

ANALYSE 03

Cours et Exercices Corrigés

Bilal Ghermoul

University of El-Bachir El-Ibrahimi

Bordj Bou Arreridj

2021

1 Suites

1.1 Suites extraites

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique de termes dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} , une suite **suite extraite** (sous-suite) de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ où ϕ est une application "extractrice" strictement croissante de \mathbb{R} dans \mathbb{N} .

Exemple 1. $u_{\phi(n)} = n^2 + 1$ est une suite extraite de la $u_n = n + 1$, avec $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $n \mapsto \phi(n) = n^2$.

1.2 Propriétés

a) $((u_n)_n \text{ converge vers } l) \implies ((u_{\phi(n)})_n \text{ converge vers } l)$.

Cela implique que : Si une suite (u_n) admet une suite extraite divergente, ou deux suites extraites qui convergent vers des limites différentes, alors (u_n) diverge.

Exemple 2. La suite de terme $(-1)^n$ a les deux sous-suites de termes $(-1)^{2n}$ et $(-1)^{2n+1}$ qui sont convergentes, respectivement, vers 1 et -1 . Donc la suite (u_n) , telle que $u_n = (-1)^n$ diverge.

b) Deux sous-suites $(u_{\phi(n)})_n$ et $(u_{\psi(n)})_n$ de $(u_n)_n$ sont dites complémentaires si :

$$\{\phi(n), n \in \mathbb{N}\} \cup \{\psi(n), n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N}.$$

Dans ce cas, si $(u_{\phi(n)})_n$ et $(u_{\psi(n)})_n$ convergent vers la même limite l , alors $(u_n)_n$ converge vers l .

Exemple 3. (Proposition)

$$((u_n)_n \text{ converge vers } l) \iff ((u_{2n})_n \text{ et } (u_{2n+1})_n \text{ convergent vers } l).$$

c) Toute suite réelle croissante ($u_{n+1} \leq u_n$) et majorée (décroissante ($u_{n+1} \geq u_n$) et minorée) converge vers $\sup u_n$ (resp. $\inf u_n$).

Exemple 4. $u_n = \frac{1}{n}$, la suite (u_n) est décroissante et $\inf u_n = 0$ donc la suite converge vers 0.

d) Soit $u_n \rightarrow l$ et $v_n \rightarrow l'$. Si $\forall n \geq n_0$, $u_n \geq v_n$, alors $l \geq l'$. De même si on remplace \geq par $>$, \leq ou $<$.

e) **Théorème de la pince.**

Théorème 1. *Supposon que u_n et $w_n \rightarrow l$, et que $\forall n \in \mathbb{N}$ (ou $\forall n \geq n_0$)*

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Alors $v_n \rightarrow l$.

1.3 Notations de Landau.

1. $u_n = o(v_n)$ si $u_n = \epsilon_n v_n$, où $\epsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Dans ce cas on dit que u_n est **négligeable devant v_n** ,
2. Si (ϵ_n) est bornée, nous écrivons $u_n = O(v_n)$. Dans ce cas on dit que u_n est **de même ordre que v_n** ,
3. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, nous écrivons $u_n \sim v_n$. Dans ce cas on dit que u_n est **équivalente à v_n** .

1.4 Moyenne Géométrique, Arithmétique.

Soit $u_1, u_2, \dots, u_n \in \mathbb{R}_*^+$. On appelle **moyenne arithmétique**

$$M_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i.$$

On appelle **moyenne géométrique**

$$M_G = \sqrt[n]{u_1 \cdots u_n} = \left(\prod_{i=1}^n u_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Alors $\forall (u_1, u_2, \dots, u_n) \in (\mathbb{R}_*^+)^n$, on a

$$M_A \geq M_G.$$

1.5 Croissances Comparées.

- i) Croissance exponentielle, $\exp x$,
- ii) Croissance polynomiale, x^α , $x \in \mathbb{R}_*^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$,
- iii) Croissance logarithmique, $\ln x$, $x \in \mathbb{R}_*^+$.

1 Suites

La croissance exponentielle domine la croissance polynomiale qui domine la croissance logarithmique, par exemple

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \exp x = +\infty \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \exp(-x) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \ln x = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}_*^- \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \ln x = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}_*^+.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}_*^-, \quad \beta \in \mathbb{R} \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha (|\ln x|)^\beta = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On applique ces résultats pour étudier la convergence des suites numériques. Par exemple, si:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty,$$

on peut conclure directement que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)^\alpha \exp(u_n) = +\infty, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

2 Séries Numériques

2.1 Terminologie des séries

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes ou, plus généralement. Considérons la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Ainsi, $S_0 = u_0$, $S_1 = u_0 + u_1$, $S_2 = u_0 + u_1 + u_2$, etc...

1. La nouvelle suite (S_n) est dite suite de **sommes partielles** associée à la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. On appelle **série numérique** la donnée d'un couple formé par une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et la suite de ses sommes partielles (S_n) . On note cette série : $\sum_{n \geq 0} u_n$, ou plus simplement $\sum u_n$.
3. L'élément u_n s'appelle **terme général** de la série.

Ce vocabulaire reste valable pour une suite (u_n) définie à partir d'un certain nombre p ; on note $\sum_{n \geq p} u_n$ la série associée.

Exemple 5. Somme géométrique: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$, alors S_n tend vers 2 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple 6. Somme exponentielle: $S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, dans ce cas S_n tend vers $e = 2.718\dots$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple 7. Somme harmonique: $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$, dans ce cas S_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

2.2 Convergence d'une Série

Définition 1. On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ **converge** lorsque la suite (S_n) de ses sommes partielles est **convergente** (dans \mathbb{R} ou \mathbb{C}).

On dit qu'une série numérique **diverge** lorsqu'elle **ne converge pas**.

2 Séries Numériques

Lorsque la série de terme général u_n converge, la limite de la suite de ses sommes partielles sera notée

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

et appelée la somme de la série de terme général u_n . Souvent, on désignera la série de terme général u_n par la notation u_n , celle-ci ne préjugeant en rien de l'existence de la somme de la série, c'est-à-dire de sa **convergence** ou de sa **divergence**.

- On dit que deux séries numériques sont **de même nature** lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.
- On peut dire simplement que la suite (S_n) s'appelle série numérique.
- La donnée de la suite S_n permet de reconstruire le terme général u_n ,

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \text{ ou } u_{n+1} = S_{n+1} - S_n, \text{ avec } S_0 = u_0.$$

- $r_n = S - S_n$, s'appelle **reste** d'ordre n , c'est la limite de

$$S_q - S_n = \sum_{p=n+1}^q u_p, \text{ lorsque } q \rightarrow +\infty,$$

$$\text{et donc } r_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p.$$

Remarque 2. $r_n = S - S_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, dans le cas où la série est convergente.

Série Géométrique.

Une série géométrique est une série de terme général $u_n = a^n$. La série géométrique est convergente si et seulement si $|a| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}.$$

Proposition 3. On ne change pas la nature d'une série $\sum u_n$ en modifiant un ensemble fini des termes de la suites (u_n) .

Preuve. Soit $(v_n)_{n \geq 0}$ une suite, et supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0, v_n = u_n.$$

2 Séries Numériques

Supposons que $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$, $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$, alors

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, U_n - V_n &= \sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k) + \sum_{k>n_0}^n (u_k - v_k), \\ &= \sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k) + \sum_{k>n_0}^n (0), \\ &= \sum_{k=0}^{n_0} (u_k - v_k) = \kappa. \quad (\kappa \text{ est une constante})\end{aligned}$$

Prendre la limite de $U_n - V_n = \kappa$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \kappa + \lim_{n \rightarrow \infty} V_n.$$

Ce qui signifie que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \kappa + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Cela prouve que les séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ ont la même nature, et ceci complète la preuve. ■

2.3 Espace Vectoriel de Séries.

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques et soit $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou \mathbb{C}), on définit

1. La série somme de terme général $u_n + v_n$. Cette nouvelle série est notée $\sum (u_n + v_n)$,
2. La série produit de $\sum u_n$ par α . On la note $\alpha \sum u_n$.

Avec ces deux lois:

Proposition 4. *L'ensemble des séries numériques est un \mathbb{K} -espace vectoriel dont l'ensemble des séries convergentes est un \mathbb{K} -sous-espace vectoriel (avec \mathbb{K} représente le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C}).*

Remarque 5. *► La somme d'une série convergente $\sum u_n$ avec une série divergente $\sum v_n$ donne une série divergente. Sinon $\sum v_n = \sum (u_n + v_n) - \sum u_n$ serait convergente.*

► On ne peut rien dire de la somme de deux séries divergentes.

2.4 Critères de Convergences.

Proposition 6. *Si une série $\sum u_n$ converge. Alors*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Preuve. $\forall n \geq 1, u_n = S_n - S_{n-1}$. Mais (S_n) et (S_{n-1}) convergent vers S , cela signifie que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n = S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Alors (u_n) converge vers 0, i.e.; $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. ■

Remarque 7. $u_n \rightarrow 0$ est une condition nécessaire n'est pas suffisante. Par exemple, la série de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, $n \geq 1$ n'est pas convergente, mais $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. On fait

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1),$$

qui a " $+\infty$ " comme limit, et donc $\sum u_n$ diverge.

Définition 2. Si $u_n \not\rightarrow 0$, on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple 8. $\sum \sin(\alpha n)$ et $\sum \cos(\alpha n)$, $\alpha \notin \pi\mathbb{Z}$ divergent grossièrement.

2.4.1 Série Télésopique.

Une série télésopique associée a (a_n) est la série $\sum u_n$ de terme général

$$u_n = a_n - a_{n-1},$$

donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - a_0).$$

Exemple 9. Soit $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

2.4.2 Critère de Cauchy.

Comme pour les suites, le critère de Cauchy donne une condition nécessaire et suffisante de convergence d'une série de termes réels ou complexes.

Théorème 8. (Critère de Cauchy.) Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série de nombres réels ou complexes. Cette série converge si et seulement si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : p > q \geq n_0 \Rightarrow \left| \sum_{k=q+1}^p u_k \right| < \varepsilon.$$

Exemple 10. (Série Harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.) on prend la série harmonique de terme général $u_n = \frac{1}{n}$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Nous avons déjà dit que cette série diverge, on va démontrer ce résultat en utilisant le critère de Cauchy, la quantité

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > n \left(\frac{1}{2n} \right) = \frac{1}{2}.$$

Et donc $S_{2n} - S_n > \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Alors, la série harmonique diverge.

2.4.3 Séries de termes positifs.

Dans le cas où $u_n \geq 0$ on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série de termes positifs.

Théorème 9. La somme et la nature de séries de termes positifs ne sont pas modifiées si on regroupe ses termes de manière quelconque.

Théorème 10. (Règle de Comparaison.) Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries qui vérifient $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang;

$$\text{Si } \sum v_n \text{ converge alors } \sum u_n \text{ converge.}$$

Preuve. En utilisant le Théorème 8. ■

Exemple 11. On a la série télescopique suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 \text{ converge,}$$

d'autre part

$$\begin{aligned} (n+1)(n+1) > n(n+1) &\Rightarrow (n+1)^2 > n(n+1) \\ &\Rightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge.

Remarque 11. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = k, \quad k > 0.$$

On dit, dans ce cas, que $u_n \sim k v_n$ quand $n \rightarrow +\infty$. Et les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exemple 12. Si la série

$$\sum \frac{1}{n}$$

diverge, alors

$$\sum \sin \frac{1}{n}$$

diverge; car

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{\sin(1/n)} = 1.$$

Règle de Cauchy.

Soit $\sum u_n$ une série TP ⁽¹⁾. Alors, si à partir d'un certain rang $\sqrt[n]{u_n} \leq k < 1$, la série est convergente, et est divergente dans le cas où $\sqrt[n]{u_n} \leq k > 1$. On va calculer la limit suivante

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

Ce qui nous amène à la conclusion suivante

1. Si $l < 1$, la série converge,
2. si $l > 1$, la série diverge,
3. si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemple 13. On prend la série

$$\sum_{n \geq 1} n^{-n}.$$

En utilisant la règle de Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-n})^{1/n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^n}\right)^{1/n}, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Donc, d'après la règle de Cauchy la série donnée converge.

Règle de D'Alembert.

Soit $\sum u_n$ une série TP et supposons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l.$$

Alors

1. Si $l < 1$, la $\sum u_n$ série converge,
2. si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge,
3. si $l = 1$, on ne peut pas conclure.

¹TP c'est-à-dire "de termes positive".

Exemple 14. On prend la série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}.$$

En utilisant la règle de D'Alembert, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!}, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Donc, d'après la règle de D'Alembert la série donnée converge.

Remarque Importante

Si la "limite de D'Alembert" $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$ cela implique que la "limite de Cauchy" $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. D'autre part l'existence de la limite de Cauchy n'implique pas toujours que limite de D'Alembert existe.

Exercice 1. Etudier la nature de séries suivantes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} \quad \text{and} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+2}{2n}\right)^n.$$

Test Intégral.

Soit une fonction f positive $f(x) \geq 0$ et décroissante sur $[1, +\infty[$ ou à partir d'une certaine valeur de x , alors

$$\sum_{n \geq 1} f(n) \text{ converge } \underline{\text{ssi}} \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Exemple 15. (Série de Riemann: $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n^\alpha}$) Est une série de termes général

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Cette série est

1. divergente si $0 < \alpha < 1$,
2. convergente si $\alpha > 1$,
3. divergente si $\alpha \leq 0$; car $u_n \not\rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Dans les deux premiers cas, on peut utiliser le test intégral. Soit

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha},$$

2 Séries Numériques

la fonction f est une fonction positive sur l'intervalle $[1, +\infty[$ et puisque

$$f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, \quad \forall \alpha > 0,$$

alors f est décroissante sur $[1, +\infty[$, $\forall \alpha > 0$.

Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est de même nature avec l'intégral de la fonction f sur $[1, +\infty[$, on fait

$$\begin{aligned} I_\alpha &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{1}{x^\alpha} dx, \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^R, \quad \alpha \neq 1, \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \left(\frac{R^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \right), \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } 1-\alpha < 0 \\ \infty & \text{si } 1-\alpha > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion.

- Si $\alpha > 1$ on a I_α converge et de même $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$,
- Si $\alpha < 1$ on a I_α diverge et de même $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$,
- Pour $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} [\ln x]_1^R, \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} (\ln R), \\ &= -\infty. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Théorème 12. Si

$$u_n \sim \frac{A}{n^\alpha}$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, où A est une constante. Alors $\sum u_n$ converge si $\alpha \leq 0$, et diverge si $\alpha > 1$.

Exemple 16. Soit

$$u_n = \frac{5n^2}{n^5 - n^3},$$

c'est clair que

$$u_n \sim \frac{5n^2}{n^5} = \frac{5}{n^3},$$

et donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{5n^2}{n^5 - n^3}$$

converge.

Règle $n^\alpha u_n$.

Soit $\sum u_n$ une série de TP, alors

1. Si la suite $(n^\alpha u_n)_n$ converge vers 0 avec $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge,
2. Si la suite $(n^\alpha u_n)_n$ tend vers $+\infty$ avec $\alpha \leq 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Série de Bertrand.

On appelle série de Bertrand une série de la forme suivante

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \text{ avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Proposition 13.

(Série de Bertrand converge) $\Leftrightarrow (\alpha > 1 \text{ ou } [\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1])$.

Preuve. Utiliser le test intégral. ■

Exemple 17. Soit la série numérique de terme général

$$u_n = \sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n}.$$

On fait le suivant

$$\begin{aligned} u_n &= n^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n+1}} = n^{\frac{1}{n+1}} \left(n^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 \right), \\ &\sim n^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1 \quad \left(\text{Puisque } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n+1}} = 1 \right), \\ &= e^{\frac{\ln n}{n(n+1)}} - 1 \quad \left(\text{Puisque } e^{\frac{\ln n}{n(n+1)}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n(n+1)} \right) \\ &\sim \frac{\ln n}{n^2} = \frac{1}{n^2 (\ln n)^{-1}}. \end{aligned}$$

Donc la série

$$\sum (\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n})$$

converge.

Proposition 14. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries TP telles que

$$\forall n \geq p \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge,
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Preuve. Pour $n \geq p + 1$, on a

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} \leq \frac{v_{p+1}}{v_p}, \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} \leq \frac{v_{p+2}}{v_{p+1}}, \dots, \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}}.$$

Le produit de toutes ces inégalités, donne

$$\frac{u_n}{u_p} \leq \frac{v_n}{v_p},$$

et puisque u_p, v_p sont des constantes, on peut conclure que

$$u_n \leq k v_n, \quad k > 0,$$

ce qui montre la proposition. ■

Règle de Duhamel (Raabe, Gauss).

Cette règle permet d'affiner le critère de D'Alembert dans le cas douteux, c'est-à-dire

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 1,$$

pour cela on prend

$$\alpha_n \sim n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right), \quad \alpha_n \rightarrow l, \quad n \rightarrow +\infty,$$

1. $l > 1 \Rightarrow \sum u_n$ converge,
2. $l < 1 \Rightarrow \sum u_n$ diverge,
3. $l = 1$ cas douteux.

Exemple 18. On considère la série de terme

$$u_n = \left(\frac{\prod_{i=1}^n (3i-1)}{\prod_{i=1}^n 3i} \right)^2,$$

cela donne

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{3n+1}{3n+3} \right)^2,$$

qui tend vers 1 lorsque $n \rightarrow +\infty$, ce qui est un cas douteux, alors on prend

$$\begin{aligned} \alpha_n &= n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right), \\ &= n \left(\left(\frac{3n+3}{3n+1} \right)^2 - 1 \right), \\ &= n \left(\frac{4}{3n+1} + \frac{4}{(3n+1)^2} \right), \\ &= \frac{4}{3} > 1. \end{aligned}$$

D'où la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 2. Démontrer la règle de Raabe-Duhamel.

2.4.4 Séries de termes réels (aux signes quelconques).

Définition 3. Soit une série $\sum u_n$. Si la série de terme général $|u_n|$ est convergente, on dit que la série de termes général u_n est absolument convergente.

Remarque 15. La série $\sum |u_n|$ est une série TP.

Théorème 16. La série $\sum |u_n|$ est convergente implique que la série $\sum u_n$ est convergente.

Preuve. En utilisant, l'inégalité

$$\left| \sum_{n=p}^q u_n \right| \leq \sum_{n=p}^q |u_n|, \quad (q > p),$$

et puisque la série $\sum_{n=p}^q |u_n|$ vérifie le critère de Cauchy du Théorème 8. ■

Remarque 17. On dit qu'il y a semi-convergence si $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge.

Exemple 19. • La série $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ est absolument convergente puisque $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

• Par contre la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente vers “ $-\ln 2$ ”, tandis que

$$\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum \frac{1}{n},$$

est divergente, ce qui veut dire que

$$\sum \frac{(-1)^n}{n},$$

est semi-convergente.

- Etudier la nature de série suivante

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}{n}.$$

Critère de séries alternées (Leibniz).

Théorème 18. (Critère de Leibniz.) Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels positifs. Si la suite (u_n) est décroissante vers 0, alors la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.

En plus, si (S_n) la suite de somme partielle. Alors la somme S de la série peut être évaluée de manière suivante

$$|S - S_n| \leq u_{n+1}.$$

Exemple 20. La série

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}_+^*,$$

est une série alternée et la suite de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est décroissante tend vers 0. D'après le critère de Leibniz, la série donnée donc est convergente, et de plus

$$\left| \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{1}{p^\alpha} \right| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

Critère d'Abel.

Proposition 19. (Critère d'Abel.) Si la série $\sum u_n$ avec

$$u_n = a_n b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Supposons que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge et (a_n) est une suite monotone et bornée. Alors la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n,$$

est convergente.

Remarque 20. Si $b_n = (-1)^n$, on obtient le critère de Leibniz.

Exercice 3. Etudier la nature des séries de termes suivants

1. $u_n = \frac{n^3}{n!}$, “D’Alembert”
2. $u_n = \frac{\ln(n^n)}{(\ln n)^n}$, “Cauchy”
3. $u_n = \frac{\sqrt[3]{n^4+1}}{n\sqrt{n-1}}$, “Riemann”
4. $u_n = \frac{1}{(\ln n)^p}$, $n \geq 0$, $p > 0$, “Bertrand”
5. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$, $n \geq 1$, “Leibniz”

2.4.5 Propriétés des Séries Absolument convergentes.

1. On peut regrouper d’une manière quelconque les termes d’une série absolument convergente sans changer ni la convergence ni la somme.
2. La modification de l’ordre des termes d’une série absolument convergente ne change ni la convergence ni la somme de la série.
3. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, leur produit peut être effectué sous la forme

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \right),$$

où

$$w_n = \sum_{p=0}^n u_p v_{n-p}$$

appelé produit de Cauchy, et la série $\sum w_n$ est aussi absolument convergente.

3 Suites de Fonctions.

Soit \mathcal{F} l'ensemble de fonctions numériques définies sur un intervalle I de \mathbb{R} .

Définition 4. On appelle suites de fonctions une application de \mathbb{N} dans \mathcal{F} qui à n associe $f_n(x)$. Une suite de fonctions $\{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$ est notée $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou (f_n) .

Exemple 21. Les suit (f_n) suivantes sont des suites de fonctions.

1. $f_n(x) = e^{-n x}$ sur \mathbb{R}_+ .

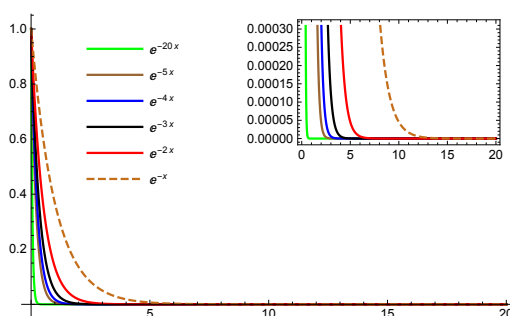


Figure 3.1: Graphes de $f_n(x) = e^{-n x}$ avec $n = 1, 2, 3, 4, 5$ and 20 , **exemple 21**.

2. $f_n(x) = \frac{\sin(n x)}{n}$ sur $[0, \pi]$.

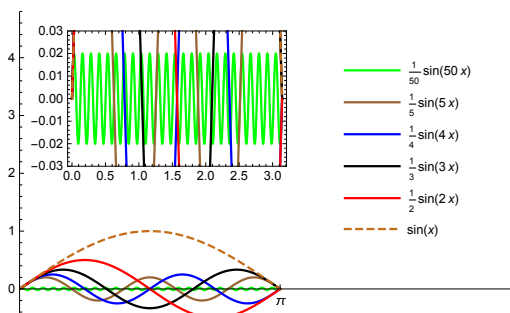


Figure 3.2: Graphes de $f_n(x) = \frac{\sin(n x)}{n}$ avec $n = 1, 2, 3, 4, 5$ and 50 , **exemple 21**.

3 Suites de Fonctions.

Nous avons vu de l'exemple 21 dans le cas où $f_n(x) = \exp(-nx)$ que si n devient assez grand $f_n = \exp(-nx) \rightarrow 0$, sauf pour $x = 0$ qui donne $f_n(0) = 1$. Alors que dans le cas où $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ cette fonction tend vers 0 pour toutes les valeurs de x dans l'intervalle $[0, \pi]$ " $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n} \rightarrow 0$ ". On voit la différence entre ces deux types de "convergence". Selon à cette remarque de cet exemple, on va discuter

- i) La notion de convergence pour chaque point x de I de la suite $(f_n(x))_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ "Convergence simple",
- ii) La convergence globale sur I de $(f_n(x))_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ "Convergence uniforme".

3.1 Convergence Simple.

Définition 5. On dit que la suite $\{f_0, f_1, \dots, f_n, \dots\}$ de fonctions de \mathcal{F} **converge simplement** vers la fonction f de \mathcal{F} si pour tout x de I , $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, c'est-à-dire, si

$$\forall x \in I, \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x),$$

i.e.;

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon, x), |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Exemple 22. Soit

1. La suite $f_n(x) = \exp(-nx)$. Cette suite converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x > 0; \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

2. $g_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, $0 \leq x \leq \pi$. Cette suite converge simplement sur $[0, \pi]$ vers la fonction $f(x) = 0$.

3. $h_n(x) = \frac{3nx^4}{n^3x^3+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3nx^4}{n^3x^3+2} = 0,$$

alors $f_n \xrightarrow{CS} f = 0$ (1).

¹ $f_n \xrightarrow{CS(CU)} f$, signifie que f_n converge simplement (resp. uniformément) vers f .

3.2 Convergence Uniforme.

Définition 6. On dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers f sur I si on a: La suite numérique $(\|f_n(x) - f(x)\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. D'une manière équivalente, la borne supérieure de $|f_n(x) - f(x)|$ pour $x \in I$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0,$$

i.e.;

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in I, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Remarque 21. Dans le cas de convergence uniforme, N ne dépend que de ε , non de x .

3.2.1 Interprétation Graphique.

La courbe (C_n) d'équation $y = f_n(x)$ se trouve entre les courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectivement $y = f(x) + \varepsilon$ et $y = f(x) - \varepsilon$ (voir **figure 3.3**).

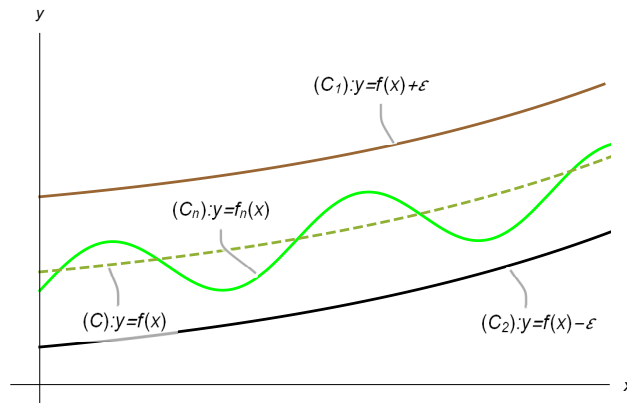


Figure 3.3: Illustration géométrique de convergence uniforme.

Exemple 23. Soit

1. $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(x^2+n)}{n^2}$, il est clair que $f_n \xrightarrow{CS} f = 0$. D'autre part

$$\begin{aligned} 0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| &\leq \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \\ &\Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

3 Suites de Fonctions.

Finalemment on peut conclure que (f_n) converge uniformément vers f sur \mathbb{R} ($f_n(x) \xrightarrow{CU} 0$).

2. On considère $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ sur $[0, \pi]$.

$$\sup_{x \in [0, \pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0, \pi]} \left| \frac{\sin(nx)}{n} \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0,$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$. D'où, la suite (f_n) converge uniformément vers f .

Théorème 22. (La convergence uniforme (CU)) \implies (La convergence simple (CS))

Preuve. Puisqu'on a la convergence uniforme, alors

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0,$$

et donc

$$|f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0, \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Ce qui prouve que (f_n) converge simplement vers f . ■

3.2.2 Continuité et Convergence Uniforme.

Théorème 23. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers f sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Si f_n est continue sur I , $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors f est continue sur I .

Exemple 24. Soit $I = [0, 1]$, $f_n = \frac{2-nx}{2+nx}$, $n \in \mathbb{N}$, il est clair que $f_n \xrightarrow{CS} f$, avec

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0; \\ -1, & x \neq 0. \end{cases}$$

La fonction f_n est continue sur $[0, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, mais f n'est pas continue en 0. Cela implique, d'après le **théorème 23**, que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, 1]$ ($f_n \not\xrightarrow{CU} f$).

3.2.3 Limite d'une Suite de fonctions dérivables.

Théorème 24. Si $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur I et f_n est dérivable $\forall n \in \mathbb{N}$, alors f peut être nondérivable et $(f'_n)_n$ peut être non convergente.

Exemple 25. Soit $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$, $\forall n \geq 1$. Alors $f_n \xrightarrow{CS} f$, avec

3 Suites de Fonctions.

$f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$. De même

$$\begin{aligned} 0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - \sqrt{x^2} \right|, \\ &= \frac{1}{n^2} \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{x^2}}, \\ &= \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}, \quad \forall n \geq 1, \end{aligned}$$

lorsque $n \rightarrow +\infty$, on obtient $0 \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq 0$, par conséquent $f_n \xrightarrow{CU} f = |x|$ sur \mathbb{R} . En plus de ça, f_n est dérivable sur \mathbb{R} , $\forall n \in \mathbb{N}$, mais f n'est pas dérivable au point 0.

Théorème 25. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction définies et continues sur un segment $[a, b]$ de \mathbb{R} converge uniformément vers f sur $[a, b]$. Alors, la suite $\left(\int_a^b f_n(x) dx \right)_n$ converge vers $\int_a^b f(x) dx$, i.e.;

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Exemple 26. Supposons que $I = [0, 1]$ et $f_n = \ln \left(e^x + \frac{x}{n} \right)$, $\forall n \geq 1$. Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx.$$

Premièrement, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \left(e^x + \frac{x}{n} \right) = x,$$

donc $f_n \xrightarrow{CS} f$, avec $f(x) = x$.

Deuxièmement, $\forall x \in I$ on a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \ln \left(e^x + \frac{x}{n} \right) - \ln(e^x) \right|, \\ &= \left| \ln \left(1 + \frac{x}{n} e^{-x} \right) \right| \leq \frac{x e^{-x}}{n}, \\ &\leq \frac{e^{-1}}{n} = \frac{1}{n e}. \end{aligned}$$

Indication. $\forall u \in [0, 1]$, $\ln(1 + u) \leq u \Rightarrow u e^{-u} \leq e^{-1}$.

Alors

$$0 \leq \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n e} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

3 Suites de Fonctions.

Ce qui implique que $f_n \xrightarrow{CU} f$, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Théorème 26. Soit (f_n) une suite de fonctions dérivables sur I , et $f_n \xrightarrow{CS} f$. Pour que f soit dérivable sur I , il suffit que $f'_n \xrightarrow{CU} g$ sur I . Et on a

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = g(x) = f'(x).$$

4 Séries de Fonctions.

Définition 7. On appelle série de fonctions de terme général f_n , la suite de fonctions (S_n) définie par

$$S_n = \sum_{p=0}^n f_p.$$

La suite (S_n) est appelée suite des sommes partielles de la série de fonctions de terme général f_n est noté $\{f_n\}$, $(\sum f_n)$ ou $\sum f_n \dots$ etc.

Définition 8. La série de fonctions $(\sum f_n)$ converge simplement (ou converge uniformément) vers une fonction f . Si la suite de somme partielles (S_n) converge simplement (ou converge uniformément) vers f , alors f appelée fonction somme.

Remarque 27. Si la série de fonctions converge, la fonction somme est notée

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$

la suite (R_n) est appelée suite de restes

$$R_n = f - \sum_{n=0}^n f_n(x) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_p(x).$$

Proposition 28. Soit $(\sum f_n)$ une série de fonctions, il y a équivalence entre

1. $(\sum f_n)$ converge uniformément,
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|R_n\|_{\infty} = 0$, i.e.; La suite des restes converge uniformément vers la fonction nulle,

3. $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que $p > n_0$ et $q \geq n_0$ et $q \geq p \Rightarrow \left\| \sum_{k=p}^q f_k \right\|$ (Critère de Cauchy pour les séries de fonctions).

4.1 Convergence Normale.

Dans le cas où $\sum \|f_n\|_{\infty}$ est convergente, on dit que $(\sum f_n)$ converge normalement.

Proposition 29. Soit $(\sum f_n)$ une série de fonctions telle qu'il existe une suite (α_n) de réels positifs vérifiant

$$\forall x, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x)| \leq \alpha_n.$$

Si la série $\sum \alpha_n$ converge, alors la série $\sum f_n$ converge normalement.

Théorème 30. Convergence normale \Rightarrow Convergence uniforme (absolue) \Rightarrow Convergence simple

Les implications réciproques de théorème précédent sont fausses.

Limite en $x_0 \in I$.

Soit $(f_n(x))$ une suite de fonctions définies sur I . Si chacune des fonctions f_n admet une limite finie ℓ_n en x_0 et si $\sum f_n$ converge uniformément sur I , alors

1. $\sum \ell_n$ converge,
2. $S = \sum f_n$ admet pour limite $\sum \ell_n$ en x_0 , i.e.;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum f_n(x) = \sum \ell_n = \sum \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Intégration sur un segment $[a, b]$.

f_n une fonction continue sur $[a, b]$ et $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$. Alors $S = \sum f_n$ est continue sur $[a, b]$ et

$$\sum \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum f_n(x) dx.$$

Dérivation.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur I . Si

- i $\sum f_n \xrightarrow{\text{CS}} S(x)$ sur I ,
- ii $\sum f'_n \xrightarrow{\text{CU}} T(x)$ sur I ,

alors S est de classe \mathcal{C}^1 sur I pour tout $x \in I$, et

$$S'(x) = T(x) = \sum f'_n(x).$$

5 Exercices sur les Suites et les Séries de Fonctions.

Exercice 4. Considérons la suite $\{f_0, \dots, f_n, \dots\}$ définies par

$$\begin{aligned} f_n : [0, +\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}. \end{aligned}$$

(a) Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$.

(b) Trouver la fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, limite simple de la suite (f_n) , c'est-à-dire f vérifiant $\forall x \in [0, +\infty[: f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Solution. On fixe $x \in [0, +\infty[$, alors

(a)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{1+nx},$$

et puisque $x > 0$ fixé le terme nx tend vers $+\infty$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{nx}{nx} = 1, \quad \text{pour } x \neq 0,$$

dans le cas où $x = 0$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0.$$

Alors (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$.

(b) D'après (a) $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f$, telle que

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Remarque. f_n est une fonction continue qui converge vers une fonction discontinue, alors la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 5. Considérons la suite de fonctions (f_n) définies par

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{n}, & x \neq 1; \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Montrer que (f_n) converge simplement sur \mathbb{R} vers une fonction f qu'on déterminera.

Solution. On calcule la limite lorsque $n \rightarrow +\infty$, on conclut que (f_n) converge simplement vers la fonction f telle que

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 1; \\ 2, & x = 1. \end{cases}$$

Exercice 6. On considère la suite de fonction qui est donnée dans l'exercice 4.

(a) On a vu dans l'exercice 4 que (f_n) converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers f sur $[0, +\infty[$.

(b) Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[1/2, +\infty[$.

(c) Montrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[\alpha, +\infty[$ avec $\alpha > 0$.

Solution.

(a) Pour n fixé, calculons $f_n(x) - f(x)$

$$f_n(x) - f(x) = \begin{cases} \frac{nx}{1+nx} - 1, & x > 0; \\ \frac{nx}{1+nx} - 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{1+nx}, & x > 0; \\ \frac{1}{1+nx}, & x = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{1+nx}, & x > 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pour vérifier la convergence uniforme il faut calculer $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)|$. Pour cette raison, on pose

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+nx},$$

5 Exercices sur les Suites et les Séries de Fonctions.

on prend la dérivée de la fonction g_n

$$g'_n(x) = \left(\frac{1}{1+nx} \right)' = -\frac{n}{(1+nx)^2} < 0.$$

Alors $\forall x \in [0, +\infty[$: $g'_n(x) < 0 \Rightarrow g_n \searrow$ (Décroissante) sur $]0, +\infty[$. Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} g_n(x) &= \sup_{x \in \mathbb{R}_+^*} |f_n(x) - f(x)|; \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+nx} = 1. \end{aligned}$$

Donc $\sup_{x \in \mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 1$.

Par conséquent $\sup |f_n(x) - f(x)| \not\rightarrow 0$ et $f_n \not\stackrel{\text{CU}}{\rightarrow} f$.

- (b) Maintenant, on discute de la convergence uniforme de (f_n) vers f sur l'intervalle $[0, +\infty[$, pour cette raison on fait le suivant

$$\sup_{x \in [1/2, +\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [1/2, +\infty[} \frac{1}{1+nx}.$$

D'où $\frac{1}{1+nx} \searrow \forall x \in [1/2, +\infty[$. Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [1/2, +\infty[} \frac{1}{1+nx} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{1}{1+nx}; \\ &= \frac{1}{1+\frac{n}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Finalement $f_n \stackrel{\text{CU}}{\rightarrow} f = 1$ sur $[1/2, +\infty[$.

- (c) On a aussi $f_n \stackrel{\text{CU}}{\rightarrow} f = 1$ sur $[\alpha, +\infty[$, $\alpha > 0$. La même preuve donnée en (b).

Exercice 7. Considérons la suite de fonctions $(f_n(x))$ avec $x \in [0, 2]$ et $n = 1, 2, \dots$.

$$f_n : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$x \longmapsto f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ -n^2 x + 2n, & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- (a) Montrer que f_n est continue sur $[0, 2]$.
 (b) Etudier la convergence simple de (f_n) sur $[0, 2]$.
 (c) Montrer que (f_n) ne converge pas uniformément vers $f = 0$ sur $[0, 2]$.

Solution.

- (a) La figure 5.1 représente les graphes de f_n pour différentes valeurs de n . La fonction

$$f_n(x) = \begin{cases} g_n(x), & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}; \\ h_n(x), & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}; \\ 0, & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 2, \end{cases}$$

avec $g_n(x) = n^2 x$ et $h_n(x) = -n^2 x + 2n$, est une fonction continue sur $[0, 2]$ car les fonctions g_n et h_n sont des fonctions continues sur \mathbb{R} . Et car, en plus de ça, il n'y a pas de sauts dans les extremums des intervalles $[0, 1/n]$, $[1/n, 2/n]$ et $[2/n, 2]$.

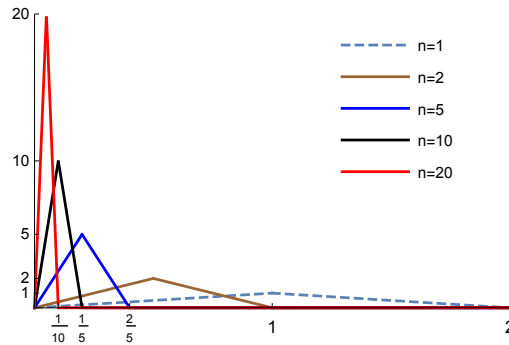


Figure 5.1: Graphes de fonctions f_n pour $n = 1, 2, 5, 10$ et 20 .

- (b) Soit x fixé, alors si $x = 0$ on a immédiatement $f_n(x) = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$. Dans le cas où $x > 0$ et lorsque $n \rightarrow +\infty$, g_n et h_n ont le singleton $x = 0$ comme domaine de définition (d'après le théorème de la pince). Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, $x > 0$.

Finalement, $f_n \xrightarrow{\text{CS}} f = 0$.

- (c) Pour la convergence uniforme, on fait

$$\begin{aligned} \|f_n(x) - 0\|_\infty &= \sup_{x \in I} |f_n(x)|, \\ &= f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

D'où $f_n \not\xrightarrow{\text{CU}} f = 0$.

Exercice 8. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions, telle que $f_n : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0; \\ 1, & \text{si } x \in [0, 1/n]; \\ 0, & \text{si } x \in [1/n, 1], \end{cases}$$

(a) Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f .

(b) Montrer que $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur $[0, 1]$.

(c) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x) dx.$$

(d) Que peut-on conclure.

Exercice 9. Montrer que la série

$$\sum_{n \geq 0} x(1-x)^n,$$

a. est convergente,

b. n'est pas convergente uniformément sur $[0, 2[$.

c. Intégrer cette série terme à terme sur $[0, 2]$. Conclure.

Solution.

a. Si on prend $S = \sum x(1-x)^n$, alors S peut prendre la forme

$$S = x \sum (1-x)^n,$$

une série géométrique qui converge lorsque $|1-x| < 1$, et donc pour

$$-1 < 1-x < 1 \Rightarrow 0 < x < 2.$$

Dans le cas où $x = 0$, on obtient $S(0) = 0$ et

$$S(x) = x \sum (1-x)^n = x \frac{1}{1-(1-x)} = 1, \quad \text{pour } x \in]0, 2[.$$

Finalement, la série donnée converge sur $[0, 2[$ vers une fonction discontinue

$$S(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1, & 0 < x < 2. \end{cases}$$

5 Exercices sur les Suites et les Séries de Fonctions.

b. $S(x)$ est discontinue et puisque f_n est une fonction continue, on peut conclure donc que la convergence n'est pas uniforme.

c. On peut facilement vérifier que

$$\int_0^1 S(x) dx = 1,$$

et d'autre part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 x(1-x)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \mathcal{S}.$$

Il s'agit d'une série télescopique et sa somme est donnée par

$$\mathcal{S} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = 1.$$

Remarquons que la convergence n'est pas uniforme mais on obtient $\mathcal{S} = \int_0^1 S(x) dx$.

Donc la continuité et la convergence uniforme sont des conditions suffisantes mais pas des conditions nécessaires pour lesquelles $\mathcal{S} = \int_0^1 S(x) dx$.

Exercice 10. a. Calculer

$$I_m = \int_0^1 f_m(x) dx, \text{ avec } f_m(x) = \frac{2^m x}{1 + m 2^m x^2}.$$

b. Calculer

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m = I \text{ et } \lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = f(x).$$

c. Comparer I avec $\int_0^1 f(x) dx$. Conclure.

Solution.

a.

$$I_m = \frac{1}{2m} \ln(1 + m 2^m).$$

b.

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} I_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\ln(m 2^m)}{2m} = \frac{\ln 2}{2},$$

et

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{m x} = 0, \quad x \neq 0.$$

5 Exercices sur les Suites et les Séries de Fonctions.

Si $x = 0$, on trouve $f_m(0) = 0$ et $f(x) = 0$.

c. $I = (\ln 2)/2$ et $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Alors, la convergence n'est pas uniforme.

Exercice 11. Soit $f_n(x) = e^{-nx^2} \sin(nx) + \sqrt{1-x^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

a. Etudier la convergence simple sur $[-1, 1]$.

b. Montrer que $\forall a > 0$, $f_n \xrightarrow{CU} f$ sur $[a, 1]$.

c. Montrer que $\forall a > 0$, $f_n \not\xrightarrow{CU} f$ sur $[0, 1]$.

Solution.

a. $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

b. $|f_n(x) - f(x)| = e^{-nx^2} |\sin(nx)| \leq e^{-nx^2} \leq e^{-na^2}$, $x \in [a, 1]$. Alor

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-na^2} = 0,$$

cela signifie que

$$f_n(x) \xrightarrow{CU} \sqrt{1-x^2}.$$

c. Dans ce cas on peut prendre $x = 1/n$. Alors $n \rightarrow +\infty \Rightarrow x \rightarrow 0$ et donc

$$|f_n(1/n) - f(1/n)| = e^{-1/n} \sin(1) \not\rightarrow 0 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Cela montre que la convergence n'est pas uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

Exercice 12. Montrer que la série de terme général

$$f_n(x) = (-1)^n \frac{x^2 + n}{n^2}.$$

a. N'est pas absolument convergente sur \mathbb{R} .

b. Converge uniformément sur tout intervalle fermé $[a, b]$.

Solution.

a. $|f_n(x)| \sim \frac{1}{n}$ est donc la série $\sum |f_n(x)|$ est de même nature avec la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ qui est divergente. Donc la série de fonctions donnée n'est pas absolument convergente.

D'autre part, en utilisant la règle de Leibniz (puisque la série est alternée) on peut vérifier que la série est simplement convergente.

b. Une série alternée de somme $S(x)$ et de somme partielle $S_n(x)$ est vérifiée

$$\begin{aligned} |S(x) - S_n(x)| &\leq |f_{n+1}(x)| \leq \frac{(\sup(|a|, |b|))^2 + n + 1}{(n+1)^2}, \\ \Rightarrow \sup_{x \in [a, b]} |S(x) - S_n(x)| &= \sup_{x \in [a, b]} |R_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Donc, la série donnée est convergente uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 13. Montrer que la série de terme général

$$f_n(x) = n e^{-nx},$$

est convergente uniformément sur $[a, +\infty[$ ($a > 0$), mais non sur $[0, +\infty[$ et puis calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx}, \quad x > 0.$$

Solution.

On sait que

$$n e^{-nx} \leq n e^{-na}.$$

La série numérique $\sum n e^{-na}$ converge \Rightarrow la convergence normale \Rightarrow la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

En $x = 0$ la série ne converge pas simplement \Rightarrow ne converge pas uniformément.

Finalement, la série de terme général $\frac{d}{dx}(e^{-nx})$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-nx} = -\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

6 Séries Entières.

Une série de la forme $\sum a_n x^n$ est appelée série entière, où (a_n) est suite réelle ou complexe ⁽¹⁾. La somme partielle

$$S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

est une fonction polynomiale

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Comme les séries de fonctions, ce problème se traite avec les méthodes étudiées dans le chapitre de séries numériques, en particulier : **règle de Cauchy** et **règle de D'Alembert** pour démontrer la convergence simple de la série de terme général $a_n x^n$ en $x \in I \subset \mathbb{R}$.

Pour la convergence uniforme il suffit de trouver une série de terme général v_n convergente telle que

$$|a_n x^n| \leq v_n.$$

En plus, cela donne la convergence normale qui implique la convergence uniforme.

Exemple 27. *Soit*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} x^n \text{ sur } [0, 1].$$

1. *C'est une série alternée qui est simplement convergente.*
2. *Converge absolument puisqu'on a*

$$\left| \frac{(-1)^n}{n^2} x^n \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

qui est un terme général d'une série convergente de Riemann.

¹Dans ce chapitre, on peut remplacer $x \in \mathbb{R}$ par une variable complexe $z \in \mathbb{C}$ sauf que la valeur absolue dans \mathbb{R} est remplacée par le module dans \mathbb{C} .

3. Le reste R_n est donnée par

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} \\ &\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Ce qui signifie que la série est uniformément convergente

Exemple 28. La série de terme général x^n est une série entière (série géométrique) simplement convergente sur $] -1, 1[$. En plus de ça

$$\forall x \in [-1/2, 1/2], \quad |x^n| < \frac{1}{2^n},$$

et la série géométrique de raison $1/2$ est uniformément convergente sur $[-1/2, 1/2]$.

Lemme 31. (d'Abel.) Si la série $\sum a_n x^n$ converge au point $x_0 \neq 0$, alors la série entière donnée est absolument convergente sur $|x| < |x_0|$ ($] -|x_0|, |x_0|[$).

Preuve. La série $\sum a_n x_0^n$ converge, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n x_0^n = 0,$$

et cela implique que $\exists M > 0$ tel que $|a_n x_0^n| \leq M$ et donc

$$\begin{aligned} \forall x \in] -|x_0|, |x_0|[, \quad |a_n x^n| &= \left| a_n x_0^n \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n, \\ &\leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n. \end{aligned}$$

Et puisque $|x/x_0| < 1$, on obtient

$$\sum |a_n x^n| \leq M \sum \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < \infty.$$

■

Proposition 32. Si la série $\sum a_n x^n$ diverge lorsque $x = x_0$, alors $\sum a_n x^n$ diverge pour toutes valeurs de x t.q. $|x| > |x_0|$.

Preuve. Supposons que non! i.e.; $\exists x_1$ avec $|x_1| > |x_0|$ tel que la série $\sum a_n x_1^n$ converge et cela signifie que, d'après lemme 31, la série $\sum a_n x^n$ converge sur l'intervalle $] -|x_1|, |x_1|[$ qui contient l'intervalle $] -|x_0|, |x_0|[$ et cela contredit le fait que la série $\sum a_n x_0^n$ est divergente. ■

Proposition 33. Si la série entière $\sum a_n x^n$ converge sur l'intervalle $] -a, a[$, $a > 0$. Alors $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[-r, r] \subset] -a, a[$.

Preuve. Soit $r < r_1 < a$, et puisque $\sum a_n x^n$ converge sur l'intervalle $] -a, a[$, $a > 0$, alors $\exists M > 0$, tel que $|a_n r_1^n| \leq M$, $\forall n$. Donc, $\forall x \in [-r, r]$, on a

$$\begin{aligned} |a_n x^n| &= \left| a_n r_1^n \frac{x^n}{r_1^n} \right| \\ &= |a_n r_1^n| \left| \frac{x^n}{r_1^n} \right| \leq M \left| \frac{r}{r_1} \right|^n. \end{aligned}$$

Finalement, $\sum a_n x^n$ converge uniformément sur $[-r, r]$. ■

6.1 Rayon de Convergence d'une Série Entière.

Il découle du lemme 31 que l'ensemble des x où la série entière est convergente est un intervalle centré en 0.

Définition 9. Le nombre $\mathcal{R} = \sup\{|x| : x \in \mathcal{D}\}$, où \mathcal{D} c'est le domaine de convergence de série entière $\sum a_n x^n$ est appelé **Rayon de convergence** de cette série entière ($0 \leq \mathcal{R} \leq +\infty$) et on a

1. $\mathcal{R} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D} = \{0\}$.
2. $\mathcal{R} = +\infty \Leftrightarrow \mathcal{D} = \mathbb{R}$.
3. $0 < \mathcal{R} < +\infty$, alors
 - $|x| < \mathcal{R} \Rightarrow$ La série converge.
 - $|x| > \mathcal{R} \Rightarrow$ La série diverge.

D'après proposition 33, si la $\sum a_n x^n$ converge sur $] -\mathcal{R}, \mathcal{R}[$ elle converge alors uniformément sur $[a, b] \subset] -\mathcal{R}, \mathcal{R}[$.

6.1.1 Calcul de Rayon de convergence, \mathcal{R} .

Théorème 34. (Hadamard.) Le rayon de convergence \mathcal{R} de série entière $\sum a_n x^n$ est donné par ⁽²⁾

²Soit (u_n) une suite bornée réelle et soient

$$v_n = \sup\{u_k : k \geq n\} \quad \text{et} \quad w_n = \inf\{u_k : k \geq n\}.$$

Les suites (v_n) et (w_n) sont respectivement décroissante et croissante et $w_n \leq u_n \leq v_n$. On appelle respectivement **limite supérieure** et **limite inférieure** de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n,$$

ce qui est équivalent à

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf(v_n)_{n \geq 0} \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup(w_n)_{n \geq 0}.$$

6 Séries Entières.

$$\frac{1}{\mathcal{R}} = \rho = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

On utilise le test de D'Alembert (ou de Cauchy) dans le cas où ces limites existent (peut être $+\infty$), le rayon de convergence est donné par

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho = \frac{1}{\mathcal{R}}$, "D'Alembert".
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho = \frac{1}{\mathcal{R}}$, "Cauchy".

Exemple 29. On considère la série entière $\sum \frac{x^n}{n^2}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} |x| = |x|.$$

Donc la série converge si $|x| < 1$ et diverge si $|x| > 1$, et donc $\mathcal{R} = 1$.

Exemple 30. Soit la série entière suivante

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(3 + (-1)^n)^n}{n} x^n.$$

Alors

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 + (-1)^n}{\sqrt[n]{n}}} = \frac{1}{4}.$$

Exemple 31. Soit la série entière

$$\sum_{n \geq 0} x^n.$$

Dans ce cas

$$\mathcal{R} = 1.$$

Exemple 32. Soit la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{n} x^n.$$

Dans ce cas

$$\mathcal{R} = \frac{1}{a},$$

d'où la série converge sur $] -1/a, 1/a[$. Si $x = 1/a$ on a une série harmonique qui converge, par contre $x = -1/a$ donne une série harmonique alternée qui est immédiatement convergente.

Exemple 33. La série entière

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!},$$

a le rayon de convergence suivant

$$\mathcal{R} = +\infty.$$

Exemple 34. La série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} x^n,$$

a le rayon de convergence suivant

$$\mathcal{R} = 1.$$

Donc la série converge pour $|x| < 1$. Remarquons ici que la série converge aussi pour $x = \pm 1$.

Exemple 35. La série entière

$$\sum_{n \geq 1} n^n x^n,$$

a le rayon de convergence

$$\mathcal{R} = 0.$$

La série ne converge que si $x = 0$.

6.2 Dérivation et Intégration des Séries Entières.

1. La somme d'une série entière est une fonction continue, et même indéfiniment dérivable sur son intervalle de convergence, alors si

$$S(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

implique que

$$S'(x) = a_1 + 2 a_2 x + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots.$$

On peut donc dériver une série entière $\sum a_n x^n$ terme à terme, et la série obtenue a le même rayon de convergence \mathcal{R} que la série donnée et même de classe \mathcal{C}^∞ .

2. On peut, de manière analogue, intégrer terme à terme une série entière $S(x) = \sum a_n x^n$ de rayon de convergence \mathcal{R} , et encore le rayon de convergence de série entière trouvée est égale à \mathcal{R} , alors

$$\int_0^x S(t) dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots.$$

Exemple 36. Si on prend

$$S(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad \mathcal{R} = 1.$$

Alors

$$S'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots, \quad \mathcal{R} = 1,$$

et

$$\int_0^x S(t) dt = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \quad \mathcal{R} = 1.$$

6.3 Opérations sur les Séries Entières.

1 Somme. Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence respectivement \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 , la somme de ces séries $\sum (a_n + b_n) x^n$ est de rayon de convergence \mathcal{R} tel que

$$\mathcal{R} = \inf\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\} \text{ où } \mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}_2.$$

Si $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$, on ne peut pas conclure. Par exemple pour $a_n = -b_n = 1$, alors

$$\sum x^n + \sum (-1) x^n = 0,$$

et donc $\mathcal{R} = +\infty$.

2 Multiplication par un scalaire k . La série entière $\sum k a_n x^n$ a le même rayon \mathcal{R} que la série $\sum a_n x^n$ dans le cas où $k \neq 0$. Si $k = 0$, le rayon de $\sum k a_n x^n$ est $\mathcal{R} = +\infty$.

3 Multiplication de deux séries entières. Le produit

$$\left(\sum a_n x^n\right) \left(\sum b_n x^n\right) = \sum c_n x^n \text{ avec } c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

a le rayon de convergence \mathcal{R} tel que $\mathcal{R} > \inf\{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2\}$.

6.4 Développement en Série Entière.

Théorème 35. Si $S(x)$ est la somme d'une série entière $\sum a_n (x - x_0)^n$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

6.4.1 Fonctions Développable en Série Entière.

Définition 10. f est développable en série entière sur I s'il existe une série entière dont l'intervalle de convergence contient I et

$$S(x) = f(x) = \sum a_n x^n \text{ sur } I.$$

Puisque $S(x)$ est indéfiniment dérivable sur le domaine de convergence, il faut que f soit indéfiniment dérivable sur I .

Exemple 37. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ avec $\mathcal{R} = 1$, alors $f(x) = \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $] -1, 1[$.

Exemple 38. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots$ avec $\mathcal{R} = 1$. Par intégration, on obtient

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$$

Exemple 39. $\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots$ avec $\mathcal{R} = 1$.

Exemple 40. $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$ avec $\mathcal{R} = 1$. Par intégration, on obtient

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Exercice 14. En utilisant **exemple 37**, donner le développement en série entière au voisinage de 0 de la fonction f telle que

$$f(x) = \frac{1}{a-x}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

6.5 Séries de Taylor.

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty$ au voisinage de x_0 , la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n,$$

est appelée série de Taylor au voisinage de x_0 . Si $x_0 = 0$, est appelée série de Maclaurin.

Si on prend une série entière sur son domaine de convergence, alors sa somme est de classe \mathcal{C}^∞ avec $a_n = \frac{S^{(n)}(x_0)}{n!}$, et donc

Théorème 36. Toute série entière $\sum a_n (x-x_0)^n$ est une série de Taylor de sa somme au voisinage de x_0 .

Définition 11. Si f est développable en série entière au voisinage de tous points $x_0 \in]a, b[$, on dit que f est **analytique** sur $]a, b[$.

Remarque 37. On peut construire des fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas développables en série de Taylor au voisinage d'un point x_0 .

Exemple 41. Comme exemple de ces types de fonctions, considérons la fonction suivante f

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

alors $f \in \mathcal{C}^\infty$ dans \mathbb{R} , et $f^{(n)}(0) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$, ce qui donne

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0,$$

mais la fonction n'est pas nulle partout au voisinage de 0.

Théorème 38. $f \in \mathcal{C}^\infty$ développable en série de Taylor, i.e.;

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

sur le domaine de convergence $\Delta =]x_0 - \mathcal{R}, x_0 + \mathcal{R}[$,

si et seulement si

$\forall x \in \Delta : \lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(x) = 0$, où $R_n(x)$ représente le reste de développement limité de Taylor

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)), \quad \theta \in]0, 1[$$

Théorème 39. Si on a $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $M > 0$. Alors f est développable en série de Taylor.

Ce théorème donne une condition suffisante mais n'est pas une condition nécessaire.

Exemple 42. Soit $f(x) = \sin x$, $\cos x$, c'est clair que

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1,$$

on peut alors développer f en série de Taylor comme suit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

6 Séries Entières.

et de même

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

Exemple 43. Soit $f(x) = e^x$, le développement limité de Taylor de f est donné par

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x),$$

avec $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{x\theta}$, ce qui signifie que

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Finalement,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots.$$

En utilisant cette série, nous pouvons, par exemple, obtenir le développement de Taylor pour les fonctions

$$e^{-x}, \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Formule d'Euler. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, $i^2 = -1$. On fait le développement de Taylor de e^z , $z = ix$

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + i \frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \dots, \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \right) + i \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right), \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$

7 Séries Trigonométriques (Séries de Fourier).

On est déjà expliqué comment développer une fonction f en série entière selon le développement de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Dans le cas où f est continue et périodique de période $T = 2\pi$, on peut représenter f sous la forme d'une somme infinie de fonctions trigonométriques (fonctions cosinus et sinus), i.e.;

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \quad (7.1)$$

est appelée série de Fourier de la fonction f . Si $\sum |a_n| + |b_n|$ converge, alors la série (7.1) converge absolument, uniformément et normalement $\forall x$ puisqu'on a

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|.$$

Exemple 44. $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$.

7.1 Comment déterminer c_0 , a_n et b_n ?

Définition 12. Soient $u(x)$ et $v(x)$ deux fonctions définies sur \mathbb{R} , de période 2π . On dit que u et v sont orthogonales sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ si:

$$\langle u, v \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} u(x) v(x) dx = 0.$$

En général, u et v sont orthogonales sur un intervalle $[a, b]$ implique que $\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x) v(x) dx = 0$.

Théorème 40. Si $u(x) = \sin nx$, $n \geq 0$ et $v(x) = \cos mx$, $m \geq 0$. Alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0, \quad \forall m, n,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ \pi, & \text{si } n = m \neq 0, \\ 2\pi, & \text{si } n = m = 0, \end{cases}$$

et

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m, \\ \pi, & \text{si } n = m, \end{cases}$$

7.1.1 Détermination de c_0 , a_n et b_n .

D'après la relation (7.1)

$$f(x) = c_0 + \dots + a_k \cos kx + \dots + a_n \cos nx + \dots + b_k \sin kx + \dots + b_n \sin nx + \dots,$$

on multiplie les deux membres par $\cos nx$, et puis on intègre on obtient

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx &= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx) dx = \pi a_n, \\ \Rightarrow a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

de même manière on peut déduire que

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad n = 1, 2, \dots$$

le terme constant c_0

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi c_0 \Rightarrow c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{a_0}{2}$$

Finalement, on écrit

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

le symbole \sim se lit “admet un développement en série de Fourier”.

Théorème 41. Si $f(x) = g(x)$, alors les séries de Fourier de f et g sont les mêmes.

7.1.2 Série de Fourier d'une fonction paire (resp. impaire).

Soit f une fonction paire ($f(-x) = f(x)$), alors:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = 0,$$

et si f est impaire ($f(-x) = -f(x)$), donc:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad a_n = 0.$$

Exemple 45. Prenons la fonction périodique $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$ de période 2π . Comme f est une fonction impaire, on obtient:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx, \quad (\text{on intègre par partie}) \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right\}, \\ &= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{-\pi}{n} (-1)^n + \left[\frac{\sin nx}{n^2} \right]_0^{\pi} \right\}, \\ \Rightarrow b_n &= \frac{2}{n} (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Donc, la série de Fourier de f est:

$$f(x) \sim 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad \text{avec } x \in]-\pi, \pi[.$$

Remarquons que la série de Fourier n'est pas une approximation de f au voisinage d'un point comme le développement de Taylor, mais son but est de faire une approximation sur tout l'intervalle de définition.

Remarque 42. Si f est continue en x_0 , alors sa série de Fourier en ce point est convergente.

Si f n'est pas continue en x_0 (a un saut), alors sa série de Fourier converge vers la valeur moyenne de sauts (Exemple 45).

7.1.3 Généralisation.

Jusqu'ici, on considère seulement l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Si on considère un intervalle arbitraire $[a, b]$, dans ce cas on introduit une nouvelle variable t par un changement de variable

$$x = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{b-a}{2\pi}t,$$

on peut revenir au intervalle $[-\pi, \pi]$. À la fin, on obtient

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} + b_n \sin \frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} \right], \quad (7.2)$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} dx, \quad n \geq 0, \\ b_n &= \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{n\pi(2x-b-a)}{b-a} dx, \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Dans le cas où la fonction f est une fonction périodique de période $T = 2L$ sur l'intervalle $[-L, L]$, on peut donc écrire

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos n \frac{\pi}{L} x + b_n \sin n \frac{\pi}{L} x,$$

avec

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \left(n \frac{\pi}{L} x \right) dx, \\ b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \left(n \frac{\pi}{L} x \right) dx, \end{cases}$$

si la fonction f est paire, on trouve

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \left(n \frac{\pi}{L} x \right) dx,$$

et si f est impaire, on obtient

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \left(n \frac{\pi}{L} x \right) dx.$$

Théorème 43. (Condition de Convergence) *Si f et f' sont continues par morceaux sur $[-L, L]$, i.e.,; continue sur $[-L, L]$ sauf sur une partie finie $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$. Supposons que f et f' admettent des limites à gauche et des limites à droite en tout point de X . Alors, la série de Fourier de f converge en tout point x de \mathbb{R} . Sa somme est égale à*

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

avec $f(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x+h)$, $f(x^-) = \lim_{h \rightarrow 0} f(x-h) \quad \forall h > 0$ aux points de discontinuités.

7 Séries Trigonométriques (Séries de Fourier).

Et vers

$$S(x) = f(x)$$

aux points de continuités.

Théorème 44. Soit f une fonction périodique de période T , alors

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Exemple 46. Soit $f(x) = x^2$, $0 < x < \ell$. On fait une prolongation paire, une prolongation impaire ou une prolongation ni paire ni impaire, et puis on détermine la série de Fourier de fonction prolongation de f . Alors on fait respectivement le développement en fonctions

(a) cosinus, (b) sinus, (c) cosinus et sinus.

On va discuter tous les cas séparément comme suit

(a) Le développement en fonction "cosinus", dans ce cas on prend l'extension périodique paire de la fonction f (figure 7.1), et donc on obtient

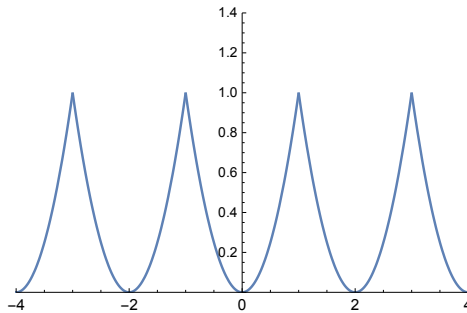


Figure 7.1: Extension périodique paire de la fonction $f(x) = x^2$ pour $\ell = 1$.

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 dx = \frac{2}{3} \ell^2,$$

et

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} x^2 \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx, \\ &= \frac{4\ell^2}{n^2\pi^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

$$D'où f(x) = \frac{\ell^2}{3} + \frac{4\ell^2}{\pi^2} \sum \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{\ell}.$$

7 Séries Trigonométriques (Séries de Fourier).

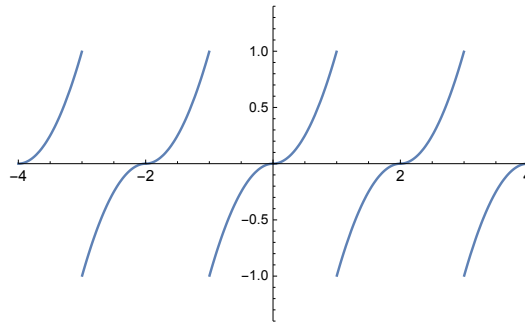


Figure 7.2: Extension périodique impaire de la fonction $f(x) = x^2$ pour $\ell = 1$.

(b) Le développement en fonction “sinus”, dans ce cas on prend l’extension périodique impaire de la fonction f (figure 7.2), et donc on trouve

$$a_n = 0, \quad \forall n \geq 0,$$

and

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^\ell x^2 \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx, \\ &= \frac{2\ell^2}{n\pi} (-1)^{n+1} + \frac{4\ell^2}{\pi^3 n^3} ((-1)^n - 1). \end{aligned}$$

$$\text{Donc } f(x) = \frac{2\ell^2}{\pi} \sum \left\{ \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2\ell^2}{\pi^3 n^3} ((-1)^n - 1) \right\} \sin \frac{n\pi x}{\ell}.$$

(c) Le développement en fonctions “cosinus et sinus”, dans ce cas on prend l’extension périodique impaire de la fonction f (figure 7.3), et donc on trouve

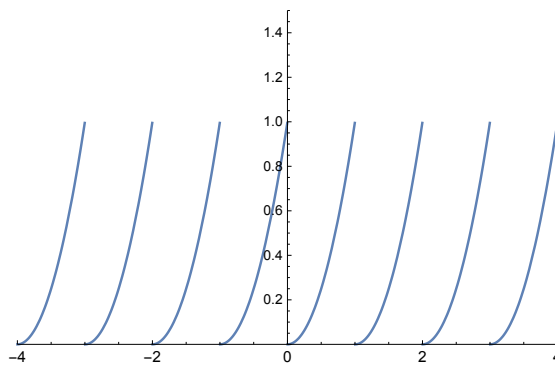


Figure 7.3: Extension périodique de période ℓ de la fonction $f(x) = x^2$ pour $\ell = 1$.

7 Séries Trigonométriques (Séries de Fourier).

En utilisant (7.3) avec $a = 0$, $b = \ell$ et $f(x) = x^2$, on obtient

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell x^2 \cos \frac{n\pi(2x-\ell)}{\ell} dx, \quad n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell x^2 \sin \frac{n\pi(2x-\ell)}{\ell} dx, \quad n \geq 1.$$

En remplaçant par ces deux valeurs dans (7.2), on obtient le développement en série de Fourier pour la fonction $f(x) = x^2$ sur $[0, \ell]$.

7.1.4 Séries de Fourier Complexes.

On sait que

$$\begin{cases} e^{inx} = \cos nx + i \sin nx, \\ e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx, \end{cases} \implies \begin{cases} \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}, \\ \cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \end{cases}$$

on peut donc écrire la série de Fourier de f comme suivant:

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \\ &= C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}, \end{aligned}$$

où:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x) dx.$$

7.1.5 Formule de Parseval.

Soit f une fonction $2L$ -périodique, alors on a la formule de Parseval

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum |a_n|^2 + |b_n|^2 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L |f|^2 dx.$$

Exemple 47. Soit $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Alors

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

et de même

$$b_0 = 0, \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2} \implies |a_n|^2 = \frac{16}{n^4}.$$

7 Séries Trigonométriques (Séries de Fourier).

D'autre part

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x^2|^2 dx = \frac{2\pi^4}{5}.$$

La formule de Parseval donne

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi^2}{3} \right)^2 + 16 \sum \frac{1}{n^4} = \frac{2\pi^4}{5} \Rightarrow \sum \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exemple 48. Soit $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Alors

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}.$$

D'après la formule de Parseval on trouve

$$\sum \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$