Série numérique.

si $\lim S_n = \ell$. donc S_n cvgt. , si $\lim U_n = +\infty$ alors $\sum U_n$ dvg.

si $\lim S_n = \infty$ donc S_n dvgt.

si $\sum U_n$ cvgt $\Rightarrow \lim U_n = 0$.

suite géométrique: $U_n = q^n$.

$S_n = \sum q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

si $|q| < 1$ cvg.

si $|q| \geqslant 1$ dvg $\lim \nexists$

si $q = -1$ S_n cvg.

suite harmonique:

$U_n = \frac{1}{n}$.

suite arithmétique:

$U_n = U_0 + n.r$.

$S_n = \frac{n+1}{2}(U_0 + U_n)$ cvg.

suite telescopique:

$U_n = a_{n+1} - a_n$

$S_n = a_n - a_0$.

formule de Stirling

$n! \underset{\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Série à Terme Positif:

$U_n \geqslant 0$, si $\lim U_n = 0$. alors:

1. règle de comparaison:

$0 \leqslant U_n \leqslant V_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

V_n cvg donc U_n cvg

U_n dvg donc V_n dvg.

2. Critère d'équivalence:

$\lim \frac{U_n}{V_n} = \ell$ $\ell \neq 0$. $\ell \neq \infty$.

V_n et U_n de m̂ nature.

3. Critère de reiman:

$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha > 1$ cvg

$\alpha \leqslant 1$ dvg.

4. Critère de Cauchy:

$\lim \sqrt[n]{U_n} = \ell$.

$$\ell \begin{cases} > 1 & \text{dvg.} \\ < 1 & \text{cvg} \\ = 1 & \text{on peut rien dire.} \end{cases}$$

5. Critère Alembert:
(quand on a multiplication)

$\lim \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell$

$$\ell \begin{cases} > 1 & \text{dvg} \\ < 1 & \sum U_n \text{ cvg} \\ = 1 & \text{on peut rien dire.} \end{cases}$$

6. Critère Bertrand:

$$\sum \frac{1}{n^\alpha . \log^\beta n} \begin{cases} \alpha > 1 \\ \alpha = 1, \ \beta > 1 \end{cases} \text{cvgt.}$$

7. Comparaison par intégrale:

$f \searrow_0$ cont . $f(x) = U_n$.

$\sum U_n$ et $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ $\hat{m}$ nature.

$$\int_a^{n+1} f(x)dx < \sum U_n < \int_a^{n} f(x)\,dx$$

$$\begin{cases} cvg + cvg = cvg \\ dvg + cvg = dvg. \\ dvg + dvg = dvg. \end{cases}$$

Serie à Terme qlq:

. Cvgence absolu.

$\sum |u_n|$ cvg $\Rightarrow \sum U_n$ cvg.

. Série abel:

$U_n = a_n \cdot b_n$.

si $\sum (-1)^n \cdot a_n$ cvg si $a_n \searrow_0$.

. $a_n \searrow_0$, $a_n \geq 0$.

. $\exists M > 0$, $|\sum b_n| < M$

d'où: $\sum U_n$ cvgt.

. developpement limité:

$u_n = v_n + o\, w_n(\ )$

si $\sum w_n$ cvg alors:

$\sum u_n$ et $\sum v_n$ de $\hat{m}$ nature

$\lambda > 1$ dvg

. règle de Raabe - Duhamel:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda - \frac{m}{n} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

$\lambda > 1$ dvgt

$\lambda < 1$ cvgt

$\lambda = 1 \begin{cases} m > 1 & cvgt \\ m \leq 1 & dvgt \end{cases}$

Resumé du cours.

Serie entiere :

$f_n(x) = a_n x^n$, Une serie entiere : $\sum a_n x^n$

On cherche le domaine de cvg.

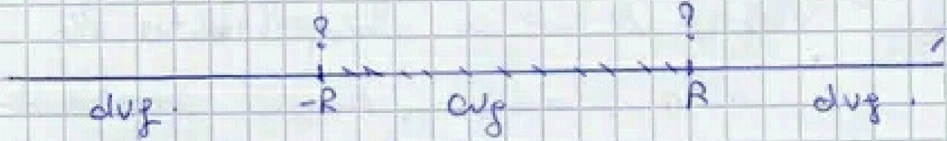
rayon de cvg : $(R>0)$

$\sum a_n x^n$ cvg si $|x| < R$. $-R < x < R$. $]-R, R[$.

$\sum a_n x^n$ dvg si $|x| > R$. $]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$.

$\sum a_n x^n$ dvg si $R = 0$.

$\sum a_n x^n$ cvg si $R = \infty$.



règle d'alambert :

$$\lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{l} = R.$$

règle de Cauchy :

$$\lim \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \frac{1}{l} = R$$

Opération sur $\sum a_n x^n$:

addition : on a $\sum a_n x^n$ R_a est son rayon de cvg.

$\sum b_n x^n$ R_b " " " cvg

$C_n = a_n + b_n$.

$$\sum (a_n + b_n) x^n = \sum c_n x^n = \sum a_n x^n + \sum b_n x^n.$$

si $R_a \neq R_b$, $R_c = \min\{R_a, R_b\}$.

si $R_a = R_b$, $R_c > R_a$.

multiplication :

$$\alpha \sum (a_n x^n) = \sum (\alpha a_n) x^n.$$

ils ont le même rayon de cvg.

Règle d'alambert

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x|$$

$$l = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \cdot |x| = A|x|$$

si $A \cdot |x| < 1 \iff \sum U_n$ cvgt.

si $A \cdot |x| > 1 \iff \sum U_n$ dvgt

$|x| < \frac{1}{|A|}$ ou $|x| > \frac{1}{|A|}$

Propriété des séries entières :

intégration : $f(x) = \sum a_n \cdot x^n$

$F(x) = \int f(x)\,dx = \int \sum a_n \cdot x^n\,dx = \sum \int a_n x^n = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

$F(x)$ et $f(x)$ ont le m̂ rayon de cvg.

dérivation :

$f'(x) = \sum n \cdot a_n \cdot x^{n-1}$

$f'(x)$ et $f(x)$ ont le m̂ rayon de cvg.

lemme d'abel :

si $(a_n x_0^n)$ borné, alors $R \geq |x_0|$.

Développement en série des fct usuelle : au $\mathcal{V}(0)$.

Taylor : $f(x) = \sum \frac{x^n \cdot f^n(0)}{n!}$ au $\mathcal{V}(0)$ donc $a_n = \frac{f^n(0)}{n!}$

au $\mathcal{V}(x_0)$: $f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{n+1}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

au $\mathcal{V}(0)$:

$\exists M > 0, |f^n(x)| \leq M$ donc $f(x) = \sum \frac{f^n(0)}{n!} x^n$

$f(x) = S_k(x) + R_k(x)$. $R_k = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} f^{k+1}(x) \longrightarrow 0$

$f(x) = S_k(x) = \sum \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n$

Par ex : $f(x) = \cos(x) = \frac{\cos^n(0)}{n!} x^n = \sum (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ (dl au $\mathcal{V}(0)$)

méthode de développement :

- méthode direct $f(x) = \sum a_n x_0^n = \sum \frac{f^n(0)}{n!} \cdot x^n$.
- changement de variable
- décomposition
- diviser
- multiplier par x^k.
- dérivé
- intégrer
- EDO

les DL :

Theorème Taylor :

$$f(x) = f(a) + (x-a) \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(x) + o(x)$$

e^x $\quad 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$\sin x$ $\quad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

$\cos x$ $\quad 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

$\ln(1+x)$ $\quad x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

$(1+x)^\alpha$ $\quad 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$

$\frac{1}{1+x}$ $\quad 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n \cdot x^n + o(x^n)$

$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ $\quad 1 + -\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{2^n \cdot n!} x^n + o(x^n)$

$\frac{1}{1-x}$ $\quad 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$

cvgt + cvgt → cvgt.
cvgt + dvgt → dvgt.
dvgt + dvgt → on peut rien dire.