x est appelé un **singleton** et est noté $E = \{x\}$.

3) Un ensemble constitué de deux éléments a et b est noté $\{a, b\}$ et est appelé **une paire**.

4) Un ensemble E est dit **fini** si il contient un nombre fini d'éléments, ce nombre est appelé le **cardinal** de E et noté $\text{Card } E$.

5) Soient E et F deux ensembles. Si $E \subset F$ on dit que E est une **partie** de F (ou un **sous-ensemble**) de F . On note $\mathcal{P}(F)$ l'ensemble des parties de F .

Dire que E n'est pas contenu dans F revient à dire qu'il existe au moins un élément $x \in E$ tel que $x \notin F$.

NB : on convient que l'ensemble vide est contenu dans tous les ensembles.

Question : Peut-on parler de l'ensemble Ω dont les éléments sont tous les ensembles ?

Exercice

Soit $E = \{a, b, c, d\}$ un ensemble contenant 4 éléments. Déterminer $\mathcal{P}(E)$.

Proposition 2.0.1 Si E est un ensemble fini alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est un ensemble fini et on a

$$\text{card } \mathcal{P}(E) = 2^{\text{card } E}$$

2.1 Opérations élémentaires

Soit E un ensemble.

Intersection

Soient A, B deux parties de E . L'**intersection** de A et B est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B . On le note $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$$

On définit de façon générale $A \cap B \cap C \dots$ etc...

Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que A et B sont **disjoints**.

Propriétés 2 Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$ on a

1) $A \cap A = A,$

2) $A \cap B = B \cap A,$

3) $A \cap \emptyset = \emptyset,$

4) $A \cap E = A.$

Réunion

Soient A, B deux parties de E . La réunion de A et B est par définition le sous-ensemble de E contenant exactement A ou B . On le note $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

On définit de façon générale $A \cup B \cup C \dots$ etc...

Propriétés 3 Pour $A, B \in \mathcal{P}(E)$ on a

1) $A \cup A = A,$

2) $A \cup B = B \cup A,$

3) $A \cup \emptyset = A,$

4) $A \cup E = E,$

5) $A \subset A \cup B,$

6) $A \cap B \subset A \cup B,$

7) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$

8) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$

Complémentaire

Soit A une partie de E . On appelle complémentaire de A dans E , noté C_E^A l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A . On le note aussi $E \setminus A$ ou \bar{A} .

Propriétés 4 Pour $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$ on a :

1) $A \cap \bar{A} = \emptyset,$

2) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B},$

3) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B},$

$$4) A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A},$$

$$5) \overline{\overline{A}} = A.$$

$$6) A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

2.2 Extension des opérations intersection et réunion

Définition 2.2.1 Soit F un ensemble, I un ensemble appelé ensemble d'indices. On appelle famille d'éléments de F , indexée par I , toute correspondance de E vers I qui associe, à tout élément $i \in I$, un unique élément $x_i \in F$. Une telle famille est souvent notée $(x_i)_{i \in I}$.

Exemples

$$1) I = \mathbb{N}, F = \mathbb{Z}, \\ \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, n \longmapsto 2^n$$

$$2) I = \mathbb{N}, F = \mathcal{P}(\mathbb{R}), \\ \mathbb{N} \longrightarrow F = \mathcal{P}(\mathbb{R}), n \longmapsto x_n =]n; n + 2[$$

Soit E un ensemble non vide et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E .

Définition 2.2.2 On appelle réunion de la famille $(A_i)_{i \in I}$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à l'un au moins des A_i . Il est noté $\bigcup_{i \in I} A_i$. On a

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E / \exists i \in I, x \in A_i\}$$

Définition 2.2.3 On appelle intersection de la famille $(A_i)_{i \in I}$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à tous les A_i . Il est noté $\bigcap_{i \in I} A_i$. On a

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E / \forall i \in I, x \in A_i\}$$

Définition 2.2.4 On dit que la famille $(A_i)_{i \in I}$ **partitionne** E ou définit **une partition** de E si, et seulement si, les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

- 1) $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset,$
- 2) $E = \bigcup_{i \in I} A_i,$
- 3) $\forall i, j \in I, i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset.$

Exemple de partition

$$E = \mathbb{R}_+.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $A_n = [n, n + 1[$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \neq \emptyset,$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, n \neq m, A_m \cap A_n = \emptyset.$$

On a

$$\mathbb{R}_+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Donc la famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ partitionne \mathbb{R}_+ .

2.3 Produit cartésien

Soient A et B deux ensembles.

Définition 2.3.1 *Le produit cartésien* de A et B noté $A \times B$ est par définition l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$.

$$A \times B = \{ (a, b) / a \in A \text{ et } b \in B \}$$

- 1) Si $A \neq B$ on a $A \times B \neq B \times A$.
- 2) Si $a \neq b$, on a $(a, b) \neq (b, a)$.
- 3) $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.
- 4) Si A et B sont des ensembles finis alors $A \times B$ est un ensemble fini et on a

$$\text{card}(A \times B) = \text{card } A \times \text{card } B$$

- 5) On considère n ensembles ($n \in \mathbb{N}^*$), A_1, \dots, A_n . Le produit cartésien de ces n ensembles est noté

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

Si chaque sous-ensemble A_i , $i = 1, \dots, n$ est fini alors $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ est fini et on a

$$\text{card}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \text{card } A_1 \times \text{card } A_2 \times \dots \times \text{card } A_n$$

Propriétés 5 Soient A, B, E, F des ensembles quelconques. On a les propriétés suivantes.

- 1) $A \times B \subset E \times F \Leftrightarrow A \subset E \text{ et } B \subset F$,
- 2) $(A \cap B) \times E = (A \times E) \cap (B \times E)$,
- 3) $(A \cup B) \times E = (A \times E) \cup (B \times E)$,
- 4) $(A \cup B) \times (E \cap F) = [A \times (E \cap F)] \cup [B \times (E \cap F)]$,
- 5) $(A \cup B) \times (E \cap F) = [(A \times E) \cap (A \times F)] \cup [(B \times E) \cap (B \times F)]$.

Exercices

Déterminer graphiquement les produits cartésiens suivants.

- a) $[1, 3] \times [-2, 0]$
- b) $[2, 3] \times [1, 1]$
- c) $\{2\} \times [-2, 0]$
- d) $\mathbb{R} \times [-2, 0]$.

Définition 2.3.2 Soient E et F deux ensembles. On appelle **relation binaire** de E vers F , tout triplet $\mathcal{R} = (E, F, \Gamma)$ où Γ est une partie du produit cartésien $E \times F$ que l'on appelle **graphe** de la relation \mathcal{R} .

Si $(x, y) \in \Gamma$, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$.

Si $E = F$, on dit que \mathcal{R} est une relation binaire sur E , nous noterons en abrégé (E, \mathcal{R}) .

Exemples

- 1) Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $F = \{a, b, c, d\}$ et $\Gamma = \{(2, a), (1, b), (2, c)\}$. Alors $\Gamma \subset E \times F$ et (E, F, Γ) est une relation binaire de E vers F .
- 2) Soit E un ensemble.
 - a) la relation binaire définie sur E par $\Gamma = \emptyset$ s'appelle la **relation vide** et la relation définie par $\Gamma = E \times E$ la **relation grossière**.
 - b) La relation définie par $\Gamma = \{(x, x) / x \in E\}$ est l'égalité dans E , son graphe s'appelle la **diagonale** de $E \times E$.

Chapitre 3

Applications

3.1 Définitions

Définition 3.1.1 Soit $f = (E, F, \Gamma)$ une relation binaire de E vers F .

1) On dit que f est une relation **fonctionnelle** (ou, est une **fonction**) de E vers F si tout élément de E est en relation avec au plus un élément y de F . Cet élément, lorsqu'il existe, est noté $f(x)$.

L'ensemble E est appelé **ensemble de départ** de f et l'ensemble F est appelé **ensemble d'arrivé** de f .

L'ensemble des x de E pour lesquels $f(x)$ existe, s'appelle **ensemble de définition** de la fonction f et se note $Def(f)$ ou D_f .

On note souvent $f : E \rightarrow F$ pour la fonction $f = (E, F, \Gamma)$.

On notera $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des fonctions de E vers F .

Exemple On considère la correspondance $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sqrt{3x - 2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Alors f est une fonction. On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq \frac{2}{3}\}$.

Définition 3.1.2 Une fonction de E vers F est une **application** si chaque élément de E admet une image (unique) dans F .

L'ensemble des applications de E vers F se notera $\mathcal{A}(E, F)$.

L'**application identité** de E est par définition l'application de E vers E qui à tout élément $x \in E$ associe x lui-même, elle est notée Id_E .

Exemples 1) La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \sqrt{3x-2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ n'est pas une application.

2) La fonction $g : [\frac{2}{3}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x) = \sqrt{3x-2}$ est une application.

Définition 3.1.3 Soient $f : E \rightarrow F$ une application et $A \subset E$. On appelle **restriction** de f à A , l'application notée $f|_A$, définie de A vers F , qui coïncide avec f dans A . C'est à dire, $\forall x \in A$, $f|_A(x) = f(x)$. On dit alors que f est un prolongement de $f|_A$.

Par exemple, l'application $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(n) = n^2 - 3$ est la restriction à \mathbb{N} de l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3$.

Théorème 3.1.1 Si E et F sont des ensembles finis alors le nombre d'applications de E vers F égale

$$(\text{Card } F)^{\text{Card } E}$$

3.2 Composée d'applications

Définition 3.2.1 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. On appelle **composé** de g et f et on note $g \circ f$, l'application de E vers G définie par :

$$\forall x \in E, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Notons que l'écriture $g \circ f$ signifie que l'on effectue d'abord l'opération $x \mapsto f(x)$ puis l'opération $f(x) \mapsto g(f(x))$.

Si $f : E \rightarrow F$, alors $f \circ Id_E = f$ et $Id_F \circ f = f$ mais il ne s'agit pas dans les deux cas de la même application identité.

Exemples

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(x) = x^2 - 1$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $(g \circ f)(x) = x^2$.

Propriétés 6 Soient $f : E \rightarrow F$, $g : F \rightarrow G$, $h : G \rightarrow H$ des applications. Alors : $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, et l'on note simplement $h \circ g \circ f$ cette application de E vers H .

Il s'agit d'une propriété très importante et triviale, nous supposons donc qu'elle fait partie du patrimoine culturel du lecteur.

3.3 Injections, surjections, Bijections

Définition 3.3.1 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est :

i) **Injective** (ou est une **injection**) si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

$$1) \forall x, x' \in E, \quad f(x) = f(x') \quad \Rightarrow \quad x = x'.$$

$$2) \forall x, x' \in E, \quad x \neq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(x')$$

ii) **Surjective** (ou est une **surjection**) si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall y \in F, \quad \exists x \in E, \quad \text{tel que } y = f(x)$$

iii) **Bijective** (ou est une **bijection**) si est à la fois injective et surjective, c'est à dire si elle vérifie :

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, \quad y = f(x).$$

Exercice

1) L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2 + 3$ n'est pas injective. En effet, on a $f(3) = f(-3)$. Elle n'est pas surjective car -10 n'a pas d'antécédent par f .

2) L'application $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto x^2$ n'est pas injective mais, elle est surjective.

3) Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3x-1}{x-1}$. L'application f est-elle injective? bijective?

4) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$. Montrer que f est bijective.

5) Soit $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = (x + y, xy)$. L'application g est-elle injective? bijective?

Définition 3.3.2 Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est **inversible** s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$

Théorème 3.3.1 L'application $f : E \longrightarrow F$ est inversible si et seulement si f est bijective,

l'application g de la définition 3.3.2 est alors unique, on l'appelle l'application **réci-proque** de f . On la note f^{-1} , c'est une bijection de F vers E . Elle est définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Propriétés 7 Soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. Si f et g sont inversibles alors $g \circ f$ est inversible et on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Il suffit, en effet, de calculer $f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1}$.

3.4 Image directe, Image réciproque

Définition 3.4.1 Soient $f : E \rightarrow F$ une application et $A \subset E$, $B \subset F$.

i) On appelle **image directe** de A par f , et on note $f(A)$, la partie de F définie par :

$$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, y = f(x)\}.$$

Ainsi, $\forall y \in F$, on a :

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A, y = f(x).$$

ii) On appelle **image réciproque** de B par f , et l'on note $f^{-1}(B)$, la partie de E définie par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}.$$

Ainsi, $\forall x \in E$ on a :

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.$$

On convient que $f(\emptyset) = \emptyset$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

NB : remarquons que ces notations sont abusives, en particulier $f^{-1}(B)$ ne préjuge pas de l'existence de l'application réciproque de f . Évidemment, **si f est inversible** on a $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$, ce qui en quelque sorte justifie la notation. Mais en général $f^{-1}(\{y\})$ peut être vide ou contenir plus d'un élément.

Exemples

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

On pose

$$A = \{-3, 2, 3, 7\}, B = \{-2, -3, 2, 4, 9\}, C = [-2, 6], D = [-5, -1[.$$

On a $f(B) = \{5, 10, 17, 82\}$, $f(C) = [1, 37]$ et $f^{-1}(D) = \emptyset$.

Exercice

Déterminer $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(C)$.

Propriétés 8 Soit $f : E \rightarrow F$ une application. Soient A, A' deux parties quelconque de E et B, B' deux parties quelconque de F . On a les propriétés suivantes.

- 1) $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$,
- 2) $B \subset B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
- 3) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$,
- 4) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$,
- 5) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$,
- 6) Si f est injective alors $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$,
- 7) $f(f^{-1}(B)) \subset B$,
- 8) Si f est surjective alors $f(f^{-1}(B)) = B$,
- 9) $A \subset f^{-1}(f(A))$,
- 10) Si f est injective alors $A = f^{-1}(f(A))$,
- 11) $f^{-1}(\overline{B}) = \overline{f^{-1}(B)}$

Preuve (laissée à la sagacité du lecteur)

Exercices

Montrer que

- i) f injective $\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{P}(E), A = f^{-1}(f(A))$.
- ii) f surjective $\forall B \in \mathcal{P}(F), f(f^{-1}(B)) = B$.
- iii) f injective $\Leftrightarrow \forall A, A' \in \mathcal{P}(E), f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$.

3.5 Fonction indicatrice

Définition 3.5.1 Soient E un ensemble et A une partie de E . On appelle **fonction indicatrice** de A la fonction à valeurs dans \mathbb{R} , notée 1_A ou χ_A , définie sur E par

$$\forall x \in E, 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Propriétés 9 Soient E un ensemble et A, B des parties de E . Alors

i) $1_{\bar{A}} = 1 - 1_A$,

ii) $1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$,

iii) $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$,

iv) $A \subset B \Leftrightarrow 1_A \leq 1_B$,

v) $1_{A \Delta B} = 1_A + 1_B - 2 \cdot 1_A \cdot 1_B$.

Exercice

Démontrer les propriétés ci-dessus.

Chapitre 4

Relations binaires

4.1 Relations d'équivalence

Définition 4.1.1 Soit \mathcal{R} une relation binaire sur l'ensemble E . On dit que \mathcal{R} est une **relation d'équivalence** sur E si les 3 conditions suivantes sont satisfaites.

i) \mathcal{R} est **reflexive**, c'est à dire

$$\forall x \in E, \quad x\mathcal{R}x$$

ii) \mathcal{R} est **symétrique**, c'est à dire

$$\forall x, y \in E, \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$$

iii) \mathcal{R} est **transitive**, c-à-d

$$\forall x, y, z \in E, \quad x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$$

Exemples

1) la relation \mathcal{R} sur \mathbb{Z} définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 3 \text{ divise } x - y$$

est une relation d'équivalence.

2) La relation \mathcal{R} sur \mathbb{Z} définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y + 2 \text{ est pair}$$

est une relation d'équivalence

Définition 4.1.2 Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E , on appelle **classe d'équivalence** d'un élément x de E , l'ensemble

$$\bar{x} = \{y \in E / x\mathcal{R}y\}$$

L'ensemble des classes d'équivalence s'appelle **ensemble quotient** de E par \mathcal{R} et se note généralement E/\mathcal{R} . Tout élément d'une classe d'équivalence s'appelle représentant de cette classe.

L'application $s : E \longrightarrow E/\mathcal{R}$ définie par $x \longmapsto \bar{x}$ s'appelle **surjection canonique**.

Exercices

1) Vérifier que la relation \mathcal{R} sur \mathbb{Z} définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \iff x - y \text{ est divisible par } 2$$

est une relation d'équivalence et déterminer les classes d'équivalence de cette relation.

2) Vérifier que la relation Δ sur \mathbb{Z} définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\Delta y \iff x + y + 4 \text{ est pair}$$

est une relation d'équivalence.

3) Montrer que $\forall x, y \in \mathbb{Z}, \quad x\mathcal{R}y \iff x\Delta y$.

4) Déterminer les classes de $a = 2$, $b = 4$ et $c = 5$.

Propriétés 10 Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E . On a les propriétés suivantes.

1) $\forall x \in E, \bar{x} \neq \emptyset$,

2) $\forall y \in \bar{x}, \bar{x} = \bar{y}$,

3) $\forall x \in E, \forall y \in E, \bar{x} = \bar{y} \text{ ou } \bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$,

4) $\bigcup_{x \in E} \bar{x} = E$.

Preuve (laissée au lecteur)

Théorème 4.1.1 Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un ensemble E . L'ensemble des classes d'équivalence modulo \mathcal{R} est une partition de E . Réciproquement, toute partition de E définit une relation d'équivalence sur E dont les classes sont ces ensembles qui partitionnent E .

Preuve Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E qui partitionne E . La relation \mathcal{R} définie sur E par

$$\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i \text{ et } y \in A_i$$

est une relation d'équivalence sur E .

4.2 Décomposition canonique d'une application

(cf. cours magistral)

4.3 Relations d'ordre

Définition 4.3.1 Soit \mathcal{R} une relation binaire sur l'ensemble E .

On dit que \mathcal{R} est une **relation d'ordre** sur E si les 3 conditions suivantes sont satisfaites.

i) \mathcal{R} est **reflexive**, c'est à dire

$$\forall x \in E, x \mathcal{R} x$$

ii) \mathcal{R} est **antisymétrique**, c'est à dire

$$\forall x, y \in E, x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$$

iii) \mathcal{R} est **transitive**, c-à-d

$$\forall x, y, z \in E, x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$$

Une relation d'ordre \mathcal{R} sur E est dite **totale** si deux éléments quelconque de E sont comparables. Une relation d'ordre non totale est dite **partielle**.

Par exemples,

1) la relation Δ sur \mathbb{N} définie par $\forall x, y \in \mathbb{N}, x \Delta y \Leftrightarrow x \text{ divise } y$ est une relation d'ordre partielle,

2) la relation \mathcal{R} sur \mathbb{R} définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{R}_+$$

est une relation d'ordre totale.

NB : la relation \mathcal{R} sur \mathbb{R} définie par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x < y$$

n'est pas une relation d'ordre. Elle est pourtant appelée relation d'**ordre stricte** sur \mathbb{R} .

Définition 4.3.2 (*Majorants, Minorants*)

Soit (E, \mathcal{R}) un ensemble ordonné et A une partie de E .

1) Un élément $M \in E$ est appelé un majorant de la partie A s'il vérifie la propriété suivante.

$$\forall x \in A, x\mathcal{R}M.$$

Dans ce cas, on dit que A est majorée par M .

2) Un élément $m \in E$ est appelé un minorant de la partie A s'il vérifie la propriété suivante.

$$\forall x \in A, m\mathcal{R}x$$

Dans ce cas, on dit que A est minorée par m .

3) On dit que A est une partie majorée de E si A possède au moins un majorant dans E , autrement dit,

$$(A \text{ est majorée dans } E) \Leftrightarrow \exists M \in E, \forall x \in A, x\mathcal{R}M.$$

4) On dit que A est une partie minorée de E si A possède au moins un minorant dans E , autrement dit,

$$(A \text{ est minorée dans } E) \Leftrightarrow \exists m \in E, \forall x \in A, m\mathcal{R}x.$$

Définition 4.3.3 Soient (E, \mathcal{R}) un ensemble ordonné et A une partie de E .

1) On appelle **plus grand élément** de A tout élément M de E qui appartient à A et qui est un majorant de A . On le note $\max_E A$ (s'il existe!).

2) On appelle **plus petit élément** de A tout élément m de E qui appartient à A et qui est un minorant de A . On le note $\min_E A$ (s'il existe!).

Exemples

1) Considérons \mathbb{R} , muni de la relation usuelle \leq . On pose $A = [2, 9]$. Alors 14 et 18 sont des majorants de A , -3 et $1, 5$ sont des minorants de, 2 est le plus petit élément de A . 9 est le plus grand élément de A .

L'ensemble $B = [3, 7[$ n'admet pas de plus grand élément dans \mathbb{R} .

Définition 4.3.4 (*Borne supérieure, Borne inférieure*)

Soient (E, \mathcal{R}) un ensemble ordonné et A une partie de E .

1) On appelle **borne supérieure** de A dans E le plus petit élément (s'il existe) de l'ensemble des majorants de A dans E . Elle est souvent notée $\sup A$.

2) On appelle **borne inférieure** de A dans E le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble des minorants de A dans E . Elle est souvent notée $\inf A$.

Exemples

1) Considérons \mathbb{R} muni de la relation usuelle \leq et $A = [2, 7[$, $B =]6, 11]$. Alors $\sup A = 7$, $\inf A = 2$, $\sup B = 11$, $\inf B = 6$.

Notons que A n'a pas de plus grand élément dans \mathbb{R} et B n'a pas de plus petit élément dans \mathbb{R} . 2) on pose $E = \mathbb{N}$, $A = \{1; 2; 3; 4\}$. On munit E de la relation suivante.

$$x/y \Leftrightarrow x \text{ divise } y$$

Le sous-ensemble A n'admet pas de plus grand élément car il n'existe aucun de ses éléments qui soit divisible par les autres. On a $\sup_{x \in A} x = 4$. Mais A admet 1 comme plus petit élément et on a $\inf_{x \in A} x = 1$.

3) On pose $E = \mathbb{N}^*$. On munit E de la relation suivante.

$$x/y \Leftrightarrow x \text{ divise } y$$

Toute partie finie A de \mathbb{N}^* possède une borne supérieure qui est le *ppcm* des éléments de A . Toute partie finie A de \mathbb{N}^* possède une borne inférieure qui est le *pgcd* des éléments de A .

4) Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E ordonné par inclusion et H une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$. Alors H admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathcal{P}(E)$ et on a

$$\sup H = \bigcup_{X \in H} X \quad \text{et} \quad \inf H = \bigcap_{X \in H} X.$$

Théorème 4.3.1 (Caractérisation de la borne supérieure et inférieure) Soit A une partie non vide d'un ensemble ordonné (E, \mathcal{R}) et m, M des éléments de E .

a) On a $M = \sup A$ si, et seulement si, les 2 conditions suivantes sont satisfaites :

i) $\forall x \in A, x \mathcal{R} M$,

ii) $\forall y \in E, y \mathcal{R} M \text{ et } y \neq M \Leftrightarrow \exists x \in A, y \mathcal{R} x \text{ et } x \neq y$.

b) On a $m = \inf A$ si et seulement si les 2 conditions suivantes sont satisfaites :

i) $\forall x \in A, \quad m \mathcal{R} x,$

ii) $\forall y \in E, \quad m \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad y \neq m \quad \Rightarrow \quad \exists x \in A, \quad x \mathcal{R} y \quad \text{et} \quad x \neq y.$

On retiendra les résultats importants suivants.

Théorème 4.3.2 1) Toute partie non vide de \mathbb{N} admet un plus petit élément dans \mathbb{N} .

2) Toute partie non vide et majorée de \mathbb{N} admet un plus grand élément dans \mathbb{N} . (relativement à la relation d'ordre usuelle)

Exercices

Exercice 0.1

En notant P et Q les affirmations suivantes :

P : Jean est fort en Maths.

Q : Jean est fort en Chimie.

Représenter les affirmations suivantes sous forme symbolique, à l'aide des lettres P et Q et des **connecteurs** usuels.

- 1) Jean est fort en Maths mais faible en Chimie.
- 2) Jean est fort en Math ou il est à la fois fort en chimie et faible en Maths.
- 3) Jean n'est fort ni en Math ni en Chimie.
- 4) Jean est fort en Maths s'il est fort en Chimie.

Exercice 0.2

P , Q et R étant des propositions données, construire les tables de vérité des formes propositionnelles suivantes

1) $(\neg P) \Rightarrow (P \vee Q)$

2) $P \Rightarrow (Q \vee R)$

3) $\neg((\neg P) \vee (\neg Q))$

4) $(P \wedge Q) \Rightarrow (\neg Q)$

5) $P \vee (\neg(Q \wedge R))$.

Exercice 0.3

En notant P , Q et R les 3 affirmations suivantes :

P : *Pierre fait des Maths*

Q : *Pierre fait de la chimie*

R : *Pierre fait de l'Anglais*

représenter les affirmations qui suivent sous forme symbolique, à l'aide des lettres P , Q , R et des connecteurs usuels.

- 1) Pierre fait des Maths et de l'Anglais mais pas de Chimie.

- 2) Pierre fait des Maths et de la Chimie mais pas à la fois de la chimie et de l'Anglais.
- 3) Il est faux que Pierre fasse de l'Anglais sans faire de Maths.
- 4) Il est faux que Pierre ne fasse pas des Maths et fasse quand même de la Chimie.
- 5) Il est faux que Pierre fasse de l'Anglais sans faire de Maths.
- 6) Pierre ne fait ni Anglais ni Chimie mais il fait des Maths.

Exercice 1

1) étant donnés deux entiers a et b , on considère les deux propositions :

Q : a et b sont tous les deux pairs

Q : a et b sont de parités différentes. Que signifient les implications suivantes et lesquelles sont vraies pour les valeurs de a et b ?

$$P \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow P, \quad \bar{P} \Rightarrow \bar{Q}, \quad \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}, \quad P \Rightarrow \bar{Q}, \quad \bar{Q} \Rightarrow P, \quad \bar{P} \Rightarrow Q, \quad Q \Rightarrow \bar{P}$$

Exercice 2

Ecrire les implications ou équivalences correctes :

- a) $[\forall x \in E, p(x) \text{ et } q(x)] \dots \dots \dots [\forall x \in E, p(x)] \text{ et } [\forall x \in E, q(x)]$
- b) $[\exists x \in E, p(x) \text{ et } q(x)] \dots \dots \dots [\exists x \in E, p(x)] \text{ et } [\exists x \in E, q(x)]$
- c) $[\forall x \in E, p(x) \text{ ou } q(x)] \dots \dots \dots [\forall x \in E, p(x)] \text{ ou } [\forall x \in E, q(x)]$
- d) $[\exists x \in E, p(x) \text{ ou } q(x)] \dots \dots \dots [\exists x \in E, p(x)] \text{ ou } [\exists x \in E, q(x)]$.

Exercice 3

Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ecrire les négations des propositions suivantes :

- 1) $1 \leq x < y$
- 2) $xy = 0$
- 3) $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$
- 4) $\forall x \in E, \forall x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
- 5) $\forall \epsilon > 0, \exists \eta >, \forall x \in]a, b[, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

$$6) \forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{N}^*, \exists q \in \mathbb{Z}, a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$$

Exercice 4**VRAI ou FAUX?**

1) La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

2) soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

$$(\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y) \Leftrightarrow (\forall x, y \in E, x = y \text{ ou } f(x) = f(y))$$

3) Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ sont des applications bijectives on a

$$(f \circ g)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

4) Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $A \subset E$.

$$\forall x \in E, f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$$

Exercice 5

P, Q, R, S étant 4 propositions, on désigne par A la proposition : $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$ et par B la proposition : $(P \wedge Q) \vee (R \wedge S)$

1) Déterminer une autre proposition équivalente à A et une autre proposition équivalente à B .

2) x et y étant des nombres réels, en utilisant les résultats de la question précédente, résoudre le système (S) suivant :

$$\begin{cases} (x - 1)(y - 2) = 0 \\ (x - 2)(y - 3) = 0 \end{cases}$$

3) x et y étant des nombres réels, en utilisant les résultats de la question précédente, résoudre l'équation (E) suivante :

$$|(x - 3)(y - 2)| + |(x - 1)(y - 4)| = 0$$

Exercice 6

Soit P et Q deux propositions. On note $P \uparrow Q$ la proposition $\neg(P \wedge Q)$.

\uparrow s'appelle la barre de Sheffer.

- 1) Exprimer $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$ à l'aide de P , Q et du seul connecteur \uparrow .
- 2) Exprimer de même $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftrightarrow Q$.

Exercice 7

Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes et donner les valeurs de vérité.

- 1) Le carré de tout réel est positif.
- 2) Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
- 3) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
- 4) Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
- 5) Il existe un entier multiple de tous les autres.
- 6) Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
- 7) Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.

Exercice 8

- 1) Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n 2^k = 2^{n+1} - 1$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- 2) Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, 3\}, \quad n^2 \leq 2^n$$

Exercice 9

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- 1) $n^3 - n$ est divisible par 6,

- 2) $n^5 - n$ est divisible par 30,
 3) Soit 4 divise n^2 , soit 4 divise $n^2 - 1$.

Ensembles, Applications

Exercice 10

Soient A, B et C des parties quelconques d'un ensemble E . On note \bar{A} le complémentaire de A dans E . Simplifier les ensembles suivants :

- 1) $X = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$,
 2) $Y = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$,
 3) $Z = \overline{\bar{A} \cap B \cap (\bar{A} \cap B)}$,
 4) $U = [A \cap (B \cup C)] \cap [(B \cap C) \cup \bar{C}]$,
 5) $V = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap C) \cup \overline{[(\bar{A} \cup B) \cap (A \cup C)]}$.

Exercice 11

Soient A, B, C des ensembles; Montrer que :

- 1) $A \cup B = A \cap C \Rightarrow B \subset A \subset C$,
 2) $A \cap B \subset A \cap C$ et $A \cup B \subset A \cup C \Rightarrow B \subset C$.

Exercice 12

Soient A, B, C des ensembles. Dire si les propositions suivantes sont vraies. (Justifier vos réponses!)

- 1) $A \subset B \cap C \Rightarrow A \subset B$ et $A \subset C$
 2) $A \subset B \cup C \Rightarrow A \subset B$ ou $A \subset C$.
 3) $A \subset B \cap C \Rightarrow A \subset B$ ou $A \subset C$.
 4) $A \subset B \cup C \Rightarrow A \subset B$ et $A \subset C$.
 5) $B \cap C \subset A \Rightarrow B \subset A$ et $C \subset A$.

Exercice 13

On appelle *différence symétrique* de deux sous-ensembles A et B de E le sous ensemble noté $A\Delta B$ suivant :

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

- 1) Montrer que $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- 2) Déterminer $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$, $A\Delta A$ où A est une partie de E .
- 3) Soient A, B, C des parties de E . Montrer que

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$$

Exercice 14

a) Indiquer si la famille d'ensemble partitionne E dans chaque cas suivant :

- 1) $A_n = \{n, n + 2\}$ et $E = \mathbb{N}$,
- 2) $A_n = \{2n, 2n + 1\}$ et $E = \mathbb{N}$,
- 3) $A_n = [2n, 2n + 1[$ et $E = \mathbb{R}_+^*$,
- 4) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n = [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$ et $E =]0, 1[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $B_n =]\frac{1}{n}, n + 1]$. Caractériser de manière explicite les ensembles suivants :

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} B_n, \quad D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} B_n$$

Exercice 15

Soit P l'ensemble de tous les pays du monde et V l'ensemble de toutes les villes du monde. On note G l'ensemble de tous les gens qui ont vécu jusqu'à aujourd'hui. Soit I l'ensemble de tous les Ivoiriens.

Soit $c : P \longrightarrow V$ l'application qui associe à $p \in P$ la ville capitale de p .

Soit $m : G \longrightarrow G$ l'application qui associe à $g \in G$ la mère de g .

Soit $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = 2x + 5y + 1$.

- 1) Déterminer si ces applications sont injectives, surjectives, bijectives.
- 2) Quelle est l'image directe $c(P)$ de P par c ?

- 3) Quelle est l'image directe de G par m ?
- 4) Quelle est l'image directe de I par m ?
- 5) Quelle est l'image directe de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par h ?

Exercice 16

- 1) On considère l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = (x, xy - y^3)$. L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
- 2) Soit h l'application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par

$$h(x, y) = (2x + y - 1, -3x + 2y + 2)$$

démontrer que h est une bijection et déterminer sa bijection réciproque h^{-1} .

Exercice 17

soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

Déterminer les ensembles suivants :

$$f([-2, 1]), f([0, 3]), f^{-1}([-1, 1]), f^{-1}\left(\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right]\right).$$

Exercice 18

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- 1) L'application f est-elle injective ? Est-elle surjective ?
- 2) On pose $I = \left[\frac{1}{2}, 4\right]$. Déterminer $f^{-1}(I)$
- 3) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
- 4) Montrer que la restriction $g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 19

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

- a) Vérifier si la famille de parties $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ partitionne l'ensemble $E =]0, 1[$.

- b) L'application f est-elle injective ? Est elle surjective ? Justifier les réponses !
- c) Déterminer $f(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- d) On pose $I = [\frac{1}{4}, 1]$. Déterminer $f^{-1}(I)$.
- e) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Exercice 20

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E . Soit f l'application de $\mathcal{P}(E)$ vers $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ définie par $f(X) = (X \cup A, X \cup B)$, $\forall X \in \mathcal{P}(E)$.

Montrer que

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

Exercice 21

- 1) Déterminer toutes les applications f de \mathbb{N} vers \mathbb{N} telles que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad f(m+n) = f(m) + f(n)$$

- 2) Déterminer toutes les applications g de \mathbb{N} vers \mathbb{N} telles que

$$\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad g(m+n) = g(m)g(n)$$

- 3) Déterminer toutes les applications h de \mathbb{N} vers \mathbb{N} telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad h(n) \leq n$$

- 4) Soit E un ensemble **fini**.

- a) Montrer que toute application injective de E dans E est une bijection.
- b) Montrer que toute application surjective de E sur E est une bijection.

Relations binaires**Exercice 22**

On considère l'ensemble $E = \{*, \circ, \triangle, \dagger\}$ et les relations binaires suivantes :

$$\mathcal{R} = \{(*, *), (\triangle, \triangle)\}, \quad \mathcal{S} = \{(*, *), (\triangle, \triangle), (\diamond, \diamond), (\diamond, \circ), (\triangle, \diamond), (*, \diamond)\}$$

Etudier \mathcal{R} et \mathcal{S} .

Exercice 23

On considère les deux relations \mathcal{R} , Δ suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } E &= \mathbb{R}, \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \mathcal{R} y &\Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } E &= \mathbb{N}, \\ \forall x, y \in \mathbb{N}, \quad x \Delta y &\Leftrightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}^*, \quad y = px^q. \end{aligned}$$

1) Pour chacune de ces relations, étudier la réflexivité, la symétrie, l'antisymétrie et la transitivité.

2) La relation Δ est-elle une relation d'ordre totale ? Justifier la réponse.

Exercice 24 : Relation de congruence modulo n sur \mathbb{Z} .

Soit $n \in \mathbb{N}$. Sur \mathbb{Z} on considère la relation \mathcal{R} définie comme suit : pour tous a et b éléments de \mathbb{Z} , on a

$$a \mathcal{R} b \quad \text{si} \quad b - a \in n\mathbb{Z}$$

(i)- Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

(ii)- Montrer que \mathbb{R} a exactement n classes d'équivalences si $n \neq 0$.

(iii)- Montrer que \mathcal{R} est compatible à la fois avec $+$ et \times .

(iv)- Décrire les classes d'équivalence dans les cas suivants : $n = 0$.

Exercice 25

Sur \mathbb{Z} on considère la relation \mathcal{R} définie comme suit : Pour tous a et b éléments de \mathbb{Z} , on a

$$a \mathcal{R} b \quad \text{si} \quad b^2 - a^2 \in 6\mathbb{Z}$$

(i)- Montrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence.

(ii)- Déterminer les classes d'équivalence.