

Chapitre 4

Séries de Fourier

4.1 Définitions - Généralités

Définition 4.1.1 On appelle série de Fourier toute série de la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (\text{Forme réelle})$$

ou

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad (\text{Forme complexe})$$

On peut passer d'une forme à l'autre par les formules d'Euler

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} (e^{i\theta} - e^{-i\theta})$$

En effet,

- Partons de la forme réelle

$$\begin{aligned} & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-inx} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \left(\frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} \right) e^{inx} \end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} c_0 = \frac{a_0}{2} \\ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \end{cases}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \forall n \geq 1.$$

- Réciproquement, si on démarre de la forme complexe

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{inx} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} e^{-inx} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n (\cos nx + i \sin nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (\cos nx - i \sin nx) \end{aligned}$$

alors

$$a_0 = 2c_0 \quad , \quad a_n = c_n + c_{-n} \quad , \quad b_n = i(c_n - c_{-n}).$$

La convergence signifie l'existence de la limite suivante

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right\}$$

ou bien pour la forme complexe

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\{ \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikx} \right\}$$

Si une série de Fourier converge en un point x_0 , alors elle convergera manifestement en tout point de la forme $x_0 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ puisque les fonction cosinus et sinus sont 2π -périodiques. Ainsi le domaine de convergence simple d'une série de Fourier est un sous-ensemble \mathcal{D} de \mathbb{R} invariants par des translations de 2π , c'est-à-dire

$$\text{si } x_0 \in \mathcal{D}, \text{ alors } x_0 + 2\pi k \in \mathcal{D}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Comme première conséquence, si $f(x)$ est la somme (simple) d'une série de Fourier, alors sur son domaine \mathcal{D} cette fonction est 2π -périodique. On peut étendre cette situation au cas de la T -périodicité où $T \in \mathbb{R}^{+*}$ par :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \quad \text{ou bien} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega x}$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En théorie du signal, cette constante ω s'appelle *pulsation* et $\nu = \frac{1}{T}$ la *fréquence*.

Remarque 4.1.2 Soit $f(x)$ la somme d'une série de Fourier (convergente). Alors

- f est impaire si et seulement si $a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$ (dans la série il n'y a que des sinus),
- et f est paire si et seulement si $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$ (dans la série il n'y a que des cosinus).

4.2 Conditions suffisantes de convergence

Proposition 4.2.1 Si $\sum_{n \geq 1} |a_n| + |b_n|$ converge, alors la série de Fourier converge normalement sur \mathbb{R} .

Démonstration : C'est une conséquence du fait que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|$$

et donc

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |a_n \cos nx + b_n \sin nx| \leq |a_n| + |b_n|.$$

■

Proposition 4.2.2 Si les suites des coefficients (a_n) et (b_n) sont positives, décroissantes et tendent vers 0, alors par le critère d'Abel on peut affirmer que la série de Fourier converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, et uniformément (selon le critère d'Abel uniforme) sur les intervalles de la forme $[\alpha, 2\pi - \alpha] \subset]0, 2\pi[$ et de leurs 2π -translatés.

Démonstration : Dans les hypothèses il y a déjà les conditions que doit vérifier la suite " (a_n) " du critère d'Abel. Il reste la condition sur la suite " (b_n) ". Ici ce sont les suites $(\cos nx)$ et $(\sin nx)$. Nous allons les traiter en même temps. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos kx + i \sum_{k=0}^n \sin kx &= \sum_{k=0}^n e^{ikx} = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = \\ &= \frac{e^{i(n+1)x/2} \sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{e^{ix/2} \sin(x/2)} = e^{inx/2} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin(x/2)} \end{aligned} \quad (4.1)$$

D'où

$$\left| \sum_{k=0}^n \cos kx + i \sum_{k=0}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}.$$

Or

$$\left| \sum_{k=0}^n \cos kx + i \sum_{k=0}^n \sin kx \right| = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^n \cos kx \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^n \sin kx \right)^2} \geq \begin{cases} \left| \sum_{k=0}^n \cos kx \right| \\ \left| \sum_{k=0}^n \sin kx \right| \end{cases}$$

Et donc

$$\left| \sum_{k=0}^n \cos kx \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|} \quad \text{et} \quad \left| \sum_{k=0}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

De là, la convergence simple aura lieu chaque fois que $\sin(x/2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2m\pi$ $\forall m \in \mathbb{Z}$. Et pour la convergence uniforme il faudra que la fonction $\frac{1}{|\sin(x/2)|}$ reste

bornée. Pour ce faire on doit prendre x dans un domaine loin des singularités $2m\pi$, par exemple $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha] \subset]0, 2\pi[$ ou bien dans un translaté (par un $2m\pi$) d'un tel intervalle. ■

Exemple 4.2.3 La série de Fourier $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^2}$ converge normalement (donc uniformément) sur \mathbb{R} puisque $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\sin nx|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Par contre la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ converge d'abord simplement sur \mathbb{R} , par le critère d'Abel aux points $x \neq 2m\pi$ et elle converge au points $x = 2m\pi$ puisqu'en ces points le terme général est nul; ne converge pas normalement sur \mathbb{R} car $\sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|\sin nx|}{n} = \frac{1}{n}$ est une série numérique divergente; et enfin il y a convergence uniforme sur des intervalles de la forme $[2m\pi + \alpha, 2(m+1)\pi - \alpha]$ avec $0 < \alpha < 2\pi$.

4.3 Théorème de Dirichlet-Jordan

4.3.1 Préliminaires

Étant donnée une fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$, sous quelles conditions on peut la considérer comme somme d'une série de Fourier ?

- D'abord elle doit être périodique.
- Si la réponse est oui, alors les coefficients a_n et b_n sont complètement déterminés par f (est donc uniques). En effet, supposons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

et supposons qu'il est possible d'invertir sommation est intégration. Alors

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx &= \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx \right) \end{aligned}$$

On rappelle ici les formules bien connues en trigonométrie

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \quad \text{et} \quad \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)].$$

Après, une simple intégration donne

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx \, dx = 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \pi & \text{si } k = n \end{cases}.$$

On en déduit alors

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \forall n \geq 0.$$

Le même travail avec $f(x) \sin nx$ aboutit à

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad \forall n \geq 1.$$

- Pour pouvoir effectuer les précédents calculs, il faut au moins supposer que f est absolument intégrable sur $[-\pi, \pi]$ i.e, $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx$ existe.

4.3.2 Quelques définitions

1. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}) est dite *continue par morceaux* sur un intervalle $[a, b]$, s'il existe un nombre fini de points $x_1 < x_2 < \dots < x_p$ de $[a, b]$ tels que sur chaque sous-intervalle $]a, x_1[$, $]x_i, x_{i+1}[$, $]x_p, b[$ elle est continue, avec en plus

$$f(x_i^-) = \lim_{x \nearrow x_i} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_i^+) = \lim_{x \searrow x_i} f(x)$$

existent, ainsi que $f(a^+)$ et $f(b^-)$. On dit dans ce cas que les points x_i sont des discontinuités de première espèce (en ces points il y a limite à gauche et limite à droite). Le nombre réel

$$\sigma_i = f(x_i^+) - f(x_i^-)$$

s'appelle *saut* de f au point x_i . Il peut être positif ou négatif. En voici un exemple

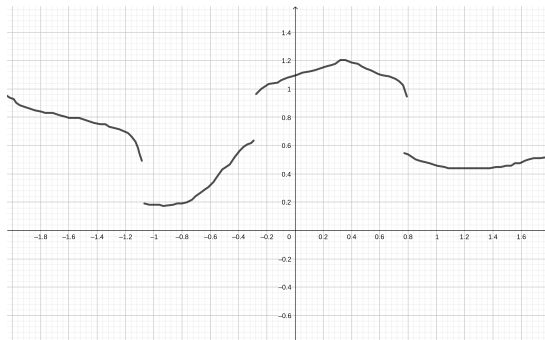


FIGURE 4.1 – Graphe d'une fonction continue par morceaux

2. Une fonction f est dite C^1 par morceaux dans l'intervalle $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_q$ telle que sur chaque intervalle $]\bar{x}_j, \bar{x}_{j+1}[$ f est C^1 . De plus f et f' sont continues par morceaux. Notons que la subdivision qui définit le caractère C^1 par morceaux et celle qui définit la continuité par morceaux ne sont pas forcément les mêmes.

Exemple 4.3.3 On appelle fonction mantisse la fonction définie par

$$m(x) = x - [x]$$

où $[x]$ est la partie entière de x . Par exemple sur l'intervalle $[-1, 2]$ on a

$$m(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Voici une partie du graphe de $m(x)$:

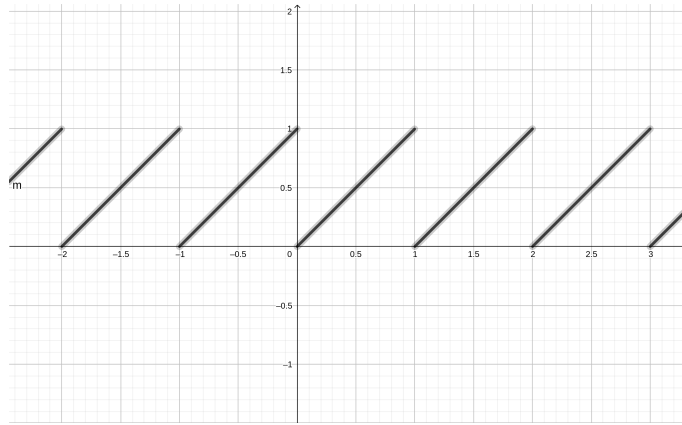


FIGURE 4.2 – Graphe de la fonction mantisse

Il est clair que c'est une fonction périodique de période $T = 1$. Aussi elle est C^1 par morceaux.

Proposition 4.3.4 Si f est C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ alors pour ses coefficients de Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

Démonstration : Soit $-\pi < x_1 < x_2 < \dots < x_p < \pi$ et on peut étendre les indices avec $x_0 = -\pi$ et $x_{p+1} = \pi$. Avec cette subdivision on exprime aussi bien le caractère C^1 par morceaux que la continuité par morceaux. Faisons la démonstration du résultat pour a_n , il en sera de même pour les b_n . Il est facile de voir qu'une fonction C^1 par morceaux est bornée (en fait continue par morceaux suffit), et donc

$$\exists M > 0, \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

On peut écrire alors

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{p+1} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cos nx \, dx.$$

Prenons une de ces intégrales

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cos nx \, dx &= \left[f(x) \frac{\sin nx}{n} \right]_{x_{j-1}}^{x_j} - \frac{1}{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x) \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{n} [f(x_j^-) \sin nx_j - f(x_{j-1}^+) \sin nx_{j-1}] - \frac{1}{n} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(x) \sin nx \, dx \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cos nx \, dx \right| &\leq \frac{1}{n} \left\{ |f(x_j^-)| + |f(x_{j-1}^+)| + \int_{x_{j-1}}^{x_j} |f'(x)| \, dx \right\} \\ \implies |a_n| &\leq \frac{1}{n\pi} \left\{ 2M(p+1) + \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)| \, dx \right\} \end{aligned}$$

et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| = 0$. Idem pour b_n . ■

Remarque 4.3.5 Dans la démonstration de ce résultat nous n'avons à aucun moment utilisé le fait que $n \in \mathbb{N}$. On peut très bien remplacer n par un paramètre réel $\lambda > 0$ et le résultat restera vrai.

Corollaire 4.3.6 Si f est continue par morceaux sur $[-\pi, \pi]$, alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0.$$

Démonstration : Contrairement à la proposition précédente où f était C^1 par morceaux, ici elle n'est que continue par morceaux. La stratégie est d'approcher uniformément f par une famille de polynômes (qui sont C^1 partout) et d'utiliser la proposition précédente avec ces polynômes. Soit $-\pi = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_p < x_{p+1} = \pi$ une subdivision avec laquelle on exprime la continuité par morceaux. Mettons-nous dans l'intervalle $]x_{j-1}, x_j[$. Alors f se prolonge par continuité sur $[x_{j-1}, x_j]$ et le prolongement est donné par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x_{j-1}^+) & \text{si } x = x_{j-1} \\ f(x) & \text{si } x_{j-1} < x < x_j \\ f(x_j^-) & \text{si } x = x_j \end{cases}$$

On admettra le résultat suivant : $\forall \varepsilon > 0$, il existe une famille de polynômes $p_{f,\varepsilon,j}(x)$ dépendants de f , ε et j telle que

$$\sup_{[x_{j-1}, x_j]} |\tilde{f}(x) - p_{f,\varepsilon,j}(x)| \leq \varepsilon.$$

Ce genre de résultat, dû entre autres à Weierstrass, sera amplement discuté dans le cours de Topologie. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cos nx \, dx &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \tilde{f}(x) \cos nx \, dx = \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(\tilde{f}(x) - p_{f,\varepsilon,j}(x) \right) \cos nx \, dx + \int_{x_{j-1}}^{x_j} p_{f,\varepsilon,j}(x) \cos nx \, dx \\ \implies \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cos nx \, dx \right| &\leq (x_j - x_{j-1}) \sup_{[x_{j-1}, x_j]} |\tilde{f}(x) - p_{f,\varepsilon,j}(x)| + \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} p_{f,\varepsilon,j}(x) \cos nx \, dx \right| \\ \implies \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \cos nx \, dx \right| &\leq 2\pi\varepsilon + \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} p_{f,\varepsilon,j}(x) \cos nx \, dx \right| \end{aligned}$$

et donc

$$|a_n| \leq 2(p+1)\varepsilon + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{p+1} \left| \int_{x_{j-1}}^{x_j} p_{f,\varepsilon,j}(x) \cos nx \, dx \right|$$

En passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| \leq 2(p+1)\varepsilon$$

puisque les intégrales dans la somme précédente tendent vers 0 grâce à la proposition précédente. Comme ε est quelconque, alors la limite des a_n est forcément nulle. Idem pour les b_n . ■

Remarque 4.3.7 Nous avons déjà signalé que si une fonction est T -périodique définie sur \mathbb{R} , alors sa série de Fourier est de la forme

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$$

où $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dans ce cas les coefficients de Fourier sont donnés par

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos n\omega x \, dx \quad , \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin n\omega x \, dx$$

et dans la forme complexe

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} \, dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Avant d'énoncer le théorème de Dirichlet, nous donnons un lemme général utile dans beaucoup de situations.

Lemme 4.3.8 *Si g est une fonction 2π -périodique intégrable, alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} g(\tau) d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) d\tau$$

Démonstration : A l'aide de la relation de Chasles on peut écrire

$$\int_{-\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} g(\tau) d\tau = \int_{-\pi+\alpha}^{-\pi} g(\tau) d\tau + \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) d\tau + \int_{\pi}^{\pi+\alpha} g(\tau) d\tau$$

Dans la première intégrale faisons le changement $\tau' = \tau + 2\pi$, alors

$$\int_{-\pi+\alpha}^{-\pi} g(\tau) d\tau = \int_{\pi+\alpha}^{\pi} g(\tau') d\tau' = \int_{\pi+\alpha}^{\pi} g(\tau) d\tau$$

puisque $g(\tau) = g(\tau' - 2\pi) = g(\tau')$ et la variable d'intégration est "muette" (on l'appelle comme on veut). Maintenant toujours par la relation de Chasles on aura

$$\int_{\pi+\alpha}^{\pi} g(\tau) d\tau + \int_{\pi}^{\pi+\alpha} g(\tau) d\tau = \int_{\pi+\alpha}^{\pi+\alpha} g(\tau) d\tau = 0.$$

D'où le résultat. ■

Théorème 7 (de Dirichlet) *Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} , 2π -périodique et C^1 par morceaux sur $[-\pi, \pi]$. Alors $\forall x \in [-\pi, \pi]$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\} = \frac{1}{2} (f(x^+) + f(x^-))$$

Démonstration : Notons

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Remplaçons les coefficients par leurs expressions

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) f(t) dt$$

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos n(x-t) \right\} f(t) dt$$

Posons

$$D_n(\xi) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos n\xi = \frac{-1}{2} + \sum_{k=0}^n \cos n\xi$$

D'après les calculs dans (4.1) on peut écrire

$$D_n(\xi) = \frac{-1}{2} + \cos\left(\frac{n}{2}\xi\right) \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\xi\right)}{\sin\left(\frac{\xi}{2}\right)} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\xi}{2 \sin(\xi/2)}$$

où nous avons utilisé la formule bien connue

$$2 \cos a \sin b = \sin(b - a) + \sin(b + a).$$

Remarquons que la fonction $D_n(\xi)$ (appelé noyau de Dirichlet) est paire, 2π -périodique, définie sur \mathbb{R} et C^1 . De plus $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\xi) d\xi = 1$. A présent

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x - t) f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} D_n(\tau) f(x + \tau) d\tau$$

grâce au changement de variable $t = \tau + x$. La fonction sous la dernière intégrale étant 2π -périodique, alors par le lemme 4.3.8 on aura

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\tau) f(x + \tau) d\tau$$

puis

$$S_n(f, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(\tau) [f(x + \tau) + f(x - \tau)] d\tau$$

grâce à la parité de D_n . On peut revenir à une intégrale sur $[-\pi, \pi]$ car la fonction sous l'intégrale précédente est paire

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\tau) [f(x + \tau) + f(x - \tau)] d\tau$$

Maintenant la différence entre $S_n(f, x)$ et la limite annoncée s'exprime par

$$\begin{aligned} S_n(f, x) - \left(\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(\tau) \{f(x + \tau) + f(x - \tau) - f(x^+) - f(x^-)\} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\tau}{2 \sin(\tau/2)} \{f(x + \tau) + f(x - \tau) - f(x^+) - f(x^-)\} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n + \frac{1}{2})\tau \left(\frac{\tau/2}{\sin(\tau/2)} \right) \left\{ \left(\frac{f(x + \tau) - f(x^+)}{\tau} \right) + \left(\frac{f(x - \tau) - f(x^-)}{\tau} \right) \right\} d\tau \end{aligned}$$

Posons

$$g(\tau) = \left(\frac{\tau/2}{\sin(\tau/2)} \right) \left\{ \left(\frac{f(x + \tau) - f(x^+)}{\tau} \right) + \left(\frac{f(x - \tau) - f(x^-)}{\tau} \right) \right\}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que c'est une fonction continue par morceaux, c'est-à-dire qu'en tout point de discontinuité dans $[-\pi, \pi]$ elle admet une limite à gauche et une limite à droite. La fonction $\frac{\tau/2}{\sin(\tau/2)}$ est manifestement continue. Pour la partie restante, il y a des points $\tau \neq 0$ de discontinuité de f et puis $\tau = 0$. Mais f est déjà continue par morceaux, ce qui règle la situation des point $\tau \neq 0$. Pour $\tau = 0$, les deux fractions possèdent des limites finies car f a été supposée C^1 par morceaux. Enfin

$$S_n(f, x) - \left(\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) \sin(n + \frac{1}{2})\tau d\tau$$

se présente sous la forme d'un coefficient $b_{n+1/2}$ pour la fonction g . D'après le Corollaire 4.3.6 on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, x) - \left(\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \right) = 0$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Exemple 4.3.9 *Considérons la fonction $\text{sign}(x)$ sur $[-\pi, \pi]$ périodisée avec le choix délibéré que $\text{sign}(0) = 1$ (ce qui n'a aucune incidence!) i.e.,*

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ -1 & \text{si } x = \pi \end{cases}$$

Voici une partie du graphe

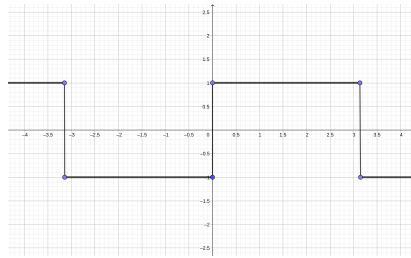


FIGURE 4.3 – Graphe de la fonction 'sign' périodisée

Cette fonction est bien C^1 par morceaux et impaire sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Dans sa série de Fourier les a_n sont tous nuls. Calculons les b_n .

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{sign}(x) \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos nx}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi n} (1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ \frac{4}{\pi(2k+1)} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

Selon le théorème de Dirichlet, aux points de continuité la somme de la série de Fourier coïncide avec la valeur de la fonction. On peut donc écrire

$$\text{sign}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}, \quad \forall x \in]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$$

Toujours selon ce théorème, aux points de discontinuité $x_* = m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, la somme de cette série est $\frac{\text{sign}(x_*^-) + \text{sign}(x_*^+)}{2} = 0$ ce qu'on vérifie aisément en remplaçant dans la somme. Comme application, prenons le point $x = \pi/2$, alors

$$\text{sign}(\pi/2) = 1 = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)(\pi/2)}{2k+1} = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Exemple 4.3.10 *Le deuxième exemple est celui de la fonction mantisse $m(x) = x - [x]$. Nous avons déjà vu qu'elle était 1-périodique ($\omega = 2\pi$). Il est clair qu'elle est C^1 par morceaux. Calculons ses coefficients de Fourier. D'après les formules données dans la Remarque 4.3.7 et le Lemme 4.3.8, on a*

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 m(x) \cos(2\pi nx) dx = 2 \int_0^1 x \cos(2\pi nx) dx = 2 \int_0^1 x d\left(\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n}\right) \\ &= 2 \left[x \frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 - \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \sin(2\pi nx) dx = -\frac{1}{\pi n} \left[\frac{-\cos(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 = 0 \end{aligned}$$

et ce pour $n \neq 0$. Pour a_0 on a

$$a_0 = 2 \int_0^1 m(x) dx = 2 \int_0^1 x dx = 1$$

Aussi pour $n \geq 1$

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 m(x) \sin(2\pi nx) dx = 2 \int_0^1 x \sin(2\pi nx) dx = 2 \int_0^1 x d\left(\frac{-\cos(2\pi nx)}{2\pi n}\right) \\ &= 2 \left[x \frac{-\cos(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 + \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \cos(2\pi nx) dx = -\frac{1}{\pi n} + \frac{1}{\pi n} \left[\frac{\sin(2\pi nx)}{2\pi n} \right]_0^1 = -\frac{1}{\pi n} \end{aligned}$$

En définitive, pour $x \notin \mathbb{Z}$, on a

$$m(x) = x - [x] = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n}$$

qu'on peut réécrire dans un cas particulier comme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{n} = \pi \left(\frac{1}{2} - x \right), \quad \forall x \in]0, 1[.$$

Exemple 4.3.11 *Dans cet exemple nous allons montrer comment périodiser la restriction d'une fonction donnée et déterminer sa série de Fourier. Considérons $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$. Appelons f_1 la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, \pi]$ périodisée avec la période 2π . Voici une partie de son graphe*

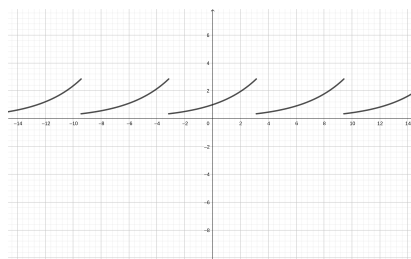
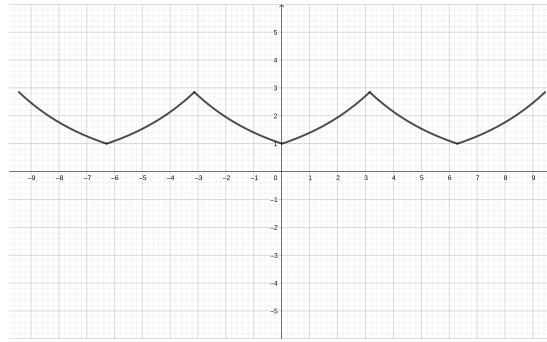
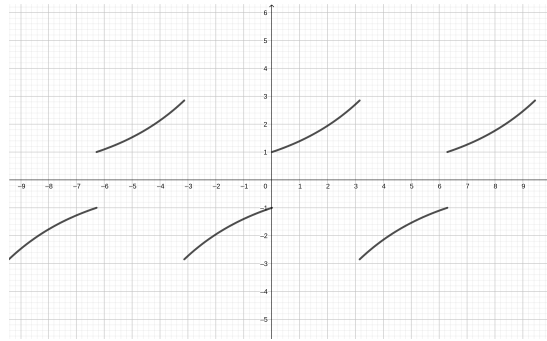


FIGURE 4.4 – Graphe de la fonction f_1

On prend juste la partie du graphe de f correspondant à $[-\pi, \pi]$ et on la translate à droite et à gauche de 2π dans le sens de l'axe des abscisses. D'autres périodisations sont possibles. Par exemple appelons f_2 la restriction de f à $[0, \pi]$ étendue à $[-\pi, 0]$ comme une fonction paire, puis périodisée. Voici une partie de son graphe

FIGURE 4.5 – Graphe de la fonction f_2

Une périodisation impaire donne f_3 dont une partie du graphe est

FIGURE 4.6 – Graphe de la fonction f_3

Calculons les coefficients de f_1 qui n'est ni paire ni impaire.

$$\begin{aligned}
 a_0(f_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{e^{ax}}{a} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi a} [e^{a\pi} - e^{-a\pi}] = \frac{2 \sinh a\pi}{a\pi} \\
 a_n(f_1) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} d \left(\frac{\sin nx}{n} \right) = \frac{a}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} d \left(\frac{\cos nx}{n} \right) = \\
 &= \frac{a}{n^2\pi} [e^{ax} \cos nx]_{-\pi}^{\pi} - \frac{a^2}{n^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ax} \cos nx dx \\
 \Rightarrow \left[1 + \frac{a^2}{n^2} \right] a_n(f_1) &= (-1)^n \frac{2a \sinh a\pi}{n^2\pi} \Rightarrow a_n(f_1) = (-1)^n \frac{2a \sinh a\pi}{(n^2 + a^2)\pi}
 \end{aligned}$$

La première intégration par partie dans $a_n(f_1)$ donne déjà $a_n(f_1) = \frac{-a}{n} b_n(f_1)$. D'où

$$b_n(f_1) = (-1)^{n-1} \frac{2n \sinh a\pi}{(n^2 + a^2)\pi}$$

$$\text{et } \forall x \in]-\pi, \pi[\quad e^{ax} = \frac{\sinh a\pi}{a\pi} + \frac{2 \sinh a\pi}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} (a \cos nx - n \sin nx)$$

Nous allons utiliser ce dernier résultat pour montrer une formule annoncée dans l'Exemple 2.1.5. En changeant a en $-a$ dans la dernière formule, on obtient $\forall x \in]-\pi, \pi[$

$$e^{ax} = \frac{\sinh a\pi}{a\pi} + \frac{2 \sinh a\pi}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} (a \cos nx - n \sin nx)$$

et

$$e^{-ax} = \frac{\sinh a\pi}{a\pi} + \frac{2 \sinh a\pi}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} (a \cos nx + n \sin nx)$$

En faisant la somme on aura

$$2 \cosh ax = \frac{2 \sinh a\pi}{a\pi} + \frac{4a \sinh a\pi}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2 + a^2} \cos nx$$

Ceci est exactement le développement en série de Fourier de la restriction à $[-\pi, \pi]$ de la fonction paire $\cosh ax$ périodisée. Il est facile de voir que cette fonction est continue sur \mathbb{R} . Donc on peut évaluer cette dernière égalité pour $x = \pi$.

$$\begin{aligned} \cosh a\pi &= \frac{\sinh a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sinh a\pi}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + a^2} \\ \Rightarrow \cosh a\pi &= \frac{-\sinh a\pi}{a\pi} + \frac{2a \sinh a\pi}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + a^2} \\ \Rightarrow \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^2 + a^2} &= \frac{1}{2a^2} \left[1 + \frac{(a\pi) \cosh a\pi}{\sinh a\pi} \right] \end{aligned}$$

C'est exactement la formule annoncée dans l'Exemple 2.1.5 où il faudra changer a par $1/x$.

4.4 Convergence en moyenne quadratique

4.4.1 Notion de produit scalaire

La notion de produit scalaire sera amplement discutée dans le cours d'Algèbre. Ici nous ne faisons que donner les définitions et propriétés rudimentaires.

Définition 4.4.2 Soit E un espace vectoriel réel ou complexe. Une application notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ (x, y) &\longrightarrow \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

est appelée produit scalaire si :

- $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in E$ et $(\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ (Positivité)
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (Symétrique dans le cas réel)
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (Hermitienne dans le cas complexe)

- $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y \rangle = \lambda_1 \langle x_1, y \rangle + \lambda_2 \langle x_2, y \rangle, \forall x_1, x_2, y \in E \forall \lambda_1, \lambda_2 \text{ scalaires.}$

Dans le dernier axiome, et grâce à la symétrie dans le cas réel, il y a linéarité par rapport à y en fixant x . Mais dans le cas complexe, il y a l'anti-linéarité par rapport à y avec x fixé i.e, les scalaires sortent avec la conjugaison.

Exemple 4.4.3 * $E = \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

* $E = \mathbb{C}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$

* $E = C_{\mathbb{C}}([a, b])$ est l'espace des fonctions continues de variable réelle dans $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}, \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$

4.4.4 Norme associée

La norme associée à un produit scalaire est définie par

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

On rappelle qu'une application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ est appelée norme sur E si elle vérifie les trois axiomes suivants :

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (Homogénéité)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Inégalité triangulaire)

La notion de norme sera étudiée en détail dans le cours de Topologie. C'est l'outil principal pour mesurer la distance entre les vecteurs. Avec une norme on définit la convergence des suites, la continuité, etc... La norme généralise la valeur absolue dans les espaces vectoriels en dimension supérieure.

Nous allons donner une inégalité importante liée au produit scalaire.

Inégalité de Cauchy-Schwarz $\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$

C'est une inégalité vérifiée aussi bien dans le cas réel que complexe. Nous allons donner la démonstration dans le cas complexe (qui englobe aussi le cas réel). Soit λ un réel et $x, y \in E$. Alors

$$\|\lambda x + y\|^2 = \langle \lambda x + y, \lambda x + y \rangle = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$$

C'est un polynôme du second degré en λ qui est positif pour tout λ . Ceci implique que son discriminant (réduit) est forcément négatif ou nul

$$\begin{aligned}\Delta' &= [\Re(\langle x, y \rangle)]^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \leq 0 \\ \implies |\Re(\langle x, y \rangle)| &\leq \|x\| \|y\|\end{aligned}$$

Si $\langle x, y \rangle = 0$ alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz est vérifiée. Supposons $\langle x, y \rangle \neq 0$ et écrivons ce complexe sous forme polaire

$$\langle x, y \rangle = |\langle x, y \rangle| e^{i\theta} \implies |\langle x, y \rangle| = e^{-i\theta} \langle x, y \rangle = \langle e^{-i\theta} x, y \rangle \in \mathbb{R}^+$$

D'où

$$|\langle x, y \rangle| = \langle e^{-i\theta} x, y \rangle \leq \|e^{-i\theta} x\| \|y\| = \|x\| \|y\|$$

Comme conséquence immédiate, on montre l'inégalité triangulaire de la norme (appelée aussi inégalité de Minkowski). En effet

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

d'où l'inégalité triangulaire.

4.4.5 Orthogonalité

On dit qu'un vecteur x est orthogonal à un vecteur y , noté $x \perp y$, si et seulement si $\langle x, y \rangle = 0$. On peut parler d'un vecteur orthogonal à un ensemble de vecteurs s'il est orthogonal à tous les vecteurs de cet ensemble. On peut étendre cela à deux parties de E : $A \perp B \Leftrightarrow (x \perp y \forall x \in A \forall y \in B)$. Nous allons voir un exemple directement lié aux séries de Fourier. Soit $C_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$ introduit plus haut avec son produit scalaire. Considérons la famille d'exponentielles e^{inx} , $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$\langle e^{inx}, e^{ikx} \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot \overline{e^{ikx}} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot e^{-ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)x} dx$$

Si $n = k$ on aura $\langle e^{inx}, e^{ikx} \rangle = 2\pi$. Et si $n \neq k$ on aura

$$\langle e^{inx}, e^{ikx} \rangle = \left[\frac{e^{i(n-k)x}}{i(n-k)} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{e^{i(n-k)\pi} - e^{-i(n-k)\pi}}{i(n-k)} = 0$$

C'est donc une famille de vecteurs deux à deux orthogonaux

$$\langle e^{inx}, e^{ikx} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq k \\ \|e^{inx}\|^2 = 2\pi & \text{si } n = k \end{cases}$$

4.4.6 Application aux séries de Fourier

Dans cette sous-section nous travaillerons dans l'espace $C_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$ muni de son produit scalaire. Soit $f \in C_{\mathbb{C}}([-\pi, \pi])$, alors ses coefficients de Fourier dans la forme complexes sont (voir Remarque 4.3.7)

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \langle f, e^{inx} \rangle$$

Posons $e_n(x) = e^{inx}$ et

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} = \sum_{-n}^n c_k(f) e_k(x)$$

Alors

$$\|f - S_n(f)\|^2 = \langle f - S_n(f), f - S_n(f) \rangle = \|f\|^2 + \|S_n(f)\|^2 - 2\Re(\langle f, S_n(f) \rangle)$$

On a d'une part

$$\|S_n(f)\|^2 = \langle \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k, \sum_{j=-n}^n c_j(f) e_j \rangle = \sum_{k,j=-n}^n c_k(f) \overline{c_j(f)} \langle e_k, e_j \rangle = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2$$

et d'autre part

$$\langle f, \sum_{k=-n}^n c_k(f) e_k \rangle = \sum_{k=-n}^n \overline{c_k(f)} \langle f, e_k \rangle = 2\pi \sum_{k=-n}^n \overline{c_k(f)} c_k(f) = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2$$

ce qui implique que

$$\|S_n(f)\|^2 = \langle f, S_n(f) \rangle = 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2$$

et donc

$$0 \leq \|f - S_n(f)\|^2 = \|f\|^2 - 2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2$$

ce qui a pour conséquence que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$2\pi \sum_{k=-n}^n |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2$$

Cette dernière inégalité porte le nom d'*inégalité de Bessel*. On peut déduire que la série numérique de terme général $(|c_k(f)|^2)$ est convergente puisque ses sommes partielles sont majorées. On peut donc passer à la limite dans l'inégalité de Bessel et obtenir

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|^2$$

Nous admettrons (on n'a pas encore les outils pour le démontrer) que cette dernière inégalité est en fait une égalité, appelée égalité de *Parseval-Plancherel*

$$2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Sa version réelle s'écrit

$$\frac{|a_0(f)|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

Exemple 4.4.7 Reprenons l'exemple de la fonction "sign". On avait déjà montré que

$$\text{sign}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

Calculons la norme quadratique de cette fonction

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\text{sign}(x)|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi$$

L'inégalité de Parseval-Plancherel donne

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2k+1)^2} = 2 \implies \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Une conséquence de ceci est le calcul d'une série de Riemann

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2} + \sum_{k \geq 0} \frac{1}{(2k+1)^2} \implies \frac{3}{4} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

D'où

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$