

Bornes supérieures et inférieures

Exercice 1 :

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^*$

$$0 < \frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$

2. En déduire que

$$A = \left\{ \frac{mn}{(m+n)^2}, n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on déterminera.

Allez à : [Correction exercice 1 :](#)

Exercice 2 :

Pour chacun des exercices suivants, déterminer s'il y a une borne inférieure, une borne supérieure, si oui, les déterminer.

$$A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}; \quad B = \left\{ \frac{1}{1 - 2^{-n}}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{x^3}{|x^3 - 1|}, x \in]0,1[\cup]1, +\infty[\right\}; \quad D = \left\{ \frac{x^n}{|x^n - 1|}, x \in]0,1[\cup]1, +\infty[, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Allez à : [Correction exercice 2 :](#)

Exercice 3 :

Soit

$$X = \left\{ \frac{1}{p} + \frac{1}{q}; p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que X est majoré et minoré.
2. En déduire que X possède une borne supérieure et une borne inférieure.

Allez à : [Correction exercice 3 :](#)

Exercice 4 :

Soit

$$X = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que X est minoré et majoré.
2. Montrer que X admet un plus grand élément et le déterminer.
3. Montrer que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : [Correction exercice 4 :](#)

Exercice 5 :

Soit

$$X = \left\{ \frac{x+1}{x+2}; x \in \mathbb{R}, x \leq -3 \right\}$$

Montrer que X admet une borne inférieure et une borne supérieure et les déterminer.

Allez à : [Correction exercice 5 :](#)

Exercice 6 :

Soit

$$X = \left\{ \frac{2xy}{x^2 + y^2}, x \in \mathbb{R}^*, y \in \mathbb{R}^* \right\}$$

1. Montrer que X admet une borne inférieure et la déterminer, est-ce un minimum ?
2. Montrer que X admet une borne supérieure et la déterminer, est-ce un maximum ?

Allez à : [Correction exercice 6](#) :

Exercice 7 :

Soit

$$X = \left\{ \frac{2p}{2pq + 3}; p, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que X est minoré et majoré.
2. En déduire que X admet une borne supérieure et une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : [Correction exercice 7](#) :

Exercice 8 :

On considère la partie $X = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^* \right\}$

Démontrer que X possède une borne inférieure et une borne supérieure, déterminer chacune d'entre elle.

Allez à : [Correction exercice 8](#) :

Exercice 9 :

Soient

$$X = \left\{ \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{p}; p \in \mathbb{N}^* \right\} \quad \text{et} \quad Y = \left\{ \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{q}; p \in \mathbb{N}^*; q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que X possède dans \mathbb{R} une borne supérieure, une borne inférieure et les déterminer.
2. Montrer que Y possède dans \mathbb{R} une borne supérieure, une borne inférieure et les déterminer.

Allez à : [Correction exercice 9](#) :

Exercice 10 :

Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B = \{y = -x; x \in A\}$

1. Montrer que B est minoré si et seulement si A est majoré.
2. En supposant que A est majoré, démontrer que B admet une borne inférieure et que

$$\inf(B) = -\sup(A)$$

Allez à : [Correction exercice 10](#) :

Exercice 11 :

On rappelle que si I est un intervalle ouvert, quel que soit $x \in I$, il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset I$$

Plus généralement, un sous-ensemble A de \mathbb{R} vérifiant la propriété :

$$\forall x \in A, \exists \epsilon > 0,]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset A$$

est dit « ouvert ».

Soit I un intervalle ouvert. On veut démontrer qu'il n'existe pas de sous-ensemble ouverts non vides A et B de \mathbb{R} tels que $I = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$ (autrement dit tels que $\{A, B\}$ soit une partition de I). Pour cela on va supposer que de tels ensemble A et B existent pour aboutir à une contradiction. On considère pour cela $a \in A$ et $b \in B$ et l'ensemble

$$E = \{t \in [0,1]; a + t(b - a) \in A\}$$

1. Montrer que E admet une borne supérieure, que l'on appellera T . (On ne demande pas de trouver T).
2. Montrer (en utilisant le fait que A est ouvert) que $a + T(b - a) \notin A$.

3. En déduire (en utilisant le fait que I est un intervalle) que $a + T(b - a) \in B$.
4. Montrer (en utilisant le fait que B est ouvert) que ceci contredit le fait que T soit la borne supérieure de E .

Allez à : **Correction exercice 11 :**

CORRECTIONS

Correction exercice 1 :

1. m et n étant strictement positifs on a $0 < \frac{mn}{(m+n)^2}$

$$\frac{1}{4} - \frac{mn}{(m+n)^2} = \frac{(m+n)^2 - 4mn}{(m+n)^2} = \frac{m^2 + 2mn + n^2 - 4mn}{(m+n)^2} = \frac{m^2 - 2mn + n^2}{(m+n)^2} = \frac{(m-n)^2}{(m+n)^2} \geq 0$$

Donc

$$\frac{mn}{(m+n)^2} \leq \frac{1}{4}$$

2. $\frac{mn}{(m+n)^2}$ est borné donc A admet une borne inférieure a telle que $0 \leq a$ (car a est le plus grand des minorants) et une borne supérieure b telle que $b \leq \frac{1}{4}$ (car b le le plus petit des majorants).

Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0$, $a \leq \frac{mn}{(m+n)^2}$, en prenant $m = 1$ on a :

$$a \leq \frac{n}{(1+n)^2} \rightarrow 0$$

Ce qui implique que $a \leq 0$, on a donc $a = 0$.

Comme pour tout $m > 0$ et $n > 0$, $\frac{mn}{(m+n)^2} \leq b$, en prenant $m = n$ on a :

$$\frac{n^2}{(n+n)^2} \leq b$$

Puis

$$\frac{n^2}{(n+n)^2} = \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$$

Montre que $\frac{1}{4} \leq b$ et finalement $b = \frac{1}{4}$.

Allez à : **Exercice 1 :**

Correction exercice 2 :

On pose $u_n = \frac{2^n}{2^n - 1}$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est à valeur strictement positive

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{2^{n+1} - 1}}{\frac{2^n}{2^n - 1}} = 2 \times \frac{2^n - 1}{2^{n+1} - 1} = \frac{2^{n+1} - 2}{2^{n+1} - 1} < 1$$

Donc cette suite est strictement décroissante, on en déduit que

$$\sup(A) = u_1 = \frac{2}{2-1} = 2 \quad \text{et} \quad \inf(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 1$$

Remarque : A admet un maximum 2 mais pas de minimum.

$\frac{1}{1-2^{-n}} = \frac{2^n}{2^n - 1}$, par conséquent $A = B$ ces deux ensembles ont les mêmes bornes supérieures et inférieures.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x \neq 1}} \frac{x^3}{|x^3 - 1|} = +\infty$$

Donc C n'admet pas de borne supérieure.

Il est évident que pour tout $x \in]0,1[\cup]1, +\infty[$, $\frac{x^3}{|x^3 - 1|} \geq 0$ donc 0 est un minorant de C par conséquent

$$0 \leq \inf(C)$$

Puis remarquons que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{x^3}{|x^3 - 1|} = 0$$

Donc

$$\inf(C) \leq 0$$

En conclusion

$$\inf(C) = 0$$

Remarque : 0 n'est pas un minimum.

Remarque : on aurait pu étudier la fonction

$$]0,1[\cup]1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^3}{|x^3 - 1|}$$

En faisant attention à distinguer les cas $x \in]0,1[$ (où $x^3 - 1 < 0$) et $x \in]1, +\infty[$ (où $x^3 - 1 > 0$).

Pour l'ensemble D on fait strictement le même raisonnement que pour l'ensemble C . D n'a pas de borne supérieure et sa borne inférieure est 0.

Allez à : **Exercice 2 :**

Correction exercice 3 :

1. Comme $p \geq 1$ et $q \geq 1$, $0 < \frac{1}{p} \leq 1$ et $0 < \frac{1}{q} \leq 1$, on a donc

$$0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + 1 = 2$$

Ce qui montre bien que X est majoré et minoré.

2. Pour $p = q = 1$, on a

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 2$$

Donc 2 est le maximum, par conséquent sa borne supérieure.

0 est un minorant de X donc $0 \leq \inf(X)$

Et

$$\lim_{\substack{p \rightarrow +\infty \\ q \rightarrow +\infty}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) = 0$$

Donc $\inf(X) \leq 0$ et finalement $\inf(X) = 0$

Allez à : **Exercice 3 :**

Correction exercice 4 :

1. La première idée serait de montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+2}}{n}$ est croissante ou décroissante mais cela ne marche pas, vérifions le tout de même

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(-1)^{n+1} + 2}{n+1} - \frac{(-1)^n + 2}{n} = \frac{((-1)^{n+1} + 2)n - ((-1)^n + 2)(n+1)}{n(n+1)} \\ &= \frac{n((-1)^{n+1} + 2) - ((-1)^n + 2)(n+1)}{n(n+1)} = \frac{2(-1)^{n+1}n - (-1)^n - 2}{n(n+1)} \\ &= \frac{(-1)^{n+1}(2n+1) - 2}{n(n+1)} \end{aligned}$$

Selon la parité de n cette expression est positive ou négative, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas monotone, il faut faire autrement.

Pour voir ce qu'il se passe on va calculer les premiers termes de cette suite

$$u_1 = 1; u_2 = \frac{3}{2}; u_3 = \frac{1}{3}; u_4 = \frac{3}{4}; u_5 = \frac{1}{5}; u_6 = \frac{1}{2}$$

Cela donne l'idée d'étudier les deux sous-suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général :

$$v_n = u_{2n} = \frac{3}{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

Ces deux suites sont manifestement positive, décroissante et tendent vers 0, on en conclut que

$$0 < u_n < \max(v_1, w_0) = \frac{3}{2}$$

2. D'après l'étude précédente $\frac{3}{2} = u_2$ est le plus grand élément (le maximum)
3. $\frac{3}{2}$ est un maximum et donc la borne supérieure.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

Donc $\inf(X) \leq 0$,

Et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, 0 est un minorant donc on a $\inf(X) \geq 0$ et finalement

$$\inf(X) = 0$$

Allez à : **Exercice 4** :

Correction exercice 5 :

Nous allons étudier la fonction

$$f:]-\infty, -3] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$$

f est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, -3]$ (le seul problème de f est $x = -2$ qui est en dehors de l'intervalle d'étude)

$$f'(x) = \frac{1 \times (x+2) - (x+1) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$$

f est strictement croissante sur $]-\infty, -3]$, sa borne inférieure est

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{x+2} = 1$$

Et sa borne supérieure (qui est aussi un maximum) est

$$m = f(-3) = 2$$

Allez à : **Exercice 5** :

Correction exercice 6 :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$,

$$(x+y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy \geq 0 \Leftrightarrow -(x^2 + y^2) \leq 2xy \Leftrightarrow -1 \leq \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

On peut diviser car x (et y est non nul).

Ce qui signifie que X est une partie de \mathbb{R} minorée et évidemment non vide, donc X admet une borne inférieure.

(1) montre que -1 est un minorant de X , la borne inférieure étant le plus petit des majorants donc

$$\inf(X) \geq -1$$

Si on pose $y = -x$

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{-2x^2}{2x^2} = -1$$

Cela montre que

$$\inf(X) \leq -1$$

Par conséquent

$$\inf(X) = -1$$

Il s'agit d'un minimum car cette borne inférieure est dans X .

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^*$

$$(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow 1 \geq \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (2)$$

Ce qui signifie que X est une partie de \mathbb{R} majorée et évidemment non vide, donc X admet une borne supérieure.

(2) montre que 1 est un majorant de X , la borne supérieure étant le plus petit des majorants donc

$$\sup(X) \leq 1$$

Si on pose $y = x$

$$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$$

Cela montre que

$$\sup(X) \geq 1$$

Par conséquent

$$\sup(X) = 1$$

Il s'agit d'un maximum car cette borne supérieure est dans X .

Allez à : **Exercice 6 :**

Correction exercice 7 :

1.

$$\frac{2p}{2pq + 3} < \frac{2p}{2pq} = \frac{1}{q} \leq 1$$

Donc X est majoré.

$$\frac{2p}{2pq + 3} > 0$$

Donc X est minoré.

2. Fixons $q = 1$ et faisons tendre p vers l'infini.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2p}{2pq + 3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2p}{2p + 3} = 1$$

Donc

$$\sup(X) \geq 1$$

D'autre part

$$\frac{2p}{2pq + 3} < 1$$

Donc $\sup(X) \leq 1$ et finalement $\sup(X) = 1$.

Allez à : **Exercice 7 :**

Correction exercice 8 :

Manifestement la suite de terme général $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ est ni croissante ni décroissante, elle est même de signe alterné. Nous allons considérer les deux sous-suites $(v_n)_{n \geq 1}$ et $(w_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels définies par

$$v_n = u_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}$$

$$\forall n \geq 1, v_{n+1} - v_n = 1 + \frac{1}{2(n+1)} - \left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{2n - 2(n+1)}{2n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

Donc la suite $(v_n)_{n \geq 1}$ est décroissante

$$v_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$$

$$\forall n \geq 1, w_{n+1} - w_n = -1 + \frac{1}{2(n+1)+1} - \left(-1 + \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2n+1 - (2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{-2}{(2n+3)(2n+1)} < 0$$

$$w_0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -1$$

$$X = \left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathbb{m}\right\}$$

$$\sup(X) = \max\left(\sup\left(\left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right), \sup\left(\left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathbb{m}\right\}\right)\right) = \max\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \frac{3}{2}$$

Remarque : $\sup(X) = \max(X)$

$$\inf(X) = \min\left(\inf\left(\left\{1 + \frac{1}{2n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}\right), \inf\left(\left\{-1 + \frac{1}{2n+1}; n \in \mathbb{m}\right\}\right)\right) = \min(1, -1) = -1$$

Allez à : **Exercice 8 :**

Correction exercice 9 :

1. On pose pour tout $p \geq 1$:

$$u_p = \frac{(-1)^p}{p} + \frac{2}{p}$$

Cette suite est ni croissante ni décroissante (à vérifier)

On pose

$$\forall p \geq 1, v_p = u_{2p} = \frac{1}{2p} + \frac{2}{2p} = \frac{3}{2p} \quad \text{et} \quad \forall p \geq 0, w_p = u_{2p+1} = -\frac{1}{2p+1} + \frac{2}{2p+1} = \frac{1}{2p+1}$$

Les suites $(v_p)_{p \geq 1}$ et $(w_p)_{p \geq 0}$ sont décroissantes, c'est évident.

$$v_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} v_p = 0$$

$$w_0 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} w_p = 0$$

$$\sup(X) = \max(v_p; p \geq 1, w_p; p \geq 0) = \max\left(\frac{3}{2}, 1\right) = \frac{3}{2}$$

Remarque cette borne supérieure est un maximum.

$$\inf(X) = \min(v_p; p \geq 1, w_p; p \geq 0) = \min(0; 0) = 0$$

Remarque : cette borne inférieure n'est pas un minimum.

2.

$$\sup(Y) = \sup\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) + \sup\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$$

En distinguant p pair et p impair, on voit que :

$$\sup\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Comme la suite de terme général de terme général $\frac{2}{q}$ est décroissante donc

$$\sup\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = 2$$

On en déduit que

$$\sup(Y) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

Remarque : cette borne supérieure est un maximum.

$$\inf(Y) = \inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) + \inf\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$$

En allant un peu vite et en distinguant p pair et p impair

$$\inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = \frac{(-1)^1}{1} = -1$$

Comme la suite de terme général de terme général $\frac{2}{q}$ est décroissant et tend vers 0 donc

$$\inf\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = 0$$

$$\inf(Y) = \inf\left(\left\{\frac{(-1)^p}{p}; p \in \mathbb{N}^*\right\}\right) + \inf\left(\left\{\frac{2}{q}; q \in \mathbb{N}^*\right\}\right) = -1 + 0 = -1$$

Remarque : cette borne inférieure n'est pas un minimum.

Allez à : **Exercice 9 :**

Correction exercice 10 :

1. Si B est minoré alors il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in B$, $m \leq y$ alors il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $y \in B$, $-y \leq -m$, comme tous les éléments de A sont de la forme $-y$, $y \in B$, cela montre qu'il existe $-m \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in A$, $x \leq -m$, autrement dit A est majoré.

Réciproque :

Si A est majoré, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in A$, $x \leq M$ alors il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $x \in A$, $-M \leq -x$, comme tous les éléments de B sont de la forme $-x$, $x \in A$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tous $y \in B$, $-M \leq y$, autrement dit B est minoré.

2. Si A est majoré, A admet une borne supérieure $\sup(A)$ et d'après le 1. B est minoré et donc admet une borne inférieure $\inf(B)$.

Pour tout M un majorant de A : $\sup(A) \leq M$

D'après 1. $-M$ est un minorant de B : $-M \leq \inf(B)$

On en déduit que pour tout M , majorant de A : $-\inf(B) \leq M$, cela entraîne que

$$-\inf(B) \leq \sup(A)$$

De même pour m un minorant de B : $m \leq \inf(B)$

D'après 1. $-m$ est un majorant de A : $\sup(A) \leq -m$

On en déduit que pour tout m , minorant de B : $\sup(A) \leq -m$, cela entraîne que

$$\sup(A) \leq -\inf(B)$$

Donc

$$\sup(A) = -\inf(B) \Leftrightarrow \inf(B) = -\sup(A)$$

Allez à : **Exercice 10 :**

Correction exercice 11 :

1. $E \subset [0,1]$, ce qui signifie que E est une partie de \mathbb{R} bornée par 1 et non vide car $a = 0 \times (b - a) \in E$ donc E admet une borne supérieure.
2. Si $a + T(b - a) \in A$ alors il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$]a + T(b - a) - \epsilon, a + T(b - a) + \epsilon[\in A$$

Car A est un ouvert.

Ce qui entraîne que

$$a + T(b - a) + \frac{\epsilon}{2} \in A$$

Or

$$a + T(b - a) + \frac{\epsilon}{2} = a + T(b - a) + \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a} (b - a) = a + \left(T + \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a}\right) (b - a)$$

Donc

$$a + \left(T + \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b - a}\right) (b - a) \in A$$

Et par définition de E :

$$T + \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a} \in E$$

Ce qui n'est pas possible car

$$T < T + \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a}$$

Et T est supposé être la borne supérieure de E .

Par conséquent $a + T(b-a) \notin A$.

3. $T \in [0,1]$ donc

$$0 \leq T(b-a) \leq b-a$$

Ce qui entraîne que

$$a \leq a + T(b-a) \leq b$$

$a + T(b-a) \in [a, b]$ comme I est un intervalle $a + T(b-a) \in I$, de plus D'après 2.

$a + T(b-a) \notin A$ donc $a + T(b-a) \in B$ puisque $A \cup B = I$.

4. Comme B est ouvert et que $a + T(b-a) \in B$ il existe ϵ tel que

$$]a + T(b-a) - \epsilon, a + T(b-a) + \epsilon[\in B$$

Ce qui entraîne que

$$a + T(b-a) - \frac{\epsilon}{2} \in B$$

Or

$$a + T(b-a) - \frac{\epsilon}{2} = a + T(b-a) - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a} (b-a) = a + \left(T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a}\right) (b-a)$$

Donc

$$a + \left(T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a}\right) (b-a) \in B$$

Ce qui entraîne que

$$a + \left(T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a}\right) (b-a) \notin A$$

Comme $T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a} < T \leq 1$, $T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a} \in [0,1]$ (quitte à diminuer ϵ pour que $T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a}$ reste positif) et par définition de E :

$$T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a} \notin E$$

Ce qui n'est pas possible car

$$T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a} < T$$

Comme pour tout $\epsilon' > 0$, $T - \epsilon' \in E$, en prenant

$$\epsilon' = \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a}$$

Il y a une contradiction. Elle se situe dans l'implication

$$a + \left(T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a}\right) (b-a) \in B \Rightarrow a + \left(T - \frac{1}{2} \times \frac{\epsilon}{b-a}\right) (b-a) \notin A$$

C'est-à-dire dans le fait que $A \cap B = \emptyset$

Allez à : **Exercice 11** :