

MATHÉMATIQUES

Manuel de Cours et Exercices

CHAPITRE 1

RELATIONS ET FONCTIONS

Ce chapitre couvre les notions fondamentales de la théorie des ensembles, les relations binaires et les fonctions, avec une approche pédagogique progressive et de nombreux exemples guidés.

Auteur

ALCIMÉ Winy-Dona

Année Scolaire

2026-2027

Table des Matières

Table des matières

1	1.1 Relations	2	5	1.5 Graphique d'une fonction réelle	14
1.1	Couples ordonnés	2	5.1	Construction d'un graphique	14
1.2	Produit cartésien	2	5.2	Lecture d'un graphique	16
1.3	Relations entre deux ensembles	3	5.3	Domaine et image à partir d'un graphique	17
1.4	Représentation d'une relation	3	5.4	Interprétation graphique dans un contexte concret	17
1.5	Domaine et image d'une relation	4	5.5	Exercices	18
1.6	Relation inverse	4	6	1.6 Fonctions composées	19
1.7	Exercices	4	6.1	Définition d'une fonction composée . . .	19
2	1.2 Fonctions	5	6.2	Calcul d'une fonction composée	19
2.1	Définition d'une fonction	5	6.3	Domaine d'une fonction composée . . .	20
2.2	Domaine, ensemble d'arrivée et image .	5	6.4	Propriétés de la composition	20
2.3	Représentation d'une fonction	6	6.5	Exercices	21
2.4	Fonctions réelles	6	7	1.7 Fonctions inversibles	21
2.5	Exercices	6	7.1	Définition d'une fonction inversible . . .	21
3	1.3 Fonctions réelles	7	7.2	Calcul de la fonction inverse	22
3.1	Fonctions définies sur les nombres réels .	7	7.3	Domaine et image d'une fonction inverse	23
3.2	Détermination du domaine	7	7.4	Propriétés de la fonction inverse	24
3.3	Détermination de l'image	8	7.5	Exercices	24
3.4	Calcul d'images	8	8	Synthèse du chapitre 1	25
3.5	Algèbre des fonctions réelles	9	8.1	Résumé du chapitre	25
3.6	Fonctions particulières	9	8.2	Définitions essentielles	25
3.7	Exercices	10	8.3	Propriétés à retenir	25
4	1.4 Classification des fonctions	10	8.4	Méthodes clés	26
4.1	Fonctions injectives (one-one)	10	8.5	Erreurs fréquentes	26
4.2	Fonctions surjectives (onto)	11	8.6	Tableau de synthèse	26
4.3	Fonctions bijectives (one-one onto) . . .	12	9	Exercices de révision	27
4.4	Reconnaître une fonction injective, sur- jective ou bijective	12	10	Test du chapitre 1	28
4.5	Exercices	13	11	Exercices Avancés (Défis)	29

1

1.1 Relations

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, vous serez capable de :

- Définir un couple ordonné et le produit cartésien de deux ensembles.
- Définir une relation entre deux ensembles.
- Représenter une relation par un diagramme sagittal, un tableau ou une liste de couples.
- Déterminer le domaine et l'image d'une relation.
- Définir la relation inverse d'une relation donnée.

Brève révision : Notions d'ensembles

Rappel : Un ensemble est une collection d'objets. On note $x \in X$ pour dire que x appartient à X . Le nombre d'éléments d'un ensemble X est noté $n(X)$. Le produit cartésien $X \times Y$ est l'ensemble de tous les couples (x, y) où $x \in X$ et $y \in Y$.

1.1 Couples ordonnés

Commençons par la brique de base de toute relation : le **couple ordonné**.

Un couple ordonné est une paire d'éléments où l'ordre a une importance capitale. On le note (x, y) . Par exemple, $(3, 5)$ et $(5, 3)$ sont deux couples différents. Le premier a pour première composante 3 et pour seconde 5, tandis que le second a pour première composante 5 et pour seconde 3.

Définition : Couple ordonné

Un **couple ordonné** est une paire (x, y) où x est la **première composante** et y est la **seconde composante**. Deux couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont égaux si et seulement si $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.

Erreur fréquente

Ne confondez pas un couple ordonné (x, y) avec un ensemble $\{x, y\}$. Dans un ensemble, l'ordre n'a pas d'importance : $\{3, 5\} = \{5, 3\}$. Dans un couple, l'ordre est essentiel : $(3, 5) \neq (5, 3)$.

1.2 Produit cartésien

Maintenant que nous savons ce qu'est un couple ordonné, nous pouvons définir le produit cartésien de deux ensembles. Imaginez que vous avez deux ensembles X et Y . Le produit cartésien $X \times Y$ est l'ensemble de **tous les couples ordonnés** que l'on peut former en prenant un élément de X comme première composante et un élément de Y comme seconde composante.

Définition : Produit cartésien

Soient X et Y deux ensembles. Le **produit cartésien** de X par Y , noté $X \times Y$, est l'ensemble de tous les couples ordonnés (x, y) tels que $x \in X$ et $y \in Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ et } y \in Y\}.$$

Exemple 1 : Calcul d'un produit cartésien

Soient $X = \{1, 2\}$ et $Y = \{a, b, c\}$. Déterminons $X \times Y$.

Solution :

On forme tous les couples possibles en prenant un élément de X et un élément de Y .

$$X \times Y = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}.$$

Notez que $X \times Y$ contient $2 \times 3 = 6$ éléments.

Point de contrôle 1

Soient $A = \{0, 1\}$ et $B = \{x, y\}$. Déterminez $A \times B$ et $B \times A$. Sont-ils égaux ?

Attention

En général, $X \times Y \neq Y \times X$. Le produit cartésien n'est pas commutatif.

Le saviez-vous ?

Le terme « produit cartésien » vient du mathématicien et philosophe français René Descartes (1596-1650), qui a inventé le système de coordonnées que nous utilisons encore aujourd'hui. Le produit cartésien permet de représenter des points dans le plan grâce à des couples ordonnés (x, y) .

1.3 Relations entre deux ensembles

Nous arrivons au cœur de cette section : la notion de **relation**. Intuitivement, une relation est un lien qui unit certains éléments d'un ensemble X à certains éléments d'un ensemble Y . Mathématiquement, une relation est simplement un sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y$.

Définition : Relation

Soient X et Y deux ensembles. Une **relation** R de X vers Y est un sous-ensemble de $X \times Y$. Si $(x, y) \in R$, on dit que x est **en relation** avec y et on note parfois xRy .

Exemple 2 : Relation définie par une condition

Soient $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On définit la relation R par :

$$R = \{(x, y) \in X \times Y : y = 2x\}.$$

Déterminons les éléments de R .

Solution :

On cherche tous les couples (x, y) tels que $y = 2x$, avec $x \in X$ et $y \in Y$.

- Si $x = 1$, alors $y = 2 \times 1 = 2$. Le couple $(1, 2)$ est dans R .
- Si $x = 2$, alors $y = 2 \times 2 = 4$. Le couple $(2, 4)$ est dans R .
- Si $x = 3$, alors $y = 2 \times 3 = 6$. Le couple $(3, 6)$ est dans R .
- Si $x = 4$, alors $y = 2 \times 4 = 8$. Mais $8 \notin Y$. Donc $(4, 8)$ n'est pas dans R .

Ainsi, $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$.

Point de contrôle 2

Soient $X = \{1, 2, 3\}$ et $Y = \{2, 4, 6, 8\}$. Définissez la relation R par $y = x + 1$. Listez les éléments de R .

1.4 Représentation d'une relation

Il existe plusieurs façons de représenter une relation. Les trois méthodes les plus courantes sont :

1. **Par liste de couples** : On énumère simplement tous les couples qui appartiennent à la relation. C'est la méthode que nous avons utilisée dans l'exemple 2.
2. **Par tableau** : On peut dresser un tableau à deux colonnes où la première colonne contient les éléments de X et la seconde les éléments correspondants de Y .
3. **Par diagramme sagittal** : On dessine deux ovales représentant les ensembles X et Y , et on trace une flèche de x vers y chaque fois que $(x, y) \in R$.

Exemple 3 : Représentation par diagramme sagittal

Reprenons la relation $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$ de l'exemple 2. Représentons-la par un diagramme sagittal.

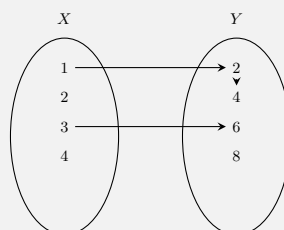


Fig. 1.1.

Analyse :

On observe que l'élément 4 de X n'a pas de flèche partant de lui. De même, l'élément 8 de Y ne reçoit aucune flèche. C'est tout à fait normal pour une relation : contrairement à une fonction, une relation n'a pas l'obligation de relier tous les éléments.

Point de contrôle 3

Représentez par un diagramme sagittal la relation $R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$ de $X = \{a, b, c\}$ vers $Y = \{1, 2, 3\}$.

1.5 Domaine et image d'une relation

Comme pour les fonctions, on peut définir le domaine et l'image d'une relation.

Définitions : Domaine et Image

Soit R une relation de X vers Y .

- Le **domaine** de R est l'ensemble des premières composantes des couples de R . C'est l'ensemble des $x \in X$ pour lesquels il existe au moins un $y \in Y$ tel que $(x, y) \in R$.
- L'**image** de R est l'ensemble des secondes composantes des couples de R . C'est l'ensemble des $y \in Y$ pour lesquels il existe au moins un $x \in X$ tel que $(x, y) \in R$.

Exemple 4 : Détermination du domaine et de l'image

Reprenons la relation $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$. Déterminons son domaine et son image.

Solution :

- Domaine de $R = \{1, 2, 3\}$ (les premières composantes).
- Image de $R = \{2, 4, 6\}$ (les secondes composantes).

Notez que 4 n'est pas dans le domaine (il n'apparaît pas comme première composante) et 8 n'est pas dans l'image (il n'apparaît pas comme seconde composante).

Point de contrôle 4

Soit $R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1)\}$. Déterminez le domaine et l'image de R .

1.6 Relation inverse

Étant donné une relation R de X vers Y , on peut définir une nouvelle relation en **inversant** les couples. C'est la **relation inverse**, notée R^{-1} .

Définition : Relation inverse

Soit R une relation de X vers Y . La **relation inverse** de R , notée R^{-1} , est la relation de Y vers X définie par :

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}.$$

Exemple 5 : Calcul d'une relation inverse

Soit $R = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$. Déterminons R^{-1} .

Solution :

On inverse simplement chaque couple :

$$R^{-1} = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3)\}.$$

Notez que le domaine de R^{-1} est l'image de R , et l'image de R^{-1} est le domaine de R .

Point de contrôle 5

Soit $R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3)\}$. Déterminez R^{-1} , son domaine et son image.

Le saviez-vous ?

Le concept de relation remonte à l'Antiquité, mais c'est au XIX^e siècle que les mathématiciens ont commencé à formaliser la notion de relation binaire. Aujourd'hui, les relations sont utilisées partout : dans les bases de données (où l'on parle de « tables de relations »), dans les réseaux sociaux (où l'on modélise les amitiés), et même en intelligence artificielle.

1.7 Exercices

1. Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$. Déterminez $A \times B$ et $B \times A$.
2. Soient $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $Y = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. On définit la relation R par $y = 2x + 1$. Listez les éléments de R .
3. Représentez par un diagramme sagittal la relation $R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, a)\}$ de $X = \{1, 2, 3\}$ vers $Y = \{a, b, c\}$.
4. Déterminez le domaine et l'image de la relation $R = \{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9)\}$.
5. Soit $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x + y = 5\}$. Listez les éléments de R .
6. Déterminez la relation inverse de $R = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$.

2 1.2 Fonctions

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, vous serez capable de :

- Définir une fonction comme un cas particulier de relation.
- Identifier le domaine, le co-domaine et l'image d'une fonction.
- Distinguer une fonction d'une relation quelconque.
- Représenter une fonction par un diagramme sagittal et par une formule.
- Déterminer si une relation donnée est une fonction.

Brève révision : Relations

Rappel : Une relation R de X vers Y est un sous-ensemble de $X \times Y$. Le domaine de R est l'ensemble des premières composantes des couples de R . L'image de R est l'ensemble des secondes composantes.

2.1 Définition d'une fonction

Nous avons vu qu'une relation est un lien quelconque entre deux ensembles. Une **fonction** est un cas particulier de relation, beaucoup plus restrictif.

Pensez à une machine distributrice. Vous insérez une pièce (l'entrée) et vous obtenez une boisson (la sortie). Si vous insérez la même pièce, vous obtenez toujours la même boisson. Une fonction fonctionne exactement de la même façon : chaque entrée produit **exactement une** sortie.

Définition : Fonction

Soient X et Y deux ensembles non vides. Une **fonction** f de X vers Y est une relation telle que :

1. Pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ tel que $(x, y) \in f$.
2. Deux couples différents ne peuvent pas avoir la même première composante.

On note $f : X \rightarrow Y$.

Différence clé entre relation et fonction

Une relation peut :

- laisser des éléments de X sans correspondant ;
- relier un élément de X à plusieurs éléments de Y .

Une fonction, elle, relie **chaque** élément de X à **exactement un** élément de Y .

Exemple 6 : Relation vs Fonction

Soient $X = \{1, 2, 3\}$ et $Y = \{a, b, c\}$.

- (a) $R_1 = \{(1, a), (2, b)\}$ est une relation mais pas une fonction (3 n'a pas d'image).
- (b) $R_2 = \{(1, a), (1, b), (2, c)\}$ est une relation mais pas une fonction (1 a deux images).
- (c) $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ est une fonction.

Point de contrôle 6

La relation $R = \{(1, x), (2, y), (3, z), (4, w)\}$ est-elle une fonction ? Justifiez.

2.2 Domaine, ensemble d'arrivée et image

Comme pour les relations, on peut définir le domaine et l'image d'une fonction. Mais on introduit également la notion d'**ensemble d'arrivée** (ou co-domaine).

Définitions

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction.

- X est le **domaine** de f (les entrées possibles).
- Y est l'**ensemble d'arrivée** (ou co-domaine) de f (les sorties potentielles).
- L'**image** de f est l'ensemble des images effectives des éléments du domaine :

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\}.$$

Attention

L'image de f est toujours un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée. Elle peut être égale à l'ensemble d'arrivée, ou n'en être qu'une partie.

Exemple 7 : Domaine

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.

- Domaine : $\mathbb{R}$.
- Ensemble d'arrivée : $\mathbb{R}$.
- Image : $[0, +\infty[$ (car un carré est toujours positif ou nul).

Point de contrôle 7

Soit $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6, 7\}$ définie par $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(3) = 6$. Quel est le domaine ? L'ensemble d'arrivée ? L'image ?

2.3 Représentation d'une fonction

Une fonction peut être représentée de plusieurs façons :

1. **Liste de couples** : $f = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$.
2. **Diagramme sagittal** : Chaque élément du domaine a exactement une flèche.
3. **Formule** : $f(x) = 2x + 1$.
4. **Graphique** : Dans un repère, l'ensemble des points $(x, f(x))$.

Exemple 8 : Représentation par diagramme sagittal

Soit $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ définie par $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = b$. Représentons f par un diagramme sagittal.

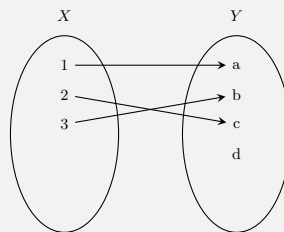


Fig. 1.2.

Analyse :

On observe que chaque élément de $\{1, 2, 3\}$ a exactement une flèche partant de lui. C'est bien une fonction. Notez que l'élément d de l'ensemble d'arrivée n'est pas atteint : l'image est $\{a, b, c\}$.

Point de contrôle 8

Représentez par un diagramme sagittal la fonction $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c\}$ définie par $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = a$, $f(4) = c$.

Le saviez-vous ?

Le concept de fonction remonte au XVII^e siècle. Gottfried Wilhelm Leibniz fut le premier à utiliser le terme « fonction » en 1694 pour décrire une courbe. Aujourd'hui, les fonctions sont au cœur de l'informatique, de l'ingénierie et même de l'intelligence artificielle.

2.4 Fonctions réelles

Une **fonction réelle** est une fonction dont le domaine et l'ensemble d'arrivée sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$. La plupart des fonctions que nous étudions sont réelles.

Définition : Fonction réelle

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite **réelle** si $X \subseteq \mathbb{R}$ et $Y \subseteq \mathbb{R}$.

Exemple 9 : Reconnaître une fonction réelle

$f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction réelle de domaine $[0, +\infty[$ et d'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}$.

Point de contrôle 9

La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est-elle une fonction réelle ? Quel est son domaine ?

2.5 Exercices

1. Parmi les relations suivantes, lesquelles sont des fonctions ?
 - (i) $\{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$

- (ii) $\{(1,2), (1,3), (2,4)\}$
 - (iii) $\{(1,5), (2,5), (3,5)\}$
2. Déterminez le domaine et l'image de la fonction $f = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$.
 3. Représentez par un diagramme sagittal la fonction $f : \{1,2,3\} \rightarrow \{a,b,c,d\}$ définie par $f(1) = a$, $f(2) = c$, $f(3) = b$.
 4. Soit $f(x) = 3x - 2$. Calculez $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$ et $f(2)$.
 5. La relation $R = \{(1,a), (2,b), (3,c), (4,d)\}$ est-elle une fonction ? Justifiez.
 6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$. Quel est le domaine ? L'ensemble d'arrivée ? L'image ?

3 1.3 Fonctions réelles

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, vous serez capable de :

- Définir une fonction à valeur réelle.
- Effectuer des opérations algébriques sur des fonctions réelles (somme, différence, produit, quotient).
- Déterminer le domaine d'une fonction définie par une formule.
- Reconnaître les fonctions particulières (constante, linéaire, carrée, inverse, racine).
- Calculer des images et résoudre des équations fonctionnelles simples.

Brève révision : Fonctions

Rappel : Une fonction $f : X \rightarrow Y$ associe à chaque $x \in X$ un unique $y \in Y$, noté $f(x)$. Le domaine est X , l'ensemble d'arrivée est Y , et l'image est l'ensemble des $f(x)$ effectivement atteints.

3.1 Fonctions définies sur les nombres réels

Dans la pratique, la plupart des fonctions que nous manipulons sont des **fonctions réelles** : leur domaine et leur ensemble d'arrivée sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}$.

Sauf indication contraire, lorsqu'on écrit $f(x) = 2x + 1$, on sous-entend que le domaine est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'expression a un sens.

Définition : Fonction à valeur réelle

Une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, où $D \subseteq \mathbb{R}$, est appelée une **fonction à valeur réelle** (ou simplement fonction réelle). L'ensemble D est son domaine.

3.2 Détermination du domaine

Le **domaine** d'une fonction réelle définie par une formule est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels $f(x)$ est calculable. On doit donc exclure :

- les valeurs qui annulent un **dénominateur** ;
- les valeurs qui rendent une **racine carrée** négative ;
- les valeurs qui rendent l'argument d'un **logarithme** négatif ou nul.

Règles pour déterminer le domaine

1. **Fonction polynôme** : $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$. Domaine : $\mathbb{R}$.
2. **Fonction rationnelle** : $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Domaine : $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$.
3. **Fonction racine carrée** : $f(x) = \sqrt{P(x)}$. Domaine : $\{x \in \mathbb{R} : P(x) \geq 0\}$.
4. **Fonction logarithme** : $f(x) = \ln(P(x))$. Domaine : $\{x \in \mathbb{R} : P(x) > 0\}$.

Exemple 10 : Domaine d'une fonction rationnelle

Déterminons le domaine de $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

Solution :

Le dénominateur s'annule lorsque $x - 2 = 0$, c'est-à-dire $x = 2$.

Donc le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, c'est-à-dire tous les réels sauf 2.

Point de contrôle 10

Déterminez le domaine de $f(x) = \frac{3x+1}{x+5}$.

Exemple 11 : Domaine d'une fonction avec racine carrée

Déterminons le domaine de $f(x) = \sqrt{x-3}$.

Solution :

Sous la racine, il faut $x-3 \geq 0$, donc $x \geq 3$.

Le domaine est $[3, +\infty[$.

Point de contrôle 11

Déterminez le domaine de $f(x) = \sqrt{2x+4}$.

Attention

Pour une fonction rationnelle, il ne suffit pas de simplifier l'expression. Par exemple, pour $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, on pourrait écrire $f(x) = x+1$, mais $x=1$ reste exclu du domaine car le dénominateur d'origine s'annule. Le domaine est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3.3 Détermination de l'image

L'**image** d'une fonction est l'ensemble des valeurs effectivement atteintes par $f(x)$ lorsque x parcourt le domaine.

Méthode pour déterminer l'image

1. On pose $y = f(x)$.
2. On cherche pour quelles valeurs de y l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution x dans le domaine.
3. L'ensemble de ces y constitue l'image.

Exemple 12 : Détermination de l'image d'une fonction carrée

Déterminons l'image de $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$.

Solution :

Un carré est toujours positif ou nul, donc $f(x) \geq 0$.

De plus, pour tout $y \geq 0$, il existe $x = \sqrt{y}$ tel que $f(x) = y$.

Donc l'image est $[0, +\infty[$.

Point de contrôle 12

Déterminez l'image de $f(x) = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 13 : Image d'une fonction racine carrée

Déterminons l'image de $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.

Solution :

Une racine carrée est toujours positive ou nulle, donc $f(x) \geq 0$.

De plus, pour tout $y \geq 0$, il existe $x = y^2$ tel que $f(x) = y$.

Donc l'image est $[0, +\infty[$.

Point de contrôle 13

Déterminez l'image de $f(x) = \sqrt{x-2}$ sur $[2, +\infty[$.

3.4 Calcul d'images

Pour calculer $f(a)$, on remplace simplement x par a dans l'expression de f .

Exemple 14 : Calcul d'images

Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Calculons $f(2)$.

Solution :

$$f(2) = 2(2)^2 - 3(2) + 1 = 2 \times 4 - 6 + 1 = 8 - 6 + 1 = 3.$$

Point de contrôle 14

Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. Calculez $f(0)$, $f(-1)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exemple 15 : Calcul d'images avec une expression plus complexe

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Calculons $f(3)$ et $f(-1)$.

Solution :

$$f(3) = \frac{3+1}{3-2} = \frac{4}{1} = 4.$$

$$f(-1) = \frac{-1+1}{-1-2} = \frac{0}{-3} = 0.$$

Point de contrôle 15

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Calculez $f(0)$ et $f(4)$.

3.5 Algèbre des fonctions réelles

Étant donné deux fonctions réelles f et g , on peut définir de nouvelles fonctions par addition, soustraction, multiplication et division.

Opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions de domaine respectif D_f et D_g .

- **Somme :** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, de domaine $D_f \cap D_g$.
- **Différence :** $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, de domaine $D_f \cap D_g$.
- **Produit :** $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$, de domaine $D_f \cap D_g$.
- **Quotient :** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, de domaine $(D_f \cap D_g) \setminus \{x : g(x) = 0\}$.

Exemple 16 : Opérations sur les fonctions

Soient $f(x) = x+1$ et $g(x) = x^2$. Calculons $f+g$, $f-g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$.

Solution :

- $(f+g)(x) = x+1+x^2 = x^2+x+1$.
- $(f-g)(x) = x+1-x^2 = -x^2+x+1$.
- $(f \times g)(x) = (x+1) \times x^2 = x^3+x^2$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+1}{x^2}$, avec $x \neq 0$.

Point de contrôle 16

Soient $f(x) = 2x$ et $g(x) = x-3$. Calculez $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$ et $(f \times g)(x)$.

Attention

Pour le quotient $\frac{f}{g}$, il faut $g(x) \neq 0$. On exclut donc du domaine les valeurs qui annulent $g(x)$, même si $f(x)$ est défini.

3.6 Fonctions particulières

Voici les fonctions réelles les plus courantes, à connaître par cœur.

Fonctions particulières

1. **Fonction constante :** $f(x) = c$. Domaine : $\mathbb{R}$. Image : $\{c\}$.
2. **Fonction identité :** $f(x) = x$. Domaine : $\mathbb{R}$. Image : $\mathbb{R}$.
3. **Fonction affine (linéaire) :** $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$. Domaine : $\mathbb{R}$. Image : $\mathbb{R}$.
4. **Fonction carrée :** $f(x) = x^2$. Domaine : $\mathbb{R}$. Image : $[0, +\infty[$.
5. **Fonction cube :** $f(x) = x^3$. Domaine : $\mathbb{R}$. Image : $\mathbb{R}$.
6. **Fonction inverse :** $f(x) = \frac{1}{x}$. Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Image : $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
7. **Fonction racine carrée :** $f(x) = \sqrt{x}$. Domaine : $[0, +\infty[$. Image : $[0, +\infty[$.
8. **Fonction valeur absolue :** $f(x) = |x|$. Domaine : $\mathbb{R}$. Image : $[0, +\infty[$.

Exemple 17 : Reconnaître une fonction particulière

Identifions la nature de chaque fonction :

- (a) $f(x) = 5$ est une fonction **constante**.
- (b) $g(x) = 3x - 2$ est une fonction **affine** (linéaire).
- (c) $h(x) = x^2 + 1$ est une fonction **carrée** (avec un décalage).
- (d) $k(x) = \frac{1}{x+1}$ est une fonction **inverse** (avec un décalage).

Point de contrôle 17

Identifiez la nature des fonctions suivantes :

- (a) $f(x) = -7$
- (b) $g(x) = 2x$
- (c) $h(x) = \sqrt{x+3}$
- (d) $k(x) = |x-1|$

Le saviez-vous ?

La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Elle est utilisée en physique pour mesurer des distances (qui sont toujours positives) et en informatique pour calculer des écarts entre valeurs.

3.7 Exercices

- Déterminez le domaine de $f(x) = \frac{1}{x-5}$.
- Déterminez le domaine de $f(x) = \sqrt{2x+4}$.
- Déterminez le domaine de $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.
- Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Calculez $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$.
- Soit $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$. Calculez $f(0)$, $f(2)$, $f(-3)$.
- Déterminez l'image de $f(x) = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.
- Déterminez l'image de $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$.
- Soient $f(x) = 3x$ et $g(x) = x + 2$. Calculez $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \times g)(x)$ et $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$.
- Déterminez le domaine de $\frac{f}{g}$ où $f(x) = x$ et $g(x) = x - 1$.
- Identifiez la nature des fonctions suivantes :
 - (i) $f(x) = 4$
 - (ii) $g(x) = -2x + 1$
 - (iii) $h(x) = x^2 - 3$
 - (iv) $k(x) = \frac{1}{x}$

4 1.4 Classification des fonctions

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, vous serez capable de :

- Définir une fonction injective (one-one).
- Définir une fonction surjective (onto).
- Définir une fonction bijective (one-one onto).
- Reconnaître si une fonction est injective, surjective ou bijective.
- Démontrer qu'une fonction est injective ou surjective par le calcul.

Brève révision : Fonctions

Rappel : Une fonction $f : X \rightarrow Y$ associe à chaque $x \in X$ un unique $y \in Y$. Le domaine est X , l'ensemble d'arrivée est Y , et l'image $f(X)$ est l'ensemble des valeurs effectivement atteintes.

4.1 Fonctions injectives (one-one)

Une fonction est **injective** si deux éléments différents du domaine ont toujours deux images différentes. Autrement dit, il est impossible que deux entrées distinctes produisent la même sortie.

Définition : Fonction injective

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est **injective** (ou **one-one**) si pour tous $x_1, x_2 \in X$:

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

De manière équivalente :

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

Comment reconnaître une fonction injective ?

- **Sur un diagramme sagittal** : aucune image n'est atteinte par deux flèches différentes.
- **Sur un graphique** : toute droite horizontale coupe le graphique en au plus un point (test de la droite horizontale).
- **Par le calcul** : on suppose $f(x_1) = f(x_2)$ et on montre que $x_1 = x_2$.

Exemple 18 : Fonction injective

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$. Montrons que f est injective.

Solution :

Supposons $f(x_1) = f(x_2)$.

Alors $2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$.

En soustrayant 1 des deux côtés : $2x_1 = 2x_2$.

En divisant par 2 : $x_1 = x_2$.

Donc f est injective.

Point de contrôle 18

Montrez que $f(x) = 3x - 5$ est injective.

Exemple 19 : Fonction non injective

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrons que f n'est pas injective.

Solution :

On remarque que $f(2) = 4$ et $f(-2) = 4$.

Donc $f(2) = f(-2)$ alors que $2 \neq -2$.

Par conséquent, f n'est pas injective.

Point de contrôle 19

La fonction $f(x) = |x|$ est-elle injective ? Justifiez.

4.2 Fonctions surjectives (onto)

Une fonction est **surjective** si chaque élément de l'ensemble d'arrivée est atteint par au moins un élément du domaine. Autrement dit, l'image de la fonction est égale à l'ensemble d'arrivée.

Définition : Fonction surjective

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est **surjective** (ou **onto**) si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$f(X) = Y.$$

Comment reconnaître une fonction surjective ?

- **Sur un diagramme sagittal** : chaque élément de l'ensemble d'arrivée reçoit au moins une flèche.
- **Par le calcul** : on prend un y quelconque dans l'ensemble d'arrivée et on cherche x tel que $f(x) = y$.

Exemple 20 : Fonction surjective

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$. Montrons que f est surjective.

Solution :

Soit $y \in \mathbb{R}$ (co-domaine). Cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.

On résout : $2x + 1 = y \implies 2x = y - 1 \implies x = \frac{y-1}{2}$.

Comme $y \in \mathbb{R}$, on a bien $x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$.

Donc pour tout y , il existe x tel que $f(x) = y$.

Par conséquent, f est surjective.

Point de contrôle 20

Montrez que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x - 5$ est surjective.

Exemple 21 : Fonction non surjective

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Montrons que f n'est pas surjective.

Solution :

Prenons $y = -1 \in \mathbb{R}$.

Existe-t-il $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = -1$?

Non, car un carré est toujours positif ou nul.

Donc -1 n'a pas d'antécédent dans $\mathbb{R}$.

Par conséquent, f n'est pas surjective.

Point de contrôle 21

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$ est-elle surjective ? Justifiez.

4.3 Fonctions bijectives (one-one onto)

Une fonction est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. C'est une correspondance parfaite entre le domaine et l'ensemble d'arrivée : chaque élément de X a une image unique dans Y , et chaque élément de Y a un antécédent unique dans X .

Définition : Fonction bijective

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est **bijective** (ou **one-one onto**) si elle est à la fois injective et surjective.

Conséquence importante

Si X et Y sont des ensembles finis et qu'il existe une bijection de X vers Y , alors X et Y ont le même nombre d'éléments : $n(X) = n(Y)$.

Exemple 22 : Fonction bijective

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 1$. Nous avons montré que f est injective (Exemple 18) et surjective (Exemple 20).

Donc f est bijective.

Point de contrôle 22

Montrez que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x - 5$ est bijective.

4.4 Reconnaître une fonction injective, surjective ou bijective

Voici un tableau récapitulatif pour vous aider à classer rapidement une fonction.

Tableau récapitulatif

Type	Condition	Sur un diagramme
Injective	$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$	Aucune image atteinte 2 fois
Surjective	$f(X) = Y$	Toute image est atteinte
Bijective	Injective + Surjective	Correspondance parfaite

Exemple 23 : Classification à partir d'un diagramme

Soient $X = \{a, b, c\}$ et $Y = \{1, 2, 3, 4\}$. On considère la fonction f représentée par le diagramme ci-dessous.

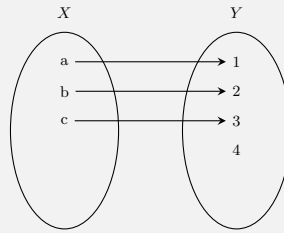


Fig. 1.3.

Analyse :

- **Injective ?** Oui, car chaque élément de X a une image différente.
- **Surjective ?** Non, car $4 \in Y$ n'est pas atteint.
- **Conclusion :** f est **injective mais non surjective**.

Point de contrôle 23

Soient $X = \{a, b, c, d\}$ et $Y = \{1, 2, 3\}$. On considère la fonction f représentée par le diagramme ci-dessous.

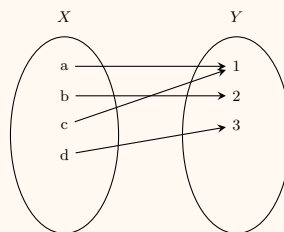


Fig. 1.4.

Cette fonction est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifiez.

Le saviez-vous ?

Le concept de bijection est fondamental en mathématiques. Il permet de comparer la « taille » des ensembles, même infinis. Par exemple, on dit qu'un ensemble est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. C'est ainsi que l'on montre que l'ensemble des entiers pairs a « autant » d'éléments que l'ensemble des entiers naturels, bien que cela paraisse contre-intuitif !

4.5 Exercices

1. Montrez que $f(x) = 4x - 3$ est injective.
2. Montrez que $f(x) = 4x - 3$ est surjective.
3. La fonction $f(x) = x^2$ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ est-elle injective ? Surjective ?
4. La fonction $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?
5. Donnez un exemple de fonction bijective de $\{1, 2, 3\}$ vers $\{a, b, c\}$.
6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 5x + 2$. Montrez que f est bijective.
7. La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est-elle bijective ? Justifiez.
8. Soient $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $Y = \{a, b, c\}$. On considère la fonction f représentée par le diagramme ci-dessous.

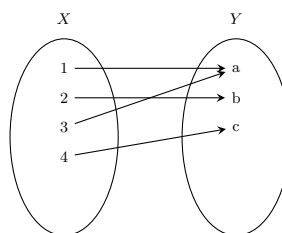


Fig. 1.5.

Cette fonction est-elle injective ? Surjective ? Bijective ? Justifiez.

9. Montrez que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est injective.
10. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ est-elle surjective ? Justifiez.

5 1.5 Graphique d'une fonction réelle

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, vous serez capable de :

- Construire le graphique d'une fonction réelle à partir d'un tableau de valeurs.
- Lire un graphique et extraire des informations (images, antécédents).
- Déterminer le domaine et l'image d'une fonction à partir de son graphique.
- Interpréter un graphique dans un contexte concret.

Brève révision : Repère du plan

Rappel : Un repère du plan est constitué de deux axes perpendiculaires : l'axe des abscisses (horizontal, noté x) et l'axe des ordonnées (vertical, noté y). Un point M du plan est repéré par ses coordonnées (x, y) , où x est l'abscisse et y est l'ordonnée.

5.1 Construction d'un graphique

Le **graphique** d'une fonction f est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x, f(x))$ lorsque x parcourt le domaine de f . Autrement dit, c'est la courbe représentative de la fonction dans le plan.

Pour construire le graphique d'une fonction, on peut procéder en trois étapes :

1. **Dresser un tableau de valeurs :** on choisit plusieurs valeurs de x dans le domaine et on calcule les images $f(x)$ correspondantes.
2. **Placer les points :** on place dans le repère les points de coordonnées $(x, f(x))$.
3. **Relier les points :** on relie les points par une courbe (droite, parabole, etc.) selon la nature de la fonction.

Définition : Graphique d'une fonction

Soit f une fonction de domaine D . Le **graphique** de f est l'ensemble :

$$G_f = \{(x, f(x)) : x \in D\}.$$

Exemple 24 : Construction du graphique d'une fonction affine

Construisons le graphique de la fonction $f(x) = 2x + 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Étape 1 : Tableau de valeurs.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-3	-1	1	3	5

Étape 2 : Placement des points.

On place les points $(-2, -3)$, $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$.

Étape 3 : Tracé.

On relie les points par une droite (car f est affine).

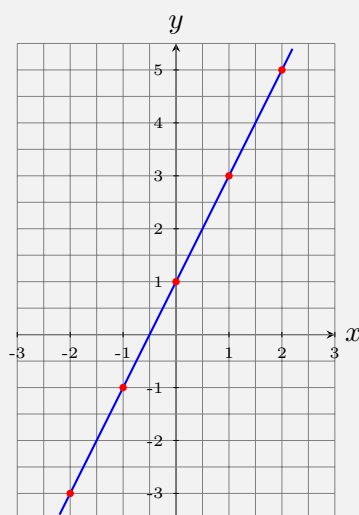


Fig. 1.6.

Analyse : La courbe obtenue est une droite passant par le point $(0, 1)$, qui est l'ordonnée à l'origine. Le coefficient directeur est 2, ce qui signifie que lorsque x augmente de 1, y augmente de 2.

Point de contrôle 24

Construisez le graphique de $f(x) = -x + 2$ pour $x \in [-2, 3]$.

Exemple 25 : Construction du graphique d'une fonction carrée

Construisons le graphique de $f(x) = x^2$ pour $x \in [-3, 3]$.

Étape 1 : Tableau de valeurs.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

Étape 2 et 3 : Placement et tracé.

On place les points et on les relie par une courbe en forme de « U » appelée **parabole**.

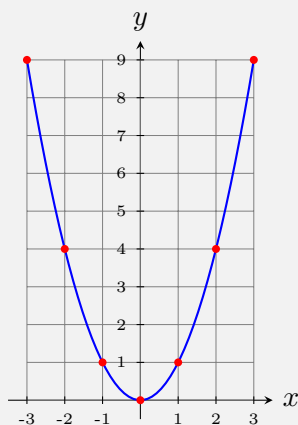


Fig. 1.7.

Analyse : La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Le point $(0,0)$ est le **sommet** de la parabole.

Point de contrôle 25

Construisez le graphique de $f(x) = x^2 - 1$ pour $x \in [-2, 2]$.

5.2 Lecture d'un graphique

Lire un graphique consiste à extraire des informations : pour une valeur de x donnée, quelle est l'image $f(x)$? Pour une valeur de y donnée, quels sont les antécédents?

Méthode : Lecture d'un graphique

- **Pour lire $f(a)$:** on place a sur l'axe des abscisses, on monte verticalement jusqu'au graphique, puis on lit l'ordonnée du point obtenu.
- **Pour trouver les antécédents de b :** on place b sur l'axe des ordonnées, on trace une horizontale jusqu'au graphique, puis on lit les abscisses des points d'intersection.

Exemple 26 : Lecture d'un graphique

On considère le graphique de la fonction f ci-dessous.

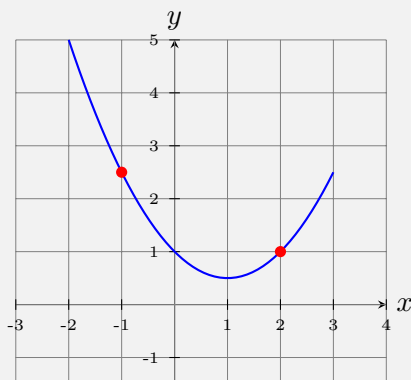


Fig. 1.8.

Questions :

- (a) Quelle est l'image de 2 ?
- (b) Quels sont les antécédents de 2,5 ?

Réponses :

- (a) On place 2 sur l'axe des abscisses, on monte jusqu'au graphique, on lit l'ordonnée : $f(2) = 1$.
- (b) On place 2,5 sur l'axe des ordonnées, on trace une horizontale, on lit les abscisses des points d'intersection : $x = -1$ et $x = 3$.

Point de contrôle 26

À partir du graphique de l'exemple 26, déterminez $f(0)$ et les antécédents de 1.

5.3 Domaine et image à partir d'un graphique

On peut déterminer le domaine et l'image d'une fonction en observant son graphique.

Lecture graphique du domaine et de l'image

- Le **domaine** est l'ensemble des abscisses des points du graphique. On le lit en projetant le graphique sur l'axe des x .
- L'**image** est l'ensemble des ordonnées des points du graphique. On le lit en projetant le graphique sur l'axe des y .

Exemple 27 : Domaine et image à partir d'un graphique

On considère le graphique de $f(x) = \sqrt{x}$ ci-dessous.

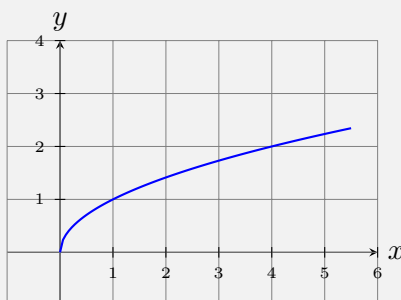


Fig. 1.9.

Analyse :

- Domaine : le graphique commence à $x = 0$ et va vers la droite. Donc le domaine est $[0, +\infty[$.
- Image : le graphique commence à $y = 0$ et monte. Donc l'image est $[0, +\infty[$.

Point de contrôle 27

À partir du graphique de $f(x) = x^2$ (Fig. 1.7), déterminez le domaine et l'image de f .

5.4 Interprétation graphique dans un contexte concret

Les graphiques permettent de visualiser l'évolution de phénomènes concrets : température, distance, coût, population, etc.

Exemple 28 : Interprétation d'un graphique concret

Le graphique ci-dessous représente la distance parcourue par un cycliste en fonction du temps.

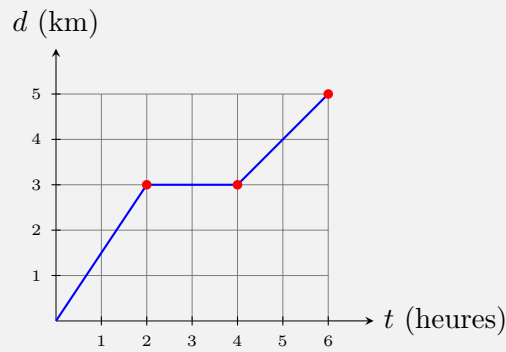


Fig. 1.10.

Questions :

- Quelle distance le cycliste a-t-il parcourue en 2 heures ?
- Que se passe-t-il entre 2 heures et 4 heures ?
- Quelle distance a-t-il parcourue au total en 6 heures ?

Réponses :

- $f(2) = 3$ km.
- Entre 2h et 4h, la distance reste constante à 3 km. Le cycliste fait une pause.
- $f(6) = 5$ km.

Point de contrôle 28

À partir du graphique de l'exemple 28, quelle est la vitesse du cycliste entre 4h et 6h ?

Le saviez-vous ?

Le mot « parabole » vient du grec *parabolē*, qui signifie « comparaison ». Les paraboles sont utilisées dans la vie courante : les antennes paraboliques, les projecteurs de voiture, ou encore la trajectoire d'un ballon lancé en l'air suivent une forme parabolique.

5.5 Exercices

- Construisez le graphique de $f(x) = 2x - 1$ pour $x \in [-2, 3]$.
- Construisez le graphique de $f(x) = x^2 - 2$ pour $x \in [-3, 3]$.
- Construisez le graphique de $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x \in [0, 9]$.
- À partir du graphique de $f(x) = x^2$ (Fig. 1.7), déterminez $f(2)$ et $f(-1)$.
- À partir du graphique de $f(x) = x^2$ (Fig. 1.7), quels sont les antécédents de 4 ?
- Déterminez le domaine et l'image de $f(x) = \sqrt{x}$ à partir de son graphique (Fig. 1.9).
- Construisez le graphique de $f(x) = |x|$ pour $x \in [-3, 3]$.
- Le graphique ci-dessous représente le coût de production de x objets. Déterminez le coût pour 3 objets et pour 5 objets.

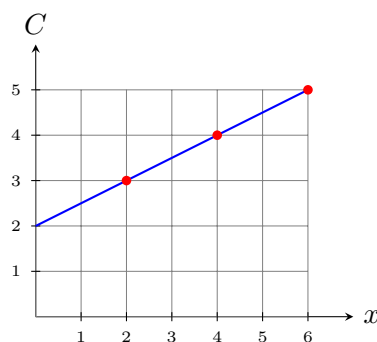


Fig. 1.11.

6 1.6 Fonctions composées

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, vous serez capable de :

- Définir la composition de deux fonctions.
- Utiliser la notation $f \circ g$.
- Calculer une fonction composée à partir de deux fonctions données.
- Déterminer le domaine d'une fonction composée.
- Reconnaître les propriétés de la composition (non-commutativité, associativité).

Brève révision : Fonctions

Rappel : Une fonction $f : X \rightarrow Y$ associe à chaque $x \in X$ un unique $y \in Y$. On note $y = f(x)$. Le domaine est X , l'image est $f(X)$.

6.1 Définition d'une fonction composée

Imaginez une chaîne de production : une première machine transforme une matière première en produit semi-fini, puis une seconde machine transforme ce produit semi-fini en produit fini. La **composition de fonctions** fonctionne exactement de la même façon : on applique d'abord une fonction g à x , puis on applique une fonction f au résultat.

Définition : Fonction composée

Soient f et g deux fonctions. La **composée** de f et g , notée $f \circ g$ (lire « f rond g »), est la fonction définie par :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

On applique d'abord g à x , puis on applique f au résultat.

Attention à l'ordre !

L'ordre est important : $f \circ g$ signifie « d'abord g , puis f ». En général, $f \circ g \neq g \circ f$. La composition n'est pas commutative.

Exemple 29 : Calcul d'une fonction composée

Soient $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$. Calculons $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solution :

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$.
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.

On observe que $f \circ g \neq g \circ f$: les deux composées sont différentes.

Point de contrôle 29

Soient $f(x) = x + 3$ et $g(x) = 2x$. Calculez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.

6.2 Calcul d'une fonction composée

Pour calculer une fonction composée en un point donné, il suffit d'appliquer les fonctions dans le bon ordre.

Exemple 30 : Calcul d'une composée en un point

Soient $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2$. Calculons $(f \circ g)(2)$ et $(g \circ f)(2)$.

Solution :

- $(f \circ g)(2) = f(g(2))$.
Calculons d'abord $g(2)$: $g(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$.
Puis $f(g(2)) = f(6) = 3 \times 6 - 1 = 18 - 1 = 17$.
Donc $(f \circ g)(2) = 17$.
- $(g \circ f)(2) = g(f(2))$.
Calculons d'abord $f(2)$: $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 6 - 1 = 5$.
Puis $g(f(2)) = g(5) = 5^2 + 2 = 25 + 2 = 27$.
Donc $(g \circ f)(2) = 27$.

Notez bien que $(f \circ g)(2) \neq (g \circ f)(2)$.

Point de contrôle 30

Soient $f(x) = 2x$ et $g(x) = x - 3$. Calculez $(f \circ g)(5)$ et $(g \circ f)(5)$.

6.3 Domaine d'une fonction composée

Le domaine de $f \circ g$ n'est pas simplement le domaine de f ou de g . Il faut que les deux conditions suivantes soient remplies :

1. x appartient au domaine de g (sinon $g(x)$ n'existe pas).
2. $g(x)$ appartient au domaine de f (sinon $f(g(x))$ n'existe pas).

Domaine de $f \circ g$

Le domaine de $f \circ g$ est l'ensemble des x tels que :

$$x \in D_g \quad \text{et} \quad g(x) \in D_f.$$

Autrement dit :

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}.$$

Exemple 31 : Domaine d'une fonction composée

Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x - 3$. Déterminons le domaine de $f \circ g$.

Solution :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x - 3) = \sqrt{x - 3}.$$

Pour que cette expression existe, il faut $x - 3 \geq 0$, donc $x \geq 3$.

Le domaine de $f \circ g$ est donc $[3, +\infty[$.

Point de contrôle 31

Soient $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x - 2$. Déterminez le domaine de $f \circ g$.

Exemple 32 : Domaine plus complexe

Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \frac{1}{x-1}$. Déterminons le domaine de $f \circ g$.

Solution :

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \sqrt{\frac{1}{x-1}}.$$

Conditions :

- $x \neq 1$ (dénominateur de g non nul).
- $\frac{1}{x-1} \geq 0$ (argument de la racine positive ou nulle).

$$\frac{1}{x-1} \geq 0 \iff x - 1 > 0 \iff x > 1.$$

Donc le domaine est $]1, +\infty[$.

Point de contrôle 32

Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 - 4$. Déterminez le domaine de $f \circ g$.

6.4 Propriétés de la composition

Propriétés de la composition

1. **Non-commutativité** : En général, $f \circ g \neq g \circ f$.
2. **Associativité** : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
3. **Élément neutre** : La fonction identité $I(x) = x$ vérifie :

$$f \circ I = I \circ f = f.$$

4. **Composition et injectivité** : Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.
5. **Composition et surjectivité** : Si f et g sont surjectives, alors $f \circ g$ est surjective.

Exemple 33 : Vérification de l'associativité

Soient $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x$, $h(x) = x^2$. Vérifions que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.

Solution :

- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 2x + 1$.
- $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)(h(x)) = (f \circ g)(x^2) = 2x^2 + 1$.
- $(g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(x^2) = 2x^2$.
- $(f \circ (g \circ h))(x) = f((g \circ h)(x)) = f(2x^2) = 2x^2 + 1$.

Les deux expressions sont égales. L'associativité est vérifiée.

Point de contrôle 33

Soient $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = 2x$. Calculez $(f \circ g) \circ h$ et $f \circ (g \circ h)$.

Le saviez-vous ?

La composition de fonctions est partout en informatique. Par exemple, dans un tableur, une formule comme `=ARRONDI(SOMME(A1:A10), 2)` est une composition : on applique d'abord la fonction `SOMME`, puis la fonction `ARRONDI`. En programmation, les fonctions d'ordre supérieur (comme `map` ou `filter`) reposent aussi sur la composition.

6.5 Exercices

1. Soient $f(x) = 3x$ et $g(x) = x + 1$. Calculez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.
2. Soient $f(x) = x^2$ et $g(x) = 2x - 1$. Calculez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.
3. Soient $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x^2$. Calculez $(f \circ g)(2)$ et $(g \circ f)(2)$.
4. Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x - 4$. Déterminez le domaine de $f \circ g$.
5. Soient $f(x) = \frac{1}{x}$ et $g(x) = x + 1$. Déterminez le domaine de $f \circ g$.
6. Soient $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$, $h(x) = 3x$. Vérifiez que $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
7. Soient $f(x) = 3x - 1$ et $g(x) = x^2 + 2$. Calculez $(f \circ g)(0)$ et $(g \circ f)(0)$.
8. Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 - 9$. Déterminez le domaine de $f \circ g$.
9. Soient $f(x) = x + 2$ et $g(x) = x - 2$. Calculez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$. Que remarquez-vous ?
10. Soient $f(x) = 2x$ et $g(x) = \frac{x}{2}$. Calculez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$. Que remarquez-vous ?

7 1.7 Fonctions inversibles

Objectifs d'apprentissage

À la fin de cette section, vous serez capable de :

- Définir une fonction inversible (bijective).
- Déterminer la fonction inverse d'une fonction donnée.
- Vérifier qu'une fonction est l'inverse d'une autre.
- Déterminer le domaine et l'image d'une fonction inverse.
- Reconnaître les propriétés de la fonction inverse.

Brève révision : Fonctions bijectives

Rappel : Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est **bijective** si elle est à la fois injective (chaque élément de Y a au plus un antécédent) et surjective (chaque élément de Y a au moins un antécédent). Une bijection est une correspondance parfaite entre X et Y .

7.1 Définition d'une fonction inversible

Imaginez que vous marchez d'un point A à un point B. Si vous pouvez revenir de B à A en suivant exactement le même chemin en sens inverse, alors votre trajet est « inversible ». Une fonction inversible fonctionne de la même façon : elle permet de « revenir en arrière » à partir de l'image pour retrouver l'antécédent.

Mathématiquement, pour qu'une fonction soit inversible, il faut qu'elle soit **bijective**. En effet :

- L'**injectivité** garantit que chaque image a **au plus un** antécédent.
- La **surjectivité** garantit que chaque image a **au moins un** antécédent.

En combinant les deux, chaque image a **exactement un** antécédent. On peut donc définir une nouvelle fonction qui, à chaque image, associe son unique antécédent.

Définition : Fonction inversible et fonction inverse

Soit $f : X \rightarrow Y$ une fonction **bijective**. On appelle **fonction inverse** de f , notée f^{-1} , la fonction de Y vers X définie par :

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

On a alors :

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{pour tout } x \in X,$$

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \text{pour tout } y \in Y.$$

Attention à la notation

Ne confondez pas $f^{-1}(x)$ avec $\frac{1}{f(x)}$. La notation f^{-1} désigne la **fonction inverse**, tandis que $\frac{1}{f(x)}$ désigne l'**inverse multiplicatif**. Ce sont deux notions complètement différentes.

Exemple 34 : Vérification d'une fonction inverse

Soient $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = \frac{x-1}{2}$. Vérifions que g est l'inverse de f .

Solution :

Calculons $g(f(x))$:

$$g(f(x)) = g(2x + 1) = \frac{(2x + 1) - 1}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

Calculons $f(g(x))$:

$$f(g(x)) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = 2 \times \frac{x-1}{2} + 1 = (x-1) + 1 = x.$$

On a bien $g(f(x)) = x$ et $f(g(x)) = x$.

Donc $g = f^{-1}$.

Point de contrôle 34

Soient $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = \frac{x+5}{3}$. Vérifiez que $g = f^{-1}$.

7.2 Calcul de la fonction inverse

Pour déterminer la fonction inverse d'une fonction f , on suit la méthode suivante :

Méthode : Calcul de f^{-1}

1. Écrire $y = f(x)$.
2. Résoudre cette équation pour exprimer x en fonction de y .
3. Échanger x et y (ou renommer y en x) pour obtenir $f^{-1}(x)$.

Exemple 35 : Calcul d'une fonction inverse

Soit $f(x) = 2x + 1$. Déterminons $f^{-1}(x)$.

Étape 1 : Posons $y = 2x + 1$.

Étape 2 : Résolvons pour x :

$$y = 2x + 1 \implies 2x = y - 1 \implies x = \frac{y-1}{2}.$$

Étape 3 : Échangeons x et y :

$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}.$$

Point de contrôle 35

Soit $f(x) = 3x - 5$. Déterminez $f^{-1}(x)$.

Exemple 36 : Fonction inverse d'une fonction carrée (avec restriction)

Soit $f(x) = x^2$ définie sur $[0, +\infty[$. Déterminons $f^{-1}(x)$.

Solution :

La fonction $f(x) = x^2$ restreinte à $[0, +\infty[$ est bijective (elle est strictement croissante et son image est $[0, +\infty[$).

Étape 1 : Posons $y = x^2$, avec $x \geq 0$.

Étape 2 : Résolvons pour x :

$$x = \sqrt{y} \quad (\text{car } x \geq 0).$$

Étape 3 : Échangeons x et y :

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Le domaine de f^{-1} est $[0, +\infty[$ et son image est $[0, +\infty[$.

Point de contrôle 36

Soit $f(x) = x^2$ définie sur $] -\infty, 0]$. Déterminez $f^{-1}(x)$.

Exemple 37 : Fonction inverse d'une fonction rationnelle

Soit $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Déterminons $f^{-1}(x)$.

Étape 1 : Posons $y = \frac{x+1}{x-2}$.

Étape 2 : Résolvons pour x :

$$y(x-2) = x+1 \implies yx - 2y = x+1.$$

Regroupons les termes en x :

$$yx - x = 2y + 1 \implies x(y-1) = 2y+1 \implies x = \frac{2y+1}{y-1}.$$

Étape 3 : Échangeons x et y :

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

Le domaine de f^{-1} est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ (valeur qui annule le dénominateur).

Point de contrôle 37

Soit $f(x) = \frac{2x}{x+3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. Déterminez $f^{-1}(x)$.

7.3 Domaine et image d'une fonction inverse

Une propriété fondamentale de la fonction inverse est que son domaine et son image sont « échangés » par rapport à la fonction d'origine.

Propriété : Domaine et image de f^{-1}

Si $f : X \rightarrow Y$ est bijective, alors :

$$D_{f^{-1}} = \text{Image de } f = Y,$$

$$\text{Image de } f^{-1} = D_f = X.$$

Autrement dit, le domaine de f^{-1} est l'image de f , et l'image de f^{-1} est le domaine de f .

Exemple 38 : Domaine et image d'une fonction inverse

Reprenons $f(x) = 2x+1$, de domaine $\mathbb{R}$ et d'image $\mathbb{R}$. Alors $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$ a pour domaine $\mathbb{R}$ et pour image $\mathbb{R}$.

Point de contrôle 38

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ de domaine $[0, +\infty[$ et d'image $[0, +\infty[$. Quel est le domaine de f^{-1} ? Quelle est son image?

Exemple 39 : Domaine non trivial

Soit $f(x) = x^2$ définie sur $[0, +\infty[$. Alors $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

— Domaine de $f^{-1} = [0, +\infty[$ (image de f).

— Image de $f^{-1} = [0, +\infty[$ (domaine de f).

Point de contrôle 39

Soit $f(x) = 3x - 2$, de domaine $\mathbb{R}$ et d'image $\mathbb{R}$. Quel est le domaine de f^{-1} ? Quelle est son image?

7.4 Propriétés de la fonction inverse

Propriétés de f^{-1} **1. Composition réciproque :**

$$f^{-1} \circ f = I_X \quad \text{et} \quad f \circ f^{-1} = I_Y,$$

où I_X et I_Y sont les fonctions identités sur X et Y .

2. Involutivité : La fonction inverse de f^{-1} est f :

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

3. Bijectivité : Si f est bijective, alors f^{-1} est bijective.**4. Symétrie graphique :** Les graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.**Exemple 40 : Vérification de la symétrie graphique**

Soit $f(x) = 2x + 1$. Alors $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$. Les graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

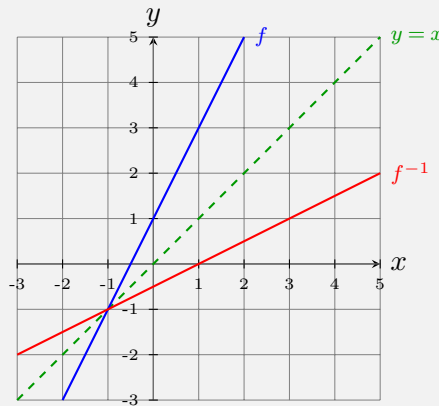


Fig. 1.12.

Analyse : On observe bien la symétrie par rapport à la droite $y = x$ (en vert pointillé).

Point de contrôle 40

Soit $f(x) = 3x - 2$. Déterminez $f^{-1}(x)$ et vérifiez que $(f^{-1})^{-1} = f$.

Le saviez-vous ?

La notion de fonction inverse est utilisée partout : en cryptographie (pour décoder un message), en physique (pour inverser une relation entre deux grandeurs), et même en informatique (les fonctions de hachage sont conçues pour être *non inversibles*, ce qui les rend utiles pour stocker des mots de passe). La symétrie par rapport à la droite $y = x$ est un outil visuel très puissant pour comprendre l'inverse.

7.5 Exercices

1. Soit $f(x) = 4x + 3$. Déterminez $f^{-1}(x)$.
2. Soit $f(x) = 2x - 7$. Déterminez $f^{-1}(x)$.
3. Soit $f(x) = \frac{x+3}{2}$. Déterminez $f^{-1}(x)$.
4. Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Déterminez $f^{-1}(x)$. Que remarquez-vous?
5. Soit $f(x) = x^3$. Déterminez $f^{-1}(x)$.
6. Soit $f(x) = \sqrt{x-1}$ définie sur $[1, +\infty[$. Déterminez $f^{-1}(x)$ et son domaine.
7. Soient $f(x) = 5x - 2$ et $g(x) = \frac{x+2}{5}$. Vérifiez que $g = f^{-1}$.
8. Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. Déterminez $f^{-1}(x)$ et son domaine.
9. Soit $f(x) = x^2$ définie sur $[0, +\infty[$. Déterminez $f^{-1}(x)$ et précisez son domaine et son image.
10. Soit $f(x) = 2x + 1$. Représentez graphiquement f et f^{-1} dans le même repère. Que remarquez-vous?

8 Synthèse du chapitre 1

8.1 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons exploré les notions fondamentales de relations et de fonctions. Voici une vue d'ensemble des concepts clés :

Ce que vous devez retenir

1. **Relation** : Un sous-ensemble du produit cartésien $X \times Y$. Une relation peut relier un élément de X à zéro, un ou plusieurs éléments de Y .
2. **Fonction** : Un cas particulier de relation où chaque élément de X est relié à **exactement un** élément de Y .
3. **Domaine, co-domaine, image** : Le domaine est l'ensemble des entrées, le co-domaine est l'ensemble des sorties potentielles, et l'image est l'ensemble des sorties effectives.
4. **Fonction injective (one-one)** : Des entrées différentes donnent des sorties différentes.
5. **Fonction surjective (onto)** : Chaque élément du co-domaine est atteint par au moins une entrée.
6. **Fonction bijective** : À la fois injective et surjective.
7. **Fonction composée** : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. L'ordre est important : $f \circ g \neq g \circ f$.
8. **Fonction inverse** : Si f est bijective, on peut définir f^{-1} telle que $f^{-1}(f(x)) = x$ et $f(f^{-1}(x)) = x$.

8.2 Définitions essentielles

Définitions à connaître par cœur

1. **Couple ordonné** : (x, y) où x est la première composante et y la seconde. $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \iff x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$.
2. **Produit cartésien** : $X \times Y = \{(x, y) : x \in X \text{ et } y \in Y\}$.
3. **Relation** : Tout sous-ensemble de $X \times Y$.
4. **Fonction** : Relation telle que chaque $x \in X$ a exactement une image $y \in Y$.
5. **Domaine** : L'ensemble X des entrées.
6. **Co-domaine** : L'ensemble Y des sorties potentielles.
7. **Image** : $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.
8. **Fonction injective** : $x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$.
9. **Fonction surjective** : $f(X) = Y$.
10. **Fonction bijective** : Injective et surjective.
11. **Composée** : $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.
12. **Inverse** : $f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$.

8.3 Propriétés à retenir

Propriétés fondamentales

1. **Non-commutativité du produit cartésien** : $X \times Y \neq Y \times X$ en général.
2. **Nombre d'éléments** : Si $n(X) = m$ et $n(Y) = n$, alors $n(X \times Y) = mn$.
3. **Lien entre domaine et image** : L'image de f est un sous-ensemble du co-domaine. Elle peut être égale au co-domaine, ou n'en être qu'une partie.
4. **Bijection et cardinalité** : Si X et Y sont finis et qu'il existe une bijection de X vers Y , alors $n(X) = n(Y)$.
5. **Non-commutativité de la composition** : $f \circ g \neq g \circ f$ en général.
6. **Associativité de la composition** : $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
7. **Élément neutre** : $f \circ I = I \circ f = f$, où $I(x) = x$.
8. **Composition et injectivité** : Si f et g sont injectives, alors $f \circ g$ est injective.
9. **Composition et surjectivité** : Si f et g sont surjectives, alors $f \circ g$ est surjective.
10. **Composition réciproque** : $f^{-1} \circ f = I_X$ et $f \circ f^{-1} = I_Y$.
11. **Involutivité** : $(f^{-1})^{-1} = f$.
12. **Symétrie graphique** : Les graphiques de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

8.4 Méthodes clés

Méthodes à maîtriser

- Pour montrer qu'une fonction est injective :**
Supposer $f(x_1) = f(x_2)$ et montrer que $x_1 = x_2$.
(Ou supposer $x_1 \neq x_2$ et montrer $f(x_1) \neq f(x_2)$).
- Pour montrer qu'une fonction est surjective :**
Prendre un y quelconque dans le co-domaine et trouver x dans le domaine tel que $f(x) = y$.
- Pour montrer qu'une fonction est bijective :**
Montrer qu'elle est à la fois injective et surjective.
- Pour déterminer le domaine d'une fonction définie par une formule :**
Exclure les valeurs qui annulent le dénominateur, qui rendent une racine négative, ou qui rendent un logarithme non positif.
- Pour calculer une fonction composée $f \circ g$:**
Remplacer x par $g(x)$ dans l'expression de $f(x)$.
- Pour déterminer le domaine de $f \circ g$:**
 x doit être dans le domaine de g , et $g(x)$ doit être dans le domaine de f .
- Pour calculer la fonction inverse f^{-1} :**
Poser $y = f(x)$, résoudre pour x en fonction de y , puis échanger x et y .
- Pour vérifier que $g = f^{-1}$:**
Montrer que $g(f(x)) = x$ et $f(g(x)) = x$.

8.5 Erreurs fréquentes

Erreurs à éviter absolument

- Confondre relation et fonction :** Une relation peut laisser des éléments de X sans image, ou relier un élément de X à plusieurs éléments de Y . Une fonction ne le peut pas.
- Confondre image et antécédent :** L'image est le résultat (dans Y), l'antécédent est l'entrée (dans X).
- Penser que $f \circ g = g \circ f$:** En général, c'est faux ! L'ordre de composition est important.
- Confondre $f^{-1}(x)$ et $\frac{1}{f(x)}$:** f^{-1} est la fonction inverse, $\frac{1}{f(x)}$ est l'inverse multiplicatif. Ce sont deux notions complètement différentes.
- Oublier de vérifier la bijectivité avant de calculer f^{-1} :** Une fonction non bijective n'a pas d'inverse (ou nécessite une restriction de son domaine).
- Oublier les conditions d'existence pour le domaine :** Il faut toujours vérifier que le dénominateur n'est pas nul, que la racine est positive, etc.
- Simplifier une expression sans ajuster le domaine :** Par exemple, $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ pour $x \neq 1$. Le point $x = 1$ reste exclu.
- Confondre l'image et le co-domaine :** Le co-domaine est l'ensemble des sorties potentielles, l'image est l'ensemble des sorties effectives.

8.6 Tableau de synthèse

Tableau récapitulatif des types de fonctions

Type	Condition algébrique	Interprétation graphique
Injective	$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$	Toute droite horizontale coupe le graphique en au plus 1
Surjective	$f(X) = Y$	Toute droite horizontale (au niveau du co-domaine) coupe le graphique
Bijective	Injective + Surjective	Correspondance parfaite

Le saviez-vous ?

Le concept de fonction est l'un des plus puissants en mathématiques. Il permet de modéliser des phénomènes aussi variés que la croissance d'une population, la propagation d'une épidémie, ou encore le comportement d'un algorithme. Les fonctions inverses, quant à elles, sont essentielles en cryptographie : si vous savez chiffrer un message (appliquer f), vous devez savoir le déchiffrer (appliquer f^{-1}).

9 Exercices de révision

Objectifs

Ces exercices couvrent l'ensemble du chapitre. Ils vous permettront de vérifier votre maîtrise des concepts et de vous préparer au test final.

Partie A : Questions à choix multiples

- Soient $A = \{1, 2\}$ et $B = \{a, b, c\}$. Le nombre d'éléments de $A \times B$ est :
 - 2
 - 3
 - 5
 - 6
- La relation $R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 4)\}$ est :
 - une fonction
 - une relation mais pas une fonction
 - ni une relation ni une fonction
 - une fonction injective
- La fonction $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ est :
 - injective seulement
 - surjective seulement
 - bijjective
 - ni injective ni surjective
- Le domaine de $f(x) = \frac{1}{x-3}$ est :
 - $\mathbb{R}$
 - $\mathbb{R} \setminus \{3\}$
 - $[3, +\infty[$
 - $] -\infty, 3[$
- Si $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$, alors $(f \circ g)(x)$ est :
 - $2x^2 + 1$
 - $(2x + 1)^2$
 - $2x^2 + 2x + 1$
 - $4x^2 + 4x + 1$
- La fonction inverse de $f(x) = 3x - 2$ est :
 - $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$
 - $f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$
 - $f^{-1}(x) = \frac{1}{3x-2}$
 - $f^{-1}(x) = 3x + 2$

Partie B : Vrai ou Faux

Indiquez si chaque affirmation est vraie ou fausse, et justifiez brièvement.

- | | |
|--|---------------|
| 1. Toute fonction est une relation. | (Vrai / Faux) |
| 2. Toute relation est une fonction. | (Vrai / Faux) |
| 3. Une fonction injective peut avoir deux éléments du domaine avec la même image. | (Vrai / Faux) |
| 4. Une fonction surjective de $\{1, 2, 3\}$ vers $\{a, b, c\}$ est nécessairement bijective. | (Vrai / Faux) |
| 5. Si f est bijective, alors f^{-1} est aussi bijective. | (Vrai / Faux) |
| 6. $f \circ g = g \circ f$ pour toutes fonctions f et g . | (Vrai / Faux) |

Partie C : Exercices de calcul

- Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{x, y\}$. Déterminez $A \times B$ et $B \times A$.
- Déterminez le domaine et l'image de la relation $R = \{(1, 5), (2, 7), (3, 9), (4, 11)\}$.
- Soit $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Calculez $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$.
- Déterminez le domaine de $f(x) = \sqrt{3x - 9}$.
- Déterminez le domaine de $f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$.
- Montrez que $f(x) = 4x + 7$ est injective.

7. Montrez que $f(x) = 4x + 7$ est surjective.
8. Soit $f(x) = x^2$ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Cette fonction est-elle injective ? Surjective ? Justifiez.
9. Soient $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = x^2$. Calculez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.
10. Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x - 5$. Déterminez le domaine de $f \circ g$.
11. Soit $f(x) = 5x - 4$. Déterminez $f^{-1}(x)$.
12. Soit $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Déterminez $f^{-1}(x)$ et son domaine.
13. Soient $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = \frac{x-1}{3}$. Vérifiez que $g = f^{-1}$.
14. Construisez le graphique de $f(x) = 2x - 3$ pour $x \in [-1, 3]$.
15. À partir du graphique de $f(x) = x^2$, déterminez $f(2)$ et les antécédents de 4.

Partie D : Problèmes de synthèse

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
 - (a) Calculez $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.
 - (b) Déterminez l'image de f (indice : mettez sous forme canonique).
 - (c) f est-elle injective ? Justifiez.
2. Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
 - (a) Déterminez le domaine de f .
 - (b) Montrez que f est injective.
 - (c) Déterminez $f^{-1}(x)$ et son domaine.
 - (d) Vérifiez que $f(f^{-1}(x)) = x$.
3. Une entreprise fabrique des objets. Le coût de production de x objets est donné par $C(x) = 2x + 50$, et le revenu est donné par $R(x) = 5x$.
 - (a) Exprimez le bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$ en fonction de x .
 - (b) Calculez le bénéfice pour $x = 20$ objets.
 - (c) Combien d'objets faut-il vendre pour que le bénéfice soit nul ?

10 Test du chapitre 1

Consignes

Ce test évalue votre maîtrise de l'ensemble du chapitre. Durée recommandée : 1h30. Répondez à toutes les questions en justifiant vos réponses. Barème indicatif : 40 points.

Exercice 1 (8 points) — Relations

1. Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b, c, d\}$.
 - (a) Déterminez $A \times B$. (2 pts)
 - (b) Combien d'éléments contient $A \times B$? (1 pt)
2. Soit R la relation de A vers B définie par $R = \{(1, a), (2, b), (3, a)\}$.
 - (a) Déterminez le domaine de R . (1 pt)
 - (b) Déterminez l'image de R . (1 pt)
 - (c) Déterminez R^{-1} . (1,5 pts)
 - (d) R est-elle une fonction ? Justifiez. (1,5 pts)

Exercice 2 (8 points) — Fonctions

1. Soit $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.
 - (a) Calculez $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$. (2 pts)
 - (b) Déterminez le domaine de f . (1 pt)
2. Déterminez le domaine des fonctions suivantes :
 - (a) $g(x) = \frac{1}{x-4}$ (1 pt)
 - (b) $h(x) = \sqrt{2x-6}$ (1 pt)
 - (c) $k(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$ (1,5 pts)
3. Déterminez l'image de $f(x) = x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$. (1,5 pts)

Exercice 3 (8 points) — Classification

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 5x - 3$.

- (a) Montrez que f est injective. (2 pts)
 (b) Montrez que f est surjective. (2 pts)
 (c) f est-elle bijective ? Justifiez. (1 pt)
2. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2 + 1$.
 (a) g est-elle injective ? Justifiez. (1,5 pts)
 (b) g est-elle surjective ? Justifiez. (1,5 pts)

Exercice 4 (8 points) — Composition et inverse

1. Soient $f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = x^2 - 1$.
 (a) Calculez $(f \circ g)(x)$. (2 pts)
 (b) Calculez $(g \circ f)(x)$. (2 pts)
 (c) Calculez $(f \circ g)(1)$. (1 pt)
2. Soit $h(x) = \frac{x+3}{x-2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.
 (a) Déterminez $h^{-1}(x)$. (2 pts)
 (b) Quel est le domaine de h^{-1} ? (1 pt)

Exercice 5 (8 points) — Synthèse

Une entreprise produit et vend des articles. Le coût total de production de x articles est donné par $C(x) = x^2 + 10x + 100$ (en euros), et le prix de vente unitaire est de 50 €.

- (a) Exprimez le revenu $R(x)$ en fonction de x . (1,5 pts)
 (b) Exprimez le bénéfice $B(x) = R(x) - C(x)$. (1,5 pts)
 (c) Calculez le bénéfice pour $x = 10$ articles. (2 pts)
 (d) Déterminez pour combien d'articles le bénéfice est nul (résolvez $B(x) = 0$). (3 pts)

Barème indicatif

- Exercice 1 : 8 points
- Exercice 2 : 8 points
- Exercice 3 : 8 points
- Exercice 4 : 8 points
- Exercice 5 : 8 points
- **Total : 40 points**

Note : La présentation, la rigueur des justifications et la clarté des calculs seront prises en compte dans l'évaluation.

Conseils pour réussir le test

- Lisez attentivement chaque énoncé avant de commencer.
- Pour les questions de classification, n'oubliez pas de justifier (injectivité, surjectivité).
- Pour les fonctions composées, vérifiez toujours l'ordre : $f \circ g \neq g \circ f$.
- Pour la fonction inverse, vérifiez votre résultat en calculant $f(f^{-1}(x))$.
- Gérez votre temps : commencez par les questions que vous maîtrisez le mieux.

11 Exercices Avancés (Défis)

Objectifs

Ces exercices sont conçus pour les élèves qui souhaitent approfondir le chapitre et se préparer aux épreuves de niveau supérieur. Ils combinent souvent plusieurs notions et nécessitent une réflexion approfondie. Ne vous découragez pas si vous ne les résolvez pas immédiatement : prenez le temps d'analyser chaque énoncé.

Défi 1 : Relations et produit cartésien

1. Soient A et B deux ensembles finis tels que $n(A) = 4$ et $n(B) = 3$. Combien de relations existe-t-il de A vers B ? Combien de ces relations sont des fonctions ?
2. Soient $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{a, b, c\}$. On définit la relation R par :

$$R = \{(x, y) \in A \times B : x + y \text{ est un nombre premier}\}$$

(où l'on identifie $a = 1, b = 2, c = 3$). Déterminez R , son domaine et son image.

3. Soit R une relation sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x^2 + y^2 = 25\}$$

- (a) Listez tous les éléments de R .
 - (b) Déterminez R^{-1} . Que remarquez-vous ?
 - (c) R est-elle une fonction ? Justifiez.
4. (**Défi**) Soient A et B deux ensembles finis avec $n(A) = m$ et $n(B) = n$.
- (a) Combien y a-t-il de relations de A vers B ?
 - (b) Combien y a-t-il de fonctions de A vers B ?
 - (c) Combien y a-t-il de fonctions injectives de A vers B (cas $n \geq m$) ?
 - (d) Combien y a-t-il de fonctions bijectives de A vers B (cas $m = n$) ?

Défi 2 : Analyse de fonctions

1. Déterminez le domaine des fonctions suivantes :
 - (a) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$
 - (b) $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$
 - (c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$
 - (d) $k(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-2}}$
2. Déterminez l'image des fonctions suivantes sur leur domaine :
 - (a) $f(x) = x^2 - 4x + 5$
 - (b) $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$
 - (c) $h(x) = \sqrt{4-x^2}$
 - (d) $k(x) = \frac{2x}{x^2+1}$
3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ avec $ad-bc \neq 0$.
 - (a) Déterminez le domaine de f .
 - (b) Montrez que f est injective.
 - (c) Déterminez $f^{-1}(x)$. Que remarquez-vous ?

Défi 3 : Injectivité, surjectivité, bijectivité

1. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$.
 - (a) Montrez que f est injective. (Indice : supposez $f(a) = f(b)$ et factorisez $a^3 - b^3 + a - b$.)
 - (b) Montrez que f est surjective. (Indice : utilisez le théorème des valeurs intermédiaires ou étudiez les limites.)
 - (c) f est-elle bijective ? Justifiez.
2. Soit $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$ définie par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.
 - (a) Montrez que f est injective.
 - (b) Montrez que f est surjective.
 - (c) Déterminez $f^{-1}(x)$.
 - (d) Vérifiez que $f^{-1} \circ f = I$ et $f \circ f^{-1} = I$.
3. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 - 2x + 3$.
 - (a) Montrez que f n'est pas injective sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Restreignez le domaine de f à un intervalle I sur lequel f est injective. Déterminez I .
 - (c) Sur cet intervalle I , déterminez $f^{-1}(x)$.
4. (**Défi**) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante (c'est-à-dire $x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$).
 - (a) Si f est strictement croissante, montrez que f est injective.
 - (b) Donnez un exemple de fonction croissante non injective.
 - (c) Si f est continue et strictement croissante, montrez que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R})$.

Défi 4 : Composition de fonctions

1. Soient $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \frac{x}{x+1}$.
 - (a) Calculez $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.
 - (b) Déterminez le domaine de $f \circ g$ et de $g \circ f$.
 - (c) Que remarquez-vous ?

2. Soit $f(x) = \frac{x}{x-1}$. Calculez $f \circ f \circ f$. Que remarquez-vous ?
3. Soient $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2 - 4x + 3$.
 - (a) Déterminez le domaine de $f \circ g$.
 - (b) Déterminez le domaine de $g \circ f$.
 - (c) Les domaines sont-ils les mêmes ? Justifiez.
4. **(Défi)** Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2$.
 - (a) Résolvez l'équation $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$.
 - (b) Que représentent les solutions de cette équation ?

Défi 5 : Fonctions inverses

1. Soit $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
 - (a) Montrez que f est bijective de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ vers $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.
 - (b) Déterminez $f^{-1}(x)$.
 - (c) Vérifiez que $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. Soit $f(x) = \sqrt{x-2}$ définie sur $[2, +\infty[$.
 - (a) Déterminez $f^{-1}(x)$.
 - (b) Déterminez le domaine et l'image de f^{-1} .
 - (c) Tracez les graphiques de f et f^{-1} dans le même repère. Vérifiez la symétrie par rapport à $y = x$.
3. Soit $f(x) = x^3 - 1$.
 - (a) Montrez que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
 - (b) Déterminez $f^{-1}(x)$.
4. **(Défi)** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (sinus hyperbolique).
 - (a) Montrez que f est bijective.
 - (b) Déterminez $f^{-1}(x)$. (Indice : posez $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ et multipliez par e^x .)

Défi 6 : Problèmes de synthèse avancés

1. **(Optimisation)** Une entreprise produit x objets. Le coût total est $C(x) = x^2 + 20x + 100$ et le revenu est $R(x) = 60x$.
 - (a) Exprimez le bénéfice $B(x)$.
 - (b) Déterminez la valeur de x qui maximise le bénéfice.
 - (c) Quel est le bénéfice maximal ?
2. **(Géométrie)** Un rectangle a un périmètre de 40 cm. On note x sa largeur et $A(x)$ son aire.
 - (a) Exprimez la longueur en fonction de x .
 - (b) Exprimez $A(x)$ en fonction de x .
 - (c) Déterminez le domaine de $A(x)$.
 - (d) Déterminez la valeur de x qui maximise l'aire. Quelle est alors l'aire maximale ?
3. **(Physique)** La distance parcourue par un objet en chute libre est donnée par $d(t) = \frac{1}{2}gt^2$, où $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.
 - (a) Exprimez le temps t en fonction de la distance d .
 - (b) Calculez le temps nécessaire pour qu'un objet tombe de 100 m.
 - (c) Cette fonction $t(d)$ est-elle l'inverse de $d(t)$? Justifiez.
4. **(Défi)** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + 3x$.
 - (a) Montrez que f est strictement croissante.
 - (b) Déduisez-en que f est injective.
 - (c) Montrez que f est surjective (utilisez les limites).
 - (d) f est-elle bijective ? Justifiez.
 - (e) (Très difficile) Déterminez $f^{-1}(x)$ en utilisant la formule de Cardan.

Défi 7 : Questions de réflexion

1. **Vrai ou Faux ?** Si $f \circ g$ est injective, alors f et g sont injectives. Justifiez.
2. **Vrai ou Faux ?** Si $f \circ g$ est surjective, alors f et g sont surjectives. Justifiez.
3. **Vrai ou Faux ?** Si f et g sont bijectives, alors $f \circ g$ est bijective. Justifiez.
4. **Défi** Montrez que si $f : A \rightarrow B$ est bijective, alors f^{-1} est aussi bijective.
5. **Défi** Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux fonctions. Montrez que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
6. **Défi** Soient $f : A \rightarrow B$ et $g : B \rightarrow C$ deux fonctions. Montrez que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Défi 8 : Exercices ouverts

1. Donnez un exemple de deux fonctions f et g telles que $f \circ g = g \circ f$, mais $f \neq g$.
2. Donnez un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est injective mais non surjective.
3. Donnez un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est surjective mais non injective.
4. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(f(x)) = x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$? Justifiez. (Indice : supposez qu'une telle fonction existe et cherchez une contradiction.)
5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Existe-t-il une fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f \circ g = I$ (où I est la fonction identité)? Si oui, donnez-la. Si non, expliquez pourquoi.

Conseils pour aborder ces défis

- **Lisez attentivement l'énoncé** : Chaque mot compte. Notez les hypothèses et ce qui est demandé.
- **Reformulez** : Traduisez l'énoncé en termes mathématiques clairs.
- **Cherchez un exemple** : Pour les questions abstraites, testez d'abord avec des exemples simples.
- **Utilisez les définitions** : Revenez toujours aux définitions de base (injectivité, surjectivité, etc.).
- **Décomposez** : Pour les problèmes complexes, traitez d'abord les sous-questions faciles.
- **Vérifiez** : À la fin, vérifiez que votre réponse est cohérente avec l'énoncé.
- **Persévérez** : Certains défis peuvent prendre du temps. Ne vous découragez pas, c'est en cherchant que l'on apprend !

Le saviez-vous ?

Les mathématiciens utilisent souvent la technique de la **preuve par l'absurde** pour résoudre des problèmes difficiles. Par exemple, pour montrer qu'une fonction n'existe pas, on suppose qu'elle existe et on cherche une contradiction. C'est une méthode très puissante que vous utiliserez dans certains de ces défis !