République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Béjaia

Faculté des Sciences Exactes

Département de Recherche Opérationnelle

Support de Cours d'Analyse 3

avec Exercices Corrigés

Proposé par :

Mme AOUDIA née RAHMOUNE Fazia

Béjaia, juin 2015

Avant-propos

Ce polycopié est une partie du programme officiel du module d'Analyse 3 destiné principalement aux étudiants en deuxième année licence mathématiques appliquées, mais peut éventuellement être utile pour les étudiants en deuxième année licence mathématiques, sciences techniques, informatique (dans le cadre du système L.M.D.), et toute personne souhaitant connaître les techniques de calcul des sommes infinies dans le cas continu et dans le cas discret.

Le niveau mathématique requis est celui de la première année Licence M.A, M.I ou encore S.T. Le contenu de cette matière est la base de toute introduction à l'analyse mathématique. Elle est considérée comme suite logique ou encore une extension directe des deux matières Analyse 1 et Analyse 2 vues en première année. Elle permet à l'étudiant d'acquérir le maximum de techniques mathématiques nécessaires pour la plupart des matières étudiées le long de son cursus, à savoir : Analyse numérique, probabilités et statistiques, programmation mathématique et optimisation, processus aléatoires et files d'attente...etc.

Ce polycopié comporte trois chapitres principaux, où sont exposées les notions de séries numériques, de suites de fonctions et de séries de fonctions. Chaque chapitre se termine par quelques exercices corrigés permettant de contrôler l'acquisition des notions essentielles qui ont été introduites.

Je ne saurais pas terminer cet avant-propos sans un grand hommage plus personnel à mes collègues enseignants ayant expertisé sérieusement ce polycopié. Je souhaite remercier également et tout particulièrement nos lecteurs. Enfin, des erreurs peuvent être relevées, prière de les signaler à l'auteur.

Table des matières

Chapitre 1

Les Séries Numériques

1.1 Introduction

Etant donnée une suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels, on sait alors que la somme d'un nombre fini de ses termes est finie. Mais ce n'est pas toujours le cas quand on passe à un nombre infini de termes. On se propose alors de donner un sens à l'expression $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$. Il est ainsi naturel de former les sommes partielles $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$ et d'étudier la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En notant $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, si cette limite existe, on convient de poser $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n$ et de dire que S est la somme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$.

Ce chapitre est consacré aux conditions nécessaires et suffisantes de la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et à la généralisation des propriétés connues sur les sommes finies.

1.2 Définitions et Propriétés

1.2.1 Suite des Sommes Partielles

Définition 1.2.1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique de nombres réels ou complexes. On appelle une série de terme général U_n, notée $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \ldots + U_n$. Si cette suite est convergente vers une limite S, on dira que la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est convergente et a pour somme la valeur S et nous écrivons alors $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n$. Dans le cas contraire, on dira que la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est divergente.

Remarque 1.2.1. 1. Cette définition peut constituer un premier critère donnant une condition à la fois nécessaire et suffisante de convergence des séries numériques, dit critère des suites des sommes partielles.

2. Si la suite $(U_n)_{n\geq k}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang k, il en est de même pour la suite des sommes partielles qui lui est associée donnée par $S_n = \sum_{m=k}^{n} U_m$ et donc même pour la série en question et l'on écrit $\sum_{n\geq k} U_n$.

Exemple 1.2.1. Pour la série de terme général $U_n = \dfrac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1$, la suite des sommes partielles qui lui est associée est donnée par :
$S_n = \sum_{p=1}^{n} U_p = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{p(p+1)} = \sum_{p=1}^{n} \left[\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}\right] = 1 - \dfrac{1}{n+1} \to 1$ quand $n \to +\infty$.
Ainsi, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente vers 1. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ est aussi convergente de somme $S = 1$.

Exemple 1.2.2. Pour la série de terme général $U_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, \forall n \geq 1$, la suite des sommes partielles qui lui est associée est donnée par :
$S_n = \sum_{p=1}^{n} U_p = \sum_{p=1}^{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \left[\sqrt{n+1} - 1\right] \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.
Ainsi, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est divergente, ce qui entraîne la divergence de la série $\sum_{n\geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Définition 1.2.2. Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série numérique réelle ou complexe convergente, de somme S. Alors, son reste d'ordre N noté R_N est donné par :

$$R_N = S - S_N = \sum_{n\geq 0} U_n - \sum_{n=0}^{n=N} U_n = \sum_{n\geq N+1} U_n$$

Théorème 1.2.1. *Si une série numérique réelle ou complexe $\sum_{n\geq 0} U_n$ est convergente alors son reste d'ordre N converge vers zéro.*

Preuve 1.2.1. Pour démontrer ce résultat il suffit de considérer l'égalité suivante :

$$R_N = S - S_N = \sum_{n\geq 0} U_n - \sum_{n=0}^{n=N} U_n = \sum_{n\geq N+1} U_n$$

et de faire un passage à la limite des deux cotés.

1.2.2 Série Géométrique

Définition 1.2.3. On appelle série géométrique de raison K de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$ et de premier terme U_0 toute série de terme général $U_n = (K)^n U_0$ pour $U_0 \neq 0$.

Examinons de près les conditions de convergence d'une telle série. Pour cela, on définit d'abord la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui lui est associée, donnée par :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p = \sum_{p=0}^{n} (K)^p U_0 = U_0 \left(\frac{1 - K^{n+1}}{1 - K} \right) ; \forall K \neq 1$$

Il est clair que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si $\mid K \mid < 1$. Dans ce cas, on dira que la série géométrique $\sum_{n\geq 0} U_n$ est convergente et a pour somme la valeur $S = \dfrac{U_0}{1-K}$.
Si $\mid K \mid \geq 1$, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, ce qui entraîne la divergence de la série géométrique $\sum_{n\geq 0} U_n$.

Exemple 1.2.3. 1. La série de terme général $U_n = e^{-n}$ est une série géométrique de raison $K = e^{-1} < 1$, donc convergente.
2. La série de terme général $U_n = 2^n$ est une série géométrique de raison $K = 2 > 1$, donc divergente.

Remarque 1.2.2. Il faut prendre garde de ne pas confondre l'étude de la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ avec celle de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, reprenons l'exemple (1.2.2) où la série $\sum_{n\geq 1} U_n = \sum_{n\geq 1} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ était divergente, bien que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente vers zéro.

Remarque 1.2.3. La nature d'une série, en terme de convergence ou de divergence, est une propriété asymptotique. Autrement dit, si on modifie un nombre fini de termes, ceci ne va pas influencer la nature de la série en question. En effet, on a bien $\sum_{n\geq 0} U_n = \sum_{n=0}^{p} U_n + \sum_{n\geq p+1} U_n$. Sachant que la somme $\sum_{n=0}^{p} U_n$ est finie, alors la nature de la série $\sum_{n\geq 0} U_n$, mais non pas sa somme, dépend uniquement de celle de la série $\sum_{n\geq p+1} U_n$.

Remarque 1.2.4. Comme on peut bien le constater, le critère de la suite des sommes partielles associée est loin d'être facile à appliquer, car il demande explicitement l'expression analytique exacte de celle-ci, chose qui n'est pas toujours facile à déterminer. En effet, il suffit de considérer par exemple la série harmonique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$. Pour remédier à ce problème, il a fallu concevoir d'autres critères qui nous permettent de juger de la nature d'une série numérique sans autant passer par l'expression analytique de la suite des sommes partielles qui lui est associée. Ces critères peuvent constituer soit une condition nécessaire de convergence, ou bien une conditioin suffisante ou encore une condition à la fois nécessaire et suffisante .

1.2.3 Condition Nécessaire de Convergence

Théorème 1.2.2. *Pour qu'une série numérique* $\sum_{n\geq 0} U_n$ *soit convergente, il est nécessaire, mais pas suffisant, que son terme général* U_n *tende vers zéro, quand* n *tend vers l'infini. Autrement dit,* $\sum_{n\geq 0} U_n$ *Converge* $\Longrightarrow \lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n = 0.$

Preuve 1.2.2. Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ est convergente et montrons alors que son terme gnénéral U_n tend vers zéro. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n\geq 0} U_n$. Alors $S_n = \sum_{p=0}^{n} U_p$ et $S_{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} U_p$. Ainsi, $S_n - S_{n-1} = U_n$. Or, si la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ converge ceci est équivalent à dire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers S. Autrement dit, on aura d'une part $\lim_{n\longrightarrow+\infty} S_n = S$ (existe, finie et unique). D'autre part, $\lim_{n\longrightarrow+\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} U_n = 0$. Ce qui achève la démonstration.

Exemple 1.2.4. On a déjà vu que la série $\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ est divergente bien que son terme général tende vers zéro.

Exemple 1.2.5. On va voir un peu plus loin, que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ dite série harmonique est aussi divergente bien que son terme général tend vers zéro.

1.2.4 Opérations sur les Séries

Définition 1.2.4. Soient $\sum_{n\geq 0} U_n$ et $\sum_{n\geq 0} V_n$ deux séries. La série somme est la série de terme général $W_n = U_n + V_n$ et on écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n = \sum_{n=0}^{+\infty}(U_n + V_n)$.

De même, le produit de la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ par le nombre réel ou complexe λ est une série de terme général λU_n et on écrit $\lambda \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\lambda U_n)$.

Proposition 1.2.1. *Si les séries $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ sont convergentes et ont pour somme S et S' respectivement, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} (U_n + V_n)$ est convergente et a pour somme $S + S'$ et la série $\sum\limits_{n\geq 0} (\lambda U_n)$ est aussi convergente et a pour somme λS.*

Remarque 1.2.5.
1. Ces deux propriétés de linéarité (sommation et produit par un scalaire) confèrent à l'ensemble des séries numériques convergentes la structure algébrique d'un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les séries numériques.
2. L'ensemble des séries numériques divergentes n'est pas un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel de toutes les séries numériques, car la somme de deux séries divergentes n'est pas toujours une série divergente, sauf si elles sont de même signe, comme nous le montrent les exemples suivants.
3. Si $\lambda \neq 0$ alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} (\lambda U_n)$ sont de même nature.
4. Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est convergente et $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ est divergente alors la série somme $\sum\limits_{n\geq 0} (U_n + V_n)$ est aussi divergente.

Exemple 1.2.6.
1. On voit bien que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} - \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 0$ est convergente bien que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ soit divergente.
2. La série $\sum\limits_{n\geq 1} (\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1})$ est divergente comme une somme de deux séries à termes positifs divergentes.

Remarque 1.2.6. Quand on ne connait pas explicitement l'expression analytique de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$, le passage à la limite fait défaut pour retrouver sa nature et donc même celle de la série correspondante. Dans ce cas, on fait appel au critère dit de Cauchy suivant.

1.2.5 Critère de Cauchy

On sait déjà que l'étude de la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ est équivalente à celle de la suite des sommes partielles qui lui est associée $(S_n)_{n\geq 0}$. On sait aussi qu'une suite numérique est convergente si et seulement si elle est de Cauchy. Nous pouvons énoncer à présent le critère de Cauchy sur les séries numériques donné par le théorème suivant.

Théorème 1.2.3. *Pour qu'une série numérique* $\sum_{n\geq 0} U_n$ *soit convergente, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit de Cauchy. Autrement dit,* $\sum_{n\geq 0} U_n$ *Converge* $\Longleftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon$ *tel que* $\forall p > q > N_\epsilon$, *on ait* $\left|\sum_{n=q+1}^{p} U_n\right| < \epsilon$.

Preuve 1.2.3. Il suffit juste d'appliquer le critère de Cauchy à la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$, pour avoir $|S_p - S_q| = |\sum_{n=0}^{p} U_n - \sum_{n=0}^{q} U_n| = |\sum_{n=q+1}^{p} U_n|$.

Remarque 1.2.7. Le critère de Cauchy est nous donne une condition à la fois nécessaire et suffisante de convergence.

Exemple 1.2.7. Pour montrer que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, il suffit de montrer que la suite des sommes partielles qui lui est associée $(S_n)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy. En effet, pour $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ et pour $(p = 2n, q = n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on obtient :
$|S_p - S_q| = |S_{2n} - S_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right| > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n} = n(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}$.
Il suffit ainsi de choisir $\epsilon = \frac{1}{2}$, pour que $(S_n)_{n\geq 1}$ ne soit pas de Cauchy, et donc pour que la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ soit divergente.

Remarque 1.2.8. Les critères de convergence que l'on a vus jusqu'ici, reposent sur l'expression analytique de la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$, qui n'est pas toujours facile à déterminer. C'est pour cette raison qu'il a fallu concevoir d'autres critères qui nous permettent de juger de la nature d'une série numérique $\sum_{n\geq 0} U_n$, sans autant passer par la détermination de la suite des sommes patielles qui lui associée. Autrement dit, des critères ne tenant compte que du terme général U_n.

1.2.6 Convergence Absolue

Définition 1.2.5. La série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est dite absolument convergente si la série $\sum\limits_{n\geq 0} |U_n|$ est convergente.

De la propriété triangulaire de la valeur absolue combinée avec le critère de Cauchy, résulte le théorème suivant.

Théorème 1.2.4. *Pour que la série numérique $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ soit convergente, il suffit qu'elle soit absolument convergente.*

Exemple 1.2.8. 1. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$ est absolument convergente. En effet, on a : $\left|\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| = \dfrac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1$. Or, on a déjà vu que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n(n+1)}$ est convergente. On déduit ainsi la convergence absolue de $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$. Ce qui entraine sa convergence.

Remarque 1.2.9. 1. La réciproque de ce résultat n'est pas toujours vraie. En effet, il suffit de considérer la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ et de montrer, en se servant du critère de cauchy, qu'elle est convergente sans qu'elle soit absolumlent convergente. Notons que cette série est dite alternée (voir un peu plus loin).

2. Ce résultat montre l'intérêt des séries numériques à termes positifs. Nous verrons aussi plus loin, qu'il y a des séries convergentes sans qu'elles soient absolument convergentes. De telles séries sont dites semi-convergentes.

1.3 Séries à Termes Positifs

Vu l'importance des séries à termes positifs, plusieurs critères de convergence ont été établis pour cette classe particulière de séries. Les plus pratiques sont énoncées dans la présente section. Notons que ces mêmes critères sont aussi valables pour les séries à termes négatifs.

Définition 1.3.1. La série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est dite à termes positifs si son terme général U_n est positif, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Formellement ceci veut dire que : $U_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.3.1. *Pour que la série numérique* $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ *soit convergente, il faut et il suffit que la suite des sommes partielles* $(S_n)_{n\geq 0}$ *qui lui est associée soit majorée. Ainsi, la somme de la série* $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n$ *n'est autre que la borne supérieure de la suite* $(S_n)_{n\geq 0}$.

Preuve 1.3.1. Pour la démonstration de ce théorème, il suffit juste de remarquer que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ associée à une série à termes positifs est croissante et de faire appel par la suite aux résultats fondamentaux connus sur les suites monotones.

Exemple 1.3.1. Pour tout $k \geq 2$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^k}$ est convergente car la suite des sommes partielles qui lui est associée est majorée. En effet, on a :

$$\text{pour tout } k \geq 2, \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)}, \forall n > 1.$$

En notant par S_n la suite des sommes partielles qui lui est associée, on aura :

$$S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^k} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \leq 1 + \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p(p-1)} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

Ainsi, la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée par 2, donc la série correspondante est convergente et a pour somme une valeur S, telle que $0 < S \leq 2$.

Remarque 1.3.1.
1. Une série à termes positifs diverge d'une seule manière, qui correspond à $\lim\limits_{n\longrightarrow +\infty} S_n = +\infty$.
2. Les résultats qu'on vient d'énoncer sur les séries à termes positifs sont aussi valables pour les séries numériques à termes positifs à partir d'un certain rang car la somme des premiers termes non positifs est finie. Cette dernière influe sur la valeur de la somme de la série en question mais non pas sur sa nature.

Exemple 1.3.2. La série numérique de terme général $U_n = \frac{1}{(n-4)(n+1)}$ est à termes positifs à partir de $n \geq 5$. Sa somme $\sum\limits_{n=0, n\neq 4}^{+\infty} \frac{1}{(n-4)(n+1)}$ est finie.

1.3.1 Critères de Comparaison

La notion de comparaison des séries numériques réelles ou complexe découle de la relation d'ordre totale que l'on connait sur l'ensemble des nombres réels.

Théorème 1.3.2. *Soient* $\sum_{n\geq 0} U_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} V_n$ *deux séries à termes positifs vérifiant* $U_n \leq V_n, \forall n \geq 0$.

i)- Si la série $\sum_{n\geq 0} V_n$ *converge alors la série* $\sum_{n\geq 0} U_n$ *est aussi convergente et on écrit* $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} V_n$.

ii)- Si la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ *diverge, il en sera de même pour la série* $\sum_{n\geq 0} V_n$.

Intuitivement, ceci veut dire que, toute quantité positive inférieure à une quantité finie est elle même finie. Inversement, toute quantité supérieure à une quantité infinie positivement est elle même infinie.

Preuve 1.3.2. Pour montrer i), il suffit d'utiliser le résultat énoncé au Théorème1.3.1, relatif à la propriété de la suite des sommes partielles associée à une série à termes positifs, puis de consommer le résultat de la remarque1.3.1 pour montrer ii).

Exemples 1.3.1.

1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}}{n(n+1)}$ est convergente. En effet, on a bien $\frac{e^{-n}}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$, $\forall n \geq 1$. Or, on a déjà vu que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente. En vertu du critère de comparaison, on déduit la convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}}{n(n+1)}$.

2. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n}$ est divergente. En effet, on a bien $\frac{e^n}{n} > \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$. Or, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. En vertu du critère de comparaison, on déduit la divergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n}$.

Remarque 1.3.2.

1. Ces critères constituent une condition suffisante de convergence mais non pas nécessaire.

2. Pour pouvoir appliquer ces critères de comparaison à des séries à termes négatifs ou encore à des séries ne gardant pas un signe constant, il susffit de multiplier son terme général U_n par un (-1) ou encore de prendre sa valeur absolue, comme nous le montrent les exemples suivants.

Exemple 1.3.3. 1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{-e^n}{n})$ qui est à termes négatifs pour tout $n \geq 1$ est convergente. En effet, il suffit de la multiplier par (-1), pour avoir : $\frac{e^n}{n} \leq e^{-n}$ pour tout $n \geq 1$ et que la série $\sum_{n\geq 1} e^{-n}$ est série géométrique convergente.

2. La série $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos n}{n(n-1)}$ dont le terme général ne garde pas un signe constant est convergente car elle est absolument convergente. En effet, on a bien pour tout $n \geq 1$, $\left|\frac{\cos n}{n(n-1)}\right| \leq \frac{1}{n(n-1)}$. Or, on a déjà établi la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)}$. En vertu du critère de comparaison combiné avec celui de convergence absolue, on déduit la convergence absolue de $\sum_{n\geq 2} \frac{\cos n}{n(n-1)}$ qui implique immédiatement sa convergence.

De ces critères de comparaison découlent plusieurs critères. Entre autres, on retrouve ceux dits d'équivalence et celui de comparaison à une série de Riemann.

1.3.2 Séries de Riemann

Définition 1.3.2. Une série de Riemann est une série numérique à termes positifs, de terme général $U_n = \frac{1}{n^\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}$.

Les séries de Riemann forment une classe particulière des séries à termes positifs.

Théorème 1.3.3 (Conditions de convergence d'une série de Riemann). *La série de Riemann $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Preuve 1.3.3. Ce résultat peut être démontré de différentes manières mais nous avons opté pour le critère intégrale de Cauchy que l'on verra un peu plus loin.

1.3.3 Critère de Comparaison à une Série de Riemann

Théorème 1.3.4. *Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série à termes positifs.*

1. *Si $\exists \alpha > 1$ tel que $\lim_{n\longrightarrow +\infty} n^\alpha U_n = 0$, alors la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ va converger.*
2. *Si $\exists \alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n\longrightarrow +\infty} n^\alpha U_n = +\infty$, alors la série $\sum_{n\geq 0} U_n$ va diverger.*

Preuve 1.3.4. C'est une conséquence immédiate du critère de comparaison combiné avec la définition de la limite d'une suite numérique.

Exemples 1.3.2. 1. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-n}}{n^2}$ est convergente. En effet, on a bien $\lim_{n\longrightarrow +\infty} n^\alpha \frac{e^{-n}}{n^2} = 0, \forall\alpha$. Ce résultat reste vrai pour tout $\alpha > 1$.

2. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^n}{n}$ est divergente. En effet, on a bien $\lim_{n\longrightarrow +\infty} n^\alpha \frac{e^n}{n} = +\infty, \forall\alpha$. Ce résultat reste vrai pour tout $\alpha \leq 1$.

Remarque 1.3.3. Ce critère est aussi valable pour les séries à termese quelconques, à condition de prendre leur valeur absolue.

1.3.4 Critères d'équivalence

Ces critères nous permettent de ramener l'étude d'une série numérique compliquée à celle d'une série plus simple. La technique de calcul utilisée est généralment celle des dévellopements.

Théorème 1.3.5. *Soient* $\sum_{n\geq 0} U_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} V_n$ *deux séries à termes positifs avec* $\lim_{n\longrightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = L = Cte < +\infty$. *Alors la convergence de la série* $\sum_{n\geq 0} V_n$ *entraîne celle de la série* $\sum_{n\geq 0} U_n$. *Si de plus* $L \neq 0$, *alors les deux séries sont de même nature.*

Preuve 1.3.5. Pour démontrer ce résultat, il suffit d'appliquer la définition de la limite et de se servir par la suite des résultats des critères de comparaison. En effet, avoir :

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = L = Cte < +\infty \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n > N \Rightarrow \left|\frac{U_n}{V_n} - L\right| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists N, \forall n > N \Rightarrow (L-\epsilon)V_n < U_n < (L+\epsilon)V_n.$$

Remarque 1.3.4. Dans le cas particulier où $\lim_{n\longrightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = L = 1$, on dit alors que les deux suites (U_n) et (V_n) sont équivalentes, et on écrit $U_n \simeq V_n$.

Théorème 1.3.6. *Soient* $\sum_{n\geq 0} U_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} V_n$ *deux séries à termes positifs ou à signe constant, telles qu'au voisinage de l'infini on a* $U_n \simeq V_n$, *alors les deux séries sont de même nature.*

Preuve 1.3.6. Ce résultat est une conséquence immédiate du Théorème1.3.5, en prennant $L = 1$.

Remarque 1.3.5. Ce critère s'applique même sur les séries numérqiues positives à partir d'un certain rang.

Exemples 1.3.3. 1. La série $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$ est convergente car quand $n \in V(+\infty), \sin \frac{1}{n^2} \simeq \frac{1}{n^2}$. Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Par conséquent la série $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$ converge aussi. Notons que la série $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n^2}$ est bien à termes positifs.

2. La série $\sum_{n\geq 1} \log \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ est divergente car quand $n \in V(+\infty), \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) \simeq \frac{-1}{n}$. Or, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est une série harmonique divergente. Par conséquent la série $\sum_{n\geq 1} \log \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ diverge aussi.

1.4 Critère Intégrale de Cauchy

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série à termes positifs, où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante tendant vers zéro. Si dans un système d'axe OXY, en traçant la courbe qui passe par les points $(x, y) = (n, U_n)$, il est toujours possible de trouver une fonction f décroissante de $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue dont la représentation graphique est justement cette courbe, on a alors le résultat énoncé par le Théorème suivant.

Théorème 1.4.1. *Soit f une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, continue et décroissante. La série de terme général $U_n = f(n)$ est de même nature que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.*

Exemple 1.4.1. La série de Riemann $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$. En effet, si $\alpha \leq 0$, alors la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ divergente car la condition nécessaire de convergence n'est même pas vérifiée. Il nous reste le cas où α est positif, pour lequel le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est décroissant positivement vers zéro. Par conséquent, pour $\alpha > 0$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature que l'intégrale $I(\alpha) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Cherchons alors la nature de $I(\alpha)$.

$$I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{A \longrightarrow +\infty} \int\limits_1^A \frac{dx}{x^\alpha} =_{\forall \alpha \neq 1}$$

$$\lim_{A \longrightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\right]_2^A = \begin{cases} +\infty & \text{Si} \quad \alpha < 1; \\ l < +\infty & Si \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

.

Si $\alpha = 1, I(\alpha) = I(1) = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A \longrightarrow +\infty} \int\limits_1^A \frac{dx}{x} = \lim\limits_{A \longrightarrow +\infty} [\log \log x]_1^A = +\infty.$

Par conséquent, $I(\alpha)$ converge si $\alpha > 1$ et diverge sinon. En vertu du critère intégrale de Cauchy, on déduit la convergence de la série de Riemann si et seulement si $\alpha > 1$.

1.5 Critères de Convergence des Séries à Termes Quelconques

1.5.1 Critère de Comparaison à une Série Géométrique

Par comparaison avec la série géomètrique de raison K, on obtient le résultat donné par la proposition suivante.

Proposition 1.5.1. *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ une série à termes quelconques. Si il existe un nombre réel ou complexe $K, 0 <\mid K \mid < 1$ tel que, pour tout n assez grand, l'inégalité $|U_n| \leq |K|^n$ est vérifiée, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est absolument convergente.*

Preuve 1.5.1. La preuve de ce résultat est immédiate, une fois combiné le critère de comparaison établi pour les séries à termes positifs avec le résultat de convergence d'une série géométrique.

Exemple 1.5.1. 1. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{e^{-n}}{n^2}$ est convergente. En effet, on a bien $\dfrac{e^{-n}}{n(n+1)} \leq e^{-n}$, $\forall n \geq 1$. Or, la série $\sum\limits_{n\geq 1} e^{-n}$ est une série géométrique de raison $e^{-1} < 1$, donc convergente. En vertu du critère 1.5.1, on déduit la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{e^{-n}}{n^2}$.

2. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \sin \dfrac{1}{n^2}$ est convergente. En effet, on a bien $\sin \dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}, \forall n \geq 1$.
3. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos n}{2^n}$ est absolument convergente. En effet, on a bien $\left|\dfrac{\cos n}{2^n}\right| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, $\forall n \geq 1$, qui est le terme général d'une série géométrique de raison $K = \dfrac{1}{2} < 1$, donc convergente. En vertu du critère 1.5.1, on déduit la convergence absolue de $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\cos n}{2^n}$.

Remarque 1.5.1. Pour répondre à la question d'existence du nombre réel $K, 0 < K < 1$ vérifiant l'inégalité $|U_n| \leq K^n$, l'idée la plus naturel est d'étudier la nature de la suite $(\sqrt[n]{|U_n|})_{n\in\mathbb{N}}$. Ce qui nous conduit à la Règle de Cauchy.

1.5.2 Règle de Cauchy

Proposition 1.5.2. *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ une série à termes quelconques et supposons que la limite $L = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \sqrt[n]{|U_n|}$, existe. Alors*

1. *si $L < 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est absolument convergente ;*
2. *si $L > 1$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est divergente ;*
3. *si $L = 1$, on ne peut rien dire de la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$.*

Preuve 1.5.2. 1. Si $L < 1$, on procède par définition puis par comparaison de la série initiale à une série géométrique. En effet, si $L < 1$, alors il existe un réel k, tel que $L < k < 1$. Ainsi, pour n assez grand, on aura : $\sqrt[n]{|U_n|} < k$. D'où $|U_n| < k^n$. La convergence de la série géométrique de raison k entraine la convergence absolue de la série de terme général U_n.

2. Si $L > 1$, alors le terme général U_n ne tend jamais vers zéro quand n tend vers l'infini. Ce qui entraine la divergence de la série correspondante.

Exemples 1.5.1. 1. La série de terme général $U_n = \dfrac{n^n}{2^{n^2}}$ est convergente car :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{n^2}}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0 < 1.$$

2. La série de terme général $U_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ est divergente car :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e > 1.$$

3. On ne peut rien dire sur la nature de la série de terme général $U_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$ via la règle de Cauchy, car : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt[n]{|U_n|} = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right) = 1.$

1.5.3 Règle de d'Alembert

Proposition 1.5.3. *Soit* $\sum\limits_{n \geq 0} U_n$ *une série à termes quelconques et supposons que la suite* $\left(\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right|\right)$ *est définie pour* n *assez grand et admet une limite* L *quand* n *tend vers l'infini. Alors*

1. *si* $L < 1$ *, la série* $\sum\limits_{n \geq 0} U_n$ *est absolument convergente ;*
2. *si* $L > 1$ *, la série* $\sum\limits_{n \geq 0} U_n$ *est divergente ;*
3. *si* $L = 1$ *, on ne peut rien dire de la nature de la série* $\sum\limits_{n \geq 0} U_n$.

Preuve 1.5.3. Un raisonnement analogue à celui utilisé pour démontrer la règle de Cauchy nous permet de démontrer la règle de d'Alembert.

Exemples 1.5.2. 1. La série de terme général $U_n = \dfrac{1}{n^n}$ est convergente car :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

2. La série de terme général $U_n = \dfrac{e^n}{n}$ est divergente car :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\frac{e^{n+1}}{n+1}\frac{n}{e^n}\right) = e\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{n}{n+1} = e > 1.$$

3. On ne peut rien dire sur la nature de la série de terme général $U_n = \dfrac{1}{n\log n}$ via la règle de d'Alembert, car : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\dfrac{n\log n}{(n+1)\log(n+1)} = 1.$

1.5.4 D'autres Critères de Convergence

Théorème 1.5.1. *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes poisitifs telle que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = a > 0$. Si $U_n = a_n.V_n, \forall n \in \mathbb{N}$ et que $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ est une série à termes positifs, alors les séries $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ sont de même nature.*

Preuve 1.5.4. Pour montrer ce résultat, il suffit d'appliquer la règle de d'Alembert.

Exemple 1.5.2. La série de terme général $U_n = \dfrac{n+3}{n^2+2n}$ est divergente. En effet, après décomposition, on aura $U_n = a_n.V_n$, où $a_n = \dfrac{n+3}{n+2} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ avec $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = 1 > 0$ et $\sum\limits_{n\geq 1} V_n = \sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$ est une série divergente. En vertu du Théorème 1.5.1, on déduit la divergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$.

Proposition 1.5.4. *Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques vérifiant $U_n = V_{n+1} - V_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est de même nature que la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Preuve 1.5.5. Pour montrer ce résultat, il suffit d'utiliser le critère des suites des sommes partielles assosiées. En effet, si $U_n = V_{n+1} - V_n, \forall n \in \mathbb{N} \Longleftrightarrow \sum\limits_{k=0}^{n} U_k = \sum\limits_{k=0}^{n} V_{k+1} + \sum\limits_{k=0}^{n} V_k = V_{n+1} - V_0$. C'est à dire que $S_n = V_{n+1} - V_0$, où $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associée à la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$. Ce qui montre qu'elles sont bien de même nature.

1.5.5 Critère d'Abel

Théorème 1.5.2. *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ une série à termes quelconques ne gardant pas un signe constant, de la forme $\sum\limits_{n\geq 0} U_n = \sum\limits_{n\geq 0} a_n b_n$. Si la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et tend vers zéro, et que la suite $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p$ est bornée, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n b_n$ est convergente.*

Exemple 1.5.3. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ est convergente, car pour tout $n \geq 1$, le terme général $U_n = a_n b_n$, où la suite $a_n = \frac{1}{n}$ qui est bien positive et décroissante vers zéro, et la suite des sommes partielles associée à la suite $b_n = \sin n$ est bornée. En effet, pour tout $n \geq 1$:
$|S_n| = \left|\sum\limits_{p=1}^{n} b_p\right| = \left|\sum\limits_{p=1}^{n} \sin p\right| = \left|\sum\limits_{p=1}^{n} Im\left(e^{ip}\right)\right| = \left|Im\left[\sum\limits_{p=1}^{n} e^{ip}\right]\right| \leq \left|\sum\limits_{p=1}^{n} e^{ip}\right| = \left|e^i\left[\sum\limits_{p=0}^{n-1} e^{ip}\right]\right| = \left|e^i \frac{1-e^{in}}{1-e^i}\right| = |e^i|\left|\frac{1-e^{in}}{1-e^i}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{2-2\cos 1}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}} = M.$

Remarque 1.5.2. Notons que tous ces critères de convergence établis jusqu'ici sur les séries à termes quelconques restent valables pour déterminer la nature des séries à termes positifs.

1.6 Séries Alternées

Définition 1.6.1. La série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est dite alternée si son terme général $U_n = (-1)^n V_n$, où $V_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.6.1. *Soit* $\sum\limits_{n\geq 0} U_n = \sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n V_n$ *une série alternée. Si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *la suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et tend vers zéro, alors la série* $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ *est convergente. De plus, si* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k V_k$ *est son reste d'ordre* n, *alors on a* $|R_n| \leq V_{n+1}$.

Exemple 1.6.1. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ ets une série alternée convergente.

Remarque 1.6.1. Le critère de convergence des séries alternées est un cas particulier du critère d'Abel.

1.7 Produit de deux Séries

Définition 1.7.1. Soient $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ deux séries numériques. La série produit des deux séries $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ est une série $\sum\limits_{n\geq 0} W_n$, où $W_n = \sum\limits_{p=0}^{n} U_p V_{n-p}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.7.1. *Soient* $\sum_{n\geq 0} U_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} V_n$ *deux séries numériques à termes quelconques absolument convergentes, de sommes* U *et* V *repectivement. Alors la série produit* $\sum_{n\geq 0} W_n$ *est aussi absolument convergente et a pour somme la valeur* UV.

Théorème 1.7.2. *Soient* $\sum_{n\geq 0} U_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} V_n$ *deux séries numériques à termes positifs convergentes, de sommes* U *et* V *repectivement. Alors la série produit* $\sum_{n\geq 0} W_n$ *est aussi convergente et a pour somme la valeur* UV.

Exemple 1.7.1. Pour les séries numériques de terme génaral $U_n = V_n = \frac{1}{2^n}$, la série produit $\left(\sum_{n\geq 0} U_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} V_n\right)$ est de terme général $W_n = \sum_{p=0}^{n} U_p V_{n-p} = \frac{n+1}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}$, convergente et de somme égale

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} V_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right)^2 = 4$$

.

1.8 Exercices

Exercice 1.8.1. Donner la nature des séries numériques suivantes en se servant du critère des suites des sommes partielles associées.

$$a_n = \frac{(n+1)}{3^n}; \quad b_n = \frac{(n-(-1)^n)}{3^n} \quad c_n = \frac{1+2+\cdots+n}{1^3+2^3+\cdots+n^3}.$$

$$d_n = \frac{n^4-(n+1)^3}{n!}; v_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}; w_n = \log(1-\frac{1}{n^2}).$$

Corrigé 1.8.1. Notons par $(A_n), (B_n), (C_n), (D_n), (V_n)$ et (W_n) les suites des sommes partielles associées aux séries précédentes respectivement. Alors, on aura :

1. $A_n = \sum_{p=0}^{n} a_p = \sum_{p=0}^{n} \frac{p+1}{3^p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{3^p} + \sum_{p=0}^{n} \frac{p}{3^p} = \left[\frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right] + \sum_{p=0}^{n} \frac{p}{3^p} = S_n + S_n'$, où

$$\begin{cases} S_n = \dfrac{1-(1/3)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} \to_{n\to+\infty} \dfrac{3}{2}; \\ S_n' = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{p}{3^p} = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{p}{3^p} = \sum_{p=0}^{n-1} \dfrac{p+1}{3^{p+1}} = \dfrac{1}{3} A_{n-1}. \end{cases}$$

Ainsi, on aura

$$A_n = S_n + \frac{1}{3}A_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} A_n = \lim_{n\to+\infty} S_n + \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty} A_{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} A_n = \frac{9}{4}.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et a pour somme la valeur 9/4.

2. $B_n = \sum_{p=0}^{n} b_p = \sum_{p=0}^{n} \frac{(p-(-1)^p)}{3^p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{p}{3^p} - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{3^p} = S_n^{'} - S_n^{''}$, où

$$\begin{cases} S_n^{'} = \sum_{p=1}^{n} \frac{p}{3^p} = \sum_{p=0}^{n-1} \frac{p+1}{3^{p+1}} = \frac{1}{3}A_{n-1} \to_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \times \frac{9}{4} = 3/4; \\ S_n^{''} = \dfrac{1-(-1/3)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{3}} \to_{n\to+\infty} \dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$B_n = S_n^{'} - S_n^{''} = \frac{1}{3}A_{n-1} - \frac{1-(-1/3)^{n+1}}{1+\dfrac{1}{3}} \to_{n\to+\infty} 0.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} b_n$ converge et a pour somme la valeur nulle.

3. $C_n = \sum_{p=1}^{n} c_p = \sum_{p=1}^{n} \frac{1+2+\cdots+p}{1^3+2^3+\cdots+p^3} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1+2+\cdots+p}{(1+2+\cdots+p)^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{2}{p(p+1)} = 2\sum_{p=1}^{n}(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}) = 2(1-\frac{1}{n+1}) \to_{n\to+\infty} 2.$
Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ converge et a pour somme la valeur 2.

4. $D_n = \sum_{p=0}^{n} d_p = \sum_{p=0}^{n} \frac{p^4-(p+1)^3}{p!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{p^4}{p!} - \sum_{p=0}^{n} \frac{(p+1)^3}{p!} = \frac{(n+1)^3}{n!} \to_{n\to\infty} 0.$
Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et a pour somme la valeur nulle.

5.

$$V_n = \sum_{p=0}^{n} v_p = \sum_{p=0}^{n} \frac{p}{p^4+p^2+1} = \sum_{p=0}^{n} \frac{p}{(p^2+p+1)(p^2-p+1)} = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n}\left(\underbrace{\frac{1}{p^2-p+1}}_{=x_p} - \underbrace{\frac{1}{p^2+p+1}}_{=x_{p+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{n}(x_p - x_{p+1}) = \frac{1}{2}(x_0 - x_{n+1}) = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{n^2+n+1}) \to_{n\to+\infty} \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge et a pour somme la valeur 1/2.

6.
$$W_n = \sum_{p=2}^{n} w_p = \sum_{p=2}^{n} \log(1 - \frac{1}{p^2}) = \sum_{p=2}^{n} (\log(p+1) + \log(p-1) - 2\log p)$$
$$= -\log 2 - \log n + \log(n+1) = -\log 2 - \log \frac{n+1}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} -\log 2.$$

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 0} w_n$ converge et a pour somme la valeur $-\log 2$.

Exercice 1.8.2. Soit à étudier la nature de la série numérique de Bertrand de terme général
$$U_n = \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}, \quad \text{où} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}.$$

Corrigé 1.8.2. Vérifions d'abord la condition nécessaire de convergence, en cherchant :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} = \begin{cases} 0 & \text{Si } \alpha > 0, \forall \beta > 0; \\ +\infty & \text{Si } \alpha < 0, \forall \beta > 0; \\ 0 & \text{Si } \alpha = 0, \forall \beta > 0;. \\ 1 & \text{Si } \alpha = 0, \forall \beta = 0; \\ +\infty & \text{Si } \alpha = 0, \forall \beta < 0. \end{cases}$$

Ainsi la condition nécessaire n'est vérifiée que si $(\alpha > 0, \forall \beta)$ ou $(\alpha = 0, \forall \beta > 0)$. Ce qui entraine la divergence de la série $\sum U_n$ pour tout $(\alpha < 0, \forall \beta > 0)$ ou $(\alpha = 0, \forall \beta \leq 0)$. Notons que la série $\sum U_n$ et à termes spositifs. On peut alors lui appliquer le critère de comparaison à une série de Riemann, en cherchant :
$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} n^\gamma U_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^\gamma}{n^\alpha (\log n)^\beta} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n^{\gamma-\alpha}}{(\log n)^\beta} =$$
$$\begin{cases} 0 & \text{Si } \gamma - \alpha < 0, \forall \beta; & (i) \\ +\infty & \text{Si } \gamma - \alpha > 0, \forall \beta; & (ii) \\ 0 & \text{Si } \gamma - \alpha = 0, \forall \beta > 0; & (iii). \\ 1 & \text{Si } \gamma - \alpha = 0, \forall \beta = 0; & (iv) \\ +\infty & \text{Si } \gamma - \alpha = 0, \forall \beta < 0 & (v). \end{cases}$$

- De (i), on a bien $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^\gamma U_n = 0, \forall \gamma - \alpha < 0, \forall \beta \Longleftrightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^\gamma U_n = 0, \forall \alpha > \gamma, \forall \beta.$

En particulier, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^\gamma U_n = 0$ même pour tout $\alpha > \gamma > 1, \forall \beta$.

Or pour $\gamma > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\gamma}$ est convergente. Par conséquent, la série $\sum U_n$ converge si $\alpha > 1$ et $\forall \beta$.

• De (ii), on a bien $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^{\gamma} U_n = +\infty, \forall \gamma - \alpha > 0, \forall \beta \Longleftrightarrow \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^{\gamma} U_n = +\infty, \forall \alpha < \gamma, \forall \beta$.

En particulier, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} n^{\gamma} U_n = +\infty$ même pour tout $\alpha < \gamma < 1, \forall \beta$.
Or pour $\gamma < 1$, la série $\sum \frac{1}{n^{\gamma}}$ est divergente. Par conséquent, la série $\sum U_n$ diverge si $\alpha < 1$ et $\forall \beta$.

• Il reste le cas où $\alpha = 1, \beta \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on peut appliquer le critère Intégrale de Cauchy, car la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x(\log x)^{\beta}}$ est bien positive, décroissante et tendant vers zero. Ainsi, la série $\sum U_n$ est de même nature que l'intégrale $I(\beta) = \int\limits_{k}^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{\beta}}$, que l'on va établir comme suit :

$$I(\beta) = \int\limits_{k}^{\infty} \frac{dx}{x(\log x)^{\beta}} = \lim_{A \longrightarrow +\infty} \int\limits_{k}^{A} \frac{dx}{x(\log x)^{\beta}}$$

$$= \lim_{A \longrightarrow +\infty} \int\limits_{k}^{A} \frac{\frac{1}{x}}{(\log x)^{\beta}} dx = \lim_{A \longrightarrow +\infty} \left[\frac{1}{1-\beta} (\log x)^{1-\beta} \right]_{k}^{A}, \forall \beta \neq 1$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\beta - 1} (\log k)^{1-\beta} & \text{Si} \quad \beta > 1; \qquad (1) \\ +\infty & \text{Si} \quad \beta < 1. \qquad (2) \end{cases}$$

De (1) et (2), on déduit que l'intégrale $I(\beta)$ est convergente si $\alpha = 1, \beta > 1$ et divergente si $\alpha = 1, 0 < \beta < 1$. Par conséquent, la série $\sum U_n$ est convergente si $\alpha = 1, \beta > 1$ et divergente si $\alpha = 1, 0 < \beta < 1$.

• Si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, alors :

$$I(\beta) = \int\limits_{k}^{\infty} \frac{dx}{x \log x} = \lim_{A \longrightarrow +\infty} \int\limits_{k}^{A} \frac{dx}{x \log x} = \lim_{A \longrightarrow +\infty} \int\limits_{k}^{A} \frac{\frac{1}{x}}{\log x} dx = \lim_{A \longrightarrow +\infty} [\log \log x] = +\infty.$$

Ce qui implique la divergence de $I(\beta)$, et donc celle de la série $\sum U_n$, si $\alpha = 1$ et $\beta = 1$.

• Conclusion :

La série de Bertrand converge si $(\alpha > 1, \forall\beta)$ ou $(\alpha = 1, \forall\beta > 1)$ et diverge si $(\alpha < 1, \forall\beta)$ ou $(\alpha = 1, \forall\beta \leq 1)$.

Exercice 1.8.3. Indiquer la nature de la série $\sum U_n$ dans chacun des cas suivants :
a)- $U_n = \dfrac{2^n}{1+3^n}$; $\quad b) -\ U_n = \dfrac{1}{(\log n)^p}, p > 0$; $\quad c) -\ U_n = \dfrac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^2, \alpha \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$;
$d) -\ U_n = \dfrac{1+\log n}{n\sqrt{n}}$;
e)- $U_n = \dfrac{\sin^2 n}{n^\alpha}$; $\quad f) -\ U_n = [1 + \dfrac{(-1)^n \log n}{n^\alpha}]$; $\quad g) -\ U_n = \dfrac{n^{2\alpha}}{\alpha^n + \log n}$,
$h) -\ U_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^\alpha}, \alpha > 0$.

Corrigé 1.8.3. Notons que les séries proposées sont à termes positifs.

a)- Il suffit de remarquer que $U_n = \dfrac{2^n}{1+3^n} \leq (2/3)^n$ qui est le terme d'une série géométrique de raison $k = (2/3) < 1$, donc convergente. Ce qui entraine la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{2^n}{1+3^n}$.

b)- Il suffit d'utiliser le critère de comparaison à une série de Riemann. En effet, on a bien $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha \dfrac{1}{(\log n)^p} = +\infty, \forall\alpha \geq 0$ et pour tout $p > 0$. En particulier, ceci est vrai même pour un $0 \leq \alpha \leq 1$ et indépendemment de p. Or, pour $\alpha \leq 1$, la série de Riemann $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente. Ce qui entraîne la divergence de $\sum\limits_{n\geq 2} \dfrac{1}{(\log n)^p}, \forall p > 0$.

c)- Pour la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^2, \alpha \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, on a deux cas à distinguer :

i)- Si $\alpha = 0$, alors $U_n = 0$.

ii)- Si $\alpha \in]0, \dfrac{\pi}{2}]$, il suffit d'appliquer la règle de d'Alembert. En effet, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}\dfrac{n^2}{2^n} = 2 \lim\limits_{n\to+\infty} (\dfrac{n}{n+1})^2 = 2 > 1.$

De i) et ii), on déduit la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{2^n}{n^2}(\sin\alpha)^2$ si et ssi $\alpha = 0$.

d)- $U_n = \dfrac{1+\log n}{n\sqrt{n}} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}} + \dfrac{\log n}{n\sqrt{n}} = V_n + W_n$.

La série $\sum\limits_{n\geq 1} V_n = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha > 1$).

La série $\sum\limits_{n\geq 1} W_n = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{\log n}{n\sqrt{n}}$ est aussi convergente car on peut toujours trouver un α tel que $1 < \alpha < 3/2$ de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha W_n = 0$.

Ainsi, la série $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$ converge comme la somme de deux séries convergentes.

e)- La série de terme général $U_n = \dfrac{\sin^2 n}{n^\alpha}, \alpha > 0$, peut s'écrire de la manière suivante :

$U_n = \dfrac{\sin^2 n}{n^\alpha} = \dfrac{1-\cos 2n}{2n^\alpha} = \dfrac{1}{2n^\alpha} - \dfrac{\cos 2n}{2n^\alpha} = V_n + W_n$.

Or, la série $\sum\limits_{n\geq 1} V_n = \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{2n^\alpha}$ est une série de Riemann convergente si et ssi $\alpha > 1$.

D'autre part, grâce au critère d'Abel, la série $\sum\limits_{n\geq 1} W_n = \sum\limits_{n\geq 1} -\dfrac{\cos 2n}{2n^\alpha}$ est aussi convergente pour tout α positif. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$ va converger pour tout $\alpha > 1$.

f)- La série de terme général $U_n = [1 + \dfrac{(-1)^n \log n}{n^\alpha}]$ est divergente car la condition nécessaire de convergence n'est pas vérifiée $\forall \alpha$.

g)- Soit la série de terme général $U_n = \dfrac{n^{2\alpha}}{\alpha^n + \log n}, \alpha > 0$. Pour déterminer sa nature, vérifions d'abord la condition nécessaire de convergence. Pour cela, cherchons $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$, en se servant du critère d'équivalence connu sur les suites numériques, comme suit :

$$U_n \simeq \begin{cases} \dfrac{n^{2\alpha}}{\alpha^n}, & \text{Si } \ \alpha > 1. \\ \dfrac{n^2}{1+\log n}, & \text{Si } \ \alpha = 1. \\ \dfrac{n^{2\alpha}}{\log n}, & \text{Si } \ \alpha < 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Par passage à la limite, on obtient facilement les résultats suivants :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \begin{cases} 0 & \text{Si } \ \alpha > 1, \\ +\infty & \text{Si } \ \alpha = 1, \\ +\infty & \text{Si } \ \alpha < 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

La condition nécessaire n'est donc vérifiée que pour $\alpha > 1$, par conséquent la série $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$ est divergente si $0 < \alpha \leq 1$.

Maintenant si $\alpha > 1$, il suffit de se servir du critère d'équivalence combiné avec la régle de d'Alembert.

En effet, pour $\alpha > 1, U_n \simeq \dfrac{n^{2\alpha}}{\alpha^n} = V_n$. Ainsi, les séries $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} V_n$ sont de même nature. Comme, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{1}{\alpha} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{2\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} < 1$, on déduit alors la convergence des deux séries.

h)- De même pour déterminer la nature de la série de terme général $U_n = (\dfrac{n}{n+1})^{n^\alpha}, \alpha > 0$, nous allons d'abord vérifier la condition nécessaire de convergence après avoir déterminé son équivalent. On aura ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} e^{-n^{\alpha-1}} = \begin{cases} 0 & \text{Si } \alpha > 1, \\ \dfrac{1}{e} & \text{Si } \alpha = 1, \\ 1 & \text{Si } \alpha < 1. \end{cases} \tag{1.3}$$

La condition nécessaire n'est donc vérifiée que pour $\alpha > 1$, par conséquent la série $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$ est divergente si $0 < \alpha \leq 1$.

Maintenant si $\alpha > 1$, il suffit de se servir du critère d'équivalence combiné avec la régle de Cauchy comme suit :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{e^{-n^{\alpha-1}}} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n^{\alpha-2}} = \begin{cases} 0 & \text{Si } \alpha > 2, \\ \dfrac{1}{e} & \text{Si } \alpha = 2, \\ 1 & \text{Si } 1 < \alpha < 2. \end{cases} \tag{1.4}$$

Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est convergente si $\alpha \geq 2$.

Exercice 1.8.4. Indiquer la nature des séries numériques de terme général

a)- $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}, \alpha > 0$.

b)- $U_n = \left[1 - \left(\dfrac{\log n}{(\log(n+1))}\right)^n\right] \dfrac{\log n}{n^\alpha}, \alpha > 0$.

Corrigé 1.8.4. a)- Notons que, bien que la série de terme général $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}, \alpha > 0$ est une série alternée, à partir, dont la condition nécessaire de convergence est vérifiée $\forall\alpha > 0$, on ne peut pas comme même se servir du critère de convergence des séries alternées à cause de la non décroissance de la suite $\frac{1}{n^\alpha + (-1)^n}$.

Ainsi pour déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$, on va procéder comme suit :

$$U_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{V_n} - \underbrace{\frac{1}{n^{2\alpha}}}_{W_n} + \underbrace{\frac{1}{n^{2\alpha}}\varepsilon(\frac{1}{n^{2\alpha}})}_{Z_n}, \tag{1.5}$$

où $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(\frac{1}{n^{2\alpha}}) = 0, \forall\alpha > 0$. Autrement dit,

$$U_n \simeq \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}}_{V_n} - \underbrace{\frac{1}{n^{2\alpha}}}_{W_n}, \forall\alpha > 0. \tag{1.6}$$

Or d'une part, la série $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ est une série alternée convergente pour tout $\alpha > 0$. D'autre part, la série $\sum\limits_{n\geq 0} W_n$ est une série de Riemann convergente si et ssi $\alpha > 1/2$. On déduit alors la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ si et ssi $\alpha > 1/2$.

b)- Pour déterminer la nature de cette série, nous alllons d'abord simplifier son expression, en lui cherchant un équivalent comme suit :

a)-

$$U_n = \left[1 - \left(\frac{\log n}{\log(n+1)}\right)^n\right]\frac{\log n}{n^\alpha} = \left[1 - \left(\frac{\log n}{\log(n(1+\frac{1}{n}))}\right)^n\right]\frac{\log n}{n^\alpha}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{\log n}{\log n + \log(1+\frac{1}{n})}\right)^n\right]\frac{\log n}{n^\alpha} = \left[1 - \left(\frac{\log n}{\log n\left(1 + \frac{\log(1+\frac{1}{n})}{\log n}\right)}\right)^n\right]\frac{\log n}{n^\alpha}$$

$$\simeq \left[1 - \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n\log n}}\right)^n\right]\frac{\log n}{n^\alpha} \simeq \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n\log n}\right)^n\right]\frac{\log n}{n^\alpha} \simeq \frac{1}{n^\alpha}$$

qui est une série de Riemann convergente si et ssi $\alpha > 1$. En vertu du critère d'équivalence, on déduit la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} U_n$ si et ssi $\alpha > 1$.

Exercice 1.8.5. Soit la série de terme général U_n suivante :

$$U_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \; dx$$

1)- Montrer que la série $\sum U_n$ est alternée.

2)- Retrouver sa nature puis calculer sa somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n$ de deux manières différentes.

Corrigé 1.8.5. Soit la série de terme général U_n suivante :

$$U_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \; dx$$

1)- **Montrons que la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est alternée.**

Faisons un changement de variable en posant : $x = n\pi + t$. On obtient ainsi l'expression suivante :

$$U_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx = \int\limits_{0}^{\pi} e^{(-n\pi - t)} \, \sin(n\pi + t) \, dt = (-1)^n e^{-n\pi} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-t} \sin(t) \, dt = (-1)^n e^{-n\pi} U_0.$$

Après une double intégration par parties, on trouve :

$$U_0 = \int\limits_{0}^{\pi} e^{-t} \sin(t) \; dt = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}.$$

D'où l'expression récurrente de U_n en fonction de U_0 suivante :

$$U_n = (-1)^n e^{-n\pi} U_0 = (-1)^n \frac{1 + e^{-\pi}}{2} \; e^{-n\pi} = (-1)^n V_n.$$

$(V_n)_n$ est bien une suite numérique à termes positifs, donc la série numérique $\sum\limits_{n0} U_n$ est bien une série alternée. La décroissance vers zéro de la $(V_n)_n$ entraîne la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$.

2)- **Calculons la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n$:**

Pour calculer la somme demandée, on peut procéder de deux manières différentes.

Première Méthode : Elle consiste à consommer directement le résultat trouvé à la question précédente. En effet, notons par S la somme de cette série numérique, on aura alors :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = U_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-n\pi} = \lim_{n\to+\infty} U_0 \frac{1+e^{-(-n+1)\pi}}{1+e^{-\pi}} = \frac{1}{2}.$$

Deuxième Méthode : Elle consiste à nous ramener à l'étude d'une intégrale impropre, du fait que :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \; dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-x} \sin x \; dx.$$

Après une double intégration par parties, on trouve :

$$S = I = 1/2$$

Exercice 1.8.6. Retrouver la nature de la série numérique de terme génaral $U_n = \dfrac{(n+1)}{3^n}$ puis calculer sa somme en se servant des séries produit.

Corrigé 1.8.6. La série $\sum_{n\geq 0} U_n$ est convergente grâce à la règle de d'Alembert. En effet, on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{3} \lim_{n\to+\infty} \frac{n+2}{n+1} = 1/3 < 1.$$

Pour calculer sa somme, posons $a_n = \dfrac{1}{3^n}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $(\dfrac{1}{3} < 1)$ donc convergente et ayant pour somme la valeur $S = \dfrac{3}{2}$.

Il est simple de constater alors que $\dfrac{1}{3^n} = \dfrac{1}{3^p}\dfrac{1}{3^{n-p}}$. A présent, on peut réécrire U_n sous la forme suivante :

$$U_n = (n+1)\frac{1}{3^n} = (n+1)a_n = \sum_{p=0}^{n} a_n = \sum_{p=0}^{n} a_p a_{n-p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{3^p}\frac{1}{3^{n-p}}$$

qui est le terme général de la série produit

$$\left(\sum_{n\geq 0} a_n\right) \times \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right) = \left(\sum_{n\geq 0} a_n\right)^2$$

Par conséquent la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ est convergente et a pour somme la valeur $S^2 = \dfrac{9}{4}$.

Exercice 1.8.7. Monter que la série $\left(\sum\limits_{n\geq 0} U_n\right)^2 = \left(\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^n n!}\right)^2$ est convergente et puis calculer sa somme.

Corrigé 1.8.7. Nous allons retrouver une expression analytique plus simple pour la série $\left(\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{2^n n!}\right)^2$.

$$\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!}\right)^2 = \left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!}\right)\left(\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!}\right) = \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p p!}\frac{1}{2^{n-p}(n-p)!}\right)$$
$$= \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n}\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!(n-p)!}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n n!}\left(\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!(n-p)!}\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}.$$

La série $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!}$ est bien convergente, grâce à la règle d'Alembert. En effet, il suffit de calculer la limite suivante :

$$\lim_{n\longrightarrow +\infty}\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right) = \lim_{n\longrightarrow +\infty}\left(\frac{n!}{(n+1)!}\right) = 0 < 1.$$

A présent, on peut calculer sa somme, en se servant du dévelopement limité de la fonction e^x au voisinage du point $x = 0$. Il suffit juste de constater que $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!} = e^1$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ converge aussi et a pour somme la valeur $\sqrt{e}$.

Chapitre 2

Les Suites de Fonctions

Dans ce chapitre, nous allons étudier les suites de fonctions réelles $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i.e des suites dont les termes sont des fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$. Pour cela, il est clair que l'on va combiner toutes les notions fondamentales connues sur les suites numériques avec celles établies sur les fonctions rélles à une seule variable réelle. Nous allons nous interesser aux propriétés de la fonction limite en terme de continuité, dérivabilité, intégrabilité, etc ..., étant connues celles des fonctions $(f_n), \forall n \in \mathbb{N}$. La notion du simple passage à la limite connue dans le cadre des suites numériques nous permet de définir un critère dit de convergence simple des suites de fonctions.

2.1 Convergence Simple

Définition 2.1.1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dite simplement convergente sur $\mathbb{E}$, si pour tout $x \in \mathbb{E}$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente quand $n \to +\infty$. Si la fonction $f(x)$ est sa limite, la convergence simple s'exprime alors comme suit :

$$f_n \to_{n\to+\infty} f \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{E}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{E}, \forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon,x}, \forall n \geq N_{\epsilon,x} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Remarque 2.1.1. 1. Le nombre N dont l'existence est affirmée après le choix de ϵ et de x dépend de ce choix.

2. Toutes les propriétés sur les limites des suites numériques se traduisent immédiatement comme des propriétés sur les limites simples des suites de fonctions.

Exemple 2.1.1. Prenons $\mathbb{E} = [0, 1]$ et la suite de fonctions définie par

$$x \longmapsto f_n(x) = \frac{x}{1+nx}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par un simple passage à la limite, on aura $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 0, \forall x \neq 0$. Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$. Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f \equiv 0$ sur $[0, 1]$. Notons que toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{E}$ ainsi que la fonction limite f.

Exemple 2.1.2. Prenons $\mathbb{E} = [0, 1]$ et la suite de fonctions définie par

$$x \longmapsto f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par un simple passage à la limite, on aura $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = 1, \forall x \neq 0$. Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0$. Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si} \;\; x = 0. \end{cases}$

Notons que toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{E}$ mais la fonction limite f ne l'est pas.

Exemple 2.1.3. Prenons $\mathbb{E} = \mathbb{R}$ et la suite de fonctions définie par

$$x \longmapsto f_n(x) = \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Un simple passage à la limite nous permet d'avoir $\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.
Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \longmapsto f(x) = |x|$. On voit bien que toutes les fonctions f_n sont dérivables sur $\mathbb{E}$ mais la fonction limite f ne l'est pas.

Exemple 2.1.4. Prenons $\mathbb{E} =]0, 1]$ et la suite de fonctions définie par

$$x \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \;\; 0 < x \leq \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \;\; \dfrac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Par un simple passage à la limite, on obtient une fonction limite définie par :

$$f :]0,1] \to \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{x}$$

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers sur $]0,1]$ vers la fonction $x \longmapsto f(x) = \dfrac{1}{x}$. Comme on peut bien le constater, chacune des fonctions f_n est bornée sur $]0,1]$, mais la fonction limite f ne l'est pas.

Remarque 2.1.2. Pour l'étude des suites de fonctions, on dispose aussi, comme dans le cas des suites numériques, du critère de Cauchy qui est surtout d'un emploi théorique très utile dès que l'on veut montrer la convergence d'une suite dont on ignore la limite.

2.2 Critère de Cauchy

Par analogie aux suites numériques, il est naturel de poser la définition suivante.

Définition 2.2.1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dite simplement de Cauchy sur $\mathbb{E}$, si pour tout $x \in \mathbb{E}$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Ce qu'on peut exprimer formellement come suit :

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de Cauchy sur } \mathbb{E} \;\Leftrightarrow$$

$$\forall x \in \mathbb{E}, \forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon,x}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} / \; p > q > N_{\epsilon,x} \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon.$$

Théorème 2.2.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est simplement convergente sur $\mathbb{E}$, si et seulement si elle est simplement de Cauchy sur $\mathbb{E}$.*

Preuve 2.2.1. Le raisonnement est analogue à celui établi sur les suites numériques, il suffit juste de remplacer la valeur de la limite par la fonction f.

Exemple 2.2.1. La suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto f_n(x) = \sin(nx), \forall n \in \mathbb{N}$, n'est pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas de Cauchy sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2.2.1. Les exemples 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3 et 2.1.4 nous montrent que la convergence simple n'est pas suffisante pour que la fonction limite hérite des propriétés des fonctions f_n, d'où la nécessité de forger un autre critère beaucoup plus puissant dit *"de Convergence Uniforme"*.

2.3 Convergence Uniforme

Définition 2.3.1. Une suite de fonctions $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur une même partie $\mathbb{E}\subseteq\mathbb{R}$ converge uniformément sur $\mathbb{E}$ vers la fonction f, si à tout ϵ positif, on peut faire correspondre un nombre entier N_ϵ, ne dépendant que de ϵ, tel que $\forall n > N_\epsilon$, on ait $f_n(x)$ tend vers $f(x)$ uniformément sur $\mathbb{R}$. Autrement dit,

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } \mathbb{E} \Leftrightarrow$$

$$\forall\epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall n \geq N_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in \mathbb{E}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{E}} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Remarque 2.3.1. Il est facile de constater que la convergence uniforme entraîne la convergence simple mais que la réciproque est fausse.

Exemple 2.3.1. Soit la suite de fonctions définie par

$$f_n(x) = x^n, \quad \forall x \in [0,1], \quad \forall n \geq 0.$$

Par un simple passage à la limite, on aura $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = 0, \forall x \neq 1$. Si $x = 1$, alors $f_n(1) = 1$. Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } \; x = 1. \end{cases}$

Pour la convergence uniforme, il est clair qu'elle n'est pas vérifiée ni sur $[0,1]$ ni aussi sur $[0,1[$. En effet, on a : $\sup\limits_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,1[} |x|^n = 1 \nrightarrow 0$ quand $n \longrightarrow +\infty$. Le problème se pose justement au point $x = 1$ et tout son voisinage. En revanche, il y a convergence uniforme sur tout intervalle de type $[0,a]$ où $0 < a < 1$.

En effet, $\forall a, 0 < a < 1,\ \sup\limits_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in[0,a]} |x|^n = a^n \longrightarrow_{n\longrightarrow+\infty} 0$.

2.4 Convergence Uniforme de Cauchy

Comme dans le cadre de la convergence simple, le critère uniforme de Cauchy nous permet de juger de la convergence uniforme d'une suite de fonctions sans faire appel à l'expression analytique de sa fonction limite simple.

Définition 2.4.1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dite uniformément de Cauchy sur $\mathbb{E}$ si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}/\ p > q > N_\epsilon \Rightarrow |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon, \forall x \in \mathbb{E}.$$

En combinant le critère de Cauchy avec le critère de convergence uniforme, on obtient immédiatemment le résultat suivant.

Théorème 2.4.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$. Pour que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{E}$, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit uniformément de Cauchy sur $\mathbb{E}$.*

2.5 Propriétés de la fonction limite d'une suite de fonctions

Dans cette partie, nous allons donner les conditions suffisantes sous lesquelles la fonction limite f conserve certaines propriétés des fonctions f_n.

2.5.1 La continuité

Théorème 2.5.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$, uniformément convergente sur $\mathbb{E}$ vers f. Si les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{E}$, alors la fonction limite f est aussi continue sur $\mathbb{E}$.*

Preuve 2.5.1. On va procéder par définition équivalente de chaque notion. On sait alors que :

1.D'une part,

$$\text{les fonctions } f_n \text{ sont continues en tout point } a \in \mathbb{E}$$

$$\Leftrightarrow_{\text{par définition}} \forall \epsilon_1 > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{E} : |x - a| < \alpha \Rightarrow |f_n(x) - f_n(a)| < \epsilon_1 \quad (2.1)$$

2.D'autre part,

$$\text{la suite de fonctions } f_n \text{ est uniformément convregente vers } f \text{ sur } \mathbb{E}$$

$$\Leftrightarrow_{\text{par définition}} \forall \epsilon_2 >, \exists N_{\epsilon_2}, \forall n > N_{\epsilon_2} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon_2, \quad \forall x \in \mathbb{E} \quad (2.2)$$

Ceci reste vrai en particulier même pour $x = a$. C'est-à-dire que

$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists N_{\epsilon_2}, \forall n > N_{\epsilon_2} \Rightarrow |f_n(a) - f(a)| < \epsilon_2, \quad (2.3)$$

Pour montrer que la fonction limite f est continue sur $\mathbb{E}$, il suffit de montrer qu'elle est continue en tout point $a \in \mathbb{E}$. Ce qui est équivalent par définition à :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{E} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

En effet, on a bien :

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{<\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{<\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{3}}$$

Ainsi, il suffit de prendre $\delta = \alpha$ pour que :

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{E} : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \quad (2.5)$$

Ce qui traduit bien la continuité de la fonction limite f en tout point $a \in \mathbb{E}$.

Corollaire 2.5.1. *Si une suite de fonctions continues sur $\mathbb{E}$, converge uniformément sur $\mathbb{E}$, alors sa limite est une fonction continue sur $\mathbb{E}$.*

2.5.2 L'intégrabilité

Théorème 2.5.2. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $\mathbb{E} = [a, b]$, uniformément convergente sur $[a, b]$ vers f. Si les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{E}$. Alors,*

1. *La fonction f est intégrable sur $[a,b]$.*
2. *De plus,* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$

C'est à dire que la convergence uniforme conserve l'intégrabilité et permet alors d'intervertir le signe limite et le signe intégrale.

Preuve 2.5.2. i)- Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, uniformément convergente sur $[a,b]$ vers la fonction limite f. Alors en vertu du Theorème2.5.1, f est continue sur $[a,b]$ et donc aussi intégrable sur $[a,b]$.

ii)- On sait que

La suite de fonctions f_n est uniformément convregente vers f sur $[a,b]$.

$$\Leftrightarrow_{\text{par définition}} \forall\epsilon>0, \exists N_\epsilon, \forall n>N_\epsilon \Rightarrow |f_n(x)-f(x)| < \frac{\epsilon}{(b-a)}, \quad \forall x\in[a,b] \quad (2.6)$$

On sait aussi que

$$\left|\int\limits_a^b [f_n(x)-f(x)]dx\right| \leq \int\limits_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx \quad (2.7)$$

On cherche alors à avoir

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$$

$$\Leftrightarrow_{\text{par définition}} \forall\epsilon>0, \exists N_\epsilon, \forall n>N_\epsilon \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx\right| < \epsilon$$

En effet, en se servant du résultat (2.6) et de l'inégalité (2.7), on obtient alors

$$\forall\epsilon>0, \exists N_\epsilon, \forall n>N_\epsilon \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f_n(x)-f(x)|\,dx < \epsilon.$$

Ce qui achève notre démonstration.

2.5.3 La dérivabilité

Théorème 2.5.3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions continument dérivables sur* $[a,b]$. *Si,*

a)- La suite des fonctions dérivées $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $[a,b]$.

b)- Pour un point $x_0 \in [a,b]$, *la suite numérique* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente.*

Alors

1. *La suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *vers une fonction* f *continument dérivable sur* $[a,b]$.
2. *De plus,* $\dfrac{d}{dx}\left[\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x)\right] = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty}\left[\dfrac{d}{dx}f_n(x)\right]$.

Autrement dit, la convegence uniforme nous permet d'intervertir les opérations de dérivation et de passage à la limite.

Preuve 2.5.3. Soit x, x_0 deux points de $[a,b]$ avec $a \leq x_0 \leq x \leq b$. On sait que les fonctions f_n sont continument dérivables sur $[a,b]$ (condition a). Ceci veut dire qu'elles sont de calsse $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Autrement dit, elles sont continues, dérivables et leurs dérivées sont continues sur $[a,b]$. Ainsi, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n^{'}(t)dt. \tag{2.8}$$

Si la suite des fonctions dérivées $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ (toujours de la condition a), alors elle l'est aussi sur $[x_0, x] \subseteq [a,b]$. Il en résulte alors d'après le Théorème 2.5.2, que

$$\lim_{n\to+\infty}[f_n(x) - f_n(x_0)] = \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} f_n^{'}(t)dt.$$

Compte tenu de la convergence de la suite $(f_n(x_0)$ (condition b), on déduit celle de la suite (f_n) vers une fonction f. Par passage à la limite dans (2.8), on botient :

$$f(x) = f(x_0) + \lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x} f_n^{'}(t)dt. \tag{2.9}$$

Ce qui peut être réécrit grace à la convergence uniforme des fonctions dérivées $(f_n^{'})_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,b]$ comme

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \lim_{n\to+\infty} f_n^{'}(t)dt. \tag{2.10}$$

On déduit alors que

$$\lim_{n\to+\infty}[f_n^{'}(x)] = [\lim_{n\to+\infty} f_n(x)]^{'}. \tag{2.11}$$

Il reste à montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction continue f sur $[a,b]$. Formellement, ceci est équivalent à montrer que

$$\forall\epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall n > N_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall x \in [a,b].$$

En effet, pour tout $x \in [a,b]$ on a :

$$f(x)-f_n(x) = f(x)-f(x_0)+f(x_0)-f_n(x_0)+f_n(x_0)-f_n(x) = f(x_0)-f_n(x_0)+\int_{x_0}^{x}[f^{'}(t)-f_n^{'}(t)]dt.$$

Ainsi

$$|f(x)-f_n(x)| \leq |f(x_0)-f_n(x_0)|+\left|\int_{x_0}^{x}[f^{'}(t) - f_n^{'}(t)]dt\right| \leq \underbrace{|f(x_0) - f_n(x_0)|}_{<\frac{\epsilon}{2}} + \int_{x_0}^{x} \underbrace{\left|f^{'}(t) - f_n^{'}(t)\right|}_{<\frac{\epsilon}{2(x-x_0)}} dt.$$

Car, d'une part d'après (2.11), on a

$$\forall\epsilon > 0, \forall x, x_0, [x,x_0] \subseteq [a,b], \exists N_\epsilon^1, \forall n > N_\epsilon^1 \Rightarrow |f_n^{'}(x) - f^{'}(x)| < \frac{\epsilon}{2(x-x_0)}.$$

D'autre part, compte tenu de la convergence de la suite $(f_n(x_0)$ (condition b), on aura

$$\forall\epsilon > 0, \exists N_\epsilon^2, \forall n > N_\epsilon^2 \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Finalement, il suffit de choisir un rang $N_\epsilon = \sup(N_1, N_2)$, à partir duquel on ait

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{(x-x_0)\epsilon}{2(x-x_0)} = \epsilon, \forall\epsilon > 0, \forall x \in [a,b].$$

Ce qui achève notre démonstration.

2.6 Exercices

Exercice 2.6.1. a)- Montrer que, si une suite $(f_n : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions croissantes sur un intervalle $\mathbb{I}$ de $\mathbb{R}$ converge simplement sur $\mathbb{I}$ vers une fonction $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors f est aussi croissante sur $\mathbb{I}$.

b)- Montrer que, si une suite $(f_n : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions bornées sur un intervalle $\mathbb{I}$ de $\mathbb{R}$ converge uniformément sur $\mathbb{I}$ vers une fonction $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors f est bornée sur $\mathbb{I}$.

c)- Montrer que, si une suite $(f_n : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions uniformément continues sur un intervalle $\mathbb{I}$ de $\mathbb{R}$ converge uniformément sur $\mathbb{I}$ vers une fonction $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors f est uniformément continue sur $\mathbb{I}$.

Corrigé 2.6.1. On va procéder par définition équivalente de chaque notion évoquée dans cet exercice.

a)- Soit $(f_n : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes sur $\mathbb{I}$ $\Leftrightarrow_{\text{par définition}}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{I}\times\mathbb{I}/x \geq y \Rightarrow f_n(x) \geq f_n(y)$.

Si cette suite converge simplement sur $\mathbb{I}$ vers une fonction $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}$, alors par un simple passage à la limite, on aura

$$\forall (x,y) \in \mathbb{I}\times\mathbb{I}/x \geq y \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \geq \lim_{n\to+\infty} f_n(y) = f(y).$$

Ce qui traduit bien la croissance de la fonction limite f sur $\mathbb{I}$.

b)- On sait que :

1. D'une part,

$$\text{les fonctions } f_n \text{ sont bornées sur } \mathbb{I}$$

$$\Leftrightarrow_{\text{par définition}} \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \exists M > 0/\forall x \in \mathbb{I}, |f_n(x)| \leq M, \forall n \geq 0. \tag{2.12}$$

2. D'autre part,

$$\text{la suite de fonctions } f_n \text{ est uniformément convregente vers } f \text{ sur } \mathbb{I}$$

$$\Leftrightarrow_{\text{par définition}} \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall n \geq N_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in \mathbb{I} \tag{2.13}$$

Ceci reste vrai en particulier même pour $\epsilon = 1$. C'est-à-dire que

$$\Leftrightarrow_{\text{par définition}} \exists N, \forall n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < 1, \quad \forall x \in \mathbb{I} \tag{2.14}$$

Il reste à montrer que la fonction limite uniforme f est bornée. En effet, on a :

$$|f(x)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq 1 + M = M^{'}, \forall x \in \mathbb{I}.$$

Ce qui est équivalent à dire que f est bornée sur $\mathbb{I}$.

c)- 1.Là aussi,

les fonctions f_n sont uniformément continues sur $\mathbb{I}$

$\Leftrightarrow$ les fonctions f_n sont uniformément continues en tout point $a \in \mathbb{I}$

$$\Leftrightarrow_{\text{par définition}} \forall \epsilon_1 > 0, \exists \alpha_{\epsilon_1} > 0, \forall x \in \mathbb{I} : |x-a| < \alpha_{\epsilon_1} \Rightarrow |f_n(x)-f_n(a)| < \epsilon_1 \tag{2.15}$$

2.D'autre part,

la suite de fonctions f_n est uniformément convregente vers f sur $\mathbb{I}$

$$\Leftrightarrow_{\text{par définition}} \forall \epsilon_2 >, \exists N_{\epsilon_2}, \forall n > N_{\epsilon_2} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon_2, \quad \forall x \in \mathbb{I} \tag{2.16}$$

Ceci reste vrai en particulier même pour $x = a$. C'est-à-dire que

$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists N_{\epsilon_2}, \forall n > N_{\epsilon_2} \Rightarrow |f_n(a) - f(a)| < \epsilon_2. \tag{2.17}$$

Pour montrer que la fonction limite f est uniformément continue sur $\mathbb{I}$, il suffit de montrer qu'elle est uniformément continue en tout point $a \in \mathbb{I}$. Ce qui est équivalent à montrer par définition à :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{I} : |x - a| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

En effet, on a bien :

$$|f(x) - f(a)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)|$$

$$\leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\epsilon_2=\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(a)|}_{<\epsilon_1=\frac{\epsilon}{3}} + \underbrace{|f_n(a) - f(a)|}_{<\epsilon_2=\frac{\epsilon}{3}}$$

Ainsi, il suffit de prendre $\delta_\epsilon = \alpha_{\epsilon_1}$ pour que :

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{I} : |x - a| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon \tag{2.19}$$

Ce qui traduit bien la continuité uniforme de la fonction limite f sur $\mathbb{I}$.

Exercice 2.6.2. Etudier la nature (Convergence Simple et Uniforme) des suites de fonctions suivantes :

$$a) - f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \log(x + \frac{1}{n}), \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b)- f$_n$: $[1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{x}{n(1 + x^n)}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$

c)- f$_n$: $[0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

d)- f$_n$: $[-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \dfrac{x}{(1 + n^2x^2)}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

Corrigé 2.6.2. a)- Nature de la suite de fonctions donnée par :

$$f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \log(x + \frac{1}{n}), \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a.1)- **Convergence Simple :** Notons que les fonctions (f_n) sont toutes bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+, \forall n \geq 1$. Par un simple passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \log(x + \frac{1}{n}) = \log x, \forall x > 0.$$

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = \log \frac{1}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} -\infty$. Donc, la suite $(f_n(0))_n$ est divergente. Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $x \longmapsto f(x) = \log x$.

a.2)- **Convergence Uniforme :** Bien que cette fonction limite est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$, la convergence uniforme ne peut avoir lieu sur $\mathbb{R}_+^*$ ni sur

$\mathbb{R}_+$. Ceci est dû au fait que le point $x = 0$ et son voisinage posent problème. En effet, pour le point $x = 0$, il est clair qu'il ne peut pas être dans le domaine de convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n), car il n'y est même pas dans son domaine de convergence simple. Maintenant sur $\mathbb{R}_+^*$, il suffit de chercher

$$\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} |\log(x + \frac{1}{n}) - \log x| = \sup_{x>0} \log(1 + \frac{1}{nx}) = \sup_{x>0} g_n(x).$$

Comme toutes les fonctions g_n sont bien dérivables sur $]0, +\infty[$, on aura alors :

$$g_n^{'}(x) = \frac{-n^2}{x(1+nx)} < 0, \forall x > 0, \forall n \geq 1.$$

Ce qui veut dire que les fonctions g_n sont décroissantes sur $]0, +\infty[$. Ainsi, on aura :

$$\sup_{x>0} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} g_n(x) = +\infty$$

Ce qui traduit bien la non convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers la fonction f sur $]0, +\infty[$.

En revanche, il y a convergence uniforme sur tout intervalle de type $[a, +\infty[, a > 0$. En effet, sur tout intervalle $[a, +\infty[, a > 0$, on aura :

$$\sup_{x\geq a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq a} |\log(x + \frac{1}{n}) - \log x| = \sup_{x\geq a} \log(1 + \frac{1}{nx}) = \sup_{x\geq a} g_n(x).$$

Comme toutes les fonctions g_n sont décroissantes sur $[a, +\infty[$, on aura alors :

$$\sup_{x\geq a} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\geq a} g_n(x) = g_n(a) = \log(1 + \frac{1}{na}) \to_{n\to+\infty} 0.$$

Ce qui traduit bien la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_n$ vers la fonction f sur $[a, +\infty[, a > 0$.

b)- Nature de la suite de fonctions donnée par :

$$f_n : [1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

b.1)- **Convergence Simple :** Notons que les fonctions (f_n) sont bien définies et continues sur $[1, +\infty[$, pour tout $n \geq 1$. Par un simple passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{x}{n(1+x^n)} = 0, \forall x \geq 1.$$

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f \equiv 0$, sur le domaine $[1, +\infty[$.

b.2)- **Convergence Uniforme :** Remarquon que là aussi la fonction limite f est bien définie et continue sur $[1, +\infty[$. Il nous reste alors à chercher :

$$\sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 1} |\frac{x}{n(1+x^n)} - 0| = \sup_{x \geq 1} \frac{x}{n(1+x^n)} = \sup_{x \geq 1} f_n(x).$$

Comme toutes les fonctions f_n sont bien dérivables sur $[1, +\infty[$, on aura alors :

$$f_n'(x) = \frac{1 - x^n(n-1)}{n(1+x^n)^2}, \forall x \geq 1, \forall n \geq 1.$$

Le point qui annule cette dérivée est $\overline{x} = \sqrt[n]{\frac{1}{n-1}} \leq 1, \forall n \geq 3$.
Ce qui veut dire que les fonctions f_n sont décroissantes sur $[1, +\infty[$, pour tout $n \geq 3$. Ainsi, on aura :

$$\sup_{x \geq 1} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \geq 1} f_n(x) = f_n(1) = \frac{1}{2n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qui traduit bien la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers la fonction $f \equiv 0$, sur $[1, +\infty[$.

c)- Nature de la suite de fonctions donnée par :

$$f_n : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

c.1)- **Convergence Simple :** Notons que les fonctions (f_n) sont toutes bien définies et continues sur $[-1, 1]$ et qu'elles sont aussi paires, pour tout $n \geq 1$. Ceci nous permet de restreindre l'étude sur le domaine $[0, 1]$. Par un simple passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1 - n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = 0, \forall x \in [-1, 1], x \neq 0.$$

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 1 \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} 1$.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[-1, 1]$ vers la fonction f définie par :

$$f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0; \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

c.2)- **Convergence Uniforme :** On voit bien que la fonction limite f n'est pas continue en $x = 0$, ce qui entraîne sa discontinuité sur $[-1, 1]$. Par conséquent la convergence de la suite (f_n) vers la fonction f n'est pas uniforme sur $[-1, 1]$.

d)- Nature de la suite de fonctions donnée par :

$$f_n : [-1; 1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f_n(x) = \frac{x}{(1 + n^2x^2)}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

d.1)- **Convergence Simple :** Notons que les termes de cette suite sont des fonctions bien définies et continues sur $[-1; 1], \forall n \in \mathbb{N}$. On peut remarquer également que les fonctions (f_n) sont impaires. Ainisi, on peut restreindre l'étude de la suite de fonctions (f_n) sur $[0; 1]$. Par un simple passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{x}{(1 + n^2x^2)} = 0, \forall x \in]0, 1].$$

Si $x = 0$, alors $f_n(0) = 0 \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} 0$.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f \equiv 0$ sur $[0, 1]$ et donc même sur $[-1, 1]$.

d.2)- **Convergence Uniforme :** Notons que la fonction limite f est bien définie et continue sur $[-1, 1]$. Il nous reste alors à chercher :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\frac{x}{(1 + n^2x^2)} - 0| = \sup_{x\in[0,1]} = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x).$$

Comme toutes les fonctions f_n sont bien dérivables sur $[-1, 1]$, elles le sont aussi sur $[0, 1]$. On aura ainsi :

$$f_n^{'}(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}, \forall x \in [-1, 1], \forall n \geq 0.$$

Le point qui annule cette dérivée est $\overline{x} = \dfrac{1}{n} \in [0,1], \forall n \geq 1$.

Il est à présent facile de vérifier que :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2n} \to_{n\to+\infty} 0.$$

Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) est uniformément convergente vers la fonction $f \equiv 0$, sur $[0,1]$ et donc même sur $[-1,1]$.

Exercice 2.6.3. On définit sur $[0,1]$ la suite de fonctions (f_n) par :

$$f_n(x) = n^2x^n(1-x^n), \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1. Étudier la convergence simple de la suite (f_n) sur $[0,1]$.
2. Comparer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$ et $\int_0^1 \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)dx$, que peut-on conclure ?
3. Y-a-t-il une parie de $[0,1]$ sur laquelle il y'a convergence uniforme ?

Corrigé 2.6.3. On va étudier sur $[0,1]$ la nature de la suite de fonctions donnée par :

$$f_n(x) = n^2x^n(1-x^n), \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

1)- **Convergence Simple :** Notons que les fonctions f_n sont bien définies et continues sur $[0,1], \forall n \in \mathbb{N}^*$. Par un simple passage à la limite, on obtient :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(x) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} n^2x^n(1-x^n) = 0, \forall x \in]0,1[.$$

De plus, $f_n(0) = f_n(1) = 0 \to_{n\to+\infty} 0$.

Par conséquent, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f \equiv 0$ sur $[0,1]$.

2)- On a d'une part

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n^2x^n(1-x^n)dx$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n^2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{n^2}{(n+1)(2n+1)}\right] = 1$$

D'autre part,

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f(x)\ dx = 0.$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\ dx$. On déduit alors que la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0,1]$.

3)- **Convergence Uniforme :** Redémontrons d'abord la non convergence uniforme sur $[0,1]$, en cherchant tout simplement :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |n^2x^n(1-x^n) - 0| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x).$$

Comme toutes les fonctions f_n sont bien dérivables sur $[0,1]$, pour tout $n \geq 1$, on aura ainsi :

$$f_n^{'}(x) = n^3x^{n-1}(1-2x^n), \forall x \in [0,1], \forall n \geq 1.$$

Le point qui annule cette dérivée est $\overline{x} = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \in [0,1], \forall n \geq 1$. Notons aussi que $\overline{x} \to 1$ quand $n \to +\infty$.

Il nous reste qu'à vérifier facilement que :

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(\overline{x}) = f_n(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}) = \frac{n^2}{4} \nrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$

Par conséquent, la suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction $f \equiv 0$, sur $[0,1]$.

En revanche, il y a convergence uniforme sur tout intervalle de type $[0,a], 0 < a < 1$, car le voisinage qui pose problème est celui du point $x = 1$. En effet, en considérant ce type d'intervalle, on aura :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,a]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,a]} |n^2x^n(1-x^n) - 0|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0,a]} f_n(x) = f_n(a) = \lim_{n\to+\infty} n^2a^n(1-a^n) = 0.$$

Ce qui traduit bien la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers $f \equiv 0$, sur tout intervalle de type $[0,a], 0 < a < 1$.

Chapitre 3

Les Séries de Fonctions

On a déjà vu au Chapitre 1, les conditions de convegence des séries numériques $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ dont le terme général est une suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans le présent chapitre, on va étendre l'étude aux cas des séries de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ dont le terme général est une suite de fonctions $(U_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Ainsi, les résultats que nous avons établis sur les suites de fonctions entraînent des résultats analogues relativement aux séries de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. La convergence simple ou uniforme de la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ étant équivalent à celle de la suite de fonctions qui lui est associée $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $S_n(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} U_p(x),\ \forall x \in \mathbb{E}$.
L'emploi des séries de fonctions (polynomiales ou trigonométriques) permet de définir de nouvelles fonctions. La convergence uniforme est essentielle dans ces questions car elle permet d'intégrer ou de dériver sous le signe somme, c'est à dire terme à terme. Dans ce qui suit, par abus d'écriture, on notera la série de fonctions par $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$, pour ne pas la confondre avec la notation déjà donnée aux séries numériques étudiées au Chapitre 1.

3.1 Critère de Convergence Simple

Définition 3.1.1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E}$ de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $S_n(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} U_p(x), \forall x \in \mathbb{E}$. Lorsque la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est simplement convergente sur

$\mathbb{E}$, on dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ est simplement convergente sur $\mathbb{E}$. La fonction limite est la fonction somme de la série, définie par $x \longmapsto S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$.

Exemple 3.1.1. La série de fonctions de terme général $U_n(x) = x(1-x)^n, \forall n \in \mathbb{N}$, est simplement convergente sur $[0, 2[$. En effet, on a :

i)- Si $x = 0$, alors $U_n(0) = 0 \Rightarrow S_n(0) = 0$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(0)$ est convergente, de somme nulle.

ii)- Si $x \neq 0$, alors $S_n(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} U_p(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} x(1-x)^p = x\sum\limits_{p=0}^{n}(1-x)^p = x\left[\dfrac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)}\right] = 1-(1-x)^{n+1}$, qui est une progression géométrique de raison $(1-x)$, convergente pour $|1-x| < 1$. Autrment dit, cette suite de fonctions sera simplement convergente si $x \in]0, 2[$, vers la fonction $x \longmapsto S(x) = 1$.

De (i) et (ii), on déduit que la série $\sum\limits_{n\geq 0} x(1-x)^n$ est simplement convergente sur $[0, 2[$ et a pour somme la fonction $x \longmapsto S(x) = \begin{cases} 1 & \text{Si } x \in]0, 2[; \\ 0 & \text{Si } x = 0. \end{cases}$

3.1.1 Condition Nécessaire de Convergence Simple

Théorème 3.1.1. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E}$. Pour que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ soit simplement convergente sur $\mathbb{E}$, il est nécessaire que la suite de fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit simplement convergente sur $\mathbb{E}$ vers une fonction nulle. Formellement, ceci est équivalent à écrire :*

$$\sum_{n\geq 0} U_n(x) \text{ Converge Simplement sur } \mathbb{E} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{E}, \lim_{n\longrightarrow +\infty} U_n(x) = 0$$

3.1.2 Critère de Cauchy

En adaptant au cas des séries de fonctions le critère de Cauchy relatif aux suites de fonctions, on a immédiatement le résultat suivant.

Théorème 3.1.2. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $S_n(x) =$*

$\sum\limits_{p=0}^{n} U_p(x), \forall x \in \mathbb{E}$. *Pour que la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ *soit simplement convergente sur* $\mathbb{E}$, *il est nécessaire et suffisant que la suite de fonctions* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit de Cauchy. Formellement, ceci est équivalent à :*

$$\sum_{n\geq 0} U_n(x) \textit{ Converge Simplement sur } \mathbb{E} \longleftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall x \in \mathbb{E}, \exists N_{\epsilon,x}, \forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} / \ p > q > N_{\epsilon,x} \longrightarrow |U_{q+1}(x)+U_{q+2}(x)+\ldots+U_p(x)| < \epsilon$$

Remarque 3.1.1. Les critères établis sur la convergence des séries numériques sont tous valables pour étudier la convergence simple des séries de fonctions.

3.2 Convergence Uniforme

Définition 3.2.1. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E}$ de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $S_n(x) = \sum\limits_{p=0}^{n} U_p(x), \forall x \in \mathbb{E}$. On dit que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{E}$, lorsque la suite $(S_n)_{n\geq 0}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{E}$. La fonction limite est la fonction somme de la série, définie par $x \longmapsto S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$.

3.2.1 Conditions Nécessaires de Convergence Uniforme

Première Condition Nécessaire

Théorème 3.2.1. *Pour que la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ *soit uniformément convergente sur* $\mathbb{E}$, *il est nécessaire qu'elle soit simplement convergente sur* $\mathbb{E}$.

Deuxième Condition Nécessaire

Théorème 3.2.2. *Pour que la série de fonctions* $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ *soit uniformément convergente sur* $\mathbb{E}$, *il est nécessaire que la suite de fonctions* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *soit uniformément convergente sur* $\mathbb{E}$ *vers une fonction nulle. Ceci est équivalent à écrire :*

$$\sum_{n\geq 0} U_n(x) \textit{ Converge Uniformément sur } \mathbb{E} \Rightarrow$$

$$\textit{Le terme général } U_n(x) \textit{ Converge uniformément vers la fonction nulle sur } \mathbb{E}$$

3.2.2 Critère Uniforme de Cauchy

Théorème 3.2.3. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} U_p(x), \forall x \in \mathbb{E}$. Pour que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{E}$, il est nécessaire et suffisant que la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit uniformément de Cauchy. Formellement, ceci est équivalent à :*

$$\sum_{n\geq 0} U_n(x) \textit{ Converge Uniformément sur } \mathbb{E} \longleftrightarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}/\ p > q > N_\epsilon \longrightarrow |U_{q+1}(x)+U_{q+2}(x)+\ldots+U_p(x)| < \epsilon, \forall x \in \mathbb{E}$$

Preuve 3.2.1. Il suffit de considérer la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 0}$ qui est uniformément convergente si et seulement si elle est uniformément de Cauchy (Voir Théorème 2.4.1)

3.3 Critère de Convergence Normale

Comme on peut le constater à travers ce qui précède, pour établir la convergence uniforme d'une série de fonctions il nous faut alors l'expression analytique de la suite des sommes partielles qui lui associée ainsi que celle de sa fonction somme, chose qui est doublement difficile. Pour cela, il a fallu forger un autre critère qui nous permet de juger de la convergence uniforme en se contentant de la donnée de son terme général. Il s'agit du critère de convergence normale donné ci-après.

Définition 3.3.1. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ de fonctions définies sur $\mathbb{E}$ est normalement convergente sur $\mathbb{E}$, s'il existe une série numérique $\sum_{n\geq 0} V_n$ convergente telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{E}$, on ait $|U_n(x)| \leq V_n$.

Avec cette définition, le critère de Cauchy entraîne immédiatement le résultat suivant.

Théorème 3.3.1. *Pour que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{E}$, il suffit qu'elle soit normalement convergente sur $\mathbb{E}$.*

Preuve 3.3.1. Il suffit de combiner le critère de Cauchy avec la propriété triangulaire de la fonction valeur absolue.

Exemple 3.3.1. La série de fonctions de terme général $U_n(x) = \dfrac{e^{inx}}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}$ est uniformément convegente sur $\mathbb{R}$, car elle est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. En effet, il suffit de constater que $|U_n(x)| = \left|\dfrac{e^{inx}}{n^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ et d'utiliser le fait que la série numérique $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ est de Riemann convergente.

Remarque 3.3.1. Il en résulte de ce qui précède, que la convergence normale d'une série de fonctions est le mode de convergence le plus restreint que la covergence uniforme. Nous allons maintenant établir une condition nécessairre et suffisante pour qu'une série de fonctions soit normalement convergente.

Théorème 3.3.2. *Pour que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ soit normalement convergente sur $\mathbb{E}$, il est nécessaire et suffisant que la série $\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in\mathbb{E}} |U_n(x)|$ soit convergente sur $\mathbb{E}$.*

Remarque 3.3.2. De ce théorème, il est facile de constater que la convergence absolue est nécessaire (mais non suffisante) pour la convergence normale d'une série de fonctions. Ainsi, une série de fonctions qui n'est pas absolument convergente ne peut pas alors converger normalement sur le même domaine.

3.4 Critère Uniforme d'Abel

Le critère de convergence normale est de loin le plus simple et le plus utilisé. Mais, il ne s'applique qu'à des séries de fonctions absolument convergentes sur $\mathbb{E}$. Ainsi, il est utile donc de compléter par des critères s'appliquant à certains types de séries semi-convergentes. En revenant sur le critère d'Abel connu pour les séries numériques et en cherchant des majorations uniformes, on obtient le résultat suivant.

Théorème 3.4.1. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E}$ de $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, de la forme $U_n(x) = a_n(x)b_n(x)$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{E}$. Pour que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ soit uniformément convergente sur $\mathbb{E}$, il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :*

a)- Pour chaque $x \in \mathbb{E}$, la suite $a_n(x)$ est positive, décroissante et uniformément convergente sur $\mathbb{E}$ vers zéro.

b)- Il existe une constante $M > 0$, telle que $\left|\sum\limits_{p=n}^{m} b_p(x)\right| \leq M, \forall x \in \mathbb{E}$ et $\forall (n,m) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Exemple 3.4.1. Comme exemple d'application, les séries de fonctions de type $\sum\limits_{n\geq 0} e^{inx} a_n(x)$, sur tout compact de $\mathbb{R}$ privé des points $x_k = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, répondent bien à notre situation, à condition que la suite de fonctions $(a_n)_{n\geq 0}$ soit positive, décroissante et convergente uniformément vers zéro. En effet, il suffit de réaliser que $\left|\sum\limits_{p=n}^{m} e^{ipx}\right| \leq \dfrac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|}$ et que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|}$ est bornée sur tout compact de $\mathbb{R}$ privé des points $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3.5 Propriétés des Sommes des Séries de Fonctions

Pour traiter les questions de continuité, dérivation et intégration avec les moyens dont on dispose, on se limitera au cas où $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$. Les résultats concernant les suites de fonctions appliqués aux suites des sommes partielles entrainent des résultats analogues pour les séries de fonctions. Il suffit juste de remarquer que si les fonctions $U_n(x)$ sont toutes continues (respectivement dérivables ou intégrables) sur $\mathbb{E}$, alors la somme $S_n(x)$ formée d'un nombre fini de tremes est aussi continue (respectivement dérivable ou intégrable) sur $\mathbb{E}$.

3.5.1 Continuité

Théorème 3.5.1. *Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une même partie $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$. Si la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{E}$ et si chacune des fonctions (U_n) est continue sur $\mathbb{E}$, alors la fonction somme $x \longmapsto S(x) = \sum\limits_{n=o}^{+\infty} U_n(x)$ est continue sur $\mathbb{E}$.*

3.5.2 Intégrabilité

Théorème 3.5.2. *Soit* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies sur un intervalle* $[a,b]$ *de* $\mathbb{R}$. *Si la série* $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ *est uniformément convergente sur* $[a,b]$ *et si chacune des fonctions* (U_n) *est intégrable sur* $[a,b]$, *alors la fonction somme* $x \longmapsto S(x) = \sum\limits_{n=o}^{+\infty} U_n(x)$ *est intégrable sur* $[a,b]$ *et on a :*

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left(\sum_{n=o}^{+\infty} U_n(x)\right) dx = \sum_{n=o}^{+\infty} \left(\int\limits_a^b U_n(x)dx\right)$$

Ce théorème nous fournit une condition suffisante pour intégrer une série de fonctions terme à terme, autrement dit de permuter l'opération de sommation infinie avec celle d'intégration.

3.5.3 Dérivabilité

Théorème 3.5.3. *Soit* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies et continument dérivables sur un même intervalle fermé et borné* $\mathbb{I}$ *de* $\mathbb{R}$, *vérifiant les conditions suivantes :*

i)- La série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ *est convergente au moins en un point* $x_0 \in \mathbb{I}$.

ii)- La série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n'(x)$ *est uniformément convergente sur* $\mathbb{I}$.

Alors, La série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ *est uniformément convergente sur* $\mathbb{I}$ *et sa fonction somme* $x \longmapsto S(x) = \sum\limits_{n=o}^{+\infty} U_n(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{I}$. *De plus, on a :*

$$S'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(U_n(x)\right.$$

Ainsi, la convergence uniforme de la série des dérivées nous permet d'intervertir le signe somme et le signe dérivée.

3.6 Exercices

Exercice 3.6.1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série de fonctions suivante :

$$U_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto U_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}.$$

Corrigé 3.6.1. Nature de la série de fonctions de terme génaral :

$$U_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto U_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}.$$

1)- **Convergence Simple :** Notons que les fonctions (U_n) sont toutes bien définies et continues sur $\mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$. On peut remarquer également que les fonctions (U_n) sont paires. Ainsi, on peut restreindre l'étude de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ sur $[0, +\infty[$. Pour la convergence simple de cette série, on peut procéder de différentes manières. Entre autres, on peut citer le critère des séries alternées et la règle de d'Alembert.

Première méthode : Il suffit de remarquer que la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ est alternée car elle s'écrit sous la forme suivante :

$$U_n(x) = (-1)^n V_n(x), \text{ où } V_n(x) = \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Et du fait que la suite de fonctions $(V_n)_{n\geq 0}$ est décroissante positivement vers zéro sur $\mathbb{R}$, on déduit alors la convergence simple de la série $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Deuxième méthode : i)- En appliquant la régle de d'Alembert, on aura :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \left| \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} \right| = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1+n^2}{1+(n+1)^2} e^{-x^2} = e^{-x^2} < 1, \forall x \neq 0.$$

Ainsi, $\sum\limits_{n\geq 0} U_n(x)$ converge absolument pour tout $x \neq 0$.

ii)- Si $x = 0$, alors $U_n(0) = \dfrac{1}{n^2+1} \simeq \dfrac{1}{n^2}$, qui est le terme général d'une série de

Riemann convergente.

De i) et ii), on déduit la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.6.1. On peut également démontrer la convergence simple de la série $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ sur $\mathbb{R}$ en se servant du critère simple d'Abel.

2)- **Convergence Uniforme :** Là aussi, on peut procéder de différentes manières, sauf qu'on se limitera cette fois-ci au critère de convergence normale. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in N$, on a :

$$|U_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2} \Leftrightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |U_n(x)| = |U_n(0)| = \frac{1}{1+n^2} \simeq \frac{1}{n^2}.$$

Or, la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, par conséquent la série $\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |U_n(x)|$ est convergente. Autrement dit, la série $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Ce qui entraine sa convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Remarque 3.6.2. 1. On peut aussi retrouver la série $\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |U_n(x)|$ en étudiant la variation des fonctions U_n sur $\mathbb{R}$.

2. On peut également démontrer la convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ sur $\mathbb{R}$ en se servant du critère uniforme d'Abel.

Exercice 3.6.2. Soit la série de fonctions suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1)- Quelle est sa fonction somme.

2)- Montrer sa convergence simple sur tout $\mathbb{R}$.

3)- Est-elle uniformément convergente sur tout $\mathbb{R}$?

4)- Est-elle uniformément convergente sur le domaine $[0, 1]$?

5)- Montrer qu'elle est normalement convergente sur $[\alpha, +\infty[$, où $\alpha > 0$.

Corrigé 3.6.2. Soit la série de fonctions suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

1)- **L'expression analytique de la fonction somme :**

Soit S_n la suite des sommes partielles associée à la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(x)$. On a alors :

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} U_p(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x}{(1+x^2)^p} = x \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(1+x^2)^p}$$

Qui est une progression géométrique de raison $k = \dfrac{1}{1+x^2}$ strictement inférieure à 1 pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Donc pour de telles valeurs de x, on aura :

$S_n(x) = x[\dfrac{1 - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}}{1 - \frac{1}{1+x^2}}] \to S(x) = \dfrac{1+x^2}{x}$, quand $n \to +\infty$, pour tout réel non nul.

Pour $x = 0$, la valeur du terme général $U_n(0) = 0$. Il vient que $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n(0) = 0$. Finalement, la somme est une fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ comme suit :

$$S : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad x \to S(x = \begin{cases} \dfrac{1+x^2}{x}, & \text{Si} \quad x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & \text{Si} \quad x = 0. \end{cases}$$

2)- **Le domaine de convergence simple :**

De la première question, on déduit que la série de fonctions proposée est simplement convergente sur tout $\mathbb{R}$.

3)- **La convergence uniforme sur $\mathbb{R}$:**

Il est clair que la convergence ne peut pas être uniforme sur tout $\mathbb{R}$ du moment que la fonction somme S n'est même pas continue sur $\mathbb{R}$, plus précisément en $x = 0$. Ceci implique qu'il ne peut pas y avoir convergence normale sur $\mathbb{R}$.

4)- **La convergence uniforme sur $[0, 1]$:**

La convergence ne peut pas être uniforme sur $[0, 1]$ non plus, du fait que le problème est au niveau de zéro et son voisinage. Ceci implique qu'il ne peut pas y avoir convergence normale sur $[0, 1]$ également.

En revanche, il y a convergence uniforme sur tout intervalle du type $[\alpha, +\infty[$ où $\alpha > 0$ et encore sur $]-\infty, -\alpha]$, du fait que la suite de fonctions $U_n(x)$ est impaire. On peut justifier la convergence uniforme sur de tels domaines de deux manières différentes : Soit en servant de la convergence normale (voir la question suivante) ou encore en appliquant le critère de convergence uniforme à la suite des sommes partielles (S_n) définе précédement dont la fonction limite est $S(x) = \frac{1}{1+x^2}$, pour tout x non nul. En effet, pour tout $x \neq 0$, on a

$$|S_n(x) - S(x)| = \left| \frac{1+x^2}{x} \left(1 - (\frac{1}{1+x^2})^{n+1} \right) - \frac{1+x^2}{x} \right| = \left| \frac{1+x^2}{x} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^{n+1} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n \right| \leq \left| \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{1+\alpha^2} \right)^n \right| \to_{n\to+\infty} 0, \ \forall x \geq \alpha > 0.$$

5)- **La convergence normale sur** $[\alpha, +\infty[$**, où** $\alpha > 0$ **:**

Notons d'abord que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}$ ni sur tout autre intervalle comptenant le point $x = 0$ et son voisinage. En effet, ceci peut être justifié de deux manières différentes :

1. Soit du fait qu'il n'y a pas de convergence uniforme sur les domaines signalés déjà justifié à la question 3.
2. Soit en montrant que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \sup |U_n(x)|$ est une série numérique divergente sur ces domaines. Pour ce faire, il suffit d'étudier la nature et la variation de la suite de fonctions $(U_n(x))_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$. Comme il a été déjà signalé, les fonctions (U_n) sont impaires, on va alors restreindre l'étude sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Rappellons que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} U_n(x)$ était simplement convergente sur $\mathbb{R}$, elle le sera aussi alors sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ceci est suffisant pour conclure sur la convergence simple de la suite de fonctions $(U_n(x))_{n\geq 1}$ sur $\mathbb{R}$ et donc même sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Pour montrer sa convergence uniforme sur l'intervalle $[0, +\infty[$, on va alors étudier sa variation. Comme les fonctions (U_n) sont dérivables pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in N$, on aura alors :

$$U_n^{'}(x) = \frac{1-(2n-1)x^2}{(1+x^2)^{n+1}}, \ \forall x \in [0, +\infty[, \ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

De là, il est facile de vérifier que

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |U_n(x)| = U_n(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}) = \frac{1}{\sqrt{2n-1}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n} \simeq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2n-1}}$$

Ce résultat nous permet de conlure sur la non convergence normale de la série $\sum_{n\geq 0} U_n(x)$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$, car la série

$$\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[0,+\infty[} |U_n(x)| = \sum_{n\geq 1} U_n(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{2n-1}\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^n} \simeq \sum_{n\geq 1} \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2n-1}}.$$

est une série numérique divergente.

Le point $x = 0$ ainsi que son voisinage posent problème (car $x = \dfrac{1}{\sqrt{2n-1}} \to 0$ quand $n \to +\infty$).

• En revanche, la convergence est normale sur tout intervalle de type $[\alpha, +\infty[$, pour tout $\alpha > 0$. En effet sur ces intervalles, la série

$$\sum_{n\geq 1} \sup_{x\in[\alpha,+\infty[} |U_n(x)| = \sum_{n\geq 1} U_n(\alpha) = \sum_{n\geq 1} \frac{\alpha}{(1+\alpha^2)^n}$$

est une série numérique convergente, d'après la règle de d'Alembert. Ce qui répond à notre question.

Exercice 3.6.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite de fonctions (U_n) définie par :

$$U_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^2}\exp\left(-\frac{n}{x}\right) & \text{si } \; x > 0 \\ 0 & \text{si } \; x = 0. \end{cases}$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(U_n)_n$.
2. On considère maintenant la série de fonctions $\sum U_n(x)$.

   a)- Étudier la convergence simple de la série.

   b)- La convergence est-elle normale ?

   c)- La convergence est-elle uniforme ?

   d)- Y-a-t-il un intervalle de $[0, +\infty[$ sur lequel la convergence est uniforme ?

3. En intégrant terme à terme la série $\sum U_n(x)$ sur un intervalle convenable, en déduire, pour tout $x \geq 0$, l'expression de la somme de la série.

Corrigé 3.6.3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions (U_n) définies par :

$$U_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{x^2} \exp\left(-\frac{n}{x}\right) & \text{si } \ x > 0 \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

sont toutes bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+$, de plus elles sont positives.

1. **La convergence simple et uniforme de la suite** $(U_n)_n$ **:**

1.1 **La convergence simple :** Par un passage simple à la limite, on obtient pour tout $x > 0$:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} U_n(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n}{x^2} \exp\left(-\frac{n}{x}\right) = 0, \forall x \in]0, +\infty[.$$

De plus, $U_n(0) = 0 \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0$.

Par conséquent, la suite de fonctions $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f \equiv 0$ sur $[0, +\infty[$. Notons que ce résultat est nécessaire pour la convergence simple de la série $\sum\limits_{n \geq 1} U_n(x)$ sur $[0, +\infty[$.

1.2 **Convergence Uniforme :** Sur $[0, +\infty[$, on va chercher :

$$\sup_{x \in [0,+\infty[} |U_n(x) - f(x)| = \max\left(|U_n(0) - f(0)|, \sup_{x \in]0,+\infty[} \left|\frac{n}{x^2} \exp\left(-\frac{n}{x}\right) - 0\right|\right) = \sup_{x \in [0,+\infty[} U_n(x)$$

Comme toutes les fonctions U_n sont bien dérivables sur $]0, +\infty[$, pour tout $n \geq 1$, on aura ainsi :

$$U_n^{'}(x) = \frac{e^{-n/x}}{x^4}(n^2 - 2nx), \forall x > 0, \forall n \geq 1.$$

Le point qui annule cette dérivée est $\overline{x} = \dfrac{n}{2} \in]0, +\infty[, \forall n \geq 1$. Notons aussi que $\overline{x} \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$. A présent, il est facile de vérifier que :

$$\sup_{x \in [0,+\infty[} |U_n(x) - f(x)| = U_n(\overline{x}) = U_n\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{4e^{-2}}{n} \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ce qui traduit bien la convergence uniforme de la suite de fonctions $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers la fonction $f \equiv 0$ sur $[0, +\infty[$. Notons que ce résultat est nécessaire pour la convergence uniforme de la série $\sum\limits_{n \geq 1} U_n(x)$ sur $[0, +\infty[$.

2. On considère maintenant la série de fonctions $\sum U_n(x)$.

   a)- **La convergence simple de la série :** i)- Si $x \neq 0$, il suffit d'appliquer la régle de d'Alembert comme suit :

   $$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} e^{-1/x} = e^{-1/x} < 1, \forall x > 0.$$

   Ainsi, la série $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ est bien convergente si $x > 0$.

   ii)- Si $x = 0$, alors $U_n(0) = 0 \Rightarrow$ la série $\sum_{n \geq 1} U_n(0)$ converge et a pour somme la valeur nulle.

   De i) et ii), on déduit la convergence simple de la série $\sum_{n \geq 1} U_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

   b)- **La convergence normale :** La convergence ne peut pas être normale sur $\mathbb{R}_+$, car la série $\sum_{n \geq 1} \sup_{x \in [0,+\infty[} |U_n(x)|$ est divergente. En effet, on a d'après la question précédente :

   $$\sup_{x \in [0,+\infty[} |U_n(x)| = U_n(\frac{n}{2}) = \frac{4e^{-2}}{n},$$

   qui est le terme général d'une série numérique divergente (série harmonique).

   c)- **La convergence uniforme :**

   d)- **Y-a-t-il un intervalle de** $[0; +\infty[$ **sur lequel la convergence est uniforme ? :** On a déjà constaté que le voisinage qui pose problème est celui de $+\infty$. Pour pallier à ce problème, il suffit donc de s'éloingner du voisinage de $+\infty$, en considérant tout intervalle de type $I_\alpha = [0, \alpha], \alpha > 0$. En effet, pour tout $x \in I_\alpha$, on aura :

   $$\sup_{x \in [0,+\alpha} |U_n(x)| = U_n(\alpha) = \frac{n}{\alpha^2} \exp{(-\frac{n}{\alpha})},$$

   qui est le terme général d'une série numérique convergente grâce à la régle de d'Alembert, pour tout $\alpha > 0$. Par conséquent, la série $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ est normalement convergente sur I_α. Ce qui implique la converegence uniforme de la série $\sum_{n \geq 0} U_n(x)$ sur I_α.

3. **L'expression de la fonction somme de la série :** Notons par $S(x)$ la fonction somme de la série. L'intégartion terme à terme sur tout intervalle $[x', x] \subseteq]0, \alpha]$,

sur lequel la convergence uniforme est garantie, nous permet d'écrire :

$$\int_{x'}^{x}\left(\sum_{n\geq 1}U_n(t)\right)dt=\sum_{n\geq 1}\int_{x'}^{x}U_n(t)dt=\sum_{n\geq 1}\int_{x'}^{x}\frac{n}{t^2}e^{-n/t}dt=\sum_{n\geq 1}\int_{x'}^{x}\left(e^{-n/t}\right)^{'}dt$$

$$=\sum_{n\geq 1}\left(e^{-n/x}-e^{-n/x'}\right)=S(x)-S(x^{'})$$

Sachant que $\sum\limits_{n\geq 1}U_n(0)=0=S(0)$, on aura pour tout $x>0$:

$$S(x)=\sum_{n\geq 1}e^{-n/x}=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}e^{-n/x}=\lim_{N\to+\infty}e^{-1/x}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-n/x}$$

$$=e^{-1/x}\lim_{N\to+\infty}\frac{1-e^{-N/x}}{1-e^{-1/x}}=\frac{e^{-1/x}}{1-e^{-1/x}},\ \forall x>0.$$

Par conséquent, l'expression finale de la fonction somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1}U_n(x)$ est donnée par :

$$S:[0,+\infty[\longrightarrow R$$
$$x\longmapsto S(x=)\begin{cases}\dfrac{e^{-1/x}}{1-e^{-1/x}}, & \text{si } x>0;\\ 0, & \text{si } \ x=0.\end{cases}$$

Remarque 3.6.3. La fonction somme S de la série $\sum\limits_{n\geq 1}U_n(x)$ est bien définie, continue et dérivable sur $[0,+\infty[$.

Exercice 3.6.4. On considère la fonction $x\longmapsto S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n\sin nx}{n}$.

1. Montrer que la fonction S est définie sur l'intervalle $[-1,1]$.
2. Montrer que la fonction S est continue sur l'intervalle $[-1,1]$.
3. Montrer que la fonction S est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ et a pour dérivée $S^{'}(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}U_n^{'}(x)$.
4. Calculer $S^{'}(x)$ et en déduire l'égalité
$$S(x)=\arctan\left[\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right]\quad\text{pour}\quad x\in[-1,1].$$
5. En déduire la somme des séries :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}\qquad\text{et}\qquad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{n}.$$

Corrigé 3.6.4. On pose $U_n(x) = \dfrac{x^n \sin nx}{n}, \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Notons que les fonctions (U_n) sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \geq 1$.

1. **Montrons que la fonction S est définie sur l'intervalle** $[-1,1]$ **:** Pour cela, il suffit de montrer la convergence simple de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ sur $[-1,1]$.

   On sait que $[-1,1] = [-1,-a] \cup [-a,a] \cup [a,1] = I_1 \cup I_2 \cup I_3, \forall\, 0 < a < 1$. Il revient alors à montrer la convergence simple de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ sur chacun de ces intervalles.

   - **Pour** $x \in I_2$ **:** On a $|U_n(x)| \leq a^n, \forall n \geq 1$. Or, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^n$ est une série géométrique de raison $0 < a < 1$, donc convergente. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ est normalement convergente donc simplement convergente sur I_2.
   - **Pour** $x \in I_3$ **:** On peut appliquer le critère simple d'Abel, sachant que : $U_n(x) = \dfrac{x^n \sin nx}{n} = a_n(x) \times b_n(x)$, où $a_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ et $b_n(x) = \sin nx$.
     Il est à présent facile de vérifier que la suite de fonctions (a_n) est décroissante positivement vers zéro sur $[a,1]$ et que la suite des sommes partielles associée à la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est bornée par une constante positive donnée par : $|\sum\limits_{p=1}^{n} b_p| \leq \dfrac{1}{\sin \frac{x}{2}}, \forall x \in I_3$ (revoir l'exemple (1.5.3)). Ce qui traduit bien la convergence simple de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ sur I_3.
   - **Pour** $x \in I_1$ **:** Il suffit de procéder par changement de variable en posant $y = -x \in I_3, \forall x \in I_1$. On aura ainsi $U_n(x) = \dfrac{x^n \sin nx}{n} = \dfrac{(-y)^n \sin(-ny)}{n} = \dfrac{(y)^n}{n}(-1)^{n+1} \sin(ny) = a_n(y) \times b_n(y)$, où $a_n(y) = \dfrac{y^n}{n}$ et $b_n(y) = (-1)^{n+1} \sin(ny), \forall y \in I_3$. Maintenant il nous reste qu'à faire un raisonnement analogue au précédent, en applicant le critère simple d'Abel pour avoir la convergence simple de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ sur I_1.

   Finalement, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ est simplement convergente sur $[-1,1]$. Autrement dit, sa fonction somme S est définie sur $[-1,1]$.

2. **Montrer que la fonction S est continue sur l'intervalle** $[-1,1]$ **:** Pour cela,

il suffit de montrer la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ sur $[-1,1]$. En décomposant l'intervalle $[-1,1] = [-1,-a] \cup [-a,a] \cup [a,1] = I_1 \cup I_2 \cup I_3, \forall\, 0 < a < 1$, il revient à montrer alors la convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ sur chacun de ces intervalles.

- **Pour** $x \in I_2$ **:** On a $|U_n(x)| \leq a^n, \forall n \geq 1$. Or, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n$ est une série géométrique de raison $0 < a < 1$, donc convergente. Par conséquent, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ est normalement convergente donc uniformément convergente sur I_2.
- **Pour** $x \in I_3$ **:** On peut appliquer le critère uniforme d'Abel, sachant que : $U_n(x) = \dfrac{x^n \sin nx}{n} = a_n(x) \times b_n(x)$, où $a_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$ et $b_n(x) = \sin nx$.
  Il est à présent facile de vérifier que la suite de fonctions (a_n) est décroissante positivement et tendant uniformément vers zéro sur $[a,1]$ et que la suite des sommes partielles associée à la suite $(b_n)_{n\geq 1}$ est bornée par $\dfrac{1}{\sin\frac{x}{2}}, \forall x \in I_3$. Ce qui traduit bien la convergence uniforme de $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ sur I_3.
- **Pour** $x \in I_1$ **:** Il suffit de procéder par changement de variable en posant $y = -x \in I_3, \forall x \in I_1$ et de raisonner comme précédemment, en appliquant le critère uniforme d'Abel pour avoir la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ sur I_1.

Finalement, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ est uniformément convergente sur $[-1,1]$. Ce qui est suffisant pour la continuité de sa fonction somme S sur $[-1,1]$.

3. **La déribabilité de S sur l'intervalle** $]-1,1[$ **:** Les fonctions (U_n) sont toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ donc même sur $]-1,1[$, $\forall n \geq 1$, et on a :

$$U_n'(x) = x^{n-1}\sin nx + x^n \cos nx, \forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1.$$

Sachant que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ est convergente sur $[-1,1]$, il ne nous reste alors qu'à examiner la convergence uniforme de la série dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$. On a bien :

$|U_n'(x)| = |x^{n-1}\sin nx + x^n \cos nx| \leq a^{n-1} + a^n = V_n,\ \forall n \geq 1, \forall x \in [-a,a], 0 < a < 1.$

Comme $\sum\limits_{n\geq 1} V_n$ est une série numérique convergente grâce à la règle de d'Alembert, on déduit alors la convergence normale donc uniforme de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$ sur $[-a,a], 0 < a < 1$. Ceci nous garantie la dérivabilité de la fonction somme S de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n(x)$ terme à terme sur tout intervalle de type $[-a,a], 0 < a < 1$. Autrement dit, on aura :

$$S^{'}(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} U_n(x)\right)^{'} = \sum_{n=1}^{+\infty} U_n^{'}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin nx + x^n \cos nx, \forall |x| \leq a, 0 < a < 1.$$

Comme a est arbitraire dans $]0,1[$, on déduit alors la dérivabilité de S sur $]-1,1[$.

4. **L'expression analytique de** $S^{'}(x)$ **:** Pour déterminer l'expression analytique de la focntion $S^{'}$, il suffit de faire appel à l'analyse complexe. En effet, il suffit de remarquer que :

$$S^{'}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \cos nx + x^{n-1}\sin nx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(Re(x^n e^{inx}) + \frac{1}{x} Im(x^n e^{inx})\right).$$

A présent, il suffit de déterminer la somme de la série géométrique complexe de raison $K = xe^{ix}$, où $|K| < 1, \forall |x| < 1$, donnée par :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(x^n e^{inx}) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{n}(x^p e^{ipx}) = \frac{xe^{ix}}{1-xe^{ix}} = \frac{x\cos x - x^2}{1-2x\cos x + x^2} + i\frac{x\sin x}{1-2x\cos x + x^2}$$

Finalement, l'expression analytique de la fonction dérivée $S^{'}$ est donnée par :

$$S^{'}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(Re(x^n e^{inx}) + \frac{1}{x} Im(x^n e^{inx})\right) = \frac{x\cos x - x^2 + \sin x}{1-2x\cos x + x^2}, \forall x \in]-1,1[, x \neq 0.$$

Pour $x = 0$, on aura $S'(0) = 0$, grâce à la convergence uniforme de la série dérivée $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n'(x)$ sur $[-a,a]$ qui nous garantie donc la continuité de la fonction dérivée au point $x = 0$.

5. **En déduire l'expression analytique de** S **:** Il suffit de déterminer la dérivée de la fonction $x \to \arctan\left[\dfrac{x\sin x}{1-x\cos x}\right]$ pour $x \in [-1,1]$, donnée par :

$$\left(\arctan\left[\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right]\right)^{'} = \frac{x\cos x - x^2 + \sin x}{1-2x\cos x + x^2},$$

qui n'est autre que la fonction $S^{'}$ sur $]-1,1[$. On déduit ainsi que

$$S(x) = \arctan\left[\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right], \forall x \in]-1,1[.$$

Comme S est continue sur $[-1,1]$, il résulte alors que :

$$S(x) = \arctan\left[\frac{x\sin x}{1-x\cos x}\right], \forall x \in [-1,1].$$

6. En remplaçant à chaque fois par la valeur de x correspondante, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n} = S(1) = \arctan\left[\frac{\sin 1}{1-\cos 1}\right] \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{n} = -S(-1) = -\arctan\left[\frac{\sin 1}{1+\cos 1}\right].$$

Exercice 3.6.5. Pour tout entier $n \geq 1$, définissons la fonction :

$$f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(1+nx)}, \quad \text{pour tout } x \geq 0.$$

a)- Étudier la convergence de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$.

b)- Montrer que cette série de fonctions n'est normalement convergente sur aucun intervalle de la forme $]0,b]$, où $b > 0$.

c)- La fonction F somme de la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ est-elle continue sur $[0,+\infty[$?

Corrigé 3.6.5. Soit la série de fonctions de terme général f_n, où :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(1+nx)}, \quad \text{pour tout } x \geq 0, \forall n \geq 1.$$

a)- **Convergence Simple de la série** $\sum\limits_{n\geq 1} f_n(x)$ **:** La série de fonctions étant une série alternée simplement convergente sur $[0,+\infty[$, car son terme général s'écrit comme :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n(1+nx)} = (-1)^n V_n(x), \quad \text{pour tout } x \geq 0, \forall n \geq 1,$$

où $V_n(x) = \dfrac{1}{n(1+nx)}$ est le terme d'une suite de fonctions décroissante positivement et tendant vers zéro sur $[0,+\infty[$.

b)- **Montrons sa non convergence normale sur tout intervalle de type** $]0, b]$**, où** $b > 0$ **:** Il suffit de trouver au moins un $\overline{x} \in]0, b], b > 0$, pour lequel la série correspondante ne converge pas absolument. En effet, il suffit de choisir $\overline{x} = \frac{1}{n} \in]0, b]$, pour lequel $\sum_{n\geq 1} |f_n(\overline{x})| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$, qui est une série harmonique divergente. Comme on vient de le constater, le point $\overline{x} = \frac{1}{n} \in \mathcal{V}(0)$ quand $n \in \mathcal{V}(+\infty)$. Ainsi, le point qui pose problème est le point $x = 0$ et son voisinage. En revanche, en s'écartant de se point et de son voisinage, la convergence normale aura lieu. En effet, pour tout $x \in [a, b], 0 < a < b$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est normalement convergente car :

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |\frac{(-1)^n}{n(1+nx)}| = \frac{1}{n(1+na)} \simeq \frac{1}{an^2}, \forall n \geq 1.$$

qui est le terme général d'une série de Riemann convergente.

c)- **Continuité de la fonction** F **somme de la série** $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ **sur** $[0, +\infty[$ **:** La fonction somme F est bien continue sur $[0, +\infty[$ car la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est uniformément convergente sur $[0, +\infty[$. En effet, la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ étant alternée et la suite de fonctions $|f_n|$ est positive, décroissante et converge unifotmément vers zéro sur $[0, +\infty[$. Grâce au résultat particulier du critère uniforme d'Abel établi sur les séries alternées, on déduit la convergence uniforme de $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ sur $[0, +\infty[$. Ce qui entraine par la suite la continuité de sa fonction somme F sur $[0, +\infty[$.

Remarque 3.6.4. Notons que les fonctions (f_n) sont toutes dérivables sur $[0, +\infty[, \forall n \geq 1$ et que

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(1+nx)^2}, \forall x \in [0, +\infty[\text{ et } \forall n \geq 1,$$

mais la série dérivée résultante $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ n'est simplement convergente que sur $]0, +\infty[$. Effet, pour tout $x > 0$, on a :

$$|f_n'(x)| = |\frac{1}{(1+nx)^2}| \leq \frac{1}{(nx)^2} \rightarrow_{n\rightarrow +\infty} 0, \forall x \neq 0.$$

De plus, la suite de fonctions $|f_n'|$ est décroissante positivement sur $]0, +\infty[$. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ est une série alternée simplement convergente sur $]0, +\infty[$.

Pour le point $x = 0, |f_n^{'}(0)| = 1 \nrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 1} f_n^{'}(0)$ est divergente. Ceci entraîne la non convergence uniforme de la série $\sum_{n\geq 1} f_n^{'}(x)$ sur $[0, +\infty[$ et sur $]0, +\infty[$, car comme on peut le constater, le voisinage de zéro aussi pose problème. En effet, il suffit de considérer le point $\overline{x} = \dfrac{1}{n} \in \mathcal{V}(0)$, pour lequel la série $\sum_{n\geq 1} f_n^{'}(\overline{x}) = \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{2}$ est divergente.

Bibliographie

[1] B. Demidovitch (1977). *Recuiel d'Exercices et de Problèmes d'Analyse Maththématique.*

[2] G. Flory (1979). *Exercices de Topologie et d'Analyse, Tome 1, 2 et 3.*

[3] V. Smirnov (1981). *Cours de Mathématiques Supérieures.*

[4] J. Rivaud (1982). *Fonctions Différentiables et Intégrales Multiples (Cours et Exercices).*

[5] J. Rivaud (1982). *Séries et Equations Différentielles (Cours et Exercices).*

[6] G. Dupont (1983). *Séries et Intégrales.*

[7] J. M. Monier (1990). *Analyse (600 Exercices Résolus et 21 Sujets d'Etude).*

[8] A. Mansouri (1992). *Analyse (Cours et Exercices Résolus).*

[9] K. Allab (2007). *Eléments d'analyse. Tome 1 et 2.* Edition O.P.U.

[10] E. Azoulay et J. Avignant (1983). *Analyse Mathématiques. Tome 1.* Mc Graw-Hill.