

Chapitre n° 04

Fonctions réelles d'une variable réelle.

- 1- Graphe d'une fonction réelle d'une variable réelle.
- 2- Fonctions paires - impaires.
- 3- Fonctions périodiques.
- 4- Fonctions bornées
- 5- Fonctions monotones.
- 6- Maximum local.
- 7- Minimum local.
- 8- Limite d'une fonction.
- 9- Théorème sur les limites
- 10- Opérations sur les limites.
- 11- Fonctions continues.
- 12- Discontinuités de première et de seconde espèce.
- 13- Continuité Uniforme.
- 14- Théorème sur les fonctions continues sur un intervalle
- 15- Fonction réciproque continue. fermé
- 16- Ordre d'une variable - équivalence
(Notation de Landau).

Chapitre n° 04

Fonctions réelles d'une variable réelle.

4.1 Généralités:

4.1.1 Domaine de définition d'une fonction:

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) une fonction
domaine de définition de f est:

$$D_f = \{ x \in E \mid f(x) \text{ existe} \}$$

Exemple: $f(x) = \frac{1}{x+1}$ $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

4.1.2 : Graphes d'une fonction réelle.

Définition: Graphes d'une fonction appelée courbe
représentative noté C_f d'une fonction $f: D_f \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
est l'ensemble des points (x, y) ;

$$C_f = \{ (x, y) \in D_f \subset \mathbb{R} \mid y = f(x) \}$$

4.1.3 Image directe, Image réciproque.

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction ($E \subset \mathbb{R}$) et soit
 A une partie de E

*) L'image directe de A par f est l'ensemble noté par $f(A)$ définie par $f(A) = \{ f(x) \in \mathbb{R} / x \in A \}$.

**) Soit $B \subseteq \mathbb{R}$ l'image réciproque de B par f est l'ensemble noté $f^{-1}(B)$ définie par.
 $f^{-1}(B) = \{ x \in E / f(x) \in B \}$.

Exemple: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$

① Soit $A = [-1, 1]$
L'image directe de A est $f(A) = f([-1, 1]) = [0, 1]$.
 $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.
 $f(]-\infty, -1]) = [1, +\infty[$.

Soit $B = \{-2\} \Rightarrow f^{-1}(\{-2\}) = \emptyset$.

$B = \{1\} \Rightarrow f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$.

Remarque: $f^{-1}(\{y\})$ peut être vide ou contenant plusieurs éléments

Exemple: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin x$.

$f^{-1}\{1\} = \{ x \in \mathbb{R}, \sin x = 1 \} = \{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \}$
avec $k \in \mathbb{Z}$

$f^{-1}\{0\} = \{ x \in \mathbb{R}, \sin x = 0 \} = \{ k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$

$f^{-1}\{3\} = \emptyset$

(2)

4.2 Fonctions paires, impaires:

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$

Définition: Une fonction f définie sur un intervalle E est dite paire (resp impaire) Si:
 $\forall x \in I: f(x) = f(-x)$ (resp $f(x) = -f(-x)$)
ou bien $-f(x) = f(-x)$

Exemple:

① $f(x) = x^2$ et $f(x) = \cos x$ sont paires.
 $f(-x) = (-x)^2 = x^2$

② $f(x) = x^3$ et $f(x) = \tan x$ sont impaires.

- ① Lorsque la fonction f est paire, les points $M(x, f(x))$ et $M'(-x, f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe $y'Oy$
- ② Lorsque la fonction f est impaire les points $M(x, f(x))$ et $M'(-x, f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'origine.

4.3 Fonctions périodiques:

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subset \mathbb{R}$) une fonction, $T \in \mathbb{R}^*$
 f est dite périodique de période T Si:

① $\forall x \in D_f, x+T \in D_f.$

② $\forall x \in D_f, f(x+T) = f(x)$

Exemple:

① $f: x \mapsto \sin x$, $g: x \mapsto \cos x$.
où $T = 2\pi$ pour période.

$$f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) = \sin x.$$

$$g(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x.$$

② $h: x \mapsto \tan x$ - $T = \pi$ pour période

$$\text{Car } \tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$$

4.4 Fonctions majorée, minorée et bornée:

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) une fonction. On dit que f est:

① Majorée $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E: f(x) \leq m$.

② Minorée $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E: f(x) \geq m$.

③ Bornée \Leftrightarrow elle est majorée et minorée

On peut aussi écrire: $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E: |f(x)| \leq M$

Exemple: $\forall x \in \mathbb{R}: |\sin x| \leq 1$ et $|\cos x| \leq 1$

Donc: $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont des fonctions bornées.

② $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $\forall x \in \mathbb{R}: x^2+1 \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2+1} \leq 1$

f est bornée.

4.5 Fonctions monotones :

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ($E \subseteq \mathbb{R}$) une fonction.
f est dite monotone croissante (resp décroissante)
dans E Si :

$$\forall x, y \in E : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (\text{resp } f(x) \geq f(y))$$

4.6 Maximum local, Minimum local :

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1) On dit que f admet un maximum local en $x_0 \in E$
Si : $f(x_0)$ est le maximum de la partie $f(E) /$

$$f(E) = \{ f(x) / x \in E = D_f \}$$

(M est le maximum de f sur E $\Leftrightarrow f(x) \leq M, \forall x \in E = D_f$)

2) m est le minimum de f sur E $\Leftrightarrow f(x) \geq m, \forall x \in E = D_f$

3) On dit que f admet un maximum local en $x_0 \in E = D_f$
si il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que $f(x_0)$
soit le maximum de $f(E \cap I)$.

4) On dit que f admet un minimum local en $x_0 \in E = D_f$.
si il existe un ouvert I contenant x_0 tel que $f(x_0)$ soit
le minimum de $f(E \cap I)$.

5) Un extremum (local) est un maximum (local) ou un
minimum (local)

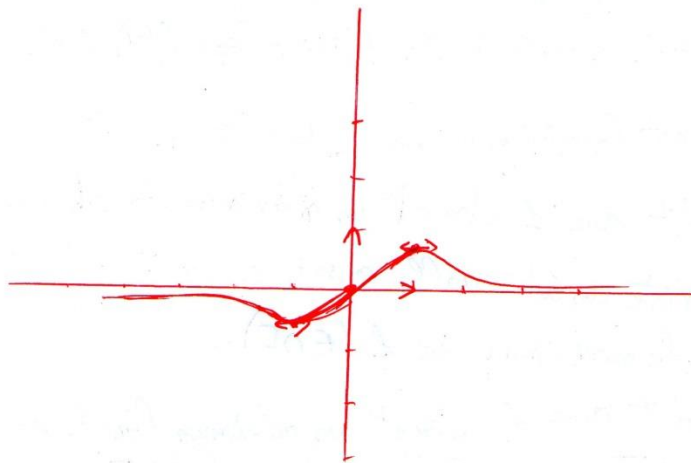
Remarque: Une fonction bornée possède toujours une borne supérieure et une borne inférieure mais pas forcément un maximum et un minimum

Exemple: $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

sur l'intervalle $I =]-2, 2[$ ouvert contenu dans $D_g = \mathbb{R}$

g admet un minimum local $\mu = g(-1) = -\frac{1}{2}$.

et un maximum local $A = g(1) = \frac{1}{2}$.



$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad D_f = [-1, 1].$$

f admet en 1 et -1 des minimums locaux et un maximum strict en 0 .

4.7 Limite d'une fonction:

Définition: Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe un intervalle ouvert I tel que $x_0 \in I \subset V$

Exemple: $V =]1, 5[$ est un voisinage de $x_0 = 2$.
Car: par exemple $2 \in]1, 5[\subset V$

Définition: Soient V un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$

et $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ c'est une fonction.

On dit que f a une limite l ($l \in \mathbb{R}$) en x_0 ssi:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in V: 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Et, on écrit: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Exemple: ① $f(x) = 5x - 4, x_0 = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

En effet, soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\eta > 0$?

$$\begin{aligned} |f(x) - 1| < \varepsilon &\Leftrightarrow |5x - 5| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow 5|x - 1| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

Il suffit de prendre $\eta = \frac{\varepsilon}{5}$

② $f(x) = \frac{\sin x}{x}, x_0 = 0,$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

⑦ Notez que $f(0) \neq$

$$\textcircled{3} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Remarque: Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe, alors $f(x_0)$ peut être existante ou non, même si $f(x_0)$ existe, il est peut être différent de $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

4.8 Limite à gauche, limite à droite:

Définition: On dit que f a une limite à droite (resp à gauche) au point x_0 si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$$

(resp $x_0 - \eta < x < x_0$) $\Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Et, on écrit: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ (resp $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$)

Exemple: ① $f(x) = E(x) \quad x_0 = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$$

Donc: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ n'existe pas.

Notez que $f(2) = E(2) = 2$.

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad x_0 = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$f(0)$ n'existe pas.

Limite infinie =

$$\textcircled{*} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta, \forall x$$

$$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) > A.$$

$$\textcircled{*} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta, \forall x$$

$$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < A.$$

Si $x_0 = +\infty$ ou $x_0 = -\infty$, on pose (q):

$$\textcircled{*} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tel que } x > B \Rightarrow f(x) > A$$

$$\textcircled{*} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tel que } x < -B \Rightarrow f(x) > A$$

$$\textcircled{*} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A < 0, \exists B > 0 \text{ tel que } x > B \Rightarrow f(x) < -A$$

$$\textcircled{*} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall A < 0, \exists B > 0 \text{ tel que } x < -B \Rightarrow f(x) < -A.$$

(9)

4.9 Théorème sur les limites :

Relation entre les limites des fonctions et limites des suites.

Théorème : Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction les deux propriétés suivantes sont équivalentes

i) $\lim_{x \rightarrow u_0} f(x) = l$

ii) Quelle que soit la suite (x_n) , $x_n \in [a, b]$ telle que $x_n \neq u_0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = u_0$

On a : $f(x_n) = l$ (l finie ou infinie)

Preuve

i) \Rightarrow ii)

On a : $\lim_{x \rightarrow u_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [a, b]$
 $0 < |x - u_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = u_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$
 $\forall n > N \Rightarrow |x_n - u_0| < \varepsilon.$

On prend $\varepsilon = \eta$, on trouve.

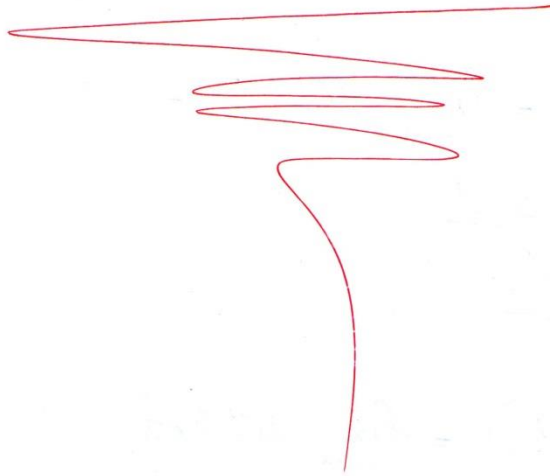
$\forall n > N \Rightarrow |x_n - u_0| < \eta$ ($\varepsilon = \eta$)
 $\Rightarrow 0 < |x_n - u_0| < \eta$ (car $x_n \neq u_0$)

(10)

Donc: $|f(x_n) - l| < \varepsilon$.

Ce qui démontre que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$.

ii) \Rightarrow i) *Exercice*:



Exemple: (de Théorème 1)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

$$x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$$

$$= 1$$

$$y_n = \frac{1}{n\pi}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(n\pi) = 0.$$

On déduit que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ n'existe pas.

Théorème 2: (Théorème des gendarmes (d'encadrement))

Si: $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

Alors: $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$.

4.10 Opérations sur limites:

Soit f et g deux fonctions réelles tq:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \text{ et } l \in \mathbb{R}.$$

Alors:

- ① $\lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) = \lambda l_1$
- ② $\lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 + l_2$
- ③ $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \times g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_1 \times l_2$
- ④ $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad l_2 \neq 0$
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$
- ⑥ Soient x_0, y_0 et l des réels f et g deux fonctions
Alors:
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \\ \lim_{x \rightarrow y_0} g(x) = l \end{cases} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = l$$

Proposition:

- ① $\underline{\underline{S}}i: f \leq g \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$
- ② $\underline{\underline{S}}i: f \leq g \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$
 donc $l_1 < l_2$

Théorème (1) : Si f admet une limite l alors : f est bornée.

Démonstration :

$$|f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$$

donc $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

donc f est bornée.

Théorème (2) :

Si f est bornée et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
alors : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times g(x) = 0$.

Relation entre suite et fonction :

Si : f admet une limite l en x_0 ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$)

Alors : pour toute suite (x_n) qui converge

vers x_0 on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$

4.11 Fonctions continues:

11.1 continuité en un point:

Definition: Soit une fct $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
(I étant intervalle de \mathbb{R}).

On dit que f continue en $x_0 \in I$ SSI:
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ c'est à dire:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I. [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon]$$

11.2 Continuité à droite et à gauche:

① On dit que f est continue à droite de x_0 ssi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0).$$

② On dit que f est continue à gauche de x_0 ssi

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Remarque:

$$f \text{ continue en } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Exemple: ① $f(x) = |x|$. $x_0 = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

donc f est continue en $x_0 = 0$.

$$\textcircled{2} \quad f(x) = E(x) \quad x_n = n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{On a: } E(n) = n, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) = n.$$

$$\lim_{x \rightarrow n^-} f(x) = n-1.$$

$$\lim_{x \rightarrow n} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow n} f(x) \Rightarrow f \text{ est discontinue en } x_0 = n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

$\textcircled{4}$ On peut également exprimer la continuité en utilisant la relation entre la limite d'une fonction et les suites convergentes (voir le cours précédent)

(f continue en $x_0 \in I$) \Leftrightarrow quelle que soit la suite

$$(x_n) \in I$$

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$$

$$\text{Alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

11.3 Opérations sur les fonctions continues:

Théorème: Si $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fcts continues en $x_0 \in I$ Alors:

① $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $f + g$, $f \times g$ et $\frac{f}{g}$ ($g(x) \neq 0$) sont continues en x_0 .

② Si f est continue en x_0 et g continue en $f(x_0)$ Alors $g \circ f$ est continue en x_0 . $\left(\lim_{x \rightarrow x_0} (g \circ f)(x) = g \circ f(x_0) \right)$

(continuité de la fonction composée)

Théorème: Soit $f: I \rightarrow I$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fcts. Si f est continue en x_0 et g continue en $y_0 = f(x_0)$

Alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

g continue en $y_0 = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in I$
 $0 < |y - y_0| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \epsilon$

Comme f est continue en x_0 .

$\exists \eta > 0, \forall x \in I: [0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon < \eta$
 $\Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \epsilon$
 $\Rightarrow |g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| < \epsilon$.

Ce qui prouve que $g \circ f$ est continue en x_0 .

11.4 Prolongement par continuité:

Définition: Soit f une fonction définie et continue

sur $I \setminus \{x_0\}$ ($I - \{x_0\}$).

Supposons que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existe.

Alors: la fonction \tilde{f} définie sur I

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0. \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

et dite prolongement par continuité de f en x_0 .

Exemples: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ Donc \tilde{f} définie sur \mathbb{R} par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

\tilde{f} est continue sur \mathbb{R} .

\tilde{f} est la fonction prolongée par continuité de f en 0.

11.5 Fonction continue sur un intervalle:

Définition: Une fonction définie sur intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est dite continue sur I si elle est continue en tous points de I

Remarque: Les fonctions polynômes et rationnelles sont continues sur leur domaine de définition.

Exemple:

$$f(x) = x^2 - 2x + 1 \text{ continue sur } \mathbb{R}.$$

$$g(x) = \frac{x^3 - 1}{x} \text{ continue sur } \mathbb{R} - \{0\}.$$

$$h(x) = \sqrt{x} \text{ continue sur } \mathbb{R}^+$$

4.12 Théorème sur les fonctions continue sur intervalle fermé:

Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, Alors:

① f est bornée (i.e, $\forall x \in [a, b], |f(x)| \leq M$).

② f atteint sa borne supérieure et sa borne inférieure c'est à dire:

$$\exists x_1 \in [a, b], f(x_1) = \sup f(x), \quad x \in [a, b].$$

$$\text{et } \exists x_2 \in [a, b], f(x_2) = \inf f(x), \quad x \in [a, b].$$

Preuve:

Supposons que f continue et n'est pas bornée sur $[a, b]$.

Donc: $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b], |f(x_n)| > n$.

La suite (x_n) est bornée $\Rightarrow (x_n)$ admet une suite extraite

$(x_{\phi(n)})$ convergente.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\phi(n)} = \bar{x} \in [a, b]$ car $a < x_{\phi(n)} < b$.

On a: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_{\phi(n)})| = +\infty$. — (1)

Comme f est continue sur $[a, b]$ et $x_{\phi(n)} \rightarrow \bar{x}$.

Alors: $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_{\phi(n)})| = |f(\bar{x})| < +\infty$.

Contradiction avec (1).

Donc f est bornée.

(2) $\sup f(x)$ et $\inf f(x)$ existent

a) Supposons que $\forall x \in [a, b], f(x) < \sup f(x) = M$

On pose: $g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$ g continue sur $[a, b]$.

D'après g est bornée.

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : |g(x)| \leq c, \forall x \in [a, b]$.

$\Rightarrow \frac{1}{M - f(x)} \leq c \Rightarrow M - f(x) \geq \frac{1}{c}$ donc $f(x) \leq M - \frac{1}{c}$.

Contradiction avec $\sup f = M$.

(20)

Donc : $\exists x_1 \in [a, b] : f(x_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$.

D'une autre façon :

Soit f une fonction de $[a, b]$ dans \mathbb{R} . On dit que f est continue sur $[a, b]$ Si :

- ① f est continue sur l'intervalle $]a, b[$.
- ② f est continue à droite en a .
- ③ f est continue à gauche en b .

4.13 Discontinuité du premier et du second espèce :

- ① f possède une discontinuité du premier espèce en x_0 Si : f n'est pas continue en x_0 et admet une limite à droite et une limite à gauche en x_0 .
- ② f possède une discontinuité du deuxième espèce Si : f n'est pas continue en x_0 et que la discontinuité n'est pas premier espèce.

Exemples

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{x^2}}{x} & \text{si } x \neq 0. \\ 2 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{2\sqrt{x^2}}{x} \quad \text{si } x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

$$f(0) = 2.$$

$$\textcircled{a} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} = 2.$$

$$\textcircled{b} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2(-x)}{x} = -2$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Donc f possède une discontinuité du premier espèce.

$$\textcircled{2} \quad g(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \text{D}_g = \mathbb{R} - \{0\}.$$

g n'est pas continue en $x_0 = 0$.

Donc g possède une discontinuité du second espèce.

4.14 Théorème des valeurs intermédiaires:

Théorème 1: Soit f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$ $\Leftrightarrow f(a) \cdot f(b) < 0$
Alors: $\exists c \in]a, b[: f(c) = 0$.

Théorème 2: Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur I intervalle quelconque de \mathbb{R} .
Soit $a < b$ deux éléments de I pour tout réel strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = l$.

Preuves

Supposons que $f(a) < f(b)$ donc $f(a) < l < f(b)$.
soit $g(x) = f(x) - l$.

g est continue sur $[a, b]$.

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - l < 0 \\ g(b) = f(b) - l > 0 \end{cases} \Rightarrow f(a) - f(b) < 0$$

D'après le théorème précédent
 $\exists c \in]a, b[: g(c) = 0 \Rightarrow g(c) = f(c) - l = 0$
 $\Rightarrow f(c) = l$.

Exemple: $f(x) = x^5 - 3x + 1$ montrer que $\exists c \in]0, 1[$.
 f est continue sur $[0, 1]$ et on a: $f(0) \cdot f(1) = 1 \times (-1) < 0$.
Donc $\exists c \in]0, 1[: f(c) = 0$

4.15 Continuité uniforme

Définition: Une fonction f définie sur intervalle I est dite uniformément continue (U.C.) sur I si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I.$$

$$[|x - y| < \eta, |f(x) - f(y)| < \varepsilon].$$

c'est à dire :

$$\forall x_n, y_n \in I : |x_n - y_n| \rightarrow 0.$$

$$\Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0.$$

Exemple:

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad I = [1, +\infty[.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $x, y \in [1, +\infty[$.

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| \frac{y-x}{xy} \right|$$

$$x \geq 1 \text{ et } y \geq 1 \Rightarrow xy \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{xy} \leq 1$$

$$\text{donc } \frac{|y-x|}{xy} = \frac{|x-y|}{xy} < |x-y|.$$

$$\text{Alors } |f(x) - f(y)| < |x-y|.$$

Donc il suffit de prendre $\eta = \varepsilon$.

Donc f est U.C. sur $[1, +\infty[$.

Remarque:

① La continuité uniforme est une propriété de f sur intervalle

alors que la continuité peut être définie en un point.

② Si f est U.C sur I alors f est continue sur I .

③ En général si f est continue sur I f n'est pas nécessairement U.C sur I .

Exemple: $f(x) = \frac{1}{x}$ $I =]0,1]$.

f est continue sur $]0,1]$.

$$P: (f \text{ est U.C}) \Leftrightarrow \forall x_n, y_n \in]0,1], |x_n - y_n| \rightarrow 0 \\ \Rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0.$$

$$\overline{P}: (f \text{ n'est pas U.C}) \Leftrightarrow (\exists x_n, y_n \in I \quad |x_n - y_n| \rightarrow 0 \\ \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \not\rightarrow 0)$$

$$\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow A \wedge \overline{B}$$

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow \overline{A} \vee B.$$

On prend: $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = \frac{1}{n+1}$ $n \neq 0$.

$$|x_n - y_n| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0.$$

Mais $|f(x_n) - f(y_n)| = |n - (n+1)| = 1 \not\rightarrow 0$.

Donc f n'est pas U.C sur $]0,1]$.

4.16 Fonction Lipschitzienne :

Définition : Soit I un intervalle sur \mathbb{R} . une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite Lipschitzienne s'il existe une constante $k > 0$ telle que.
 $\forall x, y \in I : |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|.$

D'après la définition précédente :

f Lipschitzienne sur $I \Rightarrow f$ est U.C sur I .

$$\text{En effet : } |f(x) - f(y)| \leq k |x - y| < k + 1 |x - y|.$$

Donc : il suffit de prendre $\eta = \frac{\epsilon}{k+1}$

Exemple : $f(x) = x^2$ et $I = [0, 1]$.

$$\forall x, y \in [0, 1].$$

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x+y)(x-y)| = \underbrace{|(x+y)|}_{=(x+y)|x-y|} |x-y| \leq 2|x-y|.$$

$$\begin{cases} x \leq 1 \\ y \leq 1 \end{cases} \Rightarrow (x+y) \leq 2.$$

Donc : f est Lipschitzienne $\Rightarrow f$ est U.C sur $[0, 1]$.

4.17 Théorème de Heine

Une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ est U.C sur cet intervalle.

Exemple : $f(x) = \frac{1}{x}$, f est continue sur $[\frac{1}{2}, 1]$
 \Downarrow
 f est U.C sur $[\frac{1}{2}, 1]$.

4.18 Fonction réciproque continue :

18.1 Théorème : Si f une fonction continue et strictement monotone sur $[a, b]$ alors f est une bijection de $[a, b]$ dans $f([a, b])$.

18.2 Définition : Soit f une bijection donc f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement monotone sur $f([a, b])$ et du même sens de monotonie de f .

$$f^{-1} : f([a, b]) \longrightarrow [a, b].$$
$$x \longmapsto f^{-1}(x).$$

Exemple : $f(x) = 4x - 1$ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto y = f(x).$

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$\text{On a : } f(x) = y = 4x - 1 \Rightarrow x = \frac{y+1}{4}$$

$$\text{donc } x = \frac{y}{4} + \frac{1}{4} = f^{-1}(y).$$

$$\text{Alors } \underline{f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}}.$$

4.19. Ordre d'une variable - équivalence (Notation de Landau).

19.1 : Fonctions négligeables :

Déf : Soit f, g deux fonctions définies sur le même intervalle I dans un voisinage du point x_0 (à gauche et à droite de $x_0 \in \mathbb{R}$ avec

$$\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty].$$

On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe une fonction ε définie sur I avec.

$$f = \varepsilon \times g \text{ et } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0.$$

on note alors $f = o_{x_0}(g)$.

On appelle $f = o(g)$ la notation de Landau.

Remarque: Si la fonction g ne s'annule pas en voisinage de x_0 .

donc: $f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Exemple:

①

$$x = o_{+\infty}(x^2)$$

$$\exists \varepsilon \text{ avec } \varepsilon(x) = \frac{1}{x},$$

$$x = \frac{1}{x} x^2 \quad / \quad \varepsilon = \frac{f}{g}$$

tel que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

$$x = o_{+\infty}(x^2) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0.$$

② $x+1 = o_{+\infty}(x)^2$

③ $x = o_{+\infty}(e^x)$

④ $x^a = o_{+\infty}(e^{\beta x})$
 $(\alpha, \beta > 0)$.

19.2 Fonctions équivalentes :

On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 si et seulement si $(f-g)$ est négligeable devant g .

On écrit :

$$f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow f - g = o_{x_0}(g)$$

$$\text{Sinon } x \underset{x_0}{\sim} x \quad f - g = o_{x_0}(f) \quad \begin{cases} f - g = \frac{\varepsilon}{1} g \\ f - g = \frac{\varepsilon}{2} g \end{cases}$$

$$g \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f-g}{g} = 0.$$

$$f \neq 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g}{g} \quad \rightarrow 1$$

tel que $f \neq 0$ et $g \neq 0$ sur $V - \{x_0\}$.

$$\text{Alors } \underline{f \underset{x_0}{\sim} g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1}$$

Exemple :

$$\sin x \underset{0}{\sim} x.$$

$$\cos x \underset{0}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}.$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x.$$

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x.$$