① Les séries numériques.

Généralité :

Déf :

- Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique sur le corp $\mathbb{K}$ où : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$. On appelle Série numérique le couple :

$$\left((U_n)_{n\in\mathbb{N}}, (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) \text{ où } S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$$

noté par : $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$

- U_n est appelé : le terme générale de la série numérique.
- $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé : la suite des sommes partielles de la série numérique.

Nature d'une série numérique :

Déf :

- on dit que : la série numérique de terme générale U_n est convergente si : Sa suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Remarque :

$\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ → convergente ; divergente

convergente : Si : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ell$

Notation : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n < +\infty$

divergente : Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diveregente. $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \pm\infty$ ou $\begin{cases}\ell \\ \ell' \end{cases} \neq$

Notation : $\sum^{+\infty} U_n = +\infty$.

Remarque : $S_n \geq$ (nombre de terme $(n-p+1)$ × terme générale)

Somme d'une série :

déf :

- Soit $\sum U_n$ une série numérique.
- Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie S alors : la série numérique $\sum U_n$ est convergente, et dans ce cas : S est appelé la somme de la série. et on note : $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} U_n$

c'est une limite.

Reste d'une série numérique :

Déf :

- Soit $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$ une série numérique convergente de somme : S. Et soit N un entier naturel.

on appelle : Reste d'ordre n de cette série et on note : $R_n = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} U_n = S - S_n$.

Pour comprendre :

$$\left(S = \underbrace{U_1 + U_2 + \dots + U_n}_{S_n} + \underbrace{U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_{+\infty}}_{R_n} \right)$$

Remarque :

- Soit R_n le Reste d'ordre n, d'une serie numérique convergente.

alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$

(Car : $R_n = S - S_n$).

Condition nécéssaire de convergence :

proposition :

- pour qu'une série $\sum U_n$ soit convergente, il est nécéssaire (mais pas suffisante) que : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

c-à-d :

$$\sum_{n\geq 0} U_n \text{ convergente} \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = 0$$

Remarque :

on utilise souvent cette proposition pour : montrer qu'une série est divergente. c-à-d :

- Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n \neq 0$ alors : $\sum U_n$ est divergente.

mais :

- Si : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$, on ne peut rien dire de la nature de $\sum U_n$, il peut être convergente ou divergente.

Operation sur série numérique :

Def :

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} U_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} V_n$ deux séries numériques ; alors :

① $\sum U_n$ convergente $\Longrightarrow$ $\sum \lambda U_n$ convergente, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

et on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda . U_n = \lambda . \sum_{n=0}^{+\infty} U_n .$$

② $\sum U_n$ convergente et $\sum V_n$ convergente

$\Longrightarrow$ $\sum (U_n + V_n)$ convergente.

et on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n + \sum_{n=0}^{+\infty} V_n$$

Remarque importante :

- Si $\sum (U_n + V_n)$ cv cela n'implique pas forcément que $\sum U_n$ cv et $\sum V_n$ cv.
- Si $\sum U_n$ div alors : $\sum \lambda U_n$ div, avec $\forall \lambda \neq 0$.
- Si $\sum U_n$ cv et $\sum (U_n + V_n)$ cv

  alors : $\sum V_n$ cv.
- Si $\sum U_n$ div et $\sum V_n$ div, cela n'implique pas forcément que $\sum (U_n + V_n)$ est div.

- Si on veut calculer la sommes la limite d'une série numérique de la forme : $\sum\limits_{n\geq 0} (U_n + V_n)$.

on peut, si c'est possible commencer par étudier et calculer les sommes les limites de deux séries : $\sum U_n$, $\sum V_n$

c-à-d : on arrive à montrer que :

$$\sum U_n \text{ cv et } \sum V_n \text{ cv alors } \sum (U_n + V_n) \text{ cv.}$$

- Les deux séries numériques :

$$\sum_{n\geq n_0} U_n \ , \ \sum_{n\geq n_1} U_n \ ; \text{ sont de même nature.}$$

Les séries de référence :

① Série de Riemann :

▸ Toute série de la forme : $\sum_{n\geq 1} \frac{c}{n^\alpha}$, $\begin{cases} c \in \mathbb{R}^* \\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$

proposition :

- Si $\alpha > 1$ alors : $\sum \frac{c}{n^\alpha}$ est cv.
- Si $\alpha \leq 1$ alors : $\sum \frac{c}{n^\alpha}$ est div.

② La Série Géométrique :

▸ Toute série de la forme : $\sum_{n\geq 0} c.K^n$ ← متتالية هندسية

proposition :

- Si $|K| < 1$ alors : $\sum_{n\geq 0} c.K^n$ est cv

et on a : $$\sum_{n=0}^{+\infty} c.K^n = \frac{c}{1-K}$$

Rappelle :

$$\lim_{n\to+\infty} K^n \;\; q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } K > 1 \\ 1 & \text{si } K = 1 \\ 0 & \text{si } -1 < K < 1 \,,\; |K| < 1 . \\ \text{n'existe pas} & \text{si } K \leq -1 \end{cases}$$

Si $K = 1$.

$$\sum_{n\geq 0} c.(1)^n = \sum_{n\geq 0} \overset{U_n}{C} = \overset{U_0}{C} + \overset{U_1}{C} + \dots + \overset{U_n}{C}$$

$$= C.(n+1) \leftarrow \text{عدد الحدود}$$

$$\lim_{n\to+\infty} C.(n+1) = \begin{cases} +\infty & \text{si } C > 0 \\ -\infty & \text{si } C < 0 \end{cases}$$

Donc $\sum C.(1)^n$ est div.

③ Série de Bertrand :

▸ Toute série dont le terme générale :

$$U_n = \frac{1}{n^\alpha . \log^\beta(n)} \quad ; \; \alpha, \beta \in \mathbb{R} .$$

Proposition :

- $\alpha > 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta > 1 \implies \sum U_n$ est cv.
- $\alpha < 1$ ou $\alpha = 1$ et $\beta \leq 1 \implies \sum U_n$ est div.

④ Serie Téléscopique :

▸ Toute série de terme generale : U_n tq

$$U_n = V_n - V_{n+K} \quad \left(\text{où } U_n = V_{n+K} - V_n \right)$$

Cas particulier :

$$U_n = V_n - V_{n+1} \qquad U_n = V_{n+1} - V_n$$

$$U_n = V_n - V_{n-1} \qquad U_n = V_{n-1} - V_n .$$

proposition :

- Si la suite (V_n) cv alors : la série $\sum U_n$ cv

Preuve : pour : $U_n = V_n - V_{n+1}$, on a :

$$S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$S_n = (V_0 - \cancel{V_1}) + (\cancel{V_1} - \cancel{V_2}) + (\cancel{V_2} - \cancel{V_3}) + \cancel{\dots} + (\cancel{V_n} - V_{n+1})$$

$$S_n = V_0 - V_{n+1} \quad \Big| \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim (V_0 - V_{n+1})$$

Les séries à termes positifs :

- Dans la suite, les séries sont à termes positif c.à.d : $\forall n \geq 0,\ U_n \geq 0$.

proposition :

- une $\sum U_n$ serie à termes positifs est cv ssi : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est magorées.

Remarque :

- Dans le cas de div d'une série à termes positifs ; on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Les Critères :

① Critère de comparaison :

Soient $\sum U_n$ et $\sum V_n$ deux séries à termes positifs.

- on suppose que : $\exists\, m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tq : $m \leq \dfrac{U_n}{V_n} \leq M$.

alors : les deux séries sont de même nature.

- on suppose que : $0 \leq U_n \leq V_n$.
  - Si $\sum U_n$ div alors $\sum V_n$ div.
  - Si $\sum V_n$ cv alors $\sum U_n$ cv.
  - Si $\sum V_n$ div, on ne peut rien dire de $\sum U_n$
  - Si $\sum U_n$ cv, on ne peut rien dire de $\sum V_n$

(4)

② critère d'équivalence :

Soient $\sum U_n$, $\sum V_n$ deux série à terme positifs.

tq : $\dfrac{U_n}{V_n}$ est défini $\forall n \geq n_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 1$

alors : les deux série de même nature.

Remarque :

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 0$ on écrit par notation : $U_n \overset{\infty}{\sim} V_n$

c.à.d : équivalence

- **Cas générale :**

Si $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont deux série à terme positif

tq : $\dfrac{U_n}{V_n}$ défini $\forall n \geq n_0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = \ell$

avec : $\ell \neq 0$ et $\ell \neq +\infty$

alors : les deux série de même nature.

- **cas particulier :**

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{V_n} = 0$

alors : $\begin{cases} \text{Si } \sum U_n \text{ div alors } \sum V_n \text{ div} \\ \text{Si } \sum V_n \text{ cv alors } \sum U_n \text{ cv} \end{cases}$

③ critère de comparaison logarithmique :

Soient $\sum U_n$, $\sum V_n$ deux série à terme positif

on suppose que : $\forall n \geq n_0$, $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} \leq \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ alors

$\begin{cases} \text{Si } \sum U_n \text{ cv alors } \sum V_n \text{ cv.} \\ \text{Si } \sum V_n \text{ div alors } \sum U_n \text{ div.} \end{cases}$

Critère de Riemann :

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série à terme positif

on suppose que : $\lim_{n\to+\infty} n^{\alpha}.U_n = \ell$. alors :

حنا نخيروه

- Si $\ell \neq 0$ et $\ell \neq +\infty$ alors :

$$\begin{cases} \sum U_n \text{ cv pour } \alpha > 1 \\ \sum U_n \text{ div pour } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

- Si $\ell = 0$ alors : $\sum U_n$ cv pour $\alpha > 1$.
- Si $\ell = +\infty$ alors : $\sum U_n$ div pour $\alpha \leq 1$.

⑤ Critère de Cauchy :

Soit $\sum U_n$ une série à terme positif

on suppose que : $\lim_{n\to+\infty} U_n^{1/n} = \ell$ avec : $\ell \in [0,+\infty[$ ou $\ell = +\infty$.

- Si $0 \leq \ell < 1$ ($\ell \in [0,1[$) alors : $\sum U_n$ cv.
- Si $\ell > 1$ ($\ell \in]1,+\infty[$) alors : $\sum U_n$ div.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire de la nature de $\sum U_n$.

Remarque :

nature des séries.

- $\sum (K)^n$ ⟹ on utilise critère d'Alembert.

عدد

- $\sum (U_n)^n$ ⟹ on utilise critère de cauchy.

متتالية

⑥ Critère d'Alembert :

Soient $\sum U_n$ une série à terme positif.

$U_n \geq 0$, $\forall n \geq n_0$.

on suppose que : $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \ell$ alors :

- Si $\ell > 1$ ($\ell = +\infty$) alors : $\sum U_n$ div
- Si $\ell < 1$ ($\ell \in [0,1[$) alors : $\sum U_n$ cv
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire de la nature de $\sum U_n$.

⑦ Le critère logarithmique :

Soit la série à terme positif $\sum_{n\geq 0} U_n$ tq $U_n \neq 0$, $\forall n \geq 0$,

on suppose que : $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\log\left(\frac{1}{U_n}\right)}{\log(n)} \right) = \ell$

alors :

- Si $\ell < 1$ alors $\sum U_n$ est div.
- Si $\ell > 1$ alors $\sum U_n$ est cv.
- Si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.

عكس تاع cauchy.

Remarque :

- on utilise souvent ce critère dans le cas de doute de cauchy (ie : $\lim \sqrt[n]{U_n} = 1$).

⑧ Le critère de Raabe - Duhmel :

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une serie à terme positif tq $U_n \neq 0$

on suppose que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}\right)=1 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left[n.\left(\frac{U_{n+1}}{U_n}-1\right)\right]=-\alpha$$

alors :

si $\alpha > 1$ alors $\sum U_n$ cv

si $\alpha < 1$ alors $\sum U_n$ div

si $\alpha = 1$ on ne peut rien dire

Remarque :

Le critère de Raabe - Duhamel est souvent utilisé dans le cas donte de D'alember

$\left(\text{ie : } \lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1\right)$.

⑨ Critère Integrale de Cauchy :

Soit f une fonction de $[n_0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+$

on suppose que : f est continue, positif, décroissante.

on pose : $U_n = f(n)$. alors :

la serie $\sum U_n = \sum f(n)$ est cv

ssi $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{n_0}^{n} f(t).dt\right) = M < +\infty$

La formule de stirling :

on a lorsque : $n \to +\infty$

$$n! \underset{n,\infty}{\sim} n^n . e^{-n} . \sqrt{2\pi n}$$

Remarque importante :

① Les critères qu'on a vu pour les séries à terme positif, restent vrais même pour les series à terme à partir de certain range n

c.à.d : on peut les appliquer dans le cas où :

$U_n \geq 0 , \forall n \geq n_0$ au lieu $U_n \geq 0 , \forall n \geq 0$

② Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes negatif à partir de certain range n_0

c.à.d : $U_n < 0 \ , \forall n \geq n_0$

- on peut appliquer les critères sur les séries $\sum_{n\geq n_0} - U_n$

donc : déduire la nature de $\sum U_n$.

Scanné avec CamScanner

Les séries à termes quelconques :

La convergence absolue : (cv.a)

Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une serie à terme quelconques.

on dit que : $\sum_{n\geq 0} U_n$ converge absolument si la serie $\sum_{n\geq 0} |U_n|$ est cv.

Remarque :

on verra plus tard qu'une serie $\sum U_n$ peut être convergente sans être absolument converge.

Théorème :

Si $\sum U_n$ converge absolument alors elle est converge.

c.à.d : $\sum |U_n|$ cv $\Longrightarrow$ $\sum U_n$ cv .

Remarque :

L'inverse n'est pas vrai en générale.

c.à.d : Si $\sum U_n$ cv n'implique pas que : $\sum U_n$ converge absolument.

Remarque :

Si $\sum U_n$ cv mais elle ne cv pas absolument alors : on dit que : $\sum U_n$ est semi-convergente.

Remarque :

Comme la convergence absolue implique la convergence alors :

- On peut si c'est possible, pour étudier la convergence d'une série $\sum_{n\geq 0} U_n$, passer à étudier sa convergence absolue.
- Et si on arrive à montrer que : $\sum |U_n|$ cv c.à.d : $\sum U_n$ cv
- Mais si on arrive à montrer que : $\sum U_n$ ne converge pas absolument (ie $\sum |U_n|$ div) on ne peut rien dire de la nature de $\sum U_n$

Donc : il faut cherche d'autre méthode.

Produit de Cauchy :

Soit $\sum U_n$, $\sum V_n$ deux séries numériques, on appelle : produit de Cauchy de deux séries, la série $\sum_{n\geq 0} W_n$

tq : $W_n = U_0 . V_n + U_1 . V_{n-1} + \dots + U_n . V_0 = \sum_{K=0}^{n} U_K . V_{n-K}$

si : les deux séries $\sum_{n\geq 0} U_n$, $\sum_{n\geq 0} V_n$ sont : absolument converge

alors : la série $\sum_{n\geq 0} W_n$ est : absolument converge.

et on a : $$\sum_{n=0}^{\infty} W_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n\right) . \left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n\right)$$, c.à.d : $S = S_1 . S_2$

Les séries Alternées :

مرة موجب مرة سالب (8)

Déf :
Soit $\sum_{n\geq 0} U_n$ une série numérique réelle.
on dit qu'elle : Altèrnées , Si :

① $U_n = (-1)^n . a_n$ avec : $a_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$.
ou ② $U_n = (-1)^{n+1} . a_n$ avec : $a_n \geq 0$, $\forall n \geq 0$.
ou ③ $U_n . U_{n+1} < 0$, $\forall n \geq 0$.

Remarque : $\cos(n\pi) = (-1)^n$ رمز التناوب : $(-1)^n$

Critère de Leibniz :

Soit $\sum (-1)^n . a_n$ une série altèrnée.

→ Si • $a_n > 0$ • $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ • $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante (condition nécessaire)

alors : $\sum (-1)^n . a_n$ est convergente.

→ Si on pose : $S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . a_n$. alors :

① S est du signe de a_0.

② Le Reste d'ordre "n" : $R_n = \sum_{K=n+1}^{+\infty} (-1)^n . a_n$
est du signe : $(-1)^{n+1} . a_{n+1}$.

③ $|R_n| = \left|\sum_{K=n+1}^{+\infty} (-1)^K . a_K\right| \leq |(-1)^{n+1} . a_{n+1}|$.
(majoration par le 1^{er} terme)

④ $|S| = \left|\sum_{K=0}^{+\infty} (-1)^K . a_K\right| \leq a_0$.

Remarque :
La regle de Leibniz peut prendre la forme suivante :
Soit $\sum U_n$ une série alternée,
Si • la suite $|U_n|$ décroissante • $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$
alors : $\sum U_n$ est cv.

Critère d'Abel :

Soit $\sum U_n$ une série numérique dont le terme générale : $U_n = a_n . b_n$. on suppose que :

① • $\forall n \geq 0$, $a_n \geq 0$ • $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ • $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

② $|b_0 + b_1 + \cdots + b_n| \leq ct$ (ne dépent pas de n)

alors : $\sum U_n$ est cv , et on a :

$$|R_n| = \left|\sum_{K=n+1}^{\infty} a_K . b_K\right| \leq 2.ct.a_n$$

Remarque :
• on utilise souvent cette regle pour les séries de la forme : $\sum \frac{\sin(\beta n)}{n^\alpha}$, $\sum \frac{\cos(\beta n)}{n^\alpha}$ $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $b_n = \cos(\beta_n)$

• Cette regle est plus généralisé que celui des séries alternées (Leibnize).

نستعمل غالبا
$$\cos(n) = \frac{e^{in} + e^{-in}}{2} , \quad \sin(n) = \frac{e^{in} - e^{in}}{2}$$

Critère d'équivalence pour les séries à terme qlq :

▸ pour appliquer le critère d'equivalence, il faut que le terme général de la série soit positif .

▸ mais en effet on peut utiliser ce critère même dans le cas des séries à terme qlq .

▸ just il faut qu'on arrète pour le dévelopement limité sauf si on arrive à un terme dans la série converge absolument ou le signe de l'alternence dispart (رمز التناوب $(-1)^n$).

② Les suites de fonctions. متتالية توابع

Définition:

Soit E un ensemble de $\mathbb{R}$ (ie: $E \subseteq \mathbb{R}$)

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions définies de E dans $\mathbb{R}$.

ie: $\mathcal{F} = \{ f \,,\, f : E \longrightarrow \mathbb{R} \}$.

on appelle : suite de fonction, toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{F}$.

ie: $(f_n)_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{F}$

$$n \longmapsto f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f_n(x).$$

f_n : est appellée : terme général de la suite de fonction $(f_n)_n$.

Remarque:

Les termes d'une suite de fonction sont des fonctions.

La Convergence Simple (CV.S):

- on dit que: la suite de fonction $(f_n)_n$ CV en "$x_0 \in \mathbb{R}$"

si: la suite numérique: $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est CV

ie: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$ (par notation, c'est ℓ)

- on dit que: la suite de fonction $(f_n)_n$ CV.S "converge simplement" sur D.

Si elle est CV.S en toute point $x_0 \in D$.

Et si l'on pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$, on dit que :

la suite de fonction CV.S sur D vers la fonction f.

on dit que: "f" est la limite simple de la suite de fonction $(f_n)_n$ sur D.

D : est appellée : l'ensemble des converges simple de la suite de fonction $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque ①:

$(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonction

mais $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique.

x_0 est (ثابت).

Remarque ②:

pour étudier la CV.S de $f_n(x)$ sur $\mathbb{R}$

on fixe x dans $\mathbb{R}$ et on cherche la $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = ?$

(n : هو المتغير ، x : يلعب دور ثابت)

La convergence Uniforme : (CV.U) :

- on dit qu'une suite de fonction $(f_n)_n$ CV.U "converge uniformément" sur D

Si :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in D} \left| f_n(x) - f(x) \right| \right) = 0$$

c'est $\lim f_n(x)$ "ℓ".

Remarque :

pour Etudier la cv.U de $(f_n)_n$ sur $\mathbb{R}$

- on fixe x
- on calcule la $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ } c'est la cv.s

- on calcule : $\sup\left(f_n(x) - f(x)\right) = \sup\left(g_n(x)\right)$
  - pour trouver $\sup(g_n(x))$:
    → on etudier la variation de $g_n(x)$ (دراسة تغيرات)
    - Dérivé • signe de g_n' • table de variation
- on calcule : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in D}\left(f_n(x) - f(x)\right)\right) = ?$

$\begin{cases} \text{• Si } = 0 \text{ alors } f_n \text{ cv.U vers } 0 \\ \text{• Si } \neq 0 \text{ alors } f_n \text{ ne cv pas uniformément vers } 0. \end{cases}$

Remarque :

pour montrer qu'une convegence n'est pas uniforme vers "f" sur D, on peut si est possible prendre une suit $(x_n) \in D$, $\forall n \geq n_0$ tq : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f_n(x_n) - f(x_n)\right) \neq 0$

Théorème de passage à la limite :

Théorème ① : Continuité :

Soit (f_n) une suite de fonction continue sur $D \subseteq \mathbb{R}$ qui cv.U vers une fonction f.

alors : f est continue sur D.

Remarque : ($\neq$ théorème)

Si (f_n) cvs vers la fonction f sur D,
et f n'est pas continue sur D.
alors cette cv n'est pas uniforme.

Théorème ② : Intégration :

Soit (f_n) une suite de fonction continue $D = [a, b]$ (fermé et borné) et cv.U vers f.

alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,.dx\right) = \int_a^b \overbrace{\lim_{n\to+\infty}\left(f_n(x)\right)}^{l = f(x).} dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(نهاية التكامل هي تكامل النهاية).

Théorème ③ : Dérivation :

(Dérivation terme à terme d'une suite de fonction)

Soit (f_n) une suite de fonction de classe C^1 sur D
(càd : f est continue, dérivable. f' est continue)

on suppose que :

1. (f_n) CVS vers f sur D. $\quad f_n \xrightarrow{cv.s} f$
2. la suite de fonction $(f_n'(x))_n$ CV.U vers g sur D. $\quad f_n' \xrightarrow{cv.U} g$

Alors,
f est de classe C^1 sur D et on a :

$f'(x) = g(x)$, $\forall x \in D$ càd $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(x)$

Les séries de fonctions.

Definition:

Soit (f_n) une suite de fonction definie sur $D \subseteq \mathbb{R}$.
on appelle : série de fonction et on note : $\sum_{n\geq 0} f_n$
le couple : $\left((f_n)_n ; (S_n)_n \right)$

$(S_n)_n$: la suite des sommes partielles de la série.

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

Remarque:

$(f_n)_n$: est appellé le terme général de la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$

Si : on fixe "x" pour la série de fonction $\sum f_n$ on obtient une série numérique.

La convergence simple : (CV.S):

* on dit que : la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ CV.S en un point "$x_0 \in D$" (fixé)
Si : la série numérique : $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ est CV.

* on dit que : la série de fonction $\sum_{n\geq 0} f_n$ CV.S sur "D". Si elle est CV en $\forall x_0 \in D$

"D" : c'est le domaine de cv.s de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$

Remarque :

Si : la série de fonction $\sum f_n$ cv sur D
ie : Sa suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n\geq 0}$ est cv en toute point sur "D" vers $S(x)$.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(x) = S(x)$$

c'est la limite (somme)

La convergence absolue : (CV.A)

* on dit que : la série de fonction $\sum f_n$ CV.A en "$x_0 \in D$"
si : la série numérique, $\sum |f_n(x_0)|$ est cv.

La convergence uniforme : (CV.U) :

* on dit que : la série de fonction $\sum f_n$ CV.U sur "D"
Si : sa suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ CV.U sur "D"
où : $S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_n(x)$.

Autrement dit :

$$\sum f_n \text{ CV.U sur } D \iff \lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{x\in D} \left| S_n(x) - S(x) \right| \right) = 0$$

avec : $S(x)$: est la somme de la série de fonction $\sum f_n$ sur sont domaine de cv.s : "D".

La convergence normale : (CV.N)

* on dit que : la série de fonction $\sum f_n$ CV.N sur "D"

Si : la série numérique : $\sum\limits_{x\in D} \sup |f_n(x)|$ est CV.

Résumé :

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{CV. Normale} & & \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ \text{CV. Absolue} & & \downarrow & & \text{CV. Uniforme} \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & & \text{CV. Simple.} & & \end{array}$$

Propriété des séries de fonction CV.U :

Théorème ① : Continuité :

Si : la série de fonction $\sum f_n$ CV.U sur toute fermé et borné $[a,b]$ de "D".

et les fonction (f_n) sont continue sur "D"

alors : Sa somme $S(x)$ est continue sur "D".

Théorème ② : Intégration terme à terme :

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction continue sur $[a,b]$

Si : la série de fonction $\sum f_n$ CV.U sur $[a,b]$

alors :

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$$

Théorème ③ :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonction dérivable sur D de $\mathbb{R}$.

- Si : la série de fonction $\sum f_n$ est CV.S sur D
- Si : la série de fonction $\sum f'_n$ est CV.U sur toute fermé et borné $[a,b]$ de D.

Alors :

$$(S(x))' = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

Les séries Entières :

Def :

Une Série Entière est une Série de fonction de la variable réel x ou complexe z dont le terme général :

$f_n(x) = a_n x^n$ ou $f_n(z) = a_n \cdot z^n$, $a_n \in \mathbb{R}$.

- La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appellé : suite de coeffitient.

Domain de convergence :

on appelle : Domain de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ l'ensemble où la série cv.

Rayon de convergence :

Soit $\sum a_n \cdot x^n$ une série entière.

on appelle : rayon de convergence de la série entière, le nombre $R \in \mathbb{R}^+$ tq :

$$R = \sup\{ r \in \mathbb{R} ,\ \sum a_n r^n \ \text{cv} \}$$

Disque de Convergence :

Soit $\sum a_n \cdot x^n$ une serie entière de rayon de convergence R. on nomme : disque de convergence et on note : $D(0,R)$ l'ensemble :

$$D(0,R) = \{ x \in \mathbb{R} ,\ d(0,x) < R \}.$$

Methode de détermination de rayon de cv :

③

Soit $\sum a_n x^n$ une serie entière.

1/ Regle d'Alembert :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \right) = \ell$ alors : $R = \ell$.

2/ Regle de cauchy :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \right) = \ell$ alors : $R = \ell$.

3/ Regle de Hadmard :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sup \sqrt[n]{|a_n|} \right) = \ell$ alors : $R = \dfrac{1}{\ell}$.

Théorème :

Soit $\sum a_n \cdot x^n$ une série entière de Rayon "R"

alors : la série $\sum a_n \cdot x^n$ cv. normalement et uniformément sur toute disque contenue dans le disque de convergence. alors :

① on remarque que la somme d'une série entière est continue sur le disque $D(0,R')$ avec : $R' < R$ sur $]-R,R[$

② integration : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| < \mathbb{R}$.

$$\int^x \left(\sum a_n t^n\right) dt = \sum \left(\int_0^x a_n t^n \, dt \right) = \sum \frac{a^n}{n+1} x^{n+1}$$

Séries de Référence :

Riemann :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{c}{n^\alpha}$$

- cv : $\alpha > 1$
- div : $\alpha \leq 1$

Geométrique :

$$\sum_{n\geq 0} c.K^n$$

- cv : $-1 < K < 1$
- div : $K > 1$

Bertrand

$$\sum \frac{1}{n^\alpha . \log^\beta(n)}$$

- CV : $\alpha \geq 1 , \beta > 1$
- Div : $\alpha \leq 1 , \beta \leq 1$

Téléscopique :

$$\sum (U_n - U_{n+k})$$

cv

$\lim_{n\to+\infty} S_n = S \neq \infty$

Série à terme positive : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$:

- $\sum U_n$ cv $\Longleftrightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ majorées. ($\lim_{n\to+\infty} S_n = cst$).
- $\sum U_n$ div $\Longleftrightarrow$ (S_n) n'est pas majoré ($\lim_{n\to+\infty} S_n = \infty$).

Les critères :

C. de Comparaison :

$0 \leq U_n \leq V_n$

$\sum U_n$ div $\Rightarrow \sum V_n$ div

$\sum V_n$ cv $\Rightarrow \sum U_n$ cv

C. d'equivalence :

si $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{V_n} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$

alors : $U_n \overset{\infty}{\sim} V_n$

$\sum U_n$ div $\Rightarrow \sum V_n$ div

$\sum V_n$ cv $\Rightarrow \sum U_n$ cv

C. comparaison logarithmique :

$\forall n \geq n_0 : \frac{V_{n+1}}{V_n} \leq \frac{U_{n+1}}{U_n}$

$\sum U_n$ cv $\Rightarrow \sum V_n$ cv

$\sum V_n$ div $\Rightarrow \sum U_n$ div

C. Riemann

$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha . U_n = \ell$

$\ell = 0 \Rightarrow \sum U_n$ cv pour : $\alpha > 1$

$\ell = \infty \Rightarrow \sum U_n$ div pour : $\alpha \leq 1$

C. Cauchy

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = \ell$

$\ell \in [0,1[\Rightarrow \sum U_n$ cv

$\ell > 1 \Rightarrow \sum U_n$ div

$\ell = 1$, on ne peut rien dir.

on utilise :

C. logarithmique :

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\log\left(\frac{1}{U_n}\right)}{\log(n)} \right) = \ell$

$\ell \in [0,1[\Rightarrow \sum U_n$ div

$\ell > 1 \Rightarrow \sum U_n$ cv

$\ell = 1$, on ne peut rien dire

C. Alembert

$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right) = \ell$

$\ell \in [0,1[\Rightarrow \sum U_n$ cv

$\ell > 1 \Rightarrow \sum U_n$ div

$\ell = 1$, on ne peut rien dire

on utilise :

C. Raabe-Duhmel :

$\lim \left[n \left(\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 \right) \right] = -\alpha$

$\alpha > 1 \Rightarrow \sum U_n$ cv

$\alpha < 1 \Rightarrow \sum U_n$ div

$\alpha = 1$, on ne peut rien dire.

C. Integrale de Cauchy :

$U_n = f(n) \Rightarrow \sum U_n = \sum f(n)$ cv

ssi : $\lim_{n\to+\infty} \left(\int_{n_0}^{n} f(t)\,dt \right) = M < +\infty$

Formule de stirling :

lorsque $n \longrightarrow +\infty$

$$n! \overset{\infty}{\sim} n^n . e^{-n} . \sqrt{2\pi . n}$$