TABLE DES MATIERES

CHAPITRE I : TRANSFORMATION DE LA PLACE

I- FONCTIONS CAUSALES

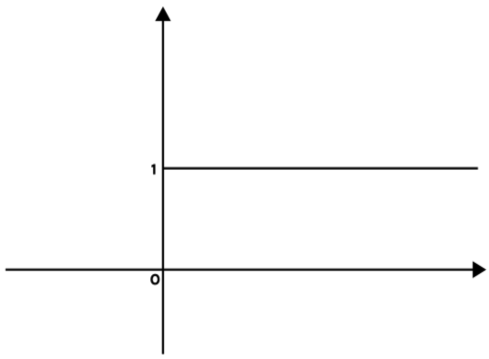
1. Définition

Une fonction (ou signal) **f** de la variable réelle **t** est dite causale si pour tout **t** strictement négatif, on a f(t)=0.

EXEMPLES

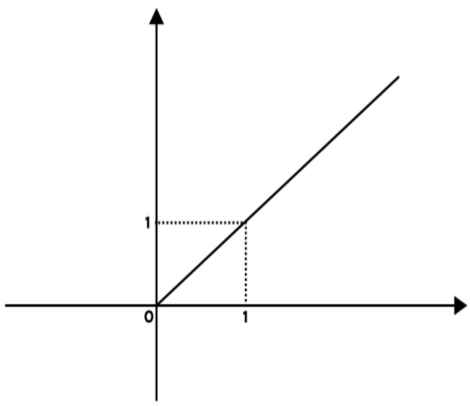
- La fonction de Heaviside (fonction échelon unité)

$$\mathcal{U}(t)=\begin{cases} 0 \; si t < 0 \\ 1 \; si t \geq 0 \end{cases}$$



- La fonction rampe unité
  C'est la fonction fdéfinie sur$\mathbb{R}$ f(t) $=t\mathcal{U}(t)$

On à f(t)=$\begin{cases} 0 \; si t < 0 \\ t \; si t \geq 0 \end{cases}$



Remarque Pour rendre une fonction causale, il suffit de la multiplier par la fonction de Heaviside.

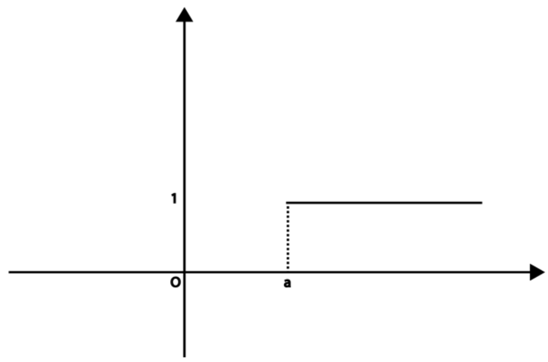
2. Fonction retardée

Définition Soit **f** une fonction numérique de la variable réelle **t** et soit **g** définie par g(t)=f(t-a) avec a un nombre réel strictement positif. La fonction **g** est dite retardée ou décalée de ***a***(à droite).

Remarques

- Dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, la courbe de **g** se déduit de celle **f** par la translation de vecteur $a\vec{\imath}$.
- Pour un réel a strictement positif donné, si g(t)=f(t + a), $\forall t \in$ R ; alors **g** est décalée à gauche. Mais **g** n'est pas nécessairement causales si **f** est causale, dans ce cas la courbe de **g** se déduit de celle de **f** par la translation de vecteur - $a\vec{\imath}$.

Exemple : La fonction échelon unité retardée de ***a***



$$\mathcal{U}(t-a)=\begin{cases}0 \; si t < 0\\ 1 \; si t \geq 0\end{cases} \text{ avec } a\in \mathbb{R}_+^*$$

Exercice

On considère la fonction $h(t) = 3t^2\mathcal{U}(t-2)$, $t \in$R. montrer que la courbe de **h** s'obtient par la translation de la courbe d'une fonction que l'on précisera.

3. Expression d'une fonction à l'aide de la fonction de Heaviside

Soient $0<t_1<t_2<+\infty$. On considère la fonction **f** définie sur R par :

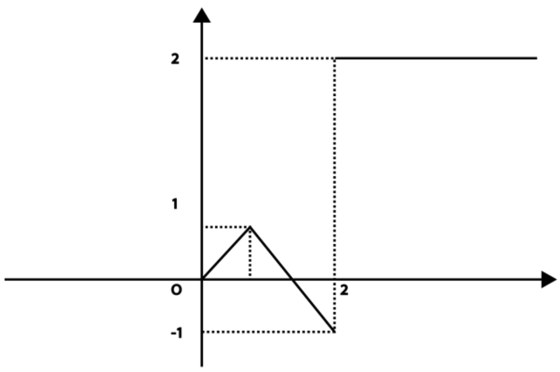
$$F(t)=\begin{cases} 0 \; si \; t \in]-\infty;0[\\ f_1(t) si \; t \in [0;t_1[\\ f_2(t) si \; t \in [t_1;t_2\{ \\ f_3(t) \; si \; t \in [t_2;+\infty[\end{cases}$$

Alors **f** se définit avec la fonction échelon unité de la manière suivante :

$$f(t) = f_1(t)\mathcal{U}(t) + [f_2(t) - f_1]\mathcal{U}(t-t_1)+[f_3(t) - f_2(t)]\,\mathcal{U}(t-t_2)$$

Exercice d'application

La courbe ci-contre est celle d'une fonction **f.**



Expliciter **f**, puis l'écrire en fonction de l'échelon unité

4. Passage d'une expression définie avec l'échelon unité à une expression explicite

On considère la fonction **f** définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = f_0(t)\,\mathcal{U}(t) + f_1(t)\,\mathcal{U}(t - t_1) + f_2(t)\,\mathcal{U}(t - t_2) \text{ avec } 0 < t_1 < t_2 < +\infty$$

On se propose d'expliciter **f.** Pour cela, nous définissons le tableau.

T	$-\infty$ 0	0 t_1	t_2	$+\infty$
$f_0(t)\mathcal{U}(t)$	0	$f_0(t)$	$f_0(t)$	$f_0(t)$
$f_1(t)\mathcal{U}(t-t_1)$	0	0	$f_1(t)$	$f_1(t)$
$f_2(t)\mathcal{U}(t-t_2)$	0	0	0	$f_2(t)$
$f(t)$	0	$f_0(t)$	$f_0(t) + f_1(t)$	$f_0(t) + f_1(t) + f_2(t)$

Alors :

$$\begin{cases} 0 & si\ t \in]-\infty; 0[\\ f_0(t) & si\ t \in [0; t_1[\\ f_0(t) + f_1(t) & si\ t \in [t_1; t_2[\\ f_0(t) + f_1(t) + f_2(t) & si\ t \in [t_2; +\infty[\end{cases}$$

Exercice d'application

Soit a fonction **f** définie sur $\mathbb{R}$par :

$F(t) = t\,\mathcal{U}(t) - (2t - 2)\,\mathcal{U}(t - 1) + (2t - 6)\,\mathcal{U}(t - 3) + (t - 4)\,\mathcal{U}(t - 4)$

Expliciter puis représenter **f.**

II- TRANSFORMATION DE LA PLACE

1. Définitions

La transformée de la Laplace d'une fonction causale f est la fonction notée $\mathcal{L}[f(t)]$ de la variable réelle ou complexe p définie par :

$\mathcal{L}[f(t)]\ (p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ (avec $R_e(p) > 0$).

Si $F(p)$ est la transformée de la Laplace d'une fonction $f(t)$, alors la fonction $f(t)$ est la transformée de la Laplace inverse (ou original) de $F(p)$; on note $L^{-1}[F(p)]\ (t)$.

$$\mathcal{L}\,[f(t)] = F(p) \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(p)]\ (t) = f(t)$$

.Propriété

Etant donné une fonction $p \mapsto F(p)$, si elle admet pour original la fonction $t \mapsto f(t)$, alors cet original est unique et vice versa.

Exercice

En utilisant la définition, déterminer la transformée de la Laplace de la fonction rampe unité.

2. Impulsion de Dirac

On appelle impulsion de Dirac (ou encore percussion unité) une fonction qui prend une valeur infinie en 0, la valeur nulle partout ailleurs et dont l'intégrale sur **R** est égale à 1. On la note $\delta(t)$.

Exemple

La fonction f_ε définie par

$f_\varepsilon = \varepsilon\left[u(t) - u\left(t - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right]$ $(\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)$ est une fonction de Dirac.

3. Les transformées usuelles

original	δ	$\mathcal{U}(t)$	$\mathcal{U}(t\text{-}a)$	$e^{-at}\mathcal{U}(t)$	$t^n\mathcal{U}(t)$	$\mathcal{U}(t)\cos\omega t$	$\mathcal{U}(t)\sin\omega t$
transformé	1	$\frac{1}{p}$	$\frac{e^{-ap}}{p}$	$\frac{1}{p+a}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$

Exercice d'application

a. Déterminer la transformée de la place de chacune des fonctions :
   $f(t) = (t-1)^2\mathcal{U}(t)$, $g(t) = t^2\mathcal{U}(t-1)$ et $h(t) = \sin^2 t\mathcal{U}(t) + \delta$

b. Déterminer l'original de $k(p)=\frac{p}{(p^2+1)(p-1)}$

4. Propriétés de la transformation de LAPLACE

Soient **f** deux fonctions causales telles que : $\mathcal{L}$ [f(t)] (p) = F(p) et $\mathcal{L}$[f(t)] (p) = G(p)

Propriété	Original	Transformée
Linéarité	$af(t) + bg(t)$	$aF(p) + bG(p)$
Décalage temporel	$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
Décalage fréquentiel	$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$
Produit par t^n ($n \geq 1$)	$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
Primitive	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{F(p)}{p}$
Dérivation	$\mathcal{L}[f'(t)](p) = pF(p) - f(0^+)$ $\mathcal{L}[f''(t)](p) = p^2F(p) - pf(0^+) - f'(0^+)$ $\mathcal{L}[f^{(3)}(t)](p) = p^3F(p) - p^2f(0^+) - pf'^{(0^+)} - f''(0^+)$	
Fonction périodique	Si f est une fonction T-périodique	$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)ft$
Théorème de la valeur initiale	$\lim\limits_{p\to+\infty} pF(p) = f(0^+)$	
Théorème de la valeur final	$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = \lim\limits_{\substack{p\to 0 \\ >}} pF(p)$	
homothétie	$F(t) = h(at)\,\mathcal{U}(t)$, $a>0$	$F(p) = \frac{1}{a}H\left(\frac{p}{a}\right)$

Exercice d'application

a. Calculer :
   $\mathcal{L}[(2t+3)\,\mathcal{U}(t)]$ (p), $\mathcal{L}[t^2\mathcal{U}(t-1)]$ (p), $\mathcal{L}[\sin 2t\,\mathcal{U}(t-\pi)]$ (p), $\mathcal{L}[e^{2t}\sin\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mathcal{U}(t)]$ (p) ,$\mathcal{L}[\int_0^t e^x \sin x dx](p)$

b. Sachant que $\mathcal{L}[h(t)\,\mathcal{U}(t)](p) = \frac{e^{-p}}{p^{2+1}}$; Calculer $\mathcal{L}[h(3t)\,\mathcal{U}(t)]$ (p)

5. Produit de convolution

Définition Soient f et g deux fonctions causales. On appelle produit de convolution de f et g (ou convolée de f et g dans cet ordre) la fonction notée f∗g et définie par :

$$(f* g)(t) = \int_0^t f(x)g(t-x)dx.$$

Propriétés

- Soient f, g et h des fonctions causales. Alors :
  $f * g = g * h, (f * h) * h = f * (g * h)$ et $f * (g + h) = f * g + f * h$
- Soient f et g deux fonctions causales des transformées de la Laplace respective F et G. Alors

$$\mathcal{L}(f * g)(t) = \mathcal{L}[f(t)].\mathcal{L}[g(t)] = F(p).G(p)$$

Exercice d'application

En utilisant le produit de convolution, déterminer l'original de la fonction

$F(p) = \frac{5}{(p+2)(p^2+1)}$

III- APPLICATION

1- Résolution des équations différentielles

Exercice

Résoudre (E) : $y'' + 2y' + y = e^{-t}U(t)$ avec $y(0^+) = 1$ et $y(0^+) = 0$

2- Système linéaire

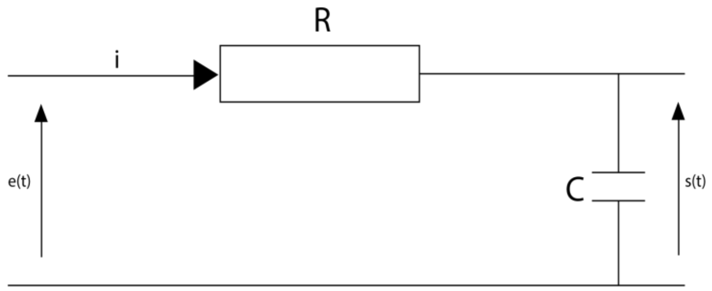
Définitions

- Un système (physique) linéaire est régi par une équation différentielle linéaire.
- On considère le système linéaire $e(t) \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow s(t)$
  où e(t) e s(t) sont des signaux causaux. Le système est initialement au repos si toutes les conditions initiales sur e(t) et/ou sur s(t) sont nulles.
  Soient E(p) et S(p) les transformées de la Laplace respectives des signaux e(t) et s(t). On appelle fonction de transfert du système la fonction H définie par :

$$\mathbf{H(p)} = \frac{\mathbf{S(p)}}{\mathbf{E(p)}}$$

Exercice d'application

On considère le système suivant :



1. Montrer que l'équation différentielle qui régit le système est :

(E) : $RC\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$

2. On admet que le système est initialement au repos. Déterminer sa fonction de transfert $H(p)$. en déduire l'original de $H(p)$.
3. Supposons que e(t) désigne la fonction de Heaviside.
   a. Calculer $S(p)$ puis, en déduire $s(0^+)$ et $\lim_{t\to+\infty} s(t)$.
   b. Déterminer puis représenter le signal de sortie $s(t)$.

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

1. Calculer les transformées de la Laplace suivantes :

$\mathcal{L}\left[t\cos\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right]u(t)$ $\quad$ $\mathcal{L}\,[e^{-t}\sin(2t)]u(t)$ $\quad$ $\mathcal{L}\,[t\ \sin(2t)]u(t-\pi)$

$\mathcal{L}[(t-1)^3e^tu(t)]$ $\quad$ $\mathcal{L}\,[e^{-t}t^2u(t-1)$ $\quad$ $\mathcal{L}\,[\int_0^x t\cos 2t\,dt]$ $(x>0)$

2. Calculer les originaux des fonctions suivantes :

$F(p) = \frac{p^3+1}{(p^2+1)(p+2)^2}$ $G(p) = \frac{(p+1)e^{-2p}}{p^2(3p+2)}$ $H(p) = \frac{5p^2-4}{(p+1)^2(p^2+2p+2)}$

K(p) =$\frac{p^4}{(p+3)(p-1)^3}$

3. Soit $\omega \in \mathbb{R}^*$. Trouver l'original de F(p) = $\frac{1}{(p^2+\omega^2)^2}$en utilisant :

a) La décomposition de F(p) dans $\mathbb{C}$.

b) Le produit de convolution

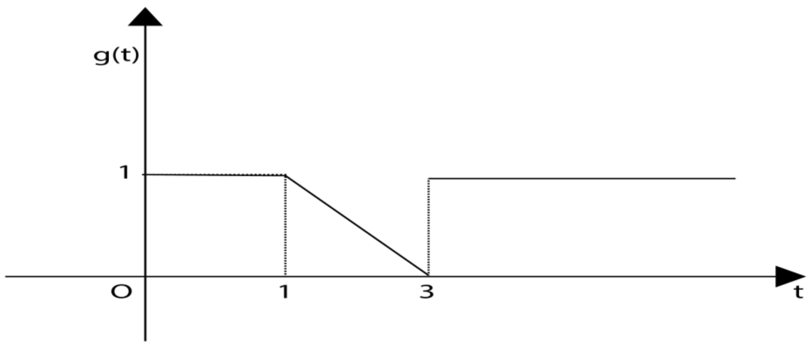
Exercice 2

1. Définir les fonctions ci-dessous sans utiliser la fonction échelon unité puis les représenter :

a) f(t) = 2t [$u(t) - u(t-1)$]

b) g(t) = sin(t)u(t) + (1 – saint) u(t – 2π)

2. Déterminer la transformée de La place du signal suivant :



3. Soit f la fonction causale et 3-période défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 10 & si\ t \in [0;1[\\ -5 & si\ t \in [1;3[\end{cases}$$

a) Déterminer f(10) et f(15) puis représenter f sur l'intervalle [0 ; 10[

b) Déterminer la transformée de La place de f.

Exercice 3

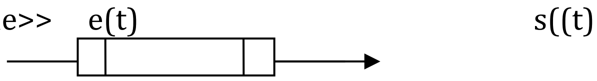
On appelle transformée de Laplace d'une fonction causale f, la fonction F définie pour tout p strictement positif, par : F(p) =$\mathcal{L}$ [f(t)] (p) = $\int_0^{+\infty} e^{-pt}$f(t)dt.

En utilisant les propriétés de la transformation de Laplace, calculer :

$I = \int_0^{+\infty} e^{3t}[\cos 5t + 3\cos 4t + t^4]dt$ $\quad J = \int_0^{+\infty} e^{-2t}[t^8 + t^4 + t^2 + 1]dt$

$K = \int_0^{+\infty} e^{-t}[\mathscr{U}(t-5) + \mathscr{U}(t-6)]dt$ où $t \longmapsto \mathscr{U}(t)$ est la fonction échelon unité.

Exercice 4 Unsystème, <<entrée-sortie>> est régi par l'équation différentielle



(E) : $\frac{d^3s(t)}{dt^3} + s(t) = t$ avec $s(0^+) = s'(0^+) = 0$ et $s''(0^+) = 1$

1. Décomposer en éléments simples : $\frac{1}{p^3+1}$ et $\frac{1}{p^2(p^3+1)}$.

2. Déterminer l'expression du signal s(t) en utilisant la transformation de Laplace.

Exercice 5

L'objectif de cet exercice est de calculer l'original de la fonction $F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^3}$

1. Déterminer la transformée le La place de la fonction $t \longmapsto tu(t)\sin t$

2. Soit $t > 0$, calculer $\int_0^t \sin v \sin(t-v)dv$

3.a) Montrer que pour toutes fonctions causales f et g, on a :

$$(tf) * g + (tg) * f = t(f * g), \forall t \geq 0$$

b) En déduire $\mathscr{L}$ [F(p)].

Exercice 6

On considère l'équation différentielle (E) définie par :

(E) : $\boldsymbol{y''(x) + 2y'(x) + 3y(x) = e^{-x}}$

1) a) Intégrer l'équation différentielle homogène associée à (E).

b) déterminer une solution particulière de l'équation différentielle (E).

c) Déterminer la solution f de (E) qui vérifie : $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$

2) On veut intégrer l'équation différentielle (E) à l'aide de la transformation de Laplace .On considère pour cela l'équation différentielle (E') définie par:

$\boldsymbol{y''(x)u(x) + 2y'(x)u(x) + 3y(x)u(x) = e^{-x}u(x)}$

Avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ et ($x \mapsto u(x)$ désigne la fonction d'Heaviside).

a) En appliquant la transformée de Laplace à chaque membre de l'égalité de l'équation différentielle (E'), Montrer que $\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(p+1)(p^2+2p+3)} + \frac{p+2}{p^2+2p+3}$

(où Y(p) désigne la transformée de Laplace de la fonction causale : $x \mapsto y(x)u(x)$).

b) décomposer en éléments simples la fonction rationnelle

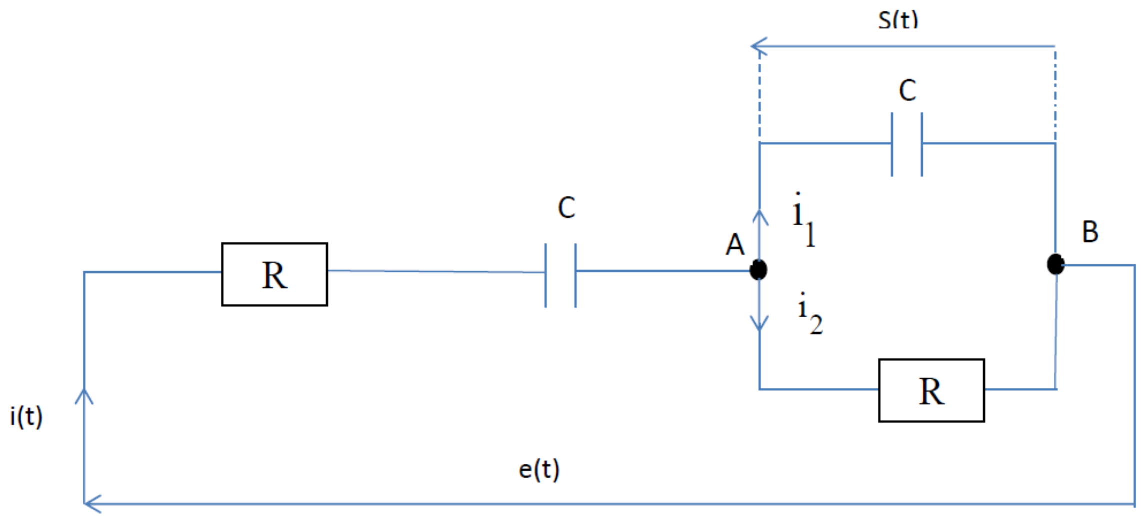
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$

3) a) Déterminer l'original de chacune des fractions rationnelles suivantes : $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{(p+1)(p^2+2p+3)}$ et $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{p}) = \frac{p+2}{p^2+2p+3}$

b) En déduire la solution causale de l'équation différentielle (E) qui vérifie : $y(o) = 1$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 7

On considère le système (S) ci-dessous qui est un montage électrique de signal d'entrée e(t) et de signal de sortie S(t)



1) a) En utilisant la loi des mailles, démontrer que :

$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt + s(t) = e(t)$

b) En utilisant la loi des nœuds au point A ,montrer que le signal d'entrée e(t) et le signal de sortie s(t) sont liés par l'équation différentielle (E) définie ci-dessous par:

$$\mathbf{(RC)^2\frac{d^2s}{dt^2} + 3RC\frac{ds}{dt} + s(t) = RC\ \frac{de(t)}{dt}}$$

2) Les signaux d'entrée e(t) et de sortie s(t) sont fonction du temps

et donc sont des signaux causaux ainsi leurs dérivées c'est-à-dire s (0^+) =s' (0^+) = 0 et e(0^+) = e'(0^+) = 0

On pose S(p) et E(p) les transformées de Laplace respectives des fonctions causales s(t) et e(t).On désigne par H(p) la fonction de transfert du filtre (S).

En appliquant la transformée de Laplace à chacune des membres de l'équation différentielle (E), déterminer la fonction de transfert H(p) du filtre (S). La fonction de transfert H(p) est définie par H(p) = $\frac{S(p)}{E(p)}$

3) Démontrer que **H** $(\boldsymbol{jw})$ **=** $\frac{\mathbf{1}}{\left(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{x}-\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\right)\right)}$ (où x = RCw) et α est une constante que l'on déterminera et $j^2 = -1$
4) On pose H (w) = |H (jw)|.
a)Exprimer H(w) en fonction de x.
b) Pour quelle valeur w_0 de w, H(w) est-il maximal ?
c) Comment appelle-t-on w_0 ?

CHAPITRE II : ALGEBRES LINEAIRES

I- MATRICES

1.Définition

On appelle matrice tout tableau A d'élément de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$) de la forme :

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Le premier indice (i) est l'indice de la ligne et le second (j) celui de la colonne. Les a_{ij} sont les coefficients réels ou complexes de la matrices A.

Lorsque $m = n$, on dit que la matrice A est carrée d'ordre n et on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels.

Exemples

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

$B = (1 \quad 6 \quad -3) \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$(matrice ligne)

$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$(matrice colonne ou vecteur)

$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -6 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$(matrice carré d'ordre 3)

1.1 Opération sur les matrices

Addition de matrices

Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$, alors :
$(A + B) \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$ et $(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ (Pour i, j fixés).

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Longrightarrow A + B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 \\ 8 & 1 & 9 \end{pmatrix}$.

Produit ;

- **<u>D'une matrice par un scalaire :</u>** Soit k$\in \mathbb{R}$. Si A = $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ alors kA $\in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$et $(kA)_{ij} = (ka_{ij})$ (Pour i ; j fixés).

<u>Exemple</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow -3A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 9 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

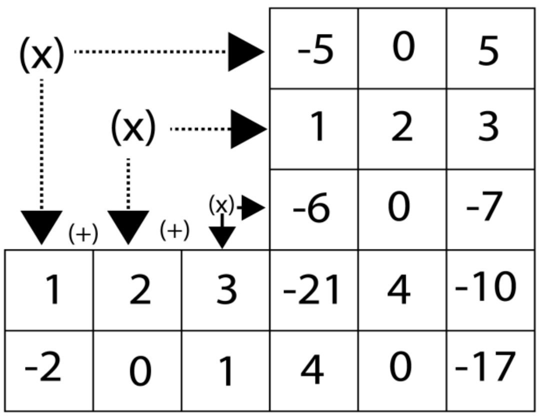
- **<u>De deux matrices :</u>**Si A = $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$et B = $(b_{ij}) \in \mathcal{M}_{pm}(\mathbb{R})$alors C = AB $\in \mathcal{M}_{pm}(\mathbb{R})$et pour i, j fixés, on a :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

<u>Exemple</u>

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$. Calculons AB.

Donc



$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 & 4 & -10 \\ 4 & 0 & -17 \end{pmatrix}$$

<u>Remarque :</u> On a : (AB)C = A(BC) lorsque le produit des matrices a un sens, mais en générale AB ≠ BA (la multiplication des matrices n'est pas commutative)

1.2 <u>Quelques définitions sur les matrices carrées</u>

Soit A = $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carré.

- On **appelle diagonale principale** de A, la diagonale constituée des coefficients a_{ii} de A.
- La matrice A est dite **diagonale** si $a_{ij} = 0, \forall$ i ≠ j, les a_{ii} étant tous non nul.

- On dit que la matrice A est **triangulaire inférieure** (resp : **triangulaire supérieure**) si $a_{ij} = 0$ pour $i < j$ (resp :$a_{ij} = 0$ pour $i > j$), les coefficients a_{ij} étant tous non nuls lorsque $i < j$ (resp : lorsque i> j).

Exemple

$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure

$B = \begin{pmatrix} -2 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure

$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale et les coefficients 3, 1 et 2 constituent la diagonale principale de C

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale ; c'est une **matrice unité d'ordre 3.**

- On appelle **trace** de A, noté **tr(A)**, la somme des coefficients de sa diagonale principale. on a : $\mathbf{tr}(\mathbf{A}) = \boldsymbol{a_{11}} + \boldsymbol{a_{22}} + \cdots + \boldsymbol{a_{nm}}$.

On a : $\forall$ A, B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,tr(A+B) = tr(A) + tr(B)

- Soit la matrice A = $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **transposée** de A noté ${}^tA$ ou A^t et définie par$A^t = (a_{ji})$. On a $A^t \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$.
- Une matrice carrée est dire **symétrique** lorsqu'elle est égale à sa transposée.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -6 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow C^t = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ = C . Donc C est symétrique.

- Une matrice carrée A est **inversible** s'il existe une matrice B telle que **AB=BA=I.** la matrice B est alors appelée matrice **inverse** de A et notéA^{-1}. On a donc $\mathbf{AA^{-1}} = \mathbf{A^{-1}A} = \mathbf{I}$ où I désigne la matrice unité (de même ordre que A).

Exemple d'application

On donne : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calculer $A^2 - 3A + 2I$.
b) En déduire que A est inversible puis, exprimer A^{-1}en fonction de A et I. ExpliciterA^{-1}.

2. DETERMINANT D'UNE MATRICE CARREE

2.1 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle **déterminant de A** le nombre réel noté **det(A)**, défini par :

$$\mathbf{det}(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} m_{ij}$$

Où m_{ij} désigne le mineur associé au coeffcient a_{ij} de A (c'est le déterminant obtenu en supprimant la i$^{\text{ème}}$ ligne de la j$^{\text{ème}}$ colonne de det(A))

Exemple : Calculer le déterminant de chacune des matrices suivantes :$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

On a $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - (4) \times 2 = 15 - 8 = 7$

Pour le calcul de det(B), on se fixe une ligne ou unecolonne.

On a par exemple :

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - (-5) \times \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Ou

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \times \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (-3) \times \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Ou encore

$$\det(\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -(-5) \times \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + 7 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$$

D'où det(B) = 32.

Remarques

- Pour calculer le déterminant d'une matrice, il est avantageux de considérer une ligne ou une colonne qui contient le maximum de coefficients nuls.
- La valeur d'un déterminant ne change pas si l'on ajoute à une ligne (resp : à une colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (resp : d'autre colonnes).
- La permutation de deux lignes ou deux colonnes change le signe du déterminant.
- Un déterminant qui a deux lignes ou deux colonnes identiques ou proportionnelles est nul.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire ou diagonale est égal au produit des coefficients de sa diagonale principale.

Exemple

Soit $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ Calculer det(B)

La ligne 3 de B contient déjà un coefficient nul. En combinant les deux premières colonnes de B, nous pouvons générer un autre coefficient nul, sur la ligne 3. On a :

$$\det(\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & 11 & -3 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 11 & -3 \end{vmatrix} = -2(6-22) = 32$$

$C_1 \quad C_2 \quad C_3 \qquad C_1 \quad C_2+C_1 \quad C_3$

Propriétés

Soient A et B $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{R}$. On a :

- $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A}) \,.\, \det(\mathrm{B})$
- $\det(\mathrm{kA}) = \mathrm{k}^{\mathrm{n}}.\det(\mathrm{A})$
- $\det(\mathrm{A}^{\mathrm{t}}) = \det(\mathrm{A})$

2.2 Méthode de Sarrus (uniquement pour les déterminants des matrices carrées d'ordre 3).

On a :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Exemple Soit$B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer det(B)

On a

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 4 & 7 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & -5 \\ 4 & 7 \\ -2 & 2 \end{matrix} = (0 - 30 + 16) - (-28 - 18 + 0) = 32$$

2.3 Rang d'une matrice

Définition : Soit A $\in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{R})$. On appelle rang de A, notée **rang(A),** l'ordre de la plus ''grande'' matrice carrée A_k que l'on peut extraite de A et qui est telle que $det(A_k) \neq 0$

Exercice : Déterminer le rang de chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

2.4 Calcul de l'inverse d'une matrice

Définition : Soit A = $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée.

- On appelle **cofacteur** du coefficient a_{ij} de A le nombre réel Δ_{ij} tel que : $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$ où m_{ij} désigne le mineur associé à a_{ij}.
- La **comatrice** de A est la matrice des cofacteurs de A. Elle est notée **Com(A).** On a :

  Com(A) $= (\Delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$.

Propriétés

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée.

- A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
- Si A est inversible, on a : $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^{t}\mathrm{Com}(A)$
- Si A et B sont deux matrices inversibles, on a : $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B^{-1}A^{-1}}$

Exercice : On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que la matrice A est inversible.

2) Calculer l'inverse A^{-1}de A.

3. SYSTEME D'EQUATIONS LINEAIRES

3.1 Définition et notation

Etant donné le système d'équation $(s_1)\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$

On appelle **écriture matricielle** de (s_1) l'expressionsuivante :$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Où$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ désigne la matrice du système(s_1),$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ est l'inconnue du système et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ son second membre.

Donc$(s_1) \Leftrightarrow AX = B$

(s_1)est unsystème de n équations à m inconnues ; il est du type (n, m).

3.2 Résolution d'un système du type (n, n)

On s'intéresse ici aux systèmes de n équation à n inconnues, c'est-à-dire du type (n, n). Dans ce cas, la matrice A est carrée d'ordre n. pour la résolution d'un tel système, on distingue deux cas :

1er cas : A est inversible

Un système où la matrice associée est inversible est dit de Cramer. Il existe plusieurs méthodes de résolution de ce type de système.

- **Méthode de Cramer**

Posons Δ= det A et notons Δ_i le déterminant obtenu en remplaçant dans Δ la colonne i par le 2nd membre B. Alors l'inconnue x_i (associée à la colonne i) s'écrit :

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (s) $\begin{cases} x - y - z = 5 \\ x + 3y + 3z = 1 \\ 3x + y - 4 = -4 \end{cases}$

- **Méthode du pivot du Gauss**

  En permutant éventuellement deux inconnues ou deux équations, on peut supposer que $a_{11} \neq 0$

  Pour $i > 1$, les transformations $l_i \leftarrow l_i \leftarrow \frac{a_{ii}}{a_{11}} l_1$conduisent à un système équivalent et éliminent l'inconnue x_1 dans les équations autre que l_1. Le terme a_{11} est le pivot de l'étape 1 de l'algorithme. En réitérant le procédé, on aboutit à un système en escalier.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (s) $\begin{cases} x - y - z = 5 \\ x + 3y + 3z = 1 \\ 3x + y - 4z = -4 \end{cases}$

- **Méthode d'inversion**

  La matrice A su du système étant inversible, la méthode d'inversion est basée sur l'équation A X $= B$ $\Leftrightarrow$ X = A^{-1}B

Exemple Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (s) $\begin{cases} x - y - z = 5 \\ x + 3y + 3z = 1 \\ 3x + y - 4z = -4 \end{cases}$

2ème cas : A est non inversible

Si A n'est pas inversible, des trois méthodes ci-dessus, seule la méthode du pivot de Gauss est encore pratique. Elle conduit à deux solutions :

- On obtient deux équations contradictoires. Le système n'admet donc pas de solution.

- Certaines équations sont identiques. Le système est alors équivalent à un système de r équations à n inconnues (r désignant le rang de la matrice A) ? certaines inconnues étant considérées comme des paramètres, la résolution du système nous conduit à une infinité de solution.

Exemple Résolution dans $\mathbb{R}^3$chacun des systèmes suivants :

$$(s_1)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-2z=0 \\ 2x+3y-Z=5 \end{cases}, \qquad (s_2)\begin{cases} x-y-3z=4 \\ 3x+2y-4z=7 \\ 3x+7y-17z=2 \end{cases}$$

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

1. Calculer :

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} \Delta_2=\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ b^2 & ab & a^2 \\ ab & a^2 & b^2 \end{vmatrix} \text{et} \Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Déterminer le rang de chacune des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} B=\begin{pmatrix} 0 & m & \mathrm{m} \\ m & 0 & 1-m \\ 1-m & 1-m & 0 \end{pmatrix} (\mathrm{m}\in\mathbb{R}), C=\begin{bmatrix} 5 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 2

Résoudre chacun des systèmes suivants :

$$(s_1)\begin{cases} 3x-y+3z=1 \\ x+\quad 3z=-2 \\ 4x+\quad 2z=3 \end{cases} (s_2)\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-2z=0 \\ 2x+3y-z=5 \end{cases} (s_3)\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=1 \\ x+y+my=1 \end{cases}$$

Exercice 3

On considère le système $(s)\begin{cases} \ln(x^a)=1-2b-c \\ \ln(x^{a+b}) \quad =-2-c \\ \ln(x^c) \qquad =-a \end{cases}$

d'inconnue $(a\,;b\,;c)\in\mathbb{R}^3$, avec $x>0$.

1. Donner l'écriture matricielle de (S).
2. On note A(x) la matrice associé au système (S).

a) Montrer que : $\det A(x) = (-2 + \ln x)(1 + \ln x)(-1 + \ln x)$
b) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $A(x)$ est inversible
3. Résoudre (S) : pour $x = 1$ et $x = e$ respectivement.

Exercice 4

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A tout réel x, on associe la matrice $M(x)$ défini par :

$$(1)\ M(x) = I + xA + \frac{x^2}{2}A^2$$

1. Calculer A^2 et A^3. En déduire que pour tout entier $n \geq 3$, on a $A^n = 0$.
2. En utilisant l'égalité (1),
   Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $M(x)M(y) = M(x + y)$.
3. a) Montrer que $[M(x)]^n = M(nx), \forall\, n \in \mathbb{N}^*$
   b) Exprimer M (nx) en fonction de I, A et n. expliciter $M(x)$ et $[M(x)]^n$

   c) On donne $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. En utilisant 3.b), expliciter P^n

II- ESPACES VECTORIELS ET APPLICATIONS LINEAIRES

1. ESPACES VECTORIELS

1.1 Définition

- Soit E un ensemble non vide. On dit que E (muni des lois + et.) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp sur $\mathbb{C}$) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :
- (E ;+) est un groupe commutatif i.e. $\forall\, u, v, w \in E$:
  - $(u + v) + w = u + (v + w)$
  - $u + v = v + u$
  - $u + 0_E = 0_E + u = u$
  - $u + (-u) = 0_E$
- $\forall u, v \in E$ et $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (resp: $\mathbb{C}$):
  - $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
  - $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
  - $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
  - $1.u = u$

1.2 Quelques exemples d'espace vectoriels

- L'ensemble $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n (n \geq 1)$

Soit n un nombre entier naturel non nul. L'espace $\mathbb{R}^n$(resp $\mathbb{C}^n$) désigne l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbb{R}$ (resp de $\mathbb{C}$)

$$u \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow u = (u_1, \dots, u_n)\ avec\ u_1 \in \mathbb{R}, \forall\ i\ \in [\![1, n]\!]$$

- L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
- L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels et l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels dont le degré est inférieur ou égale à n.

$$\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n\ \ avec\ \ a_n = 0\ et\ \ \forall\ i \in [\![1, n]\!]\ , \mathrm{a_i} \in \mathbb{R}$$

Ne pas confondre $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}_\mathrm{n}[X]$

1.3 Sous espace vectoriel (s.e.v)

1.3.1 Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et F un sous espace ensemble de E. on dit que F est sous espace vectoriel de E si :

- F est non vide
- F est stable par combinaison linéaire (i.e.$\forall u, v \in$ F $et\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, (\alpha u + \beta v) \in$ F
  Ou bien($\forall u, v \in$ F, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,on a (u+v) $\in$ F et $\alpha u \in$ F).

1.3.2Propriété

Tout sous espace vectoriel (d'un espace vectoriel) est aussi un vectoriel, on montre que cet ensemble est un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.

Exercice

Montrer que l'ensemble E $= \{u\} = (x; y; x + 2y)$ avec $(x, y) \in \{\mathbb{R}\}$est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.4 Base et dimension d'un espace vectoriel

1.4.1Dépendance linéaire

Les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ d'un espace vectoriel E sont dits libres ou linéairement indépendants si toute combinaison linéaire nulle de ces vecteurs entraine que ces coefficients sonttous nuls.

$$\alpha_i \in \mathbb{R} \text{ tel que } \alpha_1 u_1 + \dots + a_n u_n = 0 \text{ on a: } \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Remarque : Dans$\mathbb{R}^n$, p vecteurs sont libres si le rang de la matrice formée par ces vecteurs est égal à p.

Exercice

Dans chacun des cas suivants, étudier la dépendance linéaire des vecteurs :

a. $u_1 = (1; 2; -1), u_2 = (0; 2; 2)$ et $u_3 = (1; 3; 0)$
b. $v_1 = (3; -2{,}2)$ et $v_2 = (0; 1; 4)$

1.4.2 Famille génératrice

Soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs d'un espace vectoriel E. la famille $\mathcal{F} = \{u_1, \dots, u_n\}$est une famille génératrice de E(on dit aussi que $\mathcal{F}$ engendre E) lorsque tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$. Dans ce cas on note :

$$\mathrm{E} = vect\{u_1, \dots, u_n\} \text{ ou } \mathrm{E} = \langle u_1, \dots, u_n \rangle.$$

Exercice : Déterminer une famille génératrice de l'espace vectoriel F.

$$\mathrm{F} = \{u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3, z = -2x + y\}.$$

1.4.3 Base et dimension d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel. On appelle base de E toute famille génératrice et libre de E. la dimension de E, noté **dim(E)**, est le nombre de vecteurs d'une base (quelconque) de E.

Remarque : Une base ne peut contenir le vecteur nul

Exercice : On considère l'E.V.F $= \{u = (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / z = -2x + y\}$.

a. Déterminer dim(F).
b. On pose $u_1 = (2; 0; 2)$et $u_2 = (2; 1{,}0)$. Montrer que $\{u_1, u_2\}$ est une base de F.

1.4.4 Bases canonique de $\mathbb{R}^n$et $\mathbb{R}_n[X]$

- Dans $\mathbb{R}^n$, la base canonique est définie par :
  $e_1 = (1; 0; \dots; 0), e_2 = (0; 1; \dots; 0), \dots\ e_2 = (0; \dots; 0; 1)$. Ainsi,
  dim $(\mathbb{R}^n) = n$ et $u \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow u = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \Leftrightarrow u = (x_1; \dots; x_n)$
- Dans $\mathbb{R}_n[X]$, la base canonique est définie par :
  $e_0 = 1 = X, e_2 = X^2, \dots, e_n = X^n$. Donc dim $(\mathbb{R}_n[X]) = n + 1$.

2. APPLICATIONS LINEAIRES

2.1Définitions

Soient E et F deux espaces vectoriels sur ℝ et f une application définie de E vers F. on dit que f est une **application linéaire** si

$$\forall u, v \in E \ et \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \text{on a } f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$$

On note L(E ; F) l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

Si l'application linéaire f de E vers F est bijective, on dit que f un **isomorphisme.** Lorsque l'application linéaire f est définie de E vers E, alors f est un **endomorphisme** de E. on note L(E) l'ensemble des endomorphismes de E.

On appelle **automorphisme** de E tout endomorphisme de E qui est bijectif.

2.2 Propriétés

- Si E et F deux espaces vectoriels sur ℝ, alors L(E) est un espace vectoriel sur ℝ.
- La composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

Exercice Soit l'application f de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x; y; z) = (2x + z; x - y + z; y)$

Montrer que f est linéaire puis, expliciter l'application linéaire fof

2.3 Matrice d'une application linéaire

2.3.1 Définition

Soient E et F deux espaces vectoriels sur ℝ, $B_E = (e_1; \dots; e_n)$ et $B_F = (u_1; \dots; u_m)$ des bases respectives de E et F. la matrice de f relativement aux bases $B_E$et B_F est la matrice obtenue disposant successivement en colonnes les composantes des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ exprimés en fonction des vecteurs de la base B_F.

Exercice On considère l'application linéaire f définie de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x; y; z) = (2x - z; x - y + z)$$

a. Déterminer la matrice A de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$vers $\mathbb{R}^{*2}$.

.

b. On pose $u_1 = (-1; 2)$ et $u_2 = (1; -1)$. Déterminer la matrice M de f relative aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $B_0 = (u_1, u_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

2.3.2 Propriétés

Propriété 1

Soient E, F et G deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de bases respectives B_E, B_F et B_G et $E \xrightarrow{g} F \xrightarrow{f} G$ deux applications linéaires de matrices respectives A et B relativement aux bases B_E, B_Fet B_G. Alors l'application linéaire fog : E⟶ G admet BA (dans cet ordre) pour matrice.

Propriété 2

Soit n un nombre entier naturel non nul et F :E⟶ E un endomorphisme de matrice A relativement à une base B_E de E. Alors l'application $f^n = fofo \dots of$est un endomorphisme de E de matrice A^n, relativement à la base B_E.

2.4 Noyau et image d'une application linéaire

2.4.1Définitions

Soit f de E vers F une application linéaire. On appelle :

- **Noyau de f,** noté **N(f)** ou **Ker(f),** l'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image par f le vecteur nul de F ,$N(f) = \{u \in E \,/ f(u) = 0_F\}$.
- **Image de f,** notée **Im(f)** ou **f(E),** l'ensemble des vecteurs de F qui ont un antécédent par f dans E.

Remarque : le noyau de f est un sous espace vectoriel de E tandis que l'image de f est un sous espace vectoriel de F

2.4.2Propriété

Soit f de E vers F une application linéaire. Alors

$$\dim(E) = \dim N(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

2.5 Rang d'une application linéaire

2.5.1 Définition

On appelle **rang** d'une application linéaire f , notée **rg(f)**, la dimension du sous espace vectoriel image de f. $rg(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$

2.5.2Propriété

Soient E et F des espaces vectoriels.

Soit f une application linéairedéfinie de E vers F, de matrice associée A relativement aux basesB$_E$ et B$_F$(de E et F respectivement). Alors rg(f) = rg(A).

Exercice : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\mathrm{f(x; y; z)} = (x - z + 3z; 3x + 2y - 4z; 3x + 7y - 17z)$$

Déterminer : N(f), Im(f) et rg(f).

2.6 Quelques propriétés sur les isomorphismes

Propriété 1

Soient E et F deux espaces vectoriels (sur $\mathbb{R}$) de bases respectives B$_E$ et B$_F$ tels que $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F}$, et $\mathrm{f}\colon \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application linéaire de matrice A relativement auxbases B$_E$et B$_F$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) f est un isomorphisme (ou automorphisme)
(2) A est inversible
(3) rg(f) = dim(E)
(4) Im(f) = F (i.e.f est subjective)
(5) N(f) = ={0$_E$} (i.e. f est injective)

Propriété 2

Soit f : E ⟶ E un endomorphisme de matrice A, relativement à une base B$_E$de E. Si f est bijective, alors f admet une bijection réciproque notée f^{-1} de matrice A^{-1} (la matrice inverse de A).

ExerciceSoit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Relativement à la base canonique.

a) Montrer que f est un automorphisme. En déduire N(f) et Im(f).
b) Expliciter la bijection réciproque f^{-1} de f. En déduire A^{-1}.

TRAVAUX DIRIGES

Exercice 1

On considère l'ensemble $\mathrm{E} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / x - y + 2z = 0\}$

1. Montrer que E est sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la dimension de E.
3. Montrer que les vecteurs $u = (1,3,1)$ et $w = (0,2,1)$ forment une base de E.

Exercice 2

Soient $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par : $f(e_1) - e_1 = 4(e_2 - e_3), f(e_2) - 3e_2 = -2(2e_3 - e_1)$
et $f(e_3 - e_1) + e_3 = f(e_2 - e_1) + e_2$

1. Déterminer la matrice M de f relativement à la base de B.
2. a) Montrer que f un automorphisme.
   b) En déduire Im (f) et N (f)
   c) Calculer M^2. En déduire la matrice M^{-1} de la bijection réciproque f^{-1} de f
   d) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $f^{-1}(u)$.
3. On considère l'ensemble $G = \{u \in \mathbb{R}^3 / f(u) = u\}$
   a) Vérifier que $v = (-1; -2; 2) \in G$
   b) Montrer que G est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$

Exercice 3

Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'application de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$ définie par $f(e_1) = 2e_1 - 3e_2 + e_3; f(e_2) = e_1 - e_2$ et $f(e_3) = e_2 - e_3$

1. Ecrire la matrice de f dans la base B
2. Calculer M^2et M^3
3. Déterminer une base de Ker(f) et une base de Im(f) ainsi que leurs dimensions respectives.
4. On pose$u_1 = f^2(e_3), u_2 = f(e_3)$et $u_3 = e_3$. Montrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
5. Donner la matrice de passage P de la base B à la base B'. Calculer P^{-1}
6. Déterminer :
   a) Les composantes du vecteur$v = -2e_1 + 3e_2 - e_3$, dans la base B'.
   b) La matrice N de l'application f, dans la base B'.

Exercice 4

Soient $B_0 = (e_1, e_2)$ et $B_1 = (i, j, k)$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$et $\mathbb{R}^3$. On considère les applications linéaires suivantes :f $: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$(x, y, y) \longmapsto (x - z; -x + 2y)$$

g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 (x, y) \longmapsto (x - z; 2y; -x)$

Et on pose$h = gof$

Partie A

1. Déterminer Ker(g) et Im(g).
2. a) Déterminer la matrice A de f relativement aux basesB_0 et B_1.

   b) Vérifier que la matrice de g relativement aux bases B_0 et B_1 est t_A

3. On note M la matrice de h relativement à la base B_1
   a) Sans déterminer la matrice M, justifier qu'elle est symétrique.
   b) Déterminer l'expression de h en fonction de x, y et z
   c) En déduire que relativement à B_1, on a $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   d) h est-il un automorphisme ? Justifier votre réponse
4. On pose $u_1 = 2i + j + 2k$; $u_2 = g(e_2)$ et u_3 = k
   a. Montrer que $B_2 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   b. Déterminer la matrice N de h relativement à B_1.

Partie B

On considère l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y = z\}$

1.
   a. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
   b. On pose : $v_1 = j + k$ et $v_2 = i - 2j$. Montrer que$B_3 = (v_{1,} v_2)$ est une base de E
2. Soit h_0 l'application définie sur E par $h_0(x, y, z) = h(x, y, z) + \frac{3}{2}(x; 2y; 0)$
   a. Montrer que h_0 est un endomorphisme de E.
   b. Déterminer la matrice H deh_0 relativement à B_3.
3. Déterminer le noyau et l'image de h_0. Préciser une base pour chacun de ces espaces vectoriels.

III- REDUCTION DES ENDOMORPHISMES

1. Changement de base

Dans cette partie, E un espace vectoriel de dimension n, B et B' deux bases de E.

1.1 Matrice de passage

La matrice de passage de la base B à la base B' est la matrice inversible P dont les colonnes sont constituées des composantes des vecteurs successifs de la base B' exprimés en fonction des vecteurs de la base B.

1.2 Formules de changement de base

1.2.1 Changement de base pour les vecteurs

Propriété : Soit P une matrice de passage de la base B à la base B' et u un vecteur de E tel que : $u = (a_1; \dots; a_n)$ dans la base B et $u = (a'_1; \dots; a'_n)$dans la base B'. Alors :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_2 \end{pmatrix} = \mathrm{P}\begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix} = \mathrm{P}^{-1}\begin{pmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_n \end{pmatrix}$$

1.2.2 Matrices semblables

Définition : Deux matrices M et N sont dites semblables s'il existe une matrice inversible Q telle que $\mathrm{M} = \mathrm{Q\,N\,Q}^{-1}$.

Propriété : Si M et N sont deux matrices semblables, alors :λ

- $\det \mathrm{M} = \det \mathrm{N}$
- $\det(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}) = \det(\mathrm{N} - \lambda \mathrm{I})$

1.2.3 Changement de base pour les matrices

Propriété : Soient f un endomorphisme de E de matrices M relativement à la base B et N relativement à la base B' et soit P la matrice de passage de la base B à la base B'.

Alors on a :

$$\mathbf{N = P^{-1}MP \text{ et } M = PNP^{-1}}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "\mathrm{P}"] & \mathcal{B}' \arrow[l, bend left, "\mathrm{P}^{-1}"] \\ \mathrm{M} & \mathrm{N} \end{tikzcd}$$

Remarque : Les matrices M et N sont semblables.

Exercice : On note $\mathrm{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

Soit f ∈ L tel que $\mathrm{f}(x, y, z) = (2x - y + z; -x + y + z; x - 2y)$

1. Déterminer la matrice A de f relativement à la base B_0
2. On considère les vecteurs $u_1 = e_1 + e_3$et $u_2 = -2e_1 + e_2 - e_3$
   a. Montrer que $\mathrm{B}_1 = (u_1, u_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$
   b. Déterminer la matrice de passage P de la base B_0et B_1 puis la matrice M de f relativement à B_1.

2. DIAGONALISATION

Soient E un espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E de matrice A relativement à une base B de E.

2.1 Eléments propres et polynôme caractéristique de f

- On dit qu'un vecteur non nul u de E est un vecteur propre de f (ou de A) s'il existe un réelλ tel que f(u) = λu (ou Au=λu). le réel λ est alors appelé valeur propre associée au vecteur propre u. l'ensemble des valeurs propres de f est appelé le spectre de **f** notésp(f).
- On appelle polynôme caractéristique de f (ou de A) le polynôme noté $P_A(x)$ et défini par : $P_A(x) = \det(A - xI)$ où I désigne la matrice unité d'ordre n. les racines de ce polynôme sont les valeurs propres de f. Ainsi,$\lambda \in \mathrm{sp}(f) \Leftrightarrow \det(A - \lambda I) = 0$ et en particulier on a : $0 \in \mathrm{sp}(f) \Leftrightarrow \det(A) = 0$.

Remarques

- Les matrices A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique.
- Le degré du polynôme caractéristique est égale à l'ordre de la matrice A. donc A admet au plus n valeurs propres.

2.2 Sous espaces propres (s.e.p)

2.2.1Définition Soit λ une valeur propre de f. on appelle sous espace propre associé à λ, noté E_λ, le noyau de l'application linéaire $(f - \lambda id_E)$ où id_E désigne l'endomorphisme identité de E (elle admet I pour matrice, I étant la matrice unité d'ordre n).

$E_\lambda = \{u \in E / (f - \lambda id_E)(u) = 0_E\} = \{u \in E / (A - \lambda I)u = 0_E\}$.

2.2.2Propriété

Soit A une matrice carrée d'ordre n et λ une valeur propre d'ordre (de multiplicité) m de A. Alors :

- $1 \leq \dim E_\lambda \leq m$
- En particulier si $m = 1$ (λ est une valeur propre simple), $\dim E_\lambda = 1$
- $\dim E_\lambda = n - rg(A - \lambda I)$.

2.3 Propriétés

Soit A une matrice carrée d'ordre n

- Si un polynôme $P(x)$ de degré n est tel que $P(A) = 0$, alors il existe un réel non nul α tel que $P(x) = \alpha P_A(x)$.
- Si n = 2 (i.e. A est une matrice carrée d'ordre 2), alors le polynôme caractéristique de A s'écrit $P_A(x) = x^2 - (\mathrm{tr}A)x + \det A$
- Si n = 3 (i.e A est une matrice carrée d'ordre 3) : le polynôme caractéristique de A s'écrit : $P_A(x) = -x^3 + (\mathrm{tr}A)x^2 - (\mathrm{tr}\ \mathrm{com}A)x + \det A$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathrm{sp}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \mathrm{tr}\, A \\ \\ \lambda_1 . \lambda_2 . \lambda_3 = \det A \end{cases}$$

2.4 Diagonalisation

2.4.1 Définition

Diagonaliser l'endomorphisme f de E, c'est trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

A étant la matrice de f relativement à la base B, s'il existe une base $B' = (u_1; \dots; u_n)$ de E formée essentiellement de vecteurs propres, alors la matrice D de f dans cette base est diagonale et on a $D = P^{-1} A P$ où P est la matrice de passage de la base B à la base B'. La matrice diagonale D est de la forme :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Où, pour i fixé, λ_i est la valeur propre associée au vecteur propre u_i.

Remarques

- Dans D, les valeurs propres se répètent chacune selon son ordre de multiplicité.
- La disposition des valeurs propres dans D tient compte de la disposition des vecteurs propres dans P. En effet, pour i fixé, la valeur propre λ_i et le vecteur propre u_i sont respectivement situés aux colonnes i des matrices D et P.

2.4.2 Propriétés

Propriété 1 : Une matrice carrée d'ordre n'admettant n valeurs

Propres distincts deux à deux est diagonalisable.

Propriété 2 : Une matrice carrée d'ordre n est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous espaces propres associés est égale à n.

Propriété 3 : Une matrice carrée symétrique à coefficients réels est diagonalisable et toutes les valeurs propres sont réelles.

Exercice : On considère la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de A.

2. Montrer que A est diagonalisable.

3. Diagonaliser A.

3. APPLICATIONS

3.1 Résolution des systèmes différentiels

Nous nous proposons résoudre le système différentiel linéaire suivant :

$$(s)\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Où les fonctionsy_i sont les inconnues du système. Le système. Le système (S) s'écrit sous la forme matricielle.

$$(1) \qquad (s) \Leftrightarrow \frac{dY}{dx} = AY$$

Où$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons que la matrice A est diagonalisation (i.e il existe une matrice inversible P telle que

$$(2)\ P^{-1}A\,P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda_i \in \mathbb{R}, \forall\, i$$

En injectant (2) dans (1), il vient $\quad (3)\ P^{-1}\frac{dY}{dx} = A\,P^{-1}Y$

Dans (3), posons$U = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$. Le système (3) est alors équivalent à :

$$(4)\ \frac{dU}{dx} = DU \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{du_1}{dx} = \lambda_1 u_1 \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dx} = \lambda_n u_n \end{cases}$$

Le système (4) admet pour solution$U = P^{-1}Y = \begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n} \end{pmatrix} (k_i \in \mathbb{R}, \forall\ i)$

La solution du système (S) s'écrit alors

$$Y = P\begin{pmatrix} k_1 e^{\lambda_1} \\ \vdots \\ k_n e^{\lambda_n} \end{pmatrix} (k_i \in \mathbb{R}, \forall\ i)$$

Exercice : Résoudre le système différentiel $(S)\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \quad 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$

3.2 Calcul de lapuissance $n^{ième}$ d'une matrice

Soit A une matrice carrée d'ordre m. supposons que A est semblable à une matrice diagonal D ; c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P telle que :

$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m \end{pmatrix}$ avec $(k_i \in \mathbb{R}, \forall\ i)$Alors :$A = P\ D\ P^{-1}$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = P\ D^n P^{-1}$ avec $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_m^n \end{pmatrix}$.

,

TRAVAUX DIRIGES

Exercice1

Soient (u_n) et v_n deux suites numériques telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} u_n = u_{n+1} + 4v_{n-1} \\ \\ v_n = 2u_{n-1} - 4v_{n-1} \end{cases} \text{et } u_0 = v_0 = 1$$

1. a) Donner l'écriture matricielle du système récurrent (on notera A la matrice associée)

   b) on pose $\mathrm{X_n} = \binom{u_n}{v_n}$. Exprimer $\mathrm{X_n}$ en fonction de $\mathrm{X_{n-1}}$ puis en fonction de N

2. Diagonaliser A.
3. En déduire l'expression de chacun des termes $u_n$et v_n en fonction de n.

Exercice2

1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $\mathrm{g(x)} = -x^3 + 24x^2 - 180x + 432$
   a) Dresser le tableau de variation de la fonction g.
   b) En déduire toutes les racines de la fonction g
2. On considère E un espace vectoriel de dimension 3 muni de la base $\mathrm{B} = (e_1, e_2, e_3)$et f l'endomorphisme de E définie par :

$$\begin{cases} \mathrm{f}(e_1) = 10e_1 - 2e_2 - 2e_3 \\ \mathrm{f}(e_2) = -2e_1 + 7e_2 + e_3 \\ \mathrm{f}(e_3) = -2e_1 + e_2 + 7e_3 \end{cases}$$

Soit A la matrice de l'endomorphisme f relativement à la base B

a) Donner l'expression explicite de la matrice A.
b) Donner le noyau N et l'image I de l'endomorphisme f.

3. a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est g(*x)*
   b) En déduire les valeurs propres de A.
   c) L'endomorphisme f est-el diagonalisable ? Justifier votre réponse.

4. a) Déterminer une base $\mathrm{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ formée de vecteurs propres de f telle que :

- u_1 a pour 1ère composante le réel 1 et pour 3è composante le réel 0
- u_2 a pour 1ère composante le réel 0 et pour 3è composante le réel -1
- u_3 a pour 1ère composante le réel -1.

5. Soit P la matrice de passage de la base B à la base B'
   a) Montre que $P^{-1}AP$est une matrice diagonale D
   b) Donner l'expression explicite de la matrice $A^n (n \in \mathbb{N})$
6. On considère le système des suites récurrentes définies, pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 10u_n - 2v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 7v_n + w_n \\ w_{n+1} = -2u_n + v_n + 7w_n \end{cases} \quad \text{avec } (u_0, v_0, w_0) = (-1,2,3)$$

   a) Montrer que$\forall n \in \mathbb{N}^* \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.
   b) En déduire le terme général de chacune des suites : $(u_n), (v_n)$et (w_n).

Exercice 3

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique B = (e_1,e_2,e_3).

On considère l'endomorphisme de$\mathbb{R}^3$, f défini par

$$f(x) = (3x + y - z; -x + z; -x - 3y + 3z)$$

1- Déterminer la matrice A de f relativement à la base B.
2- a) Montrer que 2 est une valeur propre de f.
   b) En déduire les autres valeurs propres.
   c) f est – il diagonalisable ? Justifier.

3- a) Démontrer qu'il existe un seul vecteur propre v dont la première coordonnée est 1.

   b) Montrer que B'= (v, e_2,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

4- Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $g(x, y, z) = (0, y, -x + z)$.

   a) Déterminer la matrice G de g relativement à la base B.

b) Déterminer la matrice C de l'endomorphisme gof relativement à la base B.

5- a) Vérifier que 2 est une valeur propre de gof et déterminer le sous-espace vectoriel propre E correspondant à cette valeur propre.

b) Donner une base de E dont un vecteur w a pour première coordonnée le nombre zéro.

6- a) Démontrer que B''= (v,w,e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer la matrice T de f relativement à la base B''.

Exercice4

L'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$ est supposé muni de sa base canonique B=(e_1,e_2,e_3).

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base B est

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

PARTIE A

1- Montrer que 6 et 12 sont des valeurs propres de f.
2- Déterminer la 3^e valeur propre de f.
3- Montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
4- Déterminer l'antécédent par f du vecteur u = $e_1 + e_2 + e_3$.

PARTIE B

1- Montrer que les vecteurs i = (1, 0, 2) et j = (0, 1, -1) sont des vecteurs propres de la matrice A associés à la valeur propre 6.
2- La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, donner une matrice de passage P qui permet de la diagonaliser.
3- Pour tout entier naturel non nul n, on pose $f^n = fofofo \dots of$. (f composée par elle-même n fois).
Déterminer les coordonnées dans la base B du vecteur $f^8(u)$.

EXERCICE 5

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique B = (e_1,e_2,e_3).

$f_m(e_1) = 3e_1 + 2e_2 - e_3$

$f_m(e_2) = e_1 - 3e_2 + 2e_3$

$f_m(e_3) = (2m - 11)e_1 - me_2 + (m - 1)e_3$. ($m$est un paramètre réel).

1- A_m désigne la matrice de l'endomorphisme f_m relativement à la base canonique B.
   a) Donner l'expression de A_m.
   b) Pour quelles valeurs de m$\in \mathbb{R}$, la matrice A_m est-elle une matrice de rang 2 ? Justifier.
   c) Existe-t-il des valeurs de m$\in \mathbb{R}$, pour lesquelles la matrice A_m est une matrice de rang 1 ? Justifier.

2- On note A la matrice A_0 (A_0 désigne la matrice A_m pour m = 0) et f designe f_0
   a) Déterminer le noyau N de f et donner une base de N.
   b) En déduire de la question a) que l'endomorphisme f n'est pas un automorphisme.
   c) I désigne l'image de f. Déterminer I et donner une base de I.

3- a) On appelle polynôme caractéristique de la matrice A, le polynôme note $P_A(x)$ = det (A – xI) (I désignant la matrice unité d'ordre 3)
   $P_A(x) = -x^3 - x^2 + 22x$.
   b)En déduire toutes les valeurs propres de la matrice A.
   c) La matrice A est-elle diagonalisable ? Justifier.

4- a) Montrer qu'il existe une matrice carrée P inversible telle que $\underline{P^{-1}AP =}$ <u>D</u>

   b) On pose X = $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   Intégrer le système différentiel $\frac{dX}{dt} = DX$avec$\begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -2. \\ z(0) = 3 \end{cases}$

Exercice 6

Soit f ∈ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice relativement à la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 8 \\ 1 & 2 & -1 \\ -5 & -2 & 9 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A est inversible, puis calculer A^{-1}

2. a) On pose $u = (2; 2; 2)$. Déterminer le vecteur $v = (x; y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(v) = u$. Que peut en déduire ?

b) Déterminer les valeurs propres de f (On les notera : λ_1, λ_2 et λ_3 avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$)

c) f est-il diagonalisable ? Justifier.

3. a) Déterminer les sous espaces propres associées

b) Donner une base B de $\mathbb{R}^3$ formé de vecteurs propres de f telle que relativement à cette base B, la matrice de f soit :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

c) Donner la matrice de passage de la base canonique à la base B.

4. Résoudre le système différentiel (S):

$$\begin{cases} x'(t) = -4x(t) - 2y(t) + 8z(t) \\ y'(t) = \quad x(t) + 2y(t) - z(t) \\ z'(t) = \quad -5(t) - 2y(t) + 9z(t) \end{cases}$$

CHAPITRE III : SERIES NUMERIQUES – SERIES DE FOURIER

I- SERIES NUMERIQUES

1. Définition

Soit (Un) une suite numérique ; on appelle série de terme générale (Un) la suite des sommes partiellesS $= \sum_{k=n_0}^{n} \mathrm{U}_k$. Elle se note simplement$\sum_{n\geq n_0} \mathrm{U}_n$, n_0 étant l'indice du terme initial de la série. La série $\sum_{n\geq n_0} \mathrm{U}_n$ converge si $\lim\limits_{\infty} \sum_{k=n_0}^{n} \mathrm{U}_k$ est finie. La limite de série s'écrit $\sum_{n}^{\infty} \mathrm{U}_n$ et est appelée somme de la série.

Exemple : La série de terme générale $\mathrm{U}_n = 1 + \frac{1}{n^2}, n \geq 1$.

On a $\sum_{n\geq 1} \mathrm{U}_n = \left(1 + \frac{1}{1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$

2. Condition nécessaire de convergence

Propriété : Si la série de terme générale$\sum_{n\geq n_0} \mathrm{U}_n$ converge,

Alors$\lim\limits_{\infty} \mathrm{U}_n = 0$

La réciproque est fausse

Exercice : Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$

2.1 Séries géométriques

Définition On appelle série géométrique une suite de somme parallèles dont le terme

générale est une suite géométrique. Ex : $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{3^n}$

Propriété : Soit (Un) une suite géométrique de raison q. Alors la série géométrique $\sum_{n\geq n_0} \mathrm{U}_n$ converge vers $\frac{\mathrm{u}_{no}}{1-\mathrm{q}}$si $|\mathrm{q}| < 1$ et diverge sinon.

2.3 Série à termes positifs

Série de Riemann

Ce sont les séries de la somme $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha}}$avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Elles convergent si $\alpha > 1$ et divergent sinon.

Exemple : La série de Riemann$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n\sqrt{n}}$converge car $\alpha=\frac{3}{2}>1$

3. Majoration – Minoration

Propriété : Soient $\sum_{n\geq n_0}\mathrm{U}_n$ et $\sum_{n\geq n_1}\mathrm{v}_n$ deux séries à termes positifs telles qu'a partie d'un certain rang N on ait Un $\leq$ Vn. Alors :

- $\sum_{n\geq n_0}\mathrm{U}_n$ diverge $\Rightarrow\sum_{n\geq n_1}\mathrm{v}_n$ diverge
- $\sum_{n\geq n_1}\mathrm{v}_n$ converge $\Rightarrow\sum_{n\geq n_0}\mathrm{U}_n$ converge

Exercice : Etudier la convergence de série $\sum_{n\geq n_1}\frac{\sin^2 n}{n^3+1}$

4. Emplois des équivalences

Propriété : Soient $\sum_{n\geq n_0}\mathrm{U}_n$ et $\sum_{n\geq n_1}\mathrm{v}_n$ deux séries à termes positifs telles qu'a partir

d'un certain rang N, on fait Un$\sim$Vn. Alors les séries$\sum_{n\geq n_0}\mathrm{U}_n$ et $\sum_{n\geq n_1}\mathrm{v}_n$ sont de même nature

Exercice :

Etudier la convergence de la série de terme générale $\mathrm{U}_n=\frac{\ln(1+n)-\ln n}{n}$

5. Les critères de convergence

Soit$\sum_{n\geq n_0}\mathrm{U}_n$ une série à termes positifs. Alors nous avons les critères de convergence suivants :

Les critères de Cauchy

$$\text{Soit } \mathrm{L}=\lim_{\infty}\sqrt[n]{\mathrm{U}_n}, \text{Alors} \begin{cases} \mathrm{L}<1\Rightarrow\sum_{n\geq n_0}\mathrm{U}_n \text{ converge} \\ \mathrm{L}>1\Rightarrow\sum_{n\geq n_0}\mathrm{U}_n \text{ diverge} \\ \mathrm{L}=1\text{: On ne peut rien dire} \end{cases}$$

Le critère de l'Alembert

Soit $L = \lim\limits_{\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ Alors $\begin{cases} L < 1 \Rightarrow \sum_{n \geq n_0} U_n \text{ converge} \\ L > 1 \Rightarrow \sum_{n \geq n_0} U_n \text{ diverge} \\ L = 1 : \text{On ne peut rien dire} \end{cases}$

Remarque : Si la règle de l'Alembert donne une réponse, alors la règle de Cauchy donnera également une réponse. Mais quand la règle de Cauchy ne donne pas de réponse, ça ne vaut pas la peine d'essayer celle de d'Alembert.

Exercice : Etudier la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$ et $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2n+1}{3n-1}\right)^{\mathrm{n}}$

6. Série alternées

Ce sont des séries dont les termes sont alternativement positifs et négatifs.

Exemple : $\sum_{n \geq 0} \cos n\pi$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$

Propriété : Soit $\sum_{n \geq n_o} U_n$ une série alternée. Si la suite $|U_n|$ et décroît et tend vers 0 alors $\sum_{n \geq n_o} U_n$ converge.

Exercice : Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

7. Séries à termes de signe quelconque

Ce sont des séries qui sont ni alternées, ni à terme positifs

Exemple : $\sum_{n \geq 0} \sin n$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos n}{n^2}$

7.1 Définition : La série $\sum_{n \geq n_0} U_n$ converge absolument si $\sum_{n \geq n_0} |U_n|$ converge.

Propriété : Si la série $\sum_{n \geq n_0} U_n$ converger absolument, alors elle converge.
La réciproque est fausse.

Exercice : Etudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos n}{n^2}$.

II- SERIES DE FOURIER

1. Définitions

Soit f une fonction numérique ou complexe T-périodique et continue sur tout intervalle fermé de$\mathbb{R}$. On appelle :

- Coefficients (réels) de Fourier de f les nombres a_0, a_n, et b_n définis par :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos n\omega t\, dt \text{ et } b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin n\omega t\, dt$$

Où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$

- Série de Fourier de f, la série trigonométrique de terme général $u_n = (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ et le développement en série de Fourier de f s'écrit :

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Où a_0, a_n, et $b_n$désignent les coefficients de Fourier de f.

1.1 Coefficients de Fourier et parité de f

Soit f une fonction numérique T-périodique et continue sur $\mathbb{R}$. Alors :

- Si f est paire, on a :

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{T}{2}} f(t)dt, \quad a_n = \frac{4}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{T}{2}} f(t)\cos n\omega t\, dt \text{ et } b_n = 0, \quad \forall\, n \geq 1$$

- Si f est impaire, on a :

$$a_0 = 0, a_n = 0 \text{ et } a_n = \frac{4}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+\frac{T}{2}} f(t)\sin n\omega t\ \, dt\,, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Exercice d'application

Soit f la fonction 2π- périodique définie par $f(t) = t, \forall\ |t| < \pi$

Représenter puis déterminer sa série de Fourier de f.

2. Ecriture complexe de la série de Fourier

Soit f une fonction numérique ou complexe T-périodique sur $\mathbb{R}$ et continue sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$. Alors la série de Fourier de f peut s'écrire :

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega t}$$

Où les $C_n (n \in \mathbb{Z})$ désignent les coefficients complexes de Fourier et sont définis par :

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{-jn\omega t}\,dt \quad (n \in) \ \mathbb{Z}$$

2.1 Propriété

Les coefficients complexes $C_n$et les coefficients réels a_0, a_n, et b_n de Fourier sont liés par les relations suivantes :

$$a_0 = c_0 \text{et} \ \forall\, n \geq 1, C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad |C_n| = |C_{-n}| = \frac{1}{2}\sqrt{a_n{}^2 + b_n{}^2}$$

Exercice : Soit la fonction 2π- périodique définie par $f(t) = e^t, t \in [-\pi, \pi[$

a) Déterminer les coefficients de Fourier.
b) Ecrire la série de Fourier de f.

3. Convergence

3.1 Définition

On dit qu'une fonction périodique f satisfait aux conditions de Dirichlet si :

- f est continue, dérivable et sa dérivée f ' est continue sur un intervalle période, sauf en un nombre fini de points en lesquels f n'est pas continue.
- en ces points particuliers, f et f ' admettent des limites finies a gauche et a droite.

Propriété : Si la restriction de f à un intervalle périodique est deux fois dérivables, alors f satisfait aux conditions de Dirichlet.

4. Théorème (de convergence de Dirichlet)

Si une fonction f satisfait aux conditions de Dirichlet, alors :

- la série de Fourier de f converge vers f(t), si f est continue en t.

- la série de Fourier de f converge vers $\frac{1}{2}[f(t_0^-) + f(t_0^+)]$si $t_0$est un point de discontinuité (où $f(t_0^-) = \lim_{t \to t_0^-} f(t)$et $f(t_0^+) = \lim_{t \to t_0^+} f(t)$

4.1 Définition

Soit f une fonction T-périodique et continue sur tout l'intervalle fermé de $\mathbb{R}$. On dit que f est développable (ou décomposable) en série de Fourier sur $\mathbb{R}$, si sa série de Fourier associés converge sur $\mathbb{R}$ en chaque point et pour tout$t \in \mathbb{R}$, elle admet pour somme f(t).

Exercice

Soit f la fonction numérique 2π- périodique, paire définie par :

$f(t) = t, \forall\, t \in [0, \pi]$

a) représenter f sur$[-3\pi; 3\pi]$.
b) Montrer que f est développable en série de Fourier.
c) Déterminer la série de Fourier associée à f.
d) Montrer que $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
e) En déduire la somme de la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$

Remarque : la série de série de Fourier d'une fonction f peut s'écrire :

$$S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Il suffit de poser $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$et $\varphi_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$, $a_n \neq 0, \forall\, n$

5. Théorème de Parseval

Soient f une fonction T-périodique et continue sur tout intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $S_f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$sa série de Fourier. Alors on a l'égalité suivante :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2\,(t) = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n-1}^{\infty}\left({a_n}^2 + {b_n}^2\right) \text{ formule de Parseval)}$$

Exercice

Soit f la fonction 2π- périodique définie par f(t) = t, $\forall|t| < \pi$.

a) Déterminer la série de Fourier de f

b) Montrer en utilisant la formule de Parseva l que$\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

III- Travaux digérés

Exercice 1

Etudier dans chaque cas, la convergence de la série de terme général :

$$u_n = \frac{n^2}{(2n)!}, \qquad v_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}, \quad w_n = \frac{\sin n}{n^2 - 4} \text{ et } z_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 2

On considère la fonction f, périodique de période 4, paire, définie sur [0; 2[par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{4} - 1 & \text{si } x \in]0;2] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-3; 9]$
2. a) Donner la limite à droite de la fonction f au point d'abscisse 0, notée $f(0^+)$

   b) Donner la limite à gauche de la fonction f au point d'abscisse 0, notée $f(0^-)$

   c) La fonction f est-elle continue au point d'abscisse 0 ? Justifier la réponse.

3. a) Soient (a_n)et (b_n)les coefficients de Fourier réels de f.
   Déterminer :a_{2p}, a_{2p+1}(pour $p \in \mathbb{N}$), et b_n(pour $n \in \mathbb{N}$).

   b) Montrer que la série de Fourier de f au point x est :

$$S_f(x) = -\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2}\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos\left[(2p+1)\frac{\pi x}{2}\right]}{(2p+1)^2}$$

   c) En tout point de l'intervalle[0; 2[, a-t-on $f(x) = S_f(x)$? Justifier la réponse.

4. a) Montrer que la série $\sum_{p\geq0}\frac{1}{(2p+1)^2}$ converge.

   b) De l'expression de $S_f(0)$, donner la somme de la série$\sum_{p\geq2}\frac{1}{(2p+1)^2}$

<u>Exercice 3</u>

<u>Partie A</u>

Soit n un entier naturel non nul. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1} u_n$ de terme générale $u_n = \frac{1}{4n^2-1}$

1. Déterminer que cette série est convergente.
2. Déterminer les réels a et b tels que : $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$
3. On pose $S_p = \sum_{n=1}^{p} u_n$

Exprimé S_p en fonction de p. En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$

<u>Partie B</u>

Soit f la fonction numérique, paire, 2π-périodique définie par :

$$f(t) = 1 - \sin t \quad si\ 0 \leq t \leq \pi$$

1. Tracer la courbe représentative de f sur $\left[-\frac{9\pi}{2} ; \frac{9\pi}{2}\right]$
2. a) Justifier que $\forall\ n \in \mathbb{N}, b_n = 0$

   b) Calculer a_0 et a_1

   c) Calculer $a_{2p+1}, a_{2p} \forall\ p \in \mathbb{N}^*$

3. a) Montrer que la fonction f vérifie les conditions de Dirichlet

   b) Ecrire le développement en série de Fourier de la fonction f.

   c) En utilisant le développement en série de Fourier de la fonction f, calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

<u>Exercice 4</u>

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ 2π-périodique, impaire définie par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ \ si\ 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ \alpha\ si\ \frac{\pi}{2} < t < \pi \end{cases}$$ et prenant des valeurs quelconques aux points $\frac{\pi}{2}\ et\ \pi$

α étant un nombre réel non nul.

1. Représenter f sur $[-3\pi; 3\pi[$
2. a) Montrer que f vérifier les conditions de Dirichlet

   b) Calculer les coefficients de Fourier de f (on distinguera les cas b_{2p} et b_{2p-1})

   c) Déterminer la série de Fourier de f
3. Calculer la somme $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}$ sachant que $\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Chapitre IV : CALCULS DE PROBABILITÉS

On cherche la probabilité d'événements complexes, l'énumération des cas élémentaires est souvent difficile, fastidieuse, ou l'un et l'autre. Pour faciliter la tâche, on utilisera les principes de base de l'analyse combinatoire.

I- VOCABULAIRE DE BASE

Ensemble : un ensemble est constitué d'éléments. Leur nombre, s'il est fini, est le cardinal de l'ensemble, soit A = {a; b; c; d; e} d'où cardA = 5

Expérience aléatoire : Une expérience est aléatoire lorsque son issue est imprévisible.

Exemple : on lance un dé.

L'univers : l'univers fi est l'ensemble des résultats possibles (éventualités). Pour le lancer d'un de

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Evénement : Partie de l'univers notée A, B, C.... (A, B, C$\subset \Omega$) .P(Ω) est l'ensemble des événements de l'univers Ω (A, B, C $\in$ P(Ω)). L'ensemble des nombres impairs est A = {1, 3, 5} dans le cas .du lancer de dé

L'événement élémentaire : événement comportant une seule éventualité. Les ensembles {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6} sont des événements élémentaires.

Evénement certain, impossible: respectivement Ω et $\emptyset$ (ensemble vide).

Evénements contraires : $\overline{A}$ est l'événement contraire de A (ce sont des parties complémentaires dans Ω ; on note symboliquement $\overline{A} = \Omega - A$). L'ensemble des nombres pairs est l'événement contraire de l'ensemble des nombres impairs dans le cas de lancers de dé.

Evénement A∩B : c'est l'événement A et B (A et B se réalise lorsque A et B se réalisent simultanément). $A\cap B = \{x \in \Omega\ x \in A \text{ et } x \in B\}$

Evénement A∪B : c'est l'événement A ou B. (A ou B se réalise lorsque l'un au moins des deux événements se réalise. $A\cup B = \{x \in \Omega\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Evénements incompatibles : On dit que A et B sont incompatibles (c'est-à dire ne peuvent pas se produire simultanément) si $A\cap B = 0$. Il est clair par exemple, que A et $\overline{A}$ sont incompatibles car on a toujours $A\cap \overline{A} = \emptyset$

1. THEOREMES:

- $A\subset B \Leftrightarrow A\cap B = A$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

• $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

• $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

• $A \cup B = B \cup A$

• $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

• $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

• $A \cap B = B \cap A$

2. **PROBABILITE :**
   a) **Définition :**

Soit Ω un univers et P(Ω) l'ensemble des événements de cet univers. Une probabilité est une application $p : \Omega \to [0 ; 1]$ telle que :

1- $p(\emptyset) = 0$
2- $p(\Omega) = 1$
3- $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ si A et B sont incompatibles.
4- Si l'univers Ω est fini et si les événements élémentaires sont équiprobables, alors :

$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$. Ainsi, la probabilité d'un événement A est la fréquence (au sens statistique) de A de Ω

Card(Q) nombre de cas possibles fréquence (au sens statistique) de A de Ω.

Exemple 1:

On tire deux cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes. On cherche la probabilité d'obtenir deux rois. On est bien dans le cadre de la probabilité uniforme avec Card(Ω) $C_{32}^{2} = 496$. Soit A l'événement aléatoire «on obtient deux rois». Puisque le jeu comporte 4 rois, le nombre de cas favorables est $\text{Card}(A) = C_4^2 = 6$. Finalement on trouve P (A) = $\frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{6}{496} = 0{,}012$

b) Propriété

Quels que soient les événements A et B

• $0 \leq P(A) \leq 1$;

• $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

• $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

• si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$. ' .

Exemple 2 : tirage avec remise

On lance 4 fois de suite une pièce de monnaie.

1. Quelle la probabilité d'obtenir 4 fois pile ?

2. Quelle la probabilité d'obtenir au moins une fois face au cour des quatre lancers ?

Solution :

Soit A «obtenir 4 fois pile » et B «obtenir au moins une fois face»

1. $P\ (A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}\ (\Omega\ )} = \frac{1^4}{2^4} = \frac{1}{16}$.
2. A et B sont deux événements contraires donc $P(B) = 1 - P(A) = 1 - = \frac{1}{16} \;= = \frac{15}{16}$

3. Probabilité conditionnelle :

a) Définition :

La probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalise-est le nombre noté p(A/B) défini par :

$P\ (A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

On rencontre aussi la notation $P_B(A)$.

b) Formule de probabilités composées :

Soient A et B deux événements aléatoires. Alors on a :

• $P\ (A \cap B) = P(A)\ P(B/A)$ si $p(A) \neq 0$;

• $P\ (A \cap B) = P(B)\ P(A/B)$ si $P(B) \neq 0$;

c) Evénements indépendants :

Soient A et B deux événements. On dit que A est indépendant de B si : $P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$

Remarque :

• A est indépendant de B si et seulement si $P\ (A/B) = P(A)$. C'est-à-dire la réalisation de B n'a d'influence sur celle de A.

• A est indépendant de B si et seulement si $P\ (B/A) = P(B)$. C'est-à-dire la réalisation de A n'a d'influence sur celle de B.

Exemple 3 : Evénements indépendants

On lance deux dés non pipes simultanément. On note :

A «la somme des chiffres est 8 » ;

B «le 1er dé a donné, un chiffre pair » ;

C «le 2ème dé a donné un chiffre pair ».

1. Calculer $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P\ (B/A)$ et $P(B \cap C)$.
2. Les événements B et C sont-ils indépendants ?

Solution :

1er lancer / 2ème lancer	1	2	3	4	5	6
(1 ; 2)	(1 ; 1)	(1 ; 2)	(1 ; 3)	(1 ; 4)	(1 ; 5)	(1 ; 6)
(2 ; 2)	(2 ; 1)	(2 ; 2)	(2 ; 3)	(2 ; 4)	(2 ; 5)	(2 ;6)
(3 ; 2)	(3 ; 1)	(3 ; 2)	(3 ; 3)	(3 ; 4)	(3 ; 5)	(3 ; 6)
(4 ; 2)	(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 3)	(4 ; 4)	(4 ; 5)	(4 ; 6)
(5 ; 2)	(5 ; 1)	(5 ; 2)	(5 ; 3)	(5 ; 4)	(5 ; 5)	(5 ; 6)
(6 ; 2)	(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 3)	(6 ; 4)	(6 ; 5)	(6 ; 6)

A = {(2 ; 6); (6 ; 2); (5 ; 3); (4 ; 4)} B = {2; 4; 6} x {1; 2; 3; 4; 5; 6}, A ∩ B = {(2 ; 6); (6 ; 2); (4 ; 4)}

et B ∩ C = {2; 4; 6} x {2; 4; 6}. Card (Ω) = 6 x 6 = 36

P (A) = $\frac{\text{Card(A)}}{\text{Card }(\Omega)} = \frac{5}{36}$, P (A ∩ B) = $\frac{\text{Card(A∩B)}}{\text{Card }(\Omega)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

P (B/A) = = $\frac{\text{P(A ∩ B)}}{\text{P (A)}} = \frac{3/36}{5/36} = \frac{3}{5}$ et P (B ∩ C) = $\frac{\text{Card(B∩ C)}}{\text{Card }(\Omega)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ et

P (B) x P (C) = $\frac{1}{4}$ = P (B ∩ C par conséquent B et C sont indépendants.

Formule de probabilités totales :

On appelle système complet d'événements toute famille [A_1, A_2, ..., A_n} d'événements deux à deux incompatibles tels que :

• P (A_i) > 0 i = 1, 2, ..., n

• $\sum_{i=1}^{n} P\ (A_i) = 1$

On dit aussi que les événements A_i forment une partition de Ω ;

• Ω = $\cup_i A_i$.

$A_i \cap A_j = \emptyset$ pour i ≠ j

Si on décompose un événement quelconque sur cette partition de Ω, on a : B = $\cup_{i=1}^{n}(A_i \cap$ B)

D'où on obtient la formule des probabilités totales

P (B) = P(A_1 ∩ B) + P(A_2 ∩ B) + ...+ P(A_n ∩ B).

P(B) = P(A_l) P(B/A_1) + P(B/A_2) P(B/A_2) + ... + P(A_n) P(B/A_n)

d) formule de Bayes ;

Si B est un événement tel que P(B)>0 et un système complet d'événements, la formule de Bayes s'écrit:

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(A_1)P\left(\frac{B}{A_1}\right) + P(A_2)P\left(\frac{B}{A_2}\right) + \cdots \ldots\ldots + P(A_n)P(B/A_n)}$$

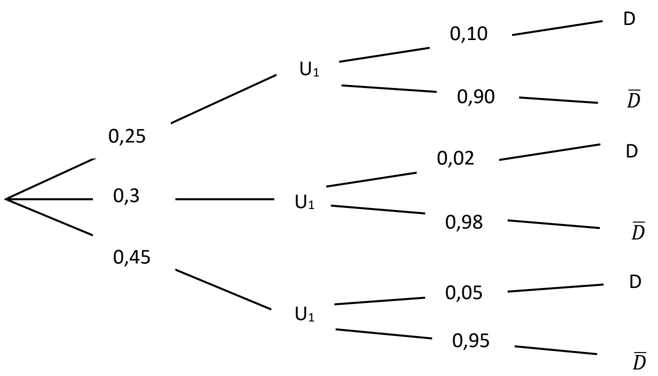
Exemple 4 :

On a une pièce mécanique qui est fabriquée soit par l'usine 1,2 ou 3. On suppose que 25% (respectivement 30% et 45%) de la production provient de l'usine 1 (respectivement l'usine 2 et 3). On suppose que 10% (respectivement 2% et 5%) des pièces produites par l'usine 1 (respectivement l'usine 2 et 3) sont défectueuses.

1. On prend une pièce, quelle est la probabilité pour qu'elle soit défectueuse ?
2. On tire une pièce au hasard. On constate qu'elle est défectueuse. Quelle est la probabilité pour cette pièce provienne de l'usine 1.

Solution :

Soient U_i la pièce choisie provient de l'usine i » et D « la pièce choisie est défectueuse



1.

$P(D) = P(U_1 \cap D) + P(U_2 \cap D) + P(U_3 \cap D) = P(D/U_1)P(U_1) + (D/U_2)P(U_2) + (D/U_3)P(U_3)$

$P(U_1)=0,25$; $P(D/U_1) = 0,10$; $P(U_2) = 0,3$; $P(D/U_2) = 0,02$; $P(U_3) = 0,45$; $P(D/U_3) = 0,05$

2.

$$P(U_1/D) = \frac{P(U_1)P(D/U_1}{P(D)} = \frac{0,10 \times 0,25}{0,0535} = 0,467.$$

II- VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

1. VARIABLES ALEATOIRES

Soit Ω un univers fini à N éventualités, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\dots\dots \omega_N\}$ (N∈ ℕ). On appelle **variable** aléatoire toute application X de Ω dansℝ.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$\omega_k \mapsto x_i$ où $k \in \{1, 2, \dots\dots\dots\dots, N\}$

x_i est appelé valeur de la variable aléatoire X.

2. VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

Lorsque l'univers Ω est fini, la variable aléatoire X est dite **discrète**.

3. LOI DE PROBABILITES DISCRETES:

L'ensemble des couples (x_i ; $P(X = x_i)$) avec $i = \{1, 2, \dots\dots\dots\dots, n\}$ constitue la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui est le plus souvent consigné dans le tableau ci-dessous :

$X = x_i$	x_1	x_2	………	x_n
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	………	P_n

Remarque Soit $P(X = x_i) = P_i$ et de plus, $\sum_{i=1}^{n} P_i = 1$

4. ESPERANCE MATHEMATIQUE, VARIANCE ET ECART-TYPE :

• On appelle espérance mathématique de la variable aléatoire X le nombre réel, noté E(X) défini par:

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i P_i$

•On appelle variance de la variable aléatoire X le nombre réel positif, noté V(X) définie par :

$V(X) = E[(X)-(E(X))^2] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - (E(X))^2 P_i = = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 P_i - (E(X))^2 = (E(X)^2 - (E(X))^2$

• L'écart -type de cette loi, noté $\sigma(X)$, est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

5. PROPRIETES :

Soit k une constante.

• $E(X + k) = E(X) + k$ • $E(k X) = k E(X)$

. $V(X + k) = V(X)$ • $V(k X) = k^2 V(X)$ • $\sigma(k X) = |k| \sigma(X)$

6. FONCTION DE REPARTITION :

a. Définition :

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X l'application F définie par :

$F : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$

$x \mapsto F(x) = P(X \leq x)$

F(x) est la probabilité de l'événement « obtenir une valeur de X inférieure ou égale à x ».

b. Propriétés :

Soit a et b deux nombres réels
- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$-F(b)-F(a).
- La fonction F est croissante.
- Si x < x, F(x) = 0 ; si $x \geq x_n$ F(x) = 1.

Exemple 1 :

Deux urnes U_1 et U_2 contiennent trois boules numérotées respectivement 1, 2, 3 et 2, 3, 4. On tire au hasard une boule dans chaque urne et on effectue le produit X des numéros tirés

1. Déterminer la loi de probabilité de X et tracer le graphe de sa fonction de répartition F.
2. Calculer E(X), V(X) et σ(X).

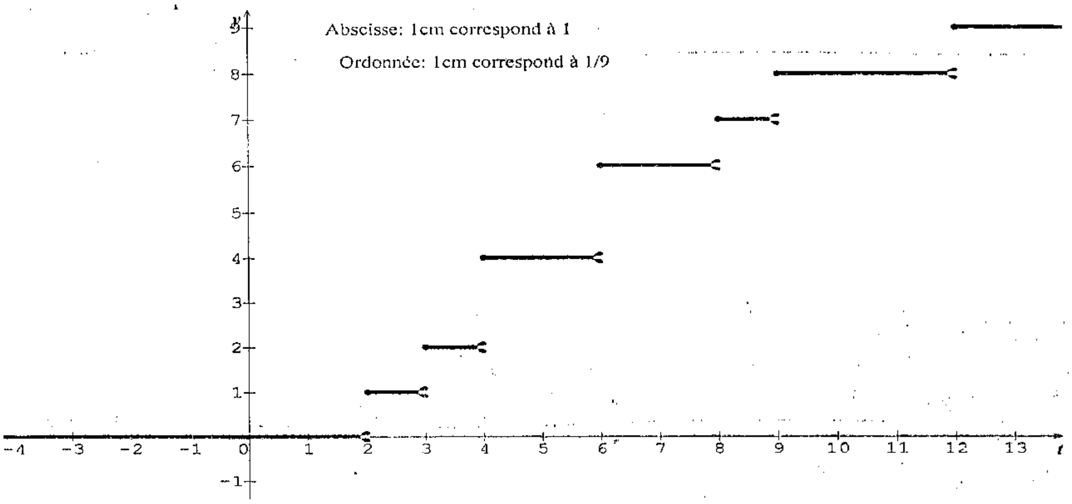
Solution. :

U_1 \ U_2	2	3	4
1	2	3	4
2	4	6	8
3	6	9	12

1. Les valeurs prises par X : X = {2; 3; 4; 6; 8; 9; 12} . La loi de probabilités est :

x_i	2	3	4	6	8	9	12	Total
P_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	1
x_iP_i	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{12}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{12}{9}$	$\frac{54}{9}$
$x_i^2P_i$	$\frac{4}{9}$	$\frac{9}{9}$	$\frac{32}{9}$	$\frac{72}{9}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{81}{9}$	$\frac{144}{9}$	$\frac{406}{9}$

La fonction de répartition F:



é S

« succès » est de probabilité p et l'éventualité $\overline{S}$ « échec » est de probabilité 1- p.

b. Loi binomial :

On considère un schéma de Bernoulli consistant en la répétition n fois de façons indépendantes d'une

même épreuve de Bernoulli pour laquelle la probabilité du succès S est p .

On note X la variable aléatoire égale au nombre de succès obtenus sur les n répétitions,

pour tout $k \in N$ tel que $0 \leq k \leq n$, $P(X = k) = C_n^k \times P^k \times (1-p)^{n-k}$.

On dit que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramétrés n et p, notée en abrégé $\mathfrak{B}(n,p)$

Remarque : $\sum_{k=1}^{n} P(X=k)$ pfX ^ k) = l: E(X) = nxp; V(X) = nxpx(l-p) ; C(X) = nxpx(l-p).

c. Loi de Poisson ;

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$), notée en abrégé P (λ) si la loi de probabilité de X est définie par $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Les caractéristiques sont : $E(X) = \lambda$; $V(X) = \lambda$; $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

d. Approximation de la loi binomiale B(n, p) par la loi de Poisson P(λ)

Pour n «assez grand» (n > 30) et pour p «voisin» de 0, ($p \leq 0,l$) tels que. $np(1- p) \leq 10$, on peut approcher la loi binomiale B(n, p) par la loi de Poisson P(λ), où λ = n p .

On a alors: $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.   '   '

Exempte 2

Une fabrique de tubes électroniques produit en moyenne 1% de tubes défectueux. On considère une commande de 300 tubes et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tubes défectueux parmi ces 300.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. Déterminer le nombre moyen de tubes défectueux.
3. Démontrer que cette loi peut être approchée par une loi de poisson dont on précisera le paramètre.
4. Calculer, en utilisant celte approximation, la probabilité pour que, parmi les 300 tubes livrés, il y en ait moins de quatre défectueux (strictement).

Solution :

1. La variable aléatoire X qui désigne le nombre de tubes défectueux suit deux issues contraires :

   • Le succès « le tube est défectueux » de probabilité p= 0,01.

   • L'échec « le tube n'est pas défectueux » de probabilité q= 0,99.

Cette expérience est répétée 300 fois dans des conditions identiques et indépendantes. Donc X suit la loi binomiale de paramètres n = 300 et p = 0;01.

2. E(X) = np = 300x0,01 = 3 donc le nombre moyen de tubes défectueux est 3.
3. N = 300, p = 0,01 et np(1-p) = 2,97 donc n>30, p ≤ 0,l et np(l-p) ≤ 10 par conséquent 'la loi X peut être approchée à la loi de poisson de paramètre λ = n x p = 3.
4. P(X < 4) = P(X=0) + P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,05+0,149+0,224+0,224=0,647.

D'après la table, On pouvait trouver ce résultat par calcul qui est :

$$P(X < k) = \frac{3^0}{0!} e^{-3} + \frac{3^1}{1!} e^{-3} + \frac{3^2}{2!} e^{-3} + \frac{3^3}{3!} e^{-3} = 13e^{-3} = 0{,}647$$

III- VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

1- VARIABLES ALEATOIRES CONTINUE

Soit Ω un univers. On dit qu'une variable aléatoire X est **continue si** l'ensemble des valeurs de X est un intervalle I donné de $\mathbb{R}$.

2. FONCTION DE REPARTITION D'UNE VARIABLE ALEATOIRE CONTINUE :

a. Définition :

On appelle fonction de répartition de la variable aléatoire X l'application F définie par :

$F: \mathbb{R} \rightarrow [0; l]$

$x \mapsto F(x) = P(x <\leq x)$

b. Propriétés :

Soit a et b deux nombres réels sur un intervalle

- $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$
- $P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$.
- La fonction F est croissante
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$;
- La fonction F est continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

3. DENSITE DE PROBABILITE :

a. Définition :

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une densité de probabilité si :

- Pour tout réel x ; $f(x) \geq 0$;
- f est continue sauf éventuellement en un nombre fini de points ;
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

b. Propriété :

Soit X une variable aléatoire continue et F la fonction de répartition de X.

- La dérivée de F sur $\mathbb{R}$ est **une-densité de probabilité de X notée f.**
- La fonction F est la primitive de f suivante :

$F(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

F(t) est l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la densité f, l'axe des abscisses et la droite d'équation x = t.

4. ESPERANCE MATHEMATIQUE, VARIANCE ET ECART-TYPE

- L'espérance mathématique d'une variable aléatoire continue X est le nombre réel, noté E(X), défini par : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
- On appelle variance de X le nombre réel positif, noté V(X), défini par :

$V(X) = E(X^2)-[E(X)]^2 = = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2$

- l'écart type de X, noté $\sigma(x)$, est la racine carré de la variance : $\sigma(x) = \sqrt{V(X)}$

Exemple 1:

Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et soit X la variable aléatoire continue de densité de probabilité f avec ;

$$f(x) = \begin{cases} ax(4-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Trouver a afin que X suive bien une loi de probabilité.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.

4. Calculer les probabilités suivantes P(X=2) ; P(X< 2) ; P (2<X<3).

Solution :

1. On a toujours :

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Longrightarrow \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 1$ D'où $a = \frac{3}{32}$

2. $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = a\left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^4 = = \frac{64a}{3} = 2$

$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - [E(X)]^2 = a\left[x^4 - \frac{x^5}{5}\right]_0^4 - 2^2 = \frac{24}{5} - 4 = = \frac{4}{5}$

3. Si F est la fonction de répartition de X, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$.

Par suite :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{3}{32}\left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

4. P(X=2)=0 en effet pour une variable aléatoire continue, la densité de probabilité en un point est nulle.

$P(X<2)=F(2)=0{,}5$ et $P(2<X<3)=F(3)-F(2)= \frac{27}{32} - \frac{1}{2} = 0{,}34375$

5. Lois de probabilités continues ;

a. Loi normale ou loi de Laplace-Gauss :

La loi de probabilité d'une variable aléatoire continue X suit la loi normale ou loi de Laplace Gauss de paramètres m et , notée **N(m, σ)** , si la densité de probabilité f est définie par :

$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$

La fonction de répartition F de X est donnée par l'intégrale : $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

les caractéristiques de la loi normale N (m,σ) sont: $E(x) = m$; $V(X) = \sigma^2$; $\sigma(X) = \sigma$

b. Loi normale centrée réduite :

- **Définition :**

Si les paramètres d'une loi normale sont respectivement m=0 et σ = l, alors on dit que la loi est centrée réduite, on la note N (0 ; 1). La densité de probabilité associée à la normale N (0 ; 1) est la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Sa courbe représentative C_g est symétrique par rapport à l'axe *(y y')* car g est paire. .

- **Théorème :**

Si la variable aléatoire X suit la normale N (m ; σ), alors la variable aléatoire $T = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centre réduite N (0 ; 1). • . .

c. Fonction de répartition associée à la loi normale centrée réduite :

- **Définition :**

Soit T la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite N (0 ; 1).

La fonction de répartition Π(t) de T est donnée par l'intégrale : $\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

Une table donne les valeurs de cette fonction intégrale $\Pi(t) = P(T \leq t)$ uniquement pour les valeurs positives de la variable t.

Pour les valeurs négatives, on utilise la propriété de symétrie de symétrie de la courbe

$\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$

- **Propriétés**

Soit T la variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite N (0 ; 1).

- $p(T<a) = p(T\leq a) = \Pi(t)$
- $p(a \leq T \leq b) = p(a < T \leq b) = p(a \leq T < b) = \Pi(b) - \Pi(a)$
- $p(T > a) = p(T\geq a) = \Pi(-a) = 1 - \Pi(a)$
- $p(-a \leq T \leq a) = p(-a < T < a) = p(-a \leq T < a) = p(-a < T < a) = 2\Pi(a) - 1 \ (a > 0)$

d. <u>Approximation d'une loi Binomiale B (n, ni par une loi Normale N (m ;σ)</u>

Pour n « assez grand » (n ≥ 50) et pour p ni voisin de 0 ni voisin de 1, tels que np(l-p) > 10 , on peut approcher la loi binomiale B (n, p) par la loi normale N(m ;σ) en prenant m = np et

$\sigma = \sigma(X) = \sqrt{np(1\text{-}p)}$

On a alors: $P(X = k) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-m}{\sigma}\right)^2}$

<u>e. approximation d'une loi de Poisson p(λ) par une loi normale (m ;σ)</u>

Pour $\lambda > 20$, on peut approcher la loi de poisson P(λ), par la loi normale N (m ;σ) en prenant m = λ et $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Exemple 8 :

On considère une population 1res nombreuse où chaque individu est susceptible de posséder un caractère A, avec une probabilité p = 0,4. On effectue 900 observations et on désigne par X le nombre d'individus ayant le caractère A dans cet échantillon.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Déterminer l'espérance mathématique et la variance de X,

3. Démontrer que cette loi peut être approchée par une loi normale dont on précisera les paramètres.

4. Calculer P(335 ≤ X ≤ 350).

<u>Solution :</u>

1. La variable aléatoire X qui désigne le nombre d'individus ayant le caractère A suit deux issues contraires :

- Le succès « l'individu possède le caractère A » de probabilité p = 0,4.
- L'échec « l'individu ne possède pas le caractère A » de probabilité q = 0,6.

Cette expérience est répétée 900 fois dans des conditions identiques et indépendantes. X suit la loi binomiale de paramètres n = 900 et p = 0,4.

2. E(X) = np = 900 x 0,4 = 360.

3- n = 900, p=0,4 et q = l - p = 0,6 donc n ≥ 50 et np(l-p) > 10 par conséquent X peut être approchée par une loi normale N (m ;σ) en prenant m = np = 360 et $\sigma = \sqrt{n(1 - p)}$ = 14,67

4. $P(335 \leq X \leq 350) = p\left(\frac{335-360}{14,67} \leq \frac{X-360}{14,67} \leq \frac{350-360}{14,67}\right) = p(-1,70 \leq T \leq 0,68$

$P(335 \leq X \leq 350) = \Pi(-0,68) - \Pi(-1,70) = 1 - \Pi(0,68) - 1 + \Pi(1,70)$

$P(335 \leq X \leq 350) = \Pi(1,70) - \Pi(0,68) = 0,9554 - 0,7517 = 0,2037$

TRAVAUX DIRIGES

EXERCICE 1:

Dans Ouédraogo et frères, on a établi, sur une longue période, que le nombre de personnes absentes (x_i) par semaine pouvait être régi par la loi de probabilité suivante :

Xi	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(X = X_i)$	0,05	0,09	0,15	0,34	0,21	0,12	0,03	0,01

1. Déterminer le taux moyen d'absentéisme.
2. Calculer la variance et l'écart-type de la variable « nombre de personnes absentes par semaine ».
3. S'il en coûte à l'entreprise 6 000 FCFA chaque fois qu'une personne est absente, déterminer le coût moyen hebdomadaire ainsi que la variance et l'écart-type.

EXERCICE 2:

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80% de ses boîtes chez le fournisseur A et 20% chez le fournisseur B.
10% des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et .20% de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.
On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- événement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- événement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- événement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

3. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
a. Quelle est In probabilité de l'événement B HS ?
b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88,
5. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.
On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans tracé de pesticides.
1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les' 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Déterminer la moyenne de boîtes qui ne présentent aucune trace de pesticides.

EXERCICE 3:

Une avenue comporte 15 intersections munies chacune d'un feu tricolore. POUF chacun de ces feux, le rouge dure 35 secondes, l'orange 5 secondes et le vert 20 secondes. Un automobiliste décide de parcourir cette avenue, de bout en bout.

- Quelle est la probabilité de trouver à une de ces intersections :

a. Le feu au vert.
b. Le feu au rouge.
c. Le feu à l'orange.

- L'arrêt est obligatoire à une intersection si le feu est au rouge ou à l'orange. Quelle est pour cet automobiliste, la probabilité de s'arrêter à une intersection ?
- On suppose que les 15 feux fonctionnent de façon indépendante, et que la probabilité de s'arrêter

Est $\frac{2}{3}$. Soit X le nombre d'arrêts pour cet automobile qui parcourt cette avenue.

a. Montrer que X suit une loi binomiale $B\ (n\ ;\ p)$ que l'on précisera;

b. Calculer la probabilité pour cet automobiliste de ;

- Ne s'arrêter aucune fois.
- S'arrêter exactement deux fois.
- S'arrêter au moins 3 fois.
- Combien de fois en moyenne, s'arrêtera-t-il probablement du 1er à la 15ème intersection ?

EXERCICE 4:

Une entreprise fabrique par jour, des jouets qu'elle conditionne dans des sacs appropriés à raison de 100 jouets par sac. La probabilité qu'un jouet qu'elle fabrique soit défectueux est de 0,05. On désigne par X la variable aléatoire « X égale au nombre de jouets défectueux conditionné dans un sac ».

1. montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer le nombre de jouets défectueux que pourrait contenir, en .moyenne un sac de jouets fabriqués par cette entreprise.
3. Montrer que la loi binomiale que suit la variable aléatoire X, peut être approchée par une loi de poisson dont on précisera le paramètre.
4. Utiliser la loi de Poisson pour calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « il y a exactement 2 jouets défectueux parmi les jouets conditionnés dans 1 sac».
   B : « il y a au plus 4 jouets défectueux parmi les jouets conditionnés dans 1 sac».
   C : « il y a au moins 5 jouets défectueux parmi les jouets conditionnés dans 1 sac».
5. Quel serait le chiffre d'affaire moyen d'un commerçant, qui revendrait au prix unitaire de 15 000F les jouets contenus dans un sac ?

EXERCICE 5:

1. Un laboratoire a mis au point un test pratiqué par un « détecteur de mensonges » au cours d'une KERMESS où les jeunes gens se rencontrent. Quand un jeune ment le, test est .positif dans le cas contraire le test est négatif.
   - Lorsqu'un couple de sexe opposé se rencontre, pour 68% le test positif.
   - Lorsqu'un couple de même sexe se rencontre, pour 24% le test positif.

Sachant que dans ce quartier 66% de jeunes couples de sexes opposés se forment au cours des KERMESS ; calculer la probabilité qu'une rencontre du quartier dont le test de mensonge s'est révélé positif ne soit pas un couple de sexes opposés. (Indication : théorème de BAYES).

2. A cause du détecteur de mensonge, les comportements ont changé dans le quartier et le pourcentage moyen de couples mixtes testés positifs est de 8% par mois, le nombre de couple testés positif par mois suit une loi de poisson. Chaque couple a la même probabilité pour être testé sur un mois :

a. Aucun couple ne soit teste positif.
b. Trois couples soient testés positifs.
c. Au moins 2 couples soient testés positifs. . . .
d. Plus de 3 couples soient testés positifs.

EXERCICE 6:

Soit g la densité définie par :

$$g(x) = \begin{cases} k\, e^{\frac{-x}{2}} & \text{si} \geq 1 \\ 0 & \text{si} < 1 \end{cases}$$

1. Calculer la valeur de k.
2. Soit X la variable aléatoire réelle admettant g pour densité de probabilité.

Déterminer la fonction de répartition G de X et calculer P(X < 3).

3. Calculer E(X).
4. Calculer P [(5 ≤ X < 7.)/(X > 3)].

EXERCICE 7:

En général quatre demandeurs d'emploi sur dix falsifient leur curriculum vitae. Une agence de recrutement dispose d'u U2n fichier de 150 demandeurs d'emploi. On désigne par X la variable aléatoire « égale au nombre de curriculum vitae falsifiés dans ce fichier ».

1. Montrer que X suit une loi binomiale B(n, p) que l'on précisera.
2.
   a. quel est en moyenne le nombre de curriculum vitae falsifiés que pourrait contenir ce fichier?
   b. Déterminer l'écart-type de la variable aléatoire X.
3.
   a. Montrer que la loi binomiale B(n, p) peut être approchée par une loi normale dont on déterminera les paramètres,
   b. Utiliser cette approximation de la loi binomiale pour calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A « le fichier contient au moins 40 CV falsifiés »
B « le fichier contient au plus 50 CV falsifiés »
C « le nombre de CV falsifiés que contient le fichier est strictement compris entre 45 et 55 »

EXERCICE 8:

Une enquête concernant les montants des tickets de caisse a été effectuée dans un supermarché. On admet que la loi de la variable aléatoire X qui à tout ticket tiré au hasard dans l'ensemble des tickets imprimés pendant une journée associe son montant exprimé en francs, peut être assimilée à la loi normale d'espérance mathématique m = 500 et d'écart type σ = 200.

1. Calculer la probabilité pour que le montant d'un ticket de caisse choisi au hasard dépasse 400F. (Donner le résultat à 10^{-2} près).
2. Soit a un nombre réel positif et E l'événement (500-a <X 2 500 + a). Déterminer a tel que P(E) = 0,9. (Donner la valeur approchée de a arrondie à l'unité près).
3. On prélève successivement et avec remise, trois tickets de caisse. On note Y la variable qui mesure le nombre de tickets dont le montant dépasse 400F parmi les trois.
   a. Déterminer la loi suivie par Y.
   b. Déterminer la probabilité d'obtenir parmi les trois tickets prélevés, au moins un ticket dont le montant dépasse 400F.
4. On prélève maintenant, successivement et avec remise, n tickets de caisse. On note Z la variable aléatoire qui associe, à chaque échantillon de taille n, la moyenne de cet échantillon. On admet que Z suit approximativement la loi normale d'espérance mathématique m = 500 et d'écart type $\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Soit E_1 l'évènement (Y ≥ 538). Déterminer la valeur minimale de n pour que $p(E_1) \geq 0{,}99$

EXERCICE 9: (EXTRAIT PU BTS SEI 2011)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur R par :

$$f(X) = \begin{cases} 0 \; si \; x \in \left]-\infty; \frac{-\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{-\pi}{2} \; ; \; +\infty\right[\\ \frac{2}{\pi} \; cos^2(x) si \; x \in \left[\frac{-\pi}{2} \; ; \; \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. On désigne par X la variable aléatoire à valeurs réelles, de densité de probabilité f définie dans la question 1. Calculer les probabilités suivantes :
   a. $p\left(X > \frac{\pi}{6}\right)$
   b. $p\left(\frac{-\pi}{3} < X < \frac{\pi}{6}\right)$
   c. $p\left(X < \frac{\pi}{4} \text{sachant } X > \frac{\pi}{6}\right)$

3.
   a. On appelle le mode de la variable aléatoire X, la valeur a ∈ ℝ pour laquelle la densité f est maximale. Déterminer le mode de la variable aléatoire X.
   b. On appelle le médiane de la variable aléatoire X, la valeur b ∈ ℝ pour laquelle P (X < b) = P (X > b). Déterminer la médiane de la variable aléatoire X.
4.
   a. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X notée E(X) (on rappelle
      $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$
   b. Sachant que $E(X^2) = = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx$, calculer la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X

EXERCICE 10:

Une étude menée par le cabinet SUCCES a montré que 50% des étudiants échouent au BTS-FCGE. Il prélève un échantillon de 100 étudiants candidats de cette filière. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre d'étudiants admis au BTS.

1. Montrer que X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres.
2.
   a. Quelles sont les caractéristiques de cette loi ?
   b. Quel est le nombre moyen d'étudiants admis ?
3. Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 10 étudiants admis.
4. Peut-on approcher la loi binomiale que suit X par une loi normale ? justifier la réponse.
5. Calculer la probabilité des événements suivants ;
   a. « plus de 55 candidats sont admis ».
   b. « le nombre d'admis est compris entre 45 et 55 ».

EXERCICE 11:

Une entreprise fabrique industriellement des pains de soja. Leurs emballages portent notamment l'indication suivante : poids net : 500 grammes.

I- Calculs de probabilités :

On estime que le poids en grammes d'un pain produit, est une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne 520 et d'écart type 20. On suppose que les poids des différents pains sont indépendants les uns des autres. A l'emballage, un pain est refusé si son poids est inférieur ou égal à 490 grammes.

1. Un pain arrive à l'emballage. Montrer que la probabilité qu'il soit refusé est égale à 0,0668.
2. Deux pains arrivent à l'emballage. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   A : « les deux pains sont refusés ».
   B : « l'un au moins des pains est refusé »

(On donnera les résultats à 10^{-3} près, en utilisant pour les calculs le résultat approché obtenu à la question précédente).

II- Détermination d'une loi binomiale et approximation par une loi normale :

L'entreprise produit 10 000 pains par semaine. On note Y la variable aléatoire mesurant le nombre de pains à remballage, dans la production d'une semaine.

1.
   a. Montrer que Y suit une loi binomiale ; donner les paramètres de cette loi.
   b. Calculer la moyenne et l'écart type de Y. (On arrondira les deux derniers résultats aux nombres entiers les plus proches).
2. On remplace la loi de Y par une loi normale qui en constitue une approximation suffisante.

a. Quels sont les paramètres de celle-ci ?
b. Calculer, en utilisant cette approximation, la probabilité de l'événement « $650 < Y < 700$ ». (On arrondira le résultat à 10^{-2} près).

EXERCICE 12:

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes. Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie. Leur longueur et leur diamètre sont exprimées en millimètres. Dans cet exercice, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2}.

A. Loi normale

Une tige de ce type est considérée comme conforme pour la longueur lorsque celle-ci appartient à l'intervalle [99,45; 100,55]. On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart type 0,25. .

1. Calculer la probabilité qu'une tige .prélevée au hasard dans la production soit conforme pour la longueur ;
2. Déterminer le nombre réel h positif tel que : $P(100 - h \leq X \leq 100+h) = 0,95$. Interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.

B. Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un lot de ce type de tiges 3% des tiges ne sont pas conformes pour, la longueur. On prélève au hasard 50 tiges de ce lot pour vérification de la longueur. Le lot est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 50 tiges. On considère la variable aléatoire Y qui, à tout prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges non conformes pour la longueur.

1. Justifier que la variable aléatoire Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux tiges ne soient pas conformes pour la longueur.
4. On considère que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson. Déterminer le paramètre X de cette loi de Poisson.
5. On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre A où X est la valeur obtenue au 4. Calculer $P(Z = 2)$ et $P(Z < 2)$.

EXERCICE 13:

Les trois parties de cet exercice peuvent être traités de façon indépendante.

Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier, leur diamètre est exprimé en millimètres. Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-3} près.

A. Loi normale

Une rondelle de ce modèle est conforme pour le diamètre lorsque celui-ci appartient à l'intervalle

[89,6; 90,4].

1. On note X, la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre. On suppose que la variable aléatoire X_1 suit la loi normale de moyenne 90 et d'écart type $\sigma = 0{,}17$. Calculer la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production soit conforme.
2. L'entreprise désire améliorer la qualité de la production des rondelles : il est envisagé de modifier le réglage des machines produisant les rondelles. On note D la variable aléatoire qui, à chaque rondelle prélevée dans la production future, associera son diamètre. On suppose que la variable aléatoire D suit une loi normale de moyenne 90 et d'écart type σ_1.
   Déterminer σ_1 pour que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard dans la production future soit conforme pour le diamètre soit égale à 0,99.

B. Loi binomiale Arrondir à 10^{-3} près

On note E l'événement : « une rondelle prélevée au hasard dans un stock important a un diamètre défectueux ».On suppose que P(E) = 0,02. On prélève au hasard quatre rondelles dans le stock pour vérification de leur diamètre. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de quatre rondelles. On considérera la variable aléatoire, Y_1 qui, à tout prélèvement de quatre rondelles, associe le nombre de rondelles de ce prélèvement ayant un diamètre défectueux.

1. Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que dans un tel prélèvement, aucune rondelle n'ait un diamètre défectueux.
3. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus une rondelle ait un diamètre défectueux.

C. Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Les rondelles sont commercialisées par lots de 1000. On prélève au hasard un lot de 1000 rondelles dans un dépôt de l'usine. On assimile ce prélèvement à un .tirage avec remise de 1000 rondelle. On considère la variable aléatoire qui, à tout prélèvement de 1000 rondelles, associe le nombre de rondelles non conformes parmi ces 1000 rondelles. On admet que la variable aléatoire suit la loi binomiale de paramètres n = 1000 et p = 0,02. On décide d'approcher la loi de la variable aléatoire par la loi normale de moyenne 20 et d'écart type 4,43. On note Z une variable aléatoire, suivant la loi normale de moyenne 20 et d'écart type 4,43.

1. Justifier les paramètres de cette loi normale.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au plus 15 rondelles non conformes dans le lot de 1000 rondelles.

EXERCICE 14:

La variable aléatoire X suit la loi normale N (15 ; 1,5). Calculer les probabilités : $P(X<13)$;

$P(X \leq 18)$; $P(4 < X < 19)$.

Chapitre V : ESTIMATION

L'échantillonnage est l'étude de liens existant entre les paramètres (moyenne ou fréquence) des échantillons issus de la population elle-même. Grace à l'échantillonnage, on peut faire des statistiques différentielles. Pour prédire, dix jours avant l'élection, la proportion exacte d'ivoiriens qui va voter pour tel ou tel candidat, il faudrait interroger tous *[es* ivoiriens : c'est matériellement impossible. On interroge donc un échantillon d'environ railles personnes (sondage) et on en déduit une estimation de la proportion recherchée.

Une machine doit remplir des paquets de sucre de 1 kg. Il est matériellement impossible de vérifier que la masse de chaque paquet est bien de 1 kg. Alors, pour contrôler le bon réglage de la machine, on étudie un échantillon de 50 paquets et on prendra une décision grâce aux tests d'hypothèses, théorie qui doit beaucoup au statisticien anglais KARL PEARSON.

I- ÉCHANTILLONNAGE

1. Théorème dit « loi faible (les grands nombres »

Soit $X_1, X_2 ...... X_n$, n variables aléatoires indépendantes de même loi, définies sur Ω telle que

$E(X_i)= m$ et $V(X_i) = \sigma^2$. On définit les variables aléatoires : $S_n = X_1 + X_2 +... + X_n$ et $\overline{X_n}= \frac{1}{n} S_n$

Alors $\lim\limits_{n \to -\infty} P(|\overline{X_n} - E(X)|) = 1$ ou $\overline{X_n}$ converge en probabilité vers E(X).

2. Théorème de la limite centrée (théorème central limite)

Soit $X_1, X_2 ...... X_n$, n variables aléatoires indépendantes de même loi, définies sur Ω telle que $E(X_i) = m$ et $V(X_i)= \sigma^2$.

Pour n suffisamment grand, la variable aléatoire $\overline{X_n} - = \frac{X_1 + X_2 +... + X_n}{n}$ suit approximativement la loi normale $N\left(m ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

3. Distribution d'échantillonnage

a. Principe

L'échantillonnage consiste, connaissant les propriétés d'une population, à déterminer les propriétés des échantillons dans cette population.

Nous ne considérerons ici que des échantillons aléatoires et des tirages effectués avec remise, pour que des tirages soient indépendants. Dans le cas où l'effectif de la population est grand, ce qui est très souvent le cas des populations que l'on étudie, on peut assimiler les tirages exhaustifs (sans remise) *à* des tirages avec remise. Un échantillon peut donc être considéré comme la réalisation d'une suite de n variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité.

b. Distribution d'échantillonnage de moyennes

Soit une population d'effectif N de moyenne m et d'écart type c. On prélève un échantillon aléatoire de taille n. soit X la variable aléatoire qui associe à chaque échantillon sa moyenne. Alors pour n suffisamment grand, la loi de X peut être approchée par la loi normale $N\left(m ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Exemple :

Une production de 10 000 objets est réglée pour un poids moyen de 250g et pour un écart type de 10g.

On prélève 200 objets (tirage avec remise).

Calculons la probabilité pour que la moyenne de l'échantillon soit comprise entre 249g et'250g.

L'échantillon étant suffisamment grand, la loi d'échantillonnage X peut être approchée par la loi normale $N\left(250 ; \frac{10}{\sqrt{200}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$P(249 \leq \overline{X} \leq 251) = p\left(\frac{249 - 250}{\frac{\sqrt{2}}{2}} < T < \frac{249 - 251}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\right) = P(\sqrt{2} < T < -\sqrt{2}) = 2\Pi(1{,}414) - 1 \approx 0{,}84$$

c. Distribution d'échantillonnage de fréquence

Soit une population d'effectif N dont N' éléments possèdent le caractère étudié. La fréquence du caractère étudié est $p = \frac{N'}{N}$. Soit la variable aléatoire F donnant la fréquence du caractère étudié pour chaque échantillon aléatoire de taille a prélevé. Alors pour n suffisamment grand, la loi de F peut être approchée par la loi

normale $N\left(p ; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Remarque ;

Ce théorème est un cas particulier du précédent et on est ici dans le cas d'une approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Exemple ;

Au cours d'une consultation électorale, Monsieur Zozo, le candidat du PIFC a recueilli 55% des suffrages exprimés.

Calculons la probabilité d'avoir, dans un échantillon de taille 100 prélève parmi les suffrages exprimés, moins de 50% des voix pour le candidat Zozo. La taille de l'échantillon étant suffisamment grande, F suit approximativement la loi N(0,55 ; 0,05).

$$\left(\sqrt{\frac{0{,}55(1 - 0{,}55)}{100}} = 0{,}0497 \approx 0{,}05\right)$$

$P(F < 0{,}5) = p\left(T < \frac{0{,}5-0{,}55}{0{,}55}\right)$ = P(T < -1) = Π(-1) = 1- Π(1) = 1 – 0,8413 = 0,1587

II- STATISTIQUE DIFFERENTIELLE : ESTIMATION

1. Principe

Je ne connais pas la fréquence ou la moyenne d'un caractère d'une population donnée et j'essaie de T estimer en observant on échantillon.

Par exemple, .avant les élections, on ne connaît pas encore les résultats, mais on aimerait bien savoir…on ne peut pas interroger toute la population, alors les instituts spécialisés effectuent des sondages, c'est-à-dire interrogent 1000 personnes environ dans la population Ivoirienne et, à partir de là; ils évaluent les 'résultats que devraient obtenir les différents candidats

L'estimation peut se faire à l'aide d'un nombre qu'ils estiment celui recherché ; c'est **l'estimation ponctuelle** ou à l'aide d'un intervalle : c'est **l'intervalle de confiance (ou la fourchette).**

2. Estimation

Je ne connais pas m (moyenne de la population) et généralement pas non plus σ(écart type de population) et je cherche à l'aide de la moyenne notée m_e (ou $\bar{x}$) et de l'écart type σ_e (ou σ_n)

a. <u>Estimation ponctuelle de m et σ</u>

<u>Règle 1</u>

La moyenne $\bar{x}$ d'un échantillon de taille n prélevé au hasard dans une population est une bonne estimation ponctuelle de la moyenne m de population

<u>Règle 2</u>

L'écart type σ d'un échantillon de taille n prélevé au hasard dans une population n'est pas une bonne estimation de l'écart type σ de la population. On admettra que le nombre $\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_n$ est bonne estimation ponctuelle de σ (ce nombre est généralement noté σ_{n-1}sur les calculatrices).

b. <u>Estimation d'une moyenne par intervalle de confiance</u>

On considère la variable aléatoire $\overline{X}$, qui, à tout échantillon aléatoire de taille n associe sa moyenne et
on suppose que les conditions sont réunies pour considérer que la loi normale N $\left(p;\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ **<u>Règle:</u>**

Un intervalle de confiance de la moyenne m au niveau de confiance σ% est :
$\left[\bar{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{X} +\ t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$ où t est le nombre tel que $\Pi(t) = \frac{1+\alpha\%}{2}$ et se lit dans la table de la loi $\mathcal{N}(0\ ;1)$

α% est le niveau de confiance.
(1-α)% est le seuil de risque.

Condition d'application

Les résultats précédents sont valides si les conditions sont réunies pour considérer que la loi de X suit la loi normale $N\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$, c'est-à-dire si l'une des 3 conditions suivantes est réalisée :

- La population suit une loi normale N $(m ; \sigma)$ avec σ connu, quelle que soit la taille de l'échantillon.
- La population suit une loi normale N (m ; σ) avec σ inconnu, mais l'échantillon est de grande taille (supérieure à 30) et le résultat s'applique alors en prenant pour écart type son estimation ponctuelle.
- La population suit une loi quelconque de moyenne m et d'écart type σ et l'échantillon est de grande taille (supérieure à 50).

<u>Valeurs usuelles des coefficients de confiance</u>

- Confiance à 90%; risque de 10%; $2\Pi(t) - l = 0,90 \Leftrightarrow \Pi(t) = 0,95 \Leftrightarrow t \approx 1,645$
- Confiance à 95%; risque de 5%; $2\Pi(t) - l = 0,95 \Leftrightarrow \Pi(t) = 0,975 \Leftrightarrow t \approx 1,96$
- Confiance à 99%; risque de 1%; $2\Pi(t) - l = 0,99 \Leftrightarrow \Pi(t) = 0,995 \Leftrightarrow t \approx 2,58$

<u>Exemple</u>

Pour mieux gérer les demandes de crédits de ses clients, le directeur d'une agence bancaire réalise une étude relative à la durée de traitement des dossiers, Un échantillon aléatoire non exhaustif de 50 dossiers traités a donné ;

Temps en minutes	[0; 10[	[10;20[	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[	[50; 60[
Nombre de personnes	4	9	16	13	5	3

Moyenne de l'échantillon $\overline{X}$ = 28 min, écart type de l'échantillon : $\sigma_n \approx$ 12, 69.
On en déduit :
Estimation ponctuelle de la moyenne m de la population : 28 min.

Estimation ponctuelle de l'écart type σ de la population : $\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma_n = \sqrt{\frac{50}{50-1}} \times 12,69$

L'intervalle de confiance de la moyenne au niveau de confiance de 95% (ou seuil de 5%) est :

$$\left[\bar{X} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[28 - 1,96 \times \frac{12,82}{50}; 28 + 1,96 \times \frac{\sigma 12,82}{\sqrt{50}}\right]$$

niveau de confiance de 95% => t = 1,96.
On peut estimer (et on est « sûr à 95% ») que la moyenne du temps passé dans l'agence pour le traitement d'un dossier est compris entre 24,45 min et 31,60min.

<u>Remarque :</u>

1. Avec d'autres échantillons de même effectif, on obtiendrait de nouveaux, intervalles de confiance de cette moyenne avec le même coefficient de confiance.

Si on prélevait un très grand nombre de tels échantillons, environ 95 pour 100 d'entre eux contiendraient la moyenne inconnue m de la population. En fait, on n'en prélève qu'un seul et on ne peut pas savoir si celui-ci contient ou non le nombre m, mais la

méthode mise en œuvre permet d'obtenir un « bon » intervalle dans 95 cas sur 100 (un « bon »intervalle contient m).

2. Cet intervalle de confiance de la moyenne m de la population a pour centre la moyenne $\overline{X}$ de l'échantillon qui sert à le définir.
3. Il ne faut pas écrire, car dans ces inégalités, il n'y a que des constantes,
4. On obtient un intervalle de longueur moindre en augmentant la taille de l'échantillon, mais prendre un échantillon plus grand demande plus de temps de traitement statistique et augmente donc le prix de l'étude.

3. Estimation d'une proportion

a) Estimation ponctuelle de p

Règle La proportion p_n du caractère dans un échantillon de taille n prélève au hasard dans une population est une bonne estimation ponctuelle de la proportion p du caractère dans la population.

b) Estimation d'une proportion par intervalle de confiance

On considère une population et un caractère de cette population en proportion p (ou fréquence ou pourcentage). On considère la variable aléatoire F, qui, à tout échantillon aléatoire de taille n associe la proportion du caractère considéré dans l'échantillon. On suppose que les conditions sont réunies pour considérer que la loi de F peut être approchée par la loi normale $N\left(p;\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$.

Règle :
Un intervalle de confiance de la fréquence p au niveau de confiance $\alpha\%$ est :
$\left[P_n - t\sqrt{\frac{P_n\,(1-P_n)}{n-1}}\,;\; P_n + t\sqrt{\frac{P_n\,(1-P_n)}{n-1}}\right]$ où t est le nombre tel que $\Pi(t) = \frac{1+\alpha\%}{2}$ et se lit dans la table de lu loi $\mathcal{N}(0\,;1)$

- $\alpha\%$ est le **niveau tic confiance.**
- (1-α)% est le seuil de risque,

Exemple.:
Dans un sondage effectué 15 jours avant le scrutin auprès des 1000 personnes choisies de façon aléatoire dans la commune Yopougon, 458 habitants de Yopougon se déclarent favorable à la candidate Madame Konan. La proportion d'électeurs favorables à Madame Konan dans cet échantillon est de :
Pn = $\frac{458}{1000}$ = 45,8%

L'estimation ponctuelle de la proportion d'électeurs favorables à Madame Konan dans la ville de
Yopougon 45,3%.
Déterminons l'intervalle de confiance au seuil de 5% de la proportion p d'électeurs qui vont voter pour
Konan :

Le fait de déterminer l'intervalle de confiance au seuil de 5% => t = 1, 96.
D'où l'intervalle de confiance de la proportion au seuil de 5% (ou niveau de confiance de 95%) :

$$\left[0.458 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}458 \times 0{,}542}{1000-1}}\,; 0.458 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{0{,}458 \times 0{,}542}{1000-1}}\,;\right]$$ = [4271 ;0,4889]

A partir du sondage effectué sur 1000 personnes, on peut estimer (avec un coefficient de confiance de 95%) que le score de Madame Konan sera dans la fourchette [42,71%; 48,89%]

TRAVAUX DIRIGES

EXERCICE 1:

L'intervalle de confiance d'une moyenne, calculée à partir d'un échantillon est : [92,8 ; 95,4] en pourcentage et au seuil de risque de 5%.

- Sachant que l'écart type de la population est égal à 7,96, calculer la taille n de l'échantillon.
- Donner l'intervalle de confiance de cette moyenne au seuil de 1%.

EXERCICE 2:

On s'intéresse au diamètre des pièces produites par une entreprise de matériel. Pour un échantillon de 60 pièces prélevées au hasard et avec remise, on a obtenu une moyenne de 4,012 cm et un écart type de 0,083 cm.

1. Donner une estimation ponctuelle, à 10^{-3} près, de la moyenne μ et de l'écart type σ des diamètres des pièces de la production.
2. Donner un intervalle de confiance de la moyenne μ avec le coefficient de confiance de 95%.

EXERCICE 3 :

Une machine automatique remplit des paquets dont la masse théorique doit être de 250 grammes.

I- Les masses observées pour un échantillon de 100 paquets pris au hasard à la sortie de la machine, ont donné les résultats suivants :

Masse en grammes	Nombre de paquets
[215;225[	7
[225;235[	11
[235; 245[	19
[245; 255[	26
[255;265[	18
[265; 275[	13
[275; 285[	6

1. Déterminer la masse moyenne m_e et l'écart-type σ_e de l'échantillon
2. Déterminer une estimation ponctuelle de la moyenne m et de l'écart-type σ de la population.
3. Déterminer un intervalle de Confiance au seuil de risque de 5% de la masse moyenne de la population.

II- On suppose que la probabilité que la masse d'un paquet appartienne à l'intervalle [245; 255[est 0,26. On effectue des contrôles sur des échantillons de n paquets au hasard et avec remise. On note X la variable aléatoire qui, à tout échantillon ainsi défini de n paquets, associe le nombre de paquets dont la masse est dans l'intervalle [245; 255[.

1. Quelle est la loi suivie par X ?
2. On suppose que n = 6.
   Déterminer la probabilité d'obtenir dans un tel échantillon exactement 4 paquets dont la masse est dans l'intervalle [245;255[.
3. Déterminer la valeur minimale n_0 de n, entier strictement positif, pour que la probabilité d'obtenir au moins un paquet de masse appartenant à l'intervalle [245; 255[soit supérieure à 0,95.

III- Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque paquet prélevé au hasard à la sortie de la machine, associe la masse de ce paquet, exprimée en grammes ; on suppose que la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne m et d'écart type 15,8g.

1. On prend m = 250g.
   Déterminer la probabilité que la masse d'un paquet pris au hasard à la sortie de la machine soit inférieure à 245g.
2. Un réglage de la machine permet de faire varier la valeur m (l'écart type est inchangé).
   Sur quelle valeur de m, au gramme près, doit être réglée la machine pour que $P(Y \leq 245) \leq 0,1$? Justifier.

NB : Toutes les valeurs approchées seront données à 10^{-2} près.

EXERCICE 4: (EXTRAIT PU BTS IDA 2011)

Une usine de montage d'ordinateurs utilise des roulements provenant de deux usines de fabrication de pièces mécaniques, l'une située à Abidjan, l'autre à San-Pedro. 60% des roulements de son stock proviennent de l'usine d'Abidjan et le reste de celle de San-Pedro.

On estime que 2% des roulements en provenance de l'usine d'Abidjan sont défectueux et que 4,5% de ceux qui proviennent de l'usine de San-Pedro le sont.

1. On prélève au hasard un roulement dans le stock.
   a. Démontrer que la probabilité pour qu’un roulement soit défectueux est 0,03;
   b. On constate à l'usage que le roulement prélevé au hasard est non défectueux. Déterminer la probabilité qu'elle provienne de l'usine de San-Pedro.
2. On prélève dans le stock, successivement au hasard et avec remise ; dix roulements. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de roulements non défectueux.
   a. Quelle est la loi de X ? Préciser ses paramètres.
   b. Déterminer au centième près par excès, la probabilité que neuf au moins de ces roulements soient non défectueux.

3. On étudie dans cette partie le diamètre des roulements. On note D la variable aléatoire qui, à chaque roulement associe son diamètre en millimètre. On admet que D suit la loi normale de, moyenne 23,65mm et d'écart type 0,02mm.
   a. On choisit au hasard un roulement. Quelle est la probabilité que son diamètre soit inférieur à 23,61mm ou supérieur à 23,70mm.
   b. Déterminer un intervalle de confiance au seuil de 95% du diamètre moyen des roulements du stock. .

EXERCICE 5: (EXTRAIT PU BTS Mines-Géologie-Pétrole 2012)

Un gisement minier découvert dans une région donnée, est exploitée à l'aide d'une machine qui polit le minerai en boule sphérique. On a mesuré le diamètre de 100 minerais et les résultats de ces mesures sont consignés dans le tableau ci-dessous. (Les mesures des diamètres en cm sont réparties en classe d'amplitudes 0,02cm).

Classe des diamètres	Effectifs correspondants
[21,93 ; 21,95[	3
[21,95 ; 21,97[	7
[21,97 ; 21,99[	27
[21,99 ; 22,01[	30
[22,01 ; 22,03[	24
[22,03 ; 22,05[	7
[22,05 ; 22,07[	2

1.
   a. Donner la moyenne m_e et l'écart-type σ_e de cette série statistique (les résultats seront arrondis à 10^{-4}
   b. Dans la pratique, le diamètre d'un minerai exprimé en cm est une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne m = 22 cm et d’écart-type σ = 0,25 cm. Un minerai est refusé si son diamètre est strictement inférieur à 21,95 cm ou strictement supérieur à 22,05 cm. Quelle est la probabilité qu'un minerai pris au hasard dans la production soit accepté ?
2. On admet que la probabilité pour qu'un minerai soit refusé est q = 0,5. On prélève au hasard un échantillon de 80 minerais dans la production, (ce prélèvement est assimilé à un tirage de 80 minerais avec remise). On désigne par Y la variable aléatoire qui est égal au nombre de minerais refusés dans l'échantillon des 80 minerais prélevés.
   a. Donner la loi suivie par Y.
   b. Déterminer le nombre moyen d'échantillons refusés.
   c. Calculer $P\,[(Y = 0)/(Y \leq 2)]$.
3. On approche la variable aléatoire Y par la variable aléatoire Y_1, où Y_1 suit la loi de poisson de paramètre λ.
   a. Donner la valeur de λ.
   b. Avec la loi Y_1, calculer la probabilité que l'échantillon prélevé 'contienne exactement 10 minerais refusés.
4. Après vérification, la variable aléatoire X qui est égal au diamètre du minerai est en réalité, une variable aléatoire continue de densité de probabilité f définie par :

$$f(X) = \begin{cases} a\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) & \text{si } [-2\,;\,2\,] \\ 0 & si\ ]-\infty\,;\,-2[\,\cup\,]2\,;\,+\infty[\end{cases}$$

a. Déterminer a pour que f soit une densité de probabilité
b. Calculer P(X < -1) et P (X > $\frac{1}{4}$)
c. Déterminer E(X) où E(X) désigne l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

EXERCICE 6: (EXTRAIT DU BTS SEI 2013)

Une machine fabrique des rondelles en acier pour les souris d'ordinateurs. On admet que la variable aléatoire X qui est égale au nombre au diamètre d'une rondelle suit une loi normale de moyenne m = 90mm et d'écart-type σ =0,16mm.

1.
   a. On dit qu'une rondelle est conforme si son diamètre appartient à l'intervalle [89,7 mm ;90,3 mm]
      Quelle est la probabilité pour qu'une rondelle prise au hasard dans la production soit non conforme ?
   b. Déterminer le réel a tel que la proportion de rondelles ayant un diamètre compris entre 90 - α et 90 + α soit 90%.
2. On admet que la probabilité pour qu'une pièce soit conforme est p = 0,94. D'un lot contenant un très grand nombre de rondelles, on tire n pièces. On désigne par Y la variable aléatoire qui est égale au nombre de rondelles non-conformes parmi les n rondelles tirées.
   a. Donner la loi de probabilité de Y.
   b. Donner l'écart-type de la variable aléatoire Y en fonction de n.
   c. On prend n = 10, calculer la probabilité pour que l'on ait au moins 3 pièces conformes.
3. On tire 50 pièces.
   a. Montrer que la loi suivie par Y peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
   b. Avec cette loi de Poisson, calculer la probabilité d'avoir au plus 2 pièces non-conformes.
4. On tire un échantillon de 100 rondelles et on constate que le diamètre moyen de ces rondelles est 89,96mm. Déterminer au risque de 5%, un intervalle de confiance de la moyenne des diamètres des rondelles. NB : $\pi(1.65)$ = 0,95.

Exercice 7 :

Pour mieux gérer les demandes de crédits de ses clients, le directeur d'une agence bancaire réaliser une étude relative à la durée de traitement des dossiers. Un échantillon aléatoire non exhaustif de 30 dossiers traités a donné :

Durée en minutes	[0; 10[	[10;20[	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[	[50; 60[
Nombre	3	6	10	7	3	1

1. Calculer des valeurs approchées de la moyenne et de l'écart type des durées de traitement des dossiers de cet échantillon.
2. En déduire des estimations ponctuelles de la moyenne m et de l'écart type de la population totale des dossiers traités.
3. Soit la variable aléatoire X qui, à tout échantillon aléatoire non exhaustif de taille 30 de cette population, associe sa moyenne. On suppose que X suit la loi normale $N\left(m\,;\,\frac{\sigma}{\sqrt{30}}\right)$.
4. Donner une estimation de m par l'intervalle de confiance de centre X, avec le coefficient de confiance 95%, fourni par cet échantillon, en prenant pour σ son estimation ponctuelle.

CHAPITRE IV : PROBLABILITES

I. NOTIONS DE PROBABILITE

Exemple introductif : une boite contient 10 jetons :2 verts, 3rouges, et 5 bleus. On tire simultanément et au hasard deux jetons de cette boite :

a) Combien y-a-t-il de tirages ?
b) Combien y-a-t-il de tirages comportant des jetons de même couleur ?
c) Combien y-a-t-il de tirages comportant des jetons de même couleur différentes ?
d) Combien y-a-t-il de tirages comportant un jeton rouge et un jeton bleu ?
e) Combien y-a-t-il de tirages ne comportant des jetons verts ?

1. Vocabulaire

- On appelle expérience aléatoire une épreuve pour laquelle on dispose de certaines informations, mais dont le résultat ne peut être prévu à l'avance avec certitude.
  Exemple : tirer simultanément et au hasard deux jetons de la boite.

- On désigne par un univers l'ensemble des résultats possibles à l'issue d'une expérience aléatoire. On la note Ω ou $\mathcal{U}$.
  Dans l'exemple précédent,Card $\Omega = C_{10}^{2}$.

- Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. On appelle évènement une partie de l'univers Ω. On la note A, B, …
  Exemple : A : "le tirage comporte des jetons de même couleur"
  B : "le tirage comporte un jeton rouge et un jeton bleu"
  On a Card A $= C_2^2 + C_2^2 + C_5^2 = 14$ et Card B $= C_3^1$ x $C_5^1 = 15$

- L'ensemble des évènements de l'univers Ωse note $\mathcal{P}(\Omega)$.

- Un évènement élémentaire est un évènement qui ne comporte qu'une seule éventualité.
  Exemple :C : "le tirage ne comporte que des tirages de couleur Vertes".
  On aCard C $= C_2^2 = 1$. Donc C, est l'évènement élémentaire.
- Un évènement complémentaire d'un évènement A est l'ensemble des parties de Ω qui ne sont pas dans A. on le note $\overline{A}$.
  Exemple : A : "le tirage comporte des jetons de même couleur."

  $\Rightarrow \bar{A}$" le tirage comporte des jetons de couleurs différentes."

- Soient A, B$\in\mathcal{P}(\Omega)$.
  - $A \cap B$ est l'évènement "A et B " ; il est formé de la réunion des éventualités communes à A et B.
  - $A \cup B$ est l'évènement "A ou B" ; il est formé de la réunion des éventualités A et B.

Remarques

- l'évènement $A \cap B$ est aussi appelé AB et aussi appelé évènement produit tandis que l'évènement $A \cup B$ est noté $A + B$ et appelé évènement somme.
- On a $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$. Donc $Card\ \Omega = CardA + Card\bar{A}$

- Deux évènements sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple : Soient D : "le tirage comporte un jeton rouge et un jeton bleu."
E : "le tirage ne comporte que des jetons verts."
Alors D et E sont incompatibles.

Propriétés : On a $\overline{AuB} = \bar{A} \cap \bar{B}$
Et $\overline{A \cap B} = \bar{A} U \bar{B}$

2. Définitions

D1 la fonction ***p*** : $\Omega \to [0\ ;1]$est une probabilité surΩ *si*: $(a)\ p(\Omega) = 1$

(b) $\forall\ A, B \in P(\Omega), A \cap B = \emptyset \Longrightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

D2on dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les évènements élémentaires d'une expérience aléatoire ont la même probabilité d'être réalisé.

3. Propriétés

P1 Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité de réaliser l'évènement A se définit par :

$$p(A) = \frac{Card\ (A)}{Card(\ \Omega)} = \frac{nombre\ ce\ cas\ favorable \text{ à } A}{nombre\ de\ cas\ possibles}$$

:

P2 : Soient Aet B deux évènements de $P(\Omega)$

- $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Conséquence : On a $p(\emptyset) = 0$

II. PROBABILITE CONDITONNELLE

1. Définition

Soit p une probabilité sur Ω et A un évènement tel que $p(A) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé est le nombre noté $p_A(B) ou\ p(B|A)$ et défini par :

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

2. Propriétés

Pour tous évènements A et B de probabilités non nulles, on a :

$$p(A \cap B) = p(A).p_A(B) = p(B).p_B(A)$$

3. Evènements indépendants

Définition : $Soient\ A\ et\ B\ \in P(\Omega)\ tels\ que\ p(A) \neq 0\ et\ que\ p(B) \neq 0.$
Les évènements A et B sont indépendants si
$p(A \cap B) = p(A).p(B) ou\ p_A(B) = p(B)\ ou\ p_B(A) = p(A).$

Propriétés : Si A et B sont deux évènements indépendants, alors :
A et $\bar{B}$ sont indépendants,
$\bar{A}$ et B sont indépendants,
$\bar{A}$et$\bar{B}$ sont indépendants.

III. VARIABLES ALEATOIRES ET LOIS FONDAMENTALES

1. Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire X définie sur un univers probabilisé Ω est dite discrète si son ensembles image associé X(Ω) est fini ou dénombrable.

2. Lois associés à une variable aléatoire discrète

2.1 **Loi binomiale(notation $\mathcal{B}$ (n, p)).**

Définition : Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues généralement appelées succès et échec de probabilité respectives $p\ et\ 1-p$.

Propriété : Etant données :

(a) Une épreuve de Bernoulli de probabilités $p(succès)\ et\ 1-p(échec)$,
(b) La répétition de façon indépendante, n fois de cette épreuve de Bernoulli,
(c) La variable aléatoire X qui, à cette succession des n épreuves de Bernoulli, associe le nombre de succès.

Dans ces conditions, la variable aléatoire X admet la loi de probabilité appelée loi binomiale de paramètres n et p et noté $\mathcal{B}$ (n, p).

La probabilité d'obtenir k succès (au cours des n épreuves) est donnée par la formule suivante (où n et p sont supposés connus)

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

Valeurs caractéristiques

Si une variable aléatoire $X \rightsquigarrow \mathcal{B}$(n, p), alors :

- Son espérance mathématique (ou moyenne) de$X\ vaut\ E(X)=np$.
- Sa variance est $V(X)=np(1-p)$,
- Et son écart type $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

Exercice d'application

Dans le fichier "*ingénieur*" d'une école, chaque élève-ingénieur correspond à une fiche unique. Un tiers des élèves-ingénieur sont domiciliée à Cocody. En supposant que chaque fiche à la même probabilité d'être choisie, on prélève 5 fiches avec remise de telle façonque les 5 tirages soient indépendants. Soit X la variable aléatoire qui a un prélèvement de 5 fiches associe le nombre de fiches correspondant à des élèves-ingénieurs domiciliés à Cocody.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer$P(X \geq 2) et P(X < 5)$.
3. Déterminer l'espérance mathématique de X.

2 .2 Loi de Poisson (notation $\mathcal{P}(\lambda)$)

Définition

Une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$(positif) lorsque sa loi de probabilité est, pour tout nombre entier naturel k,

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}$$

Valeurs caractéristiques

Si une variable aléatoire

$X \backsim \mathcal{P}(\lambda), alors: E(X) = \lambda,\ V(X) = \lambda et \sigma(X) = \sqrt{\lambda}.$

Exercice d'application

La variable aléatoire X mesurant le nombre de client se présentant au guichet

"*Affranchissement*" d'un bureau de poste par intervalle de temps de durée 10

mn, entre 14h30 et 16h30, suit la loi de poisson de paramètre $\lambda = 5$.

Calculer la probabilité qu'entre 16h et 16h30 mn, il y ait au moins 6 personnes

à ce guichet à se présenter à se guichet.

B. Variable aléatoire continue

Dans le domaine économique et industriel, on est amené à étudier des variables pouvant prendre, au moins théoriquement, n'importe quelle valeurs dans$\mathbb{R}$. C'est le cas par exemple, la variable aléatoire X mesurant la durée de bon fonctionnement en jour d'un équipement particulier fabriqué en grande série, avec l'intervalle$[0;\ +\infty[$.

Pour une telle variable, les évènements sont du type :

$(X \leq 400), (\ X > 1000), ou(\ 400 \leq X \leq 1000)$. Nous sommes donc amenés à utiliser la

fonction de répartition pour le calcul des probabilités.

1 .Définition

Une variable X est continue. S'il existe une fonction positive f , continue sur $\mathbb{R}$

(appelée densité de probabilité de X) telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$$

La loi de probabilité de X est donnée par :

$$P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt,\ \ P(a < X \leq b)\ = \int_{a}^{b} f(t)dt\ \ et\ \ P(X = a) = 0.$$

Remarque

Dans les égalités ci-dessus, les signes $\leq et <$, $\geq et >$ s'emploient

Indifféremment.

2. Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition de X la fonction F définie sur $\mathbb{R}$par :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

Remarque On a :

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a), P(X < x) = F(x) \ \ et \ P(X > x) = 1 - F(x).$$

Valeurs caractéristiques

Soit X une variable aléatoire continue de densité f,

- L'espérance mathématique de X est définie par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$$

- La variance et l'écart-type sont définies par :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [t - E(X)]^2 f(t)dt \ \ et \ \ \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exercice

Soit $k > 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$

par :$f(x) = \begin{cases} f(t) = ke^{-2t} \ si \ t \geq 0 \\ f(t) = 0 \quad\quad si \ t < 0 \end{cases}$

1. Déterminer le réel k pour que f soit une densité de probabilité.

2. On note X la variable aléatoire associé à la densité de probabilité de f.

Déterminer la fonction de répartition de X.

3. En déduire les probabilités suivantes :

$P(x \leq 1), P(1 \leq x \leq 2), P(x \leq 0)$ et $P(x \geq 5)$

4. Déterminer E(X).

3.<u>Loi normale ou loi de Laplace-Gauss</u> (notation $\mathcal{N}$(m,σ))

3 .1<u>Définition</u>

Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres m et $\sigma (X \leadsto \mathcal{N}(m, \sigma))$ lorsque sa densité de probabilité est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2\right]$$

3.2<u>Propriété</u>

Si une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}$(m,σ), alors :

$E(X) = mV(X) = \sigma^2$et $\sigma(X) = \sigma$.

4.<u>La loi Normale centrée réduite</u> ($\mathcal{N}$(0,1))

<u>Propriété</u>

Si une variable aléatoire continue X suit la loi normale $\mathcal{N}$ (m,σ), alors la variable aléatoire $T = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}$(0,1).

<u>Remarques</u>

- Comme la variable aléatoire T est centrée réduite $alors$ on a : $E(T) = 0$ et $\sigma(T) = 1$.

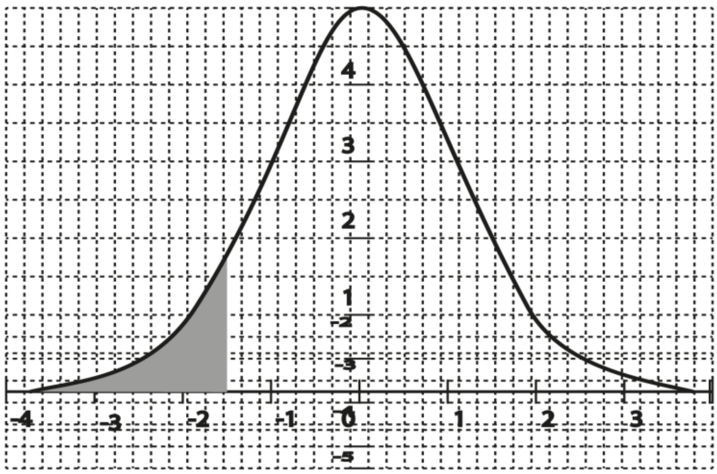
- La densité de probabilité de T est la fonction

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

- La fonction de répartition de T est définie par :

$$\Pi(t)=P(T<t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

- Sa représentation graphique est



- La courbe de la densité de probabilité $\varphi(t)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- L'aire totale de la surface comprise entre la courbe de φ et l'axe des abscisses est égale à 1.

Nous en déduisons les relations suivantes :

$P(T \leq t) = \pi(t), \quad P(T > t) = 1 - \pi(t) = \pi(-t)$

$P(t_0 \leq T \leq t_1) = \pi(t_1) - \pi(t_0)$

$P(-t \leq T \leq t) = 2\pi(t) - 1$

$P(T \leq -t \text{ } ou \text{ } T \geq t) = 2\pi(-t) = 2[1 - \pi(t)]$

$P(T \leq t_0 \text{ } ou \text{ } T \geq t_1) = \pi(t_0) - \pi(t_0) + 1.$

Exercice d'application

En utilisant la table de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, calculer :

$$P(T \leq 1{,}67), \qquad P(T > 1{,}25), \qquad P(T \leq -1{,}83),$$
$$P(T \leq 0{,}42) \; et \; P(-2 \leq T \leq 2).$$

5 .Relations liant X et T

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$, on sait que $T = \frac{X-m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \; et \; on \; a : P(X < t) = P\left(T < \frac{t-m}{\sigma}\right)$

$P(t_1 < X < t_2) = P(\frac{t_1-m}{\sigma} < T < \frac{t_2-m}{\sigma})$

$P(-t < T < t) = P(m - t\sigma < X < m + t\sigma)$

EXERCICE D'APPLICTION

Sachant que X suit la loi normale de paramètres m = 18 et σ = 2,5 calculer à 10^{-3} près les probabilités suivantes : $P(T < 17)$, $P(T < 19)$, $P(T > 20)$, $P(16 < T < 19.5)$

C .APPROXIMTIONS

Pour faciliter les calculs, sous certaines conditions la loi binomiale et la loi de poisson peuvent être considérées comme ‘’voisines’’. Elles peuvent être approximées, chacune par la loi normale, on a :

- La loi binomiale B(n,p) peut être approximée par la loi de poisson P(np) si p$\leq$ 0,1;
  np(1-p) ≤ 10 et n> 30
- La loi binomiale B(n,p) peut être approximée par la loi normale $\mathcal{N}$(np,$\sqrt{np(1-p)}$) si np(1-p)> 10 et n $\geq$ 50
- La loi de poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ peut être approximée par la loi normale $\mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$ si $\lambda > 20$