

Fonctions usuelles

H. Benhassine

Octobre 2021

Table des Matières

1	Fonctions usuelles	1
1.1	Fonctions trigonométriques inverses	1
1.1.1	La fonction Arcsinus: $\arcsin y$	1
1.1.2	La fonction Arccosinus: $\arccos y$	2
1.1.3	La fonction Arctangente: $\arctan y$	3
1.2	Les fonctions hyperboliques et leurs fonctions inverses	4
1.2.1	Fonctions hyperboliques	4
1.2.2	Fonctions hyperboliques inverses	5

Chapitre 1

Fonctions usuelles

1.1 Fonctions trigonométriques inverses

1.1.1 La fonction Arcsinus: $\arcsin y$

- La fonction trigonométrique sinus définie par:

$$\begin{array}{ccc} \sin : & [-\pi/2, \pi/2] & \longrightarrow & [-1, 1] \\ & x & \longmapsto & \sin x \end{array},$$

est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Donc, d'après le théorème des fonctions inverses vu au chapitre 4, sa fonction réciproque existe. On la notera par $\arcsin$ avec:

$$\begin{array}{ccc} \arcsin : & [-1, 1] & \longrightarrow & [-\pi/2, \pi/2] \\ & y & \longmapsto & \arcsin y \end{array}.$$

Et l'on a:

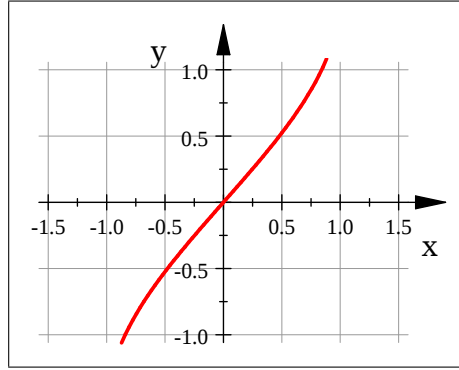
$$\sin x = y \Leftrightarrow x = \arcsin y.$$

- La fonction $\arcsin$ est une fonction continue strictement croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$ et l'on a:

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}, \arcsin(0) = 0, \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

- La fonction $\arcsin$ est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $] -1, 1[$ et l'on a:

$$\forall |y| < 1 : (\arcsin y)' = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$



Tracé de la fonction arcsin .

1.1.2 La fonction Arccosinus: $\arccos y$

- La fonction trigonométrique cosinus définie par:

$$\begin{aligned} \cos : [0, \pi] &\longrightarrow [-1, 1] \\ x &\longmapsto \cos x \end{aligned},$$

est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0, \pi]$. Donc, d'après le théorème des fonctions inverses vu au chapitre 4, sa fonction réciproque existe. On la notera par arccos avec:

$$\begin{aligned} \arccos : [-1, 1] &\longrightarrow [0, \pi] \\ y &\longmapsto \arccos y \end{aligned}.$$

Et l'on a:

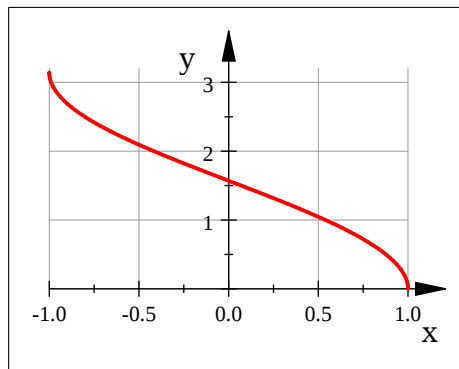
$$\cos x = y \Leftrightarrow x = \arccos y.$$

- La fonction arccos est une fonction continue strictement décroissante sur l'intervalle $[-1, 1]$ et l'on a:

$$\arccos(-1) = \pi, \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \arccos(1) = 0.$$

- La fonction arccos est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $] -1, 1[$ et l'on a:

$$\forall |y| < 1 : (\arccos y)' = \frac{1}{\cos' x} = \frac{1}{-\sin x} = \frac{1}{-\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$



Tracé de la fonction arccos .

1.1.3 La fonction Arctangente: $\arctan y$

- La fonction trigonométrique tangente définie par:

$$\begin{array}{ccc} \tan :]-\pi/2, \pi/2[& \longrightarrow &]-\infty, \infty[\\ x & \longmapsto & \tan x \end{array},$$

est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2]$. Donc, d'après le théorème des fonctions inverses vu au chapitre 4, sa fonction réciproque existe. On la notera par arcsin avec:

$$\begin{array}{ccc} \arctan :]-\infty, \infty[& \longrightarrow &]-\pi/2, \pi/2[\\ y & \longmapsto & \arctan y \end{array}.$$

Et l'on a:

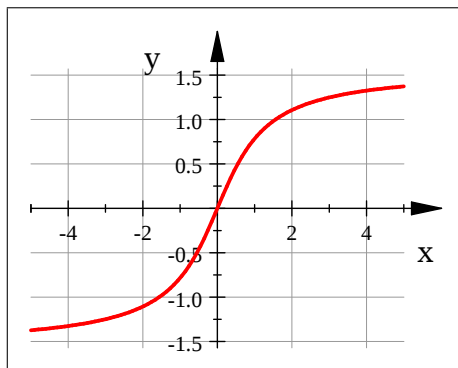
$$\tan x = y \Leftrightarrow x = \arctan y.$$

- La fonction $\arctan$ est une fonction continue strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty, \infty[$ et l'on a:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \arctan(x) = -\infty, \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}, \arctan(0) = 0, \arctan(1) = \frac{\pi}{4}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \arctan(x) = +\infty.$$

- La fonction $\arctan$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a:

$$\forall |y| < 1 : (\arctan y)' = \frac{1}{\tan' x} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \frac{1}{1 + y^2}.$$



Tracé de la fonction $\arctan$.

Remarque 1.1.1

- On définit de manière analogue aux précédentes la fonction arccot , la fonction réciproque de la fonction trigonométrique $\cot$:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{arccot} :]-\infty, \infty[& \longrightarrow &]0, \pi[\\ y & \longmapsto & \operatorname{arccot} y \end{array}$$

qui est une fonction continue strictement décroissante (Exercice: Est-elle dérivable? Trouver l'expression de sa dérivée).

- On a la relation suivante (à démontrer):

$$\arctan y + \operatorname{arccot} y = \frac{\pi}{2}.$$

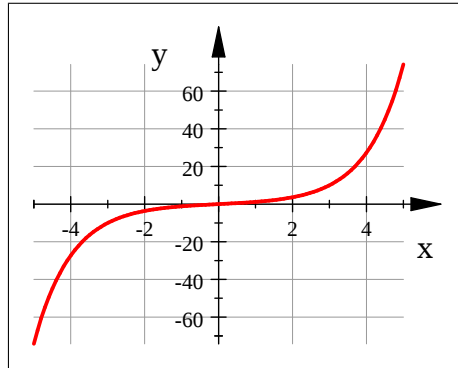
1.2 Les fonctions hyperboliques et leurs fonctions inverses

1.2.1 Fonctions hyperboliques

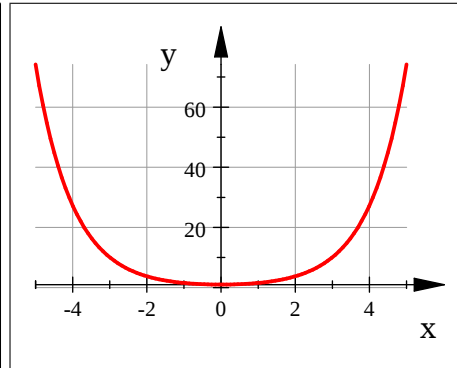
- On appelle les fonctions de variable x suivantes:

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x}, & \coth x &= \frac{\cosh x}{\sinh x},\end{aligned}$$

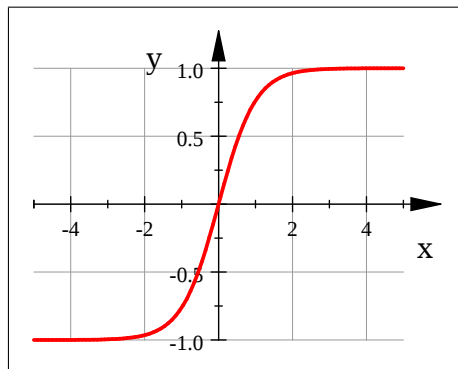
respectivement: *Cosinus hyperbolique*, *Sinus hyperbolique*, *Tangente hyperbolique* et *Cotangente hyperbolique*.



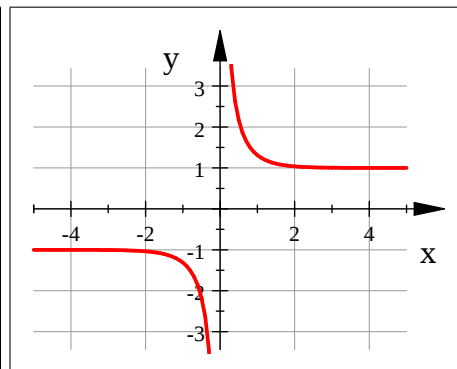
$\sinh x$



$\cosh x$



$\tanh x$



$\coth x$

Remarque 1.2.1

- La fonction Cotangente hyperbolique $\coth$ n'est pas définie à l'origine contrairement aux autres fonctions hyperboliques avec:

$$\sinh(0) = 0, \quad \cosh(0) = 1, \quad \text{et} \quad \tanh(0) = 0.$$

- La fonction Sinus hyperbolique est une fonction impaire: $\sinh(-x) = -\sinh(x)$.

La fonction Cosinus hyperbolique est une fonction paire: $\cosh(-x) = \cosh(x)$.

3. On a les relations suivantes (à démontrer):

$$\begin{aligned}\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1, & 1 - \tanh^2 x &= \frac{1}{\cosh^2 x}, \\ \cosh(a+b) &= \cosh a \cosh b + \sinh a \sinh b, \\ \sinh(a+b) &= \sinh a \cosh b + \cosh a \sinh b.\end{aligned}$$

4. Il est clair que les fonctions hyperboliques sont indéfiniment dérivables sur leurs intervalles de définitions et l'on a:

$$\begin{aligned}\sinh' x &= \cosh x, & \cosh' x &= \sinh x, \\ \tanh' x &= \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x.\end{aligned}$$

1.2.2 Fonctions hyperboliques inverses

La fonction Argument sinus hyperbolique: $\arg \sinh$

• La fonction $\sinh$ étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet alors une fonction réciproque que l'on nommera Argument sinus hyperbolique, notée $\arg \sinh$:

$$\begin{aligned}\arg \sinh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \arg \sinh y\end{aligned}$$

telle que:

$$\sinh x = y \iff x = \arg \sinh y$$

• La fonction $\arg \sinh$ est une fonction continue, strictement croissante et dérivable avec:

$$(\arg \sinh y)' = \frac{1}{\sinh' x} = \frac{1}{\cosh x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}.$$

• Il est possible d'écrire l'expression de la fonction $\arg \sinh$ et cela en usant de la fonction logarithmique. En effet, comme l'on a:

$$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x \text{ et } \cosh x > 0,$$

on peut écrire:

$$\begin{aligned}\cosh x &= \sqrt{1 + \sinh^2 x} \\ \sinh x + \cosh x &= \sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x} \\ \frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} &= \sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x} \\ e^x &= \sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x} \\ x &= \ln \left(\sinh x + \sqrt{1 + \sinh^2 x} \right) \\ \arg \sinh y &= \ln \left(y + \sqrt{1 + y^2} \right).\end{aligned}$$

La fonction Argument cosinus hyperbolique: $\arg \cosh$

- La fonction $\cosh$ étant continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$, elle admet alors une fonction réciproque que l'on nommera Argument cosinus hyperbolique, notée $\arg \cosh$:

$$\begin{aligned}\arg \cosh : [1, +\infty[&\longrightarrow [0, +\infty[\\ y &\longmapsto \arg \cosh y\end{aligned}$$

telle que:

$$\cosh x = y \iff x = \arg \cosh y$$

- La fonction $\arg \cosh$ est une fonction continue, strictement croissante et dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ avec:

$$(\arg \cosh y)' = \frac{1}{\cosh' x} = \frac{1}{\sinh x} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 x - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - 1}}.$$

- Il est possible d'écrire l'expression de la fonction $\arg \cosh$ et cela en usant de la fonction logarithmique. On démontrera en usant des mêmes artifices que précédemment que l'on a:

$$\arg \cosh y = \ln \left(y + \sqrt{y^2 - 1} \right).$$

La fonction Argument tangente hyperbolique: $\arg \tanh$

- La fonction $\cosh$ étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle admet alors une fonction réciproque que l'on nommera Argument tangente hyperbolique, notée $\arg \tanh$:

$$\begin{aligned}\arg \tanh :]-1, 1[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \arg \tanh y\end{aligned}$$

telle que:

$$\tanh x = y \iff x = \arg \tanh y$$

- La fonction $\arg \tanh$ est une fonction continue, strictement croissante et dérivable sur l'intervalle $] -1, 1[$ avec:

$$(\arg \tanh y)' = \frac{1}{\tanh' x} = \frac{1}{1 - \tanh^2 x} = \frac{1}{1 - y^2}.$$

- On laissera le soin au lecteur de montrer qu'il est possible d'écrire l'expression de la fonction $\arg \tanh$ en usant de la fonction logarithmique sous la forme:

$$\arg \tanh y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+y}{1-y} \right).$$