Fonctions réelles d'une variable réelle : Limites et Continuité

H. Benhassine

Octobre 2021

Contents

Chapter 1

Généralités sur les fonctions

Définition 1.0.1 *On appelle fonction réelle, l'application f définie de l'intervalle D vers $\mathbb{R}$ qui associe à tout élément $x \in D$ l'image $f(x)$:*

$$f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

En ce qui nous concerne, on s'intéressera aux fonctions rélles d'une variable réelle, c'est à dire au cas où l'on a : $D \subseteq \mathbb{R}$.

On désignera par:

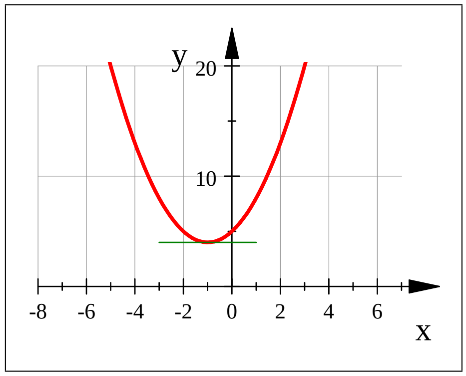
- *D_f l'ensemble de définition de la fonction f.*
- *$f(D_f)$ l'image directe de lensemble D_f:*

$$f(D_f) = \{y \in \mathbb{R}/ \ \ \exists x \in D_f : f(x) = y\}.$$

Exemple 1.0.2

- Soit la fonction réelle $f(x) = x^2 + 2x + 5$ définie sur $D = \mathbb{R}$. Alors l'image directe de f est $f(D) = [4, +\infty[$. En effet:

$$\begin{aligned} \forall y \in f(D), \exists x \in D : y = f(x) \quad & \Longleftrightarrow y = x^2 + 2x + 5 \\ & \Longleftrightarrow y - 4 = x^2 + 2x + 1 \\ & \Longleftrightarrow y - 4 = (x+1)^2 \\ & \Rightarrow y - 4 \geq 0 \\ & \Rightarrow y \geq 4. \end{aligned}$$



Graphe de $f(x) = x^2 + 2x + 5$.

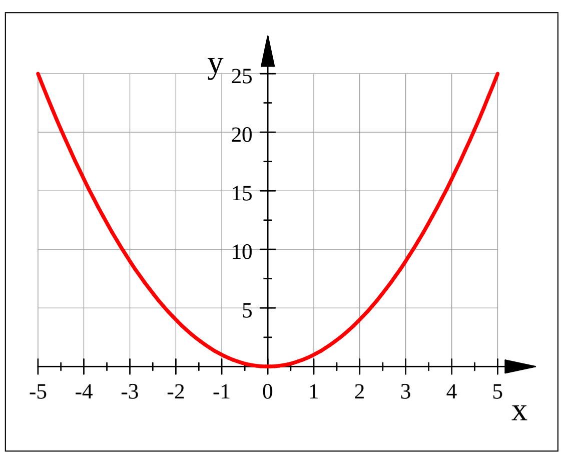
- Soit la fonction réelle $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ définie sur $D =]-\infty, -1] \cup [+1, +\infty[$. Alors l'image directe de f est $f(D) = [0, +\infty[$.

Définition 1.0.3 *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle D de $\mathbb{R}$. Alors on dit que:*

- *f est une fonction paire, si et seulement si, $\forall x \in D : f(-x) = f(x)$,*
- *f est une fonction impaire, si et seulement si, $\forall x \in D : f(-x) = -f(x)$.*

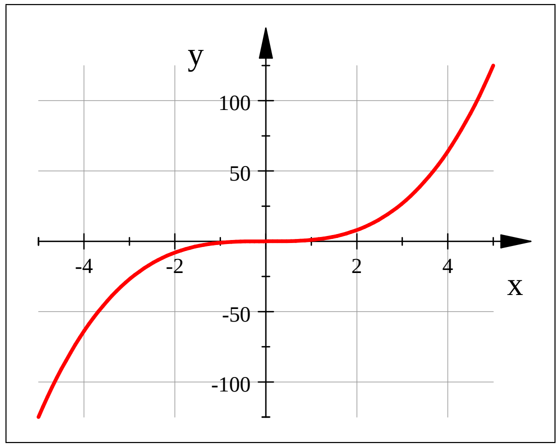
Exemple 1.0.4

- La fonction $f(x) = x^2$ est une fonction paire. Son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Tracé de la fonction paire $f(x) = x^2$.

- La fonction $f(x) = x^3$ est une fonction impaire. Son graphe est symétrique par rapport à l'origine.



Tracé de la fonction impaire $f(x) = x^3$.

Exercise 1.0.5

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $D \subset \mathbb{R}$ telle que:
$\forall x_1, x_2 \in D : f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.

1. Démontrer que: $f(0) = 0$.
2. Démontrer que f est une fonction impaire.
3. Démontrer que: $\forall x \in D, \forall n \in \mathbb{N} : f(nx) = nf(x)$.

Définition 1.0.6 *Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$. Alors on dit que est une fonction périodique, si et seulement s'il exite un réel $\alpha > 0$:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x + \alpha) = f(x).$$

On appellera le plus petit nombre α vérifiant la relation précédente, la période de la fonction f.

Remarque 1.0.7 *La fonction trigonométrique: $f(x) = \sin x$ est une fonction périodique de période 2π, car: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. On remarque aussi que: $\sin(x + 4\pi) = \sin x$, cependant 4π n'est pas la période de $\sin x$ (c'est pas le plus petit nombre).*

Définition 1.0.8 *Soit la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que:*

- *f est majorée, si et seulement si, l'ensemble $f(D)$ l'est :*

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : f(x) \leq M.$$

- *f est minorée, si et seulement si, l'ensemble $f(D)$ l'est :*

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in D : m \leq f(x).$$

- *f est bornée, si et seulement si, l'ensemble $f(D)$ l'est :*

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in D : m \leq f(x) \leq M.$$

On appellera, si elle existe, la borne supérièeure (respectivement la borne inférieure) de la fonction f sur l'intervalle D le nombre:

$$\underset{D}{Sup} f = Sup(f(D)), \text{ respectivement } (\underset{D}{Inf} f = Inf(f(D))).$$

Exemple 1.0.9

- La fonction $\begin{array}{cccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 4(x-1) \end{array}$ est une fonction bornée sur $[0,1]$ avec:

$$-4 \leq f(x) \leq 0, \forall x \in [0,1].$$

- La fonction $\sin x$ est bornée sur $\mathbb{R}$ car l'on a $\forall x \in \mathbb{R} : |\sin x| \leq 1$.

- la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $f(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}^*$, car l'on a: $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \pm\infty$.

Remarque 1.0.10 *Comme on a vu au chapitre 2, il est possible d'écrire:*

$$M = \underset{D}{Sup} f \iff \begin{cases} \forall x \in D : f(x) \leq M, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in D : f(x) > M - \varepsilon. \end{cases}$$

Définition 1.0.11 *(Opération algébrique sur les fonctions)*

Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. On définit alors la fonction:

- *$f + g$ de la façon suivante $\forall x \in D : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*
- *fg de la façon suivante $\forall x \in D : (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$.*
- *λf de la façon suivante $\forall x \in D : (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, où λ est un réel quelconque.*

On notera par $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions réelles définies sur l'intervalle D.

Définition 1.0.12 *Soit la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que:*

- *f est une fonction croissante, si et seulement si: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.*
- *f est une fonction décroissante, si et seulement si: $\forall x_1, x_2 \in D : x_1 \leq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.*

Définition 1.0.13 *Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. Alors la fonction composée $g \circ f$ est définie si et seulement si $f(D_f) \subset D_g$ et l'on a:*

$$x \in D_f \overset{f}{\longmapsto} f(x) \in f(D_f) \overset{g}{\longmapsto} g(f(x)) = g \circ f(x)$$

$$\forall x \in D_f : g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Exemple 1.0.14 *Soient les deux fonctions: $f(x) = x^2 + 2x + 5$ et $g(x) = \ln(x - 3)$. Donner le domaine de définition de chacune des deux fonctions et dite si la fonction $g \circ f$ composée est bien définie.*

Il est clair que: $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g =]3, +\infty[$.

Aussi, comme nous l'avons vu au début de ce chapitre: $f(D_f) = [4, +\infty[$ (pour rappel le graphe de f est une parabole d'équation: $y - 4 = (x + 1)^2$).

Comme $f(D_f) \subset D_g$, alors la fonction $g \circ f$ est définie et l'on a: $g \circ f(x) = \ln\left(\left(x^2 + 2x + 5\right) - 3\right)$.

1.1 Les limites

1.1.1 Limites finies quand x tend vers x_0

Définition 1.1.1 *Soit la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f tend vers la limite l quand x tend vers x_0, si et seulement si:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon] .$$

Remarque 1.1.2

1. L'écriture mathèmatique précédente signifie que lorsque x est au voisinage de x_0 et différe ce cette valeur ($x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[- \{x_0\}$) alors $f(x)$ est forcément dans le voisinage de l ($f(x) \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$).

2. L'écriture $x \to x_0$ signifie que x est au voisinage de x_0 sans qu'il prenne cette valeur.

3. Une fonction peut avoir une limite quand x tend vers x_0 sans qu'elle ne soit définie en ce point.

Exemple 1.1.3 *Pour la fonction f définie par $f(x) = 3x + 2$ on a: $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$. En effet, en remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$|f(x) - l| = |3x + 2 - 5| = 3 |x - 1| .$$

Il suffirait alors de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{3}$ pour avoir $\forall \varepsilon > 0 : |x - 1| < \eta = \frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow 3 |x - 1| < \varepsilon \Longrightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon$.

Théorème 1.1.4 *Si la fonction réelle f posséde une limite au point x_0, alors cette limite est forcément unique.*

Démonstration. La démonstration se fait de manière analogue à celle développée au chapitre précédant pour montrer l'unicité de la limite d'une suite réelle. ∎

Théorème 1.1.5 *Soit la fonction réelle $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors on a l'équivalence des deux propositions suivantes:*

•*i)* $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

•*ii) Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans D qui converge vers x_0 (avec $x_n \neq x_0$) on a forcément la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $f(x_0)$ dans $f(D)$.*

Démonstration. $i) \overset{?}{\Longrightarrow} ii)$

Supposons que l'on ai $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, ceci d'aprés la définition de la limite équivaut à dire que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 < |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon] .$$

Et soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans D qui converge vers x_0 (avec $x_n \neq x_0$), ceci revient à écrire d'aprés la définition de la convergence des suites que:

$$\forall \eta > 0, \exists N \in \mathbb{N} : [\forall n > N \Longrightarrow |x_n - x_0| < \eta]$$

En combinant les deux implications précédente il est évidant que l'on a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : [\forall n > N \Longrightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon]$$

C'est à dire que l'on a: $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = l$.

$ii) \stackrel{?}{\Longrightarrow} i)$

On suppose que l'on a $ii)$ et on veut démontrer $i)$. Pour cela, on supposera qu'on ai la proposition inverse de $i)$: $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq l$ et on verra qu'on arrivera à une contradiction. En effet, d'aprés la définition de la limite:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq l \Longleftrightarrow \exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in D : [0 < |x - x_0| < \eta \text{ et } |f(x) - l| \geq \varepsilon].$$

En prenant $\eta = \frac{1}{n+1} > 0$, pour différentes valeurs de $n \in \mathbb{N}$, d'aprés l'implication précédente, il existerai à chaque fois un élément que l'on notera $x_n \in D$ tel que:

$$0 < |x_n - x_0| < \eta = \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - l| \geq \varepsilon.$$

C'est à dire par passage à limite on a : $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$ mais par contre $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) \neq l$ (car: $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$). Ceci est en contradiction avec l'hypothèse $ii)$.

Donc la proposition inverse faite au départ est forcément fausse et l'on a alors: $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$. ■

Exemple 1.1.6 *On utilise généralement le théorème précédent pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite quand $x \to x_0$. Par exemple considérons la fonction: $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Cette fonction n'admet pas de limite au point $x_0 = 0$. En effet, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par:*

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi},$$

telle que: $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0 = x_0$, mais par contre la suite:

$$f(x_n) = f(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}) = \sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = (-1)^n$$

ne possède pas de limite quand $n \to +\infty$ (la porposition $ii)$ du thèorème précédent n'est pas vérifiée).

Définition 1.1.7 *Soit la fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.*

- *On dit que f admet une limite l à droite du point x_0, si et seulement si:*

$$\lim_{x \stackrel{>}{\to} x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 < x - x_0 < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

On dit que f admet une limite l à gauche du point x_0, si et seulement si:

$$\lim_{x \stackrel{<}{\to} x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [0 < x_0 - x < \eta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon].$$

Remarque 1.1.8 *A noter que: $0 < x - x_0 < \eta \Leftrightarrow x \in]x_0, x_0 + \eta[$ et $0 < x_0 - x < \eta \Leftrightarrow x \in]x_0 - \eta, x_0[$.*

Théorème 1.1.9 *On a l'équivalence suivante:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \stackrel{>}{\to} x_0} f(x) = l = \lim_{x \stackrel{<}{\to} x_0} f(x).$$

Exemple 1.1.10 *La fonction définie par:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}-\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)=\frac{\sqrt{x^2(x+1)^2}}{3(x+1)} \end{array},$$

n'admet pas de limite au point $x_0=-1$. En effet:

$$f(x)=\frac{|x(x+1)|}{3(x+1)} = \begin{cases} \frac{x(x+1)}{3(x+1)}, & x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[0,+\infty\right[\\ \frac{-x(x+1)}{3(x+1)}, & x\in\left]-1,0\right] \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{3}, & x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[0,+\infty\right[\\ -\frac{x}{3}, & x\in\left]-1,0\right] \end{cases}.$$

Et par suite: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)=\lim\limits_{x \overset{>}{\to} -1} -\frac{x}{3}=\frac{1}{3}\neq-\frac{1}{3}=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1}\frac{x}{3}=\lim\limits_{x \overset{<}{\to} -1} f(x)$.
La limite à gauche n'est pas égale à limite à droite, donc f n'admet pas de limite au point $x_0=-1$.

1.1.2 Les limites infinies quand x tend vers x_0

Définition 1.1.11 *Soit la fonction $f: D\longrightarrow\mathbb{R}$. On dit que f tend vers $+\infty$ (respectivement vers $-\infty$) quand x tend vers x_0, si et seulement si:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow \forall A>0,\exists\eta>0,\forall x\in D:\left[0<|x-x_0|<\eta\Longrightarrow f(x)>A\right],$$

respectivement:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Longleftrightarrow \forall A>0,\exists\eta>0,\forall x\in D:\left[0<|x-x_0|<\eta\Longrightarrow f(x)<-A\right].$$

Exemple 1.1.12 *En utilisant la définition de la limite, montrer que:* $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\ln x=-\infty$.

On a à démontrer que: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0}\ln x \overset{?}{=} -\infty \Longleftrightarrow \forall A>0,\exists?\eta>0,\forall x>0:\left[0<x<\eta\Longrightarrow \ln x<-A\right]$.
On a: $\ln x<-A\Leftrightarrow x<e^{-A}$, *d'où pour tout $A>0$, il suffit de prendre : $\eta=e^{-A}$ pour avoir l'implication:*

$$0<x<\eta\Longrightarrow \ln x<-A.$$

Remarque 1.1.13 *Des définions mathèmatiques de la limite précédantes et de celle introduite en début de chapitre, il est aisé de déduire l'écriture mathèmatique correspondant à* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ *et à* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=l$.

1.1.3 Opérations algébriques sur les limites et quelques propriètès

• Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble $D\subseteq\mathbb{R}$ telles que: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l'$.
Alors on a:

$\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=l+l'$, $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=ll'$, $\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f)(x)=\lambda l'$(pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$) et $\lim\limits_{x\to x_0}(\frac{f}{g})(x)=\frac{l}{l'}$ (si $l'\neq 0$).

• Si $f(x)\leq g(x),\forall x\in V_{x_0}$ (un voisinage du point x_0), alors forcément: $l\leq l'$.

• Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ et g est une fonction bornée au voisinage de x_0 alors forcément: $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=0$.

Exemple 1.1.14 *La limite* $\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x} = \cos\infty$ *n'est pas définie, par contre on a:* $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$*, car la fonction* $\cos\frac{1}{x}$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$ *(*$\left|\cos\frac{1}{x}\right| < 1, \forall x \in \mathbb{R}^*$*) et elle est multipliée par une fonction tendant vers zéro quand* $x \to 0$.

Remarque 1.1.15 *(Limite d'une fonction composée)*

Soient $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $g : D_g \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions réelles telles que:* $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *et* $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$. *Alors on n'a pas forcément:*

$$\lim_{x\to x_0} g\circ f(x) = l.$$

Pour que l'implication soit vraie il faudrait que g *soit continue au point* y_0.

Exemple 1.1.16 *Soient les deux fonctions:*

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g(y) = \begin{cases} 1, & si\ y = 0 \\ 0, & si\ y \neq 0 \end{cases} \text{ (fonction de Dirac).}$$

Il est claire que la focntion composée: $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(0) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Et donc: $\lim_{x\to 0} g\circ f(x) = 1$*, alors que* $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$ *(car comme on l'a vu au début de chapitre,* $y \to 0$ *signifie que* y *tends vers* 0 *sans prendre cette valeur).*

1.1.4 Cas d'indétermination

Lors du calcul des limites il arrive que l'on obtienne des cas où l'on est dans l'impossibilité de donner une valeur à notre calcul: ce sont les cas d'indétermination que l'on résumera en 5 catégories:

- 1) $-\infty + \infty$.
- 2) $\frac{0}{0}$.
- 3) $0 \times (\pm\infty)$.
- 4) $\frac{\pm\infty}{-\infty}$.
- 5) $1^{+\infty}$.

On utilisera alors dans ce cas pour contourner ces cas d'indétermination des limites communement connues combinées avec des artifices de caclul.

Exemple 1.1.17 *On laissera au lecteur le soin de montrer que:*

- $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{2}$.
- $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x} = 2$.
- $\lim_{x\to a} \frac{x^3 - a^3}{x-a} = 3a^2$.

1.2 Continuité

1.2.1 Fonctions continues en un point

Définition 1.2.1 *On dit que la a fonction réelle:* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *est :*

- *continue au point $x_0 \in D$, si et seulement si:* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$*. C'est à dire:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D : [0 \leq |x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon] .$$

- *continue à droite du point $x_0 \in D$, si et seulement si:* $\lim\limits_{x\overset{\geq}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$*. C'est à dire:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D : [0 \leq x - x_0 < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon] .$$

- *continue à gauche du point $x_0 \in D$, si et seulement si:* $\lim\limits_{x\overset{\leq}{\to} x_0} f(x) = f(x_0)$*. C'est à dire:*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in D : [0 \leq x_0 - x < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon] .$$

Remarque 1.2.2

1. Pour étudier la continuité d'une fonction f au point x_0 il est **impératif que cette fonction soit définie** en ce point.

2. Il est possible de donner une définition équivalente à la précédente de la continuité en usant des suites numériques (comme on a vu dans la section précédente):

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \forall\,(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D : \left[\lim_{x_n\to+\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{x_n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)\right].$$

3. f est continue au point $x_0 \Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche du point x_0.

Exemple 1.2.3

- Il n'est pas possible d'étudier la continuité au point $x_0 = 0$ de la fonction $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ car elle n'est pas définie en ce point (malgrés le fait que: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$).

- La fonction: $g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{R}^* \\ 1, & x = 0. \end{cases}$, est définie et continue au point $x_0 = 0$ (on dira de g, comme on le verra plus loin qu'elle est le prolongement par continuité de la fonction f au point $x_0 = 0$).

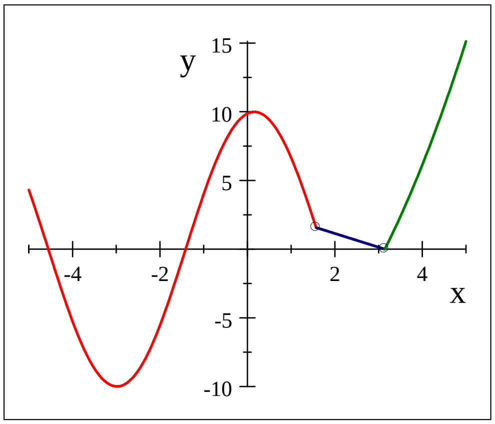
- La fonction: $h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{R}^* \\ 2, & x = 0. \end{cases}$, est définie mais n'est pas continue au point $x_0 = 0$.

Exercise 1.2.4 *Déterminer la valeur des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction :*

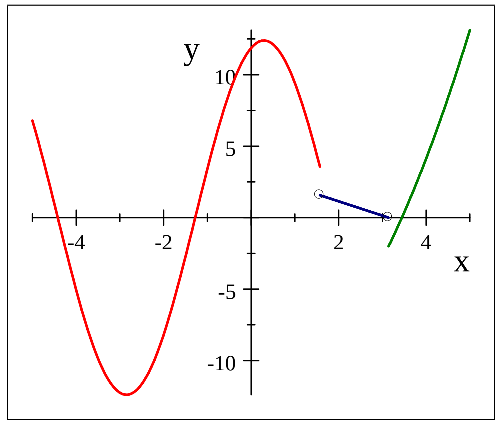
$$g(x) = \begin{cases} a\sin x + b\cos x, & x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \\ x^2 - b, & \pi > x \end{cases}$$

soit continue sur $\mathbb{R}$.

Solution 1.2.5 *Il est facile de vérifier, en étudiant la continuité à droite et à gauche des points* $\frac{\pi}{2}$ *et* π*, que l'on aura:* $a = \frac{\pi}{2}$ *et* $b = \pi^2$.



Graphe de f *pour* $a = \frac{\pi}{2}$ *et* $b = \pi^2$.



Discontinuite pour $a \neq \frac{\pi}{2}$ *et* $b \neq \pi^2$.

1.2.2 Fonctions continues sur un intervalle

Définition 1.2.6 *On dit que la fonction réelle* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue sur tout l'intervalle* D*, si est seulement si, elle est continue en tout point de cet intervalle. C'est à dire:*

$$\forall x_0 \in D, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D : [|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon] .$$

Exemple 1.2.7

- La fonctions $f(x) = 3x + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1]$.

Remarque 1.2.8 *On notera par la suite l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle* D *par:* $C(D)$.

1.2.3 Fonctions uniformément continues sur un intervalle

Définition 1.2.9 *On dit que la fonction réelle* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ *est continue uniformément sur l'intervalle* D*, si est seulement si, elle vérifie:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x_0 \in D, \forall x \in D : [|x - x_0| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon] .$$

Remarque 1.2.10

1. On parle de continuité uniforme toujours sur un intervalle.
2. Dans la continuité uniforme sur un intervalle la constante η dépend uniquement du choix de ε (on parle alors d'*approche globale* de la continuité), par contre dans la continuité simple sur un intervalle, η dépend du choix de x_0 et de ε (on parle alors d'*approche locale* de la continuité).

3. La continuité uniforme sur un intervalle $\Rightarrow$ la continuité sur un intervalle.

Exemple 1.2.11 *Dans l'exemple précédent:*

- La fonction $f(x) = 3x + 2$ est continue uniformément sur $\mathbb{R}$. En effet:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \frac{\varepsilon}{3} > 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : \left[|x - x_0| < \eta = \frac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow |(3x + 2) - (3x_0 + 2)| < \varepsilon \right].$$

- Par contre la fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue sur $]0, 1]$ car:

$$\exists \varepsilon = 1, \forall \eta > 0, \exists x_0 = \frac{1}{n}(n \in \mathbb{N}^*), \exists x = \frac{1}{2n} :$$
$$|x - x_0| = \frac{1}{n} < \eta \quad \text{et} \quad |g(x) - g(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = n \geq 1.$$

(cette dernière écriture est la négation de la définition de la continuité uniforme sur un intervalle).

1.2.4 Opérations sur les fonctions continues

• Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage d'un point x_0 de telle sorte qu'elles soient continues en ce point, alors les fonctions:

$$f + g, fg, \lambda f \text{ (pour tout } \lambda \in \mathbb{R}) \text{ et } \frac{f}{g} (\text{si } g(x_0) \neq 0)$$

le sont aussi.

• Soient $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : f(D) \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles telles que: f est continue en $x_0 \in D$ et g est continue au point $f(x_0)$, alors forcément, la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0.

Exemple 1.2.12 *La fonction:* $\phi(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$, *car* ϕ *n'est autre que la composée des deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}^*$ $\frac{-1}{x^2}$ *et* e^x. *(Question: est-il possible de prolonger par continuité* ϕ *au point* 0*?)*

Nous arrivons maintenant à la partie la plus importante de ce chapitre, où l'on va énoncer quelques théorèmes important en analyse relatifs à toute fonction continue sur un intervalle.

1.2.5 Thèorèmes sur les fonctions continues sur un intervalle fermé

Théorème 1.2.13 *(de Heine)*

Toute fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ est uniformèment continue sur cet intervalle.

Exemple 1.2.14 *La fonction* $g(x) = \frac{1}{x}$ *définie sur l'intervalle* $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *est, d'aprés le thèorème de Heine, uniformément continue sur cet intervalle. Vérifions cela:*

$$\forall x, x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] : |g(x) - g(x_0)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{x x_0} \leq 4 |x - x_0|,$$

(car : $\frac{1}{2} \leq x$ *et* $\frac{1}{2} \leq x_0$*).*

Donc il suffirait pour tout $\varepsilon > 0$ de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{4}$ pour avoir:

$$\forall x, x_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] : |x - x_0| \leq \eta = \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

C'est à dire que $g(x) = \frac{1}{x}$ est uniformément continue sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(A noter, comme on l'a vu dans l'exemple précédent, que cette même fonction sur l''intervalle semi-ouvert $]0, 1]$ n'est pas uniformément continue).

Théorème 1.2.15 *Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors f est bornée sur cet intervalle. (C'est à dire: $\exists M > 0, \forall x \in [a, b] : |f(x)| < M$).*

Exemple 1.2.16

- La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ est continue sur l'intervalle fermé $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ donc elle est bornée sur cette intervalle avec: $1 \leq f(x) \leq 4$.
- La fonction $g(x) = \tan(x)$ est continue sur l'intervalle fermé $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, donc elle est bornée sur cette intervalle. A noter qu'elle ne l'est pas sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ malgrés qu'elle soit continue sur celui-ci.

Théorème 1.2.17 *Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$, alors f atteint ses bornes supérieure et inférieure:*

$$\exists x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) = \sup_{[a,b]} f \quad et \quad f(x_2) = \inf_{[a,b]} f.$$

Démonstration. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Cette fonction est bornée sur $[a, b]$. Notons sa borne supèrieure par M. Et faisons l'hypothèse (inverse) que f n'atteint pas sa borne supèrieure, c'est à dire que $\forall x \in [a, b] : f(x) < M$.

On définit ensuite la fonction: $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}, \forall x \in [a, b]$. Cette fonction est définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$ et donc d'aprés le thèorème précédent elle est bornée:

$$\exists c > 0, \forall x \in [a, b] : g(x) \leq c.$$

(c est strictement positif ,car la fonction g l'est par définition).

On a donc: $\forall x \in [a, b] : g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq c \Rightarrow f(x) \leq M - \frac{1}{c}$.

Ce qui équivaut à dire que $M - \frac{1}{c}$ est un majorant de f sur $[a, b]$ et contredit le fait que M soit le plus petit des majorants de f.

On conclut alors que f atteint sa borne supérieure: $\exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) = \sup_{[a,b]} f$.

(On démontrera de la même manière qu'il existe $x_2 \in [a, b] : f(x_2) = \inf_{[a,b]} f$). ■

Théorème 1.2.18 *(des valeurs intermédiaires)*

Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ telle que: $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes différents (i.e: $f(a)\ f(b) < 0$), alors:

$$\exists c \in]a, b[: f(c) = 0.$$

Exercise 1.2.19 *L'équation: $2x^3 - 5x + 2 = 0$ posséde t-elle une solution appartenant à $[0, 1]$?*

Solution 1.2.20 *La réponse est oui, car la fonction:* $f(x) = 2x^3 - 5x + 2$ *est continue sur* $[0, 1]$ *avec:*

$$-1 = f(1) < f(0) = 2,$$

et donc d'aprés le théorème des valeurs intermédiaires: $\exists c \in]0, 1[: f(c) = 0.$

C'est à dire: $\exists c \in]0, 1[$ *solution de l'équation:* $2x^3 - 5x + 2 = 0.$

Théorème 1.2.21 *(Deuxième théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit f *est une fonction continue sur un intervalle quelconque:* $D \subset \mathbb{R}$*. Et soient:* $x_1 < x_2$*, deux éléments de* D *tels que:* $f(x_1) \neq f(x_2)$*. Alors pour tout nombre* y *strictement compris entre* $f(x_1)$ *et* $f(x_2)$ *on a:*

$$\exists c \in]x_1, x_2[: f(c) = y.$$

Démonstration. Soit f est une fonction continue sur $D \subset \mathbb{R}$ avec: $f(x_1) < f(x_2)$ pour $x_1 < x_2$, deux éléments de D.

Et soit y tel que: $f(x_1) < y < f(x_2)$.

Il suffit d'appliquer alors le premier théorème des valeurs intermédiaires à la fonction: $g(x) = f(x) - y$ pour aboutir au résultat. ■

Exercise 1.2.22 *L'équation:* $x^2 = 7$ *posséde t-elle une solution appartenant à l'intervalle* $[1, 3]$?

Solution 1.2.23 *La réponse est oui, car la fonction:* $f(x) = x^2$ *est continue sur* $[1, 3]$ *avec:*

$$1 = f(1) < y = 7 < f(3) = 9,$$

et donc d'aprés le théorème précédent: $\exists c \in]1, 3[: f(c) = 7.$

C'est à dire: $\exists c \in]1, 3[: c^2 = 7.$

Exercise 1.2.24 *Démontrer que si une fonction* f *est continue sur* $[a, b]$ *telle que* f *ne s'annulle pas sur cet intervalle, alors* f *est de signe constant sur* $[a, b]$.

Solution 1.2.25 *Il suffit de supposer l'hypothèse inverse, c'est à dire:* $\exists x_1 , x_2 \in [a, b] : f(x_1) < 0 < f(x_2)$ *et d'arriver à une contradiction en applicant le thèorème des acroissements finis.*

Corollaire 1.2.26 *(relatif au thèorème des valeurs intermédiaires)*

1. L'image de tout intervalle $D \subset \mathbb{R}$ d'une fonction f continue sur D sera forcément un intervalle.
2. L'image de tout intervalle fermé $[a, b]$ par une fonction f continue sur $[a, b]$ sera forcément un intervalle fermé.

1.2.6 Prolongement par continuité

Définition 1.2.27 *On dit d'une fonction* f *définie sur un intervalle* $D - \{x_0\}$ *de* $\mathbb{R}$ *qu'elle admet un prolongement par continuité en au point* x_0 *si et seulement si:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

On définit alors le prolongement par continuité de f au point x_0, notée $\tilde{f}$ par:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & si\ x \in D - \{x_0\} \\ l, & si\ x = x_0 \end{cases}.$$

Remarque 1.2.28 *La fonction prolongée $\tilde{f}$ sera continue au point x_0 de par sa définition.*

Exemple 1.2.29 *La fonction $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ n'admet pas de prolongement par continuité au point $x_0 = 0$. En effet:*

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{\sin x}{|x|} = -1 \neq 1 = \lim_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\sin x}{|x|}.$$

C'est à dire que f n'admet pas de limite au point $x_0 = 0$.

1.2.7 Fonction inverse d'une fonction continue

Théorème 1.2.30 *Soit f une fonction réelle continue et strictement monotone sur un intervalle $D \subset \mathbb{R}$. Alors:*

- *la fonction f admet une fonction inverse f^{-1} définie de $f(D)$ vers D.*
- *la fonction inverse f^{-1} est continue sur $f(D)$.*
- *la fonction f^{-1} est strictement monotone sur $f(D)$ et posséde le même sens de variation que f.*

Démonstration. Pour la démonstration on orientera le lecteur vers l'ouvrage de K. Allab Ref [1] p173-175. ■

Exercise 1.2.31 *Soit la fonction définie sur $[a, b]$ par: $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Quelle condition doit vérifier les réels a et b pour que f admette une fonction inverse? Donner ensuite l'expression de cette fonction inverse.*

Solution 1.2.32 *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle est strictement croissante pour $x \leq \frac{3}{2}$ et strictement décroissante pour $x \geq \frac{3}{2}$ (car $f'(x) = 2x - 3$).*

D'aprés le thèorème précédent pour que f admette une fonction inverse il suffirait donc que l'on ai:

$$a < b \leq \frac{3}{2} \quad ou\ bien \quad \frac{3}{2} \leq a < b.$$

En utilisant l'équivalence: $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, la fonction inverse sera donnée alors par:

$$f^{-1}(y) = \frac{3}{2} \pm \sqrt{y - \frac{1}{4}}, \forall y \geq \frac{1}{4}.$$

1.2.8 Théorème du point fixe de Banach

Dans ce paragraphe nous allons aborder un des théorème important de l'analyse fonctionelle, à savoir le thèorème du point fixe. A cette fin, nous commencerons par introduire quelques définitions reltives à cette notion.

Définition 1.2.33 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle D quelconque de $\mathbb{R}$. On dit d'un point $\bar{x} \in D$ qu'il est un point fixe de f si l'on a:*

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

Définition 1.2.34 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle D quelconque de $\mathbb{R}$. On dit de f que c'est une fonction lipshitizienne sur D, s'il existe un réel $k \geq 0$ tel que:*

$$\forall x_1, x_2 \in D : |f(x_1) - f(x_2)| \leq k\,|x_1 - x_2|\,.$$

Définition 1.2.35 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un intervalle D quelconque de $\mathbb{R}$. On dit de f que c'est une contraction sur D, s'il existe un réel $k \in [0,1[$ tel que:*

$$\forall x_1, x_2 \in D : |f(x_1) - f(x_2)| \leq k\,|x_1 - x_2|\,.$$

Dans le théorème suivant on fera le lien entre la notion d'uniforme continuité et de fonction lipshitizienne.

Théorème 1.2.36 *Soit f une fonction lipshitizienne sur l'intervalle D, alors forcément f est uniformément continue sur D.*

Démonstration. En utilisant directement la définition d'une fonction uniformément continue sur un intervalle, on déduit le résultat escompté en prenant: $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$. ■

Théorème 1.2.37 *(du point fixe de Bannach)*

Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une contraction. Alors f admet un point fixe et ce point unique.

Démonstration. La démonstration repose sur la construction d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ définie par récurrence: $x_{n+1} = f(x_n)$, où l'on choisit x_0 un élément de $[a,b]$.

• Une telle suite vérifie l'inégalité: $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n\,|x_1 - x_0|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.(On utlise le fait que f soit une contraction et la définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

• On utilisant l'inégalité précédente, on a $\forall n, p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
|x_{n+p} - x_n| &= |x_{n+p} - x_{n+p-1} + x_{n+p-1} - x_{n+p-2} + x_{n+p-2} + \cdots - x_{n+1} + x_{n+1} - x_n| \\
&\leq |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\
&\leq \left(k^{n+p-1} + k^{n+p-2} + \cdots + k^{n+1} + k^n\right)|x_1 - x_0| \\
&\leq \left(k^{p-1} + k^{p-2} + \cdots + k + 1\right)k^n\,|x_1 - x_0| \\
&\leq \frac{1-k^p}{1-k}k^n\,|x_1 - x_0| \ \text{(somme d'une suite géométrique)} \\
&\leq \frac{1}{1-k}k^n\,|x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

• Cela démontre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est suite réelle de Cauchy, donc convergente. Notons par $\bar{x}$ la limite de cette suite: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$.

• Cette limite $\bar{x}$ est dans $[a,b]$ car $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$. En utilisant le fait que f sst continue (car f est une contraction, donc lipshitizienne, donc uniformément continue et donc continue), on a:

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \bar{x} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\bar{x}).$$

D'un autre côté: $x_{n+1} = f(x_n) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \Rightarrow \bar{x} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$.

Des deux dernières implications, on conclut que: $f(\bar{x}) = \bar{x}$. Ce qui veux dire que $\bar{x}$ est un point fixe de f. ■