

Chapitre n° 01

Le corps des réels

- 1- $\mathbb{R}$ est un corps commutatif.
- 2- $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné.
- 3- Raisonnement par récurrence
- 4- $\mathbb{R}$ est un corps valué.
- 5- Intervalles
- 6- Bornes supérieures et inférieures d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$
- 7- $\mathbb{R}$ est un corps archimédien.
- 8- Caractérisation des bornes supérieures et inférieures.
- 9- La fonction partie entière.
- 10- Ensembles bornés.
- 11- Prolongement de $\mathbb{R}$: Droite numérique achevée $\mathbb{R}$.
- 12- Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$.
- 13- Partie ouverte fermée.

I Le corps des Réels:

I.1:

On rencontre dans l'enseignement élémentaire des Mathématiques quatre sortes des nombres avec les quelles nous supposons que le lecteur est familiarisé.

- Les plus simples sont les entiers naturels, noté $\mathbb{N}$ qui servent à dénombrer les collections finies d'objets.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

- Viennent ensuite les entiers relatifs, noté $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

- La troisième catégorie des nombres est celle des nombres rationnels noté $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \text{ où } p \text{ et } q \text{ sont des entiers relatifs, } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} / p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z}^* \right\}.$$

En insistant sur le besoin de définir un ensemble plus grand que $\mathbb{Q}$, il suffit de dire que la résolution d'un grand nombre d'équation ne peut se faire sans cette extension,

Par exemple: l'équation $x^2 = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$, car si on écrit x sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^+$ et p et q sont premiers entre eux. on aura $p^2 = 2q^2$ et par conséquent p est un nombre pair.

donc, $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Mais $\frac{p}{q}$ est irréductible ($p = 2k$ et $p^2 = 2q^2$)

$\Downarrow$

$$4k^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q \text{ est pair}$$

p et q sont divisible par 2 ($2/p$ et $2/q$).

c'est une contradiction avec l'hypothèse.

* On conclut que $x^2 = 2$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{Q}$. Donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Les nombres non rationnels dits irrationnels

Exemple: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π , ...

• Vienne après les nombres réels $\mathbb{R}$.

L'ensemble des nombres réels noté par $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels.

On a la conclusion suivante:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

• Axiomatique de $\mathbb{R}$: On pose: $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$.

$$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$$

Même chose pour $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_-^*$.

I.2:

Nous admettons l'existence et l'unicité à la notation pré
d'un ensemble $\mathbb{R}$ muni deux lois internes $+$, $\cdot$ et d'une relation
 $\leq$, tel que:

- ① $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.
- ② $\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.
- ③ $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3: \begin{cases} a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c. \\ a \leq b \\ 0 \leq c \end{cases} \Rightarrow ac \leq bc.$
- ④ Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet dans $\mathbb{R}$
une borne supérieure

Rappelons que:

(3)

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif signifie :

(+ addition)

① $+$ est associative : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : (a+b)+c = a+(b+c)$.

② $+$ est commutative : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : a+b = b+a$.

③ $\mathbb{R}$ admet un neutre pour $+$ noté 0 , $\forall a \in \mathbb{R} : a+0 = 0+a = a$.

④ tout élément a de $\mathbb{R}$ admet un opposé noté : $-a$

$$\forall a \in \mathbb{R} : a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

($\cdot$ multiplication)

① $\cdot$ est associative : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, (ab)c = a(bc)$.

② $\cdot$ est commutative : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : ab = ba$.

③ $\mathbb{R}$ admet un neutre pour $\cdot$: noté 1 , $\forall a \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

④ Tout élément a de $\mathbb{R} - \{0\}$ admet un inverse noté : $\bar{a}^{-1} = \frac{1}{a}$.

$$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\} \quad a\bar{a}^{-1} = \bar{a}^{-1}a = a \times \frac{1}{a} = 1$$

⑤ $\cdot$ est distributive sur l'addition.

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a(b+c) = ab+ac. \\ (b+c)a = ba+ca = ab+ac. \end{cases}$$

La relation $\leq$

$\leq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$ signifie:

① $\leq$ est réflexive : $\forall a \in \mathbb{R} : a \leq a$.

② $\leq$ est antisymétrique : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} a \leq b \\ \text{et} \\ b \leq a \end{cases} \Rightarrow a = b$

③ $\leq$ est transitive : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a \leq b \\ b \leq c \end{cases} \Rightarrow a \leq c$

④ $\leq$ est totale : $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 (a \leq b \text{ ou } b \leq a)$

Proposition:

L'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné.

— Totalement ordonné pour tout couple (x, y) .

des nombres réels on a $(x \geq y, x \leq y, x = y)$

I.3 Raisonnement par récurrence:

Le raisonnement par récurrence consiste en ce suit

Soit $P(n)$ une relation mathématique dépend d'un nombre entier naturel $n \in \mathbb{N}$. Pour établir que cette relation est vraie pour $n \geq n_0$ il suffit de montrer que:

1°) $P(n_0)$ est vraie.

2°) Si $P(n)$ est vraie pour $n \geq n_0$ alors $P(n+1)$ est vraie

Dans ces conditions, $P(n)$ est vraie $\forall n \geq n_0$.

I.4 Valeur absolue:

On appelle valeur absolue dans $\mathbb{R}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par: $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0. \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

$$\text{On a: } |x| = |-x|.$$

Propriétés:

$$(1) \forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0 \quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(2) \forall x, y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x||y|$$

$$(3) \forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{l'inégalité triangulaire.}$$

$$(4) \forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x-y| \geq ||x| - |y||$$

$$(5) \forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

$$(6) \forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, |x| \geq a \Leftrightarrow x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$$

$$(7) \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x| \text{ et } |x|^2 = x^2.$$

$$(8) |x| > 0, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$(9) \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \cdot y \neq 0$$

Remarque: * La distance entre deux réels est égal $|y-x|$.
 * $\mathbb{R}$ n'est pas un ensemble dénombrable.

I.5 Intervalles:

Notion: Soit a et b deux réels disant que $a < b$.

* L'ensemble $\{x / a < x < b\}$ est appelé un intervalle ouvert noté $]a, b[$.

* L'ensemble $\{x / a \leq x \leq b\}$ est appelé un intervalle fermé et noté $[a, b]$ segment.

* Les intervalles $]a, b]$ ou $[a, b[$ sont des intervalles semi-ouverts ou bien semi-fermés.

I.6 Bornes supérieures et inférieures d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

6.1 Majorants et Minorants:

Soit A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Majorant: On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si:
 $\forall x \in A, x \leq M$.

b) Minorant: On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A si:
 $\forall x \in A, x \geq m$.

④ Tout ensemble qui admet un majorant est appelé ensemble majoré et tout ensemble qui admet un minorant est appelé ensemble minoré.

④ On dit que A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples: ① $A =]1, 4[$.

② l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'a ni majorant ni minorant

③ L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de majorant mais il est minoré par 0.

④ Toute partie non vide est bornée.

6.2 Maximum et Minimum:

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Maximum (Max): On dit que $M \in \mathbb{R}$ est le plus grand élément de A si:

{	i) M est un majorant de A .
	ii) $M \in A$.

Et on note $\text{Max}(A) = M$.

⑥ Minimum: On dit que $m \in \mathbb{R}$ est le plus petit élément de A $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \text{i) } m \text{ est un minorant de } A \\ \text{ii) } m \in A. \end{cases}$

Et on note $\text{Min}(A) = m$.

6.3: Borne supérieure, Borne inférieures

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) La borne supérieure: est le plus petit des majorants de A (s'il existe) et est noté $\sup(A)$.

Remarque: $\Leftrightarrow$ $\sup A$ existe, elle est unique.

b) La borne inférieure: est le plus grand des minorants de A (s'il existe) et est noté $\inf(A)$.

Remarque: $\Leftrightarrow$ $\inf(A)$ existe, elle est unique.

Exemples: ① $A = [1, 4]$

② $[4, +\infty[$ est l'ensemble des majorants de A
 $4 \in A$ donc $\text{Max } A = 4$

4 est le plus petit des majorants $\Rightarrow \sup A = 4$.

③ $] -\infty, 1]$ est l'ensemble des minorants de A

$1 \in A$ donc $\text{Min}(A) = 1$.

1 est le plus grand des minorants $\Rightarrow \inf(A) = 1$.

② $A =]1, 4]$.

Ong: Les majorants sont $[4, +\infty[$.

Les mineurs sont $] -\infty, 1]$.

$\inf A = 1$ mais $1 \notin A$ donc $\min A$ n'existe pas.

$\sup A = 4 = \max A$ (car $4 \in A$).

③ L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels est minoré par 0

et on a: $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 0$.

Mais $\mathbb{N}$ n'est pas majorée donc $\sup \mathbb{N} \nexists$
 $\max \mathbb{N} \nexists$

④ L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est ni majoré ni minoré.

6.4 Axiome de la borne supérieure et inférieure:

i) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

ii) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ et A bornée $\Rightarrow \sup A$ et $\inf A$ existent

I.7 Caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure:

I.7 Caractérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure :

Proposition : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

$$\textcircled{1} \quad M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, x \leq M. \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \\ \quad M - \varepsilon < x \leq M. \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad m = \inf(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } \forall x \in A, x \geq m. \\ \text{ii) } \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A. \\ \quad m \leq x < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Preuve : $\textcircled{1}$

$\Rightarrow$) supposons que $M = \sup(A)$
 $\Rightarrow \forall x \in A, x \leq M$ (selon la définition).

Il reste de démontrer ii)

Soit $\varepsilon > 0$ alors $M - \varepsilon$ n'est pas majorant de A

Car : $M - \varepsilon < M$ et M est le plus petit des majorants

Donc $\exists x \in A, M - \varepsilon < x \leq M$.

(11)

⇐) Réciproquement On suppose que (i) et (ii) sont correctes et montrons que $M = \sup(A)$.

On a i) $\Rightarrow M$ est un majorant de A . Il reste de démontrer que M est le plus petit des majorants de A .

Soit $m' < M$ tel que m' un majorant de A .

On pose $\varepsilon = M - m' > 0$.

D'après ii) $\exists x \in A, M - \varepsilon < x \leq M$.

Donc $m' < x \leq M$.

Alors m' ne peut pas être un majorant de A .

Ainsi M est le plus petit majorant de A .

Donc $\sup A = M$.

② D'une façon analogue on peut montrer ②.

② $\Rightarrow$ supposons que $m = \inf(A)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}, x \geq m$ (selon de définition)

Il reste de démontrer ii)

Soit $\varepsilon > 0$. alors $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A .

Car $m + \varepsilon > m$ et m est le plus grand des minorants de A . Donc $\exists x \in \mathbb{R}, m \leq x < m + \varepsilon$

⇐) Réciproquement On suppose que (i) et (ii) sont correctes

et montrons que $m = \inf(A)$

On a: i) $\Rightarrow m$ est un minorant de A . Il reste de démontrer que m est le plus grand des mineurants de A

Soit $m' > m$ tel que m' un mineurant de A .

On pose: $\varepsilon = m' - m > 0$.

D'après ii) $\exists x \in A, m \leq x < m + \varepsilon$

Donc: $m < x \leq m'$

Alors: m' ne peut pas être un mineurant de A .

Ainsi: m est le plus grand mineurants de A .

Donc: $\inf A = m$.

I.8 Propriétés d'Archimède et ses conséquences

On démontre que l'ensemble $\mathbb{R}$ vérifie le principe suivant:

$$(\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}: n > x.)$$

Cette propriété s'écrit aussi comme suit.

$$\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}: nx \geq y.$$

Comme première conséquence du principe d'Archimède

on montre que: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}: n \leq x < n+1$.

8.1 Théorème 1.

$\mathbb{R}$ est Archimédien, c'est à dire,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^* : n \geq x.$$

ou, d'une façon équivalente :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}^* : na \geq x.$$

ou bien :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^* : nx \geq y.$$

Démonstration

Par l'absurde

On suppose qu'il $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x.$

$$\exists y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : n \leq y.$$

donc : $x(y)$ est un majorant de $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

D'après la propriété de la borne supérieure.

Soit $M = \sup N$, Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in N$

$$M - \varepsilon < p \leq M.$$

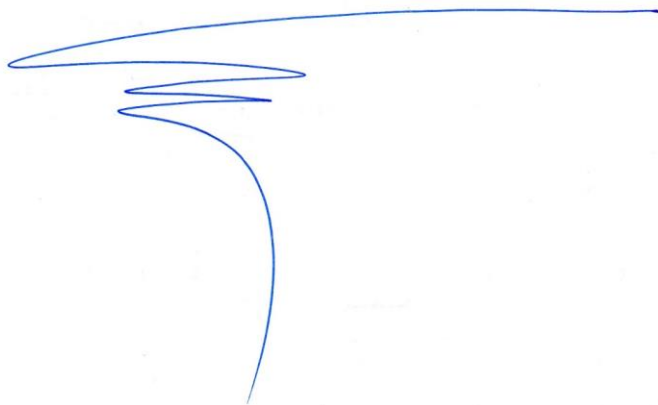
On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

alors $M - \frac{1}{2} < p \Rightarrow M + \frac{1}{2} < p + 1$

Donc $M < p + 1$

avec $p + 1 \in N$.

contradiction car $\sup N = M$.



I.9 Fonction partie entière :

9.1 Définition : La partie entière d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x .

Et on note $E(x)$ ou $[x]$.

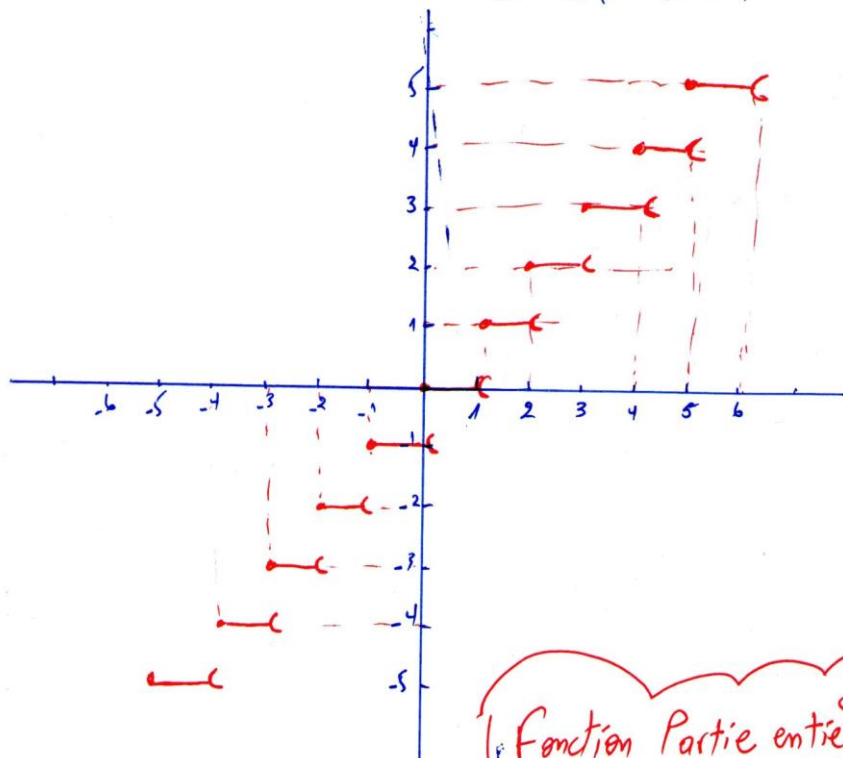
Par définition, il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$n = E(x) \leq x < E(x+1) = E(x) + 1 = n + 1.$$

Exemples : $[3,14] = 3$.
 $[-3,14] = -4$.

9.2 Représentation graphique de la fonction :

$$E: x \mapsto E(x).$$



Fonction Partie entière

9.3 Les propriétés de la partie entière :

- ① $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z} : E(x+p) = E(x) + p.$
- ② $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y).$
- ③ $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1.$
- ④ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* : E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$
- ⑤ $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) + E(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{Sinon.} \end{cases}$

Exemples On montre que :

- ① $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z} : E(x+p) = E(x) + p.$
par définition on a $E(x) \leq x < E(x) + 1$ — ①

On ajoute p pour ① on obtient :

$$E(x) + p \leq x + p < E(x) + 1 + p.$$

donc $E(x+p) = E(x) + p.$

- ② $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y).$

On a : $E(x) \leq x < E(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}.$

$E(y) \leq y < E(y) + 1, \forall y \in \mathbb{R}$

Si : $x \in [n, n+1[$ et $y \in [m, m+1[$ tq $x \leq y : E(x) = n, E(y) = m$
donc $x \leq y \Rightarrow n < m$ Alors $E(x) < E(y).$

①

En effet x et $y \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$ tq $x \leq y$ alors $E(x) = E(y) = n$

Donc $E(x) \leq x \leq y \Rightarrow E(x) \leq y$, $E(x) \in \mathbb{Z}$

Car la fonction partie entière est une fonction croissante.

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leq y \Rightarrow E(x) \leq E(y)$.

③ $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$: On a : $E(x) \leq x < E(x) + 1$ — ①
 $E(y) \leq y < E(y) + 1$ — ②

En sommant on obtient ① + ②

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2.$$

Le réel $x + y \in [E(x) + E(y), E(x) + E(y) + 2[$.

Tel que : $E(x) + E(y)$ et $E(x) + E(y) + 2$ sont deux entiers.

Si $x + y \in [E(x) + E(y), E(x) + E(y) + 1[\Rightarrow E(x+y) = E(x) + E(y)$.

Si $x + y \in [E(x) + E(y) + 1, E(x) + E(y) + 2[\Rightarrow E(x+y) = E(x) + E(y) + 1$.

Par conséquent : $E(x) + E(y) \leq E(x+y) \leq E(x) + E(y) + 1$.

$$\textcircled{5} \quad \forall x \in \mathbb{R} : E(x) + E(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

Sinon.

On a : $E(x) \leq x < E(x) + 1 \Rightarrow -1 - E(x) < -x \leq -E(x)$.

Si $x \in \mathbb{Z} : E(x) = x$ et $E(-x) = -x$ / $E(x) + E(-x) = x - x = 0$

Si $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \mathbb{Z}$, $-1 - E(x) < -x < -E(x)$.

avec : $p = -1 - E(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow p \leq -x < p+1$
 par conséquent.

$$E(-x) = -1 - E(x) \Rightarrow E(-x) + E(x) = -1.$$

$$\begin{aligned} E(x) &\leq x \leq E(x) + 1 \\ -E(x) &\geq -x \geq -E(x) - 1 \\ -1 - E(x) &\leq -x \leq -E(x). \end{aligned}$$

I. 10: Théorème:

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Il s'agit de démontrer qu'entre deux réels différents a et b il existe toujours un rationnel.

c'est à dire:

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b, \exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b.$$

Démonstration: On a:

$$a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow \frac{1}{b-a} > 0.$$

comme $\mathbb{R}$ est archimédien $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $n > \frac{1}{b-a}$.

$$\text{alors } \frac{1}{n} < b - a.$$

$$\text{On pose: } p = E(na) \Rightarrow p \leq na < p+1 \Rightarrow \frac{p}{n} \leq a < \frac{p+1}{n}$$

$$\text{D'où: } a < \frac{p+1}{n} = \frac{p}{n} + \frac{1}{n} \leq a + \frac{1}{n} < \cancel{a+b-a} = b$$

$$\text{c'est à dire } a < \frac{p+1}{n} < b.$$

On voit bien que: $\frac{p+1}{n}$ est un nombre rationnel strictement compris entre a et b .

I. 11: la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$:

11.1 Définition: la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, on adjoint les deux symboles $-\infty$ et $+\infty$ (qui ne sont pas des nombres) avec la convention $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty \leq x \leq +\infty$ on obtient $\overline{\mathbb{R}}$.

11.2 Définition: On appelle droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ obtenu en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux éléments archétotal prolongeant celui de $\mathbb{R}$.
En posant $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$

I. 12 Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$:

Définition 1: Ouvert: Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A est un ouvert ssi pour tout point $x \in A$, il existe un intervalle ouvert
(de centre x et de rayon positif).
contenant x et contenu dans A .
$$\exists x - \varepsilon, x + \varepsilon [\subset A.$$

Remarques:

- ① Tout intervalle ouvert est une partie ouverte
- ② $\mathbb{R}$ est un ouvert.

Théorème:

- ④ Une intersection finie des ouverts est un ouvert.
- ④ Une réunion des ouverts est un ouvert.

Exemples:

- ① $A =]-1, 1[\cup]3, 5[$ est un ouvert.
- ② $\{5\}$ n'est pas un ouvert. En général toute partie de $\mathbb{R}$ n'est pas un ouvert.
Car: elle ne contient aucun intervalle ouvert.

③ $\emptyset$ et $\mathbb{C}_\mathbb{R} \mathbb{R}$ ne sont pas des ouverts.

Car: il est impossible de trouver un intervalle ouvert de dans

Définition 2: fermés

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est fermée si son complémentaire est un ouvert.

Exemples:

① Tout point appartenant à $\mathbb{R}$ est un ensemble fermé Car:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \mathbb{C}_\mathbb{R} \{a\} =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[.$$

est un ensemble ouvert.

En général: tout ensemble fini de $\mathbb{R}$ est un fermé

② Tout intervalle fermé est une partie fermée
En effet si: a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$.

$$\text{On a: } \mathbb{C}_\mathbb{R} [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[\text{ qui est un ouvert.}$$

③ $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés.

$$\text{Car: } \mathbb{C}_\mathbb{R} \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}]n, n+1[.$$

$$\text{et: } \mathbb{C}_\mathbb{R} \mathbb{N} =]-\infty, 0[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[\text{ sont des ouverts}$$

④ $\emptyset, \subsetneq \emptyset, [a, b[$ et $]a, b]$

(avec a et b deux éléments de $\mathbb{R}$)
ne sont pas fermés.

⑤ $\mathbb{R}$ et $\emptyset$ sont fermés.

Remarques:

① Il se peut qu'une partie de $\mathbb{R}$ ne soit ni ouverte ni fermée
comme l'exemple 4 ci-dessus.

② Les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans $\mathbb{R}$
sont $\mathbb{R}$ et $\emptyset$

(On dit que $\mathbb{R}$ est un espace connexe).

Théorème:

① Une intersection quelconque de fermés est un fermé.

② Une réunion finie de fermés est un fermé.

Exemple:

① $\emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

② $]a, b[$ est ouvert de $\mathbb{R}$.