

Série numérique

Nature d'une série.

- * On dit que la série $\sum U_n$ est convergente si la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles converge.
- * On dit que la série $\sum U_n$ est divergente si elle ne converge pas.

Proposition:

Si la série $\sum U_n$ converge alors $U_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Au contraire si $U_n \not\rightarrow 0$ la série diverge

On dit dans ce cas la série diverge grossièrement.

Série géométrique.

Soit $a \in \mathbb{R}$, on pose $U_n = a^n$ ($(U_n)_n$ suite géométrique) la série $\sum a^n$ est dite série géométrique.

- * $\sum a^n$ converge ssi $|a| < 1$
- * $\sum a^n$ diverge ssi $|a| \geq 1$

Série harmonique

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est appelée série harmonique est divergente.

Propriété

1. Si $\lambda \neq 0$, les séries $\sum U_n$ et $\sum \lambda U_n$ sont de même nature.
2. Si les séries $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont convergentes, alors la série somme $\sum (U_n + V_n)$ est convergente.
3. Si $\sum U_n$ converge et $\sum V_n$ diverge alors $\sum (U_n + V_n)$ diverge.
4. Si $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont divergentes on ne peut rien dire.

Série numérique complexe.

Soit $\sum U_n$ série numérique dans $\mathbb{C}$ de forme générale $U_n = a_n + ib_n$.

La série $\sum U_n$ converge si et seulement si les deux réelles $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent.

Séries à termes positifs (dans $\mathbb{R}^+$)

Proposition (Critère de convergence)

Une série à termes positifs $\sum U_n$ converge ssi la suite $(S_n)_n$ des sommes partielles est majorée.

Proposition (Comparaison des séries positives)

Soit $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries à termes positifs telle que $U_n \leq V_n$.

- Si $\sum V_n$ converge alors $\sum U_n$ converge.
- Si $\sum U_n$ diverge alors $\sum V_n$ diverge.

Proposition (Équivalence)

Soient $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries à termes positifs Si $U_n \sim V_n$ alors $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature.

Corollaire:

Soit $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries à termes positifs telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{V_n} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, $V_n > 0$

1. Si $\ell > 0$ $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature.
2. Si $\ell = 0$ $\sum V_n < +\infty \Rightarrow \sum U_n < +\infty$.
3. Si $\ell = +\infty$ $\sum V_n < +\infty \Rightarrow \sum U_n < +\infty$.

Proposition (Comparaison série / intégral généralisée)

Soit $m_0 \in \mathbb{N}$, f fct numérique positive continue et décroissante sur $[m_0, +\infty[$

$$f: [m_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ n \mapsto f(n)$$

On pose $U_n = f(n)$, $n \geq m_0$

$$\sum_{n \geq m_0} U_n \text{ converge ssi } \int_{m_0}^{+\infty} f(x) dx < +\infty$$

Regles pratique:

Proposition

La serie de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$

- Converge si $\alpha > 1$.
- Diverge si $\alpha \leq 1$.

Proposition (Regle de $n^\alpha U_n$)

Soit $\sum U_n$ serie réelle a termes positif
On suppose $\exists \alpha : \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha U_n = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

- Si $l \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha > 1$ alors $\sum U_n$ CV.
- Si $l = 0$ et $\alpha > 1$ alors $\sum U_n$ CV.
- Si $l = +\infty$ et $\alpha \leq 1$ alors $\sum U_n$ DV.

Proposition (Serie de Bertrand)

Serie de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$

- Converge ssi $\begin{cases} \alpha > 1 & \forall \beta \\ \alpha = 1 & \text{et } \beta > 1 \end{cases}$
- Diverge ssi $\begin{cases} \text{Si } \alpha = 1 & \beta \leq 1 \\ \text{Si } \alpha \leq 1 & \forall \beta \end{cases}$

Proposition (Regle de $\frac{U_{n+1}}{U_n}$)

Soit $\sum U_n$ une serie a termes strictement positif telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors

- Si $l < 1$ alors $\sum U_n$ CV
 - Si $l > 1$ alors $\sum U_n$ DV Grossierement.
 - Si $l = 1$ (On ne peut rien dire).
- Si n'a pas de limite il ne peut que $\sum U_n$ CV ou DV.

Proposition (Regle de Cauchy, ou regle $\sqrt[n]{U_n}$)

Soit $\sum U_n$ une serie a terme positif s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{U_n} = l$ alors

- Si $l < 1$, $\sum U_n$ CV.
- Si $l > 1$, $\sum U_n$ DV Grossierement.
- Si $l = 1$ (On ne peut rien dire).

Series a termes quelconques.

Theoreme (Critere de Cauchy)

La serie converge ssi la suite (S_n) des sommes partielles satisfait le critere de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N}^* \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} U_k \right| < \varepsilon$$

Definition (Serie absolument convergente)

Soit $\sum U_n$ serie numerique.

On dit que cette serie est absolument convergente si la serie $\sum |U_n|$ est convergente. Une serie convergente non absolument convergente est dite semi convergente.

Theoreme

Si $\sum U_n$ converge absolument alors $\sum U_n$ convergente

Proprietes (Criter d'absolue convergente)

Soit $\sum U_n$ une serie a termes quelconque et $\sum V_n$ une serie a terme positif.

- $|U_n| \leq V_n$ avec $\sum V_n$ CV alors $\sum U_n$ CV absolument.
- $|U_n| \sim V_n$ avec $\sum V_n$ CV alors $\sum U_n$ CV absolument.
- S'il existe $\alpha > 1$ / $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha |U_n| = l \in \mathbb{R}^+$ alors $\sum U_n$ CV absolument.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = l < 1$ alors $\sum U_n$ CV absolument
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|U_{n+1}|}{|U_n|} = l > 1$, $\sum U_n$ DV Grossierement

Theoreme: (Critere des series alternee).

Soit la serie alternee $\sum (-1)^n |u_n|$
si la suite $(|u_n|)$ decroissante et tend vers 0
Alors la serie est convergente.

Proposition: (Reste d'une serie alternee)

Si la serie alternee $\sum (-1)^n |u_n|$ verifie
le critere des series alternee.
Alors le reste a l'ordre n , R_n verifie
 $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ et $R_n \cdot u_{n+1} > 0$

Theoreme: (Critere d'Abel).

Soit $\sum x_n$ une serie complexe ou pour
tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a_n u_n$ tels que
i - la suite (a_n) est reelle, decroissante
et tend vers 0.

ii - il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq M.$$

Alors $\sum x_n$ est convergente.

Def: (Produit de 2 series)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux series.

La serie produit $\sum w_n$ est definie par

$$w_n = \sum_{i=0}^n u_i v_{n-i}$$

Theoreme: (Convergence d'une serie produit)

Si la serie $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont
absolument convergentes alors la serie
produit $\sum w_n$ converge absolument

$$\text{avec } \sum w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right)$$

Serie de Fourier

Serie trigonometrique:

Definition

On appelle serie trigonometrique, tout serie de fonction $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ de la forme $f_0(x) = \frac{a_0}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $(a_n)_n, (b_n)_n$ sont 2 suites reelles.

Remarque:

On pose $b_0 = 0$

La suite des sommes partielles $(S_n)_n$

$$\begin{cases} S_0(x) = \frac{a_0}{2} \\ S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \end{cases}$$

et 2π periodique.

Donc si $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$

Alors $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est 2π periodique

Soit $x \in \mathbb{R}$ si $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ converge alors

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n$ converge en tout point de la fonction $x + 2K\pi, K \in \mathbb{Z}$ et $f(x) = f(x + 2K\pi)$

Formule d'Euler

$$\cos(nx) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}; \sin(nx) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$$

$$e^{inx} = \cos(nx) + i \sin(nx); e^{-inx} = \cos(nx) - i \sin(nx)$$

Proposition:

Soit la serie trigonometrique $\sum f_n$ avec $f_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

Si les series numeriques $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, alors la serie trigonometrique $\sum_n f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. De plus, la somme f est continue sur $\mathbb{R}$.

Ecriture complexe:

$$\text{ona } f_n = \left(\frac{a_n - ib_n}{2} \right) e^{inx} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2} \right) e^{-inx}$$

$$\text{Posons } \forall n \geq 1 \begin{cases} c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \\ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \forall n \geq 1, f_n(x) = c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx} \text{ et } f_0(x) = a_0 = c_0.$$

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ est appelee forme complexe d'une serie trigonometrique.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$$

En particulier ona (lorsque la serie converge)

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n a_k e^{ikx}$$

Théorème

Si les suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont positives décroissantes et convergent vers 0 alors la série trigonométrique de terme général $(\frac{a_0}{2} \cos(n\alpha) + b_n \sin(n\alpha))_n$ converge sur $\mathbb{R} \setminus \{2K\pi, K \in \mathbb{Z}\}$.

Calcul des coefficients.

Proposition:

Soit $\sum_{n \geq 0} f_n$ série trigonométrique qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Soit f sa somme. $f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$
 $= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$.

Alors on a

1. $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx$,

2. $\forall m \in \mathbb{N}, b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(mx) dx$

3. $\forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$.

Remarque:

La fonction f étant 2π -périodique, il en est de même pour la fonction $x \mapsto f(x) e^{imx}$.
On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx = \int_x^{x+2\pi} f(x) e^{-imx} dx.$$

En particulier $\int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx$.

Fonctions définies par morceaux

Définition 1:

Soit f une fonction définie sur $[\alpha, \beta]$ de $\mathbb{R}$. On dira que f est continue par morceaux sur $[\alpha, \beta]$ s'il existe $(n+1)$ réels $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = \beta$ tels que f continue sur $] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$: $0 \leq i \leq n-1$ et satisfait de plus:

* $f(\alpha_i^+) = \lim_{x \rightarrow \alpha_i^+} f(x) \in \mathbb{R} ; i = 0, \dots, n-1$.

* $f(\alpha_i^-) = \lim_{x \rightarrow \alpha_i^-} f(x) \in \mathbb{R} ; i = 1, \dots, n$.

Les points de $[\alpha, \beta]$ où f est continue sont appelés points de continuité de f .

Remarque:

* f est prolongeable par continuité sur $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ ($0 \leq i \leq n-1$).

* f n'est pas nécessairement définie aux bords

* f est intégrable sur $[\alpha, \beta]$ $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x) dx$

* Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on dira que f est de classe C^p par morceaux si les dérivées successives f', f'' existent sur $] \alpha_i, \alpha_{i+1}[$ ($0 \leq i \leq n-1$) et sont continues par morceaux sur $[\alpha, \beta]$.

Déf 2: (Régularité par morceaux d'une f) péri

Une fonction périodique f définie sur $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux (resp C^p par morceaux) si elle est continue par morceaux (resp C^p par morceaux) sur une période.

Serie de Fourier:

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$,
 2π -periodique et continue par morceaux.

On appelle serie de Fourier de f
la serie trigonometrique

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

$$\text{ou } \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} \quad \text{ou}$$

$$1. \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx.$$

$$2. \forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx.$$

$$3. \forall n \in \mathbb{Z}, c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

a_n, b_n, c_n sont appeles coefficients de Fourier de f .

Coefficients de Fourier d'une fonction paire - impaire:

On choisit l'intervalle d'integration
 $[-\pi, \pi]$ pour le calcul de a_n, b_n et c_n .

f est paire:

La fonction $x \rightarrow f(x) \cos(mx)$ est
aussi paire et la fonction
 $x \rightarrow f(x) \sin(mx)$ est impaire.

On a alors $\forall m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ b_n = 0 \end{cases}$$

la serie de Fourier associee a f est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx).$$

f est impaire:

La fonction $x \rightarrow f(x) \cos(mx)$ est aussi
impaire et la fonction $x \rightarrow f(x) \sin(mx)$
est paire.

On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_n = 0 \\ b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \end{cases}$$

la serie de Fourier associee a f est

$$\sum_{n \geq 1} b_n \sin(nx)$$

Theoreme: (Theoreme de Dirichlet)

Soit f une fonction definie sur $\mathbb{R}$,
 2π -periodique, continue par morceaux
verifiant: f est derivable a gauche et
a droite sur $\mathbb{R}$. Alors la serie de Fourier
de f est simplement convergente sur $\mathbb{R}$
et converge en tout point x vers $\frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$
ou $f(x^-)$ et $f(x^+)$ sont les limites a
gauche et a droite de x .

En particulier, si f est continue en
un point x , alors on a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

De plus, la convergence est uniforme
sur tout intervalle ou f est continue.

Suites - Series de fonctions

Suites de fonctions.

Convergence simple - uniforme.

Convergence simple:

Def:

On dit que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur I si pour tout $x \in I$ la suite de numériques $(f_n(x))_n$ converge.

On dit alors que (f_n) converge simplement vers f sur I

$$(\forall x \in I), (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0),$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Convergence uniforme:

On dit que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément (C.U.) sur I s'il existe une fonction f définie sur I telle que

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0, \forall x \in I) |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Soit encore

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0), \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

c'à d

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

f s'appelle limite uniforme de $(f_n)_n$ sur I

Proposition

Si (f_n) C.U. vers f sur I alors (f_n) C.S. vers f sur I .

Méthode:

Pour étudier la convergence d'une suite (f_n) on commence par la convergence simple fixé $x \in I$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$

Si cette limite existe $\forall x \in I$ notons $f(x)$

$$f_n \xrightarrow{C.S.} f \text{ sur } I.$$

Il faut alors étudier la suite (M_n) définie par $M_n = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$. La détermination de M_n peut passer par l'étude des variations de f_n . Si $M_n \rightarrow 0$, la convergence est uniforme, sinon elle ne l'est pas.

Théorème fondamental:

Théorème 1 (Continuité).

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$ converge uniformément sur $[a, b]$. Alors la limite f est continue sur $[a, b]$.

Théorème 2 (Intégration).

Soit $(f_n)_n$ suite de fonctions intégrables convergeant uniformément vers f sur $[a, b]$

Alors

* f est intégrable.

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

* la suite $(g_n)_n$: $g_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers g : $g(x) = \int_a^x f(t) dt$

Théorème 3 (Derivation)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fct's sur $[a, b]$ telle que

1. $(f_n)_n$ est de classe C^1 sur $[a, b]$
2. il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que la suite $(f_n(x_0))_n$ converge ($\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0) = l$).

3- la suite $(f_n)_n$ converge uniformement sur $[a, b]$ vers une fonction g .

Alors

a) $(f_n)_n$ converge uniformement sur $[a, b]$ vers la fonction f définie par $f(x) = 1 + \int_{x_0}^x g(t) dt$

b) f est de classe C^1 sur $[a, b]$ et l'on a $f' = g$.

Ce résultat s'écrit aussi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n'(x)$$

Série de fonctions

Définition:

Soit $(f_n)_n$ une suite de fcts définies sur I et (S_n) la suite des sommes partielles

$$c.-à-d. S_n = \sum_{k=0}^n f_k \text{ définie par } S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

On appelle série de fonctions notée $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, la suite des sommes partielles $(S_n)_n$.

Convergence simple-absolue.

Déf (Convergence simple)

On dit que la suite de fct $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge simplement vers S sur I si la suite de fonctions S_n converge simplement vers S sur I .

On note alors $S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$ est appelée somme de la série de fct.

Autrement dit:

$\forall x \in I$ la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$

Condition nécessaire:

$$\sum f_n \text{ C.S. sur } I \Rightarrow f_n \text{ C.S. vers la fct nulle.}$$

$$\forall x \in I \quad \sum f_n \text{ C.V.} \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Déf (Convergence absolue)

On dit que la série $\sum f_n$ converge absolument sur I si la série $\sum |f_n|$ converge simplement.

Proposition: $(CA \Rightarrow C.S.)$

Si la série $\sum f_n$ est absolument convergente sur I alors elle est simplement C.V. sur I .

Convergence = Uniforme - normale.

Déf: (Convergence uniforme)

On dit que la série de fct $\sum f_n$ converge uniformement vers S sur I si la suite des sommes partielles $(S_n)_n$ converge uniformement vers S sur I .

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in I \quad |S_n(x) - S(x)| < \epsilon$$

$$\sup_{x \in I} |S_n(x) - S(x)| = \sup |R_n(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Déf: (Convergence normale)

On dit qu'une suite de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I s'il existe une série numérique à termes positifs $\sum U_n$ convergente telle que l'on ait pour tout $x \in I$

$$|f_n(x)| \leq U_n.$$

Théorème:

Si $\sum f_n$ converge normalement sur I , alors elle converge uniformément sur I .

Théorème fondamental sur les séries de fonction

Théorème 1: (Interversion des limites)

Soit $\sum f_n$ une série de fcts unif convergente sur I vers sa somme S , et soit $x_0 \in I$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n admet une limite finie l_n quand x tend vers x_0 . Alors la série $\sum l_n$ CV et $\lim_{x \rightarrow x_0} S(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$

Théorème 2: (Continuité)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions convergeant uniformément sur I vers sa somme S et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est continue sur I . Alors la fonction S est continue sur I .

Théorème 3: (Intégration)

Soit $\sum f_n$ une série de fcts convergeant uniformément sur $[a, b]$ vers S et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ f_n est intégrable sur $[a, b]$

Alors

1. S est intégrable sur $[a, b]$

$$2. \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) dt = \int_a^b S(t) dt.$$

3. La série de fonctions $\sum g_n$ avec $g_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt$ converge uniformément sur $[a, b]$ vers la fonction T définie par $T(x) = \int_a^x S(t) dt$

Théorème 4: (Dérivation)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur I et telle que

* $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I .

* $\exists x_0 \in I$ tel que la série numérique

$\sum f_n(x_0)$ converge

* la série $\sum f'_n$ converge uniformément sur I vers T .

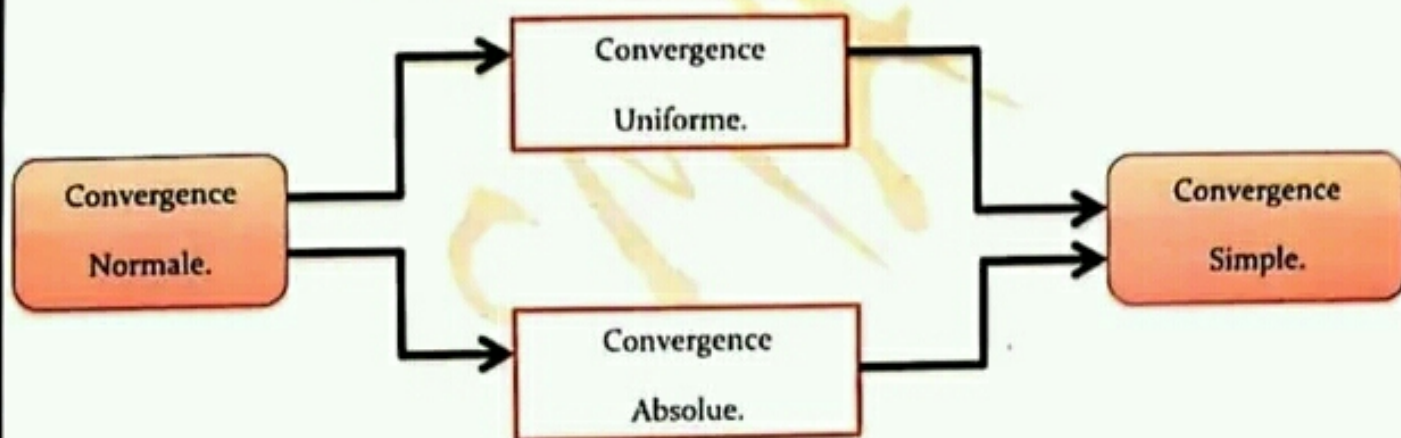
Alors

• $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers la fonction S .

• S est de classe C^1 sur I et on a $S' = T$.

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = T(x).$$

Liens entre les convergences pour les séries de fonctions.



Liens entre les convergences pour les séries de fonctions.

