Chapitre n° 02

Le corps des Nombres complexes.

1. Opérations algébriques sur les nombres complexes.
2. Module d'un nombre complexe z.
3. Représentation géométrique d'un nombre complexe.
4. forme trigonométique d'un nombre complexe.
5. formule d'Euler
6. forme exponentielle d'un nombre complexe.
7. Racines n-ième d'un nombre complexe.

Chapitre 2:

II. Le corps des nombres complexes:

II.1 Définition: un nombre complexe z est un couple (x,y)

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que l'on notera $z = x + iy$

l'écriture algébrique de z.

* Le premier terme consiste la partie réelle $Re(z) = x$.

le second est sa partie imaginaire $Im(z) = y$.

donc: $z = Re(z) + i\, img(z)$.

On note $\mathbb{C} = \{ z \,/\, z = x+iy \,,\, x, y \in \mathbb{R} \}$.

l'ensemble des nombres complexes.

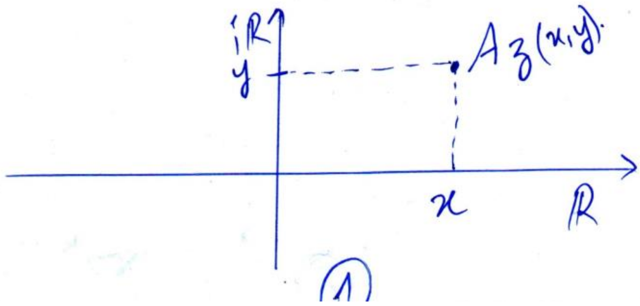
Remarque 1: Soit $z \in \mathbb{C}$.

1) Si $y = 0 \Rightarrow z = x$ est réel.

2) Si $x = 0 \Rightarrow z = iy$ est imaginaire pure.

Remarque 2: L'ensemble $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$

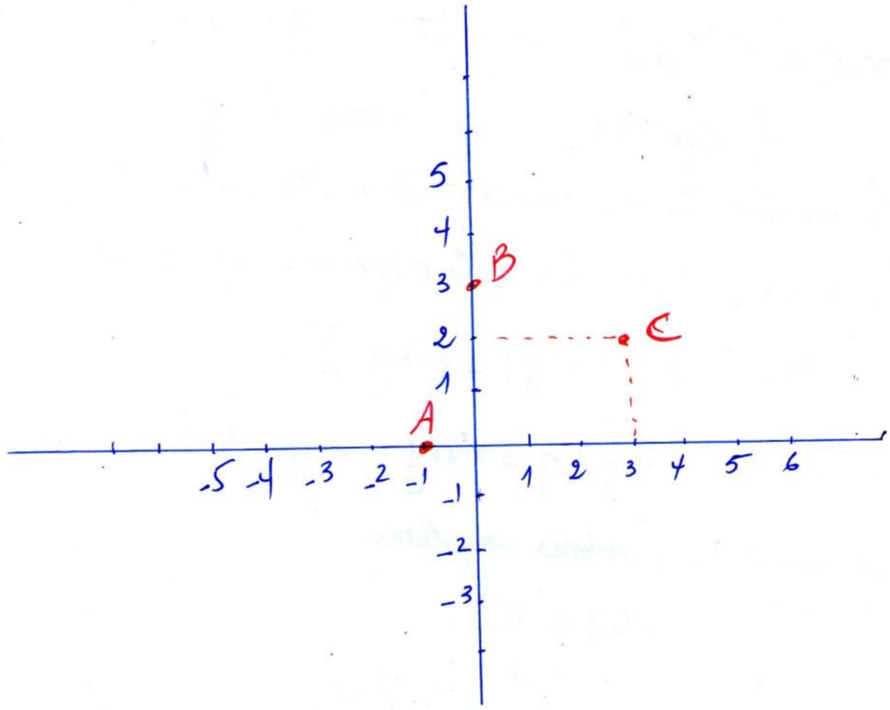
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



Exemple :

$z_1 = -1$ $\qquad$ $z_2 = 3i$ $\qquad$ $z_3 = 3+2i$

$A_{z_1}(-1,0)$ $\qquad$ $B_{z_2}(0,3)$ $\qquad$ $C_{z_3}(3,2)$.



Presentation dans le plan.

Soit $z = x+iy$ on peut lui associe le point $P_z(x,y)$ du plan.

II. 2 Propriétés :

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

① L'addition : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

② La multiplication : $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = z_2 z_1$

③ La multiplication par un scalaire :

$\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda z = \lambda x + i \lambda y$.

④ L'associativité :

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

⑤ La distributivité :

$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

⑥ L'opposé : L'opposé de z / $z = x + iy$ est

$z' = -z$ $\quad z' = -z = -x - iy$.

⑦ L'inverse : L'inverse de z avec $z \neq 0$ est $z' \in \mathbb{C}$

tel que $z z' = 1 \Rightarrow z' = \frac{1}{z}$.

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}.$$

⑧ Le conjugué : Le conjugué de z est $\overline{z} = x - iy$.

⑨ La division: $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ / $z' \neq 0$.

⑩ $zz' = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Remarque :

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

II.3 Module et Argument :

II.3.1 Module :

3.1.1 Definition : Le module de z avec $z = x + iy$ est le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$

avec : $z = x + iy$ et $\overline{z} = x - iy$.

$$\sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|.$$

3.1.2 Propriétés : $z, z' \in \mathbb{C}$

① $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

② $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$

③ $\overline{\overline{z}} = z$.

④ $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$.

⑤ $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

⑥ $|z| = 0 \iff z = 0$.

⑦ $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$.

⑧ $|z z'| = |z| \cdot |z'|$

⑨ $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ l'inégalité triangulaire.

Exemples

$$z = \frac{3+4i}{7i} = \frac{3}{7i} + \frac{4i}{7i} = \frac{3}{7i} + \frac{4}{7} = \frac{(-7i)3}{49} + \frac{4}{7} = \frac{-3i}{7} + \frac{4}{7}$$

$$|z| = \frac{|3+4i|}{|7i|} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$$

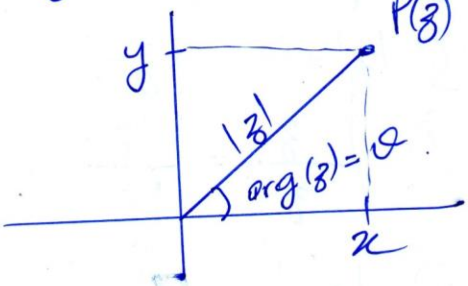
$$|z| = \left|\frac{-21i}{49} + \frac{4}{7}\right| = \left|\frac{-3i}{7} + \frac{4}{7}\right| = \sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{16}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$$

II.3.2 Argument :

3.2.1 Définition : Argument de $z = x+iy$ est le nombre réel $\arg(z) = \theta$ définie par deux egalité

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$



Exemple : $z = 1-i$. $|z| = \sqrt{2}$.

$\arg(z) = \theta$.

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

donc : $\theta = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}$.

3.2.2 La forme trigonométrique :

Soit $z \in \mathbb{C}$ / $z = x+iy$ et $|z| = r$.

$\arg(z) = \theta$.

On a : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ donc : $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

On note alors:

$$z = |z| (\cos\theta + i\sin\theta) = [|z|, \arg z] = [r, \theta].$$

c'est la forme trigonométrique de z.

Exemple: d'après l'exemple précédent.

$$z = 1 - i.$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

3.2.3 Propriétés:

1. $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$.

2. $\arg(z^n) = n \arg(z)$.

3. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad , z \neq 0.$

4. $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

5. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad / z' \neq 0.$

Preuve: $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$

On a: $zz' = |z||z'| (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

$zz' = |z||z'| (\cos\theta \cos\theta' + i\sin\theta' \cos\theta + i\sin\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta')$.

$$zz' = |z||z'|\left(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i\left(\sin\theta'\cos\theta + \sin\theta\cos\theta'\right)\right)$$

$$zz' = |z||z'|.\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right).$$

Car:

$$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$$

et

$$\sin(\theta+\theta) = \cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'$$

$$zz' = |z||z'|\left(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right).$$

donc: $\arg zz' = \theta + \theta'$

$\arg zz' = \arg(z) + \arg(z')$

II. 4 Formule de Moivre, forme exponentielle et et formules d'Euler:

Définition 1: La formule de Moivre est:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Définition 2: Soit z un nombre complexe alors z s'ecrie sous la forme exponentielle

$$z = |z| e^{i\arg(z)} = r e^{i\theta}.$$

Définition 3: à partir des deux formules

$$\begin{cases} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}. \\ \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \end{cases}$$

On a:

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

ils sont les formules d'Euler.

Exemple:

$$z = -1 + i\sqrt{3}.$$

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2.$$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

donc $\theta = \left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) + 2k\pi.$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

II. 5 Racines n-iemes :

5.1 Définition : pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

une racine n-ieme de z est un nombre $L \in \mathbb{C}$ tel que

$L^n = z$.

5.2 Proposition :

Il y a n racines $L_0, L_1, \dots L_{n-1}$ de z

avec $z = |z| e^{i\arg(z)}$.

On a :

$$\boxed{L_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta + i2k\pi}{n}} \quad \text{avec, } k \in \{0, 1, \dots n-1\} \quad n \in \mathbb{N}}.$$

Exemple : $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Calculer les racines 4-iemes

On pose : $L^4 = z$ ses racines sont L_0, L_1, L_2 et L_3.

On a : $\boxed{L_k = \sqrt[4]{2} \, e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2k\pi}{4}}}$ $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Si : $k = 0$ $\quad L_0 = \sqrt[4]{2} \, e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2(0)\pi}{4}} = \boxed{\sqrt[4]{2} \, e^{i\frac{2\pi}{12}} = L_0}$

$\underline{\text{Si}}$: $k=1$, $L_1 = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2\pi}{4}}$

$= \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{2i\frac{\pi}{3} + 6i\frac{\pi}{3}}{4}}$

$L_1 = \sqrt[4]{2}\; e^{i\frac{8\pi}{12}}$.

$\underline{\text{Si}}$: $k=2$, $L_2 = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2\pi(2)}{4}} = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i\frac{12\pi}{3}}{4}}$

$L_2 = \sqrt[4]{2}\; e^{i\frac{14\pi}{12}}$.

$\underline{\text{Si}}$: $k=3$, $L_3 = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2(3)\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\; e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i\frac{18\pi}{3}}{4}}$

$L_3 = \sqrt[4]{2}\; e^{i\frac{20\pi}{12}}$.

$\underline{\text{On a}}$: $L_0^4 = z$, $L_1^4 = z$, $L_2^4 = z$ et $L_3^4 = z$.

$L_0^4 = \left(\sqrt[4]{2}\; e^{i\frac{2\pi}{12}}\right)^4 = \left((2)^{\frac{1}{4}}\right)^4 \left(e^{i\frac{2\pi}{12}}\right)^4$

$= 2\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$L_0 = \sqrt[4]{2}\; e^{i\frac{2\pi}{12}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12}\right)$

$L_0^4 = \left((2)^{\frac{1}{4}}\right)^4 \left(\cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12}\right)^4 = 2\left(\cos 4\frac{2\pi}{12} + i\sin 4\frac{2\pi}{12}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = z$