Chapitre n° 02

Le corps des Nombres complexes

1- Opérations algébriques sur les nombres complexes.

2- Module d'un nombre complexe z.

3- Représentation géométrique d'un nombre complexe.

4- forme trigonométique d'un nombre complexe.

5- formule d'Euler

6- forme exponentielle d'un nombre complexe.

7- Racines n-ième d'un nombre complexe.

Chapitre 2 :

II. Le corps des nombres complexes :

II.1 Définition : un nombre complexe z est un couple (x,y)

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que l'on notera $z = x + iy$

l'écriture algébrique de z.

* Le premier terme consiste la partie réelle $Re(z) = x$.

le second est sa partie imaginaire $Im(z) = y$.

donc : $z = Re(z) + i\, img(z)$.

On note $\mathbb{C} = \{ z \,/\, z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R} \}$.

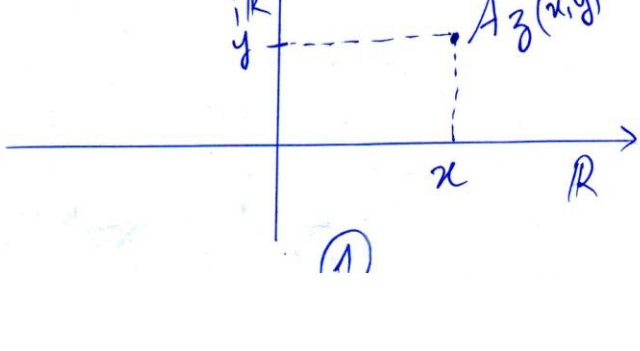
l'ensemble des nombres complexes.

Remarque 1 : Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Si $y = 0 \Rightarrow z = x$ est réel.
2. Si $x = 0 \Rightarrow z = iy$ est imaginaire pure.

Remarque 2 : L'ensemble $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$

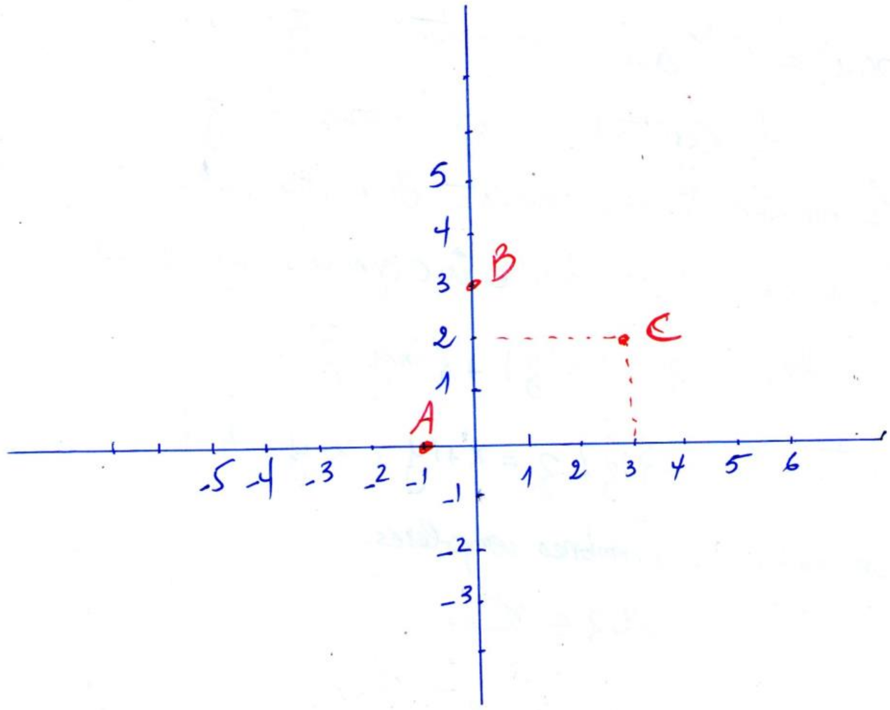
$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



Exemple :

$z_1 = -1$ $\quad$ $z_2 = 3i$ $\quad$ $z_3 = 3+2i$

$A_{z_1}(-1,0)$ $\quad$ $B_{z_2}(0,3)$ $\quad$ $C_{z_3}(3,2)$.



Presentation dans le plan.

Soit $z = x+iy$ on peut lui associe le point $P_z(x,y)$ du plan.

II. 2 Propriétés :

Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

① L'addition : $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

② La multiplication : $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = z_2 z_1$

③ La multiplication par un scalaire :

$\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda z = \lambda x + i \lambda y$.

④ L'associativité :

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

⑤ La distributivité :

$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

⑥ L'opposé : L'opposé de z / $z = x + iy$ est

$z' = -z$ $\quad z' = -z = -x - iy$.

⑦ L'inverse : L'inverse de z avec $z \neq 0$ est $z' \in \mathbb{C}$

tel que $z z' = 1 \Rightarrow z' = \frac{1}{z}$.

$$z' = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

⑧ Le conjugué : Le conjugué de z est $\bar{z} = x - iy$.

⑨ La division: $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$ / $z' \neq 0$.

⑩ $zz' = 0 \Rightarrow z = 0$ où $z' = 0$.

Remarque :
$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

II.3 Module et Argument :

II.3.1 Module :

3.1.1 Definitions Le module de z avec $z = x + iy$ est le réel positif $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

avec: $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$.

$$\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)} = \sqrt{x^2+y^2} = |z|.$$

3.1.2 Propriétés: $z, z' \in \mathbb{C}$

① $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$.

② $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$

(3) $\overline{\overline{z}} = z.$

(4) $\overline{z} = z \iff z \in \mathbb{R}.$

(5) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

(6) $|z| = 0 \iff z = 0.$

(7) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad , \; z' \neq 0.$

(8) $|z z'| = |z| \cdot |z'|$

(9) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ l'inégalité triangulaire.

Exemples

$$z = \frac{3+4i}{7i} = \frac{3}{7i} + \frac{4i}{7i} = \frac{3}{7i} + \frac{4}{7} = \frac{(-7i)3}{49} + \frac{4}{7} = \frac{-3i}{7} + \frac{4}{7}$$

$$|z| = \frac{|3+4i|}{|7i|} = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{\sqrt{7^2}} = \frac{\sqrt{9+16}}{\sqrt{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$$

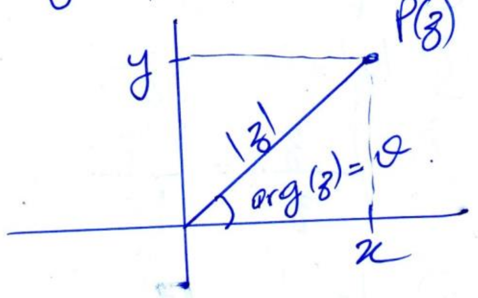
$$|z| = \left|\frac{-21i}{49} + \frac{4}{7}\right| = \left|\frac{-3i}{7} + \frac{4}{7}\right| = \sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{49} + \frac{16}{49}}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{5}{7}$$

II.3.2 Argument :

3.2.1 Définition : Argument de $z = x+iy$ est le nombre réel $\arg(z) = \theta$ définie par deux egalité

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$



Exemple : $z = 1 - i$. $|z| = \sqrt{2}$.

$\arg(z) = \theta$.

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

donc : $\theta = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$.

3.2.2/ La forme trigonométique :

Soit $z \in \mathbb{C}$ / $z = x+iy$ et $|z| = r$.

$\arg(z) = \theta$.

On a : $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ donc : $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

On note alors:

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = [|z|, \arg z] = [r, \theta].$$

c'est la forme trigonométrique de z.

Exemple: d'après l'exemple précédent.

$$z = 1 - i.$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

3.2.3 Propriétés:

1) $\arg(zz') = \arg z + \arg z'$.

2) $\arg(z^n) = n\arg(z)$.

3) $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$, $z \neq 0$.

4) $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.

5) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$ / $z' \neq 0$.

Preuve: $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$

On a: $zz' = |z||z'|(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')$.

$$zz' = |z||z'|(\cos\theta\cos\theta' + i\sin\theta'\cos\theta + i\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta').$$

$z z' = |z||z'| \left(\cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta' + i\left(\sin\theta' \cos\theta + \sin\theta \cos\theta'\right)\right)$

$z z' = |z||z'| . \left(\cos(\theta+\theta') + i \sin(\theta+\theta')\right).$

Car:

$\cos(\theta+\theta') = \cos\theta \cos\theta' - \sin\theta \sin\theta'$

et

$\sin(\theta+\theta) = \cos\theta \sin\theta' + \sin\theta \cos\theta'$

$z z' = |z||z'| \left(\cos(\theta+\theta') + i \sin(\theta+\theta')\right).$

donc: $\arg z z' = \theta + \theta'$

$\arg z z' = \arg(z) + \arg(z')$

II.4 Formule de Moivre, forme exponentielle et et formules d'Euler:

Définition 1: La formule de Moivre est:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Définition 2: Soit z un nombre complexe alors z s'ecrie sous la forme exponentielle

$$z = |z| e^{i\arg(z)} = r e^{i\theta}.$$

Définition 3: à partir des deux formules

$$\begin{cases} \cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}. \\ \cos\theta - i\sin\theta = e^{-i\theta} \end{cases} \quad \text{On a:} \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

ils sont les formules d'Euler.

Exemple:

$$z = -1 + i\sqrt{3}.$$

$$|z| = \sqrt{1+3} = 2.$$

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \theta = \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi.$$

$$\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$$

$$z = -1 + i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

$$z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

II. 5 Racines n-iemes :

5.1 Définition : pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

une racine n-ieme de z est un nombre $L \in \mathbb{C}$ tel que

$$L^n = z.$$

5.2 Proposition :

Il y a n racines $L_0, L_1, \dots L_{n-1}$ de z

avec $z = |z| e^{i \arg(z)}$.

On a : $$\boxed{L_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{\frac{i\theta + i2k\pi}{n}} \quad \text{avec, } k \in \{0, 1, \dots n-1\} \quad n \in \mathbb{N}.}$$

Exemple : $z = -1 + i\sqrt{3}$.

Calculer les racines 4-iemes

On pose : $L^4 = z$ ses racines sont L_0, L_1, L_2 et L_3.

On a : $\boxed{L_k = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2k\pi}{4}}}$ $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Si : $k = 0$ $L_0 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2(0)\pi}{4}} = \boxed{\sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{2\pi}{12}} = L_0}$

Si : $k=1$, $L_1 = \sqrt[4]{2}\ e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2\pi}{4}}$

$= \sqrt[4]{2}\ e^{\frac{2i\frac{\pi}{3} + \frac{6i\pi}{3}}{4}}$

$L_1 = \sqrt[4]{2}\ e^{i\frac{8\pi}{12}}$.

Si : $k=2$, $L_2 = \sqrt[4]{2}\ e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2\pi(2)}{4}} = \sqrt[4]{2}\ e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i\frac{12\pi}{3}}{4}}$

$L_2 = \sqrt[4]{2}\ e^{\frac{i14\pi}{12}}$.

Si : $k=3$, $L_3 = \sqrt[4]{2}\ e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + i2(3)\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\ e^{\frac{i\frac{2\pi}{3} + \frac{i18\pi}{3}}{4}}$

$L_3 = \sqrt[4]{2}\ e^{\frac{i20\pi}{12}}$.

On a : $L_0^4 = z$, $L_1^4 = z$, $L_2^4 = z$ et $L_3^4 = z$.

$L_0^4 = \left(\sqrt[4]{2}\ e^{i\frac{2\pi}{12}}\right)^4 = \left((2)^{\frac{1}{4}}\right)^4 \left(e^{\frac{i2\pi}{12}}\right)^4$

$= 2\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$L_0 = \sqrt[4]{2}\ e^{\frac{i2\pi}{12}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12}\right)$

$L_0^4 = \left((2)^{\frac{1}{4}}\right)^4\left(\cos\frac{2\pi}{12} + i\sin\frac{2\pi}{12}\right)^4 = 2\left(\cos 4\frac{2\pi}{12} + i\sin 4\frac{2\pi}{12}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = z$