

01

Nombres réels

Feuille d'exercices n° 1



Exercice n° 1

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$1 \quad |ab| \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

$$2 \quad ||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

$$3 \quad |a| + |b| \leq |a + b| + |a - b|.$$

$$4 \quad |a + b| + |a - b| = |a| + |b| + ||a| - |b||.$$

$$5 \quad |\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}| \leq \sqrt{|b - a|}.$$

$$6 \quad 1 + |ab - 1| \leq (1 + |a - 1|)(1 + |b - 1|).$$

Exercice n° 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ des nombres réels.

1 Montrer l'inégalité suivante dite de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)$$

Indication : Ecrire $\sum_{i=1}^n (tx_i + y_i)^2$ sous la forme $at^2 + bt + c$, étudier son signe puis en déduire celui du discriminant associé.

2 En déduire l'inégalité dite de Hölder :

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}.$$

Indication : Ecrire $\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i(x_i + y_i) + \sum_{i=1}^n y_i(x_i + y_i)$ puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les deux sommes.

Exercice n° 3

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides.

1 On suppose que $A \subset B$. Montrer que :

a si B est majorée alors A est majorée et $\sup(A) \leq \sup(B)$

b si A est minoré alors B est minorée et $\inf(A) \geq \inf(B)$.

2 a On suppose que A et B sont majorées. Montrer que $A \cup B$ est majorée et $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.

b On suppose que A et B sont minorées. Montrer que $A \cup B$ est minorée et $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.

- 3** On note $A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$.
- a** si A et B sont majorées alors $A + B$ est majorée et $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$
 - b** si A et B sont minorées $A + B$ est minorée et $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.
- 4** On note $-A = \{-a \mid a \in A\}$.
- a** si A est majorée alors $-A$ est minorée et $\inf(-A) = -\sup(A)$
 - b** si A est minorée alors $-A$ est majorée et $\sup(-A) = -\inf(A)$.
- 5** On note $A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$.
- a** si A est majorée et B est minorée alors $A - B$ est majorée et

$$\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B).$$
 - b** si A est minorée et B est majorée alors $A - B$ est minorée et

$$\inf(A - B) = \inf(A) - \sup(B).$$
- 6** Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction majorée, alors on note $\sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- a** Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions majorées. Montrer que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x) + \sup_{x \in \mathbb{R}} g(x).$$
 - b** Donner un exemple où l'égalité n'est pas vérifiée.
- 7** Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction minorée, alors on note $\inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \inf\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
- a** Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions minorées. Montrer que

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} (f(x) + g(x)) \geq \inf_{x \in \mathbb{R}} f(x) + \inf_{x \in \mathbb{R}} g(x).$$
 - b** Donner un exemple où l'égalité n'est pas vérifiée.

Exercice n° 4

Préciser lorsqu'ils existent la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de chacune des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$A = \left\{ 2 + \frac{(-1)^n}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}, \quad B = \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Exercice n° 5

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}} < \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$. En déduire la partie entière de $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.