Chapitre 2

Suites et Séries de fonctions

Ce chapitre est consacré (surtout) aux séries dont le terme général est une fonction d'une variable x. On examinera les trois modes de convergence : simple, uniforme et normale. Nous verrons surtout les propriétés conservées ou non par ces modes de convergence. Les résultats sont d'une très grande importance pour aborder l'étude des séries entières et de Fourier.

2.1 Convergence simple

Définition 2.1.1 *Soit $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles définies toutes sur un même domaine $\mathscr{D}$ (indépendant de n). On dit que la suite $(u_n(x))$ converge simplement au point $x_0 \in \mathscr{D}$ si et seulement si la suite numérique $(u_n(x_0))$ converge. Soit $\mathscr{S} \subset \mathscr{D}$ l'ensemble des points où la convergence simple a lieu. On peut définir sur $\mathscr{S}$ une fonction $l(x)$ limite i.e,*

$$l(x) = \lim_{n\to+\infty} u_n(x), \quad \forall x \in \mathscr{S}.$$

Exemple 2.1.2 *Considérons $u_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. Comme $|u_n(x)| = |x|^n = e^{n\ln|x|}$ alors*

- *si $|x| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$,*
- *si $|x| > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n(x)| = +\infty$ et donc pas de convergence simple,*
- *si $x = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(1) = 1$,*
- *si $x = -1$, alors $u_n(-1) = (-1)^n$ est une suite divergente (pas de limite).*

En définitive le domaine de convergence simple est $\mathscr{S} =]-1, 1]$ et

$$l(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; -1 < x < 1 \\ 1 & si \;\; x = 1 \end{cases}$$

Définition 2.1.3 *La définition de la convergence simple d'une série de fonctions $\sum u_n(x)$ est celle de sa suite des sommes partielles $U_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$.*

Exemple 2.1.4 *Examinons la série de fonctions associée à la suite de l'exemple précédent* $\sum x^n$. *On a bien*

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1.$$

D'après les limites précédentes on peut affirmer que le domaine de convergence simple de la série est $\mathsf{Q} =]-1,1[$ *et*

$$S(x) = \lim_{n\to+\infty} U_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \ \forall x \in]-1,1[\,.$$

Exemple 2.1.5 *Voici un autre exemple :* $w_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x^2}$. *Le domaine commun à toutes ces fonctions* $w_n(.)$ *est manifestement* $\mathbb{R}$. *Il n'est pas difficile d'obtenir*

$$l(x) = \lim_{n\to+\infty} w_n(x) = \begin{cases} 0 & si \;\; x \neq 0 \\ 1 & si \;\; x = 0 \end{cases}$$

et ainsi cette suite converge simplement vers $l(.)$ *sur* $\mathbb{R}$. *Regardons à présent la série de fonctions de terme général* $w_n(x)$. *Il est évident qu'elle diverge au point* $x = 0$ *puisque la condition nécessaire de convergence des séries n'est pas satisfaite en* $x = 0$. *Pour* $x \neq 0$, *on a*

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 w_n(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Ceci prouve, grâce au critère de Riemann, que la série converge. Pour $x \neq 0$ *sa somme*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$$

existe. Il n'est pas aisé de déterminer, à l'aide des fonctions usuelles, l'expression des sommes de séries de fonctions. Pour le cas présent, nous verrons bien plus loin que

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(\pi/x)\cosh(\pi/x)}{\sinh(\pi/x)}\right)$$

2.2 Convergence uniforme

Soit $(u_n(x))$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction $l(x)$ sur un intervalle I, c'est-à-dire

$$\forall x \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}, \ \forall n \in \mathbb{N} \ [n \geq n_{x,\varepsilon} \Longrightarrow |u_n(x) - l(x)| \leq \varepsilon]$$

En général, l'entier $n_{x,\varepsilon}$ dépend de x et de ε.

Définition 2.2.1 *La suite $(u_n(x))$ converge uniformément sur l'intervalle I si $n_{x,\varepsilon}$ ne dépend que de ε et non de x. Il est le même pour tous les x de I. D'ailleurs on ne parle pas de convergence uniforme en un point. La phrase mathématique précédente s'écrit alors*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \; \forall x \in I \, \forall n \in \mathbb{N} \; [n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |u_n(x) - l(x)| \leq \varepsilon]$$

ou bien

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \; \forall n \in \mathbb{N} \left[n \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \sup_{x \in I} |u_n(x) - l(x)| \leq \varepsilon \right]$$

ou encore

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\sup_{x \in I} |u_n(x) - l(x)| \right] = 0$$

Exemple 2.2.2

1. *Regardons du point de vue de la convergence uniforme l'exemple de la suite géométrique $u_n(x) = x^n$. Le domaine de convergence simple est $\mathscr{S} =]-1, 1]$ et la limite simple est $l(x) = \begin{cases} 0 & si \; -1 < x < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases}$, d'où*

$$u_n(x) - l(x) = \begin{cases} x^n & si \; -1 < x < 1 \\ 0 & si \quad x = 1 \end{cases}$$

   Comme $\sup_{]-1,1]} |u_n(x) - l(x)| = 1$, alors la convergence n'est pas uniforme sur le domaine $\mathscr{S}$. On peut néanmoins trouver des sous-domaine de $\mathscr{S}$ où la convergence est uniforme. Soit $J_a = [-a, a]$ avec $0 < a < 1$. Alors

$$\sup_{[-a,a]} |u_n(x) - l(x)| = a^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

2. *Étudions maintenant la série géométrique $\sum x^n$. On a déjà vu que $U_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ converge simplement sur $\mathsf{Q} =]-1, 1[$ vers $S(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Il est facile de voir que*

$$\sup_{]-1,1[} |U_n(x) - S(x)| = \sup_{]-1,1[} \frac{|x^{n+1}|}{1 - x} = +\infty$$

   et donc la convergence ne peut être uniforme sur Q. Par contre sur J_a on aura

$$\sup_{[-a,a]} |U_n(x) - S(x)| = \frac{a^{n+1}}{1 - a} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

   et donc la convergence de la série y est uniforme.

Question : Comment étudier la convergence uniforme d'une suite (ou d'une série) de fonctions, si on ne dispose pas de l'expression de la limite simple ? La réponse est donnée par le théorème ci-dessous basé sur la notion de suite de Cauchy.

Théorème 2 *Une suite de fonctions $(u_n(x))$ converge uniformément sur I si et seulement si*

$$\lim_{n,p\to+\infty}\left[\sup_{x\in I}|u_{n+p}(x)-u_p(x)|\right]=0.$$

Pour une série il faut remplacer dans la limite précédente, le terme général par la suite des sommes partielles.

La démonstration est laissée au lecteur. Nous allons étudier la convergence uniforme de la série de l'exemple (2.1.5).

Exemple 2.2.3 *Le terme générale de la série est $w_n(x)=\dfrac{1}{1+n^2x^2}$. Nous avons déjà observé que la convergence simple de la série a lieu sur $\mathbb{R}^*$. Posons $W_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{1+k^2x^2}$. L'application du théorème précédent passe par l'étude des variations de la fonction $W_{n+p}(x)-W_p(x)=\displaystyle\sum_{k=p+1}^{n+p}\frac{1}{1+k^2x^2}$. Sa dérivée*

$$(W_{n+p}(x)-W_p(x))'=-2x\sum_{k=p+1}^{n+p}\frac{k^2}{(1+k^2x^2)^2}$$

s'annule en $x=0$, elle est positive puis négative. Le maximum est atteint en $x=0$ i.e,

$$\sup_{\mathbb{R}^*}|W_{n+p}(x)-W_p(x)|=\sup_{\mathbb{R}}|W_{n+p}(x)-W_p(x)|=|W_{n+p}(0)-W_p(0)|=n\xrightarrow[n,p\to+\infty]{}+\infty$$

Il n'y a donc pas de convergence uniforme sur $\mathbb{R}^*$. Si on choisit de faire l'étude par exemple sur $D_a=]-\infty,-a]\cup[a,+\infty[$ avec $a>0$, alors

$$\sup_{D_a}|W_{n+p}(x)-W_p(x)|=\sum_{k=p+1}^{n+p}\frac{1}{1+k^2a^2}\leq\sum_{k=p+1}^{n+p}\frac{1}{k^2a^2}\leq\frac{1}{a^2}\sum_{k=p+1}^{n+p}\frac{1}{k(k-1)}$$

$$\Longrightarrow\sup_{D_a}|W_{n+p}(x)-W_p(x)|\leq\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{n+p}\right)\xrightarrow[n,p\to+\infty]{}0$$

Et dans ce cas on a bien la convergence uniforme.

Critère d'Abel pour la convergence uniforme

Théorème 3 *Soit le terme général d'une série de fonctions* $u_n(x) = a_n(x)b_n(x)$, $x \in I$ *avec*

- $a_n(x) \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ *;* $a_n(x)$ *est une suite décroissante (en* n*) pour chaque* x *fixé et* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in I} a_n(x)\right) = 0$
- $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \sup\limits_{x\in I} |\sum\limits_{k=0}^{n} b_k(x)| \leq M.$

Alors la série $\sum u_n(x)$ *converge uniformément sur* I*.*

Démonstration : Les calculs sont identiques à ceux de la démonstration du critère d'Abel classique. En posant

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \qquad \text{et} \qquad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k(x)$$

on arrive à

$$|U_{n+p}(x) - U_p(x)| \leq \sum_{k=p+1}^{n+p-1} (a_k(x) - a_{k+1}(x))\,|B_k(x)| + a_{n+p}(x)|B_{n+p}(x)| + a_{p+1}(x)|B_p(x)|$$

$$\Longrightarrow \sup_{x\in I} |U_{n+p}(x) - U_p(x)| \leq 2M \sup_{x\in I}\left(a_{p+1}(x)\right).$$

Cette dernière inégalité implique la convergence uniforme de la série grâce aux hypothèses. ■

Exemple 2.2.4 *La série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1+|x|}$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$*. La vérification est laissée au lecteur.*

2.3 Convergence normale

Définition 2.3.1 *On dit que la série* $\sum u_n(x)$ *converge normalement sur un domaine* I *si et seulement si la série numérique de terme général* $\sup\limits_{x\in I} |u_n(x)|$ *converge.*

Théorème 4 *Si une série de fonctions converge normalement alors elle converge uniformément.*

Démonstration : Soit $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k(x)$. On a

$$|S_{n+p}(x) - S_p(x)| = |\sum_{k=p+1}^{n+p} u_k(x)| \leq \sum_{k=p+1}^{n+p} |u_k(x)| \leq \sum_{k=p+1}^{n+p} \sup_{x\in I} |u_k(x)|$$

$$\Longrightarrow \sup_{x\in I}|S_{n+p}(x)-S_p(x)| \leq \sum_{k=p+1}^{n+p} \sup_{x\in I}|u_k(x)|$$

D'après l'hypothèse de convergence normale, la somme majorante précédente tend vers 0 quand $n,p \to +\infty$. D'où la convergence uniforme selon le Théorème 2. ■

Exemple 2.3.2 *Examinons la convergence normale, sur* $I = [-a,a]$ $a > 0$, *de la série de terme général* $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$. *On a*

$$|u_n(x)| = \frac{|x|^n}{n!} \leq \frac{a^n}{n!} \Longrightarrow \sup_{x\in I}|u_n(x)| \leq \frac{a^n}{n!}.$$

La série majorante est convergente grâce au critère de d'Alembert puisque

$$\frac{a^{n+1}/(n+1)!}{a^n/n!} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

2.4 Propriétés de la convergence uniforme

2.4.1 Convergence uniforme et limite

Proposition 2.4.2 *Soit* $(u_n(x))$ *une suite qui converge uniformément sur* I *vers une fonction* $l(x)$. *Soit* x_0 *un point tel que* $]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset I$ *pour un* $\delta > 0$ *suffisamment petit. Supposons que* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to x_0} u_n(x) = a_{n,x_0}$ *existe. Alors* $\lim_{n\to+\infty} a_{n,x_0} = a_{x_0}$ *existe ; de plus on a* $\lim_{x\to x_0} l(x) = a_{x_0}$. *Autrement dit, on peut intervertir la limite sur* x *et la limite sur* n *i.e,*

$$\lim_{x\to x_0} l(x) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to+\infty} u_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to x_0} u_n(x)\right) \tag{2.1}$$

Démonstration : Pour montrer que a_{x_0} existe, il suffit de montrer que la suite (a_{n,x_0}) est de Cauchy. On peut écrire d'abord que

$$\begin{aligned}|a_{p,x_0} - a_{q,x_0}| &= |a_{p,x_0} - u_p(x) + u_p(x) - u_q(x) + u_q(x) - a_{q,x_0}| \\ &\leq |a_{p,x_0} - u_p(x)| + |u_p(x) - u_q(x)| + |u_q(x) - a_{q,x_0}|\end{aligned}$$

La convergence uniforme de la suite $(u_n(x))$ s'exprime ainsi : $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ (ne dépendant que de ε) tel que

$$p,q \geq n_\varepsilon \Longrightarrow \forall x \in I \quad |u_p(x) - u_q(x)| \leq \varepsilon/3$$

Prenons alors $p,q \geq n_\varepsilon$. Alors grâce à l'hypothèse on a

$$\begin{aligned}&\exists\delta_{p,\varepsilon} > 0 : \qquad |x - x_0| \leq \delta_{p,\varepsilon} \Longrightarrow |u_p(x) - a_{p,x_0}| \leq \varepsilon/3 \\ &\exists\delta_{q,\varepsilon} > 0 : \qquad |x - x_0| \leq \delta_{q,\varepsilon} \Longrightarrow |u_q(x) - a_{q,x_0}| \leq \varepsilon/3\end{aligned}$$

Comme p et q ne dépendent que de ε, alors $\delta_{p,\varepsilon}$ et $\delta_{q,\varepsilon}$ ne dépendent que de ε aussi. Posons $\delta_\varepsilon = \min(\delta_{p,\varepsilon}, \delta_{q,\varepsilon})$. Alors

$$|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon \Longrightarrow \begin{cases} |u_p(x) - a_{p,x_0}| \leq \varepsilon/3 \\ |u_q(x) - a_{q,x_0}| \leq \varepsilon/3 \end{cases}$$

et donc

$$p, q \geq n_\varepsilon \Longrightarrow |a_{p,x_0} - a_{q,x_0}| \leq \varepsilon.$$

Pour la deuxième affirmation, on a la majoration

$$\begin{aligned} |l(x) - a_{x_0}| &= |l(x) - u_n(x) + u_n(x) - a_{n,x_0} + a_{n,x_0} - a_{x_0}| \\ &\leq |l(x) - u_n(x)| + |u_n(x) - a_{n,x_0}| + |a_{n,x_0} - a_{x_0}| \end{aligned}$$

En prenant x proche de x_0 et n suffisamment grand, on arrive à majorer par $\varepsilon/3$ chacun des trois termes dans la majoration précédente. ■

Conséquence Importante sur la continuité

Si toutes les fonctions $u_n(x)$ sont continues au point x_0, alors la convergence uniforme de cette suite vers $l(x)$ implique que $l(x)$ est aussi continue en x_0. Le même énoncé est valable pour une série de fonctions et sa somme.

En effet on a

$$\begin{aligned} \lim_{x\to x_0} l(x) &= \lim_{x\to x_0} \left(\lim_{n\to\infty} u_n(x) \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to x_0} u_n(x) \right) \quad \text{(à cause de la convergence uniforme)} \\ &= \lim_{n\to\infty} u_n(x_0) \quad \text{(à cause de la continuité des fonctions } u_n(x)\text{)} \\ &= l(x_0) \end{aligned}$$

Remarque 2.4.3 *Si par hasard la limite $l(x)$ est continue, cela ne veut pas dire que la convergence est forcément uniforme. Le résultat précédent n'est qu'une implication !*

Exemple 2.4.4

1. *Dans l'exemple de la suite géométrique, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & si \quad |x| < 1 \\ 1 & si \quad x = 1 \end{cases} = l(x)$$

sur $]-1, 1]$. Comme $l(x)$ n'est pas continue, on déduite que la convergence n'est pas uniforme.

2. *On définit la fonction*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + 1 + |x|}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier, à l'aide du critère d'Abel uniforme, que la convergence de la série est uniforme sur $\mathbb{R}$ et que f y est continue.

2.4.5 Convergence uniforme et Intégrale

Proposition 2.4.6 *Soit $(u_n(x))$ une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann. On suppose qu'elle converge uniformément sur un intervalle $[a, b]$ vers une fonction $l(x)$. Alors $l(x)$ est aussi intégrable au sens de Riemann et*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b u_n(x)\,dx = \int_a^b l(x)\,dx$$

Démonstration : On admettra la première affirmation. Pour la deuxième, on a

$$\begin{aligned}|\int_a^b u_n(x)\,dx - \int_a^b l(x)\,dx| &= |\int_a^b (u_n(x)-l(x))\;dx| \leq \int_a^b |u_n(x)-l(x)|\,dx \\ &\leq \int_a^b \sup_{[a,b]}|u_n(x)-l(x)|\,dx \leq (b-a)\;\sup_{[a,b]}|u_n(x)-l(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

■

Exemple 2.4.7 *Nous avons déjà vu à l'occasion de l'étude de la série géométrique que* $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, *avec une convergence uniforme sur les intervalles* $[-a, a],\ 0 < a < 1$.
Soit $t \in [0, a]$. *Alors*

$$\int_0^t \frac{dx}{1-x} = \lim_{n\to+\infty}\int_0^t \sum_{k=0}^n x^k\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n \int_0^t x^k\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^n \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

$$\Longrightarrow \ln(1-t) = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{k+1}}{k+1}$$

2.4.8 Convergence uniforme et dérivation

Proposition 2.4.9 *Soit $(u_n(x))$ une suite de fonctions dérivables telles que $(u_n(x_0))$ pour un certain $x_0 \in I$ (où I est un intervalle borné), et $(u_n'(x))$ converge uniformément sur I vers une fonction g. Alors $(u_n(x))$ converge uniformément sur I vers une fonction dérivable f, de plus $f' = g$.*

Démonstration : Nous allons utiliser le Théorème 2 pour montrer que $(u_n(x))$ converge uniformément. D'après le cours sur l'intégration, on a

$$u_n(x) = u_n(x_0) + \int_{x_0}^x u_n'(t)\,dt.$$

D'où

$$|u_p(x) - u_q(x)| \leq |u_p(x_0) - u_q(x_0)| + |x - x_0| \sup_{[x_0,x]} |u'_p(t) - u'_q(t)|$$

$$\Longrightarrow \sup_{x \in I} |u_p(x) - u_q(x)| \leq |u_p(x_0) - u_q(x_0)| + \mathrm{mes}(I) \sup_{t \in I} |u'_p(t) - u'_q(t)|$$

où $\mathrm{mes}(I)$ est la longueur de I. Les deux termes majorants tendent vers 0 quand $p, q \to +\infty$ d'après les hypothèses. ■

Exemple 2.4.10 *On reprend toujours l'exemple de la série géométrique. Toutes les hypothèses sont vérifiées. Donc on aura*

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n.$$