

Fonctions réelles d'une variable réelle : Limites et Continuité

H. Benhassine

Octobre 2021

Contents

1	Généralités sur les fonctions	1
1.1	Les limites	5
1.1.1	Limites finies quand x tend vers x_0	5
1.1.2	Les limites infinies quand x tend vers x_0	7
1.1.3	Opérations algébriques sur les limites et quelques propriétés	7
1.1.4	Cas d'indétermination	8
1.2	Continuité	8
1.2.1	Fonctions continues en un point	8
1.2.2	Fonctions continues sur un intervalle	10
1.2.3	Fonctions uniformément continues sur un intervalle	10
1.2.4	Opérations sur les fonctions continues	11
1.2.5	Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle fermé	11
1.2.6	Prolongement par continuité	13
1.2.7	Fonction inverse d'une fonction continue	14
1.2.8	Théorème du point fixe de Banach	14

Chapter 1

Généralités sur les fonctions

Définition 1.0.1 On appelle fonction réelle, l'application f définie de l'intervalle D vers $\mathbb{R}$ qui associe à tout élément $x \in D$ l'image $f(x)$:

$$\begin{array}{ccc} f : & D & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto f(x) \end{array} .$$

En ce qui nous concerne, on s'intéressera aux fonctions réelles d'une variable réelle, c'est à dire au cas où l'on a : $D \subseteq \mathbb{R}$.

On désignera par:

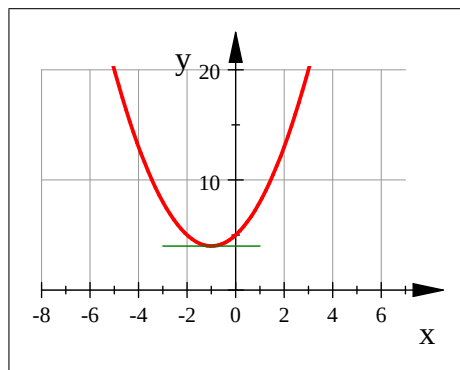
- D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
- $f(D_f)$ l'image directe de l'ensemble D_f :

$$f(D_f) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in D_f : f(x) = y\} .$$

Exemple 1.0.2

- Soit la fonction réelle $f(x) = x^2 + 2x + 5$ définie sur $D = \mathbb{R}$. Alors l'image directe de f est $f(D) = [4, +\infty[$. En effet:

$$\begin{aligned} \forall y \in f(D), \exists x \in D : y = f(x) &\iff y = x^2 + 2x + 5 \\ &\iff y - 4 = x^2 + 2x + 1 \\ &\iff y - 4 = (x + 1)^2 \\ &\Rightarrow y - 4 \geq 0 \\ &\Rightarrow y \geq 4. \end{aligned}$$



Graph of $f(x) = x^2 + 2x + 5$.

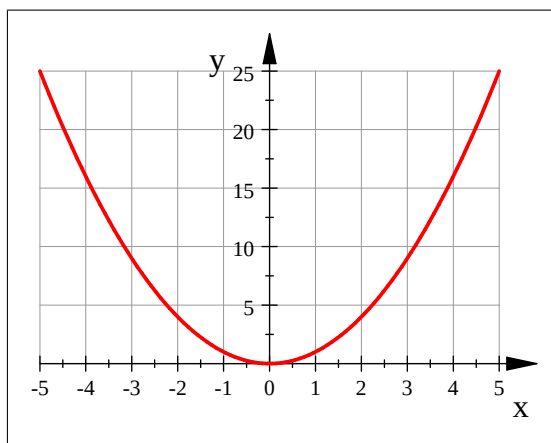
- Soit la fonction réelle $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ définie sur $D =]-\infty, -1] \cup [+1, +\infty[$. Alors l'image directe de f est $f(D) = [0, +\infty[$.

Définition 1.0.3 Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle D de $\mathbb{R}$. Alors on dit que:

- f est une fonction paire, si et seulement si, $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$,
- f est une fonction impaire, si et seulement si, $\forall x \in D : f(-x) = -f(x)$.

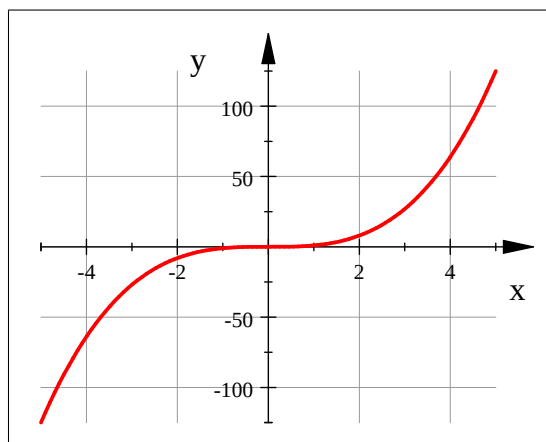
Exemple 1.0.4

- La fonction $f(x) = x^2$ est une fonction paire. Son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Tracé de la fonction paire $f(x) = x^2$.

- La fonction $f(x) = x^3$ est une fonction impaire. Son graphe est symétrique par rapport à l'origine.



Tracé de la fonction impaire $f(x) = x^3$.

Exercice 1.0.5

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $D \subset \mathbb{R}$ telle que:

$$\forall x_1, x_2 \in D : f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2).$$

1. Démontrer que: $f(0) = 0$.
2. Démontrer que f est une fonction impaire.
3. Démontrer que: $\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N} : f(nx) = nf(x)$.

Définition 1.0.6 Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Alors on dit que est une fonction périodique, si et seulement s'il existe un réel $\alpha > 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x + \alpha) = f(x).$$

On appellera le plus petit nombre α vérifiant la relation précédente, la période de la fonction f .

Remarque 1.0.7 La fonction trigonométrique: $f(x) = \sin x$ est une fonction périodique de période 2π , car: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. On remarque aussi que: $\sin(x + 4\pi) = \sin x$, cependant 4π n'est pas la période de $\sin x$ (c'est pas le plus petit nombre).

Définition 1.0.8 Soit la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que:

- f est majorée, si et seulement si, l'ensemble $f(D)$ l'est :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : f(x) \leq M.$$

- f est minorée, si et seulement si, l'ensemble $f(D)$ l'est :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D : m \leq f(x).$$

- f est bornée, si et seulement si, l'ensemble $f(D)$ l'est :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : m \leq f(x) \leq M.$$

On appellera, si elle existe, la borne supérieure (respectivement la borne inférieure) de la fonction f sur l'intervalle D le nombre:

$$\sup_D f = \sup(f(D)), \text{ respectivement } (\inf_D f = \inf(f(D))).$$

Exemple 1.0.9

- La fonction $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto 4(x - 1)$$
 est une fonction bornée sur $[0, 1]$ avec:

$$-4 \leq f(x) \leq 0, \forall x \in [0, 1].$$

- La fonction $\sin x$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car l'on a $\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| \leq 1$.
- la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^*$, car l'on a: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm\infty$.

Remarque 1.0.10 Comme on a vu au chapitre 2, il est possible d'écrire:

$$M = \sup_D f \iff \begin{cases} \forall x \in D : f(x) \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in D : f(x) > M - \varepsilon. \end{cases}$$

Définition 1.0.11 (Opération algébrique sur les fonctions)

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. On définit alors la fonction:

- $f + g$ de la façon suivante $\forall x \in D : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- fg de la façon suivante $\forall x \in D : (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- λf de la façon suivante $\forall x \in D : (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, où λ est un réel quelconque.

On notera par $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur l'intervalle D .

Définition 1.0.12 Soit la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que:

- f est une fonction croissante, si et seulement si: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$.
- f est une fonction décroissante, si et seulement si: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2)$.

Définition 1.0.13 Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. Alors la fonction composée $g \circ f$ est définie si et seulement si $f(D_f) \subset D_g$ et l'on a:

$$x \in D_f \xrightarrow{f} f(x) \in f(D_f) \xrightarrow{g} g(f(x)) = g \circ f(x)$$

$$\forall x \in D_f : g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple 1.0.14 Soient les deux fonctions: $f(x) = x^2 + 2x + 5$ et $g(x) = \ln(x - 3)$. Donner le domaine de définition de chacune des deux fonctions et dire si la fonction $g \circ f$ composée est bien définie.

Il est clair que: $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g =]3, +\infty[$.

Aussi, comme nous l'avons vu au début de ce chapitre: $f(D_f) = [4, +\infty[$ (pour rappel le graphe de f est une parabole d'équation: $y - 4 = (x + 1)^2$).

Comme $f(D_f) \subset D_g$, alors la fonction $g \circ f$ est définie et l'on a: $g \circ f(x) = \ln((x^2 + 2x + 5) - 3)$.

1.1 Les limites

1.1.1 Limites finies quand x tend vers x_0

Définition 1.1.1 Soit la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f tend vers la limite l quand x tend vers x_0 , si et seulement si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 < |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon].$$

Remarque 1.1.2

1. L'écriture mathématique précédente signifie que lorsque x est au voisinage de x_0 et diffère de cette valeur ($x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[- \{x_0\}$) alors $f(x)$ est forcément dans le voisinage de l ($f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$).
2. L'écriture $x \rightarrow x_0$ signifie que x est au voisinage de x_0 sans qu'il prenne cette valeur.
3. Une fonction peut avoir une limite quand x tend vers x_0 sans qu'elle ne soit définie en ce point.

Exemple 1.1.3 Pour la fonction f définie par $f(x) = 3x + 2$ on a: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$. En effet, en remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x) - l| = |3x + 2 - 5| = 3|x - 1|.$$

Il suffirait alors de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$ pour avoir $\forall \varepsilon > 0 : |x - 1| < \eta = \frac{\varepsilon}{3} \implies 3|x - 1| < \varepsilon \implies |f(x) - 5| < \varepsilon$.

Théorème 1.1.4 Si la fonction réelle f possède une limite au point x_0 , alors cette limite est forcément unique.

Démonstration. La démonstration se fait de manière analogue à celle développée au chapitre précédent pour montrer l'unicité de la limite d'une suite réelle. ■

Théorème 1.1.5 Soit la fonction réelle $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors on a l'équivalence des deux propositions suivantes:

- i) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.
- ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans D qui converge vers x_0 (avec $x_n \neq x_0$) on a forcément la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $f(x_0)$ dans $f(D)$.

Démonstration. i) $\xrightarrow{?}$ ii)

Supposons que l'on ait $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, ceci d'après la définition de la limite équivaut à dire que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 < |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon].$$

Et soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans D qui converge vers x_0 (avec $x_n \neq x_0$), ceci revient à écrire d'après la définition de la convergence des suites que:

$$\forall \eta > 0, \exists N \in \mathbb{N} : [\forall n > N \implies |x_n - x_0| < \eta]$$

En combinant les deux implications précédente il est évidant que l'on a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : [\forall n > N \implies |f(x_n) - l| < \varepsilon]$$

C'est à dire que l'on a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$.

ii) $\stackrel{?}{\implies} i)$

On suppose que l'on a ii) et on veut démontrer i). Pour cela, on supposera qu'on ai la proposition inverse de i) : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq l$ et on verra qu'on arrivera à une contradiction. En effet, d'après la définition de la limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq l \iff \exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : [0 < |x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - l| \geq \varepsilon].$$

En prenant $\eta = \frac{1}{n+1} > 0$, pour différentes valeurs de $n \in \mathbb{N}$, d'après l'implication précédente, il existerai à chaque fois un élément que l'on notera $x_n \in D$ tel que:

$$0 < |x_n - x_0| < \eta = \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - l| \geq \varepsilon.$$

C'est à dire par passage à limite on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ mais par contre $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq l$ (car: $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$). Ceci est en contradiction avec l'hypothèse ii).

Donc la proposition inverse faite au départ est forcément fausse et l'on a alors: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$. ■

Exemple 1.1.6 On utilise généralement le théorème précédent pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite quand $x \rightarrow x_0$. Par exemple considérons la fonction: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Cette fonction n'admet pas de limite au point $x_0 = 0$. En effet, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi},$$

telle que: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 = x_0$, mais par contre la suite:

$$f(x_n) = f\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = (-1)^n$$

ne possède pas de limite quand $n \rightarrow +\infty$ (la proposition ii) du théorème précédent n'est pas vérifiée).

Définition 1.1.7 Soit la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f admet une limite l à droite du point x_0 , si et seulement si:

$$\lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 < x - x_0 < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon].$$

On dit que f admet une limite l à gauche du point x_0 , si et seulement si:

$$\lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 < x_0 - x < \eta \implies |f(x) - l| < \varepsilon].$$

Remarque 1.1.8 A noter que: $0 < x - x_0 < \eta \iff x \in]x_0, x_0 + \eta[$ et $0 < x_0 - x < \eta \iff x \in]x_0 - \eta, x_0[$.

Théorème 1.1.9 On a l'équivalence suivante:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \lim_{x \xrightarrow{>} x_0} f(x) = l = \lim_{x \xrightarrow{<} x_0} f(x).$$

Exemple 1.1.10 La fonction définie par:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{-1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) = \frac{\sqrt{x^2(x+1)^2}}{3(x+1)}, \end{aligned}$$

n'admet pas de limite au point $x_0 = -1$. En effet:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{|x(x+1)|}{3(x+1)} &= \begin{cases} \frac{x(x+1)}{3(x+1)}, & x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[\\ \frac{-x(x+1)}{3(x+1)}, & x \in]-1, 0] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{x}{3}, & x \in]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[\\ -\frac{x}{3}, & x \in]-1, 0] \end{cases}. \end{aligned}$$

$$\text{Et par suite: } \lim_{x \xrightarrow{\geq} -1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{\geq} -1} -\frac{x}{3} = \frac{1}{3} \neq -\frac{1}{3} = \lim_{x \xrightarrow{\leq} -1} \frac{x}{3} = \lim_{x \xrightarrow{\leq} -1} f(x).$$

La limite à gauche n'est pas égale à limite à droite, donc f n'admet pas de limite au point $x_0 = -1$.

1.1.2 Les limites infinies quand x tend vers x_0

Définition 1.1.11 Soit la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) quand x tend vers x_0 , si et seulement si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 < |x - x_0| < \eta \implies f(x) > A],$$

respectivement:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 < |x - x_0| < \eta \implies f(x) < -A].$$

Exemple 1.1.12 En utilisant la définition de la limite, montrer que: $\lim_{x \xrightarrow{\geq} 0} \ln x = -\infty$.

On a à démontrer que: $\lim_{x \xrightarrow{\geq} 0} \ln x = -\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta > 0, \forall x > 0 : [0 < x < \eta \implies \ln x < -A]$.

On a: $\ln x < -A \iff x < e^{-A}$, d'où pour tout $A > 0$, il suffit de prendre: $\eta = e^{-A}$ pour avoir l'implication:

$$0 < x < \eta \implies \ln x < -A.$$

Remarque 1.1.13 Des définitions mathématiques de la limite précédentes et de celle introduite en début de chapitre, il est aisé de déduire l'écriture mathématique correspondant à $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ et à $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$.

1.1.3 Opérations algébriques sur les limites et quelques propriétés

• Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble $D \subseteq \mathbb{R}$ telles que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$. Alors on a:

$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = l + l'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = ll'$, $\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda f)(x) = \lambda l'$ (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$) et $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$ (si $l' \neq 0$).

• Si $f(x) \leq g(x), \forall x \in V_{x_0}$ (un voisinage du point x_0), alors forcément: $l \leq l'$.

• Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ et g est une fonction bornée au voisinage de x_0 alors forcément: $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = 0$.

Exemple 1.1.14 La limite $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x} = \cos \infty$ n'est pas définie, par contre on a: $\lim_{x \rightarrow 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$, car la fonction $\cos \frac{1}{x}$ est bornée sur $\mathbb{R}$ ($|\cos \frac{1}{x}| < 1, \forall x \in \mathbb{R}^*$) et elle est multipliée par une fonction tendant vers zéro quand $x \rightarrow 0$.

Remarque 1.1.15 (Limite d'une fonction composée)

Soient $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$. Alors on n'a pas forcément:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = l.$$

Pour que l'implication soit vraie il faudrait que g soit continue au point y_0 .

Exemple 1.1.16 Soient les deux fonctions:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g(y) = \begin{cases} 1, & \text{si } y = 0 \\ 0, & \text{si } y \neq 0 \end{cases} \quad (\text{fonction de Dirac}).$$

Il est clair que la fonction composée: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Et donc: $\lim_{x \rightarrow 0} g \circ f(x) = 1$, alors que $\lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 0$ (car comme on l'a vu au début de chapitre, $y \rightarrow 0$ signifie que y tends vers 0 sans prendre cette valeur).

1.1.4 Cas d'indétermination

Lors du calcul des limites il arrive que l'on obtienne des cas où l'on est dans l'impossibilité de donner une valeur à notre calcul: ce sont les cas d'indétermination que l'on résumera en 5 catégories:

- 1) $-\infty + \infty$.
- 2) $\frac{0}{0}$.
- 3) $0 \times (\pm\infty)$.
- 4) $\frac{\pm\infty}{-\infty}$.
- 5) $1^{+\infty}$.

On utilisera alors dans ce cas pour contourner ces cas d'indétermination des limites communément connues combinées avec des artifices de calcul.

Exemple 1.1.17 On laissera au lecteur le soin de montrer que:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{2}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = 3a^2$.

1.2 Continuité

1.2.1 Fonctions continues en un point

Définition 1.2.1 On dit que la fonction réelle: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est :

- continue au point $x_0 \in D$, si et seulement si: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. C'est à dire:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 \leq |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

- continue à droite du point $x_0 \in D$, si et seulement si: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$. C'est à dire:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 \leq x - x_0 < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

- continue à gauche du point $x_0 \in D$, si et seulement si: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$. C'est à dire:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 \leq x_0 - x < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Remarque 1.2.2

1. Pour étudier la continuité d'une fonction f au point x_0 il est **impératif que cette fonction soit définie** en ce point.
2. Il est possible de donner une définition équivalente à la précédente de la continuité en usant des suites numériques (comme on a vu dans la section précédente):

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D : \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0) \right].$$

3. f est continue au point $x_0 \iff f$ est continue à droite et à gauche du point x_0 .

Exemple 1.2.3

- Il n'est pas possible d'étudier la continuité au point $x_0 = 0$ de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ car elle n'est pas définie en ce point (malgré le fait que: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

- La fonction: $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = 0. \end{cases}$, est définie et continue au point $x_0 = 0$ (on dira de g , comme on le verra plus loin qu'elle est le prolongement par continuité de la fonction f au point $x_0 = 0$).

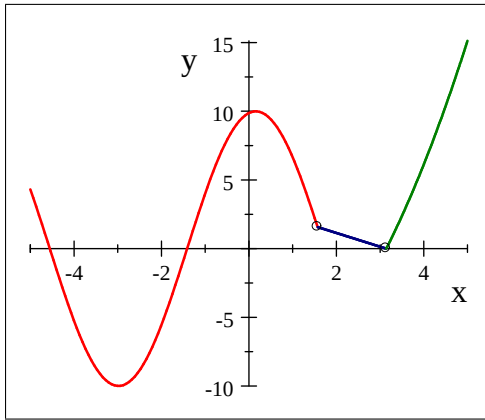
- La fonction: $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{R}^* \\ 2, & x = 0. \end{cases}$, est définie mais n'est pas continue au point $x_0 = 0$.

Exercice 1.2.4 Déterminer la valeur des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction :

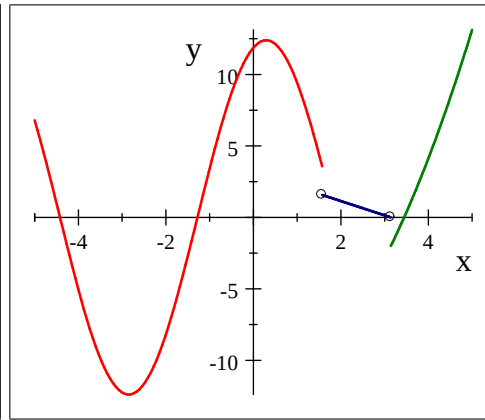
$$g(x) = \begin{cases} a \sin x + b \cos x, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ x^2 - b, & \pi > x \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 1.2.5 Il est facile de vérifier, en étudiant la continuité à droite et à gauche des points $\frac{\pi}{2}$ et π , que l'on aura: $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = \pi^2$.



Graphes de f pour $a = \frac{\pi}{2}$ et $b = \pi^2$.



Discontinuité pour $a \neq \frac{\pi}{2}$ et $b \neq \pi^2$.

1.2.2 Fonctions continues sur un intervalle

Définition 1.2.6 On dit que la fonction réelle $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur tout l'intervalle D , si est seulement si, elle est continue en tout point de cet intervalle. C'est à dire:

$$\forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Exemple 1.2.7

- La fonction $f(x) = 3x + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1[$.

Remarque 1.2.8 On notera par la suite l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle D par: $C(D)$.

1.2.3 Fonctions uniformément continues sur un intervalle

Définition 1.2.9 On dit que la fonction réelle $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ est continue uniformément sur l'intervalle D , si est seulement si, elle vérifie:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_0 \in D, \forall x \in D : [|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon].$$

Remarque 1.2.10

1. On parle de continuité uniforme toujours sur un intervalle.
2. Dans la continuité uniforme sur un intervalle la constante η dépend uniquement du choix de ε (on parle alors d'*approche globale* de la continuité), par contre dans la continuité simple sur un intervalle, η dépend du choix de x_0 et de ε (on parle alors d'*approche locale* de la continuité).

3. La continuité uniforme sur un intervalle $\Rightarrow$ la continuité sur un intervalle.

Exemple 1.2.11 Dans l'exemple précédent:

- La fonction $f(x) = 3x + 2$ est continue uniformément sur $\mathbb{R}$. En effet:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \frac{\varepsilon}{3} > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : \left[|x - x_0| < \eta = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |(3x + 2) - (3x_0 + 2)| < \varepsilon \right].$$

- Par contre la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$ car:

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon = 1, \forall \eta > 0, \exists x_0 = \frac{1}{n} (n \in \mathbb{N}^*), \exists x = \frac{1}{2n} : \\ |x - x_0| = \frac{1}{n} < \eta \quad \text{et} \quad |g(x) - g(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = n \geq 1. \end{aligned}$$

(cette dernière écriture est la négation de la définition de la continuité uniforme sur un intervalle).

1.2.4 Opérations sur les fonctions continues

- Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage d'un point x_0 de telle sorte qu'elles soient continues en ce point, alors les fonctions:

$$f + g, fg, \lambda f \text{ (pour tout } \lambda \in \mathbb{R} \text{) et } \frac{f}{g} \text{ (si } g(x_0) \neq 0 \text{)}$$

le sont aussi.

- Soient $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : f(D) \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que: f est continue en $x_0 \in D$ et g est continue au point $f(x_0)$, alors forcément, la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0 .

Exemple 1.2.12 La fonction: $\phi(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, car ϕ n'est autre que la composée des deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$ $\frac{-1}{x^2}$ et e^x . (Question: est-il possible de prolonger par continuité ϕ au point 0?)

Nous arrivons maintenant à la partie la plus importante de ce chapitre, où l'on va énoncer quelques théorèmes importants en analyse relatifs à toute fonction continue sur un intervalle.

1.2.5 Théorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle fermé

Théorème 1.2.13 (de Heine)

Toute fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ est uniformément continue sur cet intervalle.

Exemple 1.2.14 La fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ définie sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ est, d'après le théorème de Heine, uniformément continue sur cet intervalle. Vérifions cela:

$$\forall x, x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] : |g(x) - g(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{xx_0} \leq 4|x - x_0|,$$

(car : $\frac{1}{2} \leq x$ et $\frac{1}{2} \leq x_0$).

Donc il suffirait pour tout $\varepsilon > 0$ de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{4}$ pour avoir:

$$\forall x, x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] : |x - x_0| \leq \eta = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

C'est à dire que $g(x) = \frac{1}{x}$ est uniformément continue sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(A noter, comme on l'a vu dans l'exemple précédent, que cette même fonction sur l'intervalle semi-ouvert $]0, 1]$ n'est pas uniformément continue).

Théorème 1.2.15 Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors f est bornée sur cet intervalle. (C'est à dire: $\exists M > 0, \forall x \in [a, b] : |f(x)| < M$).

Exemple 1.2.16

- La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est continue sur l'intervalle fermé $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ donc elle est bornée sur cette intervalle avec: $1 \leq f(x) \leq 4$.
- La fonction $g(x) = \tan(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, donc elle est bornée sur cette intervalle. A noter qu'elle ne l'est pas sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ malgré qu'elle soit continue sur celui-ci.

Théorème 1.2.17 Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors f atteint ses bornes supérieure et inférieure:

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) = \sup_{[a, b]} f \quad \text{et} \quad f(x_2) = \inf_{[a, b]} f.$$

Démonstration. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Cette fonction est bornée sur $[a, b]$. Notons sa borne supérieure par M . Et faisons l'hypothèse (inverse) que f n'atteint pas sa borne supérieure, c'est à dire que $\forall x \in [a, b] : f(x) < M$.

On définit ensuite la fonction: $g(x) = \frac{1}{M-f(x)}, \forall x \in [a, b]$. Cette fonction est définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et donc d'après le théorème précédent elle est bornée:

$$\exists c > 0, \forall x \in [a, b] : g(x) \leq c.$$

(c est strictement positif, car la fonction g l'est par définition).

$$\text{On a donc: } \forall x \in [a, b] : g(x) = \frac{1}{M-f(x)} \leq c \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{c}.$$

Ce qui équivaut à dire que $M - \frac{1}{c}$ est un majorant de f sur $[a, b]$ et contredit le fait que M soit le plus petit des majorants de f .

On conclut alors que f atteint sa borne supérieure: $\exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) = \sup_{[a, b]} f$.

(On démontrera de la même manière qu'il existe $x_2 \in [a, b] : f(x_2) = \inf_{[a, b]} f$). ■

Théorème 1.2.18 (des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ telle que: $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes différents (i.e: $f(a) f(b) < 0$), alors:

$$\exists c \in]a, b[: f(c) = 0.$$

Exercice 1.2.19 L'équation: $2x^3 - 5x + 2 = 0$ possède-t-elle une solution appartenant à $[0, 1]$?

Solution 1.2.20 La réponse est oui, car la fonction: $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$ est continue sur $[0, 1]$ avec:

$$-1 = f(1) < f(0) = 2,$$

et donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires: $\exists c \in]0, 1[: f(c) = 0$.

C'est à dire: $\exists c \in]0, 1[$ solution de l'équation: $2x^3 - 5x + 2 = 0$.

Théorème 1.2.21 (Deuxième théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f est une fonction continue sur un intervalle quelconque: $D \subset \mathbb{R}$. Et soient: $x_1 < x_2$, deux éléments de D tels que: $f(x_1) \neq f(x_2)$. Alors pour tout nombre y strictement compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ on a:

$$\exists c \in]x_1, x_2[: f(c) = y.$$

Démonstration. Soit f est une fonction continue sur $D \subset \mathbb{R}$ avec: $f(x_1) < f(x_2)$ pour $x_1 < x_2$, deux éléments de D .

Et soit y tel que: $f(x_1) < y < f(x_2)$.

Il suffit d'appliquer alors le premier théorème des valeurs intermédiaires à la fonction: $g(x) = f(x) - y$ pour aboutir au résultat. ■

Exercice 1.2.22 L'équation: $x^2 = 7$ possède t-elle une solution appartenant à l'intervalle $[1, 3]$?

Solution 1.2.23 La réponse est oui, car la fonction: $f(x) = x^2$ est continue sur $[1, 3]$ avec:

$$1 = f(1) < y = 7 < f(3) = 9,$$

et donc d'après le théorème précédent: $\exists c \in]1, 3[: f(c) = 7$.

C'est à dire: $\exists c \in]1, 3[: c^2 = 7$.

Exercice 1.2.24 Démontrer que si une fonction f est continue sur $[a, b]$ telle que f ne s'annule pas sur cet intervalle, alors f est de signe constant sur $[a, b]$.

Solution 1.2.25 Il suffit de supposer l'hypothèse inverse, c'est à dire: $\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) < 0 < f(x_2)$ et d'arriver à une contradiction en appliquant le théorème des accroissements finis.

Corollaire 1.2.26 (relatif au théorème des valeurs intermédiaires)

1. L'image de tout intervalle $D \subset \mathbb{R}$ d'une fonction f continue sur D sera forcément un intervalle.
2. L'image de tout intervalle fermé $[a, b]$ par une fonction f continue sur $[a, b]$ sera forcément un intervalle fermé.

1.2.6 Prolongement par continuité

Définition 1.2.27 On dit d'une fonction f définie sur un intervalle $D - \{x_0\}$ de $\mathbb{R}$ qu'elle admet un prolongement par continuité en au point x_0 si et seulement si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l.$$

On définit alors le prolongement par continuité de f au point x_0 , notée $\tilde{f}$ par:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in D - \{x_0\} \\ l, & \text{si } x = x_0 \end{cases}.$$

Remarque 1.2.28 La fonction prolongée $\tilde{f}$ sera continue au point x_0 de par sa définition.

Exemple 1.2.29 La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ n'admet pas de prolongement par continuité au point $x_0 = 0$. En effet:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{|x|} = -1 \neq 1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|}.$$

C'est à dire que f n'admet pas de limite au point $x_0 = 0$.

1.2.7 Fonction inverse d'une fonction continue

Théorème 1.2.30 Soit f une fonction réelle continue et strictement monotone sur un intervalle $D \subset \mathbb{R}$. Alors:

- la fonction f admet une fonction inverse f^{-1} définie de $f(D)$ vers D .
- la fonction inverse f^{-1} est continue sur $f(D)$.
- la fonction f^{-1} est strictement monotone sur $f(D)$ et possède le même sens de variation que f .

Démonstration. Pour la démonstration on orientera le lecteur vers l'ouvrage de K. Allab Ref [1] p173-175. ■

Exercice 1.2.31 Soit la fonction définie sur $[a, b]$ par: $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Quelle condition doit vérifier les réels a et b pour que f admette une fonction inverse? Donner ensuite l'expression de cette fonction inverse.

Solution 1.2.32 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante pour $x \leq \frac{3}{2}$ et strictement décroissante pour $x \geq \frac{3}{2}$ (car $f'(x) = 2x - 3$).

D'après le théorème précédent pour que f admette une fonction inverse il suffirait donc que l'on ait:

$$a < b \leq \frac{3}{2} \quad \text{ou bien} \quad \frac{3}{2} \leq a < b.$$

En utilisant l'équivalence: $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, la fonction inverse sera donnée alors par:

$$f^{-1}(y) = \frac{3}{2} \pm \sqrt{y - \frac{1}{4}}, \forall y \geq \frac{1}{4}.$$

1.2.8 Théorème du point fixe de Banach

Dans ce paragraphe nous allons aborder un des théorèmes importants de l'analyse fonctionnelle, à savoir le théorème du point fixe. A cette fin, nous commencerons par introduire quelques définitions relatives à cette notion.

Définition 1.2.33 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle D quelconque de $\mathbb{R}$. On dit d'un point $\bar{x} \in D$ qu'il est un point fixe de f si l'on a :

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Définition 1.2.34 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle D quelconque de $\mathbb{R}$. On dit de f que c'est une fonction lipshitzienne sur D , s'il existe un réel $k \geq 0$ tel que :

$$\forall x_1, x_2 \in D : |f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|.$$

Définition 1.2.35 Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle D quelconque de $\mathbb{R}$. On dit de f que c'est une contraction sur D , s'il existe un réel $k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall x_1, x_2 \in D : |f(x_1) - f(x_2)| \leq k |x_1 - x_2|.$$

Dans le théorème suivant on fera le lien entre la notion d'uniforme continuité et de fonction lipshitzienne.

Théorème 1.2.36 Soit f une fonction lipshitzienne sur l'intervalle D , alors forcément f est uniformément continue sur D .

Démonstration. En utilisant directement la définition d'une fonction uniformément continue sur un intervalle, on déduit le résultat escompté en prenant: $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. ■

Théorème 1.2.37 (du point fixe de Bannach)

Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une contraction. Alors f admet un point fixe et ce point unique.

Démonstration. La démonstration repose sur la construction d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$ définie par récurrence: $x_{n+1} = f(x_n)$, où l'on choisit x_0 un élément de $[a, b]$.

- Une telle suite vérifie l'inégalité: $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n |x_1 - x_0|$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (On utilise le fait que f soit une contraction et la définition de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$).

- On utilisant l'inégalité précédente, on a $\forall n, p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + x_{n+p-2} - \cdots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n| \\ &\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^{n+1} + k^n) |x_1 - x_0| \\ &\leq (k^{p-1} + k^{p-2} + \cdots + k + 1) k^n |x_1 - x_0| \\ &\leq \frac{1 - k^p}{1 - k} k^n |x_1 - x_0| \quad (\text{somme d'une suite géométrique}) \\ &\leq \frac{1}{1 - k} k^n |x_1 - x_0| \end{aligned}$$

- Cela démontre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est suite réelle de Cauchy, donc convergente. Notons par $\bar{x}$ la limite de cette suite: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x}$.

• Cette limite $\bar{x}$ est dans $[a, b]$ car $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset [a, b]$. En utilisant le fait que f est continue (car f est une contraction, donc lipschitzienne, donc uniformément continue et donc continue), on a:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \bar{x} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\bar{x}).$$

$$\text{D'un autre côté: } x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \Rightarrow \bar{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

Des deux dernières implications, on conclut que: $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Ce qui veut dire que $\bar{x}$ est un point fixe de f . ■