Chapitre 3

Séries entières

3.1 Généralités

Définition 3.1.1 *On appelle série entière toute série de la forme $\sum c_n (x-a)^n$, où $c_n \in \mathbb{R}$ est un coefficient de la série, et a le centre. On définit aussi les séries entières complexes où les coefficients, le centre et la variable sont complexes $\sum c_n (z-a)^n$.*

Notons le terme général d'une série entière par $u_n(x) = c_n (x-a)^n$. Il est clair que la série converge pour $x = a$ puisque tous les termes sont nuls à partir de $n = 1$. D'autre part comme

$$|u_n(x)| = |u_n(x_0)| \frac{|x-a|^n}{|x_0-a|^n}$$

alors

- si $\dfrac{|x-a|}{|x_0-a|} \leq 1$, on aura $|u_n(x)| \leq |u_n(x_0)|$ et donc la convergence absolue au point x_0 implique la convergence absolue au point x grâce à la comparaison,
- si $\dfrac{|x-a|}{|x_0-a|} \geq 1$, on aura $|u_n(x)| \geq |u_n(x_0)|$ et donc la divergence absolue en x_0 implique la divergence absolue en x toujours grâce à la comparaison.

Ceci montre bien que le domaine de convergence absolue est un intervalle centré sur a, réduit éventuellement au singleton $\{a\}$. Nous allons décrire les méthodes permettant de déterminer cet intervalle.

Notion de rayon de convergence

Appliquons d'abord le critère de d'Alembert (absolu)

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x-a| \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$$

Supposons que la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R_A$ existe. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{|x-a|}{R_A}$$

Donc d'après le critère de d'Alembert

- la série converge absolument pour $|x-a| < R_A$, c'est-à-dire dans $]a - R_A, a + R_A[$,
- et la série diverge pour $|x - a| > R_A$.

Nous allons appeler (provisoirement) la limite R_A le rayon de convergence (selon le critère de d'Alembert).

Appliquons maintenant le critère de Cauchy : $|u_n(x)|^{1/n} = |x - a|\ |c_n|^{1/n}$, et supposons l'existence de la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} |c_n|^{-1/n} = R_C$. Donc d'après le critère de Cauchy

- la série converge absolument pour $|x-a| < R_C$, c'est-à-dire dans $]a - R_C, a + R_C[$,
- et la série diverge pour $|x - a| > R_C$.

On appellera symétriquement R_C le rayon de convergence (selon le critère de Cauchy).

Proposition 3.1.2 *Les deux rayons de convergence sont identiques i.e, $R_A = R_C$.*

Démonstration : Supposons, par exemple, $R_C < R_A$. Il est clair qu'il existe au moins un x tel que $R_C < |x - a| < R_A$ (il en existerait même une infinité). Mais alors la série convergerait en ce point x d'après le critère de d'Alembert, et divergerait au même point x selon le critère de Cauchy. C'est une contradiction. Donc une inégalité stricte entre les deux rayons est impossible. ■

A partir de maintenant on parlera de rayon de convergence calculé avec l'une ou l'autre des deux formules.

Exemple 3.1.3 *Étudions la série entière $\sum \frac{x^n}{n}$. Dans ce cas $c_n = \frac{1}{n}$ et le centre $a = 0$, d'où*

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

D'où le rayon de convergence $R = 1$. Donc la série converge absolument dans $]-1, 1[$ et diverge dans $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$. Pour les deux points 1 et -1, on a pour $x = 1$ la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge et pour $x = -1$ la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge sans être absolument convergente (semi-convergence). Ainsi le domaine de convergence simple absolue est $]-1, 1[$, par ailleurs le domaine de convergence simple (tout court) est $[-1, 1[$.

Remarque 3.1.4 *Il peut arriver que dans les deux formules du rayon de convergence la limite soit infinie. Cela voudra dire que la série est partout absolument convergente. On dira par convention que le rayon est infini, $R = \infty$. Si $R = 0$ la série ne converge qu'au point $x = a$, comme dans l'exemple $\sum n!x^n$ qui ne converge qu'en $x = 0$.*

Question : Que peut-on dire si la suite $\left(|c_n|^{1/n}\right)$ est bornée, mais que $\lim\limits_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n}$ n'existe pas ?

La réponse à cette question sera donnée après ce bref rappel sur les notions de limite supérieure et limite inférieure.

Rappel Soit (α_n) une suite réelle majorée. Sa limite supérieure est définie par

$$\overline{\lim}\,\alpha_n = \inf_{n\geq 0}\left(\sup_{k\geq n}\alpha_k\right)$$

C'est la plus grande limite d'une sous-suite convergente. Si elle est minorée, sa limite inférieure est définie par

$$\underline{\lim}\,\alpha_n = \sup_{n\geq 0}\left(\inf_{k\geq n}\alpha_k\right)$$

Un exemple simple est donné par $\alpha_n = (-1)^n$, où

$$\underline{\lim}\,(-1)^n = -1 \qquad \text{et} \qquad \overline{\lim}\,(-1)^n = 1$$

Par convention $\overline{\lim}\,\alpha_n = +\infty$ si la suite n'est pas majorée et $\underline{\lim}\,\alpha_n = -\infty$ si elle n'est pas minorée.

Proposition 3.1.5 *Si la suite $\left(|c_n|^{1/n}\right)$ est majorée, alors le rayon de convergence est donné par la formule*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}\,|c_n|^{1/n} = \inf_{n\geq 0}\left(\sup_{k\geq n}|c_k|^{1/k}\right)$$

Démonstration : D'après la caractérisation de la borne inférieure (se rapporter au cours d'Analyse 1) on peut écrire

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \frac{1}{R}\leq \sup_{k\geq n_\varepsilon}|c_k|^{1/k} < \frac{1}{R}+\varepsilon \tag{3.1}$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon>0,\quad \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N},\quad \forall k\geq n_\varepsilon \qquad |c_k| < \left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)^k \tag{3.2}$$

$$\Rightarrow |c_k||x-a|^k \leq \left(|x-a|\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)\right)^k$$

- Supposons que $|x-a|<R$. Alors $|x-a|\left(\frac{1}{R}+\varepsilon\right)<1$ avec un choix judicieux de ε. Il suffit que
$$\varepsilon < \frac{1}{|x-a|}-\frac{1}{R} = \frac{R-|x-a|}{R|x-a|}.$$
La série convergera alors absolument car son terme général est majoré (à partir de n_ε) par celui d'une série géométrique convergente.

- Maintenant si $|x-a|>R$, alors remarquons d'abord que l'inégalité de gauche dans (3.1) nous fournit une infinité de k pour lesquels $|c_k|\geq R^{-k}$, ce qui donne à son tour (toujours pour cette infinité de k)
$$|c_k||x-a|^k \geq \left(\frac{|x-a|}{R}\right)^k.$$

Cette inégalité implique que la série diverge puisqu'elle est minorée par une série géométrique divergente car $\dfrac{|x-a|}{R} > 1$.

■

Voici un exemple simple.

Exemple 3.1.6 *Déterminons le rayon de convergence de la série entière*

$$\sum x^{k^2} = 1 + x + x^4 + x^9 + x^{16} + \cdots$$

Ici

$$c_n = \begin{cases} 1 & si \quad n = k^2 \\ 0 & si \quad n \neq k^2 \end{cases} \Rightarrow (pour\, n \geq 1)\; c_n^{1/n} = \begin{cases} 1 & si \quad n = k^2 \\ 0 & si \quad n \neq k^2 \end{cases} \Rightarrow \overline{\lim}\, c_n^{1/n} = 1$$

Le rayon de convergence est $R = 1$.

Formule de Cauchy-Hadamard pour le rayon de convergence d'une série entière

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}\, |c_n|^{1/n}$$

La série réelle (resp. complexe) converge absolument pour $|x-a| < R$ (resp. $|z-a| < R$), et diverge pour $|x-a| > R$ (resp. $|z-a| > R$).

3.2 Propriétés de la convergence

La proposition suivante est valable aussi bien dans le cas réel que complexe. Nous allons la présenter dans le cas complexe. Rappelons la définition d'un disque ouvert de centre a et de rayon R

$$D(a,R) = \{z \in \mathbb{C} \,/ |z-a| < R\}$$

Le disque fermé est

$$\overline{D(a,R)} = \{z \in \mathbb{C} \,/ |z-a| \leq R\}$$

Proposition 3.2.1 *Soit* $\sum c_n (z-a)^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \neq 0$. *Alors* $\forall r > 0$ *tel que* $r < R$, *la série converge normalement dans le disque fermé* $\overline{D(a,r)}$.

Démonstration : On a dans $\overline{D(a,r)}$

$$|c_n (z-a)^n| \leq |c_n| r^n \Longrightarrow \sup_{\overline{D(a,r)}} |c_n (z-a)^n| \leq |c_n| r^n$$

Reprenons l'inégalité (3.2)

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_\varepsilon \qquad |c_n| < \left(\frac{1}{R} + \varepsilon\right)^n$$

et choisissons $\varepsilon = \dfrac{R-r}{2rR}$, alors si $n \geq n_\varepsilon$ on aura

$$\sup_{D(a,r)} |c_n (z-a)^n| \leq \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right)^n$$

La série majorante est géométrique convergente puisque $\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{r}{R}\right) < 1$. ■

<u>Conséquence 1</u> : La convergence est uniforme dans tout disque fermé $\overline{D(a,r)} \subset D(a,R)$. Dans le cas réel, la convergence est normale (et donc uniforme) dans tout intervalle fermé $[a-r, a+r] \subset]a-R, a+R[$. On pourra par exemple intégrer terme à terme sur un tel intervalle fermé.

Exemple 3.2.2 *On sait déjà que* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ *et ce* $\forall x \in]-1, 1[$. *En fixant* x, *il existera* $r > 0$ *tel que* $x \in [-r, r] \subset]-1, 1[$, *d'où*

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

chose qui donne

$$\ln(1-x) = -\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m}.$$

Proposition 3.2.3 *Soit* $\sum c_n (x-a)^n$ *une série entière de rayon de convergence* $R \neq 0$. *Alors la série des dérivées* $\sum n c_n (x-a)^{n-1}$ *a le même rayon de convergence que la série originale.*

Démonstration : On peut ré-indexer la série des dérivées en posant $n = m+1$ et obtenir (pour la série des dérivées) $\sum (m+1) c_{m+1} x^m$. On a

$$((m+1)|c_{m+1}|)^{1/m} = (m+1)^{1/m} \left(|c_{m+1}|^{\frac{1}{m+1}}\right)^{\frac{m+1}{m}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1/R$$

puisque $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (m+1)^{1/m} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln(m+1)}{m}} = 1$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |c_{m+1}|^{\frac{1}{m+1}} = 1/R$ par la formule de Cauchy-Hadamard. Dans cette démonstration, nous avons supposé que les limites existent. Le lecteur pourra reprendre, à titre d'exercice, cette démonstration avec la limite supérieure. ■

Conséquence 2 : On peut, dans son domaine de convergence absolue, dériver une série entière terme à terme. Ainsi, la somme d'une série entière est une fonction de classe C^∞.

Exemple 3.2.4 *1. Notons* $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ *dont le rayon de convergence est* $R = \infty$.

Daprès ce qui précède, on peut écrire

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{x^m}{m!} = S(x)$$

On reconnaît la définition de la fonction exponentielle, donc

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

2. On se propose de calculer la somme $f(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$. *Il est facile d'obtenir le rayon de convergence par la formule de d'Alembert,* $R = 1$. *Le domaine de convergence absolue est donc* $]-1, 1[$. *On dérive deux fois et on a*

$$f'(x) = \sum_{n\geq 2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)} \Rightarrow f''(x) = \sum_{n\geq 2} x^{n-2} = \frac{1}{1-x}.$$

Une première intégration donne

$$f'(x) = -\ln(1-x)$$

puisque $f'(0) = 0$. *Maintenant une deuxième intégration donne*

$$f(x) = (1-x)\ln(1-x) + x$$

puisque $f(0) = 0$.

3. Soit à calculer $g(x) = \sum_{n\geq 1} n^2 x^n$. *Là aussi le rayon de convergence est* $R = 1$. *Partons de la somme géométrique* $\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$. *En dérivant d'abord, puis en multipliant par* x *on aura*

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^n$$

On obtient la somme désirée en répétant ces deux opérations

$$g(x) = x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

3.3 Fonctions analytiques

Définition 3.3.1 *On dit qu'une fonction f (réelle ou complexe) est analytique au point a, s'il existe un voisinage de a dans lequel $f(x)$ est la somme d'une série entière centrée en a. On dit qu'elle est développable en série entière centrée en a. Aussi, f est analytique dans un domaine $\mathscr{D}$ si elle est analytique en chaque point de $\mathscr{D}$.*

Exemple 3.3.2 1. *La fonction de variable complexe $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ est analytique au point 0, car dans le disque ouvert $D(0,1)$ on a $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$.*

2. *La fonction réelle $g(x) = \dfrac{1}{x}$ n'est pas analytique en 0 puisque si $g(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$ dans un voisinage de 0, alors $\lim_{x\to 0} g(x) = c_0$; or $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$. Par contre cette fonction est analytique en tout point $a \neq 0$. En effet,*

$$g(x) = \frac{1}{x-a+a} = \frac{1}{a\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)} = \frac{1}{a}\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{a^n}(x-a)^n .$$

Ce développement est valable si $|\dfrac{x-a}{a}| < 1$.

<u>Propriétés</u>

- Si une fonction f est analytique au point a, alors dans un voisinage de a elle est C^∞. La réciproque est FAUSSE ! Méditer sur l'exemple suivant :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

- Si f est analytique en a i.e, $f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n (x-a)^n$, alors

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Ceci provient du fait que

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}$$

- Si f et g sont analytiques alors $\lambda f + \mu g$, $f.g$ sont analytiques, et aussi f/g est analytique en a si $g(a) \neq 0$.

3.4 Fonctions et séries remarquables

Nous allons donner une liste (non exhaustive) de fonctions usuelles et leurs représentations par des séries entières.

(a) L'exponentielle : On définit la fonction exponentielle népérienne par

$$e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n.$$

A l'aide de la formule de d'Alembert, on montre que le rayon de convergence est $R = \infty$. On peut démontrer à partir de cette définition, l'importante propriété $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \times e^{z_2}$. Partons du membre de droite

$$e^{z_1} \times e^{z_2} = \left(\sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} z_1^p\right) \times \left(\sum_{q\geq 0} \frac{1}{q!} z_2^q\right) = \sum_{p,q\geq 0} \frac{1}{p!q!} z_1^p z_2^q = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{p+q=n} \frac{1}{p!q!} z_1^p z_2^q\right)$$

On reconnaît dans la dernière somme le développement du binôme de Newton $\displaystyle\sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!q!} z_1^p z_2^q = (z_1+z_2)^n$. Donc

$$e^{z_1} \times e^{z_2} = \sum_{n\geq 0} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}.$$

(b) Fonctions trigonométriques circulaires : On définit les fonctions cosinus et sinus circulaires par

$$\cos t = \Re\left(e^{it}\right) \qquad , \qquad \sin t = \Im\left(e^{it}\right)$$

D'après la série de l'exponentielle

$$e^{it} = \sum_{n\geq 0} \frac{i^n t^n}{n!} = \sum_{k\geq 0} \frac{i^{2k} t^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{i^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

D'où puisque $i^2 = -1$

$$\cos t = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \qquad , \qquad \sin t = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(c) Fonctions hyperboliques : Les fonctions cosinus et sinus hyperboliques sont définies par

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \qquad , \qquad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

On laisse le soin au lecteur de vérifier que

$$\cosh(it) = \cos t \qquad \text{et} \qquad \sinh(it) = i \sin t$$

(d) La fonction $(1-x)^{-\alpha}$: avec $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculons la dérivée k-ième

$$\left[(1-x)^{-\alpha}\right]^{(k)} = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1)(1-x)^{-\alpha-k}$$

Introduisons la notation de Pochhammer $(\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+k-1)$. Alors d'après l'une des propriétés des fonctions analytiques citées plus haut, on a

$$(1-x)^{-\alpha} = \sum_{k\geq 0} \frac{(\alpha)_k}{k!} x^k$$

où $x \in]-1,1[$ car le rayon de convergence est $R=1$. Voici quelques cas particuliers importants de cette dernière formule.

- On prend $\alpha = 1$ et on remplace x par $-x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^{2n} \xRightarrow[\text{par intégration}]{} \arctan x = \sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- On prend $\alpha = 1$, ensuite une intégration donne

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \Rightarrow \ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n}$$

En changeant x en $-x$ on aura

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

En faisant la différence on aura

$$\frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right] = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \text{argth} x = \sum_{n\geq 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

- On prend $\alpha = 1/2$. Remarquons d'abord que

$$(1/2)_n = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2} = \frac{1}{2^n}\frac{1.2.3.4.5\cdots(2n)}{2.4.6\cdots(2n)} = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$$

D'où

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n$$

puis par intégration

$$\sqrt{1-x} = 1 - \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!}x^{n+1}$$

En changeant x en x^2 on obtient

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n\geq 0}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$$

puis par intégration

$$\arcsin x = \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Enfin en changeant x en $-x^2$ on arrive à

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \xrightarrow[\text{par intégration}]{} \text{argsh} x = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Nous allons résumer ces dernières formules dans le tableau suivant.

La fonction	Sa représentation en série entière centrée en 0	Rayon de convergence R
e^z	$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$	$R = \infty$
$\sin x$	$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$R = \infty$
$\cos x$	$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$R = \infty$
$\sinh x$	$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$R = \infty$
$\cosh x$	$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$	$R = \infty$
$(1-x)^{-\alpha}$	$\sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n}{n!} x^n$	$R = 1$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n\geq 0} x^n$	$R = 1$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$	$R = 1$
$\ln(1-x)$	$-\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$	$R = 1$
$\ln(1+x)$	$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$	$R = 1$
$\text{argth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$	$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$	$R = 1$
$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$	$\sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^n$	$R = 1$
$\sqrt{1-x}$	$1 - \sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n!(n+1)!} x^{n+1}$	$R = 1$

La fonction	Sa représentation en série entière centrée en 0	Rayon de convergence R
$\arcsin x$	$\sum_{n\geq 0} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$	$R=1$
$\mathrm{argsh} x$	$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$	$R=1$
$\arctan x$	$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$	$R=1$

3.5 Quelques applications des séries entières

Nous allons montrer, à travers deux exemples, comment les séries entières permettent de résoudre des problèmes linéaires.

3.5.1 Équations de récurrence

Le premier exemple, concerne la suite de Fibonacci $(c_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} c_{n+2} = c_{n+1} + c_n \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ c_0 = 1 \quad , \quad c_1 = 1 \end{cases}$$

C'est une suite d'entiers $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$, où chaque terme est la somme des deux qui le précédent. Il s'agit de trouver l'expression des c_n en fonction de n. La méthode qui sera exposée est désignée parfois sous l'appellation "*méthode des fonctions génératrices*". On considère que les c_n sont les coefficients d'une série entière représentant une fonction analytique dans un voisinage de 0. La récurrence servira à déterminer cette fonction, puis on développe cette dernière en série entière et on déduit les c_n grâce à l'unicité des coefficients. Posons donc

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n$$

On remplace c_n par $c_{n+2} - c_{n+1}$ en utilisant la récurrence, et on a

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \left(c_{n+2} - c_{n+1}\right) x^n = \sum_{n\geq 2} c_n x^{n-2} - \sum_{n\geq 1} c_n x^{n-1}$$

après les changements d'indices qui s'imposent. On multiplie les deux membres de l'équation précédente par x^2

$$x^2 f(x) = \sum_{n\geq 2} c_n x^n - x \sum_{n\geq 1} c_n x^n = [f(x) - (c_0 + c_1 x)] - x\,[f(x) - c_0]$$

D'où

$$\left(x^2 + x - 1\right) f(x) = -1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}$$

Le dénominateur est un polynôme du second degré qui admet deux racines distinctes ϕ et $-1/\phi$ où $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ s'appelle le "*le nombre d'Or*". Ainsi

$$f(x) = \frac{1}{(1-x/\phi)(1+x\phi)} = \frac{1}{\phi+1/\phi}\left(\frac{1/\phi}{1-x/\phi} + \frac{\phi}{1+x\phi}\right)$$

Remarquons en passant que les deux fractions simples sont développables en séries entières centrées en 0 à condition que $|x| < \min(\phi, 1/\phi) = \phi$. Ceci montrer qu'il existe bien un voisinage de 0, en l'occurrence l'intervalle ouvert $]-\phi, \phi[$ dans lequel ces calculs sont valides. En utilisant la série géométrique on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n\geq 0} x^n/\phi^{n+1} + \sum_{n\geq 0}(-1)^n x^n \phi^{n+1}\right)$$

D'où enfin par l'unicité des coefficients d'une série entière

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(1/\phi^{n+1} + (-1)^n\phi^{n+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

3.5.2 Équations différentielles

Nous allons examiner l'équation différentielle linéaire suivante :

$$x^2y''(x) + x(x+1)y'(x) - y(x) = 0.$$

On se demande si elle admet des solutions développables en séries entières centrées en 0 avec un rayon de convergence non nul. Supposons que $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est une telle solution. Alors

$$x^2y''(x) = \sum_{n\geq 0} n(n-1)a_n x^n \qquad \text{et} \qquad xy'(x) = \sum_{n\geq 0} n a_n x^n$$

En remplaçant dans l'équation on obtient

$$\sum_{n\geq 0}[n(n-1)+n-1]a_n x^n + \sum_{n\geq 0} n a_n x^{n+1} = 0$$

ou encore

$$\sum_{n\geq 0}(n-1)(n+1)a_n x^n + \sum_{n\geq 1}(n-1)a_{n-1}x^n = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (n-1)[(n+1)a_n + a_{n-1}] = 0, & \forall n \geq 1 \\ -a_0 = 0 \end{cases}$$

Pour $n = 1$, l'équation de récurrence entre a_1 et a_0 est vérifiée quelque soit la valeur de a_1, ce qui veut dire que a_1 restera indéterminé. Par contre, à partir de $n = 2$ tous les a_n se calculent à l'aide de a_1. En effet pour $n \geq 2$

$$a_n = \frac{-1}{n+1}a_{n-1} = \frac{(-1)(-1)}{(n+1)(n)}a_{n-2} = \cdots = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}(2a_1)$$

La série solution est donc

$$y(x) = 2a_1 \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} x^n = \frac{2a_1}{x} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{2a_1}{x} \sum_{m\geq 2} \frac{(-1)^m}{m!} x^m$$

et enfin

$$y(x) = 2a_1 \frac{e^{-x} - 1 + x}{x}$$

avec une rayon de convergence $R = \infty$.

3.6 Compléments

Nous allons donner sans démonstration deux résultats souvent utiles pour trouver des sommes de séries.

Théorème 5 *(Théorème d'Abel) Soit* $F(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n, \quad |x| < 1$. *Supposons que la série numérique* $\sum_{n\geq 0} c_n$ *converge. Alors*

$$\lim_{x\to 1^-} F(x) \text{ existe} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 1^-} F(x) = \sum_{n\geq 0} c_n.$$

La "réciproque" de ce théorème est l'objet du

Théorème 6 *(Théorème de Tauber) Soit* $F(x) = \sum_{n\geq 0} c_n x^n, \quad |x| < 1$. *Supposons que* $\lim_{x\to 1^-} F(x)$ *existe et que* $\lim_{n\to +\infty} n c_n = 0$. *Alors*

$$\text{la série numérique } \sum_{n\geq 0} c_n \text{ converge} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geq 0} c_n = \lim_{x\to 1^-} F(x).$$

Exemple 3.6.1 *Montrons que*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$$

Partons du développement suivant

$$\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

où $R = 1$ *et* $c_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. *La convergence de la série numérique* $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *est assurée par le critère d'Abel. Maintenant le théorème d'Abel donne le résultat escompté puisque* $\lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln 2$.