

Fonctions dérivables

H. Benhassine

Octobre 2021

Table des Matières

1 Fonctions dérivables	1
1.1 Définitions et propriétés	1
1.1.1 Dérivées n-ièmes	3
1.1.2 Opération sur les fonctions dérivables	4
1.2 Théorèmes sur les fonctions dérivables sur un intervalle	5
1.3 Extremum d'une fonction	8
1.4 Formules de Taylor	8

Chapitre 1

Fonctions dérivables

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1 Soit la fonction réelle $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que:

1. f est dérivable au point $x_0 \in D$, si et seulement si, la limite : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. On parlera alors de dérivée de f au point x_0 que l'on notera : $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$ ou $Df(x_0)$.
2. f est dérivable à droite (respectivement à gauche) du point $x_0 \in D$, si et seulement si, la limite : $\lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (respectivement $\lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$) existe. On notera alors:
 - $f'(x_0 + 0)$ la dérivée à droite du point x_0 .
 - $f'(x_0 - 0)$ la dérivée à gauche du point x_0 .
3. f est dérivable sur tout l'intervalle D , si et seulement si, elle est dérivable sur tout point $x_0 \in D$.

Remarque 1.1.2

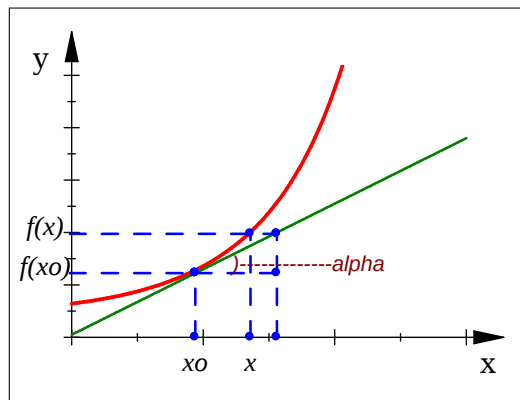
1. D'après la définition de la dérivée d'une fonction au point x_0 introduite ci-dessus, on peut écrire:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x), \text{ avec: } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

2. On peut aussi définir la dérivée d'une fonction par la relation:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

3. On a l'équivalence suivante: f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$.
4. Géométriquement, la dérivée d'une fonction représente l'inclinaison de la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_0 (quand $x \rightarrow x_0$) comme illustré dans la figure ci-après:



$$f'(x_0) = \tan \alpha \simeq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- La dérivée de la fonction: $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$ au point $x_0 = 1$ est: $f'(1) = 1/2$.

$$\text{En effet: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{1}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{1})(\sqrt{x} + \sqrt{1})}{(x - 1)(\sqrt{x} + \sqrt{1})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{1})} = \frac{1}{2}.$$

- La fonction: $f(x) = |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ n'admet pas de dérivée au point $x_0 = 0$. En effet, les dérivées à droite et à gauche du point $x_0 = 0$ ne sont pas égales:

$$f'(+0) = \lim_{x \searrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \searrow 0} \frac{|x|}{x} = 1.$$

$$f'(-0) = \lim_{x \nearrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \nearrow 0} \frac{|x|}{x} = -1.$$

- La fonction: $f(x) = \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ admet une dérivée en tout point x_0 de son domaine de définition avec: $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$.

$$\text{En effet: } \forall x_0 \in \mathbb{R}^* : \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{xx_0} = \frac{-1}{x_0^2}.$$

Théorème 1.1.3 f est dérivable au point $x_0 \implies f$ est continue au point x_0 .

Démonstration. Soit f une fonction dérivable au point x_0 , alors d'après la remarque précédente:

$$\exists \varepsilon(x) : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + \varepsilon(x) \quad \text{avec: } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

par passage à la limite on a:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} ((x - x_0)(f'(x_0) + \varepsilon(x))) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)f'(x_0) + \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)\varepsilon(x) \\ &= 0(f'(x_0) + 0) = 0. \end{aligned}$$

C'est à dire: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

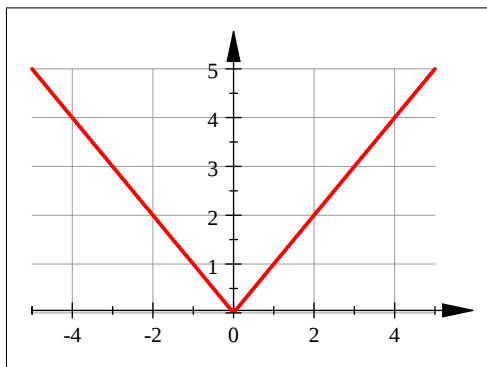
On conclut que f est continue au point x_0 . ■

Remarque 1.1.4

1. f est dérivable à droite (respectivement à gauche) du point $x_0 \in D \implies f$ est continue à droite (respectivement à gauche) du point x_0 .
2. L'implication inverse du théorème précédent n'est pas forcément vraie.

Exemple 1.1.5

- La fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^* \implies f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.
- La fonction $f(x) = |x|$ est continue au point $x_0 = 0$ (voir le tracé de la courbe de $|x|$) mais elle n'est pas dérivable en ce point (voir exemple précédent).



Non dérivabilité de $|x|$ à l'origine.

1.1.1 Dérivées n-ièmes

Définition 1.1.6

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle D . On définit alors la dérivée d'ordre n de la fonction f si elle existe, par la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x) \right)',$$

telle que: $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x)$, $f^{(2)}(x) = f''(x)$, $f^{(3)}(x) = \left(f''(x) \right)', \dots$ ect.

On dira que f est de classe $C^n(D)$ si et seulement si:

- f est dérivable n fois sur l'intervalle D ,
- $f^{(n)}$ est continue sur l'intervalle D .

Remarque 1.1.7

1. Il faut bien faire le distinguo entre les deux écritures: $f^{(n)}$ et f^n (la première représente la dérivée n-ième et la deuxième représente la puissance).
2. A noter que $C^\infty(D)$ représente les fonctions indéfiniment dérivables sur D et que $C^0(D)$ représente les fonctions continues sur D .

Exemple 1.1.8

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par: $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Cette fonction est de classe C^n sur son intervalle de définition et l'on a:

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} = -(x+1)^{-2},$$

$$\begin{aligned} f^{(2)}(x) &= (-(x+1)^{-2})' = 2(x+1)^{-3}, \\ f^{(3)}(x) &= (-(x+1)^{-3})' = -2 \cdot 3 \cdot (x+1)^{-4}, \\ f^{(4)}(x) &= (-(x+1)^{-4})' = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (x+1)^{-5}. \end{aligned}$$

Il est aisé alors de vérifier par récurrence que l'on a la forme de la dérivée n-ième suivante:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot (x+1)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{(n+1)}}.$$

1.1.2 Opération sur les fonctions dérivables

- Soient f et g deux fonctions définies et dérivables au point $x_0 \in D$. Alors il est aisé de vérifier en utilisant la définition de la dérivée que l'on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \text{ pour } g(x_0) \neq 0. \end{aligned}$$

- Si $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles telles que:

- f est dérivable au point $x_0 \in D_f$,
- g est dérivable au point $f(x_0)$ avec $f(x_0) \in D_g$,

alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable au point x_0 avec:

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g'(f(x_0)).$$

• Formule Leibniz

Si les deux fonctions f et g admettent des dérivées d'ordre n au point x_0 , alors la fonction produit fg admet une dérivée d'ordre n en ce point dont l'expression est donnée par la relation suivante:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n)}(x_0) &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0) \\ &= f(x_0) g^{(n)}(x_0) + C_n^1 f^{(1)}(x_0) g^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n^{n-1} f^{(n-1)}(x_0) g^{(1)}(x_0) + f^{(n)}(x_0) g(x_0). \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence en utilisant l'égalité du triangle de Pascal:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}. \text{ A noter aussi que l'on a: } C_n^n = C_n^0 = 1. \blacksquare$$

- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective continue sur son intervalle de définition. Si f est dérivable au point $x_0 \in D$ telle que: $f'(x_0) \neq 0$ alors sa fonction inverse f^{-1} est elle aussi dérivable au point $y = f(x_0)$ et sa dérivée sera donnée par la relation:

$$(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

On rappellera que pour toute fonction f possédant une fonction inverse on a la relation:

$$f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x.$$

- La fonction $h : x \mapsto \sin(\ln x)$ composée des deux fonctions $f : x \mapsto \ln x$ et $g : x \mapsto \sin x$ est dérivable sur son domaine de définition $\mathbb{R}_+^*$ et l'expression de sa dérivée est donnée par la relation:

$$h'(x) = (g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = \frac{1}{x} \cos(\ln x)$$

- La fonction:

$$\begin{aligned} f : [-\pi/2, \pi/2] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \sin x \end{aligned},$$

admet une fonction inverse, que l'on note arcsin telle que:

$$\begin{aligned} f^{-1} : [-1, 1] &\longrightarrow [-\pi/2, \pi/2] \\ y &\longmapsto \arcsin y \end{aligned}.$$

La fonction sin étant dérivable sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$ avec $\sin' x = \cos x \neq 0$, alors la fonction inverse est dérivable sur l'intervalle $] -1, 1[$ et sa dérivée est donnée par:

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(On notera que $\cos x$ est strictement positif sur l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$).

Nous allons ci-après énoncer quelques théorèmes importants en analyse fonctionnelle relatifs à la dérivabilité des fonctions sur un intervalle.

1.2 Théorèmes sur les fonctions dérivables sur un intervalle

Théorème 1.2.1 (de Rolle)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que:

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$
- $f(a) = f(b)$

Alors:

$$\exists c \in]a, b[: f'(c) = 0.$$

Démonstration. Il est clair que si f est une fonction constante sur $[a, b]$, alors:

$$\forall c \in]a, b[: f'(c) = 0.$$

Maintenant, si f n'est pas une fonction constante sur $[a, b]$. Supposons par exemple que f prenne des valeurs plus grandes que $f(a)$ et donc aussi plus grandes que $f(b)$ (car par hypothèse $f(a) = f(b)$).

Comme f est continue sur $[a, b]$, cela implique, comme on l'a vu au chapitre précédent, que f est bornée et en particulier atteint sa borne supérieure:

$$\exists c \in]a, b[: f(c) = \sup_{[a, b]} f$$

D'autre part, f étant dérivable sur $]a, b[$ les dérivées à droite et à gauche du point c existent :

$$f'(c+0) = \lim_{x \xrightarrow{>} c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{\text{négatif}}{\text{positif}} \leq 0,$$

$$f'(c-0) = \lim_{x \xrightarrow{<} c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{\text{négatif}}{\text{négatif}} \geq 0.$$

Comme ces deux dérivées doivent être égales, alors forcément elles sont nulles et donc:

$$f'(c) = 0.$$

■

Théorème 1.2.2 (des accroissements finis)

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle telle que:

- f est continue sur $[a, b]$
- f est dérivable sur $]a, b[$

Alors:

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction:

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

En effet, ϕ est une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Aussi elle vérifie: $\phi(a) = 0 = \phi(b)$. D'après le théorème de Rolle:

$$\begin{aligned} \exists c \in]a, b[: \phi'(c) &= 0 \\ \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} &= 0 \\ \Rightarrow \exists c \in]a, b[: f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \end{aligned}$$

■

Exemple 1.2.3

La fonction $f(x) = \ln x$ est continue sur $[n, n+1]$ et dérivable sur $]n, n+1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors en appliquant le théorème des accroissements finis on a:

$$\exists c \in]n, n+1[: \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{c}.$$

Corollaire 1.2.4

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle quelconque $D \subseteq \mathbb{R}$, alors on a:

$$\forall x_1, x_2 \in D, \exists c \in]x_1, x_2[: f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(c).$$

En remarquant que: $c \in]x_1, x_2[\Leftrightarrow c = x_1 + \theta(x_1 - x_2)$, avec: $0 < \theta < 1$, il est possible d'écrire l'expression précédente de la façon:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(x_1 + \theta(x_1 - x_2)).$$

Théorème 1.2.5 (*des accroissements finis généralisés*)

Soient f et g deux fonctions réelles définies sur l'intervalle $[a, b]$ telles que:

- f et g sont continues sur $[a, b]$
- f et g sont dérivables sur $]a, b[$ avec $g'(x) \neq 0$ sur $]a, b[$.

Alors:

$$\exists c \in]a, b[: \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la règle de Rolle à la fonction:

$$\phi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

■

Le théorème précédent permet de déduire une règle importante qui permet, lors du calcul des limites, d'ôter les cas d'indétermination du genre $\frac{0}{0}$.

Théorème 1.2.6 (*Règle de l'Hospital*)

Soient f et g deux fonctions réelles dérivables au voisinage d'un point a telles que : $f(a) = 0 = g(a)$. Si la limite: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ existe, alors on a:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Exemple 1.2.7

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1.$

Remarque 1.2.8

1. Il est possible d'appliquer la règle de l'Hospital plusieurs fois successivement lors du calcul de la limite pour enlever le cas d'indétermination $\frac{0}{0}$. Par exemple:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2.$$

2. Il est possible d'appliquer la règle de l'Hospital lors du calcul de la limite pour enlever le cas d'indétermination $\frac{0}{0}$ quand $x \rightarrow \infty$. Pour cela il suffit de faire un changement de variable et de se ramener au voisinage du zéro:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{k}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{y \rightarrow 0} k \frac{\sin y}{y} = k \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos y}{1} = k. \quad (\text{avec: } y = \frac{k}{x})$$

1.3 Extremum d'une fonction

Définition 1.3.1

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et x_0 un point de I . On dit que f admet sur l'intervalle I une valeur maximale locale (respectivement une valeur minimale locale) au point x_0 , si et seulement si, il existe un voisinage $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ en ce point (avec $\varepsilon > 0$) tel que:

$$\forall x \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[: f(x) \leq f(x_0), \quad (\text{respectivement: } f(x) \geq f(x_0)).$$

On désigne par extremum local d'une fonction, toute valeur maximale ou minimale relative de celle-ci.

Théorème 1.3.2

Si une fonction f possède un extremum local au point x_0 et si la dérivée en ce point existe, alors forcément on a: $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. Supposons que f admette une valeur maximale relative au point x_0 . La fonction étant dérivable en ce point alors la dérivée à gauche et à droite sont définies et l'on a:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\text{négatif}}{\text{positif}} \leq 0$$

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\text{négatif}}{\text{négatif}} \geq 0.$$

La fonction étant dérivable en ce point les deux dérivées doivent être égales et donc forcément nulles. Ce qui nous conduit à conclure que: $f'(x_0) = 0$. ■

Remarque 1.3.3

1. Il est possible que f admette un extremum au point x_0 sans que f soit dérivable en ce point (prendre par exemple la fonction $|x|$ au point $x_0 = 0$).
2. Si l'on a $f'(x_0) = 0$, cela n'implique pas forcément que f possède un extremum en ce point (prendre par exemple la fonction x^3 au point $x_0 = 0$).

1.4 Formules de Taylor

D'après la définition de la dérivée d'une fonction f au voisinage d'un point a , on vu qu'il était possible d'écrire:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \varepsilon(x), \quad \text{avec: } \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

C'est à dire que l'on a:

$$f(x) - f(a) = (x - a)(f'(a) + \varepsilon(x))$$

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + R(x), \quad \text{avec: } R(x) = (x - a)\varepsilon(x).$$

C'est à dire que pour toute fonction f dérivable au point a , on peut approximer cette fonction au au voisinage du point a par un polynôme de degré 1 ($R(x)$ tendant vers zéro au voisinage de a).

La formule de Taylor que nous allons introduire maintenant, est une généralisation de ce résultat, dans le sens où il est possible d'approximer toute fonction f possédant des dérivées d'ordre $n + 1$ par un polynôme d'ordre n .

Théorème 1.4.1 (de Taylor)

Soit $a < b$ deux nombres réelles et soit la fonction réelle $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ telle que:

- $f^{(n)}$ est continue sur $[a, b]$,
- $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$.

Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que:

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Démonstration. La démonstration (voir B. Calvo Ref [2] p.16) est basée sur le théorème de Rolle appliqué, successivement $n + 1$ fois, à la fonction:

$$g(x) = f(x) - p(x) - \frac{f(b) - p(b)}{(b-a)^{n+1}}(x-a)^{n+1},$$

et à ses dérivées jusqu'à l'ordre n , où p est le polynôme de degré n défini par:

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

(On utilisera le fait que: $g(a) = g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$). ■

L'écriture pratique du théorème de Taylor précédent nous donne le corollaire suivant:

Corollaire 1.4.2

Soit D un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable $(n + 1)$ sur D . Soit $a \in D$, alors pour tout $x \neq a$ de l'intervalle D , il existe un élément c strictement compris entre x et a tel que:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Remarque 1.4.3

1. L'écriture précédente de f est dite le développement de Taylor d'ordre n de f au voisinage du point a .
2. On appelle l'expression:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

le reste de Lagrange.

3. Le développement de Taylor montre qu'il est possible d'approximer au voisinage du point a les fonctions $(n + 1)$ fois dérivables par un polynôme d'ordre n (car le reste $R_n(x)$ tend vers zéro quand x tend vers a).

4. Dans le cas où $a = 0$, le développement de Taylor s'écrira :

$$\forall x \neq 0 : f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

avec: $0 < \theta < 1$.

On parlera alors de la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange.

Exemple 1.4.4

- La fonction exponentielle $f(x) = e^x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que: $f^{(n)}(x) = e^x$.

En appliquant la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à cette fonction on trouve:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ avec: } 0 < \theta < 1.$$

- La fonction trigonométrique $f(x) = \sin x$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ avec:

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \implies \sin^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k \\ (-1)^k, & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}.$$

En appliquant la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange à cette fonction on trouve alors:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sin^{(2k+3)}(\theta x)}{(2k+3)!}x^{2k+3}.$$

On a vu que pour appliquer le théorème de Taylor à une fonction f au voisinage d'un point $a \in D$, il faut que cette fonction soit dérivable $(n+1)$ sur tout le domaine D . Nous allons ci-après appauvrir cette hypothèse en supposant que f n'est dérivable que n fois sur D avec juste $f^{(n+1)}(a)$ qui existe.

Théorème 1.4.5 (de Taylor bis)

Soit D un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ et soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable n fois sur D . Soit $a \in D$ tel que: $f^{(n+1)}(a)$ existe. Alors pour tout $x \neq a$ de l'intervalle D , on a:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \left(f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(x) \right),$$

avec: $\lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x) = 0$.

Remarque 1.4.6

1. On appelle : $R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} (f^{(n+1)}(a) + \varepsilon(x))$ le reste de Young.
2. L'écriture précédente de f est appelée le développement de Taylor de f au voisinage de a avec reste de Young.
3. Lorsque $a = 0$, on parle alors du développement de Mac-Laurin de f au voisinage de a avec reste de Young.

4. La différence essentielle entre le développement de Mac-Laurin et celui de Taylor réside dans le fait que le premier possède un caractère local (existence de la dérivée $(n+1)$ juste au point a) alors que le second a un caractère global (existence de la dérivée $(n+1)$ sur l'intervalle D tout entier).

Le développement de Taylor est utilisé parfois lors du calcul des limites pour ôter l'indétermination comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 1.4.7

1. Ecrire le développement de Mac-Laurin avec reste de Lagrange d'ordre 4 de la fonction $\cos x$.
2. En déduire la limite: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4}$.

Solution 1.4.8

1. La fonction trigonométrique $f(x) = \cos x$ étant dérivable $(n+1)$ fois sur $\mathbb{R}$ avec:

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \implies \cos^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k+1 \\ (-1)^k, & \text{si } n = 2k \end{cases}.$$

Et par suite la formule de Mac-Laurin avec reste de Lagrange nous donne:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\cos^{(2k+1)}(\theta x)}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

avec: $0 < \theta < 1$. A l'ordre 4 ce développement s'écrit:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\sin(\theta x)}{6!} x^6.$$

- 2 En remplaçant l'expression du cosinus dans la limite on trouve:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{\sin(\theta x)}{6!} x^6) - 2 + x^2}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\frac{x^4}{4!} + \frac{\sin(\theta x)}{6!} x^6)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{12} + 2 \frac{\sin(\theta x)}{6!} x^2 \right) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$