Chapitre 03

Suites de nombres réels.

1- Suites bornées.

2- Suites convergentes.

3- Propriétés des suites convergentes.

4- Opérations arithmétiques sur les suites convergentes

5- extensions aux limites infinies

6- Infiniment petit et Infiniment grand

7- Suites monotones

8- Suites extraites

9- Suites de Cauchy.

10- généralisation de la notion de la limite.

11- Limite supérieure.

12- Limite inférieure.

13- Suites récurrentes.

Chapitre n° : 03

Les suites des nombres réels.

3.1 Définitions :

3.1.1 Définition d'une suite :

On appelle suite réelle toute application $U : n \mapsto U_n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$, on écrit souvents (U_n) et on dit que U_n est le terme générale de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple :

1. $U_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$

2. $U_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n \text{ impair.} \\ 1 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$

3. $U_n = \sqrt{n-1}$

   (U_n) commance par 0 (en remplaçant d'abord n par 1)
   ces termes sont $0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots$

4. La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad , \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$(F_n)_{n\geq 0}$ Commance par $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \dots$
a partir de $n = 2$ chaque est la somme des deux termes precedentes

Remarque :

- la somme de deux suites (U_n) et (V_n) est une suite $(U_n + V_n)$.
- Le produit de deux suites (U_n) et (V_n) est une suite $(U_n \cdot V_n)$
- Le produit de $\lambda \in \mathbb{R}$ par une suite (U_n) est une suite (λU_n).

3.1.2 Les suites bornées :

Soit (U_n) une suite réelle.

1. $(U_n)_n$ est majorée $\iff \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; U_n \leqslant M$.
2. $(U_n)_n$ est minorée $\iff \exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \geqslant m$.
3. $(U_n)_n$ est bornée $\iff (U_n)_n$ majorée et minorée.

$$\Updownarrow$$

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : |U_n| \leqslant M$$

$$-M \leqslant U_n \leqslant M.$$

Exemples :

1. $U_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1} \quad , n \in \mathbb{N}.$

On a :

$$-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$$

$$n \geqslant 0 \Rightarrow n+1 \geqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant 1$$

Ainsi : $\quad -1 \leqslant (-1)^n + \frac{1}{n+1} \leqslant 2$

Donc : (U_n) est bornée.

2. $U_n = n - 2. \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

$n \geqslant 0 \Rightarrow n - 2 \geqslant -2.$

$\Rightarrow U_n \geqslant -2 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

Donc : (U_n) est minorée.

(U_n) n'est pas majorée.

par l'absurde.

Supposons que (U_n) est majorée

$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq M.$

$U_n \leq M \Rightarrow n-2 \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.$

$\Rightarrow n \leq M+2, \forall n \in \mathbb{N}.$

Mais $[M+2]+1 \in \mathbb{N}$

et: $[M+2]+1 > M+2$ .... (contradiction).

avec: le fait que $n \leq M+2, \forall n \in \mathbb{N}$.

3.1.3 Suites croissantes, Suites décroissantes.

(1) (U_n) est croissante respectivement strictement croissante

$\Updownarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}\ U_{n+1} - U_n \geq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n > 0$)

(2) (U_n) est décroissante (respectivement strictement décroissante)

$\Updownarrow$

$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n \leq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} - U_n < 0$).

(3) (U_n) est monotone (resp strictement monotone)

$\Updownarrow$

(U_n) est croissante ou décroissante (resp strictement croissante ou strictement décroissante).

Exemples:

(1) $U_n = \sqrt{n+1}$

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{\cancel{n}+2 - \cancel{n} - 1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{+1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} > 0.$$

(U_n) est strictement croissante.

(2) $V_n = \dfrac{1}{n^2+1}$.

$$V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n^2+2n+2} - \frac{1}{n^2+1} = \frac{-2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)} < 0$$

Donc (V_n) est strictement décroissante.

(3) Suite constante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} - U_n = 0$.

(U_n), $U_n = 5$, $U_{n+1} - U_n = 5 - 5 = 0$.

3.2/ Suite convergente, Suite divergente :

3.2.1 Définition : Une suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$.

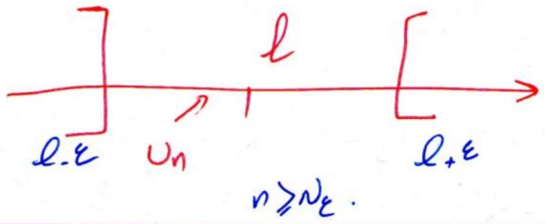
$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ toute suite convergente vers une limite est appellée suite convergente.

Sinon la suite est dite divergente

$(U_n)_n$ est une suite convergente Si elle admet une limite finie $|U_n - \ell| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < U_n - \ell < \varepsilon$.

$$\Leftrightarrow \underbrace{\ell - \varepsilon < U_n}_{\text{minorée}} < \underbrace{\ell + \varepsilon}_{\text{majorée}}$$



Exemple:

$$U_n = 4 + \frac{(-1)^n}{n} \quad , n \in \mathbb{N}^*.$$

Montrer que: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 4$.

Pour la définition : $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon.$$

$$|U_n - \ell| = |U_n - 4| = \left| 4 + \frac{(-1)^n}{n} - 4 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \quad , n \in \mathbb{N}^*.$$

Il suffit de prendre que $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, $n \geq N_\varepsilon$.

donc $\exists N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 4.$$

3.2.2 Proposition:

Soit $(U_n)_n$ une suite convergente alors: sa limite est unique.

Démonstration: Par l'absurde.

On pose: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell'$ $\qquad \ell \neq \ell'$

(1) $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$ .... (1)

② $\exists\, n \geq N'_\varepsilon \Rightarrow |U_n - \ell'| < \varepsilon$ .... ②

$\varepsilon = \left|\dfrac{\ell-\ell'}{2}\right| \Rightarrow 2\varepsilon = |\ell-\ell'|$

$2\varepsilon = |\ell-\ell'| = |\ell - U_n + U_n - \ell'| \leq |\ell - U_n| + |U_n - \ell'|$

$= -|U_n - \ell| + |U_n - \ell'| < \varepsilon + \varepsilon.$

$\Rightarrow \; 2\varepsilon < 2\varepsilon$ (contradiction).

3.2.3 Propriétés:

Soient $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ deux suites réelles.

1. Toute suite convergente est bornée.
2. Toute suite croissante et majorée est convergente.
3. Toute suite décroissante et minorée est convergente.
4. Si: $(U_n)_n$ tend vers ℓ alors: la suite $(|U_n|)_n$ tend vers $|\ell|$.
5. Si: $U_n \to \ell$ et: $V_n \to \ell'$ alors: $U_n + V_n \to \ell + \ell'$.
6. Si: $U_n \to \ell$ et: $V_n \to \ell'$ alors: $U_n V_n \to \ell\ell'$.
7. Si: $U_n \to \ell$ et: $V_n \to \ell'$ alors: $\dfrac{U_n}{V_n} \to \dfrac{\ell}{\ell'}$ avec. $\ell' \neq 0$ et $V_n \neq 0$.
8. Si: $U_n \to \ell$ alors: $KU_n \to K\ell$.
9. Si: (U_n) est une suite divergente alors: n'est pas convergente.
10. Soit $(U_n)_n$ une suite convergente telle que:

    $\forall n \in \mathbb{N}: U_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell$ alors: $\ell > 0$.

11. Soient $(U_n)_n$, $(V_n)_n$ deux suites des nombres réels convergent vers ℓ et ℓ' respectivement.

    Si: $U_n < V_n$ alors: $\ell < \ell'$.

12. Si: (U_n) est bornée et (V_n) converge vers 0 alors: $(U_n V_n)$ tend vers 0.

3.3 Théorème d'encadrement :

Soient $(U_n)_n$, $(V_n)_n$ et $(W_n)_n$ trois suites réelles

Si : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} W_n = \ell$ finie ou infinie

et s'il existe.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \leq V_n \leq W_n$ **alors** : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

Preuve :

$U_n \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_1$

$n \geq N_1 \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon$.

$-\varepsilon < U_n - \ell < \varepsilon$.

$\ell - \varepsilon < U_n < \varepsilon + \ell$.

$W_n \to \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N_2$.

$n \geq N_2 \Rightarrow \ell - \varepsilon < W_n < \varepsilon + \ell$.

On a : $\forall n > \text{Max}(N_0, N_1, N_2)$.

$\ell - \varepsilon < U_n < V_n < W_n < \varepsilon + \ell$.

$\ell - \varepsilon < V_n < \varepsilon + \ell$.

Donc : $|V_n - \ell| < \varepsilon$.

Donc : $V_n \longrightarrow \ell$.

Exemple : $U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$ calculer $\lim_n U_n$

$$U_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$n \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \leq n.$$

$$\underbrace{\frac{1}{(2n)^2} \times n}_{\lim_n w_n = 0} \leq U_n \leq \underbrace{n \times \frac{1}{(n+1)^2}}_{\lim_n v_n = 0}.$$

Donc: $U_n \longrightarrow 0$.

3.4 Limite infinie:

Définition: Une suite réelle $(U_n)_n$ divergente vers $+\infty$

- Si: $\forall A > 0, \exists N_A \in \mathbb{N}$. $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_A \Rightarrow U_n > A)$.

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

- $(U_n)_n$ est divergente vers $(-\infty)$ Si: $\forall B > 0, \exists N_B \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$. $(n \geq N_B \Rightarrow U_n < B')$ et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

Proposition:

1. Une suite croissante non majorée est divergente vers $(+\infty)$.
2. Une suite décroissante non minorée est divergente vers $(-\infty)$.

3.5 Suite de Cauchy:

3.5.1 Définition: On dit qu'une suite (U_n) est une suite de Cauchy Si:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : [p > q > N \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon]}$$

Critère de Cauchy.

Exemple:

① la suite $U_n = \frac{1}{n}$ est une suite de Cauchy

En effet Soit $\varepsilon > 0$, $p > q$.

$$|U_p - U_q| = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| = \left|\frac{q-p}{pq}\right| = \frac{p-q}{pq} < \frac{p}{p \cdot q} = \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{q} < \varepsilon \Rightarrow q > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Il suffit de prendre $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

$$p > q > N \Rightarrow \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| < \varepsilon.$$

② La suite $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$, $p > q$.

$$U_p - U_q = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k^2}$$

Comme $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{(k-1)} - \frac{1}{k}$

$$U_p - U_q = \sum_{k=q+1}^{p} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=q+1}^{p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} - \frac{1}{p} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{p-q}{qp} < \varepsilon.$$

$$\Leftarrow \frac{1}{q} < \varepsilon \Leftrightarrow q > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Donc: il suffit de prendre $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$.

③ La suite (U_n) tel que $U_n = \ln n$ n'est pas de Cauchy

En effet, pour $p > q$.

$|U_p - U_q| = \ln p - \ln q = \ln \frac{p}{q}$.

En prenant $p = 2q$, on trouve :

$U_p - U_q = \ln \frac{2q}{q} = \ln 2$.

Ce qui montre que (U_n) n'est pas de Cauchy.

3.5.2 : Théorèmes

a) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

b) Toute suite de nombres réels de Cauchy est une suite convergente.

c) Toute suite de Cauchy est une suite bornée.

Preuve :

a) Soit ℓ la limite de (U_n), on a :

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon : [n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon]$

Soit $\varepsilon > 0$ et $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q > N_\varepsilon$.

$$|U_p - U_q| = |(U_p - \ell) - (U_q - \ell)| \leq |U_p - \ell| + |U_q - \ell|$$

Ainsi : $\forall p, q \quad p > q > N \Rightarrow |U_p - U_q| \leq |U_p - \ell| + |U_q - \ell|$

$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Ce qui montre que (U_n) est de Cauchy.

3.6. Les suites extraite "sous-suites"

Exemple: Soit la suite (U_n) définie par $U_n = 3n+1$
la suite (U_{2n}) définie par: $U_{2n} = 3(2n)+1$

$$U_{2n} = 6n+1$$

est une suite extraite de (U_n).

(Notez que l'application $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

$$n \longmapsto \phi(n) = 2n)$$

est strictement croissante $\left(\phi(2n+1) - \phi(2n) \right.$
$\left. \cancel{2n} - 1 - \cancel{2n} = 1 > 0. \right)$

3.6.1 Définition et propriétés:

Déf: Soit (U_n) une suite réelle et ϕ (phi) une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ $(\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N})$.
La suite (V_n) définie par $V_n = U_{\phi(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

est appelée suite extraite (ou sous suite) de (U_n).

Exemple: $U_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$

$$\phi(n) = 2n \Rightarrow U_{\phi(n)} = U_{2n} = \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$$

$$\phi(n) = 2n+1 \Rightarrow U_{\phi(n)} = U_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1+1} = \frac{-1}{2n+2}$$

(U_{2n}) et (U_{2n+1}) sont deux suites extraites de (U_n).

Proposition : Soit (U_n) une suite réelle.

Théorème : Si (U_n) est convergente vers ℓ, alors toute suite extraite de (U_n) est convergente vers ℓ.

Preuve : Soit $V_n = U_{\phi(n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Une suite extraite de (U_n)

$$\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \left(\phi(0) < \phi(1) < \phi(2) < \dots \in \mathbb{N} \right)$$

D'une part :

$$\phi(0) \geq 0.$$

$$\begin{cases} \phi(1) > \phi(0) \\ \text{et} \\ \phi(0) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\phi(1) > 0 \right) \Rightarrow \phi(1) \geq 1.$$

$$\begin{cases} \phi(2) > \phi(1) \\ \text{et} \\ \phi(1) \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \phi(2) > 1 \Rightarrow \phi(2) \geq 2.$$

D'une façon général $\boxed{\phi(n) \geq n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (utiliser la récurrence pour la preuve)

On a : $\lim\limits_{n} U_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},$
$n \geq N \Rightarrow |U_n - \ell| < \varepsilon.$

puisque : $\phi(n) \geq n$ alors : $n \geq N \Rightarrow \phi(n) \geq N$.

Donc: $|U_{\phi(n)} - \ell| < \varepsilon$, pour tout $n > N$ ce qui

etablit le théoreme ($i.e \lim_n U_{\phi(n)} = \ell$)

Exemple: Comme $\lim_n \frac{1}{n} = 0$, on en déduit d'aprés le théoreme précédent que: $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

$\forall k \geq n$.

Remarque: La récipreoque n'est pas nécessairement vraie une suite divergente peut admette des sous suites convergentes

Exemple: $U_n = (-1)^n$ (U_n) est divergente

Mais $U_{2n} = (-1)^{2n} = 1$

$U_{2n+1} = (-1)^{2n+1} = -1$.

(U_{2n}) et (U_{2n+1}) deux suites extraites de (U_n)

et sont convergentes.

3.7: Suites adjacentes:

3.7.1 Définition:

Exemple: ① $U_n = 1 + \frac{1}{n}$ $n \geq 1$, $\vartheta_n = 1 - \frac{1}{n}$

2) $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$, $V_n = U_n + \frac{2}{n+1}$

On dit que les deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes

Si : i) (U_n) est croissante.

ii) (V_n) est décroissante.

iii) $\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

c'est à dire $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} V_n$.

3.7.2: Proposition:

Si deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes **alors** elle sont convergentes et admettent une limite commune.

Preuve: On a: $(U_n) \nearrow$, $(V_n) \searrow$ et $\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

On étude la monotonie de la suite $(V_n - U_n)$

$$(V_{n+1} - U_{n+1}) - (V_n - U_n) = \underbrace{\underbrace{(V_{n+1} - V_n)}_{\leq 0} - \underbrace{(U_{n+1} - U_n)}_{\geq 0}}_{\leq 0}$$

Donc: $(V_n - U_n)$ est décroissante.

$(V_n - U_n)$ est décroissante et convergente

$\Downarrow$

$$\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = \inf (V_n - U_n)$$

$$0 = \inf (V_n - U_n).$$

donc: $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n \geq 0$.

$U_n \leq V_n$.

Ainsi : $U_0 \leqslant U_1 \leqslant U_2 \leqslant \cdots \leqslant U_n \leqslant \vartheta_n \leqslant \vartheta_{n-1} \leqslant \cdots \leqslant \vartheta_0$

$(U_n) \nearrow$ est majorée par $\vartheta_0 \Rightarrow (U_n)$ converge vers ℓ.

$(\vartheta_n) \searrow$ est minorée par $U_0 \Rightarrow (\vartheta_n)$ converge vers ℓ'

De plus : $\lim_n (U_n - \vartheta_n) = \ell - \ell' \Rightarrow 0 = \ell - \ell' \Rightarrow \ell = \ell'$

3.8 Théorème de Bolzano-Weirstrass :

De Toute suite réelle bornée, on peut toujours extraite une sous-suite " suite extraite " convergente

Exemple :

$U_n = (-1)^n$, (U_n) bornée et n'est pas convergente

(U_{2n}) suite extraite de (U_n) converge

$$U_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \longrightarrow 1$$

3.9. Généralisation de la notion de limite

3.9.1 Définition: Un nombre a est dit valeur (au point) d'adhérence d'une suite (U_n) s'il existe une suite extraite $(U_{\phi(n)})$ converge vers a.

Exemple: Soit la suite (U_n) définie par

$$U_n = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } n = 3k. \\ 1 & \text{si } n = 3k+1. \\ 2 & \text{si } n = 3k+2. \end{cases}$$

(U_n) est divergente, mais les trois suites extraites (U_{3k}), (U_{3k+1}) et (U_{3k+2}) sont convergentes. vers respectivement $\frac{1}{3}$, 1 et 2.

$\frac{1}{3}$, 1 et 2 sont des points (valeurs) d'adhérence (les seules) de (U_n).

* La notion de la limite a été généralisée à la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$
* La suite (U_n) est convergente dans $\overline{\mathbb{R}}$

Si: $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$ existe ou $\lim\limits_{n} U_n = +\infty$,

ou $\lim\limits_{n} U_n = -\infty$.

3.9.2 Limite supérieure et inférieure:

Notion: $Ad\{U_n\}$ l'ensemble des points d'adhérences de (U_n) dans $\overline{\mathbb{R}}$.

*) On appelle limite supérieure (respectivement inférieure) de (U_n) la borne supérieure (respectivement inférieure) de $Ad\{U_n\}$.

On notera

$$\overline{\lim}\, U_n = \sup Ad\{U_n\}.$$

$$\underline{\lim}\, U_n = \inf Ad\{U_n\}.$$

Remarque:

$\lim\limits_{n} U_n$ existe dans $\mathbb{R} \iff \overline{\lim}\, U_n = \underline{\lim}\, U_n$

$= \lim\limits_{n} U_n = \ell$

Exemple:

1) La suite (U_n) de l'exemple précédent n'est pas convergente et on a:

$$Ad\{U_n\} = \left\{\frac{1}{3}, 1, 2\right\}.$$

$$\overline{\lim}\, U_n = 2 \text{ et } \underline{\lim}\, U_n = \frac{1}{3}.$$

2) $U_n = (-1)^n$, $Ad\{U_n\} = \{-1, 1\}$

$\overline{\lim}\, U_n = 1$ et $\underline{\lim}\, U_n = -1$

3.10 Suites récurrentes :

3.10.1 Suites récurrentes réelles du premier ordre :

Définition : Une suite récurrente du premier ordre est une suite telle que U_{n+1} exprime en fonction de U_n.

$U_{n+1} = f(U_n)$ où $f : x \longrightarrow f(x)$.
est une fonction réelle donnée la valeur U_n étant donnée.

Exemple :

$U_{n+1} = \sqrt{2 + U_n}$ et $U_0 = 1$

$U_1 = \sqrt{3}$, $U_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Proposition :

Si : (U_n) est une suite récurrente définie par $U_{n+1} = f(U_n)$.

où $f : x \longmapsto f(x)$ est une fonction continue et croissante, alors : (U_n) est monotone de plus
Si : $U_0 \leq U_1$ alors : (U_n) est croissante
Si : $U_0 \geq U_1$ alors : (U_n) est décroissante.

Preuve : $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - f(U_{n-1})$
Comme $f \nearrow$ alors : le signe de $f(U_n) - f(U_{n-1})$ est de même que le signe $U_n - U_{n-1}$ et le signe

de $U_n - U_{n-1}$ est de même que le signe $U_1 - U_0$

Exemple : $U_{n+1} = \sqrt{1+2U_n}$ et $U_0 = 1$

$f(x) = \sqrt{1+2x}$.

f est continue et $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$

f est croissante $\Rightarrow (U_n)$ monotone

$U_1 - U_0 = \sqrt{3} - 1 > 0$.

Donc (U_n) est croissante.

3.10.2 Suites récurrentes du 2ème ordre :

Une suite récurrente du 2ème ordre est une suite de la forme $U_{n+2} = f(U_{n+1}, U_n)$.

$$U_{n+2} + aU_{n+1} + bU_n = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Equation du 2ème ordre homogène :

Les solutions d'une équation homogène est :

$$U_n = r^n$$
$$U_{n+1} = r^{n+1}$$

$$U_{n+2} + aU_{n+1} + bU_n = 0.$$

$$r^{n+2} + a r^{n+1} + b r^n = 0.$$

$$r^n(r^2 + ar + b) = 0 \Rightarrow r^2 + ar + b = 0.$$

Si : $\Delta = 0$, $r_1 = r_2 = r$

$$U_n = \lambda r_1^n + \delta n r_2^{n-1} \qquad \lambda, \delta \in \mathbb{R}.$$

Si : $\Delta > 0$, r_1, r_2.

$$U_n = \lambda r_1^n + \delta r_2^n. \qquad \lambda, \delta \in \mathbb{R}.$$

Si : $\Delta < 0$

$$r_1 = \alpha + i\beta = re^{i\theta} \text{ et } r_2 = \alpha - i\beta = re^{-i\theta}.$$

Donc: $U_n = \lambda r^n e^{in\theta} + \delta r^n e^{-in\theta}$.

Exemple: Résoudre.

① $U_{n+2} = 5U_{n+1} - 4U_n$.

② $U_{n+2} - 2U_{n+1} + U_n = 0$.

③ $U_{n+2} = 2U_{n+1} - 5U_n$.

Solution:

① $U_{n+2} - 5U_{n+1} + 4U_n = 0$.

l'equation de cette suite réelle est:

$r^n(r^2 - 5r + 4) = 0$.

donc $r^2 - 5r + 4 = 0$. $\Leftrightarrow \Delta = 9$.

$r_1 = 1$, et $r_2 = 4$.

$U_n = \lambda r_1^n + \delta r_2^n = \lambda 1^n + \delta 4^n$

Alors: $U_n = \lambda + \delta 4^n$ $(\lambda, \delta \in \mathbb{R})$.