Chapitre n° 04 :

Fonctions réelles d'une variable réelle.

1- Graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle.

2- Fonctions paires - impaires.

3- Fonctions périodiques.

4- Fonctions bornées

5- Fonctions monotones.

6- Maximum local.

7- Minimum local.

8- Limite d'une fonction.

9- Théorème sur les limites

10- Opérations sur les limites.

11- Fonctions continues.

12- Discontinuités de première et de seconde espèce.

13- Continuité Uniforme.

14- Théorème sur les fonctions continues sur un intervalle fermé

15- Fonction réciproque continue.

16- Ordre d'une variable - équivalence (Notation de Landau).

Chapitre n° 04

Fonctions réelles d'une variable réelle.

4.1 Généralités:

4.1.1 Domaine de définition d'une fonction:

Soit $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$. $(E \subset \mathbb{R})$ une fonction domaine de définition de f est:

$$D_f = \{ x \in E \ / \ f(x) \text{ existe} \}.$$

Exemple: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \{1\}$.

4.1.2 : Graphe d'une fonction réelle.

Définition: Graphe d'une fonction appelle la courbe représentative noté G_f d'une fonction $f: D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x, y);

$$G_f = \{(x,y) \in D_f \subset \mathbb{R} \ / \ y = f(x)\}.$$

4.1.3 Image directe, Image réciproque.

Soit $f: E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $(E \subset \mathbb{R})$ et soit A une partie de E

*) L'image directe de A par f est l'ensemble noté par $f(A)$ définie par $f(A) = \{ f(x) \in \mathbb{R} \ / \ x \in A \}$.

**) Soit $B \subseteq \mathbb{R}$ l'image réciproque de B par f est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ définie par.
$f^{-1}(B) = \{ x \in E \ / \ f(x) \in B \}$.

Exemple: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^2$

1) Soit $A = [-1, 1]$
L'image directe de A est $f(A) = f([-1,1]) = [0,1]$.
$f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.
$f(]-\infty, -1]) = [1, +\infty[$.

Soit $B = \{-2\} \Rightarrow f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$.
$B = \{1\} \Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$.

Remarque: $f^{-1}(\{y\})$ peut être vide ou contenant plusieurs éléments

Exemple: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$.

$f^{-1}\{1\} = \{ x \in \mathbb{R}, \sin x = 1 \} = \{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \}$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$f^{-1}\{0\} = \{ x \in \mathbb{R}, \sin x = 0 \} = \{ k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \}$
$f^{-1}\{3\} = \emptyset$

4.2 Fonctions paires, impaires :

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $E \subseteq \mathbb{R}$

Définition : Une fonction f définie sur un intervalle E est dite paire (resp impaire) Si :

$\forall x \in I$: $f(x) = f(-x)$ (resp $f(x) = -f(-x)$
ou bien $-f(x) = f(-x)$

Exemple :

1. $f(x) = x^2$ et $f(x) = \cos x$ sont paires.
$f(-x) = (-x)^2 = x^2$

2. $f(x) = x^3$ et $f(x) = \tan x$ sont impaires.

* Lorsque la fonction f est paire, les points $M(x_0, f(x_0))$ et $M'(-x_0, f(-x_0))$ sont symétriques par rapport à l'axe $y'Oy$
* Lorsque la fonction f est impaire les points $M(x_0, f(x_0))$ et $M'(-x_0, f(-x_0))$ sont symétriques par rapport à l'origine.

4.3 Fonctions périodiques :

$f : E = D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) une fonction, $T \in \mathbb{R}^*_+$
f est dite périodique de période T Si :

1. $\forall x \in D_f$, $x + T \in D_f$.
2. $\forall x \in D_f$, $f(x+T) = f(x)$

Exemple:

① $f : x \longmapsto \sin x$, $g : x \longmapsto \cos x$.

ont $T = 2\pi$ pour période.

$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x.$

$g(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x.$

② $h : x \longmapsto \tan x$. $T = \pi$ pour période

Car: $\tan(x+\pi) = \dfrac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \dfrac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$

4.4 Fonctions majorée, minorée et bornée:

Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ $(E \subseteq \mathbb{R})$ une fonction. On dit que f est:

① Majorée Si: $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E : f(x) \leq M.$

② Minorée Si: $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E : f(x) \geq m.$

③ Bornée Si: elle est majorée et minorée

On peut aussi écrire : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E : |f(x)| \leq M$

Exemple: ① $\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| \leq 1$ et $|\cos x| \leq 1$

Donc: $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont des fonctions bornées.

② $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\forall x \in \mathbb{R} : x^2+1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{x^2+1} \leq 1$

f est borée.

4.5 Fonctions monotones :

$f : E \to \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) une fonction.
f est dite monotone croissante (resp décroissante) dans E Si :

$$\forall x, y \in E : x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y) \quad (\text{resp } f(x) \geqslant f(y))$$

4.6 Maximum local, Minimum local :

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction.

① On dit que f admet un maximum local en $x_0 \in E$ Si : $f(x_0)$ est le maximum de la partie $f(E)$ /

$$f(E) = \{ f(x) \;/\; x \in E = D_f \}$$

(M est le maximum de f sur $E \Leftrightarrow f(x) \leqslant M, \forall x \in E = D_f$)

② m est le minimum de f sur $E \Leftrightarrow f(x) \geqslant m, \forall x \in E = D_f$)

③ On dit que f admet un maximum local en $x_0 \in E = D_f$ s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que $f(x_0)$ soit le maximum de $f(E \cap I)$.

④ On dit que f admet un minimum local en $x_0 \in E = D_f$. s'il existe un ouvert I contenant x_0 tel que $f(x_0)$ soit le minimum de $f(E \cap I)$.

⑤ Un extremum (local) est un maximum (local) ou un minimum (local)

Remarque: Une fonction bornée possède toujours une borne supérieure et une borne inférieure mais pas forcément un maximum et un minimum

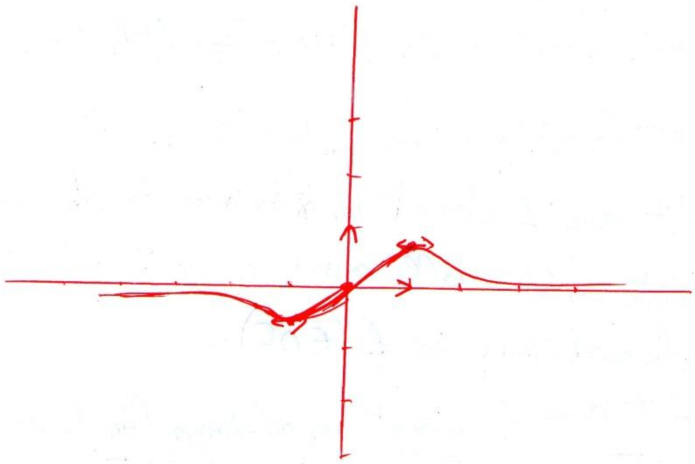
Exemple: $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

sur l'intervalle $I =]-2,2[$ ouvert contenu dans $D_g = \mathbb{R}$

g admet un minimum local $x_0 = f(-1) = -\frac{1}{2}$.

et un maximum local $A = f(1) = \frac{1}{2}$.



$f(x) = \sqrt{1-x^2}$ $\qquad D_f = [-1,1]$.

f admet en 1 et -1 des minimums locaux et un maximum strict en 0.

4.7 Limite d'une fonction:

Définition: Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe un intervalle ouvert I telque $x_0 \in I \subset V$

Exemple: $V = [1,5[$ c'est un voisinage de $x_0 = 2$.
Car: par exemple $2 \in]1,5[\subset V$

Définition: Soient V un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ c'est une fonction.
On dit que f a une limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R}$) en x_0 **ssi**:

éta

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in V : 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

Et, on ecrit: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

Exemple: ① $f(x) = 5x - 4$, $x_0 = 1$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\eta > 0$?

$$|f(x) - 1| < \varepsilon \iff |5x - 5| < \varepsilon$$
$$\iff 5|x - 1| < \varepsilon$$
$$\iff |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Il suffit de prendre $\boxed{\eta = \frac{\varepsilon}{5}}$

② $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x_0 = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ Notez que $f(0) \nexists$

③ $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ $D_f = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Remarque: Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, alors $f(x_0)$ peut être existe ou non, même si $f(x_0)$ existe, il est peut être différent de $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

4.8 Limite à gauche, limite à droite :

Définition: On dit que f a une limite à droite (resp à gauche au point x_0 si :
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
(resp $x_0 - \eta < x < x_0$) $\Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

Et, on écrit : $\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x)$ (resp $\lim_{x \underset{<}{\to} x_0} f(x)$)

Exemple: ① $f(x) = E(x)$ $x_0 = 2.$

$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = 2$, $\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = 1$

Donc : $\lim_{x \to 2} f(x)$ n'existe pas.

Notez que $f(2) = E(2) = 2$.

② $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x_0 = 0$.

$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 1$, $\lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = -1$

$f(0)$ n'existe pas.

Limite infinie :

* $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta, \forall x$
$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A$.

* $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta, \forall x$.
$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < A$.

Si : $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$, on pose (a) :

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0$ tel que $x > B \Rightarrow f(x) > A$

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0$ tel que $x < -B \Rightarrow f(x) > A$

* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0$ tel que $x > B \Rightarrow f(x) < -A$

* $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0$ tel que $x < -B \Rightarrow f(x) < -A$.

1.9 Théorème sur les limites :

Relation entre les limites des fonctions et limites des suites.

Théorème (1) : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction les deux propriétés suivantes sont équivalentes

i) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

ii) Quelle que soit la suite (x_n), $x_n \in [a,b]$ telle que $x_n \neq x_0$ et $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$

On a : $f(x_n) = \ell$ (ℓ finie ou infinie)

Preuve : i) $\Rightarrow$ ii)

On a : $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [a,b]$

$$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

et $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$

$$\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

On prend $\varepsilon = \eta$, on trouve.

$$\forall n \geq N \Rightarrow |x_n - x_0| < \eta \quad (\varepsilon = \eta)$$

$$\Rightarrow 0 < |x_n - x_0| < \eta \quad (\text{car } x_n \neq x_0)$$

Donc : $|f(x_n) - \ell| < \varepsilon$.

Ce qui demontre que $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

ii) $\Rightarrow$ i) Exercice :

Exemple: (de Théorème 1)

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad$ / $\lim_{x \to 0} f(x) = ?$

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \qquad \lim_{n \to +\infty} x_n = 0$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}}\right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$= 1$$

$$y_n = \frac{1}{n\pi}$$

$$\lim_{n \to +\infty} f(y_n) = \lim_{n \to +\infty} \sin(n\pi) = 0.$$

On déduit que $\lim_{x \to 0} \sin\frac{1}{x}$ n'existe pas.

Théorème 2: (Théoreme des gendarmes (d'encadrement))

Si: $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$

Alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

4.10 Opérations sur limites:

Soit f et g deux fonctions réelles tq:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors:

① $\lim_{x \to x_0} \lambda f(x) = \lambda \ell_1$

② $\lim_{x \to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_1 + \ell_2$.

③ $\lim_{x \to x_0} (f \times g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \times \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_1 \times \ell_2$.

④ $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$ $\quad \ell_2 \neq 0$.

⑤ $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

⑥ Soient x_0, y_0 et ℓ des réels f et g deux fonctions

Alors $\begin{cases} \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{x \to y_0} g(x) = \ell \end{cases}$ donc $\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = \ell$.

Proposition:

① Si: $f \leq g$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$

donc $\ell_1 \leq \ell_2$

② Si $f \leq g$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$.

Théoreme 1 : Si f admet une limite ℓ alors f est bornée

Demonstration :

$$|f(x)-\ell|<\varepsilon \Rightarrow -\varepsilon<f(x)-\ell<\varepsilon$$

donc : $\ell-\varepsilon<f(x)<\ell+\varepsilon$.

donc f est bornée.

Théoreme 2 : Si f est bornée et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$

alors : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\times g(x)=0$.

Relation entre suite et fonction :

Si : f admet une limite ℓ en x_0 $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)=\ell\right)$

Alors : pour toute suite (x_n) qui converge vers x_0 On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=\ell$

4.11 Fonctions continues :

11.1 continuité en un point :

Définition : Soit une fct $f : I \to \mathbb{R}$
(I étant intervalle de $\mathbb{R}$).

On dit que f continue en $x_0 \in I$ SSI :
$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ c'est à dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I . \left[0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right]$$

11.2 Continuité à droite et à gauche :

* On dit que f est continue à droite de x_0 ssi

$$\lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

* On dit que f est continue à gauche de x_0 ssi

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0).$$

Remarque :

$$f \text{ continue en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f(x) = \lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$$

Exemple : ① $f(x) = |x|$. $x_0 = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0. \\ -x & x < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$$

donc f est continue en $x_0 = 0$.

(2) $f(x) = E(x)$ $\qquad x_0 = n \ (n \in \mathbb{Z})$.

On a : $E(n) = n$, $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} n} f(x) = n$.

$$\lim_{x \overset{<}{\to} n} f(x) = n - 1.$$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} n} f(x) \neq \lim\limits_{x \overset{<}{\to} n} f(x) \Rightarrow f$ est discontinue en $x_0 = n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

(*) On peut également exprimer la continuité en utilisant la relation entre la limite d'une fonction et les suites convergentes (voir le cours précédent)

(f continue en $x_0 \in I$) $\Leftrightarrow$ quelle que soit la suite $(x_n) \in I$

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0$

Alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$

11.3 Opérations sur les fonction continues :

Théorème : Si $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fcts continues en $x_0 \in I$ Alors :

- $\alpha \cdot f \ (\alpha \in \mathbb{R})$, $f+g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ $(g(x_0) \neq 0)$ sont continues en x_0.
- Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ Alors : $g \circ f$ est continue en x_0 $\left(\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g \circ f(x_0) \right)$

(continuité de la fonction composée).

Théorème : Soit $f : I \to I$ et $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fcts Si f est continue en x_0 et g continue en y_0 avec $y_0 = f(x_0)$

Alors : $g \circ f$ est continue en x_0

g continue en $y_0 = f(x_0) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I$
$\left(0 < |y - y_0| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \right)$

Comme f est continue en x_0.

$\exists \eta > 0, \forall x \in I : [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon < \eta$
$\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon.$
$\Rightarrow |g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \varepsilon.$

Ce qui preuve que $g \circ f$ est continue en x_0.

II.4 Prolongement par continuité:

Définition: Soit f une fonction définie et continue sur $I / \{x_0\}$ $(I - \{x_0\})$.

Supposons que $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe.

Alors: la fonction $\tilde{f}$ définie sur I

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 . \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{si } x = x_0 . \end{cases}$$

et dite prolongement par continuité de f en x_0

Exemple: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ Donc $\tilde{f}$ définie sur f par:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 . \\ \lim_{x \to 0} f(x) & \text{si } x = 0 . \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 . \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

$\tilde{f}$ est la fonction prolongée par continuité de f en 0.

11.5 Fonction continue sur un intervalle:

Définition: Une fonction définie sur intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ est dite continue sur I si elle est continue en tous points de I

Remarque: Les fonctions polynômes et rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

Exemple:

$f(x) = x^2 - 2x + 1$ continue sur $\mathbb{R}$.

$g(x) = \dfrac{x^3 - 4}{x}$ continue sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

$h(x) = \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$

4.12 Théoreme sur les fonctions continue sur intervalle fermé:

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$, Alors:

1) f est bornée (i.e, $\forall x \in [a,b]$, $|f(x)| \leq M$).

2) f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure c'est à dire:

$\exists\, x_1 \in [a,b]$, $f(x_1) = \sup f(x)$, $x \in [a,b]$.

et $\exists\, x_2 \in [a,b]$, $f(x_2) = \operatorname{Inf} f(x)$, $x \in [a,b]$.

Preuve :

Supposons que f continue et n'est pas bornée sur $[a,b]$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a,b], \ |f(x_n)| > n$.

La suite (x_n) est bornée $\Rightarrow (x_n)$ admet une suite extraite $(x_{\phi(n)})$ converge.

$$\lim_{n \to +\infty} x_{\phi(n)} = \bar{x} \in [a,b] \text{ car } a \leq x_{\phi(n)} \leq b.$$

On a : $\lim_{n \to +\infty} |f(x_{\phi(n)})| = +\infty$ ——— (1)

Comme f est continue sur $[a,b]$ et $x_{\phi(n)} \to \bar{x}$.

Alors : $\lim_{n \to +\infty} |f(x_{\phi(n)})| = |f(\bar{x})| < +\infty$.

Contradiction avec (1).

Donc f est bornée.

(2) Sup $f(x)$ et inf $f(x)$ existent

a) Supposons que $\forall x \in [a,b]$, $f(x) < \sup f(x) = M$

On pose : $g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ g continue sur $[a,b]$.

D'après g est bornée.

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : |g(x)| \leq c, \ \forall x \in [a,b]$.

$\Rightarrow \dfrac{1}{M - f(x)} \leq c \Rightarrow M - f(x) \geq \dfrac{1}{c}$ donc : $f(x) \leq M - \dfrac{1}{c}$.

Contradiction avec $\sup f = M$.

Donc : $\exists x_1 \in [a,b] : f(x_1) = \sup\limits_{x \in [a,b]} (f(x))$.

D'une autre façon :

Soit f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur $[a,b]$ Si :

1. f est continue sur l'intervalle $]a,b[$.
2. f est continue à droite en a.
3. f est continue à gauche en b.

4.13 Discontinuité du premier et du second espèce :

1. f possède une discontinuité du premier espèce en x_0 Si : f n'est pas continue en x_0 et admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0.

2. f possède une discontinuité du deuxième espèce Si : f n'est pas continue x_0 et que la discontinuité n'est pas premier espèce.

Exemple: 1

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^2}}{x}$ si $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

$f(0) = 2$.

(a) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{2\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{2|x|}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \dfrac{2x}{x} = 2.$

(b) $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{2\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{2|x|}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \dfrac{2(-x)}{x} = -2$

Donc: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x)$

Donc: f possède une discontinuité du premier espèce.

2 $g(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ $D_g = \mathbb{R} - \{0\}$.

g n'est pas continue en $x_0 = 0$.

Donc g possède une discontinuité du second espèce.

1.14 Théorème des valeurs intermédiaires:

Théorème 1: Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$ **Si:** $f(a) \cdot f(b) < 0$

Alors: $\exists c \in]a,b[: f(c) = 0$.

Théorème 2: Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Soit $a < b$ deux éléments de I pour tout réel ℓ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(c) = \ell$.

Preuve:

Supposons que $f(a) < f(b)$ donc $f(a) < \ell < f(b)$.

soit $g(x) = f(x) - \ell$.

g est continue sur $[a,b]$.

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - \ell < 0 \\ g(b) = f(b) - \ell > 0 \end{cases} \Rightarrow f(a) \cdot f(b) < 0.$$

D'après le théorème précédent

$\exists c \in] a,b[: g(c) = 0 \Rightarrow g(c) = f(c) - \ell = 0$.

$\Rightarrow f(c) = \ell$.

Exemple: $f(x) = x^5 - 3x + 1$ Montrer que $\exists c \in]0,1[$.

f est continue sur $[0,1]$ et on a: $f(0) \cdot f(1) = 1 \times (-1) < 0$.

Donc: $\exists c \in]0,1[: f(c) = 0$

4.15 Continuité uniforme:

Définition: Une fonction f définie sur intervalle I est dite uniformément continue (U.C) sur I Si:
$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I$.
$$\left[|x - y| < \eta \, , \, |f(x) - f(y)| < \varepsilon \right].$$

c'est à dire:
$$\forall x_n, y_n \in I \ : \ |x_n - y_n| \to 0.$$
$$\Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \to 0.$$

Exemple:
$$f(x) = \frac{1}{x} \ , \quad I = [1, +\infty[.$$
Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in [1, +\infty[$.
$$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{y-x}{xy}\right|$$
$$x \geq 1 \text{ et } y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{xy} \leq 1$$
donc: $\dfrac{|y-x|}{xy} = \dfrac{|x-y|}{xy} < |x-y|$.

Alors: $|f(x) - f(y)| < |x - y|$.

Donc il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$.

$|x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Donc: f est U.C sur $[1, +\infty[$.

Remarque :

① La continuité uniforme est une propriété de f sur intervalle alors que la continuité peut être définie en un point.

② Si f est U.C sur I alors f est continue sur I.

③ En général si f est continue sur I f n'est pas nécessairement U.C sur I.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$ $I =]0,1]$.

f est continue sur $]0,1]$.

$$P : (f \text{ est U.C}) \Leftrightarrow \forall x_n, y_n \in]0,1], \ |x_n - y_n| \to 0 \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \to 0.$$

$$\overline{P} : (f \text{ n'est pas U.C}) \Leftrightarrow \left(\exists x_n, y_n \in I \ \ |x_n - y_n| \to 0 \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0\right)$$

$$\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}$$

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \bar{A} \vee B.$$

On prend : $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$ $n \neq 0$.

$$|x_n - y_n| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \longrightarrow 0.$$

Mais $|f(x_n) - f(y_n)| = |n - (n+1)| = 1 \not\longrightarrow 0$.

Donc f n'est pas U.C sur $]0,1]$.

4.16 Fonction Lipschitienne :

Définition : Soit I un intervalle sur $\mathbb{R}$. une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite Lipschitienne s'il existe une constante $k \geq 0$ telle que.

$\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq k\,|x-y|$.

D'après la définition précédente :

f Lipschitienne sur $I \Rightarrow f$ est U.C sur I.

En effet : $|f(x)-f(y)| \leq k\,|x-y| < k+1\,|x-y|$.

Donc : il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{k+1}$

Exemple : $f(x) = x^2$ et $I = [0,1]$.

$\forall x, y \in [0,1]$.

$|f(x)-f(y)| = |x^2-y^2| = |(x+y)(x-y)| = |(x+y)|\,|x-y|$
$= (x+y)\,|x-y|$.
$\leq 2\,|x-y|$.

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow (x+y) \leq 2.$$

Donc : f est Lipschitienne $\Rightarrow f$ est U.C sur $[0,1]$.

4.17 Théorème de Heine :

Une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$. est U.C sur cet intervalle.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$, f est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$

$\Downarrow$

f est U.C sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

4.18 Fonction réciproque continue :

18.1 Théorème : Si f une fonction continue et strictement monotone sur $[a,b]$ alors : f est une bijection de $[a,b]$ dans $f([a,b])$.

18.2 Définition : Soit f une bijection donc f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement monotone sur $f([a,b])$ et du même sens de monotonie de f.

$$f^{-1} : f([a,b]) \longrightarrow [a,b].$$
$$x \longmapsto f^{-1}(x).$$

Exemple : $f(x) = 4x - 1$ $\qquad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$
$$x \longmapsto y = f(x).$$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

On a : $f(x) = y = 4x - 1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{4}$

donc $x = \dfrac{y}{4} + \dfrac{1}{4} = f^{-1}(y)$.

Alors : $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{4}$.

4.19 : Ordre d'une variable - équivalence (Notation de Landau).

19.1 : Fonctions négligeables :

Déf : Soit f, g deux fonctions définies sur le même intervalle I dans un voisinage du point x_0 (à gauche et à droite de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe une fonction ε définie sur I avec.

$$f = \varepsilon \times g \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

on note alors $f(x) = O_{x_0} g(x)$

On appelle $f = O(g)$ la notation de Landau.

Remarque: Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de x_0

donc: $f \underset{x_0}{=} O(g) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exemple:

1. $x \underset{+\infty}{=} O\, x^2$

$\exists\, \varepsilon$ avec $\varepsilon(x) = \dfrac{1}{x}$,

$$x = \frac{1}{x} x^2 \qquad \Big/ \ \varepsilon = \frac{f}{g}$$

tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

$$x \underset{+\infty}{=} O(x^2) \Longleftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = 0.$$

2. $x + 1 \underset{+\infty}{=} O\,(x)^2$

$x \underset{+\infty}{=} O\,(e^x)$ $\qquad$ $x^\alpha \underset{+\infty}{=} O\, e^{\beta x}$ $(\alpha, \beta > 0)$.

19.2 Fonctions équivalentes :

On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 si et seulement si $(f-g)$ est négligeable devant g.

On écrit :

$$f \underset{x_0}{\sim} g \iff f - g = \underset{x_0}{o}\, g$$

$\sin x \underset{0}{\sim} x$ $\qquad f - g = \underset{x_0}{o}\, f \cdot \begin{cases} f-g = \varepsilon_1 g. \\ f-g = \varepsilon_2 g. \end{cases}$

$$g \neq 0 \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f-g}{g} = 0.$$

$$f \neq 0 \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g}{g} \nearrow 1$$

tel que $f \neq 0$ et $g \neq 0$ sur $V - \{x_0\}$.

Alors : $f \underset{x_0}{\sim} g \iff \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Exemple :

$\sin x \underset{0}{\sim} x.$

$\cos x \underset{0}{\sim} 1 - \dfrac{x^2}{2}.$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x.$

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x.$