UFHB/ UFRMI /
Licence 1 Maths-Info-MECA/ Année académique 2024 – 2025

Fiche de TD / Structures algébriques

Exercice 1 : Soit $E = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$.

1. Combien de lois de composition internes y a -t-il sur E ?
2. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E, qui soit commutative, admette l'élément 0 comme élément neutre,
3. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E telle chaque élément admette pour symétrique son propre opposé.
4. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E, qui soit commutative, admette l'élément 0 comme élément neutre, et telle chaque élément admette pour symétrique son propre opposé.
5. Ecrire la table d'une loi de composition interne sur E, qui soit non commutative et admette l'élément 3 comme élément neutre,

Exercice 2 : Etudier les lois de composition internes $*$ et $\oplus$ définies sur $\mathbb{R}$ suivantes : $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$ et $a \oplus b = (a-1)(b-1) + 1$
et la loi de composition interne $\top$ définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$a \top b = PPCM(a, b).$$

(Associativité, commutativité, élément neutre, éléments symétriques, éléments idempotents)

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto z + \bar{z}$

1. Montrer que f est une application bien définie.
2. Montrer que f est un homomorphisme pour les additions sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
3. Donner trois parties stables de $(\mathbb{R}, +)$
4. Donner trois parties stables de $(\mathbb{C}, +)$
5. Montrer que si A est une partie stable de $(\mathbb{C}, +)$, alors $f(A)$ est une partie stable de $(\mathbb{R}, +)$ (où $f(A)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}$ ayant, par f, au moins un antécédent dans A).

6. Soit B une partie de $\mathbb{R}$.

   (i) Montrer que si B est une partie stable de $(\mathbb{R}, +)$, alors $f^{-1}(B)$ est une partie non vide.
   (Où $f^{-1}(B)$ est l'ensemble de tous les éléments $z \in \mathbb{C}$ tels que $f(z) \in B$).

   (ii) Montrer que si B est une partie stable de $(\mathbb{R}, +)$ alors $f^{-1}(B)$ est une partie stable de $(\mathbb{C}, +)$.

Exercice 4 **:**

1) Rappeler la définition d'un anneau unitaire.
2) Rappeler la définition d'un corps.
3) Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on pose

$$a \top b = a + b - 1 \quad \text{et} \quad a * b = ab - a - b + 2$$

(i) Montrer que $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un anneau commutatif unitaire.
(ii) Vérifier si $(\mathbb{R}, \top, *)$ est un corps.

Exercice 5 **:** On définit dans $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ la loi de composition "$\top$"par :

$$\forall (a, b) \in E \quad \text{et} \quad \forall (x, y) \in E, \quad (a, b) \top (x, y) = (a\,x, x\,b + y)$$

1) $(E, \top)$ est-il un groupe commutatif ?

2) Résoudre les équations suivantes dans E.

i) $(a, b) \top (1, 3) = (a^2, 0)$,

ii) $(a, b) \top (a, b) = (a^3, b^2)$.

Exercice 6

Soient m, $n \in \mathbb{N}$.
(1) Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$d = PGCD(m, n) \quad \Leftrightarrow \quad m\,\mathbb{Z} + n\,\mathbb{Z} = d\,\mathbb{Z}$$

(2) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$p = PPCM(m, n) \quad \Leftrightarrow \quad m\,\mathbb{Z} \cap n\,\mathbb{Z} = p\,\mathbb{Z}$$

(3) Prouver que

$$PGCD(m,n)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, u,\, v \in \mathbb{Z} \quad \text{tels que} \quad m\,u+n\,v=1$$

Exercice 7 **:** Soient $A=\{1,2,3\}$ et le groupe $(\mathcal{P}(A),\triangle)$. où $\triangle$ est la loi différence symétrique.

1. Déterminer $\mathcal{P}(A)$.
2. Montrer que $\mathcal{H}=\{\varnothing, A\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{P}(A)$.
3. Déterminer le groupe quotient $\dfrac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{H}}$, puis la table de sa loi quotient.

Exercice : 8 **:** Soient G le groupe quotient $\dfrac{\mathbb{Z}}{18\mathbb{Z}}$.

1. Quels sont les cardinaux des différents sous-groupes de G ?.
2. Déterminer **tous les sous-groupes de** G.
3. Avec l'inclusion, ordonner ces sous-groupes.

Anneaux unitaires

Exercice 9 **:** On considère l'ensemble

$$\mathbb{Z}[\sqrt{7}]=\{a+b\sqrt{7},(a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est **un sous-anneau** du corps $(\mathbb{R},+,\cdot)$.
2. Si $z=a+b\sqrt{7}$, on note $\widehat{z}=a-b\sqrt{7}$. Montrer que
$$\widehat{z_1+z_2}=\widehat{z_1}+\widehat{z_2}, \quad \widehat{z_1\cdot z_2}=\widehat{z_1}\cdot\widehat{z_2}, \text{ et } \quad z\cdot\widehat{z}\in\mathbb{Z}$$
3. Montrer que si z est inversible alors $\widehat{z}$ est inversible et $z\widehat{z}\in\{-1,1\}$.
4. Donner 19 éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

Exercice 10 **:** On note par $\overline{z}$ le conjugué de z dans $\mathbb{C}$.

I- On pose $\mathbb{Z}[i]=\{\, z\in\mathbb{C}\,/\,\exists\, a,\, b\in\mathbb{Z} \quad z=a+i\,b\,\}$.

(1) Montrer $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ est un anneau.

(2) Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}[i]$?

II- On considère l'ensemble

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, \exists a,\, b \in \mathbb{Z} \quad z = a + i\, b\sqrt{5} \}$$

a) Montrer que $(A, +, \times)$ est un anneau.

Pour $u,\, v \in A$, on dit que u divise v dans l'anneau $(A, +, \times)$ si, il existe $w \in A$ tel que $v = w\, u$.

b) Montrer que si u divise v alors $u\,\overline{u}$ divise $v\overline{v}$ dans $\mathbb{Z}$.

c) Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(A, +, \times)$?

d) Quels sont les diviseurs de 9 dans l'anneau $(A, +, \times)$?

Exercice 11 :

1) Déterminer les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ et préciser l'inverse de chaque élément inversible.

2) Déterminer tous les sous-groupes du groupe $(\dfrac{\mathbb{Z}}{12\mathbb{Z}}, +)$.

3) Déterminer tous les sous-groupes du groupe $(\dfrac{\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}}, +)$.

4) Déterminer tous les sous-groupes du groupe $(\dfrac{\mathbb{Z}}{17\mathbb{Z}}, +)$.

Exercice 12 **:** On considère l'anneau quotient $A = \dfrac{\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}}$.

1. Quels sont les restes par la division euclidienne par 24, de -2018 et de 17^{2016} ?
2. A est-il commutatif, unitaire , intègre. ?
3. Déterminer $\mathcal{U}(A)$ l'ensemble des éléments inversibles de A.
4. Déterminer tous les entiers $x \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\overline{x}^2 + \overline{12}\,\overline{x} + \overline{23} = \overline{0}$$

où $\overline{x}$ est la classe de x modulo 24.

Exercice 13 : .

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les systèmes de congruence suivants ;

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & \equiv & 11 \mod (101) \\ x & \equiv & -6 \mod (23) \end{array}\right. \quad , \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & \equiv & 1 \mod (101) \\ x & \equiv & 1 \mod (23) \\ x & \equiv & -1 \mod (11) \end{array}\right.$$

Exercice 14 : .

M Yao, 25 ans et sa soeur aînée Shiso Sali, vivent tous les deux à l'étranger. M. Yao qui vit au Canada vient voir sa famille en CI chaque 3 ans, alors que sa soeur qui vit au Japon avec son époux, vient rendre visite chaque 5 ans. Sali a rendu visite en 2001 et son frère en 2002.

Donner les années où ils se sont vus ou se verront avant leur 100 ans.

Polynômes et fractions rationnelles.

Exercice 15 : Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, le polynôme $A_n = n\,X^{n+1} - (n+1)\,X^n + 1$ est divisible par $(X-1)^2$. Calculer le quotient.

b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, le polynôme réel $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ est divisible par $X^2 - 3\,X + 2$. Quel est le quotient ?

c) Soit $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Quel est le reste de la division euclidienne du polynôme réel $(\cos\theta + X\,\sin\theta)^n$ par le polynôme $X^2 + 1$?

Exercice 16 : .

1. – Effectuer la **division euclidienne** de $X^6 + 2X^5 + 1$, par $X^2 + X + 1$.
   – Effectuer la **division suivant les puissances croissantes** de
   $X^6 + 2X^5 + 1$, par $X^2 + X + 1$ à **l'ordre** 3.
2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle :

$$\frac{X^6 + 2X^5 + 1}{(X^2 + X + 1)^2}$$

3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles : $\dfrac{1}{X^6-1}$, $\dfrac{X+1}{(1+X+X^2)X^6}$, $\dfrac{X^6}{(X-1)(X-2)^3}$

Exercice : 17 .

(a) Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère les polynômes

$$P = X^4 + 8\,X^3 - 3\,X^2 + 1 \quad \text{et} \quad Q = 2\,X^3 - 5\,X + 3$$

i) Effectuer la division euclidienne de P par Q.

ii) Calculer le PGCD et le PPCM des polynômes P et Q

(b) On considère à présent le corps $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Dans $K[X]$, on considère les polynômes

$$T = X^4 + \overline{2}\,X + \overline{4} \quad \text{et} \quad H = \overline{5}\,X^3 + \overline{5}\,X + \overline{4}$$

i) Factoriser le polynôme T dans $K[X]$.

ii) Effectuer la division euclidienne de T par H.

iii) Calculer le PGCD des polynômes T et H.

Examen 2024, Structures Algébriques, Session 2

Exercice 1

1) Décomposer le polynôme $P(X) = X^4 + 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

2) On pose $F(X) = \dfrac{3X^5}{X^4+1}$.

(i) Quelle est la parité de la fraction rationnelle $F(X)$.

(ii) Décomposer la fraction rationnelle $F(X)$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 2

Dans $\mathbb{R}$, on définit la loi $\top$ par

$$\forall\, x,\, y \in \mathbb{R} \quad x \top y = xy - 2(x+y) + 6$$

1) On pose $G = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Montrer que G est une partie stable de $\mathbb{R}$ pour la loi $\top$.

2) Montrer que (G, T) est un groupe commutatif.

3) On considère l'application $g : G \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie par $x \longmapsto x - 2$.
Montrer que g est un isomorphisme du groupe $(G, \top)$ sur le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$.

4) Montrer que $]2, +\infty[$ est un sous-groupe du groupe $(G, \top)$.

Exercice 3

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses ? Justifier vos éponses ! (NB : toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.)

a. Si le produit de deux entiers est congru à 0 modulo 5 alors l'un des deux est multiple de 5.

b. Si un entier est congru à 2 modulo 5 alors sa puissance quatrième est congrue à 1 modulo 5.

c. Si deux entiers sont congrus à 2 modulo 5, alors leur somme est congrue à 1 modulo 5.

d. Pour tout entier, non multiple de 5, il existe un entier tel que le produit des deux soit congru à 1 modulo 5.
e. Aucun entier n'est tel que son carré soit congru à ?1 modulo 5.
f. Aucun entier n'est tel que son carré soit congru à 2 modulo 5.
g. La puissance quatrième d'un entier non multiple de 5 est toujours congrue à 1 modulo 5.