

# La droite réelle achevée

H. Benhassine

Octobre 2021



# Contents

<b>1</b>	<b>La droite réelle achevée</b>	<b>1</b>
1.1	L'ensemble des nombres réels . . . . .	1
1.1.1	Quelques propriétés . . . . .	1
1.1.2	Les intervalles . . . . .	1
1.1.3	La valeur absolue . . . . .	2
1.2	Les ensembles bornés - La borne supérieure et inférieure . . . . .	3
1.2.1	Les ensembles bornés . . . . .	3
1.2.2	La borne supérieure - La borne inférieure . . . . .	3
1.2.3	Le maximum et le minimum d'un ensemble . . . . .	6
1.3	Axiome d'Archimède dans $\mathbb{R}$ - Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ . . . . .	7
1.4	La droite réelle achevée . . . . .	8



# Chapter 1

## La droite réelle achevée

### 1.1 L'ensemble des nombres réels

**Définition 1.1.1** *L'ensemble des nombres réels, noté  $\mathbb{R}$ , est l'extension de l'ensemble des nombres rationnels noté  $\mathbb{Q}$ . C'est un ensemble sur lequel sont définis les deux lois internes (somme et produit):*

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

L'ensemble  $\mathbb{R}$  muni de ces opérations et de la relation d'ordre  $\leq$  est un corps commutatif ordonné ( $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  est un anneau et  $(\mathbb{R}, \cdot)$  est un groupe commutatif).

#### 1.1.1 Quelques propriétés

Dûe à la relation d'ordre définie sur le corps des réels  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ , on a les propriétés suivantes:

$\forall x, y, x_1, y_1, z \in \mathbb{R}$ :

- $x \leq y$  et  $x_1 \leq y_1 \Rightarrow x + x_1 \leq y + y_1$ .
- $x + z \leq y + z \Leftrightarrow x \leq y$ .
- $0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < x \leq y \Leftrightarrow 0 < x^n \leq y^n$ .

#### 1.1.2 Les intervalles

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , tels que:  $a < b$ . On définit alors les intervalles:

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}, \\ ]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}, \\ [a, +\infty[ &= \{x \in \mathbb{R} / a \leq x\}, \end{aligned}$$

que l'on nomme respectivement intervalle fermé, semi-ouvert et fermé.

On appelle la valeur  $b - a$  dans le cas d'un intervalle fermé la longueur de l'intervalle.

### 1.1.3 La valeur absolue

**Définition 1.1.2** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . On appelle la valeur absolue de  $x$ , le nombre réel positif que l'on note  $|x|$  défini par:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases} .$$

C'est à dire que l'on peut considérer  $|\cdot|$  comme étant une application définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}_+$ . Et pour tout couple  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a les propriétés suivantes:

1.  $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .
2.  $|x| = |-x|$ .
3. Si  $a > 0$  :  $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ .
4.  $|x + y| \leq |x| + |y|$  (l'inégalité triangulaire).
5.  $|xy| \leq |x| |y|$ .
6.  $||x| - |y|| \leq |x + y|$ .
7.  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ .

**Démonstration.** On se contentera de démontrer l'inégalité triangulaire. On laissera le soin au lecteur de vérifier les autres propriétés.

D'après la définition de la valeur absolue, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a:

$$\begin{aligned} -|x| &\leq x \leq |x|, \\ -|y| &\leq y \leq |y|. \end{aligned}$$

En additionnant les deux inégalités, on trouve:

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

D'après la troisième propriété, il découle que:

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

■

## 1.2 Les ensembles bornés - La borne supérieure et inférieure

### 1.2.1 Les ensembles bornés

**Définition 1.2.1** *Considérons l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  munit de la relation d'ordre usuel  $\geq$ . Et soit  $A$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$ . On dit que:*

- $A$  est majoré, si et seulement s'il existe  $M \in \mathbb{R} : \forall x \in A : x \leq M$ .
- $A$  est minoré, si et seulement s'il existe  $m \in \mathbb{R} : \forall x \in A : m \leq x$ .
- $A$  est borné, si et seulement s'il existe  $M, m \in \mathbb{R} : \forall x \in A : m \leq x \leq M$ .

*On appelle alors  $M$  et  $m$ , respectivement, majorant et minorant de  $A$ .*

#### Exemple 1.2.2

- L'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  est minoré. Il possède un infinité de minorants (prendre par exemple :  $M = -\sqrt{2}$  ou bien  $M = 0$ ).
- L'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  n'est pas majoré. Et donc on peut dire que l'ensemble  $\mathbb{N}$  n'est pas borné.
- L'intervalle  $[2, 5[$  est un ensemble borné (prendre par exemple:  $M = 5$  et  $m = 2$ ).
- L'ensemble  $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 < 1\}$  est un ensemble borné (prendre par exemple:  $M = 1$  et  $m = -1$ ).

**Remarque 1.2.3** *Si un ensemble quelconque possède un majorant (respectivement un minorant) cet élément n'est pas unique. On parle généralement de l'ensemble des majorants (respectivement l'ensemble des minorants). Par exemple, pour l'intervalle  $[2, 5[$ , tout nombre réel  $x \geq 5$  est un majorant de cet intervalle. De même, tout nombre réel  $x \leq 2$  est un minorant de cet intervalle.*

### 1.2.2 La borne supérieure - La borne inférieure

#### Définition 1.2.4

- Soit  $A$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$  majoré. On définit alors la borne supérieure de  $A$ , que l'on notera:  $\sup A$ , comme étant **le plus petit des majorants** de  $A$ . Si l'ensemble  $A$  n'est pas majoré,  $\sup A$  n'existe pas et l'on écrira:  $\sup A = +\infty$ .

- Soit  $A$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$  minoré. On définit alors la borne inférieure de  $A$ , que l'on notera:  $\inf A$ , comme étant **le plus grand des minorants** de  $A$ . Si l'ensemble  $A$  n'est pas minoré,  $\inf A$  n'existe pas et l'on écrira:  $\inf A = -\infty$ .

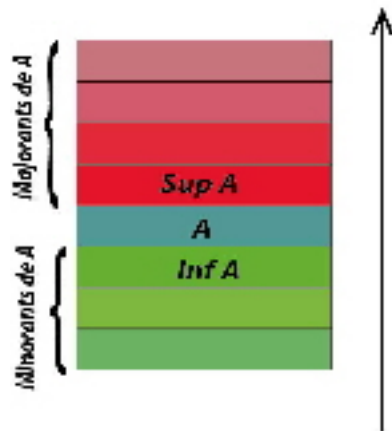


Figure 1.1: Illustration de  $\sup A$  et  $\inf A$ .

**Approche concrète imagée:** Imaginez que vous êtes locataire d'un appartement  $A$ . Les voisins du dessus représentent pour vous les *majorants* et les voisins du dessous représenteront les *minorants*. Il n'y a qu'un voisin du dessus qui est collé à votre appartement c'est  $\sup A$ . Il est unique et c'est le plus petit (du point de vue numéro d'étages) des voisins du dessus (*les majorants*). Et si par malheur il s'amuserait à percer son plancher ( $\sup A - \varepsilon$ ) il se retrouverait chez vous. De même, il n'y a qu'un voisin du dessous qui soit collé à votre appartement c'est  $\inf A$ . Il est unique et c'est le plus grand (du point de vue numéro d'étages) des voisins du dessous (*les minorants*). Et si par malheur il s'amuserait à percer son plafond ( $\inf A + \varepsilon$ ) il se retrouverait chez vous.

**Exemple 1.2.5**

- Pour  $A = \mathbb{N}$ , on a  $\inf A = 0$ .
- Pour  $A = [2, 5[$ , on a  $\inf A = 2$  et  $\sup A = 5$ .

**Remarque 1.2.6**  $\sup A$  et  $\inf A$  s'ils existent, n'appartiennent pas forcément à  $A$ .

**Axiome 1.2.7** (de Bolzano) Tout sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$  et majoré (respectivement minoré) possède une borne supérieure (respectivement borne inférieure).

**Théorème 1.2.8** Soit  $A$  sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$ . Si  $\sup A$  (respectivement  $\inf A$ ) existe alors forcément il est unique.

**Démonstration.** On fera l'hypothèse qu'il existe deux bornes supérieures  $M$  et  $M'$  de l'ensemle  $A$ . D'après la définition de la borne supérieure (plus petits des majorants), on aura  $M \leq M'$  et  $M' \leq M$ , ce qui impliquera que:  $M = M'$ . ■

Dans le théorème suivant, on donnera la définition mathématique permettant de caractériser la borne supérieure et inférieure d'un ensemble borné.

**Théorème 1.2.9** (*Définition mathématique de  $\sup A$  et de  $\inf A$* )

• Soit  $A$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$  qui est majoré. Soit  $M$  un des majorants de  $A$ . On a alors l'équivalence suivante:

$$\sup A = M \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : x \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x. \end{cases} .$$

• Soit  $A$  un sous-ensemble non vide de  $\mathbb{R}$  qui est minoré. Soit  $m$  un des minorants de  $A$ . On a alors l'équivalence suivante:

$$\inf A = m \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in A : m \leq x, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < m + \varepsilon. \end{cases} .$$

**Démonstration.** On fera la démonstration pour la borne supérieure, celle de la borne inférieure se fera de manière similaire.

( $\Rightarrow$ ) Supposons que :  $\sup A = M$ .

Par définition,  $M$  est un majorant de  $A$  (c'est le plus petit) , donc:  $\forall x \in A : x \leq M$ .

En faisant l'hypothèse inverse au résultat escompté, c'est à dire:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A : M - \varepsilon \geq x.$$

Cela voudrait dire que  $M - \varepsilon$  est un majorant de l'ensemble  $A$  et comme  $M$  par définition est le plus petit des majorants, ceci implique que:

$$M < M - \varepsilon.$$

Ce qui est absurde et donc l'hypothèse faite est fautive, c'est à dire que l'on a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x.$$

( $\Leftarrow$ ) Supposons maintenant que:  $\begin{cases} \forall x \in A : x \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : M - \varepsilon < x. \end{cases} \quad (\star)$

De la première inégalité on déduit que  $M$  est un majorant de  $A$ . Nous reste à démontrer que c'est le plus petit des majorants.

Pour cela on fera l'hypothèse inverse, c'est à dire qu'il existe un majorant  $M' < M$  tel que:

$$\forall x \in A : x \leq M'.$$

On a:  $M' < M \Rightarrow M - M' > 0$ .

Posons:  $\varepsilon = M - M'$ . D'après  $(\star)$  on a :  $\exists x \in A : M - \varepsilon < x$ . Ceci implique que :

$$\exists x \in A : M' < x$$

Ce qui contredit le fait que  $M'$  est un majorant de  $A$ .

On en déduit donc que  $M'$  n'existe pas, c'est à dire que  $M$  est le plus petit des majorants:  $\sup A = M$ . ■

### 1.2.3 Le maximum et le minimum d'un ensemble

On a vu précédemment que la borne supérieure et inférieure d'un ensemble  $A$  ( $\sup A$  et  $\inf A$ ) s'ils existent n'appartiennent pas forcément à cet ensemble.

#### Définition 1.2.10 .

- Lorsque la borne supérieure d'un ensemble  $A$  est un élément de  $A$  (i.e:  $\sup A \in A$ ), on parle alors du maximum de l'ensemble  $A$ . On le notera:  $\max A$ .
- Lorsque la borne inférieure d'un ensemble  $A$  est un élément de  $A$  (i.e:  $\inf A \in A$ ), on parle alors du minimum de l'ensemble  $A$ . On le notera:  $\min A$ .

$$m \in A \text{ et } m = \inf A \Leftrightarrow m = \min A,$$

$$M \in A \text{ et } M = \sup A \Leftrightarrow M = \max A.$$

**Approche concrète imagée:** Considérons l'ensemble des notes d'un groupe d'étudiants d'une classe. Quand l'enseignant affirme que "la meilleur note de la classe ne dépasse pas 15/20" ou bien que "le meilleur d'entre vous a obtenu la note de 15/20", subsiste une grande différence. Dans la première affirmation la note de 15 est un majorant de l'ensemble des notes et le maximum des notes est  $\leq 15$ . Parcontre dans la deuxième affirmation, le maximum des notes = 15. C'est le fait d'appartenance à l'ensemble qui fait toute la différence.

#### Exemple 1.2.11

- Pour l'ensemble borné  $A = [2, 5[$  avec:  $\inf A = \min A = 2$  et  $\sup A = 5$ . L'ensemble  $A$  ne possède pas d'élément maximal ( $\max A$  n'existe pas).
- L'ensemble:  $A = \left\{ a_n = \frac{3}{2n+1} / n \in \mathbb{N} \right\}$  est un ensemble borné avec:

$$\sup A = \max A = 3 \text{ et } \inf A = 0$$

et  $\min A$  n'existe pas. En effet:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \frac{3}{2n+1} \leq 3 \text{ (c'est à dire que le nombre 3 est un majorant de l'ensemble } A).$$

Et comme :  $a_0 = 3 \in A$ , on a:  $a_0 = \max A = \sup A = 3$ .

$$\text{D'un autre côté: } \forall n \in \mathbb{N} : \frac{3}{2n+1} > 0 \text{ (c'est à dire que le nombre 0 est un minorant de l'ensemble } A).$$

Montrons que  $m = 0$  est le plus grand des minorants en usant de la définition mathématique de la borne inférieure:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a_n \in A : a_n < m + \varepsilon?$$

Cela revient à démontrer, pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'existence d'un entier naturel  $n \in \mathbb{N}$  tel que:  $\frac{3}{2n+1} < 0 + \varepsilon$ .

On a:

$$\begin{aligned} \frac{3}{2n+1} < \varepsilon &\Leftrightarrow \frac{3}{\varepsilon} < 2n+1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{3}{\varepsilon} - 1 \right) < n. \end{aligned}$$

Donc, il suffirait de choisir l'entier naturel  $n_0 = E\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\varepsilon} - 1\right)\right) + 1$  pour avoir:

$$a_{n_0} = \frac{3}{2n_0 + 1} < \varepsilon.$$

C'est à dire:  $\forall \varepsilon > 0, \exists a_{n_0} \in A : a_{n_0} < 0 + \varepsilon$ .

C'est la définition mathématique de  $\inf A = 0$ .

### 1.3 Axiome d'Archimède dans $\mathbb{R}$ - Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Commençons par rappeler l'axiome d'archimède dans l'ensemble des rationnels  $\mathbb{Q}$  dont l'énoncé est:

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N} : n > r.$$

(Pour tout nombre rationnel  $r$ , il existe toujours un entier naturel  $n$  plus grand que lui).

On peut généraliser cet axiome à l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$ .

#### Théorème 1.3.1

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x.$$

**Démonstration.** Faisons l'hypothèse inverse:  $\exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x_0$ .

C'est à dire que  $x_0$  est plus grand que tous les entiers naturels. Ce qui est faux car:  $x_0 < E(x_0) + 1$ .

Donc forcément:  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x$ . ■

#### Corollaire 1.3.2

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : nx > y.$$

**Démonstration.** Il suffit d'appliquer l'axiome d'archimède au nombre  $\frac{y}{x}$ . ■

#### Théorème 1.3.3 (de densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ )

Soient  $x$  et  $y$  deux réels quelconques tels que:  $x < y$ . Alors il existe  $r \in \mathbb{Q}$  tel que:

$$x < r < y.$$

**Approche concrète imagée:** Tellement la ville d'El Eulma est réputée pour le nombre fort élevé de cafétérias qui y existent on dit d'elle que c'est la ville où "entre chaque deux cafétérias il y en a une troisième". Cet exemple illustre parfaitement le phénomène de densité: des éléments très proches l'un de l'autre. Dans notre cas, entre deux réels  $x$  et  $y$  quelconques il existe toujours un rationnel  $r$  strictement compris entre les deux.

**Démonstration.** On distingue deux cas suivant les valeurs prises par  $x$  et  $y$ :

- 1er cas: Si  $x < 0 < y$ , il suffit de choisir  $r = 0$ .

- 2ème cas: Si  $x$  et  $y$  sont tous les deux positifs ou bien négatifs en même temps. Considérons par exemple que  $0 \leq x < y$  (les autres cas se ramenant toujours à cette configuration).

D'après le corollaire précédent,  $\exists q \in \mathbb{N}^*$ , tel que pour  $y - x \in \mathbb{R}_+^*$  et le nombre  $1 \in \mathbb{R}$  on ait:  $q(y - x) > 1$ .

C'est à dire:  $\exists q \in \mathbb{N}^* : y - x > \frac{1}{q}$ .

En posant,  $p = E(qy)$ , la partie entière du réel  $qy$ , on a par définition:

$$p \leq qy < p + 1. \quad (\star)$$

Alors on a forcément:  $x < \frac{p}{q}$ . En effet, si l'on avait l'inverse, c'est à dire:  $x \geq \frac{p}{q}$  et comme:  $y - x > \frac{1}{q}$  on aurait:

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{q} > x &\Rightarrow y - \frac{1}{q} > x \geq \frac{p}{q} \\ &\Rightarrow y \geq \frac{p}{q} + \frac{1}{q} \\ &\Rightarrow qy \geq p + 1, \end{aligned}$$

et cela contredirait  $(\star)$ . Donc, au final on a:

$$x < \frac{p}{q} \leq y.$$

Si  $y \neq \frac{p}{q}$ , le nombre rationnel recherché serait:  $r = \frac{p}{q}$  et la démonstration s'achèverait.

Si par contre  $y = \frac{p}{q}$ , le nombre rationnel recherché serait:  $r = \frac{p-1}{q}$ . car on aura:  $r < y$  (évident) et aussi:  $x < r$  car:

$$\begin{aligned} y - x > \frac{1}{q} &\Rightarrow \frac{p}{q} - x > \frac{1}{q} \\ &\Rightarrow x < \frac{p}{q} - \frac{1}{q} \\ &\Rightarrow x < \frac{p-1}{q} \\ &\Rightarrow x < r. \end{aligned}$$

■

## 1.4 La droite réelle achevée

**Définition 1.4.1** On appelle l'ensemble obtenu en ajoutant les deux éléments  $-\infty$ ,  $+\infty$  à l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$ , la droite réelle achevée, que l'on notera  $\overline{\mathbb{R}}$ :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Sur la droite réelle achevée, sont définies les opérations suivantes:

- $x + (+\infty) = +\infty, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- $x + (-\infty) = -\infty, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- $+\infty + (+\infty) = +\infty$ .
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$ .
- $x \cdot (+\infty) = +\infty, \forall x > 0$ .
- $x \cdot (+\infty) = -\infty, \forall x < 0$ .
- $-\infty \cdot (+\infty) = -\infty$ .
- $-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$ .

Enfin, notons que les opérations suivantes ne sont pas définies:

- $0 \cdot (\pm\infty)$ .
- $+\infty + (-\infty)$ .

**Remarque 1.4.2** *La différence entre l'ensemble des réels  $\mathbb{R}$  et la droite réelle achevée  $\overline{\mathbb{R}}$  réside dans le fait que:*

- $\max \overline{\mathbb{R}} = +\infty$  et  $\min \overline{\mathbb{R}} = -\infty$  alors que  $\max \mathbb{R}$  et  $\min \mathbb{R}$  n'existent pas.
- $(\overline{\mathbb{R}}, +)$  n'est pas un groupe algébrique, car l'opération  $+$  n'est pas définie pour tous les éléments de  $\overline{\mathbb{R}}$ .