Séries Numériques

Fomesoutra.com
ça soutra!

Série numérique : $\sum_{n\geq 0} U_n = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k$

$n^{\text{ième}}$ somme partielle : $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

$n^{\text{ième}}$ reste : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k$

Définition de convergence :

$\sum_{n\geq n_0} U_n$ cv $\iff \lim_{n\to+\infty} S_n \in \mathbb{R}$

Condition nécessaire :

$\sum_{n\geq n_0} U_n$ cv $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

$\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n\geq n_0} U_n$ div

I Séries à termes (signe) quelconques :

Convergence absolue :

$\sum |U_n|$ cv (À vérifier avec les règles des séries positives) $\Rightarrow \sum U_n$ cv

Semi-convergence :

Si $\sum U_n$ cv Mais $\sum |U_n|$ div

Règle d'Abel :

$U_n = a_n b_n$

(1) $(a_n)_n$ décroissante et $\lim U_n = 0$
(2) $\exists M > 0, \forall n : |b_0 + \cdots + b_n| \leq M$

$\Rightarrow \sum U_n$ cv

Règle de Leibnitz :

Si $\sum U_n$ une série alternée $\left(U_n = (-1)^n V_n \text{ et } V_n \geq 0\right)$

Alors
(1) $(V_n)_n$ est décroissante
(2) $\lim V_n = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} \sum U_n \text{ cv} \\ |R_n| \leq |U_{n+1}| \end{cases}$

II Séries à termes positif : $(\forall n \geq n_0,\ U_n \geq 0)$

Critère de comparaison :

Si $0 \leq U_n \leq V_n$ Alors $\begin{cases} \sum U_n \text{ div} \Rightarrow \sum V_n \text{ div} \\ \sum V_n \text{ cv} \Rightarrow \sum U_n \text{ cv} \end{cases}$

Critère d'équivalence :

Si $U_n \underset{+\infty}{\sim} V_n$ Alors $\sum U_n$ et $\sum V_n$ de m̂ nature

Règle de Cauchy :

Si $\lim \sqrt[n]{U_n} = (U_n)^{\frac{1}{n}} = l$

Règle de D'Alembert :

Si $\lim (U_{n+1}/U_n) = l$

Alors $\begin{cases} l < 1 : \sum U_n \text{ cv} \\ l > 1 : \sum U_n \text{ div} \\ l = 1 : \text{rien à dire} \end{cases}$

Si $\lim (U_{n+1}/U_n) = l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ Alors $\lim \sqrt[n]{U_n} = l$

Règle de l'ordre :

Si $\lim n^\alpha U_n = l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ alors $\begin{cases} \alpha > 1,\ l \neq +\infty : \sum U_n \text{ CV} \\ \alpha \leq 1,\ l \neq 0 : \sum U_n \text{ DIV} \end{cases}$

III Séries à termes négatives :

$\sum U_n$ de m̂ nature que $\sum (-U_n)$ (Série positive)

Linéarité :

Si $\sum U_n$ et $\sum V_n$ CV

Alors

$$\sum (\lambda U_n + V_n) = \lambda \sum U_n + \sum V_n$$

CV + CV = CV

CV + DIV = DIV

DIV + DIV = Rài

Séries de référence :

Nom	Forme	Condition de CV
Géométrique	$\sum_{n\geq 0} a^n$	$\lvert a \rvert < 1$, $\sum_{n \geq 0} a^n = \frac{1}{1-a}$
Riemann	$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$	$\alpha > 1$
Bertrand	$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \operatorname{Log}^\beta n}$	$\begin{cases} \alpha > 1 \\ \forall \beta \end{cases}$ ou $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta > 1 \end{cases}$
	$\sum \frac{\sin/\cos(\theta n)}{n^\alpha}$, $\theta \in \mathbb{Z} \setminus \{2\pi k\}$	$0 < \alpha \leq 1$: semi-CV $\alpha > 1$: CV absolue

Suites et Séries de Fonctions

I Suites de Fonctions : $(f_n(x))_n$

① Convergence simple :

$$f_n \xrightarrow{\text{simp}} f \text{ sur } I \iff \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

② Convergence uniforme :

↳ Pour montrer la cv unif :

* $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ sur $I \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)-f(x)| = 0$

* Soit $(U_n)_n$ une suite indépendante de x

$$\left(\forall x \in I, \begin{cases} |f_n(x) - f(x)| \le U_n \\ \lim U_n = 0 \end{cases}\right) \Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{sur } I]{\text{unif}} f$$

↳ Pour Montrer la non cv unif :

* CN : $\lim |f_n(x_n) - f(x_n)| \neq 0$, $(x_n)_n$ suite

* $\left(\forall x \in I, \begin{cases} |f_n(x) - f(x)| \geq U_n \\ \lim U_n \neq 0 \end{cases}\right)$, $(U_n)_n$ suite indépendante de x

II Séries de Fonctions : $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$

$$S_n(x) = \sum_{k=n_0}^{n} f_k(x)$$

$$R_n(x) = \sum_{n\geq n_0} f_n(x) - \sum_{k=n_0}^{n} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

Lien entre les différentes convergence :

$$\begin{array}{ccc} \text{CV normale} & \Rightarrow & \text{CV absolue} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{CV uniforme} & \Rightarrow & \text{CV simple} \end{array}$$

① Convergence Simple : (Comme les séries numériques)

$$\sum_{n\geq 0} f_n(x) \text{ cv simp.} \iff \lim_{n\to\infty} S_n \in \mathbb{R}$$

CN : $\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x)$ cv simp. $\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{simp}} 0$

② Convergence Absolue :

CV simple de $\sum\limits_{n\geq 0} |f_n(x)|$

③ Convergence Uniforme :

$$\sum_{n\geq n_0} f_n(x) \text{ cv unif} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |S_n(x)-S(x)|=0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} |R_n(x)|=0$$

CN : $\sum_{n\geq n_0} f_n(x)$ cv unif $\Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$

Abel : $f_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x)$

(1) $\forall x\in I$, $(a_n(x))_n \downarrow$

(2) $a_n \xrightarrow{\text{unif}} 0$

(3) $\exists M$, $\sup |b_0(x)+\dots+b_n(x)| \leq M$

$\Rightarrow \sum f_n(x)$ cv unif.

④ Convergence Normale :

$$\Leftrightarrow \sum_{n\geq n_0} \sup_{x\in I} |f_n(x)| \text{ cv}$$ (Étude d'une série numérique)

Pratique : $(U_n)_n$ suite indépendante de x

* $(|f_n(x)| \leq U_n$ et $\sum U_n$ cv$) \Rightarrow \sum f_n$ cv normal.
* $(|f_n(x)| \geq U_n$ et $\sum U_n$ div$) \Rightarrow \sum f_n$ ne cv pas normal.

III Propriétés de Conservation :

Conservation de continuité (Intégrabilité) :

Si i/ $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est continue sur I (en x_0)

ii/ $\sum f_n(x)$ converge uniformément

Alors $F = \sum f_n$ est continue sur I (en x_0)

Conservation de la dérivabilité :

Si i/ $\exists x_0 \in I$, $\sum f_n(x_0)$ converge

ii/ $\forall n\in\mathbb{N}$, f_n est dérivable (ou C^1) sur I

iii/ $\sum f_n'(x)$ converge uniformément

Alors $F = \sum f_n$ est dérivable (ou C^1) sur I

De plus

$$F'(x) = \sum_{n\geq 0} f_n'(x)$$

Séries Entières

Série Entière : $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$

Rayon de Convergence R_a :

$R_a = 1/\rho$, avec :

* D'Alembert : $\rho = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$
* Cauchy : $\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
* Hadamard : $\rho = \lim_{n\to+\infty} \sup \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)$

Domaine de Convergence D_c :

* Si $R_a = 0$: $D_c = \{0\}$
* Si $R_a = +\infty$: $D_c =]-\infty, +\infty[$
* Si $R_a \in \mathbb{R}^*$:

  $]-R_a, R_a[\subset D_c \subset [-R_a, R_a]$

  ↳ On doit vérifier $\sum_{n\geq 0} a_n (R_a)^n$ et $\sum_{n\geq 0} a_n (-R_a)^n$

Propriétés :

* Si $\sum c_n x^n = \sum (a_n + b_n) x^n$

  Alors $\begin{cases} \text{Si } R_a \neq R_b : & R_c = \min(R_a, R_b) \\ \text{Si } R_a = R_b : & R_c \geq R_a \end{cases}$

* Si $|a_n| \leq |b_n|$ Alors $R_b \leq R_a$

* Si $\left\{\begin{array}{l} |a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n| \\ \text{ou } b_n = a_{n+1} \\ \text{ou } b_n = n^\beta a_n \end{array}\right\}$ Alors $R_a = R_b$

* $\left(\sum_{n\geq 0} a_n x^n\right)' = \sum_{n\geq 1} (a_n x^n)'$

* $\int_a^b \sum a_n x^n = \sum \int_a^b a_n x^n dx$

Résoudre dans $C^1(\mathbb{R})$ une équation différentielle :

① On pose $y(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et on remplace dans (*)

② Si $f_n(a_0, a_1 \ldots) + \sum_{n\geq n_0 \geq 1} g_n(a_n, a_{n+1}, \ldots) x^{h(n)} = 0$

Alors $f_n(a_0, a_1 \ldots) = 0$ et $g_n(a_n, a_{n+1}, \ldots) = 0$

③ On calcule quelques termes pour voir le comportement de $(a_n)_n$

Développements Usuels en séries entières :

Fonction	DSE	Quelques termes	Dc
e^x	$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} x^n$	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \dots$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$	$1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$	$x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots$	$\mathbb{R}$
$\operatorname{arctg} x$	$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1}$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \dots$	$[-1, 1]$
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n\geq 0} x^n$	$1 + x + x^2 + x^3 \dots$	$]-1, 1[$
$\frac{1}{1+x}$	$\sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n$	$1 - x + x^2 - x^3 \dots$	$]-1, 1[$
$\operatorname{Log}(1-x)$	$\sum_{n\geq 1} \frac{-1}{n} x^n$	$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots$	$[-1, 1[$
$\log(1+x)$	$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \dots$	$]-1, 1]$

Séries de Fourier

$$\boxed{\mathcal{F}f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1}\left(a_n \cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right) + b_n \sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)\right)}$$

Coefficient de Fourier de f :

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)dx$$

*** Si f est paire :**

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\left(n\frac{\pi}{l}x\right)dx$$

$$b_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

*** Si f est impaire :**

$$a_0 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\left(n\frac{\pi}{l}x\right)dx$$

Existence de $\mathcal{F}(f)$:

Si */ f est $2l$-périodique sur $\mathbb{R}$

*/ f est localement intégrable sur $[-l, l]$ (ou continue sur $[-l, l]$)

Alors $\mathcal{F}(f)$ existe

Formule de Parseval :

Sous les mêmes conditions de l'existence de $\mathcal{F}(f)$ On a :

*/ $$\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} |f(x)|^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$$

Si f est paire ou impaire :

*/ $$\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n \geq 1}(a_n^2 + b_n^2)$$

Théorème de Dirichlet : (en x_0)

Sous les mêmes conditions d'existence de $\mathcal{F}(f)$,

Si i/ $f(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) \in \mathbb{R}$

ii/ $f(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x_0) \in \mathbb{R}$

iii/ $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$

iv/ $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$

Alors $\mathcal{F}f(x_0) = \dfrac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$

Si f est continue en x_0 :

$$\mathcal{F}f(x_0) = f(x_0)$$

Corollaire de Dirichlet : (sur $\mathbb{R}$)

Sous les mêmes conditions d'existence de $\mathcal{F}(f)$,

Si f est C^1 par morceaux sur $[-l, l]$

Càd pour toute subdivision $[a,b] \subset [-l, l]$

$$\begin{cases} \text{i/ } f \in C^1(]a,b[) \\ \text{ii/ } \lim\limits_{x \to a^+} f'(x) \in \mathbb{R} \\ \text{iii } \lim\limits_{x \to b^-} f'(x) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}f(x) = \dfrac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$

Si f est continue sur $\mathbb{R}$:

f est développable en série de Fourier sur $\mathbb{R}$

et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathcal{F}f(x)$

Différentiabilité

Dérivés Partielles d'ordre 1 :

en (a,b) : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x,b) - f(a,b)}{x-a}$

$\forall (x,y)$: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{d}{dx}\big(f(x,y)\big)$

Gradient :

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

Jacobienne :

$$(Jf)(a) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_m(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Dérivés Partielles d'ordre 2 :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Schwartz :

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ existent et continues}\right) \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$$

Différentiabilité :

Si f est différentiable en a et $(d_a f)$ sa différentielle

Alors $(d_a f)(h_1, h_2) = h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$

et elle vérifie $\boxed{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a) - d_a f(h)}{\|h\|} = 0}$

$f \in C^1 \Leftrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ existent et continues

$f \in C^1 \Rightarrow f$ différentiable $\Rightarrow f$ continue

$f \in C^1 \Longrightarrow f$ continue

Développement de Taylor :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}(d_a f)(h) + \frac{1}{2!}(d_a^2 f)(h) + \frac{1}{3!}(d_a^3 f)(h) \ldots$$

$$\begin{cases} (d_a f)(a) = h_1 \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) \\ (d_a^2 f)(a) = h_1^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2 h_1 h_2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + h_2^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) \end{cases}$$

Équations Différentielle Partielles (EDP) :

Trouver $f \in C^1(U)$ solution de l'EDP sous la forme $\dots a\dfrac{\partial f}{\partial x} + b\dfrac{\partial f}{\partial y} \dots = \dots$

Soit le changement de variable φ tq :

$$\varphi : U \longrightarrow V$$
$$(x,y) \longrightarrow \varphi(x,y) = (u,v)$$

φ est un C^1-difféomorphisme car :
$$\begin{cases} (i) & \varphi \text{ bijective} \\ (ii) & \varphi \in C^1(U) \\ (iii) & \varphi^{-1} \in C^1(V) \end{cases}$$

On a $\varphi^{-1}(u,v) = (x,y)$

donc $f(x,y) = f(\varphi^{-1}(u,v)) = f \circ \varphi^{-1}(u,v)$

On pose $F = f \circ \varphi^{-1} \Leftrightarrow f = F \circ \varphi$

donc $\boxed{f(x,y) = F(u,v)}$

On a (i) $\varphi \in C^1(U)$

(ii) $\left\{\begin{matrix} f \in C^1(U) \\ \varphi^{-1} \in C^1(V) \end{matrix}\right\} \Rightarrow F \in C^1(V)$

D'après le théorème de composition :

$$(f = F \circ \varphi) \Leftrightarrow (Jf)(x,y) = (JF)(\varphi(x,y)) \cdot (J\varphi)(x,y)$$
$$\Leftrightarrow (Jf)(x,y) = (JF)(u,v) \cdot (J\varphi)(x,y)$$
$$\vdots$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dots \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) \dots \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dots \dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) \dots \dfrac{\partial F}{\partial v}(u,v) \end{cases}$$

En remplaçant dans l'EDP :

il vient par exemple : $\dfrac{\partial F}{\partial u}(u,v) = g(u)$

Alors $\boxed{F(u,v) = \int g(u)\,du + h(v) = f(x,y)}$