

# Chapitre 1

## Séries Numériques

### 1.1 Généralités

Une *série numérique*, notée  $\sum u_n$ , est la donnée d'une suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  avec laquelle on veut donner un sens à la somme infinie  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

Vocabulaire :

1.  $u_n$  s'appelle le terme général de la série.

2.  $U_N = \sum_{n=0}^N u_n$  s'appelle somme partielle d'ordre (ou de rang)  $N$ .

3. Si la limite  $\lim_{N \rightarrow +\infty} U_N$  existe, on dit alors que la série converge et cette limite s'appelle somme de la série. On note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left( \sum_{n=0}^N u_n \right)$$

4. Si par contre cette limite n'existe pas ou est infinie, on dit alors que la série diverge.

**Remarque 1.1.1** *Les qualités de convergence ou de divergence ne changent pas si on enlève de la somme partielle un nombre fini de termes.*

**Exemple 1.1.2** *Voyons le cas d'un terme constant  $u_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ . Les calculs sont faciles à mener*

$$U_N = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = N + 1$$

*d'où  $\lim_{N \rightarrow +\infty} U_N = +\infty$ , et donc la série diverge. Une autre valeur de la constante donnera le même résultat, sauf la valeur 0 qui donne une série convergente de somme égale à 0.*

**Exemple 1.1.3** *Considérons à présent  $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$ ,  $n \geq 1$ . On peut décomposer en éléments simples cette fraction*

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et de là

$$V_N = \sum_{n=1}^N v_n = \sum_{n=1}^N \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1} \right)$$

$$V_N = 1 - \frac{1}{N+1}$$

D'où  $\lim_{N \rightarrow +\infty} V_N = 1$ . Ainsi cette série est convergente de somme égale à 1. On écrit

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

## 1.2 Condition nécessaire de convergence

**Proposition 1.2.1** *Si la série  $\sum u_n$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .*

**Démonstration :** Supposons que la série converge, c'est-à-dire  $\lim_{N \rightarrow +\infty} U_N = S$  existe. Comme  $u_n = U_n - U_{n-1}$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - U_{n-1}) = S - S = 0$$

■

Cette proposition permet de reconnaître les séries divergentes. En effet, par la contraposée, si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \neq 0$  alors la série est divergente. Comme illustration on peut revenir au premier exemple. En voici un autre :

**Exemple 1.2.2** *Si  $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e \neq 0$ . Donc la série  $\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  diverge.*

**Remarque 1.2.3** *ATTENTION! La proposition précédente n'est qu'une implication et pas une équivalence. Cela veut dire que si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ , alors on ne peut rien dire quant à la convergence (ou la divergence) de la série. Nous verrons plus loin des exemples dans ce sens.*

### 1.3 Séries à termes positifs

Dans cette section on étudiera les séries à terme général positif i.e,  $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . Leur étude préside, comme on le verra, à celle de tous les autres types de séries.

**Proposition 1.3.1** *Si la série  $\sum u_n$  est à termes positifs, alors la suite des sommes partielles  $(U_n)_{n \geq 0}$  est croissante. Si de plus  $(U_n)_{n \geq 0}$  est majorée alors la série est convergente.*

**Démonstration :** A partir de  $U_n = \sum_{j=0}^n u_j$  on peut écrire

$$U_{n+1} - U_n = (u_0 + u_1 + \cdots + u_{n+1}) - (u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = u_{n+1} \geq 0.$$

Ceci est exactement la croissance de la suite des sommes partielles. Si elle est de plus majorée ( $\exists M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$ ), alors elle converge grâce à un théorème démontré en Analyse 1 (première année). ■

**Exemple 1.3.2** *Comme application de cette proposition, montrons que la série de terme général  $u_n = \frac{1}{n^2}, n \geq 1$  est convergente. Il est facile d'établir que pour  $n \geq 2$  on a  $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ . Et par suite  $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ . D'où*

$$U_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$U_n \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Ainsi la suite des sommes partielles est croissante majorée par 2, donc est convergente.

**Proposition 1.3.3** *(Critère de comparaison) Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs. On suppose qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que*

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq v_n$$

Alors :

- \* Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge aussi,
- \* Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge aussi.

**Démonstration :** On démarre de  $\forall k \geq n_0, u_k \leq v_k$ . Par sommation sur  $k$  de  $n_0$  à  $n$  on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^n u_k &\leq \sum_{k=n_0}^n v_k \\ \Leftrightarrow U_n - U_{n_0-1} &\leq V_n - V_{n_0-1} \end{aligned}$$

\* Supposons que la série  $\sum v_n$  converge. Cela veut dire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$  existe. Or c'est une suite croissante, donc sa limite est sa borne supérieure i.e,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sup_{n \geq n_0} V_n = S$ . On en déduit que

$$U_n \leq U_{n_0-1} + S - V_{n_0-1}$$

C'est-à-dire que la suite des sommes partielles  $(U_n)$  est majorée à son tour. Elle est donc convergente puisqu'elle est déjà croissante.

\* Supposons enfin que  $\sum u_n$  diverge. Sa suite des sommes partielles étant croissante, la divergence implique que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ ; et comme  $U_n - U_{n_0-1} \leq V_n - V_{n_0-1}$  alors on a aussi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ .

■

**Exemple 1.3.4** Montrons que la série  $\sum \frac{1}{n!}$  est convergente. En effet, il est facile de montrer par récurrence que  $\forall n \geq 4, n! \geq n^2$ . Cela donne qu'à partir de  $n = 4$  on a l'inégalité  $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n^2}$ . Comme nous avons déjà démontré que la série  $\sum \frac{1}{n^2}$  est convergente, alors  $\sum \frac{1}{n!}$  est convergente aussi.

Voici maintenant une variante parfois utile de la proposition précédente.

**Proposition 1.3.5** (Critère de comparaison bis) Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes strictement positifs à partir d'un certain rang. On suppose qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Alors :

\* Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge aussi,

\* Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge aussi.

**Démonstration :** A partir de

$$\forall k \geq n_0, \quad \frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k},$$

on multiplie les inégalités membre à membre de  $k = n_0$  jusqu'à  $k = n - 1$ . On obtient

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} \leq \frac{v_n}{v_{n_0}} \implies u_n \leq C v_n$$

$C = \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}}$  étant une constante. On utilise alors la comparaison telle qu'énoncée dans la proposition 1.3.3. ■

**Proposition 1.3.6** (*Critère de l'équivalence*) Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes positifs. On dit que les termes généraux sont équivalents à l'infini (noté  $u_n \sim v_n$ ), si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Dans ce cas, les deux séries convergent simultanément, ou bien divergent simultanément.

**Démonstration :** La condition d'équivalence s'écrit ainsi

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_\varepsilon \implies \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

En fixant  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , la dernière inégalité dit qu'à partir de  $n_\varepsilon$ , on a

$$(1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n$$

Maintenant le critère de comparaison permet de donner la conclusion escomptée. ■

**Exemple 1.3.7** Étudions la convergence de la série de terme général  $u_n = 1 - \cos(1/n)$ . Il est d'abord clair que le terme général est positif. Ensuite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = 1/2$$

(étudiée et démontrée en première année) permet de dire que  $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$ , d'où la convergence.

## 1.4 Deux modèles fondamentaux

### 1.4.1 Modèle d'une série géométrique, $u_n = q^n$ , $q \geq 0$ .

Examinons d'abord la condition nécessaire de convergence, car si elle n'est pas vérifiée il y aura divergence.

- Si  $q > 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$  et donc la série diverge.
- Si  $q = 1$ , alors  $q^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \neq 0$  et donc la série diverge aussi.
- Si  $q < 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ . Mais cette égalité seule ne permet pas de conclure comme affirmé auparavant. Il faut examiner les sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Ainsi  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1}{1 - q}$  et la série est convergente. On écrit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}.$$

### 1.4.2 Modèle d'une série de Riemann, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$ , $\alpha > 0$ .

On peut évacuer tout d'abord les cas  $\alpha \leq 0$  puisque le terme général ne tend pas vers 0 et la série diverge. Nous allons, à l'aide d'intégrales, encadrer les sommes partielles  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$ . Partons de la qualité de décroissance sur  $[1, +\infty[$  de la fonction réelle  $t \mapsto t^{-\alpha}$ . Si donc  $k \leq t \leq k+1$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$ , alors

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

et par intégration sur  $[k, k+1]$  on aura

$$\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \quad (*)$$

La discussion selon les valeurs de  $\alpha$  tourne autour de trois cas :  $\alpha > 1$ ,  $\alpha = 1$  et  $0 < \alpha < 1$ .

□ Cas  $\alpha > 1$  : Le calcul de l'intégrale dans (\*) donne

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} = \left[ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_k^{k+1} = \frac{1}{1-\alpha} \left[ \frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}} \right]$$

En faisant la somme de copies de (\*) pour  $k = 1$  jusqu'à  $k = n-1$  on obtient

$$U_n - 1 \leq \frac{1}{\alpha-1} \left[ 1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right] \leq U_{n-1}$$

Puisque  $1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}} < 1$ , alors l'inégalité de gauche donne

$$U_n \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}.$$

C'est-à-dire que la suite des somme partielles est majorée. Donc la série converge dans ce cas.

□ Cas  $\alpha = 1$  : Maintenant le calcul de l'intégrale donne

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \ln(k+1) - \ln k$$

Le procédé de sommation utilisé précédemment donne

$$U_n - 1 \leq \ln n \leq U_{n-1}.$$

A présent c'est l'inégalité de droite qui donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n-1} = +\infty$ . La série est divergente dans ce cas.

□ Cas  $0 < \alpha < 1$  : Le calcul est identique à celui du premier cas, sauf qu'il faut écrire le résultat dans le bon sens

$$U_n - 1 \leq \frac{1}{1 - \alpha} [n^{1-\alpha} - 1] \leq U_{n-1}.$$

L'inégalité de droite donne  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n-1} = +\infty$  car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \alpha} [n^{1-\alpha} - 1] = +\infty$ .

La série est divergente dans ce cas.

**Conclusion** : On résume les résultats concernant ces deux modèles ainsi

\* La série  $\sum q^n$  avec  $q \geq 0$  converge si et seulement si  $0 \leq q < 1$  (et diverge donc si  $q \geq 1$ ).

\* La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  avec  $\alpha > 0$  converge si et seulement si  $\alpha > 1$  (et diverge donc si  $\alpha \leq 1$ ).

## 1.5 Critères classiques de convergence

**Proposition 1.5.1** Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs.

1. (Critère de d'Alembert) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$  alors la série converge si  $l < 1$  et diverge si  $l > 1$ . Dans le cas  $l = 1$  ce critère ne permet pas de conclure.
2. (Critère de Cauchy) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{1/n} = l$  alors la série converge si  $l < 1$  et diverge si  $l > 1$ . Dans le cas  $l = 1$  ce critère ne permet pas de conclure.
3. (Critère de Riemann) Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = l$  (finie) alors
  - \* Si  $l \neq 0$ , la série converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .
  - \* Si  $l = 0$  et  $\alpha > 1$  alors la série converge.

**Démonstration** :

1. Critère de d'Alembert (Jean Le Rond d'Alembert, 1717-1783) D'après la définition de la limite on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left[ n \geq n_\varepsilon \implies \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| \leq \varepsilon \right]$$

C'est-à-dire qu'à partir de  $n_\varepsilon$  on a

$$l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\frac{(l - \varepsilon)^{n+1}}{(l - \varepsilon)^n} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{(l + \varepsilon)^{n+1}}{(l + \varepsilon)^n}$$

Ceci est exactement l'hypothèse de la comparaison bis [proposition 1.3.5] avec une série géométrique ( $q = l - \varepsilon$  ou bien  $q = l + \varepsilon$ ). Donc si  $l < 1$ , on choisit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour que  $l + \varepsilon < 1$  (n'importe quel  $\varepsilon < 1 - l$  convient). La convergence de la série découle de la convergence de la série géométrique avec  $q = l + \varepsilon$  et de la comparaison bis. Maintenant si  $l > 1$ , on choisit  $\varepsilon > 0$  de telle sorte que  $l - \varepsilon > 1$  (il suffit que  $\varepsilon < l - 1$ ). Dans ce cas la série géométrique avec  $q = l - \varepsilon$  diverge, ce qui donne la divergence de la série étudiée. Pour le cas  $l = 1$ , n'importe quel choix de  $\varepsilon$  donne une série géométrique minorante convergente et une série géométrique majorante divergente, ce qui ne permet pas de conclure.

2. Critère de Cauchy (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857) D'après la définition de la limite on a

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left[ n \geq n_\varepsilon \implies |u_n^{1/n} - l| \leq \varepsilon \right]$$

C'est-à-dire qu'à partir d'un certain  $n_\varepsilon$  on a

$$(l - \varepsilon)^n \leq u_n \leq (l + \varepsilon)^n$$

Ceci est exactement l'hypothèse de la comparaison [proposition 1.3.3] avec une série géométrique ( $q = l - \varepsilon$  ou bien  $q = l + \varepsilon$ ). La discussion précédente suivant les valeurs de  $l$  peut être reprise mot pour mot.

3. Critère de Riemann (Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866)

\* Si  $l > 0$ , la limite dans l'hypothèse indique que  $u_n \sim \frac{l}{n^\alpha}$ . Donc la convergence aura lieu si et seulement si  $\alpha > 1$  conformément à l'étude du modèle de la série de Riemann.

\* Si  $l = 0$ , la définition de la limite donne qu'à partir d'un certain rang  $n_\varepsilon$  on a

$$-\varepsilon \leq n^\alpha u_n \leq \varepsilon \implies u_n \leq \frac{\varepsilon}{n^\alpha}$$

et donc si de plus  $\alpha > 1$  alors la série convergera grâce au critère de comparaison et au modèle de la série de Riemann.

■

**Exemple 1.5.2** 1. Soit à étudier la série de terme général  $u_n = \frac{n^a}{a^n}$  avec  $a > 0$  un paramètre réel. Un calcul (application du critère de d'Alembert) simple donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^a a^n}{n^a a^{n+1}} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^a \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{a}$$

La série sera donc convergente si  $a > 1$  et divergente si  $a < 1$ . Le cas  $a = 1$  donne  $u_n = n$  qui est divergente car la condition nécessaire de convergence n'est pas satisfaite.

2. Voici un deuxième exemple,  $v_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ . Il est parfois utile de vérifier à priori la condition nécessaire de convergence. Dans notre cas

$$\ln v_n = n^2 \ln \left(\frac{n}{n+1}\right) = -n^2 \ln \left(\frac{n+1}{n}\right) = -n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = -n^2 \left[\frac{1}{n} + O(1/n^2)\right]$$

où nous avons utilisé un développement limité à l'ordre 1 de  $\ln(1+x)$  au voisinage de 0. Il est clair alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln v_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ . Maintenant nous allons faire appel au critère de Cauchy pour étudier la série de terme général  $v_n$ . On a

$$v_n^{1/n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} < 1$$

Donc la série est convergente.

3. Étudions enfin la série de terme général  $w_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Il est clair d'abord que pour  $n$  assez grand,  $w_n > 0$ . On peut appliquer le critère de Riemann. En effet,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1$ , ce qui implique la convergence de la série.

## 1.6 Règle de Raabe-Duhamel

La règle de Raabe-Duhamel<sup>1</sup> que nous allons énoncer et démontrer, donne une réponse quand le critère de d'Alembert cesse de fonctionner.

**Proposition 1.6.1** Soit  $\sum u_n$  une série à termes positifs. Supposons qu'à partir d'un certain rang  $n_0$  on ait

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{l}{n} + \varepsilon_n$$

où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\varepsilon_n = 0$ . Alors

- \* Si  $l > 1$ , la série converge ;
- \* Si  $l < 1$ , la série diverge ;
- \* Si  $l = 1$ , on ne peut pas en général conclure.

**Démonstration :** Considérons la série de Riemann  $v_n = \frac{1}{n^a}$  où  $a$  est un paramètre d'ajustement. On a à partir d'un certain rang  $n_1$  ( $n \geq n_1$ )

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-a} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-a} = 1 - \frac{a}{n} + r_n$$

1. Joseph Ludwig Raabe, 1801-1859 / Jean-Marie Constant Duhamel 1797-1872

avec  $r_n = O(1/n^2)$ . C'est une simple application du développement limité de la fonction  $x \mapsto (1+x)^{-a}$  à l'ordre 1 au voisinage de 0. Prenons  $n \geq \max(n_0, n_1)$ . On peut écrire alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{a-l}{n} + \varepsilon_n - r_n.$$

D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left[ \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right] = a - l$$

- Cas  $l > 1$  : On choisit le paramètre  $a \in ]1, l[$  de sorte que d'une part  $a > 1$  et  $a - l < 0$  d'autre part. D'après la limite précédente, à partir d'un certain rang  $n_2$  on a

$$n \left[ \frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \right] < 0 \implies \frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Ceci nous permet d'appliquer la comparaison bis (proposition (1.3.5)) avec comme série majorante une série de Riemann convergente puisque  $a > 1$ . Notre série est donc convergente.

- Cas  $l < 1$  : On choisit dans ce cas  $a \in ]l, 1[$  de sorte que d'une part  $a < 1$  et  $a - l > 0$  d'autre part. Le même raisonnement que le précédent nous permet d'écrire à partir d'un certain  $n_3$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

On applique à nouveau la comparaison bis avec une série minorante cette fois divergente (série de Riemann avec  $a < 1$ ). Notre série sera donc divergente.

- Cas  $l = 1$  :

- \* Si on choisit  $a > 1$ , on aura une minoration par une série convergente. Cela ne permet pas de conclure.
- \* Si on choisit  $a < 1$ , on aura une majoration par une série divergente. Cela ne permet pas de conclure non plus.
- \* Avec le choix de  $a = 1$ , on n'arrive pas à fixer, à partir d'un certain rang, le signe de  $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n}$ .

■

**Exemple 1.6.2** On se propose d'étudier la série de terme général

$$w_n = \sqrt{(n-1)!} \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad n \geq 2.$$

La structure multiplicative de l'expression du terme général suggère d'utiliser le critère de d'Alembert. Il est facile de montrer que

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure puisque  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1$ . Essayons d'aller plus loin avec la règle de Raabe-Duhamel. Rappelons le développement limité de la fonction sinus à l'ordre 3 au voisinage de 0

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^4)$$

Nous avons alors

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 - \frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

C'est la forme préconisée dans la règle de Raabe-Duhamel avec  $l = \frac{1}{6} < 1$ . La série est donc divergente.

## 1.7 Séries à termes quelconques

Nous allons examiner dans cette section les séries dont le terme général est de signe quelconque.

### 1.7.1 Convergence absolue

**Définition 1.7.2** On dit que la série numérique  $\sum u_n$  à termes quelconques est absolument convergente si la série  $\sum |u_n|$  est convergente.

**Exemple 1.7.3** • La série géométrique  $\sum q^n$  ( $q \in \mathbb{R}$ ) converge absolument si et seulement si  $|q| < 1$  car  $|q^n| = |q|^n$ .

- La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  converge absolument.
- La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$  ne converge pas absolument. Pour ces deux dernières, se référer aux résultats sur les séries de Riemann.

**Proposition 1.7.4** Si une série converge absolument alors elle converge.

**Démonstration :** Soient  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $S_n = \sum_{k=0}^n |u_k|$  les suites des sommes partielles de la série  $\sum u_n$  et  $\sum |u_n|$  respectivement. L'hypothèse de la proposition est que la suite  $(S_n)$  converge. Le but est de montrer que la suite  $(U_n)$  converge. Sachant que

dans  $\mathbb{R}$  les suites convergentes sont de Cauchy et réciproquement, nous allons montrer que  $(U_n)$  est de Cauchy. En effet, on a d'abord

$$U_{n+p} - U_p = \sum_{k=p+1}^{n+p} u_k$$

d'où

$$|U_{n+p} - U_p| \leq \sum_{k=p+1}^{n+p} |u_k| = S_{n+p} - S_p$$

Nous partons du fait que  $(S_n)$  est convergente, donc de Cauchy, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad [n \geq n_\varepsilon \implies 0 \leq S_{n+p} - S_p \leq \varepsilon]$$

Ce qui donne qu'à partir du même  $n_\varepsilon$  on a  $|U_{n+p} - U_p| \leq \varepsilon$ ; et donc la suite  $(U_n)$  est de Cauchy, donc convergente. L'outil qui a fait fonctionner cette démonstration est tout simplement l'inégalité triangulaire de la valeur absolue. ■

**Remarque 1.7.5** (*Importante*) *Il existe des séries convergentes, mais pas absolument convergentes. On les appelle semi-convergentes. Un exemple classique est celui de la série de terme général  $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ .*

### 1.7.6 Critère d'Abel

Le critère d'Abel (Niels Henrik Abel, 1802-1829) que nous allons exposer, concerne un type de séries à termes quelconques. Il donne des conditions suffisantes pour la convergence.

**Théorème 1** *Soit  $\sum u_n$  une série à termes quelconques telle que :*

$$* \quad u_n = a_n b_n$$

$$* \quad a_n \geq 0, (a_n) \text{ est décroissante et } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

$$* \quad \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} \quad \left| \sum_{k=0}^n b_k \right| \leq M.$$

*Alors la série  $\sum u_n$  converge.*

**Démonstration :** Il faut montrer que la suite des sommes partielles est de Cauchy. Posons

$$B_n = \sum_{k=0}^n b_k \implies b_k = B_k - B_{k-1}$$

Maintenant si  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ , alors

$$\begin{aligned} U_{n+p} - U_p &= \sum_{k=p+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=p+1}^{n+p} a_k (B_k - B_{k-1}) \\ &= \sum_{k=p+1}^{n+p} a_k B_k - \sum_{k=p}^{n+p-1} a_{k+1} B_k = \sum_{k=p+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_{n+p} B_{n+p} - a_{p+1} B_p \end{aligned}$$

Remarquons que  $(a_k - a_{k+1}) \geq 0$  grâce à l'hypothèse de décroissance de la suite  $(a_n)$ . On en déduit donc

$$\begin{aligned} |U_{n+p} - U_p| &\leq \sum_{k=p+1}^{n+p-1} (a_k - a_{k+1}) |B_k| + a_{n+p} |B_{n+p}| + a_{p+1} |B_p| \\ &\implies |U_{n+p} - U_p| \leq 2M a_{p+1} \end{aligned}$$

Enfin, grâce à l'hypothèse  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ , on peut dire que

$$\lim_{n, p \rightarrow +\infty} |U_{n+p} - U_p| = 0.$$

C'est-à-dire que la suite des sommes partielles est de Cauchy, donc convergente. ■

**Exemple 1.7.7** • Examinons d'abord l'exemple de la série alternée  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ . Ici,  $a_n = \frac{1}{n}$  est une suite positive décroissante vers 0 ; et  $b_n = (-1)^n$ . Il est facile de montrer que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \implies \left| \sum_{k=0}^n (-1)^k \right| \leq 1$$

Le critère d'Abel s'applique donc, et la série est convergente.

- Voici un autre exemple  $\sum \frac{\cos n\theta}{n}$ . Nous avons le même  $a_n = 1/n$  que le précédent. Montrons que, pour  $\theta$  convenablement choisi,  $b_n = \cos n\theta$  vérifie l'hypothèse du critère d'Abel. En effet

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=0}^n \cos k\theta = \sum_{k=0}^n \Re(e^{i k\theta}) = \Re\left(\sum_{k=0}^n e^{i k\theta}\right) = \Re\left(\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}\right) \\ \implies B_n &= \Re\left(e^{i n\theta/2} \frac{e^{i(n+1)\theta/2} - e^{-i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}\right) = \frac{\cos(n\theta/2) \sin((n+1)\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \\ &\implies |B_n| \leq \frac{1}{|\sin(\theta/2)|} \end{aligned}$$

à condition de choisir  $\theta \neq 2m\pi$ ,  $\forall m \in \mathbb{Z}$ .

### 1.7.8 Opérations sur les séries absolument convergentes

On laisse au lecteur le soin de montrer les propriétés suivantes. Soient  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  deux séries à termes quelconques absolument convergentes. Alors

- la série de terme général  $\lambda u_n + \mu v_n$  est absolument convergente  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- la série (produit de Cauchy) de terme général  $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$  est absolument convergente.
- si  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est une bijection, alors  $\sum u_{\sigma(n)}$  est absolument convergente.