Chapitre n° 01

Le corps des réels

1- $\mathbb{R}$ est un corps commutatif.

2- $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné.

3- Raisonnement par récurrence

4- $\mathbb{R}$ est un corps valué.

5- Intervalles

6- Bornes supérieures et inferieures d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$

7- $\mathbb{R}$ est un corps archimédien.

8- Caractérisation des bornes supérieures et inférieures.

9- La fonction partie entiere.

10- Ensembles bornes.

11- Prolongement de $\mathbb{R}$: Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

12- Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$.

13- Partie ouvertes fermées.

I Le corps des Réels :

I.1 :

On rencontre dans l'enseignement élémentaire des Mathématiques quatre sorties des nombres avec lesquelles nous supposerons que le lecteur est familiarisé.

- Les plus simples sont les entiers naturels, noté $\mathbb{N}$ qui servent à dénombrer les collections finis d'objets.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} / \{0\}$$

- Viennent ensuite les entiers relatifs, noté $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$

$$\text{et } \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}.$$

- La troisième catégorie des nombres est celle des nombres rationnels noté $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \text{ où } p \text{ et } q \text{ sont des entiers relatifs, } q \in \mathbb{Z}^*\right\}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,/\, p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{Z}^*\right\}.$$

En insitant sur le besoin de définir un ensemble plus grand que $\mathbb{Q}$, il suffit de dire que la résolution d'un grand nombre d'équation ne peut se faire sans cette extension,

Par exemple: l'equation $x^2 = 2$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{Q}$, car si on ecrit x sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$ et p et q sont premiers entre eux.
on aura $p^2 = 2q^2$ et par conséquant p est un nombre pair.

donc: $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
Mais $\frac{p}{q}$ est irréductible ($p = 2K$ et $p^2 = 2q^2$

$$\Downarrow$$

$$4K^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2K^2$$

$$\Rightarrow q \text{ est pair}$$

p et q sont divisible par 2 ($2/p$ et $2/q$).
c'est une contradition avec l'hypothése.

(*) On conclut que $x^2 = 2$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{Q}$. D'où $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

Les nombres non rationnels dits irrationnels

Exemple: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \dots$

•) Vienne aprés les nombres réels $\mathbb{R}$.
L'ensemble des nombres réels noté par $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres rationnels et irrationnels.

On a la conclusion suivante :

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

- Aximatique de $\mathbb{R}$; On pose : $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} / x \geqslant 0\}$.

$\mathbb{R}^*_+ = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

Même chose pour $\mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}^*_-$.

I.2 :

Nous admettons l'existence et l'unicité à la notation pré d'un ensemble $\mathbb{R}$ muni deux lois internes $+$, $\cdot$ et d'une relation $\leqslant$, tel que :

① $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un corps commutatif.

② $\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$.

③ $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$: $\begin{cases} a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c. \\ \left.\begin{matrix} a \leqslant b \\ 0 \leqslant c \end{matrix}\right\} \Rightarrow ac \leqslant bc. \end{cases}$

④ Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet dans $\mathbb{R}$ une borne supérieure

Rappelons que :

$(R, +, \cdot)$ est un corps commutatif signifie :

(+ addition)

1. $+$ est associative : $\forall (a,b,c) \in R^3 : (a+b)+c = a+(b+c)$.
2. $+$ est commutative : $\forall (a,b) \in R^2 : a+b = b+a$.
3. R admet un neutre pour $+$ noté 0, $\forall a \in R : a+0 = 0+a = a$.
4. tout élément a de R admet un opposé noté : $-a$

$$\forall a \in R : a+(-a) = (-a)+a = 0.$$

($\cdot$ multiplication)

1. $\cdot$ est associative : $\forall (a,b,c) \in R^3, (ab)c = a(bc)$.
2. $\cdot$ est commutative : $\forall (a,b) \in R^2 : ab = ba$.
3. R admet un neutre pour $\cdot$: noté 1 : $\forall a \in R : a.1 = 1.a = a$
4. Tout élément a de $R - \{0\}$ admet un inverse noté : $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

$$\forall a \in R - \{0\} \quad a a^{-1} = a^{-1} a = a \times \frac{1}{a} = 1$$

5. $\cdot$ est distributive sur l'addition.

$$\forall (a,b,c) \in R^3 : \begin{cases} a(b+c) = ab+ac. \\ (b+c)a = ba+ca = ab+ac. \end{cases}$$

La relation $\leqslant$

$\leqslant$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{R}$ signifie :

1. $\leqslant$ est reflexive : $\forall\, a \in \mathbb{R}$; $a \leqslant a$.

2. $\leqslant$ est antisymétrique : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$: $\begin{cases} a \leqslant b \\ \text{et} \\ b \leqslant a \end{cases} \Rightarrow a = b$

3. $\leqslant$ est transitive : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$: $\begin{cases} a \leqslant b \\ b \leqslant c \end{cases} \Rightarrow a \leqslant c$

4. $\leqslant$ est totale : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$ $(a \leqslant b$ ou $b \leqslant a)$

Proposition :

L'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonnée.

— Totalement ordonée pour tout couple (x,y).

des nombres réels on a : $(x \geqslant y,\ x \leqslant y,\ x = y)$

I.3 Raisonnement par récurrence :

Le raisonnement par récurrence consiste en ce suit

Soit $P(n)$ une relation mathématique dépend du nombre entier naturel $n \in \mathbb{N}$. Pour établir que cette relation est vraie pour $n \geqslant n_0$ il suffit de montrer que :

1°) $P(n_0)$ est vraie.

2°) Si $P(n)$ est vraie pour $n \geqslant n_0$ alors $P(n+1)$ est vraie

- Dans ces conditions, $P(n)$ est vraie $\forall n \geqslant n_0$.

I.4 Valeur absolue :

On appelle valeur absolue dans $\mathbb{R}$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0. \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$

On a : $|x| = |-x|$.

Propriétés :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant 0$ $\quad |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad |xy| = |x||y|$
3. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$ l'inégalité triangulaire.
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ $\quad |x-y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$

⑤ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, |x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a.$

⑥ $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+, |x| \geqslant a \Leftrightarrow x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$

⑦ $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$ et $|x|^2 = x^2.$

⑧ $|x| \geqslant 0, |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

⑨ $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}. \quad y \neq 0$

Remarque: * La distance entre deux réels est égal $|y-x|$.

* $\mathbb{R}$ n'est pas un ensemble dénombrable.

I.5 Intervalles:

Notion: Soit a et b deux réels disant que $a < b$.

* L'ensemble $\{x \,/\, a < x < b\}$ est appelé un intervalle ouvert noté $]a, b[$.
* L'ensemble $\{x \,/\, a \leqslant x \leqslant b\}$ est appelé un intervalle fermé et noté $[a, b]$ segment.
* Les intervalles $]a, b]$ ou $[a, b[$ sont des intervalles semi-ouverts ou bien semi-fermés.

I.6 Bornes supérieures et inférieures d'un sous ensemble de $\mathbb{R}$.

6.1 Majorants et Minorants:

Soit A est une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Majorant: On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si:
$$\forall x \in A, \ x \leq M.$$

b) Minorant: On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A si:
$$\forall x \in A, \ x \geq m.$$

- Tout ensemble qui admet un majorant est appelé ensemble majoré et tout ensemble qui admet un minorant est appelé ensemble minoré.

- On dit que A est bornée si: elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples:
1. $A =]1,4[$.
2. l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'a ni majorant ni minorant
3. L'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de majorant mais il est minoré par 0.
4. Toute partie non vide est bornée.

6.2 Maximum et Minimum:

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Maximum (Max): On dit que $M \in \mathbb{R}$ est le plus grand élément de A si:
$$\begin{cases} i) \ M \text{ est un majorant de } A. \\ ii) \ M \in A. \end{cases}$$

Et on note $Max(A) = M$.

(b) Minimum: On dit que $m \in \mathbb{R}$ est le plus petit élément de A Si: $\begin{cases} i) & m \text{ est un minorant de } A \\ ii) & m \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Et on note $Min(A) = m$.

6.3: Borne supérieure, Borne inférieure:

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) La borne supérieure: est le plus petit des majorants de A (s'il existe) et est noté $\sup(A)$.

Remarque: Si $\sup A$ existe, elle est unique.

b) La borne inférieure: est le plus grand des minorants de A (s'il existe) et est noté $\inf(A)$.

Remarque: Si: $\inf(A)$ existe, elle est unique.

Exemples: (1) $A = [1,4]$

⊛ $[4, +\infty[$ est l'ensemble des majorants de A
$4 \in A$ donc $Max A = 4$

4 est le petit des majorants $\Rightarrow \sup A = 4$.

⊛ $]-\infty, 1]$ est l'ensemble des minorants de A
$1 \in A$ donc $Min(A) = 1$.

1 est le plus grand des minorants $\Rightarrow \inf(A) = 1$

(2) $A =]1,4]$.

On a : Les majorants sont $[4,+\infty[$.
Les minorants sont $]-\infty, 1]$.
$\inf A = 1$ mais $1 \notin A$ donc $\min A$ n'existe pas.
$\sup A = 4 = \max A$ (car $4 \in A$).

(3) L'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels est minoré par 0 et on a : $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 0$.
Mais $\mathbb{N}$ n'est pas majorée donc $\sup \mathbb{N} \nexists$
$\max \mathbb{N} \nexists$

(4) L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est ni majoré ni minoré.

6.4 Axiome de la borne supérieure et inférieure :

i) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

ii) Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque : $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ et A bornée $\Rightarrow$ $\sup A$ et $\inf A$ existent

I.7 Caractérisation de la borne supérieure et la borne inférieure :

I.7 Caratérisation de la borne supérieure et de la borne inférieure :

Proposition : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

① $M = \sup(A) \Leftrightarrow \begin{cases} i) \ \forall x \in A, \ x \leq M. \\ ii) \ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A \\ \quad M - \varepsilon < x \leq M. \end{cases}$

② $m = \mathrm{Inf}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} i) \ \forall x \in A, \ x \geq m. \\ ii) \ \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A. \\ \quad m \leq x < m + \varepsilon. \end{cases}$

Preuve : ①

$\Rightarrow$) supposons que $M = \sup(A)$

$\Rightarrow \forall x \in A, \ x \leq M$ (selon la définition).

Il reste de démontrer ii)

Soit $\varepsilon > 0$ alors $M - \varepsilon$ n'est pas majorant de A

Car : $M - \varepsilon < M$ et M est le plus petit des majorants de A

Donc : $\exists x \in A, \ M - \varepsilon < x \leq M$.

$\Leftarrow$) Réciproquement On suppose que (i) et (ii) sont correctes et montrons que $M = \sup(A)$.

On a: i) $\Rightarrow$ M est un majorant de A. Il reste de démontrer que M est le plus petit des majorants de A.

Soit $M' < M$ telque M' un majorant de A.

On pose: $\varepsilon = M - M' > 0$.

D'après ii) $\exists x \in A$, $M - \varepsilon < x \leq M$.

Donc: $M' < x \leq M$.

Alors M' ne peut pas être un majorant de A

Ainsi M est le plus petit majorant de A

Donc: $\sup A = M$.

(2) D'une façon analogue on peut montrer (2).

(2)

$\Rightarrow$) supposons que $m = \inf(A)$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ x \geq m$ (Selon de définition)

Il reste de démontrer ii)

Soit $\varepsilon > 0$. alors: $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A

Car: $m + \varepsilon > m$ et m est le plus grand des minorants de A. Donc $\exists x \in \mathbb{R}$, $m \leq x < m + \varepsilon$

$\Leftarrow$) Réciproquement On suppose que (i) et ii) sont correctes

et montrons que $m = \inf(A)$

On a: i) $\Rightarrow$ m est un minorant de A. Il reste de démontrer que m est le plus grand des minorants de A

Soit $m' > m$ tel que m' un minorant de A.

On pose: $\varepsilon = m' - m > 0$.

D'après ii) $\exists x \in A, m \leq x < m + \varepsilon$

Donc: $m < x \leq m'$.

Alors: m' ne peut pas être un minorant de A.

Ainsi: m est le plus grand minorants de A.

Donc: $\inf A = m$.

I.8 Propriétés d'Archimède et ses conséquences:

On démontre que l'ensemble $\mathbb{R}$ vérifie le principe suivant:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n > x.$$

Cette propriété s'écrit aussi comme suit.

$$\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} : nx \geq y.$$

Comme premiere conséquence du principe d'Archimède on montre que: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} : n \leq x < n+1$.

8.1 Théorème 1.

$\mathbb{R}$ est Archiméolien, c'est à dire, .

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}^* : n \geq x$.

ou, d'une façon équivalente :

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \exists n \in \mathbb{N}^* :$
$n a \geq x$.

ou bien :

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}_+^* : n x \geq y.}$$

Démonstration :

Par l'absurde :

On suppose qu'il $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : n \leq x$.
$\exists y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \ n \leq y$.

donc : $x(y)$ est un majorant de $\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$.

D'après la propriété de la borne supérieure.

Soit $M = \sup \mathbb{N}$, Donc $\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}$

$$M - \varepsilon < p \leq M.$$

On pose: $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

alors: $M - \frac{1}{2} < p \Rightarrow M + \frac{1}{2} < p+1$

Donc: $M < p+1$

avec: $p+1 \in \mathbb{N}$.

contradition car $\sup \mathbb{N} = M$.

I.9 Fonction partie entière :

9.1 Définition : La partie entière d'un réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Et on note $E(x)$ où $[x]$.

Par définition, il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ tel que

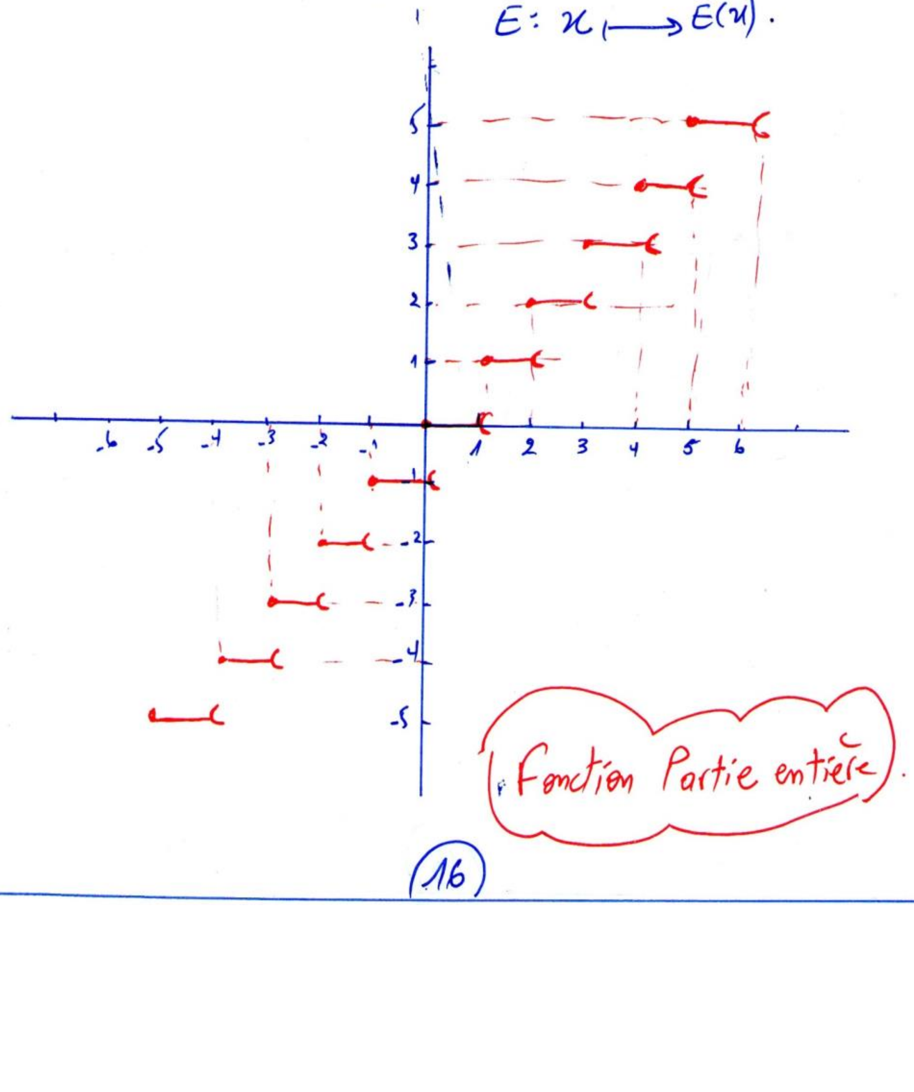
$$n = E(x) \leq x < E(x+1) = E(x) + 1 = n + 1.$$

Exemple : $[3,14] = 3$.

$[-3,14] = -4$.

9.2 Représentation graphique de la fonction :

$E : x \longmapsto E(x)$.



9.3 Les propriétés de la partie entière :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z} : E(x+p) = E(x) + p$.

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \Rightarrow E(x) \leqslant E(y)$.

3) $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x) + E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$.

4) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^* : E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

5) $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) + E(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{Sinon.} \end{cases}$

Exemple : On montre que :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z} : E(x+p) = E(x) + p$.

par définition on a : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1$ ——— (1)

On ajoute p pour (1) on obtient :

$E(x) + p \leqslant x + p < E(x) + 1 + p$.

donc $E(x+p) = E(x) + p$.

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \Rightarrow E(x) \leqslant E(y)$.

On a : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

$E(y) \leqslant y < E(y) + 1, \forall y \in \mathbb{R}$

Si : $x \in [n, n+1[$ et $y \in [m, m+1[$ tq $x \leqslant y$: $E(x) = n$, $E(y) = m$

donc : $x \leqslant y \Rightarrow n < m$ Alors $E(x) < E(y)$.

En effet x et $y \in [n, n+1[$, $n \in \mathbb{Z}$ tq $x \leqslant y$ alors $E(x) = E(y) = n$

Donc : $E(x) \leqslant x \leqslant y \Rightarrow E(x) \leqslant y$, $E(x) \in \mathbb{Z}$

Car la fonction partie entière est une fonction croissante.

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y \Rightarrow E(x) \leqslant E(y)$.

3) $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x) + E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$: On a : $E(x) \leqslant x < E(x)+1$ — (1)

$E(y) \leqslant y < E(y)+1$ — (2)

En sommant on obtient (1) + (2)

$E(x) + E(y) \leqslant x + y < E(x) + E(y) + 2$.

Le réel $x+y \in [E(x) + E(y), E(x) + E(y) + 2[$.

Tel que : $E(x) + E(y)$ et $E(x) + E(y) + 2$ sont deux entiers.

Si : $x+y \in [E(x) + E(y) ; E(x) + E(y) + 1[\Rightarrow E(x+y) = E(x) + E(y)$.

Si : $x+y \in [E(x) + E(y) + 1 ; E(x) + E(y) + 2[\Rightarrow E(x+y) = E(x) + E(y) + 1$.

Par conséquent : $E(x) + E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$.

5) $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) + E(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \text{ Sinon.} \end{cases}$

On a : $E(x) \leqslant x < E(x) + 1 \Rightarrow -1 - E(x) < -x \leqslant -E(x)$.

Si : $x \in \mathbb{Z}$: $E(x) = x$ et : $E(-x) = -x$ / $E(x) + E(-x) = x - x = 0$

Si : $x \in \mathbb{R}$, $x \notin \mathbb{Z}$, $-1 - E(x) < -x < -E(x)$.

avec : $p = -1 - E(x) \in \mathbb{Z} \Rightarrow p < -x < p+1$
par conséquent.

$E(-x) = -1 - E(x) \Rightarrow E(-x) + E(x) = -1$.

$$E(x) \leqslant x < E(x)+1$$
$$-E(x) \geqslant -x > -E(x)-1$$
$$-1-E(x) < -x \leqslant -E(x).$$

I.10 : Théorème :

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Il s'agit de démontrer qu'entre deux réels différents a et b il existe toujour un rationnel.

c'est à dire :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a<b,\ \exists r \in \mathbb{Q} : a<r<b.$$

Démonstration : On a :

$$a<b \Rightarrow b-a>0 \Rightarrow \frac{1}{b-a}>0.$$

comme $\mathbb{R}$ est archimédien $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $n > \frac{1}{b-a}$.

alors : $\frac{1}{n} < b-a$.

On pose : $p = E(na) \Rightarrow p \leqslant na < p+1 \Rightarrow \frac{p}{n} \leqslant a < \frac{p+1}{n}$

D'où : $a < \frac{p+1}{n} = \frac{p}{n} + \frac{1}{n} \leqslant a + \frac{1}{n} < \cancel{a}+b-\cancel{a} = b$

c'est à dire : $a < \frac{p+1}{n} < b$.

On voit bien que : $\frac{p+1}{n}$ est un nombre rationnel strictement compris entre a et b.

I.11: La droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$:

11.1 Définition : la droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, on adjoint les deux symboles $-\infty$ et $+\infty$ (qui ne sont pas des nombres) avec la conventions $\forall x \in \mathbb{R}$: $-\infty \leq x \leq +\infty$. on obtient $\overline{\mathbb{R}}$.

11.2 Définition : On appele droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ obtenir en adjoignant à $\mathbb{R}$ deux éléments ordre total prolongeant celui de $\mathbb{R}$

En posant $\forall x \in \mathbb{R}$: $-\infty < x < +\infty$

I. 12 Propriétés topologiques de $\mathbb{R}$:

Définition 1: Ouvert: Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A est un ouvert si: pour tout point $x \in A$, il existe un intervalle ouvert (de centre x et de rayon positif) contenant x et contenu dans A.

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A.$$

Remarque:

(1) Tout intervalle ouvert est une partie ouverte

(2) $\mathbb{R}$ est un ouvert.

Théorème:

(*) Une intersection finie des ouverts est un ouvert.

(*) Une reunion des ouverts est un ouvert.

Exemple:

(1) $A =]-1,1[\cup]3,5[$ est un ouvert.

(2) $\{5\}$ n'est pas un ouvert. En général toute partie de $\mathbb{R}$ n'est pas un ouvert.

Car: elle ne contient aucun intervalle ouvert.

③ $\mathbb{Q}$ et $C_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ ne sont pas des ouverts.

Car: il est impossible de trouver un intervalle ouvert de dans

Définition 2: fermé:

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ fermée si: son complémentaire est un ouvert.

Exemples:

① Tout point appartenant à $\mathbb{R}$ est un ensemble fermé Car:

$\forall a \in \mathbb{R},\ C_{\mathbb{R}}\{a\} =]-\infty, a[\cup]a, +\infty[$.

est un ensemble ouvert.

En général: tout ensemble fini de $\mathbb{R}$ est un fermé

② Tout intervalle fermé est une partie fermé

En effet si: a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$.

On a: $C_{\mathbb{R}}[a,b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ qui est un ouvert.

③ $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés.

Car: $C_{\mathbb{R}}\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$.

et: $C_{\mathbb{R}}\mathbb{N} =]-\infty, 0[\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1[$ sont des ouverts

④ ϕ, $\complement_{\mathbb{R}}\phi$, $[a,b[$ et $]a,b]$

(avec a et b deux éléments de $\mathbb{R}$).
ne sont pas fermés.

⑤ $\mathbb{R}$ et ϕ sont fermés.

Remarques:

① Il se peut qu'une partie de $\mathbb{R}$ ne soit ni ouverte ni fermée comme l'exemple 4 si dessus.

② Les seules parties à la fois ouvertes et fermées dans $\mathbb{R}$. sont $\mathbb{R}$ et ϕ

(On dit que $\mathbb{R}$ est un espace connexe).

Théorème:

① Un intersection quelconque de fermé est un fermé.

② Une réunion finie de fermés est un fermé.

Exemple:

① ϕ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

② $]a,b[$ est ouvert de $\mathbb{R}$.