

Chapitre n° 02

Le corps des Nombres complexes

1. Opérations algébriques sur les nombres complexes.
2. Module d'un nombre complexe z .
3. Représentation géométrique d'un nombre complexe.
4. forme trigonométrique d'un nombre complexe.
5. formule d'Euler
6. forme exponentielle d'un nombre complexe.
7. Racines n -ième d'un nombre complexe.

Chapitre 2:

II. Le corps des nombres complexes:

II.1 Définition: un nombre complexe z est un couple (x, y)

$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que l'on notera $z = x + iy$

l'écriture algébrique de z .

* Le premier terme constitue la partie réelle $\operatorname{Re}(z) = x$.
Le second est sa partie imaginaire $\operatorname{Im}(z) = y$.

donc: $z = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)$.

On note $\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}\}$.

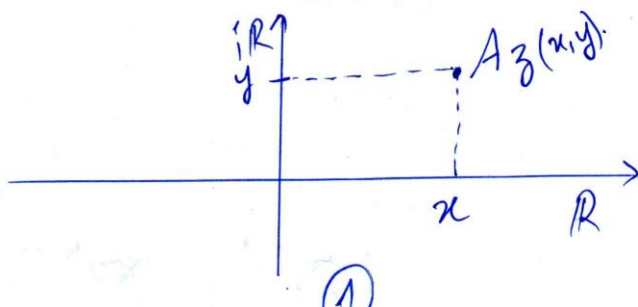
l'ensemble des nombres complexes.

Remarque 1: Soit $z \in \mathbb{C}$.

① Si $y = 0 \Rightarrow z = x$ est réel.

② Si $x = 0 \Rightarrow z = iy$ est imaginaire pure.

Remarque 2: L'ensemble $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$
 $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

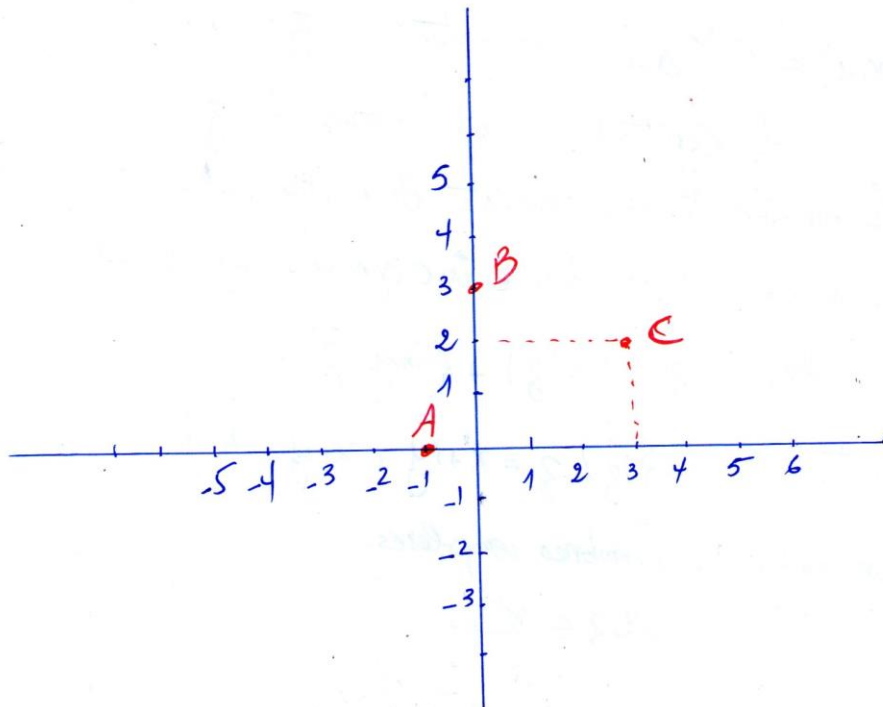


Exemples

$$z_1 = -1$$
$$A_{z_1}(-1, 0)$$

$$z_2 = 3i$$
$$B_{z_2}(0, 3)$$

$$z_3 = 3 + 2i$$
$$C_{z_3}(3, 2)$$



Présentation dans le plan.

Soit $z = x + iy$ on peut lui associer le point $P_z(x, y)$ du plan.

II. 2 Propriétés:

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

① L'addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

② La multiplication: $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = z_1 z_2$

③ La multiplication par un scalaire:
 $\lambda \in \mathbb{R} : \lambda z = \lambda x + i \lambda y$.

④ L'associativité:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3).$$

⑤ La distributivité:

$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3.$$

⑥ L'opposé: L'opposé de z / $z = x + iy$ est

$$z' = -z \quad z' = -z = -x - iy.$$

⑦ L'inverse: L'inverse de z avec $z \neq 0$ est $z' \in \mathbb{C}$

$$\text{tél que } z z' = 1 \Rightarrow z' = \frac{1}{z}.$$

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

⑧ Le conjugué : Le conjugué de z est $\bar{z} = x - iy$.

⑨ La division: $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ / $z' \neq 0$.

⑩ $zz' = 0 \Rightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Remarquer que :

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

II.3 Module et Argument :

II.3.1 module :

3.1.1 Définitions Le module de z avec $z = x + iy$ est le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

avec $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$.

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

3.1.2 Propriétés: $z, z' \in \mathbb{C}$

① $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$

② $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$

(4)

$$(3) \bar{\bar{z}} = z.$$

$$(4) \bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}.$$

$$(5) |z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

$$(6) |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0.$$

$$(7) \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}, \quad z' \neq 0.$$

$$(8) |zz'| = |z| \cdot |z'|$$

$$(9) |z + z'| \leq |z| + |z'| \text{ l'inégalité triangulaire.}$$

Exemple

$$z = \frac{3 + 4i}{7i} = \frac{3}{7i} + \frac{4i}{7i} = \frac{3}{7i} + \frac{4}{7} = \frac{(-7i)3}{49} + \frac{4}{7} = \frac{-3i}{7} + \frac{4}{7}$$

$$|z| = \frac{|3 + 4i|}{|7i|} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^2}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{9 + 16}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$$

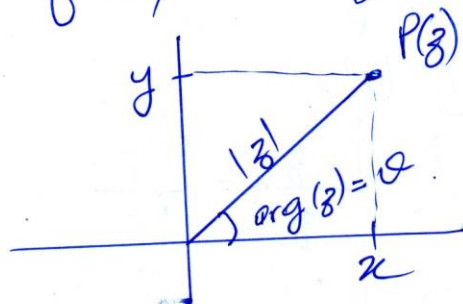
$$|z| = \left| -\frac{3i}{7} + \frac{4}{7} \right| = \left| \frac{-3i}{7} + \frac{4}{7} \right| = \sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{16}{49}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$$

(5)

II.3.2 Argument:

3.2.1 Définition: Argument de $z = x+iy$ est le nombre réel $\arg(z) = \theta$ définie par deux égalités

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$



Exemple: $z = 1-i$. $|z| = \sqrt{2}$.

$$\arg(z) = \theta.$$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\text{donc: } \theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z}$$

3.2.2 La forme trigonométrique:

Soit $z \in \mathbb{C}$ $z = x+iy$ et $|z| = r$.
 $\arg(z) = \theta$.

$$\text{On a: } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\text{donc: } \begin{aligned} z &= r \cos \theta + i r \sin \theta \\ z &= r(\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}$$

Annote alors:

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = [|z|, \arg z] = [r, \theta].$$

c'est la forme trigonométrique de z .

Exemple: d'après l'exemple précédent.

$$z = 1 - i.$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) \right).$$

3.2.3 Propriétés:

$$① \arg(z z') = \arg z + \arg z'.$$

$$② \arg(z^n) = n \arg(z).$$

$$③ \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z), \quad z \neq 0.$$

$$④ \arg(\bar{z}) = -\arg(z).$$

$$⑤ \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \quad / z' \neq 0.$$

Preuve: $\arg(z z') = \arg(z) + \arg(z')$

D'après: $z z' = |z| |z'| (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta').$

$$z z' = |z| |z'| (\cos \theta \cos \theta' + i \sin \theta \cos \theta' + i \sin \theta \sin \theta' - \sin \theta \sin \theta').$$

(7)

$$zz' = |z||z'| (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\sin \theta' \cos \theta + \sin \theta \cos \theta'))$$

$$zz' = |z||z'| (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')).$$

Car:

$$\cos(\theta + \theta') = \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta'$$

et

$$\sin(\theta + \theta') = \cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta'$$

$$zz' = |z||z'| (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')).$$

donc: $\arg zz' = \theta + \theta'$

$$\arg zz' = \arg(z) + \arg(z')$$

II. 4 Formule de Moivre, forme exponentielle et formules d'Euler:

Définition 1: La formule de Moivre est:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Définition 2: Soit z un nombre complexe alors z s'écrit sous la forme exponentielle

$$z = |z| e^{i \arg(z)} = r e^{i\theta}.$$

Définition 3: à partir des deux formules

$$\begin{cases} \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \\ \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta} \end{cases} \quad \text{On a:} \begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

ils sont les formules d'Euler.

Exemple:

$$z = -1 + i\sqrt{3}.$$

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2.$$

$$\begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\text{donc } \theta = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi.$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

$$(9) \quad z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

II.5 Racines n-ièmes :

5.1 Définition: pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

une racine n-ième de z est un nombre $L \in \mathbb{C}$ tel que

$$L^n = z.$$

5.2 Proposition:

Il ya n racines $L_0, L_1, \dots, L_{n-1}$ de z

avec $z = |z| e^{i \arg(z)}$.

On a:

$$L_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta + i2k\pi}{n}}$$

avec $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$
 $n \in \mathbb{N}$.

Exemple:

$$z = -1 + i\sqrt{3}.$$

Calculer les racines 4-ièmes

On pose: $L^4 = z$ ses racines sont L_0, L_1, L_2 et L_3 .

On a: $L_k = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2k\pi}{4}}$ $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

$\Rightarrow$ $k=0$ $L_0 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2(0)\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} e^{i\frac{2\pi}{12}} \neq L_0$

$$\underline{S_i: k=1}, L_1 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2\pi}{4}}$$

$$= \sqrt[4]{2} e^{\frac{2i\frac{\pi}{3} + 6i\frac{\pi}{3}}{4}}$$

$$L_1 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i8\pi}{12}}$$

$$\underline{S_i: k=2}, L_2 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2\pi(2)}{4}} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i\frac{4\pi}{3}}{4}}$$

$$L_2 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i14\pi}{12}}$$

$$\underline{S_i: k=3}, L_3 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2(3)\pi}{4}} = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i\frac{18\pi}{3}}{4}}$$

$$L_3 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i20\pi}{12}}$$

$$\underline{Onq:} L_0^4 = z, L_1^4 = z, L_2^4 = z \text{ et } L_3^4 = z$$

$$L_0^4 = \left(\sqrt[4]{2} e^{\frac{i2\pi}{12}} \right)^4 = \left((2)^{\frac{1}{4}} \right)^4 \left(e^{\frac{i2\pi}{12}} \right)^4$$

$$= 2 e^{\frac{i2\pi}{3}}$$

$$L_0 = \sqrt[4]{2} e^{\frac{i2\pi}{12}} = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{2\pi}{12} + i \sin \frac{2\pi}{12} \right)$$

$$L_0^4 = \left((2)^{\frac{1}{4}} \right)^4 \left(\cos \frac{2\pi}{12} + i \sin \frac{2\pi}{12} \right)^4 = 2 \left(\cos 4 \frac{2\pi}{12} + i \sin 4 \frac{2\pi}{12} \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = z$$

(11)