

Table des matières

1. Séries numériques
2. Suites et Séries de fonctions
3. Séries entières
4. Intégrales impropres (généralisées)

1. Séries numériques

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1.1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes. On appelle série de terme général u_n , et on note $\sum_n u_n$ la suite des sommes partielles, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k,$$

$$S_0 = u_0, S_1 = u_0 + u_1, S_2 = u_0 + u_1 + u_2, \dots$$

• On dit que la série $\sum_n u_n$ converge vers S si et seulement si la suite des sommes partielles,

$(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, dans ce cas $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = S$ est appelée somme de la série

$\sum_n u_n$ et désignée par $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

• Une série est dite divergente si elle n'est pas convergente.

Exemple 1.1.2

1. Série géométrique:

Le terme général d'une série géométrique est $u_n = r^n$. Les sommes partielles ont une expression explicite:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^n r^k = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \begin{cases} n + 1 & \text{si } r = 1, \\ \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{si } r \neq 1, \end{cases}$$

et sa somme

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{si } |r| < 1, \\ \text{pas de limite} & \text{si } r \leq -1, \\ +\infty & \text{si } r \geq 1. \end{cases}$$

2. Voici un exemple de série dont les sommes partielles sont explicitement calculables:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1.$$

En effet:

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

donc

Donc

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2},$$

et

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

Reste d'une série convergente:

Si la série de terme général u_n est convergente, et de somme $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$,

la différence $S - S_n$ s'appelle reste d'ordre n de la série. On le note:

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Proposition 1.1.3

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$.

En effet: $R_n = S - S_n$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S - S_n) = S - S = 0$

(car la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$).

Remarque 1.1.4 Les sommes partielles d'une série sont toujours définies, mais les restes ne le sont que lorsque la série converge.

Théorème 1.1.5

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers zéro, i.e.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = S \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

La contraposée de ce résultat est souvent utilisée: une série dont le terme général ne tend pas vers zéro ne peut pas converger.

Preuve: On a

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = S_{n-1} + u_n \Rightarrow u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Si la série converge, la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Remarque 1.1.6

Cette condition est une condition nécessaire qui n'est pas suffisante, car il existe des séries divergentes et dont les termes généraux tendent vers zéro à l'infini.

Contre exemples:

1. La série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ est une série **divergente**, car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty,$$

bien que la limite de son terme général est nulle: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$.

2. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ dite **série harmonique**, est une série divergente, bien que son terme général $\frac{1}{n}$ tend vers 0 à l'infini. En effet: on a

$$\forall k \geq 1, \frac{1}{k} \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \Rightarrow \forall k \geq 1, \frac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$$

i.e

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \geq \ln 2 - \ln 1 \\ \frac{1}{2} \geq \ln 3 - \ln 2 \\ \vdots \\ \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln n \end{array} \right. .$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty,$$

ce qui montre que la série harmonique diverge. On peut aussi montrer sa divergence en montrant que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy.

Proposition 1.1.7

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série de terme général $(a_{n+1} - a_n)$ converge, i.e.

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ une suite convergente} \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} (a_{n+1} - a_n) \text{ une série convergente.}$$

Preuve

La suite des sommes partielles de la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$ est

$$S_n = \sum_{k=0}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_0$$

➤ Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on note sa limite $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l - a_0$, ce qui prouve que la série $\sum_{n \geq 0} (a_{n+1} - a_n)$ converge.

➤ Si on suppose que la série $\sum_{n \geq 0} (a_{n+1} - a_n)$ converge vers S , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n + a_0 = S + a_0.$$

Ce qui montre que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Exemple 1.1.8

Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$, on a $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$.

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $a_n = \frac{1}{n}$ converge, donc la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, en plus:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1},$$

d'où

$$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1.$$

1.1.1 Propriétés et opérations sur les séries

Proposition 1.1.7

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques, on suppose qu'elles ne diffèrent que par un nombre fini de termes (i.e. il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq p$ on a $u_n = v_n$), alors les deux séries sont de même nature.

Preuve. Soit $n \geq p$, posons:

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = \sum_{k=0}^p u_k + \sum_{k=p+1}^n u_k = S_p + \sum_{k=p+1}^n u_k,$$
$$T_n = \sum_{k=0}^n v_k = \sum_{k=0}^p v_k + \sum_{k=p+1}^n v_k = T_p + \sum_{k=p+1}^n v_k.$$

La différence $S_n - T_n = S_p - T_p$ est une constante, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge $\Leftrightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow (T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge $\Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} v_n$ converge.

Remarque 1.1.10

1. Cette proposition permet de dire que les séries sont de même nature (on parle de nature d'une série pour désigner sa convergence ou sa divergence) mais en cas de convergence, elle n'ont pas nécessairement la même somme.
2. On ne change pas la nature d'une série si on lui **rajoute** ou on lui **retranche** un nombre fini de termes.

Proposition 1.1.11

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries numériques et \mathcal{C} un scalaire non nul:

1. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge vers S , et la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge vers T , alors la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge vers $(S + T)$.
2. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge vers S , alors la série $\sum_{n \geq 0} \mathcal{C}u_n$ converge vers $\mathcal{C}S$.
3. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, et la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge, alors la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ diverge.

Remarque 1.1.12

Si les deux séries sont divergentes, on ne peut rien dire sur la nature de leur somme.

Exemple 1.1.13

1. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)}$ divergent, et pourtant on a montré que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge (voir

l'exemple 1.1.8).

2. Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ telles que:
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = -1 \end{cases},$$

les deux séries divergent, mais la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ converge.

3. Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ telles que:
$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 \end{cases},$$

les deux séries divergent, et la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + v_n)$ diverge aussi.

Pour les séries à termes complexes la convergence équivaut à celle des parties réelles et imaginaires.

Proposition 1.1.14

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout n , notons a_n et b_n la partie réelle et la partie imaginaire de u_n . La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si les deux séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ convergent. Si c'est le cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.$$

Preuve

Rappelons qu'une suite de complexes converge si et seulement si la suite des parties réelles et la suite des parties imaginaires convergent. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux suites de réels :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = A \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = B \right) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (A_n + iB_n) = A + iB.$$

Il suffit d'appliquer ce résultat à :

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^n b_k,$$

car la partie réelle d'une somme est la somme des parties réelles, et la partie imaginaire d'une somme est la somme des parties imaginaires.

Exemple 1.1.15

Considérons par exemple la série géométrique $\sum_{n \geq 0} r^n$, où r est un complexe de module $\rho < 1$ et d'argument θ : $r = \rho e^{i\theta}$.

Pour tout n , $r^n = \rho^n e^{in\theta}$. Les parties réelles et imaginaires de r^n sont :

$$a_n = \rho^n \cos n\theta \text{ et } b_n = \rho^n \sin n\theta$$

On déduit de la proposition précédente que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-r}\right) \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Le calcul donne:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \cos n\theta = \frac{1 - \rho \cos \theta}{1 + \rho - 2\rho \cos \theta} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \rho^n \sin n\theta = \frac{\rho \sin \theta}{1 + \rho - 2\rho \cos \theta}.$$

1.2 Séries à termes positifs

Définition 1.2.1

On appelle $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes réels positifs toute série vérifiant: $u_n \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

- Les séries vérifiant: $u_n \geq 0$, pour tout $n \geq n_0$ sont aussi appelées séries à termes positifs car la Nature d'une série ne change pas si on lui retranche un nombre fini de termes (voir la Proposition 1.1.9).

• Si on note $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$, alors $S_n - S_{n-1} = u_n$. Donc la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, ce qui entraîne que: si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée alors elle converge (i.e. la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge), et si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ et la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Proposition 1.2.2

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

1.2.1 Comparaison d'une série et d'une intégrale

Théorème 1.2.3 (de comparaison avec son intégrale)

Une série dont le terme général est de la forme $u_n = f(n)$; où $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, positive et décroissante vers 0 est de même nature que la suite, i.e.

$$\sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^n f(x) dx \text{ converge.}$$

Preuve

Supposons que $u_n = f(n)$; où f une fonction continue, positive sur $[1, +\infty[$ et décroissante vers 0. Sur chaque segment $[n, n+1]$ on a: $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$, d'où

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx,$$

Ce qui donne

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n).$$

Comme

$$\int_1^{n+1} f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx + \dots + \int_n^{n+1} f(x) dx,$$

on aura

$$f(2) + f(3) + \dots + f(n+1) \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq f(1) + f(2) + \dots + f(n)$$

Or $u_n = f(n), \forall n \geq 1$ i.e.

$$S_{n+1} - u_1 = u_2 + u_3 + \dots + u_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq u_1 + u_2 + \dots + u_n = S_n$$

▪ Si la suite $\left(\int_1^n f(x) dx \right)_n$ converge, elle est alors majorée, ce qui implique grâce à l'inégalité

$$S_{n+1} \leq \int_1^{n+1} f(x) dx + u_1,$$

que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée, d'où convergente d'après la **Proposition 1.2.2**.

▪ Et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx = +\infty$ (car f est positive), on a $\int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n$, ce qui implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_1^{n+1} f(x) dx \right) = +\infty,$$

et que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Inversement si la série converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx$ existe, et si la série diverge, la limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx = +\infty.$$

Remarque 1.2.4

• La condition f est une fonction continue, positive et décroissante vers 0 n'a pas besoin d'être vraie à partir de $n=1$, il suffit qu'elle soit vérifiée à partir d'un certain rang (voir

Remarque 1.1.10)

• La fonction f positive peut être remplacée par une fonction de signe constant.

Exemple 1.2.5 «Série de Riemann»

Une série de la forme $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ est dite série de **Riemann**.

1. Si $\alpha \leq 0$: La série de Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} \neq 0$ (pour $\alpha = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1$).

2. Si $\alpha > 0$: $u_n = \frac{1}{n^\alpha} = f(n)$, $\forall n \geq 1$, où $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $x > 0$ est positive, décroissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. D'après le théorème de comparaison avec une intégrale, la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$

converge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx$ est finie.

Or

• Si $\alpha \neq 1$:

$$\int_1^n f(x) dx = \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx = \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1 \right)$$

- Si $\alpha = 1$:

$$\int_1^n f(x) dx = \ln n,$$

donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x) dx = \begin{cases} \frac{-1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Résultat: La série de Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$, et diverge si $\alpha \leq 1$.

1.2.2 Critères de comparaison

Théorème 1.2.6 (de comparaison de deux séries à termes positifs)

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $n_0 \geq 0$, tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Preuve. Comme nous l'avons observé, la convergence ne dépend pas des premiers termes. On peut donc étudier les sommes partielles à partir de n_0 . Pour tout $n \geq n_0$, notons:

$$S_n = u_{n_0} + \text{II} + u_n \text{ et } T_n = v_{n_0} + \text{II} + v_n.$$

Les suites $(S_n)_{n \in \mathbf{O}}$, et $(T_n)_{n \in \mathbf{O}}$ sont croissantes, et de plus pour tout $n \geq N$.

$$S_n \leq T_n.$$

• Si la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{O}}$ converge. Soit l sa limite, la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{O}}$ est

croissante, et majorée par l , donc elle converge, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge aussi.

• Inversement, si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, alors la suite $(S_n)_{n \in \mathbf{O}}$ tend vers $+\infty$ et il en est de

même pour la suite $(T_n)_{n \in \mathbf{O}}$.

Exemple 1.2.7

Soit la série $\sum_{n \geq 1} \frac{|\cos n|}{n^2}$, son terme général $u_n = \frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

Or $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de **Riemann convergente**, donc $\sum_{n \geq 1} \frac{|\cos n|}{n^2}$ converge aussi.

Corollaire 1.2.8

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs, s'il existe deux nombres réels strictement

positifs a, b telle que: $av_n \leq u_n \leq bv_n$, alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Corollaire 1.2.9

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Corollaire 1.2.10

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs. Pour n assez grand satisfait: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$, on a

- Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Preuve. On suppose que l'inégalité est satisfaite à partir d'un certain rang p :

$$\forall n \geq p : \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

d'où

$$\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} \leq \frac{u_{n-2}}{v_{n-2}} \leq \dots \leq \frac{u_p}{v_p} = \text{cst} \in \mathbb{R}^+,$$

Donc

$$\forall n \geq p : \frac{u_n}{v_n} \leq \text{cst} \Rightarrow u_n \leq \text{cst} \cdot v_n,$$

et après en appliquant le théorème de comparaison.

Corollaire 1.2.11

Soient r et r' deux réels tels que $0 < r < r' < 1$. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\left(\frac{r}{r'}\right)^n a_n$ soit bornée. Alors la série $\sum_{n \geq 0} r^n |a_n|$ converge.

Corollaire 1.2.12

Soient α et β deux réels tels que $1 < \alpha < \beta$ et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $n^{-(\alpha-\beta)} a_n$ soit bornée. Alors la série $\sum_{n \geq 0} n^{-\alpha} |a_n|$ converge.

Théorème 1.2.13

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites à termes strictement positifs, équivalentes au voisinage de $+\infty$.

$$u_n \sim v_n \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature (convergentes ou divergentes).

Exemple 1.2.14 $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+3n+1}{n^4+2n^3+4}$ converge, $\sum_{n \geq 0} \frac{n+\ln n}{n^3}$ converge.

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{n^2}$, et nous avons vu que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Par contre les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2+3n+1}{n^3+2n^2+4}$ et $\sum_{n > 0} \frac{n+\ln n}{n^2}$ divergent.

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{n}$, et nous avons vu que la série

harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

Corollaire 1.2.15 (Règle de Riemann)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs. On suppose que $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tels que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = l.$$

- Si $l \neq +\infty$ et $\alpha > 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
- Si $l \neq 0$ et $\alpha \leq 1$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Exemple 1.2.16 Etudions la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}$. On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{1}{(\ln n)^2} = +\infty.$$

Donc $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}$ diverge.

Exemple 1.2.17 (Série de Bertrand)

La série de Bertrand $\sum_{n > 1} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}}$ est:

1. Si $\alpha > 1$, **convergente** pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.
2. Si $\alpha < 1$, **divergente** pour tout $\beta \in \mathbb{R}$.
3. Si $\alpha = 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n > 1} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}} \text{ converge } \text{ si } \alpha > 1, \\ \sum_{n > 1} \frac{1}{n^{\alpha} (\ln n)^{\beta}} \text{ diverge } \text{ si } \alpha < 1. \end{array} \right.$$

Preuve

Si $\alpha = 1$: On pose $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^\alpha}$.

f est une fonction positive, décroissante sur $]1, +\infty[$, donc $\sum_{n>1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\alpha}$ et $\int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\alpha} dt$

sont de même nature d'après le **Théorème 1.2.3**.

$$\int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{-1}{\alpha-1} [(\ln n)^{1-\alpha} - (\ln 2)^{1-\alpha}] & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases},$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_2^n \frac{1}{t(\ln t)^\alpha} dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} (\ln 2)^{1-\alpha} & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

d'où $\sum_{n>1} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$.

1.2.3 Critères de Cauchy et de d'Alembert

Rappelons tout d'abord que la série géométrique converge si $|r| < 1$, diverge sinon.

Les critères de **Cauchy** et **d'Alembert** permettent de comparer une série à termes positifs avec les séries géométriques.

Théorème 1.2.18 (Critère de Cauchy)

Soit $\sum_{n>0} u_n$ une série à termes positifs ou nuls. Notons $k = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n}$ tel que

$$k \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $k < 1$, la série $\sum_{n>0} u_n$ converge.
- Si $k > 1$, la série $\sum_{n>0} u_n$ diverge.
- Si $k = 1$, cas de doute, on ne peut pas conclure.

Exemple 1.2.19

La série $\sum_{n>0} (1 + \frac{a}{n})^{-n^2}$ converge si $a > 0$ et diverge si $a < 0$ car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n} = e^{-a}$$

- Si $a > 0$, la série $\sum_{n>0} (1 + \frac{a}{n})^{-n^2}$ converge
- Si $a < 0$, la série $\sum_{n>0} (1 + \frac{a}{n})^{-n^2}$ diverge.
- Si $a = 0$, $u_n = 1$, la série $\sum_{n>0} 1$ diverge.

Remarque 1.2.20 Le critère de Cauchy ne s'applique ni aux séries de **Riemann**, ni

aux séries de **Bertrand** car:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{-\ominus}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{-\ominus} (\ln)^{-\ominus}} = 1.$$

Théorème 1.2.21 (Critère de d'Alembert)

Soit $\sum_{n>0} u_n$ une série à termes positifs pour tout entier n_0 , telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est de limite k quand $n \rightarrow +\infty$.

- Si $k < 1$, la série $\sum_{n>0} u_n$ converge.
- Si $k > 1$, la série $\sum_{n>0} u_n$ diverge.
- Si $k = 1$, cas de doute, on ne peut pas conclure.

Exemple 1.2.22

1. Pour tout réel positif r , la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!}$ converge.

En effet:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{n+1} \text{ tend vers } 0 < 1.$$

2. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ diverge car

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \text{ tend vers } 4 > 1.$$

Proposition 1.2.23

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes positifs. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = k$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{u_n} = k$.

Règle de Raabe-Duhamel:

Soit $u_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ pour un certain entier naturel n_0 . Notons $k = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right)$ où

$k \in \mathbb{R}$. Alors

- Si $k > 1$, la série $\sum_{n>0} u_n$ converge.
- Si $k < 1$, la série $\sum_{n>0} u_n$ diverge.
- Si $k = 1$, cas de doute, on ne peut pas conclure.

Exemple 1.2.24 Considérons une nouvelle fois la série $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$.

La limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure sa nature,

appliquons donc la règle de **Raabe-Duhamel**:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\frac{1+2n}{n^2} \right) = 2 > 1,$$

ce qui prouve la convergence de la série.

Règle de Gauss :

Soit $u_n \geq 0, \forall n \geq n_0$ pour un certain entier naturel n_0 . On suppose que $\exists (\alpha) \in]1, +\infty[$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Alors: $\exists k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$ lorsque n tend vers l'infini c'est-à-dire:

- Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n>0} u_n$ converge.
- Si $\alpha \leq 1$, la série $\sum_{n>0} u_n$ diverge.

1.3 Séries à termes quelconques

1.3.1 Séries absolument convergentes

Quand une série n'est pas à termes positifs, la première chose à faire est d'examiner la série des valeurs absolue, ou des modules s'il s'agit des nombres complexes.

Définition 1.3.1

On dit que la série $\sum_{n>0} u_n$ est absolument convergente si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ converge.

Exemple 1.3.2

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n e^{in}}{n^2+n}$ converge absolument car le module du terme général est égal à $\frac{1}{n^2+n}$ qu'on peut majorer par $\frac{1}{n^2}$.

La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ ne converge pas absolument car:

$$\left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+n}} \right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \geq \frac{1}{n+1},$$

et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1}$ diverge.

Théorème 1.3.3

Une série absolument convergente est convergente.

Définition 1.3.4

On dit que la série $\sum_{n > 0} u_n$ est semi convergente lorsque $\sum_{n > 0} u_n$ converge mais $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ diverge.

1.3.2 Critère d'Abel

Théorème 1.3.5

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que

1. La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de réels positifs, et tend vers **zéro**.

2. Les sommes partielles de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées:

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : |b_0 + b_1 + \dots + b_n| < M. \quad (*)$$

Alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

Exemple 1.3.6 Etudier la nature des séries de la forme: $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ ou $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ où

$$x \in \mathbb{R} - \{2m\pi \mid m \in \mathbb{Z}\}, \text{ et } \alpha > 0.$$

On a

$$\cos nx = \operatorname{Re} e^{inx} \text{ et } \sin nx = \operatorname{Im} e^{inx}.$$

Or

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n e^{ikx} &= 1 + e^{ix} + e^{2ix} + \dots + e^{inx} = \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\frac{x}{2}} \left[\frac{e^{-i(n+1)\frac{x}{2}} - e^{i(n+1)\frac{x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}} \right]}{e^{i\frac{x}{2}}} = e^{i\frac{nx}{2}} \frac{-2i \sin(n+1)\frac{x}{2}}{-2i \sin \frac{x}{2}} \\ &= e^{i\frac{nx}{2}} \frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},\end{aligned}$$

ce qui donne

$$1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \cos \frac{nx}{2} \frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

et

$$1 + \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \sin \frac{nx}{2} \frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}},$$

d'où

$$|1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \text{ et } |1 + \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}.$$

Ces majorations sont indépendantes de n , donc on peut appliquer le critère d'Abel pour

démontrer la convergence des séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^{\alpha}}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n^{\alpha}}$ sachant que la suite $\left(\frac{1}{n^{\alpha}} \right)_{n > 0}$ est positive, décroissante vers 0 pour tout $\alpha > 0$.

En plus, pour $\alpha > 1$ les séries convergent absolument.

1.3.3 Séries alternées

Définition 1.3.7

On appelle $\sum_{n>0} u_n$ série alternée une série dont le terme général est alternativement positif puis négatif i.e. $u_n = (-1)^n v_n$ tel que $v_n \geq 0, \forall n \geq 0$.

Corollaire 1.3.8 (Critère de Leibniz)

Toute série alternée $\sum_{n \geq 0} (-1)^n v_n$ dont la valeur absolue du terme général (i.e. v_n) décroît Vers 0 est convergente.

Exemple 1.3.9 La série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est une série alternée convergente pour $\alpha > 0$, car

$$u_n = (-1)^n v_n / v_n = \frac{1}{n^\alpha}.$$

- $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n>0}$ est une suite positive, décroissante pour $\alpha > 0$.

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$ pour $\alpha > 0$.

1.3.4 Utilisation du développement asymptotique

C'est une technique très utilisée pour les séries à **termes quelconques** pour lesquelles les critères précédents ne s'appliquent pas. Dans de nombreuses situations, on conclut sur la nature d'une série en se ramenant à une série plus simple, pour les séries à termes positifs par exemple, il suffit de se ramener à un équivalent, ceci n'est plus le cas avec les séries à termes quelconques. Par ailleurs, un équivalent correspond à une approximation au premier ordre, laquelle ne permet pas forcément de conclure. Dans ces cas, il suffit de donner un développement asymptotique du terme général.

Exemple 1.3.10 Soit la série $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

La suite $(|u_n|)_{n \geq 2}$ n'est pas décroissante, donc on ne peut pas appliquer le critère des séries alternées. On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n}} \right) \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0,$$

dans ce cas on peut utiliser le développement limité de $\frac{1}{1+u}$ au voisinage de 0. on obtient

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \left[1 - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right],$$

d'où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ est une série alternée convergente,} \\ \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \text{ est une série de Riemann convergente,} \\ \sum_{n \geq 11} \frac{(-1)^n}{n^3} \text{ est une série alternée convergente,} \end{array} \right.$$

d'où $\sum_{n>0} u_n$ converge.

1.4 Produit de Cauchy de deux séries

Définition 1.4.1

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de $\sum_{n \geq 0} a_n$ et

$\sum_{n \geq 0} b_n$ la série $\sum_{n \geq 0} C_n$ où pour tout n entier:

$$C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \text{ ou } C_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q.$$

Théorème 1.4.2

Le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est absolument convergent

Théorème 1.4.3

Le produit de Cauchy d'une série absolument convergente et une série convergente est convergent.

Exemple 1.4.4

1. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée convergente. On va calculer le produit de Cauchy de cette série par elle-même :

$$\left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \times \left(\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \sum_{n \geq 1} C_n,$$

où

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_{n-(k-1)} = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_k b_{n-k+1} + \dots + a_n b_1 \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n-1}} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{k} \sqrt{n-k+1}} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

or: $\forall k = \overline{1, n}, \sqrt{k(n-k+1)} \leq n$ ce qui implique que $\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} \geq \frac{1}{n}$.

D'où $|C_n| \geq n \times \frac{1}{n} = 1$, ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} |C_n| \neq 0$, ce qui signifie $\sum_{n \geq 0} C_n$ diverge.

2. Suites et séries de fonctions

Dans tout ce chapitre, \mathcal{K} désigne l'un des corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} . On s'intéresse à la convergence et propriétés des suites et séries de fonctions définies sur une même partie non vide D de \mathcal{K} , et à valeurs dans \mathcal{K} .

2.1 Suites de fonctions

2.1.1 Convergences (simple et uniforme d'une suite de fonctions)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D et à valeurs dans \mathbb{C} .

Définition 2.1.1 (Convergence simple)

Soit f une application de D dans \mathbb{C} . On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f si pour tout $x \in D$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$. On dit aussi que f est la limite simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Autrement dit, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f si pour tout $x \in D$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on ait } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

où n_0 dépend de ε et de x .

Définition 2.1.2 (Convergence uniforme)

Soit f une fonction de D dans \mathbb{C} . On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur D si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

On dit aussi que f est la limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Autrement dit, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \text{ on ait } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall x \in D,$$

où n_0 dépend de ε , mais ne dépend pas de x .

Exemple 2.1.3 Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par:

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2}, n \in \mathbb{N}.$$

1. Convergence simple:

- Pour $x = 0$:

$$f_n(0) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(0) = 0.$$

- Pour $x \neq 0$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$.

Donc (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

2. **Convergence uniforme sur** $[a, +\infty[$, $a > 0$:

On a pour tout $n \in \mathbf{N}$, et tout $x \geq a$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| 1 - \frac{nx^2}{1+nx^2} \right| = \frac{1}{1+nx^2} \leq \frac{1}{1+na^2},$$

or, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{1+na^2} < \varepsilon \iff n \geq \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2}.$$

Donc il suffit de prendre $n_0 = \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2} \right\rceil + 1$ pour avoir $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$. Par conséquent:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = \left\lceil \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2} \right\rceil + 1 \text{ tel que } n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, +\infty[.$$

D'où la convergence uniforme de (f_n) sur tout intervalle $[a, +\infty[$, $a > 0$:

3. **Convergence uniforme sur** $[0, a[$, $a > 0$: (Dans quel cas il y aura la convergence uniforme sur $[0, +\infty[$).

Supposons qu'il en soit ainsi, alors:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N} \text{ tel que } n \geq n_0, \text{ on ait } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [0, a[.$$

Quand $a \rightarrow 0$, $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon a^2} \rightarrow +\infty$, donc il n'existe pas n_0 ne dépendant pas de x d'où la convergence uniforme n'existe pas sur tout intervalle qui contient 0.

Proposition 2.1.4 (La convergence uniforme entraîne la convergence simple)

Si une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers la fonction f , alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers f .

Proposition 2.1.5 (Critère de Cauchy pour la convergence uniforme)

Pour que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur une partie D vers une fonction de D dans \mathbb{C} il faut et il suffit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p > q \geq n_0 \text{ on ait } |f_p(x) - f_q(x)| < \varepsilon, \forall x \in D.$$

2.1.2 Propriétés des suites de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur une partie D de \mathcal{E} qui converge uniformément sur D vers une fonction $f : D \rightarrow \mathcal{F}$, nous allons voir que, dans une certaine mesure, les propriétés de régularité des f_n (continuité, dérivabilité, intégrabilité, etc) sont héritées par f .

On rappelle qu'une fonction $f : D \rightarrow \mathcal{F}$ est continue en $x_0 \in D$ si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

ou, de manière équivalente, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in D$ avec $|x - x_0| < \delta$, on a

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Théorème 2.1.6 (Continuité d'une limite uniforme)

Soit D une partie de \mathcal{E} et $f_n : D \rightarrow \mathcal{E}$ une suite de fonctions uniformément convergente vers une fonction $f : D \rightarrow \mathcal{E}$. Soit $x_0 \in D$. Si les f_n sont continues en x_0 , alors f est continue en x_0 .
En particulier, si les f_n sont continues sur D , alors f est continue sur D .

Exemple 2.1.8 Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur \mathbb{R} par:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Etudier la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur \mathbb{R} ?

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

- Si $x = 0$:

$$f_n(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0,$$

• Si $x = \frac{1}{n}$:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^-} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{n}^+} f_n(x) = 1,$$

donc f_n est continue en $\frac{1}{n}$, d'où f_n est continue sur \mathbb{R} . Vu le résultat, f_n converge simplement vers f tel que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

De plus

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \neq f(0),$$

donc f n'est pas continue au point 0, ce qui montre d'après le théorème précédent que f_n ne converge pas uniformément sur tout intervalle de la forme $[-a, a], a > 0$.

Théorème 2.1.9 (Intégrale d'une limite uniforme de fonctions continues)

Soit $[a, b]$ un intervalle borné de \mathbb{R} et $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues uniformément convergente vers une fonction (continue) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Remarque 2.1.10 La conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une interversion d'une limite et d'une intégrale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx.$$

Corollaire 2.1.11 (Primitive d'une limite uniforme)

Sous les hypothèses du théorème précédent, soit $x_0 \in [a, b]$ et notons pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $F_n : x \mapsto \int_{x_0}^x f_n(t) dt$ et $F : x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ les primitives de f_n et de f respectivement, nulles en x_0 . Alors la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur $[a, b]$.

Remarque 2.1.12

1. La conclusion du Théorème 2.1.9 peut être en défaut si on suppose seulement que la suite de fonctions f_n converge simplement vers une fonction continue f .
2. La conclusion du Théorème 2.1.9 peut être en défaut si on remplace l'intervalle Borné $[a, b]$ par un intervalle non borné:

Théorème 2.1.13 (Dérivée d'une limite uniforme)

Soit $[a,b]$ un intervalle borné de \mathbb{R} et $f_n : [a,b] \rightarrow \mathcal{E}$ une suite de fonctions admettant des dérivées continues sur $[a,b]$. On suppose que

1. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction (continue) $f : [a,b] \rightarrow \mathcal{E}$.
2. La suite dérivée $(f_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente vers une fonction (continue)

$g : [a,b] \rightarrow \mathcal{E}$. Alors f admet une dérivée continue et

$$f^* = g.$$

Remarque La conclusion du Théorème 2.1.13 n'est plus nécessairement valable sans l'hypothèse de la convergence uniforme des dérivées de .

2.2 Séries de fonctions

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur D et à valeurs dans \mathcal{E} (réelles ou complexes).

On note S_n la fonction définie sur D par les sommes partielles:

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x) \text{ pour tout } x \in D.$$

2.2.1 Convergence simple et absolue

Définition 2.2.1 (Convergence simple pour les séries de fonctions)

On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ de terme général f_n converge simplement sur D , si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge simplement sur D .

On appelle domaine de convergence simple de la série $\sum_n f_n(x)$ l'ensemble des $x \in D$ tels que la série numérique $\sum_n f_n(x)$ converge.

On suppose que la série $\sum_n f_n(x)$ converge simplement sur D . On note pour tout $x \in D$, $S(x)$

la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$ de sorte que: $\forall x \in D, S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

La fonction S , définie sur D , est appelée la somme de la série $\sum_n f_n(x)$. On appelle, pour chaque $n \in \mathbf{N}$, reste d'ordre n la fonction $R_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie par:

On a pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\forall x \in D, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x).$$

$$S_n + R_n = S.$$

Définition 2.2.2 (Convergence absolue pour les séries de fonctions)

On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ de terme général f_n converge absolument sur D si pour chaque $x \in D$, la série de terme positifs $\sum_n |f_n(x)|$ converge dans \mathbb{R} .

Autrement dit, la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ converge absolument sur D si et seulement si la série de fonctions $\sum_n |f_n(x)|$ converge simplement sur D .

2.2.2 Convergence uniforme

Définition 2.2.3

On dit que la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ de terme général f_n converge uniformément sur D si la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur D .

En d'autres termes, pour montrer la convergence uniforme de la série $\sum_n f_n(x)$ sur D , il faut d'abord vérifier la convergence simple de la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on note S la somme, puis vérifier que le reste converge uniformément vers 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in D} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in D} |R_n(x)| = 0.$$

Exemple 2.2.6 La série de terme général $x \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) = \frac{x}{x+n^2}$ converge **simplement** sur $[0, +\infty[$. En effet

Pour chaque $x \geq 0$, on a

$$\frac{x}{x+n^2} \leq \frac{x}{n^2},$$

et la série numérique de terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente. D'autre part, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = \sup_{x \in [0, +\infty[} \frac{x}{x+n^2} = 1,$$

car la fonction $x \mapsto \frac{x}{x+n^2}$ est croissante et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+n^2} = 1$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [0, +\infty[} |f_n(x)| = 1 \neq 0.$$

Ceci montre que la série ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

Proposition 2.2.7 (Critère de convergence uniforme pour les séries de fonctions alternées)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives, définies sur D , telle que

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge **uniformément** vers 0.
2. Pour tout $x \in D$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ décroît, i.e. $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la série de fonctions $\sum_n (-1)^n f_n$ converge uniformément sur D .

Théorème 2.2.8 (Règle d'Abel pour la convergence uniforme)

Soit $\sum_n f_n g_n$ une série de fonctions définies sur D telle que:

1. Pour tout $x \in D$, la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit positive et décroissante.
2. La suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers la fonction **identiquement**

nulle.

3. Il existe $M > 0$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\sup_{x \in D} \left| \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \leq M$.

Alors la série de fonctions $\sum_n f_n g_n$ converge uniformément sur D .

Exemple 2.2.9 Soit $u_n(x) = \frac{x \sin nx}{2\sqrt{n} + \cos x}$, $n \geq 1, x \in]0, 2\pi[$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_n u_n(x)$ converge simplement sur $]0, 2\pi[$.

2. Montrer que la série de fonctions $\sum_n u_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé contenue dans $]0, 2\pi[$.

Solution:

1. On pose $f_n(x) = \sin nx$ et $g_n(x) = \frac{x}{2\sqrt{n} + \cos x}$.

a)

$$\forall x \in]0, 2\pi[, 0 \leq 2\sqrt{n} + \cos x \leq 2\sqrt{n} + 1,$$

donc $(g_n)_n$ est une suite positive et

b)

$$\frac{x}{2\sqrt{n+1} + \cos x} < \frac{x}{2\sqrt{n} + \cos x}, \forall n \geq 1,$$

ce qui donne

$$g_{n+1}(x) < g_n(x), \forall n \geq 1,$$

et donc $(g_n)_n$ est décroissante.

c) Il est clair que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = 0$.

d) Soit $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles de la série de fonctions $\sum_n f_n(x)$.

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im} e^{ikx} = \operatorname{Im} \sum_{k=1}^n e^{ikx}.$$

$$\begin{aligned} |S_n(x)|^2 &= \left| \sum_{k=1}^n e^{ikx} \right|^2 = \left| e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right|^2 = \left| \frac{1 - \cos nx - i \sin nx}{1 - \cos x - i \sin x} \right|^2 \\ &= \frac{(1 - \cos nx)^2 + (\sin nx)^2}{(1 - \cos x)^2 + (\sin x)^2} = \frac{\left(\sin \frac{nx}{2}\right)^2}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} = M. \end{aligned}$$

$(S_n)_n$ est bornée. Alors les conditions du Théorème d'Abel satisfaites, on conclure la convergence simple de la série $\sum_n f_n(x)$ sur $]0, 2\mathcal{V}$.

2. On prend l'intervalle $[a, b] \subset]0, 2\mathcal{V}$, $a > 0, b < 2\mathcal{V}$

On a $(g_n)_n$ positive, décroissante, tend vers 0 uniformément et $x \in [a, b]$. En effet:

$$g_n(x) = \frac{x}{2\sqrt{n} + \cos x} \leq \frac{b}{2\sqrt{n} - 1}.$$

La suite $\left(\frac{b}{2\sqrt{n}-1}\right)_n$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et indépendamment de x , donc

$(g_n(x))$ converge uniformément vers 0. D'autre part:

$$|S_n(x)|^2 \leq \frac{1}{\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{\inf\left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} = M, \forall x \in [a, b].$$

Appliquant le Théorème d'Abel, on obtient que $\sum_n f_n(x)g_n(x)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé $[a, b] \subset]0, 2[$.

2.2.3 Convergence normale

On dispose, pour les séries de fonctions, d'une notion de convergence impliquant la convergence uniforme et souvent facile à vérifier: la **convergence normale**.

Définition 2.2.10

On dit qu'une série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur un ensemble

D s'il existe une série numérique de terme général positif v_n qui soit convergente et telle que

$$|f_n| \leq v_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } x \in D.$$

Remarque 2.2.11

Une série de fonctions de terme général f_n converge normalement sur D si et

seulement si la série numérique de terme général $\sup_{x \in D} |f_n(x)|$ est convergente.

Théorème 2.2.13 (Relations entre les différentes notions de convergences)

On a les implications suivantes:

$$\sum_n f_n \text{ converge normalement} \implies \left\{ \begin{array}{l} \sum_n f_n \text{ converge absolument} \\ \sum_n f_n \text{ converge uniformément} \end{array} \right\} \implies \sum_n f_n \text{ converge simplement.}$$

Exemple 2.2.14

1. Soit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^2}$.

On a pour tout $n \geq 1$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

et $\sum_{n>0} \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série de terme général f_n est ainsi normalement convergente

et donc uniformément convergente.

2. La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} x^n$ ne converge pas normalement sur $] -1, 1[$, mais converge

normalement sur $[a, b]$ pour tout $a, b \in] -1, 1[$ tels que $a < b$.

3. On considère la série de fonctions sur \mathbb{R} ou sur un intervalle I de \mathbb{R} de terme général donné par la fonction constante

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Par le critère de Leibnitz la série numérique de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, la série de terme général f_n est donc uniformément convergente sur \mathbb{R} ou I . Cependant, comme la série de terme général $\left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ n'est pas convergente, la série de fonctions considérée n'est pas normalement convergente.

2.2.4 Propriétés d'une série uniformément convergente

A l'aide des propriétés de la convergence uniforme pour les suites de fonctions, on obtient des propriétés similaires pour les séries de fonctions, que nous énoncerons.

Théorème 2.2.15 (Continuité d'une série uniformément convergente)

Soit $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions définies sur D . Supposons:

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur D .
2. La série de fonctions $\sum_n f_n(x)$ converge uniformément sur D .

Alors, en notant $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, la fonction S est continue sur D et on a:

$$\forall x_0 \in D : \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_n f_n(x) = \sum_n \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = \sum_n f_n(x_0).$$

Exemple 2.2.16 Etudier la convergence uniforme de la série $\sum_n f_n(x)$ sur \mathbb{R} tel que:

$$f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

On a

$$f_n(x) = x \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n.$$

• Pour $x = 0$, $f_n(0) = 0$ et donc $\sum_n f_n(x)$ converge et de somme nulle.

• Pour $x \neq 0$, $\sum_n \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n$ est la série géométrique convergente de raison $\frac{1}{1+x^2} < 1$ et de somme $\frac{x^2+1}{x}$.

En résumé, $\sum_n f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on a

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ \frac{x^2+1}{x} & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Comme

$$\lim_{x \rightarrow 0} S(x) = \pm\infty.$$

S n'est pas continue sur \mathbb{R} . Alors $\sum_n f_n(x)$ ne converge pas uniformément vers S sur \mathbb{R} .

Théorème 2.2.17 (Intégrale d'une série uniformément convergente)

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $\sum_n f_n(x)$ une série de fonctions continues de $[a, b]$.

Alors:

i. La somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a, b]$.

ii. La série $\sum_n \left(\int_a^{b_n} f_n(t) dt \right)$ converge dans \mathbb{R} et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_a^b S(t) dt.$$

Exemple 2.2.18 Montrer que la série $\sum_n x(1-x)^n$ converge simplement mais n'est pas

uniformément convergente sur $[0, 2[$, mais on peut avoir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) dx.$$

Solution On pose $f_n(x) = x(1-x)^n$.

$\sum_n x(1-x)^n$ est une série géométrique converge si $|1-x| < 1 \iff 0 < x < 2$.

• Si $x = 0$: $f_n(0) = 0 \Rightarrow \sum_n f_n(0)$ converge.

• Si , $x = 2$: $f_n(2) = 2(-1)^n$ donc $\sum_n f_n(2)$ diverge, et par conséquent $\sum_n x(1-x)^n$ converge

simplement sur $[0,2[$ vers une fonction S définie par:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

Remarquons que S n'est pas continue, donc $\sum_n f_n(x)$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,2[$ vers $S(x)$.

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 x(1-x)^n dx.$$

En utilisant l'intégration par partie on trouve:

$$\int_0^1 x(1-x)^n dx = \left[-\frac{x}{n+1}(1-x)^{n+1} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Donc

$$\sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right) = 1.$$

D'autre part, on a

$$\int_0^1 \sum_{n \geq 0} f_n(x) dx = \int_0^1 S(x) dx = \int_0^1 dx = 1.$$

Donc

$$\int_0^1 \sum_{n \geq 0} f_n(x) dx = \sum_{n \geq 0} \int_0^1 f_n(x) dx,$$

malgré que $\sum_n f_n(x)$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Corollaire 2.2.19 (Primitive d'une série uniformément convergente)

Sous les hypothèses du théorème précédent (Théorème 2.2.17), soit $x_0 \in [a, b]$ et notons

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n : x \mapsto \int_{x_0}^x S_n(t) dt$ et $F : x \mapsto \int_{x_0}^x S(t) dt$ les primitives de f_n et de S

respectivement nulles en x_0 . Alors la série de fonctions de terme général F_n converge

uniformément vers F sur $[a, b]$.

Théorème 2.2.20 (Dérivée d'une série uniformément convergente)

Soit I un intervalle borné de \mathbb{R} et $f_n : I \rightarrow \mathcal{E}$ une suite de fonctions admettant des dérivées continues sur I . On suppose que

i) La série de terme général f_n est uniformément convergente vers une fonction continue

$$S : I \rightarrow \mathcal{E}.$$

ii) La série de terme général f_n^* est uniformément convergente vers une fonction continue

$$g : I \rightarrow \mathcal{E}.$$

Alors, S admet une dérivée continue et

$$S^* = \sum_n f_n^* = g.$$

Remarque 2.2.21 La conclusion du théorème précédent peut s'écrire comme une interversion d'une somme et d'une dérivation

$$\left(\sum_n f_n(x) \right)^* = \sum_n f_n^*(x).$$

3. Séries entières

Les séries entières sont des séries de fonctions de forme particulière. Elles sont bien adaptées à l'opération de dérivation, et donc à la résolution d'équations différentielles.

Définition 3.1

On appelle série entière une série de fonctions $\sum_n f_n$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est définie comme suit:

$$f_n(z) = a_n z^n,$$

la variable z peut être réelle ou complexe.

3.1 Rayon de convergence

Le rayon de convergence d'une série entière caractérise à peu près les modes de convergence de la série de fonctions $\sum_n a_n z^n$ et les propriétés analytiques de la somme.

Lemme 3.1.1 (d'Abel)

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. On suppose que la suite $(a_n z_0^n)_n$ est bornée pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $|z| < |z_0|$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.

Théorème 3.1.2

Soit $\sum_n a_n z^n$ une série entière. L'ensemble des réels r positifs tels que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée est un intervalle de \mathbb{R}_+ contenant 0.

Définition 3.1.3 ((Rayon de convergence)

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ l'élément

$$\sup \{ r \geq 0, (a_n r^n)_n \text{ est bornée} \} \text{ de } [0, +\infty]$$

Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$, l'ensemble des $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)_n$ est bornée est $[0, R]$. $R = +\infty$

Théorème 3.1.4

1. Si $R = +\infty$, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.
2. Si $R = 0$, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée, en particulier, la série diverge.
3. Si $R \neq 0$ et $R \neq +\infty$:
 - Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, la série de terme général $a_n z^n$ est absolument convergente.
 - Si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)_n$ n'est pas bornée, donc la série diverge grossièrement.
 - Si $|z| = R$, on ne peut rien dire en général. On a ainsi une partition du plan complexe en trois parties (dans le dernier cas).

Théorème 3.1.5 (Rayon de convergence d'une somme et d'un produit)

Soit R_a le rayon de convergence d'une série entière $\sum_n a_n z^n$, R_b celui d'une série entière $\sum_n b_n z^n$. Alors le rayon de convergence des séries somme et produit sont supérieurs à $\min(R_a, R_b)$ Et pour somme:

Si $R_a \neq R_b$, le rayon de convergence de $\sum_n (a_n + b_n) z^n$ est égal à $\min(R_a, R_b)$.

Théorème 3.1.6

Soit $\sum_n a_n z^n$ et $\sum_n b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R_a et R_b respectivement.

Alors on a

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : |a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b,$$

et plus généralement:

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists k > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : (|a_n| \leq k|b_n| + \epsilon) \Rightarrow (R_a \geq R_b),$$

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}^+, \left(a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n n^\epsilon \right) \Rightarrow (R_a = R_b),$$

en particulier:

$$\left(a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n \right) \Rightarrow (R_a = R_b).$$

3.2 Méthodes de calcul du rayon de convergence

Théorème 3.2.1 (Règle de d'Alembert)

Soit $(a_n)_n$ une suite de complexes telle que:

1. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, a_n \neq 0$.

2. La suite $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ tend vers $l \in [0, +\infty]$.

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $R = \frac{1}{l} \in [0, +\infty]$.

Exemple 3.2.1 :

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n} z^n$, rayon de convergence ?

On a $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)^n}{(n+2)^{n+1}} \right| = \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n \frac{1}{n+2} \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{e} \times 0 = 0$.

Donc le rayon de convergence $R = +\infty$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^n} z^n$ converge dans \mathbb{C} .

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)\Gamma(2n+1)} z^n$, rayon de convergence. On a

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)n!}{(n+2)\Gamma(2n+3)} \times \frac{(n+1)\Gamma(2n+1)}{n!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow{+\infty} \frac{1}{4}$$

Donc le rayon de convergence $R=4$.

3.3 Propriétés fonctionnelles d'une série entière

Théorème 3.3.1

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . La série converge normalement sur tout compact inclus dans le disque ouvert de convergence (cas d'une variable complexe) ou l'intervalle ouvert de convergence (cas d'une variable réelle). Dans le cas réel, il ya en particulier convergence normale de la série entière sur tout segment de type $[a,b]$ ou $[-a,a]$ inclus dans $] -R, R[$.

Théorème 3.3.2 (Continuité de la somme d'une série entière de variable réelle)

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence R et de somme S . La fonction S est continue sur l'intervalle ouvert de convergence $] -R, R[$.

Théorème 3.3.3 (Continuité de la somme d'une série entière de variable complexe)

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de variable complexe, de rayon de convergence R et de somme S . La fonction S est continue sur le disque ouvert $D(0, R)$.

Théorème 3.3.4 (Primitives de la somme d'une série entière de variable réelle)

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence R et de somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On peut intégrer S terme à terme sur tout segment inclus dans $] -R, R[$. En particulier, S admet sur $] -R, R[$ des primitives qui valent:

$$c + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \text{ où } c \in \mathbb{R}$$

Ces primitives ont même rayon de convergence R que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Exemple 3.3.5 Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières réelles:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1}.$$

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ est la série dérivée de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ de rayon de convergence **R=1** et de somme

$$S(x) = \frac{1}{1-x} \text{ sur }]-1, 1[.$$

et

$$S^{\diamondsuit}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \forall x \in]-1, 1[.$$

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est la série primitive de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ de rayon de convergence **R=1** et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \int \frac{1}{1-x} dx = -\ln(1-x), \forall x \in]-1, 1[.$$

3.
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2x^{n-1} &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n^2 - n + n)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}. \end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$ est la série dérivée d'ordre 2 de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = xS''(x) + S'(x) = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1+x}{(1-x)^3}, \forall x \in]-1, 1[.$$

Théorème 3.3.6 (Dérivabilité et caractère C^∞ de la somme d'une série entière)

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de variable réelle, de rayon de convergence R et de somme

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Sur $]-R, R[$, la fonction S est de classe C^∞ , et on obtient ses dérivées successives par dérivation terme à terme de la fonction S .

Toutes les séries entières dérivées de S ont même rayon de convergence R que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

De plus

$$\forall x \in]-R, R[, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R, R[, S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n.$$

Les coefficients de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vérifie alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}.$$

3.4 Fonctions développables en séries entières

Définition 3.4.1

Soit I un intervalle de \mathbb{R} contenant 0 et soit f une fonction de I dans \mathcal{E} . On dit que f est développable en série entière en 0 si et seulement si, il existe une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de convergence non nul R , et $0 < r \leq R$ tels que

$$\forall x \in]-r, r[\cap I, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Tableau récapitulatif des développements en séries entières usuels

f	D_f	DSE	R	I
e^x	▪	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$+\infty$	▪
$\cos x$	▪	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	▪
$\sin x$	▪	$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	▪
\cosh	▪	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$+\infty$	▪
\sinh	▪	$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$+\infty$	▪
$(1+x)^{\otimes}$	$] -1, +\infty[$	$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\otimes(\otimes-1)(\otimes-2)\dots(\otimes-n+1)}{n!} x^n$	1 ($+\infty$ si $\otimes \in \bullet$)	$] -1, 1[$

$\frac{1}{1-x}$	▪ $-\{1\}$	$\sum_{n \geq 0} x^n$	1	$] -1, 1[$
$\frac{1}{1+x}$	▪ $-\{-1\}$	$\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1+x)$	$] -1, +\infty[$	$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	1	$] -1, 1[$
$\ln(1-x)$	$] -\infty, 1[$	$-\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$	1	$[-1, 1[$
$\arctan x$	▪	$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$[-1, 1]$
\arcsin	$[-1, 1]$	$x + \sum_{n \geq 1} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n(2n+1)} x^{2n+1}$	1	$] -1, 1[$
$\operatorname{argth} x$	▪	$\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	1	$] -1, 1[$
$\operatorname{argsh} x$	▪	$x + \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n(2n+1)} x^{2n+1}$	1	$] -1, 1[$

4. Intégrales généralisées (impropres)

La plupart des intégrales que vous rencontrerez ne sont pas des aires de domaines bornés du plan. Nous allons apprendre ici à calculer les intégrales de domaines non bornés, soit parce que l'intervalle d'intégration est infini (allant jusqu'à $+\infty$ ou $-\infty$) soit parce que la fonction à intégrer tend vers l'infini aux bornes de l'intervalle.

4.1 Intégrale d'une fonction non bornée sur un intervalle borné $[a, b[$

Soit a, b deux réels tels que $a < b$ et H l'ensemble des fonctions intégrables sur tout segment inclus dans $[a, b[$ et non bornées sur $[a, b[$.

Définition 4.1.1

Une fonction f de H est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si la fonction F définie sur $[a, b[$

par: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ a une limite finie l au voisinage de b . On dit alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$

est convergente et l'on pose:

$$\int_a^b f(t)dt = l.$$

Si F n'a pas de limite finie au point b , on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Exemple 4.1.2 Soit f la fonction définie sur $[a, b[$ par: $f(x) = \frac{1}{(b-x)^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

❖ Si $\alpha = 1$:

$$f(x) = \frac{1}{(b-x)} \Rightarrow F(x) = \int_a^x \frac{1}{(b-t)} dt = -\ln(b-x) + \ln(b-a), \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = +\infty,$$

d'où $\int_a^b f(x) dx$ diverge.

❖ Si $\alpha \neq 1$:

$$F(x) = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(b-x)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right), \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1, \\ \frac{-1}{(\alpha-1)(b-a)^{\alpha-1}} & \text{si } \alpha < 1. \end{cases}$$

Il en résulte que $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.

Proposition 4.1.3

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $c \in [a, b[$. Alors les intégrales impropres

$\int_a^b f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont de même nature.

Remarque 4.1.4

La réciprocity dans la linéarité est fautive, il est possible de trouver deux fonctions f, g telles

que $\int_a^b (f(t) + g(t))dt$ converge, sans que $\int_a^b f(t)dt$ ni $\int_a^b g(t)dt$ convergent.

4.2 Critères de convergence

Soit H_+ le sous ensemble de H formé des fonctions positives au voisinage du point b

$$H_+ = \{f/f \in H, \exists h > 0, b - h < x < b \Rightarrow f(x) \geq 0\}.$$

Théorème 4.1.5

Soient f et g deux fonctions de H_+ telles que, au voisinage du point b , $f \leq g$, on a les implications suivantes:

- $\int_a^b g(t)dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge,
- $\int_a^b f(t)dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exemple 4.1.6 Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1-t}} dt$.

$f(t) = \frac{e^t}{\sqrt{1-t}}$ est indéfinie au point $t=1$.

Pour $t \in [0, 1[: 0 \leq \frac{e^t}{\sqrt{1-t}} \leq \frac{e}{\sqrt{1-t}}$.

Or

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = \left[-2\sqrt{1-t} \right]_0^x = -2\sqrt{1-x} + 2,$$

d'où

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt = 2.$$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ converge ce qui implique la convergence de $\int_0^1 \frac{e^t}{\sqrt{1-t}} dt$.

Théorème 4.1.7

Si f et g sont deux fonctions de H_+ , équivalentes au voisinage du point b i.e. $\lim_{t \rightarrow b} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$, les

intégrales impropres $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.

Exemple 4.1.8 Est-ce que l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sin\sqrt{1-t}} dt$ converge ?

$f(t) = \frac{1}{\sin\sqrt{1-t}}$ est indéfinie au point $t = 1$.

Au voisinage de 1: $\sin \sqrt{1-t} \sim \sqrt{1-t}$, donc les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{\sin \sqrt{1-t}} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ sont de même nature.

L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ converge, donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sin \sqrt{1-t}} dt$ converge.

Corollaire 1.4.9

Si f est une fonction équivalente à la fonction $x \mapsto \frac{A}{(b-x)^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$, au voisinage du point b , l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Définition 1.4.10

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente si et seulement si, l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

Définition 1.4.10

Une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est semi convergente si elle est convergente mais n'est pas absolument convergente.

4.3 Intégrale d'une fonction non bornée sur un intervalle borné de \mathbb{R} .

Définition 4.1.11

On dit qu'une fonction f , intégrable sur tout segment inclus dans $]a, b[$ et non bornée sur $]a, b[$ est intégrable sur $]a, b[$ si et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ a une limite finie l au voisinage du point a et l'on pose alors

$$\int_a^b f(t) dt = l.$$

Pour étudier la convergence de ces intégrales, on utilise des critères analogues aux précédents.

Exemple 4.1.12 Etudier la nature de l'intégrale $\int_0^1 \ln t dt$.

$f(t) = \ln t$ est indéfinie en 0, donc

$$\int_x^1 \ln t dt = [t \ln t - t]_x^1 = -x \ln x + x - 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^1 \ln t dt = -1 \text{ et donc } \int_0^1 \ln t dt \text{ converge.}$$

4.5 Intégrale d'une fonction intégrable sur un intervalle fermé Contenu dans $]a,b[$ (cas de deux points incertains)

On peut considérer les intégrales doublement impropres, c'est-à-dire lorsque les deux extrémités de l'intervalle de définition sont des points incertains. Il s'agit juste de se ramener à deux intégrales ayant chacune un **seul point** incertain.

Définition 4.5.1

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ sont convergentes. La valeur de cette intégrale doublement impropre est alors

$$\int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Les relations de Chasles impliquent que la nature et la valeur de cette intégrale doublement impropre ne dépendent pas du choix de c , avec $a < c < b$.

Exemple 4.5.2 Est-ce que l'intégrale suivante $\int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} dt$ converge ?

Soit $c \in]0, 1[$, pour tout t de $]0, 1[: t < \frac{1}{t}$, donc

$$\int_x^c \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} dt > \int_x^c \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\left[\sqrt{1-t^2} \right]_x^c = -\sqrt{1-c^2} + \sqrt{1-x^2}.$$

On utilise l'équivalence:

$$\int_x^c \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} dt \sim \int_x^c \frac{1}{t} \left(1 + \frac{t^2}{2} \right) dt \text{ au voisinage de } 0,$$

$$\int_x^c \frac{1}{t} \left(1 + \frac{t^2}{2} \right) dt = \int_x^c \left(\frac{1}{t} + \frac{t}{2} \right) dt = \left[\ln t + \frac{t^2}{4} \right]_x^c = \ln c + \frac{c^2}{4} - \ln x - \frac{x^2}{4},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^c \frac{1}{t} \left(1 + \frac{t^2}{2} \right) dt = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln c + \frac{c^2}{4} - \ln x - \frac{x^2}{4} \right) = +\infty, \text{ donc } \int_0^c \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} dt \text{ diverge.}$$

$$\int_c^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} dt \sim \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ au voisinage de } 1.$$

$$\int_c^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [\arcsin t]_c^x = \arcsin x - \arcsin c \xrightarrow{x \rightarrow 1} \arcsin 1 - \arcsin c = cte,$$

$$\text{donc } \int_c^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} dt \text{ converge } \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} dt \text{ diverge.}$$

4.6 Intégrale d'une fonction sur un intervalle non borné

$[a, +\infty[$ de \mathbb{R} .

Soit a un réel et K l'ensemble des fonctions intégrables sur tout segment inclus dans $[a, +\infty[$.

Définition 6.4.1

Soit f une fonction continue sur $[a, +\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de la primitive $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ existe et est finie. Si c'est le cas, on

pose:

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt = l.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale diverge.

Remarque 6.4.2

1. Pour tout c de $[a, +\infty[$, les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_c^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.
2. Les critères de convergence précédents restent valables, remplaçons H_+ par K_+ (le sous ensemble de K formé des fonctions positives au voisinage de $+\infty$).

Exemple 6.4.3 L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$ converge.

En effet:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Posons $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, f appartient à K , et l'on a

$$\int_1^x f(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1 \right] & \text{si } \alpha \neq 1, \\ \ln x & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

Il en résulte que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

4.7 Intégrale d'une fonction sur \mathbb{R}

Définition 4.7.1

On dit qu'une fonction f , intégrable sur tout segment inclus dans $]-\infty, +\infty[$ est intégrable sur $]-\infty, a]$, si et seulement si, la fonction $x \mapsto \int_x^a f(t)dt$ a une limite finie l en $-\infty$ et l'on pose alors $\int_{-\infty}^a f(t)dt = l$.

On dit qu'une fonction f , intégrable sur tout segment de \mathbb{R} est intégrable sur \mathbb{R} , si et seulement si, c étant un point de \mathbb{R} , la fonction $x \mapsto \int_c^x f(t)dt$ a une limite finie en $-\infty$ et une limite finie en $+\infty$.

Une telle fonction f est donc intégrable sur \mathbb{R} , si et seulement si les intégrales

$\int_c^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_{-\infty}^c f(t)dt$ sont convergentes et l'on pose alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt.$$

Exemple 4.7.2 Est-ce que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ converge ?.

On choisit $c = 2$. Il s'agit de savoir si les deux intégrales $\int_{-\infty}^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$, $\int_2^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$

Convergent.
$$\int_x^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1+t^2)} \right]_x^2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{(1+x^2)} \right),$$

tend vers $-\frac{1}{10}$ lorsque $x \rightarrow -\infty$. Donc $\int_{-\infty}^2 \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ converge et vaut $-\frac{1}{10}$.

$$\int_2^x \frac{t}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{(1+x^2)} \right) \rightarrow \frac{1}{10} \text{ quand } x \rightarrow +\infty.$$

Donc $\int_2^x \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ converge et vaut $\frac{1}{10}$. Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt$ converge et vaut 0. Ce n'est pas surprenant car la fonction f est impaire.

4.8 Intégrales de Riemann

Une famille importante d'intégrales généralisées est donnée par celle des intégrales de Riemann.

Théorème 4.8.1

Soient α un réel et f une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par: $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$.

1. L'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est convergente si et seulement si, $\alpha > 1$ avec

$$\forall \alpha > 1 : \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

2. L'intégrale de f sur $]0, 1]$ est convergente si et seulement si, $\alpha < 1$ avec

$$\forall \alpha < 1 : \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1 - \alpha}$$

4.9 Intégrales de Bertrand

Une intégrale de Bertrand est $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt$.

a. Si $a > 1$: $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt$ est convergente si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha > 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{array} \right.$$

b. Si $a < 1$: $\int_0^a \frac{1}{t^{\alpha}(\ln t)^{\beta}} dt$ est convergente si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha < 1, \forall \beta \in \mathbb{R}, \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1. \end{array} \right.$$

Pour montrer qu'une intégrale converge, quand elle n'est pas absolument convergente, on dispose du théorème suivant:

Théorème 4.9.1 (d'Abel)

Soient f, g deux fonctions numériques définies sur tout intervalle fermé de $[a, +\infty[$.

1. Si f est positive, décroissante et tendant vers zéro à l'infini.

2. g est localement intégrable sur $[a, +\infty[$, telle que la fonction: $x \mapsto \left| \int_a^x g(t) dt \right|$ soit majorée par un nombre M , indépendant de x .

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

Exemple 4.9.2 L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

En effet: On pose $f(t) = \frac{1}{t}$ qui est une fonction positive pour tout $t \in [1, +\infty[$, décroissante et tendant vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

$$g(t) = \sin t \Rightarrow \left| \int_1^x \sin t dt \right| = |[-\cos t]_1^x| = |\cos 1 - \cos x| \leq 2,$$

on trouve que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge et comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ diverge, on dit que l'intégrale est semi-convergente.