

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche  
Scientifique

Université 8 Mai 1945 Guelma

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique  
et des Sciences de la Matière

Département de Mathématiques



## **Polycopié de cours**

Présenté aux étudiants

**Licence Académique en Mathématiques**

Par :

**M<sup>me</sup> Frioui Assia**

**Intitulé**

**Module d'Analyse 1**

**Janvier 2016**

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Corps des nombres réels</b>	<b>5</b>
1.1	Propriétés des nombres réels . . . . .	5
1.1.1	Définition axiomatiques des nombres réels . . . . .	5
1.1.2	Majorant, minorant, maximum, minimum . . . . .	7
1.1.3	borne supérieure, borne inférieure . . . . .	8
1.2	Axiome de la borne supérieure . . . . .	9
1.3	Valeur absolue et propriétés . . . . .	11
1.4	Propriété d'Archimède . . . . .	13
1.5	Partie entière . . . . .	13
1.6	Densité dans $\mathbb{R}$ . . . . .	14
1.7	Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$ . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Suites Réelles</b>	<b>16</b>
2.1	Définitions . . . . .	16
2.1.1	Définition d'une suite . . . . .	16
2.1.2	Suites bornées, suites monotones . . . . .	17
2.1.3	Suites extraites . . . . .	18

2.2	Limite inférieure et limite supérieure d'une suite . . . . .	19
2.3	Convergence et divergence des suites et propriétés . . . . .	20
2.3.1	Opérations sur les suites convergentes . . . . .	23
2.3.2	Convergence des suites monotones . . . . .	25
2.4	Suites adjacentes . . . . .	28
2.5	Suites récurrentes . . . . .	30
2.5.1	Sens de variation de la suite récurrente . . . . .	31
2.5.2	Etude de la convergence . . . . .	31
2.6	Suite de Cauchy . . . . .	32
2.7	Théorème de Bolzano-Weierstrass . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Fonctions réelles d'une variable réelle. Limites et continuité</b>	<b>35</b>
3.1	Généralités sur les fonctions . . . . .	35
3.1.1	Opérations algébriques sur les fonctions . . . . .	36
3.1.2	Fonctions paire, impaire et périodique . . . . .	36
3.1.3	Fonctions bornées et fonctions monotones . . . . .	37
3.2	Limite d'une fonction . . . . .	38
3.3	Opérations sur les limites . . . . .	40
3.4	Fonctions continues . . . . .	42
3.4.1	Définitions Continuité en un point . . . . .	42
3.4.2	Continuité et limite de suite . . . . .	43
3.4.3	Fonctions continues sur un intervalle . . . . .	43
3.4.4	Fonctions discontinues . . . . .	44
3.4.5	Prolongement par continuité . . . . .	45
3.5	Opérations sur les fonctions continues . . . . .	45
3.5.1	Continuité de la fonction composée . . . . .	46
3.5.2	Continuité uniforme . . . . .	46

3.6	Théorèmes fondamentaux . . . . .	47
3.6.1	Fonctions continues sur un intervalle fermé et borné . . . . .	47
3.6.2	Théorème des valeurs intérieures . . . . .	47
3.7	Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Fonctions dérivables</b>	<b>50</b>
4.1	Définitions et propriétés des fonctions dérivables . . . . .	50
4.1.1	Dérivée d'une fonction en un point . . . . .	50
4.1.2	Dérivabilité et continuité . . . . .	54
4.1.3	Dérivabilité sur un intervalle . . . . .	54
4.1.4	Dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz) . . . . .	55
4.2	Opérations sur les fonctions dérivables . . . . .	57
4.2.1	Dérivée d'une fonction composée . . . . .	58
4.2.2	Dérivée d'une fonction réciproque . . . . .	59
4.3	Théorème de Rolle et des accroissements finis . . . . .	61
4.3.1	Règle de L'Hôpital et applications . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Fonctions élémentaires</b>	<b>66</b>
5.1	Fonctions circulaires et leurs inverses . . . . .	66
5.2	Fonctions hyperboliques et leurs inverses . . . . .	70
5.2.1	Fonctions hyperboliques . . . . .	70
5.2.2	Fonctions hyperboliques réciproques . . . . .	71

## Préface

Ce polycopié est destiné aux étudiants en formation de licence et présente le contenu du cours d'analyse 1 de première année conforme aux programmes d'enseignement du canevas.

L'objectif de ce cours est de faire une transition entre les connaissances en analyse accumulées au lycée et les bases qui formeront un des piliers dans la formation en analyse mathématique de la licence.

Ce cours est structuré comme suit :

On y résume d'abord dans le chapitre 1 les propriétés des nombres réels sous la forme de quatorze axiomes simples, puis on en déduit rigoureusement l'ensemble des résultats qui font les propriétés de  $\mathbb{R}$ .

Au chapitre 2, après quelques généralités sur les suites, nous étudierons la notion de suite convergente. Comme exemple de suites convergentes, nous étudierons les suites monotones et les suites adjacentes. Nous présenterons ensuite les suites divergentes non bornées, puis les suites récurrentes. Ce chapitre se termine par quelques théorèmes, dont celui de Bolzano - Weierstrass et le critère de convergence de Cauchy.

Le chapitre 3 traite les fonctions réelles à variable réelle. Nous étudierons la notion de limite et quelques théorèmes qui caractérisent cette limite. Nous étudierons également la continuité des fonctions, et nous présenterons les concepts fondamentaux pour la compréhension de cette notion.

Au chapitre 4 nous étudierons la dérivabilité des fonctions. Nous commençons par des définitions de la dérivabilité en un point, sur un intervalle. Ensuite, nous présenterons quelques théorèmes d'applications sur les fonctions dérivables et leurs conséquences.

Le chapitre 5 et dernier est consacré à l'étude des fonctions circulaires et leurs réciproques ainsi que les fonctions hyperboliques et leurs inverses.

# Chapitre 1

## Corps des nombres réels

Le résultat essentiel qui fait l'objet de ce chapitre est donné dans le théorème suivant :

**Théorème 1.1** *L'ensemble des nombres réels, noté  $\mathbb{R}$ , est un corps commutatif, totalement ordonné, Archimédien et, satisfait à l'axiome de la borne supérieure.*

La suite du cours consiste à expliquer chaque notion voire les propriétés fondamentales de l'ensemble  $\mathbb{R}$  introduite dans ce théorème.

### 1.1 Propriétés des nombres réels

#### 1.1.1 Définition axiomatiques des nombres réels

Le corps des nombres réels est un ensemble  $\mathbb{R}$  dans le quel sont définies deux lois de composition internes : L'addition (notée  $+$ ) et la multiplication (notée  $\cdot$ ) représentées par les schémas

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+} \mathbb{R} \quad ; \quad \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{\cdot} \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow x + y \quad (x, y) \rightarrow x \cdot y$$

et une relation d'ordre notée  $x \leq y$  ou  $(x \geq y)$  satisfaisant les axiomes suivants :

1.  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  est un corps commutatif

A<sub>1</sub>) La loi  $+$  est commutative :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = y + x,$

A<sub>2</sub>) la loi  $+$  est associative :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x + y) + z = x + (y + z),$

A<sub>3</sub>) la loi  $+$  admet un élément neutre :  $\forall x \in \mathbb{R}, x + 0 = 0 + x = x,$

A<sub>4</sub>) tout élément de  $\mathbb{R}$  admet un symétrique pour la loi  $+$  :  $\forall x \in \mathbb{R}, x + (-x) = (-x) + x = 0,$

A<sub>5</sub>) La loi  $\cdot$  est commutative :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \cdot y = y \cdot x,$

A<sub>6</sub>) la loi  $\cdot$  est associative :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),$

A<sub>7</sub>) la loi  $\cdot$  admet un élément neutre :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,$

A<sub>8</sub>) tout élément de  $\mathbb{R}^*$  admet un symétrique pour la loi  $\cdot$  :  $\forall x \in \mathbb{R}^*, x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1,$

A<sub>9</sub>) La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$$

2.  $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$  est un corps totalement ordonné

La propriété 2 signifie pour sa part que  $\leq$  est une relation d'ordre total dans  $\mathbb{R},$

c'est à dire que

A<sub>10</sub>) la relation est réflexive :  $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x,$

A<sub>11</sub>) la relation est antisymétrique :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y,$

A<sub>12</sub>) la relation est transitive :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$

A<sub>13</sub>) la relation  $\leq$  est totale :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y) \text{ ou } (y \leq x)$

et que cette relation d'ordre est compatible avec les lois  $+$  et  $\cdot$ , c'est-à-dire que

A<sub>14</sub>)  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

A<sub>15</sub>)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x \leq y \text{ et } z \geq 0) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z.$

**Remarque 1.1** *Tous ces axiomes sont également vérifiés par l'ensemble  $\mathbb{Q}$  des nombres rationnels. Nous verrons dans la suite que ce qui le distingue de  $\mathbb{R}$ , est l'axiome de la borne supérieure.*

**Remarque 1.2** *D'après ce qui précède on a :*

- 1)  $\forall x, y, z, t \in \mathbb{R}, \left. \begin{array}{l} x \leq y \\ z \leq t \end{array} \right\} \Rightarrow x + z \leq y + t$  (découle de  $A_{14}$ );
- 2)  $x \leq y \Rightarrow -x \geq -y$ ;    3)  $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$ ;
- 4)  $(z > 0) \wedge (x \leq y) \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z$ ;
- 5)  $(x \leq 0) \wedge (y \geq 0) \Rightarrow x \cdot y \leq 0$ ;
- 6)  $y > x > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ ;
- 7)  $\forall m \in \mathbb{N}^*, 0 < x < y \Rightarrow 0 < x^m < y^m$ ;
- 8)  $\frac{x}{y} < 1 \not\Rightarrow x \leq y$ ;    9)  $(x \leq y) \wedge (z \leq t) \not\Rightarrow x - z \leq y - t$ .

Vérifions quelques propriétés telles que 3, 8 et 9.

Pour 3 :  $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} > 0$ , en effet, soit  $x > 0$  et supposons que  $\frac{1}{x} < 0 \Rightarrow -x^{-1} > 0$

$$\text{on a } \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ -x^{-1} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{(-x^{-1}) \cdot (x)}_{-1} > 0 \Rightarrow -1 > 0, \text{ contradiction d'où } \frac{1}{x} > 0.$$

Pour 8 : D'abord si  $x, y$  sont positifs (8) est évidente sinon, soit  $(x = 1) \wedge (y = -1)$  alors  $\frac{1}{-1} \leq 1$  (impossible).

Pour 9 : Soient  $x = 1, y = 2, z = 5, t = -3$ , on a :  $x - z = 6 \not\leq y - t = 5$ , par contre  $x + z = -4 < y + t = -1$

### 1.1.2 Majorant, minorant, maximum, minimum

**Définition 1.1** Soit  $E$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

- Un réel  $M$  est un majorant de  $E$  si  $\forall x \in E, x \leq M$ .
- Un réel  $m$  est un minorant de  $E$  si  $\forall x \in E, x \geq m$ .

**Remarque 1.3** La partie  $E$  est dite majorée (resp. minorée) dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si elle possède au moins un majorant (resp. minorant) et bornée si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

**Proposition 1.1** Une partie  $E$  de  $\mathbb{R}$  est bornée si et seulement si, il existe un nombre  $M \geq 0$  tel que

$$\forall x \in E, |x| \leq M$$

La démonstration est à faire en exercice.

**Définition 1.2** Soit  $E$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ , on dit que.

- Le réel  $\alpha$  est le plus grand élément (ou maximum) de  $E$  si  $\alpha \in E$  et  $\alpha$  est un majorant de  $E$ . Et on note  $\max(E) = \alpha$ .

- Le réel  $\beta$  est le plus petit élément (ou minimum) de  $E$  si  $\beta \in E$  et  $\beta$  est un minorant de  $E$ . Et on note  $\min(E) = \beta$ .

**Proposition 1.2** Les majorants et les minorants ne sont pas en général uniques, par contre un plus grand élément et un plus petit élément s'ils existent sont uniques.

**Preuve** Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux plus grands éléments d'une partie  $E$ . Comme  $M_1 \in E$  et  $M_2$  est un majorant de  $E$  alors  $M_1 \leq M_2$ ; inversement  $M_2 \in E$  et  $M_1$  est un majorant de  $E$  alors  $M_2 \leq M_1$ . Donc  $M_1 = M_2$ . De même, pour le minimum. ■

### 1.1.3 borne supérieure, borne inférieure

**Définition 1.3** Soit  $E$  une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

- Si  $E$  est majorée, on appelle borne supérieure de  $E$  et on note  $\sup(E)$  le plus petit des majorants de  $E$ .
- Si  $E$  est minorée, on appelle borne inférieure de  $E$  et on note  $\inf(E)$  le plus grand des minorants de  $E$ .

**Exemple 1.1** Trouver la borne supérieure, la borne inférieure, l'ensemble des majorants et minorants, le maximum et le minimum s'ils existent des ensembles suivants :

A)  $E_1 = [0, 1[$ , B)  $E_2 = ]-\infty, 1[$ , C)  $E_3 = \left\{ 3 + \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ .

**Solutions :**

A) 1.  $\sup(E_1) = 1$  : en effet, les majorants de  $E_1$  sont les éléments de  $[1, \infty[$ . Donc le plus

petit des majorants est 1,  $\max(E_1)$  n'existe pas car  $1 \notin E_1$

2.  $\inf(E_1) = 0$  : en effet, les minorants de  $E_1$  sont les éléments de  $] -\infty, 0]$ . Donc le plus grand des minorants est 0,  $\min(E_1)$  existe car  $0 \in E_1$  et on a  $\min(E_1) = 0 = \inf(E_1)$ .

B) 1.  $\forall x \in E_2, x < 1$  donc  $\sup(E_2) = 1$ , les majorants de  $E_2$  sont les éléments de  $]1, \infty[$ ,  $\max(E_1)$  n'existe pas

2. Ensemble des minorants est vide et donc  $E_2$  n'admet pas de borne inférieure.

C) Si  $n$  est pair ( $n = 2k$  et  $k \geq 1$ ) :  $3 < 3 + \frac{1}{2k} \leq \frac{7}{2}$

Si  $n$  est impair ( $n = 2k + 1$  et  $k \geq 0$ ) :  $2 \leq 3 + \frac{1}{2k+1} < 3 < \frac{7}{2}$ .

Donc  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 \leq 3 + \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{7}{2}$ , dès lors

$\sup(E_3) = \frac{7}{2} \in E_3$  ainsi  $\max(E_3) = \frac{7}{2}$  et  $\inf(E_3) = \min(E_3) = 2$  car  $2 \in E_3$ .

## 1.2 Axiome de la borne supérieure

### Proposition 1.3 (*Caractérisation de la borne supérieure*)

Soit  $E$  une partie majorée de  $\mathbb{R}$ , alors

$$M = \sup(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E : & x \leq M, \\ & \text{et} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x \in E; & M - \epsilon < x \leq M \end{cases}$$

De même, si  $E$  une partie minorée de  $\mathbb{R}$ , alors

$$m = \inf(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in E : & x \geq m, \\ & \text{et} \\ \forall \epsilon > 0, \exists x \in E; & m \leq x < m + \epsilon. \end{cases}$$

**Proposition 1.4** Soit  $E$  une partie majorée de  $\mathbb{R}$

- Si  $E$  est majorée, alors  $-E$  est minorée et :  $\inf(-E) = -\sup(E)$ .
  - si  $E$  est minorée, alors  $-E$  est majorée et :  $\sup(-E) = -\inf(E)$ .
- où  $-E = \{-x \mid x \in E\}$ .

On étend la définition de  $\sup$  et  $\inf$  aux parties non majorées et non minorées par la convention suivante

2. Si  $E$  n'est pas majorée, on écrit  $\sup(E) = +\infty$ .

3. Si  $E$  n'est pas minorée, on écrit  $\inf(E) = -\infty$ .

- Enonçons maintenant le dernier axiome de  $\mathbb{R}$  qui fait la spécificité de ce dernier par rapport à  $\mathbb{Q}$  à savoir l'axiome de la borne supérieure ( $A_{16}$ ) qui se traduit en :
- Toute partie non vide et majorée  $E \subset \mathbb{R}$  admet une borne supérieure.
- Toute partie non vide et minorée  $E \subset \mathbb{R}$  admet une borne inférieure.

**Exemple 1.2** La partie  $E = \{x \in \mathbb{Q}; x^2 \leq 2\}$  de  $\mathbb{Q}$  admet  $\sqrt{2}$  comme borne supérieure dans  $\mathbb{R}$ , alors qu'elle n'admet pas de borne supérieure dans  $\mathbb{Q}$ .

**Preuve** En effet, Supposons que  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ , alors  $\exists (a, b) \in (\mathbb{N}^*, \mathbb{N}^*)$  tel que  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ,  $a$  et  $b$  premiers

entre eux (c'est à dire n'ayant pas de diviseur commun autre que 1).

Il en résulte l'égalité  $a^2 = 2b^2$  ce qui montre  $a^2$  est pair, donc  $a$  est pair aussi et s'écrit  $a = 2p$  avec  $p \in \mathbb{N}$ .

On a alors,  $a^2 = 4p^2 = 2b^2$  d'où  $b^2 = 2p^2$ . Comme  $a^2, b^2$  est pair donc  $b$  aussi qui s'écrit  $b = 2q, q \in \mathbb{N}^*$ .

On voit donc que  $a$  et  $b$  ne sont pas premiers entre eux (à cause du facteur commun 2) d'où une contradiction. ■

Disons aussi que dans cet exemple on a montré que  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel et de ce fait on a :

**Définition 1.4** Les éléments de  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont appelés nombres irrationnels.

Autres exemples de nombres irrationnels :  $\pi$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $e$ , etc

### 1.3 Valeur absolue et propriétés

On appelle valeur absolue, l'application définie par :

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$x \rightarrow |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En d'autres termes,  $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = \max(x, -x)$ .

#### Propriétés

- 1)  $\forall x \in \mathbb{R} : |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- 2)  $\forall x \in \mathbb{R} : -|x| \leq x \leq |x|$
- 3)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- 4)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| \leq |x| + |y|$  (première inégalité triangulaire)
- 5)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : ||x| - |y|| \leq |x - y|$  (deuxième inégalité triangulaire)
- 6)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+ : |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq +a$
- 7)  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}^+ : |x| \geq a \Leftrightarrow (x \geq +a) \text{ où } (x \leq -a)$
- 8)  $\forall x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2} = |x| \text{ et } |x|^2 = x^2$

**Preuve** Des inégalités 4 et 5. On sait que :

$$-|x| \leq x \leq |x| \text{ et } -|y| \leq y \leq |y|.$$

En additionnant

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|),$$

puis en utilisant 6, on obtient

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Puisque  $x = (x - y) + y$ , on a d'après l'inégalité 4 :

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Donc  $|x| - |y| \leq |x - y|$ , et en intervertissant les rôles de  $x$  et  $y$ , on a aussi

$$|y| - |x| \leq |y - x|$$

comme  $|y - x| = |x - y|$ , on a donc

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

■

**Exercices** Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ . Démontrer les relations suivantes :

- 1)  $\max(-x, -y) = -\min(x, y)$ ; 2)  $\min(-x, -y) = -\max(x, y)$ ;  
 3)  $\max(x, y) = \frac{1}{2} [(x + y) + |x - y|]$ ; 4)  $\min(x, y) = \frac{1}{2} [(x + y) - |x - y|]$ .

**Solutions**

1) Si  $-x < -y$  alors on a  $\begin{cases} 1) \max(-x, -y) = -y \\ 2) y < x \text{ et } \min(x, y) = y \end{cases}$   
 et donc  $-y = \max(-x, -y) = -\min(x, y)$ .

2) Démonstration analogue

3) Supposons  $x < y$ . Alors on a

a)  $\max(x, y) = y$  et  $|x - y| = -(x - y)$  par conséquent

$$\max(x, y) = y = \frac{1}{2} [(x + y) + -(x - y)] = \frac{1}{2} [(x + y) + |x - y|]$$

b)  $\min(x, y) = x$  et  $|x - y| = (y - x)$  par conséquent

$$\min(x, y) = x = \frac{1}{2} [(x + y) - (y - x)] = \frac{1}{2} [(x + y) - |x - y|]$$

**Identités remarquables bien utile**

**Proposition 1.5** (*Formule du binôme*)

1)  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_k^n a^k b^{n-k}, \quad \text{où } C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2)  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

## 1.4 Propriété d'Archimède

**Proposition 1.6**  $\mathbb{R}$  est Archimédien, ce qui signifie

$$\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \quad \text{tel que } nx \geq y.$$

**Preuve** Supposons par l'absurde que  $\exists (x, y) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}$ , tel que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on ait  $nx < y$ .

Définissons la partie de  $\mathbb{R}$  suivante  $A := \{ nx, \quad n \in \mathbb{N}^* \}$ . Elle est une partie non vide et majorée par  $y$ . D'après l'axiome de la borne supérieure  $A$  possède une borne supérieure  $a \in \mathbb{R}$ , on a alors  $nx \leq a, \forall n \in \mathbb{N}^*$  en particulier pour  $n + 1$ .

$\forall n \in \mathbb{N}^* : (n + 1)x \leq a$ , donc  $nx \leq a - x$ , ce qui signifie que  $(a - x)$  est un majorant de  $A$  strictement inférieure à  $a$  (comme  $x > 0, a - x < a$ ) contradiction puisque  $a$  est le plus petit des majorants.  $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \exists n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $0 < \frac{1}{n} < x$ , cas particulier de la proposition 1.7. ■

## 1.5 Partie entière

**Proposition 1.7** Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Il existe un unique entier relatif  $k \in \mathbb{Z}$  tel que :  $k \leq x < k + 1$ .

Cet entier est appelé la partie entière de  $x$  et est noté  $[x]$  ou  $E(x)$ .

**Exemple 1.3**  $E(\sqrt{2}) = 1, \quad E(-\pi) = -4, \quad E(0,67) = 0$ .

**Remarque 1.4** Les deux majorations suivantes sont souvent utiles dans les exercices :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad E(x) \leq x < E(x) + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < E(x) \leq x$$

## 1.6 Densité dans $\mathbb{R}$

Les ensembles  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  sont denses dans  $\mathbb{R}$  ce qui signifie :

**Proposition 1.8** *Etant donnés deux réels  $x$  et  $y$  vérifiant  $x < y$ , il existe au moins un rationnel et un irrationnel dans l'intervalle  $]x, y[$ .*

**Preuve** Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que  $x \neq y$  et  $x < y$ , alors  $y - x \in \mathbb{R}_*^+$ , En applique la propriété d'Archimède (théorème 1.5) à  $(y - x > 0$  et  $1)$ , on voit qu'il existe un entier  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{y-x} < n$ , on obtient  $nx + 1 < ny$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $nx$  possède une partie entière, soit  $k$  cette quantité, on a alors :

$$k = E(nx) \leq nx < k + 1$$

on a alors

$$\frac{k}{n} \leq x < \frac{k}{n} + \frac{1}{n}$$

puisque

$$\frac{k}{n} \leq x \Rightarrow \frac{k}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n}$$

d'où :

$$\frac{k}{n} \leq \underline{x} < \frac{k}{n} + \frac{1}{n} < x + \frac{1}{n} < \underline{y}$$

on voit bien qu' il existe un rationnel  $r = \frac{k+1}{n}$  tel que  $x < r < y$ .

Remarquons que d'après ce qui précède on peut trouver un rationnel  $\underline{r}$  appartenant à l'intervalle  $]x + \sqrt{2}, y + \sqrt{2}[$ , le nombre  $r - \sqrt{2}$  est donc irrationnel qui appartient à  $]x, y[$ . ■

## 1.7 Droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$

**Définition 1.5** *(Droite numérique achevée)*

On appelle droite numérique achevée l'ensemble, noté  $\overline{\mathbb{R}}$  obtenu en ajoutant deux éléments à  $\mathbb{R}$  :  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

**Notation 1.1** *On prolonge la relation d'ordre  $\leq$  sur  $\overline{\mathbb{R}}$  en posant :*

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad x \leq +\infty \quad \text{et} \quad -\infty \leq x$$

On conçoit alors que  $\overline{\mathbb{R}}$  possède un plus grand élément  $:+\infty$  et un plus petit élément  $:-\infty$

# Chapitre 2

## Suites Réelles

### 2.1 Définitions

#### 2.1.1 Définition d'une suite

**Définition 2.1** Une suite réelle (ou numérique) est une application de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned}u &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow u(n) = u_n\end{aligned}$$

$u$  est notée par  $(u_n)_{n \geq 0}$  où  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $u_n$  s'appelle le terme général (ou le terme d'indice  $n$ ) de la suite.

On considère également des suites  $u = (u_n)_{n \geq n_0}$  qui ne sont définies qu'à partir d'un certain rang  $n_0$  (par exemple la suite de terme général  $u_n = \sqrt{n-3}$  n'est définie que pour  $n \geq 3$ ).

**Remarque 2.1** La suite peut être définie explicitement par une formule ou implicitement par récurrence.

**Exemple 2.1** 1) Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par :  $u_n = \frac{n}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{alors } u_0 = 0, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{2}{3}, \dots$$

2) Soit  $(u_n)$  une suite définie par  $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ ,  $u_0 = 1$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$   
 alors  $u_1 = \sqrt{3}$ ,  $u_2 = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ , ....

**Remarque 2.2** Ne pas confondre la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et l'ensemble  $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$  de ses valeurs.

En fait deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont égales  $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}; u_n = v_n$ .

**Par exemple** : les suites de termes généraux  $u_n = (-1)^n$  et  $v_n = (-1)^{n+1}$  sont distinctes, mais elles ont le même ensemble de valeurs.  $\{-1, 1\}$ .

**Remarque 2.3** 1) La somme de deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  est une suite :  $\{u_n + v_n\}$ .

2) Le produit de deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  est une suite :  $\{u_n \cdot v_n\}$ .

3) Le produit de  $\lambda \in \mathbb{R}$  par une suite  $(u_n)$  est une suite :  $\{\lambda u_n\}$ .

### 2.1.2 Suites bornées, suites monotones

**Définition 2.2** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

1) majorée si  $\exists M \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$ ,

2) minorée si  $\exists m \in \mathbb{R}$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$ ,

3) bornée si elle est à la fois majorée et minorée ou encore s'il  $\exists M \in \mathbb{R}^+$

tel que  $|u_n| \leq M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemple 2.2** La suite définie par

$$u_n = \frac{(-1)^n \times n + 25}{\sqrt{n^2 + 4}}$$

est bornée. En effet, il suffit de voir tout simplement que :

$$\begin{aligned} |u_n| &= \left| \frac{(-1)^n \times n + 25}{\sqrt{n^2 + 4}} \right| \leq \frac{|(-1)^n \times n| + 25}{\sqrt{n^2 + 4}} = \frac{n + 25}{\sqrt{n^2 + 4}} \\ &= \frac{n}{\sqrt{n^2 + 4}} + \frac{25}{\sqrt{n^2 + 4}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2}} + \frac{25}{\sqrt{4}} = 1 + \frac{25}{2} = \frac{27}{2} \end{aligned}$$

donc  $(u_n)$  est bornée.

**Définition 2.3** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- 1) croissante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$ ,
- 2) décroissante si  $\forall n \in \mathbb{N}$ , stationnaire s'il existe  $u_{n+1} \leq u_n$ ,
- 3) Une suite  $(u_n)$  est monotone si elle est croissante ou décroissante.

**Remarque 2.4** On dit qu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante ou strictement monotone si les inégalités précédentes sont strictes.

**Définition 2.4** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- 1) stationnaire si  $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N_0 \Rightarrow u_{n+1} = u_n$
- 2) constante si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$ .

**Définition 2.5** (À partir d'un certain rang)

On dit qu'une propriété  $P(n)$  est vérifiée à partir d'un certain rang  $N \in \mathbb{N}$  si et seulement s'il existe un entier  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$  la propriété  $P(n)$  est vraie.

**Exemple 2.3** Etudier la monotonie de :

$$u_n = \frac{2n}{3n+1}, \quad v_n = \frac{1}{(n+1)!}, \quad w_n = \log(n+1).$$

en effet,

$$1) u_{n+1} - u_n = \frac{2}{(3n+4)(3n+1)} > 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow u_n \text{ est croissante}$$

$$2) v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n!(n+2)} < 0, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow v_n \text{ est décroissante.}$$

### 2.1.3 Suites extraites

**Définition 2.6** On dit qu'une suite  $(v_n)$  est une suite extraite ou une sous suite d'une suite  $(u_n)$  s'il existe une application  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

**Exemple 2.4** Soit  $(u_n)_{n \geq 2} = \left( \frac{1}{n+(-1)^n \sqrt{n}} \right)_{n \geq 2}$  on a évidemment

$$(u_{2n}) = \left( \frac{1}{2n + \sqrt{2n}} \right)_{n \geq 1} \quad \text{et} \quad (u_{2n+1}) = \left( \frac{1}{(2n+1) - \sqrt{2n+1}} \right)_{n \geq 1}$$

sont deux suites extraites de  $(u_n)$ .

**Remarque 2.5** Si  $\varphi$  est une application strictement croissante de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{N}$ , on a par récurrence immédiate

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad \varphi(n) \geq n.$$

**Théorème 2.1** Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $l$ , alors toute suite extraite de  $(u_n)$  admet  $l$  pour limite.

**Preuve** Soit  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  l'application strictement croissante qui définit la suite extraite  $(v_n)$  c'est à dire  $v_n = u_{\varphi(n)}$ . Puisque  $(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} l$ , alors  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ ,  $|u_n - l| \leq \epsilon$  (1).

Mais  $n \geq N$  implique  $\varphi(n) \geq n \geq N$  par suite la relation (1) reste vraie si on remplace  $u_n$  par  $u_{\varphi(n)}$  et donc  $|u_{\varphi(n)} - l| \leq \epsilon$  par conséquent  $\forall \epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N$ ,  $|v_n - l| \leq \epsilon$ , d'où  $v_n$  converge vers  $l$ . ■

## 2.2 Limite inférieure et limite supérieure d'une suite

**Définition 2.7** On dit que le nombre  $a$  est une valeur d'adhérence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'il existe une sous-suite  $(u_{n_k})$  de  $(u_n)$  convergente vers  $a$ .

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est noté  $Ad(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ .

**Définition 2.8** On appelle limite supérieure (resp. inférieure) de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la borne supérieure ( resp. la borne inférieure) de  $Ad(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qu'on note  $\overline{\lim} u_n$  (resp.  $\underline{\lim} u_n$ ).

En fait, on a  $\overline{\lim}u_n = \max Ad(u_n) \in \mathbb{R}$  et  $\underline{\lim}u_n = \min Ad(u_n) \in \mathbb{R}$ .

**Exemple 2.5** Soit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{3k} & \text{si } n = 3k \\ \frac{1}{1+k} & \text{si } n = 3k + 1 \\ 2 & \text{si } n = 3k + 2 \end{cases}$$

La suite  $(u_n)$  contient trois sous-suites convergentes, à savoir  $(u_{3k})$ ,  $(u_{3k+1})$  et  $(u_{3k+2})$  qui convergent respectivement vers  $\frac{1}{3}$ , 1 et 2. Donc les nombres  $\frac{1}{3}$ , 1 et 2 sont des valeurs d'adhérences de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est évidemment divergente.

## 2.3 Convergence et divergence des suites et propriétés

**Définition 2.9** On dit qu'une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $l \in \mathbb{R}$  si : pour tout  $\epsilon > 0$  il existe un entier naturel  $N = N_\epsilon$  dépendant de  $\epsilon$  tel que si  $n \geq N_\epsilon$ , alors  $|u_n - l| \leq \epsilon$  :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \epsilon$$

On dit aussi que  $l$  est la limite de la suite  $(u_n)$  et on note  $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} l$  ou encore  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$

- S'il existe un tel  $l$ , on dit que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- On remarque que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  si et seulement si la suite  $(u_n - l)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.
- S'il n'existe pas de réel  $l$  vérifiant cette propriété, on dit que la suite  $(u_n)$  est divergente.

**Définition 2.10** La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$  si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N, \quad u_n \geq A$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$  si :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N, \quad u_n \leq -A$$

**Exemple 2.6** Montrer que la suite  $u_n = \frac{n+1}{n+2}$  converge vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

En effet, soit  $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ , tel que  $\forall n \geq N$ , on a  $|u_n - 1| \leq \varepsilon$ .

$|u_n - 1| = \left| \frac{n+1}{n+2} - 1 \right| = \frac{1}{n+2} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}$  existe d'après Archimède.

On choisit donc  $N = N_\varepsilon = E\left(\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}\right) + 1$  et on est assuré que dès que  $n > N_\varepsilon$ ,

alors  $|u_n| \leq \varepsilon$ . Donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$ .

**Remarque 2.6** On définit le même concept de limite en prenant indifféremment les inégalités  $n \geq N$  ou  $n > N$  et  $|u_n - l| < \varepsilon$  ou  $|u_n - l| \leq \varepsilon$ .

**Théorème 2.2** Si une suite est convergente, sa limite est unique.

**Preuve** Supposons que  $(u_n)$  possède deux limites  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$  et montrons par l'absurde que  $l_1 = l_2$ . Supposons  $l_1 \neq l_2$  et posons  $\varepsilon = |l_1 - l_2|/2 > 0$ .

Comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l_1$ , il existe  $N_1$  tel que  $n \geq N_1$  implique  $|u_n - l_1| < \varepsilon$ .

De même  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l_2$ , il existe  $N_2$  tel que  $n \geq N_2$  implique  $|u_n - l_2| < \varepsilon$ .

Notons  $n = \max(N_1, N_2)$ , nous avons alors :

$$|u_n - l_1| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - l_2| < \varepsilon$$

D'où en utilisant l'inégalité triangulaire

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |l_1 - u_n| + |u_n - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|$$

ce qui est absurde. ■

**Exemple 2.7** Etudier la convergence des suites suivantes :

$$1) u_n = (-1)^n, \quad 2) v_n = \frac{\sin n}{n}, \quad 3) w_n = 3^n - n^2 2^n$$

•  $u_{2n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$  et  $u_{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -1$ , la suite admet deux limites différentes donc  $u_n$  diverge.

•  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$ , comme  $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ ,  $\frac{\sin n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ , d'où  $v_n$  converge

**Théorème 2.3** *Si une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ , alors la suite  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $|l|$ .*

**Preuve** Soit  $\epsilon > 0$ , puisque la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $l$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N, \quad |u_n - l| \leq \epsilon$$

Or on a  $\forall n \in \mathbb{N}$ , l'inégalité  $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$ , d'ici on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N, \quad ||u_n| - |l|| \leq \epsilon,$$

et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l|$ . ■

**Remarque 2.7** *La réciproque est fautive.*

*En effet, considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (-1)^n$  on a :*

*$|u_n| = |-1|^n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ , d'où  $|u_n|$  converge vers 1 (mais  $u_n$  est non convergente).*

**Théorème 2.4** *Toute suite convergente est bornée.*

**Preuve** Comme  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ , alors en vertu du théorème 2.2  $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $|l|$  autrement dit pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe alors un entier  $N$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n \geq N$ , alors  $||u_n| - |l|| \leq \epsilon$ , c'est à dire  $|l| - \epsilon \leq |u_n| \leq |l| + \epsilon$ . Choisissons  $\epsilon = 1$ , alors pour  $n \geq N$ , on a  $|u_n| \leq |l| + 1$ .

En posant alors  $M = \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_N|, |l| + 1\}$ , on obtient  $|u_n| \leq M$

dés lors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée. ■

**Remarque 2.8** *La réciproque est évidemment fautive, comme le montre l'exemple de la suite définie par  $u_n = (-1)^n$  pour tout entier  $n \geq 0$ .*

### 2.3.1 Opérations sur les suites convergentes

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites convergentes respectivement vers  $l$  et  $l'$  on a :

- 1) La suite  $(|u_n - l|)$  converge vers 0.
- 2) La suite  $(u_n \pm v_n)$  converge vers  $(l \pm l')$ .
- 3) La suite  $(u_n \times v_n)$  converge vers  $(l \times l')$ .
- 4) Si  $l'$  est non nul à partir d'un certain rang  $n_0$ ,  $(v_n \neq 0)$  alors la suite  $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$  converge vers  $\frac{l}{l'}$ .

**En effet,**

- 1) Comme  $(u_n)$  est convergente alors  $\forall \varepsilon > 0, \exists N, n > N \implies |u_n - l| < \varepsilon$ .

On a  $||u_n - l| - 0| \leq |u_n - l|$  (voir propriété chapitre 1)  $\leq \varepsilon$  pour  $n > N$

donc 0 est bien la limite de  $|u_n - l|$ .

- 2) Soit  $\varepsilon > 0$ , arbitraire

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l &\Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists N_1, n > N_1 \implies |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l' &\Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists N_2, n > N_2 \implies |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Soit  $N_0 = \sup(N_1, N_2)$ , alors si  $n > N_0$

$$\left| (u_n + v_n) - (l + l') \right| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- 3) On a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l &\Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists N_1, n > N_1 \implies |u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l' &\Leftrightarrow \forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists N_2, n > N_2 \implies |v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \left| u_n \times v_n - l \times l' \right| &= \left| (u_n - l) \times v_n + l \times (v_n - l') \right| \\ &\leq |u_n - l| \times |v_n| + |l| \times |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} M + |l| \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

puisque  $(v_n)$  est convergente alors elle est bornée c'est à dire  $\exists M > 0$  tel que  $|v_n| \leq M$  et donc quand  $\epsilon \rightarrow 0$  alors

$$\left| u_n \times v_n - l \times l' \right| \leq \frac{\epsilon}{2} M + |l| \frac{\epsilon}{2} \text{ tend vers } 0.$$

**Proposition 2.1** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$  et si  $u_n \geq 0$  (resp :  $u_n \leq 0$ ) alors  $l \geq 0$  (resp :  $l \leq 0$ ).

**Preuve** Par absurde, supposons que  $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq 0$  et que  $l \leq 0$ .

Soit  $\epsilon = \frac{|l|}{2} \implies l + \epsilon = l + \frac{|l|}{2} < 0$ ,  $u_n \rightarrow l \implies \exists N : \forall n > N \implies l - \epsilon < u_n < l + \epsilon < 0$ .

D'où contradiction avec l'hypothèse  $u_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$ . ■

Comme conséquence de la proposition 2.1 nous énonçons le corollaire suivant

**Corollaire 2.1** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites convergentes vérifiant pour  $n$  assez grand, l'inégalité  $u_n \geq v_n$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

**Preuve** En effet, considérons la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$w_n = u_n - v_n \geq 0 \text{ car } u_n \geq v_n$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \right) - \left( \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right)$$

ce qui entraîne d'après la proposition précédente que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n \geq 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$$

■

### 2.3.2 Convergence des suites monotones

Nous énonçons à présent le théorème fondamental de convergence des suites monotones.

**Théorème 2.5** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite **croissante**

- Si la suite  $(u_n)$  est majorée alors elle converge vers une limite finie  $l \in \mathbb{R}$  donnée par :  
 $l = \sup \{u_n, n \geq 0\}$ .
- Si la suite  $(u_n)$  n'est pas majorée, alors elle diverge vers  $+\infty$  c'est à dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

De même : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite **décroissante**

- Si la suite  $(u_n)$  est minorée, alors elle est convergente et on a :  $l = \inf \{u_n, n \geq 0\}$ .
- Sinon  $(u_n)$  diverge vers  $-\infty$ , c'est à dire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

**Preuve** La démonstration repose sur l'existence de la borne supérieure pour une partie non vide de  $\mathbb{R}$ .

1)  $(u_n)$  est majorée.

On pose alors  $l = \sup \{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ , et d'après la définition de la borne supérieure on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } l - \varepsilon < u_N \leq l;$$

la suite  $(u_n)$  étant croissante on a l'implication :

$$n \geq N \implies u_n \geq u_N$$

d'où finalement

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \implies l - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq l < l + \varepsilon$$

d'où  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

2)  $(u_n)$  non majorée, on a d'autre part :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, u_N > A$$

la suite étant croissante :

$$n \geq N \implies u_n \geq u_N > A$$

d'où :

$$\forall A \in \mathbb{R}_+^*, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N \implies u_n > A$$

dés lors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

Si maintenant  $(u_n)$  est décroissante et minorée alors  $(-u_n)$  est croissante et majorée

et on a :  $\inf(E) = -\sup(-E)$ .

De plus si  $(u_n)$  est décroissante et non minorée alors  $(-u_n)$  est croissante et

non majorée et on a :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = -\infty$ . ■

**Remarque 2.9** *Le théorème précédent est souvent formulée sous la forme suivante qu'il faut impérativement retenir :*

Toute suite numérique  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante (resp. décroissante) majorée (resp minorée) admet une limite.

**Exemple 2.8** *Etudier la nature de la suite  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^p}$  ( $p \geq 2$ ).*

En effet, on a d'une part

$$u_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^p} = u_n + \frac{1}{(n+1)^p} > u_n$$

donc  $(u_n)$  est strictement croissante. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} u_n &= 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} < 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ &< 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2 \end{aligned}$$

donc  $(u_n)$  est majorée. Etant croissante et majorée, elle est donc convergente.

**Proposition 2.2** “*théorème des gendarmes*”

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites convergentes et ont la même limite  $l$ .

Soit  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant à partir d'un certain rang l'inégalité suivante :

$$u_n \leq w_n \leq v_n$$

Alors la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers la même limite  $l$ .

**Preuve** Soit  $\epsilon$  un réel strictement positif. Puisque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent toutes deux vers  $l$ , il existe des entiers  $N_1$  et  $N_2$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N_1 \implies |u_n - l| < \epsilon \text{ i.e } l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > N_2 \implies |v_n - l| < \epsilon \text{ i.e } l - \epsilon < v_n < l + \epsilon$$

Si on prend  $N = \max(N_1, N_2)$  on aura

$$\forall n : n > N : l - \epsilon < u_n \text{ et } v_n < l + \epsilon,$$

et comme  $u_n \leq w_n \leq v_n$ , alors,

$$\forall n : n > N : l - \epsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < l + \epsilon.$$

Par conséquent

$$\forall n : n > N : l - \epsilon < w_n < l + \epsilon.$$

Ce qui montre que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ . ■

**Exemple 2.9** Calculer en utilisant le théorème des gendarmes les limites suivantes :

$$1) u_n = \frac{n(\cos(n) + \sin(n))}{(n+1)^2}, \quad 2) v_n = \frac{n}{2^n}, \quad 3) u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E(kx), \quad x \in \mathbb{R}$$

**Solutions**

1) On a

$$0 \leq |u_n| = \left| \frac{n(\cos(n) + \sin(n))}{(n+1)^2} \right| \leq \frac{n(|\cos(n)| + |\sin(n)|)}{(n+1)^2} \leq \frac{2n}{(n+1)^2} \rightarrow 0$$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(\cos(n) + \sin(n))}{(n+1)^2} = 0$ .

2) D'après la formule du binôme de Newton :

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} + \dots + 1$$

on déduit que

$$2^n > \frac{n(n-1)}{2} \text{ et } 0 \leq \frac{n}{2^n} < 2 \frac{n}{n(n-1)} = 2 \frac{n}{n(n-1)}$$

En passant à la limite on obtient

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} < \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n-1} = 0$$

Par conséquent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ .

3) En effet, puisque  $\forall y \in \mathbb{R} : y - 1 < E(y) \leq y$  alors on déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx - 1) \leq u_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (kx),$$

c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{x(n+1)}{2n} - \frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{x(n+1)}{2n}.$$

On conclut, en passant à la limite que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ .

## 2.4 Suites adjacentes

**Définition 2.11** Deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont dites adjacentes si :

- 1)  $(u_n)$  est croissante,
- 2)  $(v_n)$  est décroissante,
- 3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$ .

**Théorème 2.6** *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

**Preuve** Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites adjacentes. Supposons que  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante. Posons  $w_n = v_n - u_n, \forall n \in \mathbb{N}$  on a alors

$$w_{n+1} - w_n = \underbrace{(v_{n+1} - v_n)}_{< 0} + \underbrace{(u_n - u_{n+1})}_{< 0}$$

donc  $w_n$  est décroissante et on a par hypothèse  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l = 0$ . Sa limite vérifie donc

$$l = 0 = \inf \{w_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Par conséquent

$$w_n \geq 0, \text{ autrement dit } v_n \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

De plus on a

$$\underbrace{u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n}_{u_n \text{ est croissante}} \leq \underbrace{v_n \leq v_{n-1} \leq v_{n-2} \leq \dots \leq v_1 \leq v_0}_{v_n \text{ est décroissante}}$$

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant croissante et majorée par  $v_0$  est convergente soit donc  $l_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

De même la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant décroissante et minorée par  $u_0$  est convergente elle aussi,

posons  $l_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = l_1 - l_2 = 0$ , dès lors  $l_1 = l_2$ . ■

**Exemple 2.10** *Soit la suite  $(u_n)$  définie par :*

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \quad n \geq 1$$

*Montrer que les suites  $(u_{2k})$  et  $(u_{2k+1})$  sont adjacentes.*

**Solution**

Posons  $v_k = u_{2k}$  et  $w_k = u_{2k+1}$   $k \geq 0$ .

On a alors

$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= u_{2k+2} - u_{2k} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0, \end{aligned}$$

donc la suite  $(v_k) = (u_{2k})$  est croissante. De même, on trouve que

$$w_{k+1} - w_k = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0,$$

donc la suite  $(w_k) = (u_{2k+1})$  est décroissante. De plus on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_k - v_k) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ , et, alors les suites  $(u_{2k})$  et  $(u_{2k+1})$  sont adjacentes, donc elles convergent vers la même limite  $l \in \mathbb{R}$ .

## 2.5 Suites récurrentes

**Définition 2.12** Soit  $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application. On suppose que  $f(D) \subset D$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 \in D$  et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

est appelée suite récurrente.

Cette suite est bien définie car, pour tout entier  $n$ , on a  $u_n \in D$  et  $f(D) \subset D$ .

Pour l'étude de suites récurrentes nous avons besoin de quelques propriétés élémentaires des applications continues et des applications dérivables

### 2.5.1 Sens de variation de la suite récurrente

Supposons que  $f$  soit une application monotone sur l'intervalle  $D$ .

- Si  $f$  est croissante alors :

a)  $(u_n)$  est croissante si  $f(u_0) - u_0 = u_1 - u_0 \geq 0$ ,

b)  $(u_n)$  est décroissante si  $f(u_0) - u_0 = u_1 - u_0 \leq 0$ ,

- Si  $f$  est décroissante,  $u_{n+1} - u_n$  est alternativement positif et négatif. Nous étudions alors les suites extraites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , avec la donnée  $u_0$  on a :

$$u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = (f \circ f)(u_{2n}) \quad \text{et} \quad u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = (f \circ f)(u_{2n+1})$$

Comme  $f$  est décroissante, l'application  $f \circ f$  est croissante et donc les suites extraites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont toutes deux monotones et de sens contraires.

### 2.5.2 Etude de la convergence

Supposons à présent que  $f$  est continue sur  $D$ . Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l \in D$ , alors, en passant à la limite quand  $n$  tend vers l'infini dans la relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ , nous déduisons que le réel  $l$  vérifie  $l = f(l)$ . En revanche pour déterminer les seules limites possibles de cette suite récurrente, on pourra donc chercher à résoudre l'équation  $f(l) = l$ , d'inconnue  $l$ .

**Exemple 2.11** On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$ .
- 2) Montrer que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone.

3) En déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

**Solution**

1) Par une simple récurrence on prouve que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 3$

2) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite récurrente, c'est à dire

$$u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{avec } f([0, 3]) = [0, 3]$$

On peut donc définir la fonction  $f$  comme suit :

$$\begin{aligned} f & : [0, 3] \rightarrow [0, 3] \\ x & \rightarrow f(x) = \sqrt{2x+3} \end{aligned}$$

L'étude de la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  revient à l'étude de la monotonie de  $f$ .

On a  $f$  est une fonction strictement croissante sur  $[0, 3]$  car  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} > 0, \forall x \in [0, 3]$ .

On outre  $u_1 - u_0 = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3} > 0$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante, d'où la monotonie de cette suite sur  $[0, 3]$ .

3) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par 3, donc elle est convergente. Posons  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  où  $l$  est racine de l'équation  $f(l) = l$ . Donc

$$f(l) = l \iff \sqrt{2l+3} = l \iff l^2 - 2l - 3 = 0 \iff l = -1 \text{ ou } l = 3$$

Comme  $u_n \geq 0$  donc  $l \geq 0$  et par conséquent  $l = 3$  qui appartient bien sûr à  $[0, 3]$  est la limite de cette suite. Attention  $l = -1 \notin [0, 3]$

## 2.6 Suite de Cauchy

Le grand intérêt du critère de Cauchy provient du fait qu'il caractérise dans  $\mathbb{R}$  les suites convergentes sans que les limites apparaissent.

**Définition 2.13** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite numérique; on dit que  $(u_n)$  est une suite de Cauchy ou vérifie le critère de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > N, \forall q > N \implies |u_p - u_q| < \varepsilon$$

Une suite qui n'est pas de Cauchy est caractérisée par :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, (p > N \text{ et } q > N) \implies |u_p - u_q| > \varepsilon$$

**Théorème 2.7** *Toute suite de Cauchy est bornée.*

**Preuve** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de Cauchy, si on prend  $\varepsilon = 1$ ,  $\exists N \in \mathbb{N}$ , tel que  $\forall p > N \implies |u_p - u_N| < \varepsilon$ .

Donc  $\forall p > N$ ;  $|u_p| < |u_N| + 1$  car  $||u_p| - |u_N|| \leq |u_p - u_N|$  (inégalité vérifiée dans  $\mathbb{R}$ ).

Soit  $M = \max \{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1\}$ , on a alors  $\forall p \in \mathbb{N} : |u_p| < M$ ,

par suite  $(u_n)$  est bornée. ■

**Remarque 2.10** *La réciproque est fautive. En effet la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $(u_n) = (-1)^n$  est bornée mais elle n'est pas de Cauchy :  $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists p, q \in \mathbb{N}, p > N, q > N \implies |u_p - u_q| = |-1 - 1| = 2 > \varepsilon$ . Par exemple prenons  $p = 2N + 1$  et  $q = 2N$ .*

**Théorème 2.8** *“Critère de Cauchy” Toute suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

**Preuve Condition nécessaire :**

Toute suite convergente est de Cauchy :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite convergente et notons par  $l$  sa limite, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p > N \implies |u_p - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \forall q > N \implies |u_q - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc

$$|u_p - u_q| = |u_p - l + l - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| < \varepsilon,$$

ce qui entraîne que la suite est de Cauchy.

**Condition suffisante :** Toute suite Cauchy est convergente :

D'après le théorème précédent la suite  $(u_n)$  est bornée, donc on peut extraire une suite  $(v_n)$  tel que  $v_n = u_{\varphi(n)}$ , ( $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  est strictement croissante).

Posons  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et montrons que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  ?

On a

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n > N_0 \implies |v_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme  $(u_n)$  est de Cauchy on a :

$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}, p > N_1, q > N_1 \implies |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si on pose  $N = \max(N_0, N_1)$  on obtient :

$$\forall p > N : |u_p - l| < |u_p - v_p| + |v_p - l| < |u_p - v_p| + \frac{\varepsilon}{2},$$

or  $v_p = u_{\varphi(p)}$  et  $\varphi(p) \geq p$  donc  $p > N \implies \varphi(p) > N$  et donc

$$\forall p > N, |u_p - v_p| = |u_p - u_{\varphi(p)}| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ car } (u_n) \text{ est de Cauchy.}$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, p > N \implies |u_p - l| < \varepsilon.$$

D'où la convergence de  $(u_n)$ . ■

Nous terminons ce chapitre par le théorème de Bolzano dont la preuve est omise.

## 2.7 Théorème de Bolzano-Weierstrass

De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

# Chapitre 3

## Fonctions réelles d'une variable réelle. Limites et continuité

### 3.1 Généralités sur les fonctions

**Définition 3.1** On appelle fonction réelle d'une variable réelle  $x$  sur l'ensemble  $E$  toute application de  $E$  dans l'ensemble  $\mathbb{R}$ , (i.e : si à tout élément de  $E$  est associé un seul élément de  $\mathbb{R}$ ), et on note :

$$f : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ ou } x \rightarrow y = f(x) \quad x \in E$$

- $E = D(f)$  est appelé **domaine de définition** de  $f$ .
- $f(E) = \text{im}f = \{y \in \mathbb{R} : \exists x \in E, y = f(x)\}$  est **l'ensemble des valeurs** de cette fonction, appelé ensemble image de  $f$ .

#### **Graphe d'une fonction**

Le graphe  $\Gamma(f)$  d'une fonction  $f$  définie de  $E$  dans  $\mathbb{R}$  ( $E$  partie de  $\mathbb{R}$ ), est l'ensemble des points du plan :

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in E\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

### 3.1.1 Opérations algébriques sur les fonctions

Soit  $E \subset \mathbb{R}$ . Notons par  $\mathcal{F}(E, \mathbb{R})$  l'ensemble de toutes les fonctions définies sur  $E$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Si  $f \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{F}(E, \mathbb{R})$  on peut alors définir les fonctions suivantes :

- la somme de  $f$  et  $g$  est la fonction  $f + g : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{pour tout } x \in E;$$

- le produit de  $f$  et  $g$  est la fonction  $f \times g : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \quad \text{pour tout } x \in E;$$

- la multiplication par un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}$  de  $f$  est la fonction  $\lambda \cdot f : E \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

### 3.1.2 Fonctions paire, impaire et périodique

Une fonction  $f$ , définie sur un intervalle  $I$  symétrique par rapport à 0,

c'est-à-dire telle que  $(\forall x \in I, -x \in I)$ , est dite :

- **paire** si et seulement si  $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$
- **impaire** si et seulement si  $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$

Géométriquement, si  $f$  est paire, alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées  $Oy$  et si  $f$  est impaire, alors il est symétrique par rapport à l'origine des axes.

- Une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite **périodique** s'il existe  $T > 0$  tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x + T) = f(x)$$

Si  $T$  est une période de  $f$  alors  $kT$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) est aussi une période pour  $f$ .

**Exemple 3.1** 1) L'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $f(x) = x - E(x)$ , où  $E(x)$  désigne la partie entière du réel  $x$ , est périodique de période 1.

2) Les applications  $\sin$  et  $\cos$  sont périodiques de période  $2\pi$  sur  $\mathbb{R}$ .

### 3.1.3 Fonctions bornées et fonctions monotones

**Définition 3.2** Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , on dit que  $f$  est majorée (resp. minorée, bornée) si  $f(E)$  est une partie majorée (resp. minorée, bornée) de  $\mathbb{R}$ , c'est à dire :

- $f$  est majorée sur  $E : \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leq M$
- $f$  est minorée sur  $E : \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \geq m$
- $f$  est bornée sur  $E : \exists M, m \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M, \forall x \in E \iff$   
 $\iff \exists C > 0, |f(x)| \leq C, \forall x \in E.$

Quand  $f$  est majorée (resp. minorée) sur  $E$ , on note :

$\sup_E f = \sup_{x \in E} f(x) = \sup_E f(E)$ , et  $\inf_E f = \inf_{x \in E} f(x) = \inf_E f(E)$ , où  $\sup_{x \in E} f(x)$  et  $\inf_{x \in E} f(x)$  désignent respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de la fonction  $f$  sur l'ensemble  $E$ .

**Exemple 3.2** 1)  $f(x) = \cos x$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ ,  $-1$  et  $+1$  sont les bornes inférieure et supérieure.

2)  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  est bornée sur  $]0, +\infty[$ , on a  $f(]0, +\infty[) = ]0, 1[$ ,  $\sup_{x \in ]0, +\infty[} f(x) = 1 \notin ]0, 1[$   
 et  $\inf_{x \in ]0, +\infty[} f(x) = 0 \notin ]0, 1[$ .

**Remarque 3.1** La borne supérieure et la borne inférieure d'une fonction n'appartiennent pas nécessairement à  $f(E)$ .

**Définition 3.3** Une fonction  $f$  définie sur une partie  $E$  de  $\mathbb{R}$  est dite monotone croissante (resp. décroissante) dans  $E$ , si

$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2) \quad (\text{resp. } f(x_1) \geq f(x_2) )$$

Si les inégalités sont strictes on a la croissance et la décroissance strictes.

## 3.2 Limite d'une fonction

### Limite en un point

**Définition 3.4** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  un point de  $I$ .

On dit que  $f(x)$  tend vers  $l$  quand  $x$  tend vers  $x_0$  si, pour un nombre  $\varepsilon > 0$ ; il existe un nombre  $\delta > 0$  tel que pour tout  $x \neq x_0$  vérifiant :  $|x - x_0| < \delta$  on ait  $|f(x) - l| < \varepsilon$  autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I : 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

### Limite à droite, limite à gauche en un point

- Si  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs positives, on définit la limite à droite de  $x_0$  par :

$$\left( \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l \right) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I : x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

- Si  $x$  tend vers  $x_0$  par valeurs négatives, on définit la limite à gauche de  $x_0$  par :

$$\left( \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l \right) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in I : x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

**Remarque 3.2** Si la limite existe, il est évident que la limite à droite et la limite à gauche existent aussi et elles sont égales à cette limite. Réciproquement si la limite à droite et la limite à gauche existent et elles sont égales, alors la limite de  $f$  au point  $x_0$  existe et elle est égale à la valeur commune des deux limites.

### Limite à l'infini et limite infinie

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tel que } x > A \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0 \text{ tel que } x < -A \implies |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tel que } x > B \implies f(x) > A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tel que } x < -B \implies f(x) > A$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tel que } x > B \implies f(x) < -A$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A > 0, \exists B > 0 \text{ tel que } x < -B \implies f(x) < -A$$

**Exemple 3.3** Montrez en utilisant la définition que :

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 1) = 7, \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x - 1)^2} = +\infty$$

**Solutions**

1) Soit  $\varepsilon > 0$ , on cherche  $\delta > 0$  ?. On a

$$|f(x) - 7| = |(3x + 1) - 7| = |3x - 6| = 3|x - 2|.$$

Donc

$$|f(x) - 7| < \varepsilon \iff |x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Si on prend  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ , alors

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{3} \text{ tel que si } |x - 2| < \delta = \frac{\varepsilon}{3} \implies |f(x) - 7| < \varepsilon.$$

2) Soit  $A > 0$  arbitraire. Il s'agit de trouver  $\delta = \delta(A) > 0$  tel que

$$0 < |x - 1| < \delta \implies \frac{2}{(x - 1)^2} > A,$$

ce qui entraîne que

$$(x - 1)^2 < \frac{2}{A} \implies |x - 1| < \sqrt{\frac{2}{A}}.$$

Ainsi il suffit de prendre  $\delta = \sqrt{\frac{2}{A}}$  pour que l'on ait :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \sqrt{\frac{2}{A}} \text{ tel que si } |x - 1| < \delta \implies f(x) > A.$$

### 3.3 Opérations sur les limites

Soient deux fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $I$ , telles que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$ . Alors on a :

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l \pm l';$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times g(x) = l \times l';$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'} \text{ si } l' \neq 0$$

**Théorème 3.1** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  et  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$ . Si  $f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x$  distinct de  $x_0$ , alors  $l \leq l'$ .

#### Limite d'une fonction composée

**Théorème 3.2** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions. On suppose que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ et } \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l$$

on suppose de plus que

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = l = g(y_0).$$

Alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = l.$$

On peut définir la limite d'une fonction en termes de limite d'une suite.

**Théorème 3.3** "Caractérisation de la limite au moyen des suites"

Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $x_0 \in I$ .

$$\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \right) \iff \left( \forall x_n, x_n \in I, x_n \neq x_0 : \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l \right)$$

*Remarque 3.3* En générale on utilise ce théorème pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite.

**Exemple 3.4** Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\log(|x|))$  n'existe pas ?

En effet, soient les deux suites définies comme suit :

$$x'_n = \frac{1}{e^{2\pi n}} \quad \text{et} \quad x''_n = \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} \quad n \geq 1$$

On a d'une part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2\pi n}} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} x''_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}} = 0$$

et d'autre part

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x'_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\log\left(|x'_n|\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(2\pi n) = 1$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x''_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\log\left(|x''_n|\right)\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0$$

Alors, en vertu du théorème(3.3) la fonction  $\cos(\log(|x|))$  n'a pas de limite en  $x = 0$ .

### Formes indéterminées, limites remarquables

Les formes indéterminées correspondent aux opérations sur les limites dont le résultat est inconnu. Il existe quatre formes indéterminées principales :

$$“+\infty - \infty”, “0 \times \infty”, “\frac{0}{0}”, “\frac{\infty}{\infty}”$$

Lever l'indétermination signifie recourir à un biais qui permet de trouver la limite de la forme indéterminée considérée.

Aussi on peut rencontrer des formes indéterminées de la forme :  $1^\infty$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ . Ces dernières se ramènent le plus souvent à la forme  $0 \times \infty$  par passage au logarithme de  $y = f(x)^{g(x)}$  c'est à dire  $y = e^{g(x) \ln f(x)}$ .

### limites les plus remarquables

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = 1^\infty = e^a, \quad \lim_{n \rightarrow 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a.$$

**Exemple 3.5** Calculer la limite suivante

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x+1} \right)^{2x+4} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-2}{x+1} \right)^{2x+4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-2}{x+1} \right)^{2(x+1)+2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \left( 1 + \frac{-2}{x+1} \right)^{(x+1)} \right]^2 \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{-2}{x+1} \right)^2 = e^{-4}. \end{aligned}$$

## 3.4 Fonctions continues

### 3.4.1 Définitions Continuité en un point

**Définition 3.5** 1) Soit une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  étant un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est continue au point  $x_0$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in I : |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

2) On dit que  $f$  est continue à droite (resp. à gauche) de  $x_0 \in I$  si

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (\text{resp. } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0))$$

c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in I : x_0 < x < x_0 + \alpha \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$(\text{resp. } \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in I : x_0 - \alpha < x < x_0 \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

**Remarque 3.4** Si  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$  alors  $f$  est continue en  $x_0$ .

**Remarque 3.5**  $f$  est continue en  $x_0 \iff \begin{cases} f \text{ est définie en } x_0, f(x_0) \text{ existe et} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \end{cases}$

### 3.4.2 Continuité et limite de suite

Comme dans le cas de la limite, on peut définir la notion de continuité en se servant de suites réelles.

**Théorème 3.4** *La fonction  $f$  est continue en  $x_0 \in I$  si, et seulement si, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $I$  qui converge vers  $x_0$ , la suite  $f(x_n)$  converge vers  $f(x_0)$ .*

**Remarque 3.6** *Ce théorème est fondamental il est utiliser pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.*

### 3.4.3 Fonctions continues sur un intervalle

**Définition 3.6** *Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .*

*On dit que  $f$  est continue sur  $I$ , si  $f$  est continue en tout point de  $I$ . On note  $C(I, \mathbb{R})$  ou  $C(I)$  l'ensemble des fonctions continues sur  $I$  à valeurs réelles.*

**Exemple 3.6** 1) *Toute fonction constante est continue sur  $\mathbb{R}$*

2) *La fonction  $f(x) = x$  est continue sur  $\mathbb{R}$*

3) *La fonction  $f(x) = \sin x$  est continue sur  $\mathbb{R}$*

**Preuve** 2) En effet, soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et soit  $\varepsilon > 0$ . On cherche  $\eta > 0$  tel que si  $\forall x \in \mathbb{R}$  :

$$|x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon ?$$

On a  $|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0|$ , en posant  $\eta = \varepsilon$ , alors

$$\forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

3) On a

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &= 2 \left| \sin \left( \frac{x - x_0}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{x + x_0}{2} \right) \right| = 2 \left| \sin \left( \frac{x - x_0}{2} \right) \right| \left| \cos \left( \frac{x + x_0}{2} \right) \right| \\ &\leq 2 \left| \sin \left( \frac{x - x_0}{2} \right) \right| \text{ car } \left| \cos \left( \frac{x + x_0}{2} \right) \right| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\leq 2 \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|, \end{aligned}$$

donc  $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta = \varepsilon$  tel que  $\forall x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \eta \implies |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ . ■

### 3.4.4 Fonctions discontinues

On dit que  $f$  est discontinue en  $x_0$  si et seulement si  $f$  n'est pas continue en  $x_0$ , qui est alors appelé un point de discontinuité de  $f$ .

**Définition 3.7** On dit qu'une fonction  $f$  admet une discontinuité de première espèce en  $x_0$  si et seulement si elle n'est pas continue en  $x_0$  et possède une limite à droite et une limite à gauche en  $x_0$ . Lorsque  $f$  n'est pas continue et n'admet pas de discontinuité de première espèce en  $x_0$ , on dit qu'elle admet une discontinuité de seconde espèce en  $x_0$ .

**Exemple 3.7** 1) L'application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie pour chaque réel  $x$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

admet une discontinuité de première espèce en 0, car

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0,$$

existent mais,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq f(0) = 1$$

2) L'application  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

admet une discontinuité de seconde espèce en 0, car

$$\lim_{x \rightarrow x_0}^> f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0}^< f(x) = -\infty.$$

### 3.4.5 Prolongement par continuité

**Définition 3.8** Soit  $f$  une fonction définie sur  $I/\{x_0\}$ . Supposons que  $f$  admet une limite finie  $l$  au point  $x_0$ . La fonction  $g$  définie par :

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I/\{x_0\} \\ l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

est dite prolongement par continuité de  $f$  au point  $x_0$ .

**Exemple 3.8** On considère la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

On a  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = 0 = f(0)$ , donc  $f$  admet un prolongement par continuité en posant

$$g(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases}$$

## 3.5 Opérations sur les fonctions continues

**Théorème 3.5** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur un même intervalle  $I$ , et continues au point  $x_0 \in I$ . Alors les fonctions

$$\lambda f \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}), \quad f + g, \quad fg, \quad \frac{f}{g} \quad (\text{si } g(x_0) \neq 0) \quad \text{et} \quad |f|$$

sont aussi continues au point  $x_0$ .

### 3.5.1 Continuité de la fonction composée

**Théorème 3.6** Soient deux fonctions  $f : I \rightarrow J$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  et  $J$  sont deux intervalles quelconques de  $\mathbb{R}$ . Si  $f$  est continue en  $x_0 \in I$  et si  $g$  est continue au point  $y_0 = f(x_0)$ , alors la fonction composée  $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est continue en  $x_0$ .

*Preuve*  $g$  est continue en  $y_0$  alors,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall y \in J \text{ et } |y - y_0| < \delta \implies |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

$f$  est continue en  $x_0$  alors on peut associer à ce nombre  $\delta$  ( $\varepsilon = \delta$ ) un nombre  $\eta > 0$  tel que

$$\forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta$$

Comme  $f(I) \subseteq J$  c'est à dire pour  $x \in I$ , on a  $f(x) \in J$ . On en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \eta \implies |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

ce qui entraîne la continuité de  $g \circ f$  en  $x_0$ . ■

### 3.5.2 Continuité uniforme

Soit  $I$  un intervalle quelconque de  $\mathbb{R}$ .

**Définition 3.9** On dit que  $f$  est uniformément continue sur  $I$  si.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I : 0 < |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

#### Propriétés

1) La continuité uniforme est une propriété globale sur un intervalle alors que la continuité simple est une propriété locale en un point  $x_0$ .

2) Si  $f$  est uniformément continue sur  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ . La réciproque est fausse.

**Théorème 3.7** Soit  $[a, b]$  un intervalle fermé.  $f$  est une fonction continue sur  $[a, b]$  alors  $f$  est uniformément continue sur  $[a, b]$ .

## 3.6 Théorèmes fondamentaux

### 3.6.1 Fonctions continues sur un intervalle fermé et borné

#### **Théorème 3.8** “Premier théorème de Weirstrass”

Toute fonction définie et continue sur un intervalle fermé, borné  $[a, b]$  est bornée.

#### **Théorème 3.9** “Deuxième théorème de Weirstrass”

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle fermé, borné  $[a, b]$ . Alors  $f$  atteint ses bornes supérieure et inférieure, c'est à dire : il existe  $x_1, x_2$  tels que :

$$f(x_1) = \sup_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_2) = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

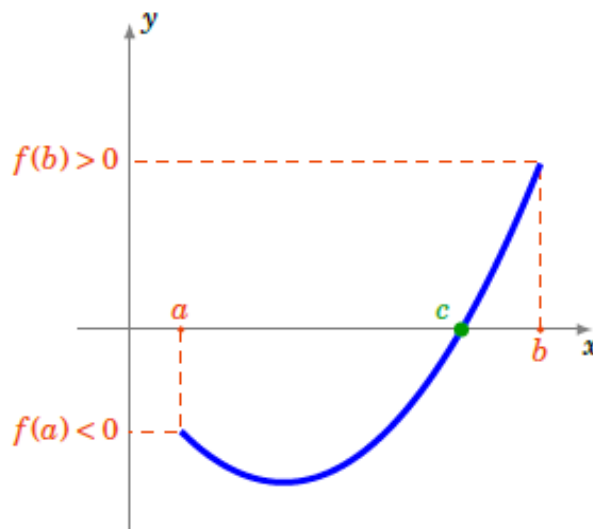
cela signifie

$$f(x_1) = \max_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(x_2) = \min_{x \in [a, b]} f(x)$$

### 3.6.2 Théorème des valeurs intérieures

**Théorème 3.10** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ . Si  $f(a)$  et  $f(b)$  sont de signes contraires c'est à dire :  $f(a) f(b) < 0$ , alors il existe au moins un point  $c \in ]a, b[$

tel que  $f(c) = 0$ . (Voir figure ci dessous).



**Exemple 3.9** Montrer que la fonction  $f(x) = x^3 - 12x + 1$  possède une seule racine dans l'intervalle  $]3\ 4[$ .

*En effet,*

$f(x)$  est une fonction polynôme donc elle est continue sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $]3\ 4[$  de plus on a  $f(3) = -8$ ,  $f(4) = 17$  et  $f(x)$  est strictement croissante sur cet intervalle car  $f'(x) = 3x^2 - 12 > 0$  pour tout  $x \in ]3\ 4[$ .

$f$  est continue et strictement croissante sur  $]3\ 4[$  et  $f(3) f(4) < 0$ , alors  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]3\ 4[$ .

**Théorème 3.11** “Théorème des valeurs intermédiaires”

Soit  $f$  une fonction définie et continue sur un intervalle quelconque  $I \subset \mathbb{R}$  et soient  $a$  et  $b \in I$ . Alors pour tout nombre  $d$ , compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un réel  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = d$ .

**Corollaire 3.1** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

**Théorème 3.12** “*Théorème de Heine*”

*Toute fonction définie et continue sur un intervalle fermé, borné  $[a, b]$  est uniformément continue sur cet intervalle.*

### 3.7 Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone

**Théorème 3.13** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue strictement croissante. Alors  $f$  est une application bijective de  $[a, b]$  sur  $[f(a), f(b)]$ . L'application réciproque  $f^{-1}$  qui est définie sur  $[f(a), f(b)]$  et admet  $[a, b]$  pour ensemble des valeurs, est continue et strictement croissante.*

**Théorème 3.14** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue strictement décroissante. Alors  $f$  est une application bijective de  $[a, b]$  sur  $[f(b), f(a)]$ . L'application réciproque  $f^{-1}$  qui est définie sur  $[f(b), f(a)]$  et admet  $[a, b]$  pour ensemble des valeurs, est continue et strictement décroissante.*

# Chapitre 4

## Fonctions dérivables

### 4.1 Définitions et propriétés des fonctions dérivables

#### 4.1.1 Dérivée d'une fonction en un point

**Définition 4.1** Soit  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $x_0$  un point de  $I$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction.

On dit que la fonction  $f$  est dérivable en  $x_0 \in I$  si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \text{ existe et est finie}$$

Cette limite est appelée dérivée de  $f$  au point  $x_0$  et notée  $f'(x_0)$ . On utilise aussi souvent les notations  $Df(x_0)$  ou  $\frac{df}{dx}(x_0)$ .

**Remarque 4.1** (*Autre écriture de la dérivée*)

En posant  $\Delta x = x - x_0 = h$  appelée accroissement de la variable  $x$  en  $x_0$ , on obtient quand  $x \rightarrow x_0$ , le  $h \rightarrow 0$  et la dérivée s'écrit alors

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

**Remarque 4.2** La limite du rapport précédent, lorsqu'il existe, permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0) + \varepsilon(x), \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0. \\ \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) &= (x - x_0) \left[ f'(x_0) + \varepsilon(x) \right], \quad \text{avec } \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

**Exemple 4.1** Toute application constante de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  est dérivable en tout point de  $I$ , de dérivée nulle.

*En effet,*

$\forall x \in \mathbb{R}$ , soit  $f(x) = c$  on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

**Exemple 4.2** La fonction définie par  $f(x) = \sin x$  est dérivable en tout point  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

*En effet,*

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)}{2 \cdot \left(\frac{x-x_0}{2}\right)} = \cos x_0.$$

On a même montré que le nombre dérivé de  $f$  en  $x_0$  est  $\cos x_0$ , autrement dit :

$$f'(x) = \cos x. \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

**Exemple 4.3** Dérivée de  $f(x) = x^2 + 1$  en  $x_0 = 1$ ,

*en effet, on a :*

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{(x^2 + 1) - 2}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \rightarrow 2 \quad \text{quand } x \rightarrow 1$$

d'où  $f'(1) = 2$ .

**Exemple 4.4** Soit  $f$  une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Déterminer  $f'(0)$ ?

On a

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0} = x \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme

$$0 \leq \left| x \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \left| \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x|$$

donc

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| \leq |x|$$

ce qui entraîne

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \rightarrow 0 \quad \text{quand } x \rightarrow 0, \quad \text{d'où } f'(0) = 0$$

### Dérivées à droite et à gauche en un point

**Définition 4.2** On dit que la fonction  $f$  est dérivable à droite (resp. à gauche) en  $x_0 \in \mathbb{R}$  si le rapport  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite (finie) à droite notée  $f'(x_0 + 0)$  (resp. à gauche notée  $f'(x_0 - 0)$ ). Autrement dit :

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\substack{> \\ x \rightarrow x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{et} \quad f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{< \\ x \rightarrow x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

**Remarque 4.3** Pour que  $f$  soit dérivable en  $x_0$  il faut et il suffit, que  $f'(x_0 + 0)$  et  $f'(x_0 - 0)$  existent, et que  $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$  et on a dans ce cas :

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0).$$

**Exemple 4.5** Etudier la dérivabilité de  $f(x) = |x| + x^2$  au point 0.

**En effet,**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{+x + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1 = f'(0^+)$$

et

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1 = f'(0^-)$$

donc  $f$  admet une dérivée à droite égale à  $+1$  et une dérivée à gauche égale à  $-1$  et par conséquent  $f$  n'est donc pas dérivable au point  $0$ .

### Interprétation géométrique

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x_0$ . L'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  de  $f$  au point  $M_0(x_0; f(x_0))$  est donnée par :  $y - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0)$ .

Le rapport

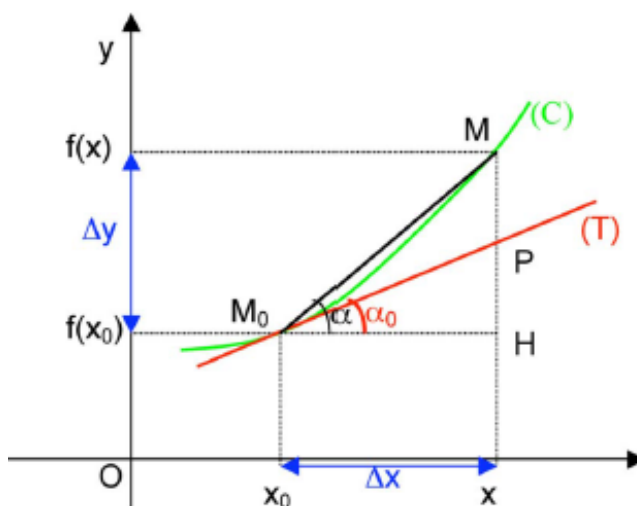
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\overline{HM}}{M_0H} = \tan(\alpha)$$

( voir figure ci dessous) est la pente de la droite joignant le point  $M_0(x_0; f(x_0))$  au point  $M(x; f(x))$  sur la courbe.

Si  $x \rightarrow x_0$ ,  $f(x) \rightarrow f(x_0)$ ; le point  $M$  se déplace en  $M_0$  : la sécante  $M_0M$  tend vers la tangente  $(T)$  à la courbe au point  $M_0(x_0; f(x_0))$ . On obtient donc

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan(\alpha_0) = \frac{\overline{HP}}{M_0H}$$

est la pente de la tangente à la courbe au point  $M_0(x_0; f(x_0))$ .



### 4.1.2 Dérivabilité et continuité

**Théorème 4.1** *Soit  $f$  une fonction dérivable en un point  $x_0$ , alors  $f$  est continue en ce point.*

**Preuve** Soit  $f$  une fonction dérivable en  $x_0$ ; alors

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

donc

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) [f'(x_0) + \varepsilon(x)] \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Si  $(x - x_0) \rightarrow 0$ , alors  $(x - x_0) [f'(x_0) + \varepsilon(x)] \rightarrow 0$

Donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ce qui signifie que  $f$  est continue en  $x_0$ . ■

**Remarque 4.4** *La réciproque de ce théorème est fautive. Une fonction peut être continue en un point sans pour autant être dérivable en ce point. Par exemple, la fonction  $x \rightarrow |x|$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , est continue en  $x_0 = 0$ , mais n'est pas dérivable en ce point.*

### 4.1.3 Dérivabilité sur un intervalle

**Définition 4.3** *Soit une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $I$  si elle est dérivable en tout point de  $I$ .  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  est alors appelée fonction dérivée.*

**Définition 4.4** *“Dérivées d'ordre supérieur”*

*Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , une fonction dérivable et soit  $f'$  sa dérivée. Si la fonction  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  est aussi dérivable on note  $f'' = (f')'$  la dérivée seconde de  $f$ . Plus généralement on note :*

$$f^{(0)} = f, \quad f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f'', \quad \text{et} \quad f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

*Si la dérivée  $n$ .ième  $f^{(n)}$  existe on dit dans ce cas que  $f$  est  $n$  fois dérivable.*

**Exemple 4.6** Calculer la dérivée **n-ième** de  $\sin x$ .

On a

$$(\sin(x))' = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$(\sin(x))'' = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x + \pi).$$

et on vérifie par récurrence que :

$$\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Et il en est de même pour  $\cos x$  et on a :

$$\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

**Définition 4.5** Soit  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ .

- 1) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On dit que  $f$  est de **classe**  $C^n$  ou  $n$  fois continûment dérivable sur  $I$  si et seulement si  $f$  est  $n$  fois dérivable sur  $I$  et  $f^{(n)}$  est continue sur  $I$ .
- 2) On dit que  $f$  est de **classe**  $C^\infty$  sur  $I$  si et seulement si  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $I$ .
- 3) Enfin, on dit que  $f$  est de **classe**  $C^0$  sur  $I$  si  $f$  est continue sur  $I$ .

**Exemple 4.7** Autre que les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  qui sont classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , on a aussi

- Les fonctions polynômes qui sont de classe  $C^\infty$ .
- Les fonctions exponentielle ( $x \rightarrow e^x$ ) et logarithme ( $x \rightarrow \ln x$ ) qui sont aussi de classe  $C^\infty$ , respectivement sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}_+^*$ .

#### 4.1.4 Dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz)

**Théorème 4.2** Si  $f$  et  $g$  admettent des dérivées **n-ième** au point  $x_0$ , alors la fonction

produit  $fg$  admet une dérivée ***n*-ième** au point  $x_0$ , et on a

$$\begin{aligned} (fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)} \\ &= C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \dots + C_n^{n-1} f' g^{(n-1)} + C_n^n f g^{(n)} \\ &= f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \dots + C_n^{n-1} f' g^{(n-1)} + f g^{(n)}. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

et donc

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1.n!} = 1 \quad \text{et} \quad C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

**Exemple 4.8** En appliquant la formule de Leibniz calculer la dérivée suivante

$$[(x^2 + 1) \sin x]^{(20)}$$

**En effet**, sachant que  $(x^2 + 1)^{(n)} = 0$  si  $n > 2$ , alors on a

$$\begin{aligned} [(x^2 + 1) \sin x]^{(20)} &= \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (x^2 + 1)^{(k)} (\sin x)^{(20-k)} \\ &= C_{20}^0 (x^2 + 1)^{(0)} (\sin x)^{(20)} + C_{20}^1 (x^2 + 1)' (\sin x)^{(20-1)} + \\ &\quad + C_{20}^2 (x^2 + 1)'' (\sin x)^{(20-2)} \\ &= (x^2 + 1)^{(0)} (\sin x)^{(20)} + C_{20}^1 (x^2 + 1)' (\sin x)^{(19)} + \\ &\quad + C_{20}^2 (x^2 + 1)'' (\sin x)^{(18)} \end{aligned}$$

de plus on sait que  $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ , donc

$$\begin{aligned} [(x^2 + 1) \sin x]^{(20)} &= (x^2 + 1) \sin\left(x + 10\pi\right) + 40x \sin\left(x + \frac{19\pi}{2}\right) + 380 \sin\left(x + \frac{18\pi}{2}\right) \\ &= (x^2 + 1) \sin x - 40x \cos x - 380 \sin x \\ &= (x^2 - 379) \sin x - 40x \cos x. \end{aligned}$$

## 4.2 Opérations sur les fonctions dérivables

**Théorème 4.3** Soient  $x_0 \in I$  et  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivable en  $x_0$ . Alors

1)  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha f$  est dérivable en  $x_0$  et on a

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha \cdot f'(x_0).$$

2)  $f + g$  est dérivable en  $x_0$  et on a

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

3)  $f \cdot g$  est dérivable en  $x_0$  et on a

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

4) Si  $g(x_0) \neq 0$ , alors  $\frac{f}{g}$  est dérivable en  $x_0$  et on a

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

**Preuve 1)** On a

$$\frac{(\alpha f)(x) - (\alpha f)(x_0)}{x - x_0} = \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \alpha \cdot f'(x_0).$$

2) On a

$$\begin{aligned} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

3) On a

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Puisque  $g$  est dérivable en  $x_0$ , alors elle est continue en  $x_0$ , donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0),$$

d'où

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) g(x_0),$$

et

$$f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0) g'(x_0)$$

et par conséquent la dérivée de  $fg$  au point  $x_0$  est

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

4) Soit  $x_0$  un point de l'intervalle où  $\frac{1}{g}$  est définie et où  $g(x_0) \neq 0$ , on a

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} \\ &= - \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)} \right] = - \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} \end{aligned}$$

donc  $\frac{1}{g}$  est dérivable et on a  $\frac{1}{g}' = -\frac{g'}{g^2}$ . En appliquant maintenant la propriété (3)

au produit  $f \cdot \frac{1}{g}$  on obtient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \frac{1}{g(x_0)} + f(x_0) \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\ &= f'(x_0) \frac{1}{g(x_0)} - f(x_0) \frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2} = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \end{aligned}$$

■

### 4.2.1 Dérivée d'une fonction composée

**Théorème 4.4** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ ;  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  contenant  $f(I)$ , et  $x_0$  un point de  $I$ . Si  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $g$  est dérivable en  $f(x_0)$ , alors  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et l'on a

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

**Preuve**  $f$  est dérivable en  $x_0$  alors

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \left( f'(x_0) + \epsilon_1(x) \right) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon_1(x) = 0$$

$g$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  alors,

$$g(y) - g(y_0) = (y - y_0) \left( g'(y_0) + \epsilon_2(y) \right) \quad \text{avec} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} \epsilon_2(y) = 0$$

$y \in f(I) \subset J$  alors,

$$g(y) - g(y_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) = (x - x_0) \left( f'(x_0) + \epsilon_1(x) \right) \left( g'(y_0) + \epsilon_2(y) \right)$$

ou encore en posant

$$\epsilon(x) = \epsilon_1(x) g'(y_0) + \epsilon_2(y) f'(x_0) + \epsilon_1(x) \epsilon_2(y) \quad \text{où} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon(x) = 0$$

on obtient

$$g(f(x)) - g(f(x_0)) = (x - x_0) \left( g'(y_0) f'(x_0) + \epsilon(x) \right)$$

c'est à dire

$$(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0) = (x - x_0) \left( g'(y_0) f'(x_0) + \epsilon(x) \right)$$

ce qui entraîne

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \quad \blacksquare$$

### 4.2.2 Dérivée d'une fonction réciproque

**Théorème 4.5** Soit  $f : I \rightarrow J$  une application bijective et continue d'un intervalle  $I$  sur un intervalle  $J$ , dérivable en un point  $x_0$  de  $I$  et telle que  $f'(x_0) \neq 0$ . Alors la fonction réciproque  $f^{-1}$  est dérivable au point  $f(x_0)$  et admet pour dérivée

$$(f^{-1})' f(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

**Preuve** Pour  $y \in J$ , posons  $x = f^{-1}(y)$  alors  $y = f(x)$ . On a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

$f^{-1}$  étant continue en  $y_0$ , donc  $\lim_{y \rightarrow y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$ , c'est à dire  $\lim_{y \rightarrow y_0} x = x_0$ .

Comme  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) \neq 0$ , alors

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dés lors

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

■

### Extremum (maximum - minimum)

**Définition 4.6** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $x_0$  un point de  $I$ .

1)  $f$  a un maximum local en  $x_0$ , s'il existe un intervalle  $J = ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[ \subset I$  avec ( $\eta > 0$ ) tel que

$$\forall x \in J : f(x) \leq f(x_0)$$

2)  $f$  a un minimum local en  $x_0$ , s'il existe un intervalle  $J = ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[ \subset I$  avec ( $\eta > 0$ ) tel que

$$\forall x \in J : f(x) \geq f(x_0)$$

3)  $f$  a un extremum local en  $x_0$  si  $f$  a un maximum ou un minimum local en  $x_0$ .

4)  $f$  a un maximum global en  $x_0$ , ( resp. un minimum global en  $x_0$ ) si

$$\forall x \in J : f(x) \leq f(x_0) \text{ (resp. } f(x) \geq f(x_0)\text{)}.$$

**Théorème 4.6** Si  $f$  a un extrémum au point  $x_0$  et si  $f'(x_0)$  existe, alors  $f'(x_0) = 0$ .

**Preuve** Supposons que l'extremum soit un maximum local, alors il existe un intervalle

$J = ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$  ( $\eta > 0$ ) tel que

$$\forall x \in J : f(x) \leq f(x_0)$$

On a donc

$$\begin{aligned} \forall x \in ]x_0, x_0 + \eta[ : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\leq 0 \quad (\text{car } f(x) - f(x_0) \leq 0 \text{ et } x - x_0 > 0) \\ \implies \lim_{\substack{> \\ x \rightarrow x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0 + 0) \leq 0. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} \forall x \in ]x_0 - \eta, x_0[ : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &\geq 0 \quad (\text{car } f(x) - f(x_0) \leq 0 \text{ et } x - x_0 < 0) \\ \implies \lim_{\substack{< \\ x \rightarrow x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= f'(x_0 - 0) \geq 0. \end{aligned}$$

Or  $f$  est dérivable en  $x_0$  donc

$$f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$$

La première limite est positive, la seconde est négative, la seule possibilité est  $f'(x_0) = 0$ .

■

**Remarque 4.5** La réciproque de ce théorème est fautive. Par exemple, la fonction  $x \rightarrow x^3$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  à une dérivée nulle en 0 mais ne possède pas d'extremum en ce point.

### 4.3 Théorème de Rolle et des accroissements finis

**Théorème 4.7** “Théorème de Rolle”

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et telle que  $f(a) = f(b)$ . Alors il existe un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Preuve** Puisque la fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$ , elle est bornée et atteint ses bornes.

Notons

$$m = \inf_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x \in [a, b]} f(x).$$

Si  $M = m$ , alors  $f$  est constante et  $f'(x) = 0$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .

Supposons  $m < M$ . Comme  $f(a) = f(b)$ , on a soit  $M \neq f(a)$ , soit  $m \neq f(a)$ . Considérons le cas  $M \neq f(a)$ . Il existe alors un point  $c \in ]a, b[$  tel que  $f(c) = M$ . Soit  $x \in [a, b]$  tel que  $f(x) \leq M = f(c)$ . Si  $x > c$ , on a

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

et si  $x < c$ , on obtient

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

La fonction  $f$  étant dérivable en  $c$ , nous obtenons, en passant à la limite que :

$$f'(c) \leq 0 \quad \text{et} \quad f'(c) \geq 0 \quad \text{d'où} \quad f'(c) = 0. \quad \blacksquare$$

**Exemple 4.9** Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par  $f(x) = x^2 - x$ .  $f$  est continue sur  $[0, 1]$ , dérivable sur  $]0, 1[$  et  $f(0) = f(1) = 0$ . donc d'après le théorème de Rolle il existe un  $c \in ]0, 1[$  tel que  $f'(c) = 0 \iff 2c - 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$ .

**Remarque 4.6** 1) Le réel  $c$  n'est pas nécessairement unique.

2) Les conditions citées dans le théorème précédent sont toutes essentielles. Si l'une d'elles n'est pas vérifiée, alors le théorème s'avère faux.

**Exemple 4.10** Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-1, 1]$  par  $f(x) = |x|$ . Cette fonction est continue sur  $[-1, 1]$  et vérifie  $f(-1) = f(1)$  mais elle n'est pas dérivable en 0 puisque

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$$

donc il n'existe pas un  $c \in ]-1, 1[$  tel que  $f'(c) = 0$ .

**Théorème 4.8** “*Théorème des accroissements finis*”

Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$ .

Alors il existe un point  $c \in ]a, b[$  tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

**Preuve** Considérons la fonction  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Il est clair que  $\varphi$  est continue sur  $[a, b]$ , dérivable sur  $]a, b[$  et que  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ .

En appliquant le théorème de Rolle à  $\varphi$  on obtient l'existence de  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

ce qui conduit à :  $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$ . ■

**Corollaire 4.1** Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , alors, pour tous  $x_1, x_2 \in I$  distincts, il existe un point  $c$  compris entre  $x_1$  et  $x_2$  tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(c)$$

**Théorème 4.9** “*Théorème des accroissements finis généralisé*”

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues sur  $[a, b]$  et dérivables sur  $]a, b[$ .

Si  $g'$  n'est pas nulle sur  $]a, b[$ , alors il existe un point  $c \in ]a, b[$  tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

### 4.3.1 Règle de L'Hôpital et applications

**Théorème 4.10** “*Première règle de L'Hôpital. Limite de la forme  $\frac{0}{0}$* ”

Soient  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $]a, b[ \setminus \{x_0\}$ ,  $x_0 \in ]a, b[$ .

On suppose que  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ , et  $g'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[ \setminus \{x_0\}$ .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l, \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

**Exemple 4.11** Calculer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

Cette limite est d'une forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ , donc on peut lui appliquer la règle de l'hôpital. On a

$$f(x) = \ln(1+x) - x \implies f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$$

$$g(x) = x^2 \implies g'(x) = 2x$$

et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x}{2x(1+x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1}{2(1+x)} = \frac{-1}{2}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{-1}{2}$$

**Théorème 4.11** “deuxième règle de L'Hôpital. Limite de la forme  $\frac{\infty}{\infty}$ ”

Soient  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions dérivables sur  $]a, b[ \setminus \{x_0\}$ ,  $x_0 \in ]a, b[$ .

On suppose que  $f(x_0) = g(x_0) = \infty$ , et  $g'(x) \neq 0$  pour tout  $x \in ]a, b[ \setminus \{x_0\}$ .

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{ (existe), alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ existe aussi et on a.}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L.$$

**Remarque 4.7** • Les règles de L'Hôpital restent vraies si  $x \rightarrow x_{0+}$ , ou  $x \rightarrow x_{0-}$ ,

ou  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ .

• Si  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$  et si les fonctions  $f'$  et  $g'$  vérifient les conditions du théorème, alors on peut répéter la règle. En général, on peut la répéter autant de fois si les conditions sont vérifiées pour les fonctions admettant des dérivées d'ordres supérieurs.

**Exemple 4.12** Calculer

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$$

Cette limite est d'une forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ , donc on peut appliquer la règle de l'hôpital. On obtient :

$$f(x) = e^{x^2} - \cos x \implies f'(x) = 2xe^{x^2} + \sin x$$

$$g(x) = x^2 \implies g'(x) = 2x$$

On a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{2x} = \frac{0}{0}$$

On applique une deuxième fois la règle de l'Hôpital aux fonctions  $f'(x)$  et  $g'(x)$ . On aura :

$$f'(x) = 2xe^{x^2} + \sin x \implies f''(x) = 2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + \cos x$$

$$g'(x) = 2x \implies g''(x) = 2$$

et donc

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + \cos x}{2} = \frac{3}{2}$$

En conclusion

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2xe^{x^2} + \sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2e^{x^2} + 4x^2e^{x^2} + \cos x}{2} = \frac{3}{2}$$

# Chapitre 5

## Fonctions élémentaires

### 5.1 Fonctions circulaires et leurs inverses

#### Fonctions sinus et cosinus

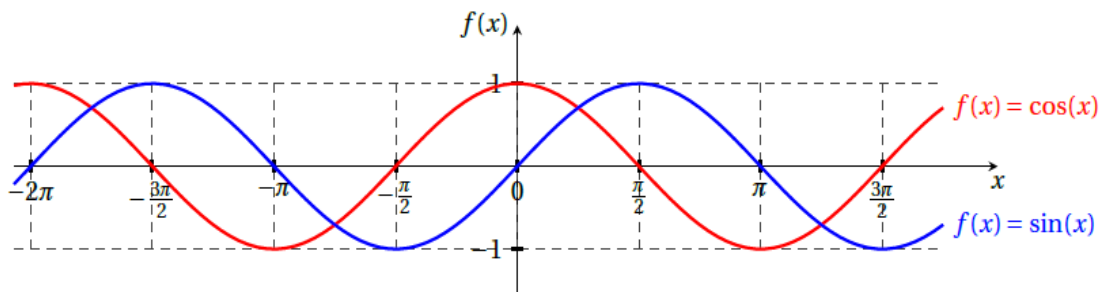
**Domaine de définition :** Elles sont définies dans  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $[-1, 1]$ .

**Périodicité, parité :** Elles sont  $2\pi$  périodiques. La fonction cos est paire, la fonction sin est impaire.

**Dérivées :**  $(\cos(x))' = -\sin(x)$ ,  $(\sin(x))' = \cos(x)$ .

Ce sont deux fonctions bornées :  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $|\sin(x)| \leq 1$  et  $|\cos(x)| \leq 1$  et de classe  $C^\infty$  sur leur ensemble de définition.

#### Représentation graphique



#### Fonctions tangente et cotangente

**Domaine de définition :** La fonction tangente est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

par  $\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

La fonction cotangente est définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  par  $\cot(x) := \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

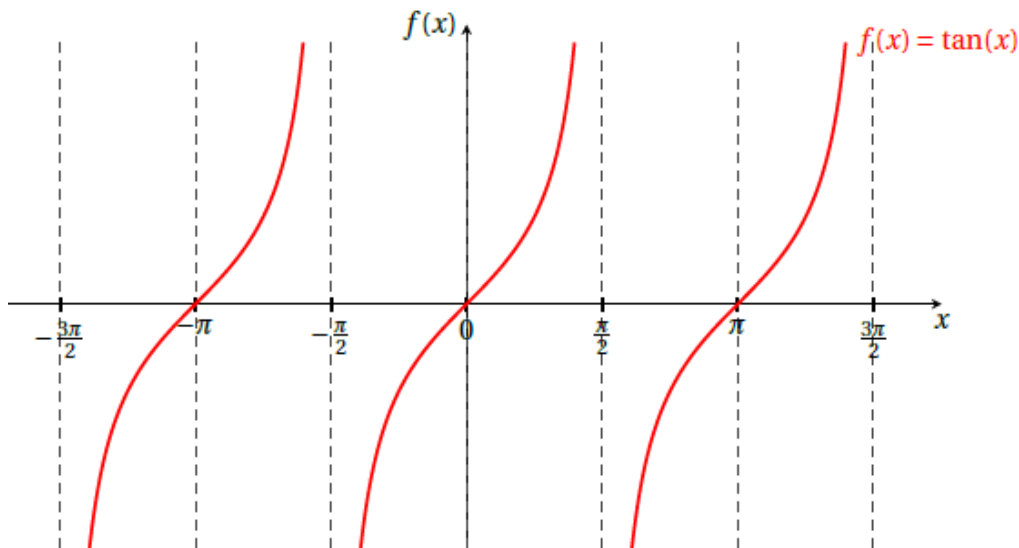
et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

**Périodicité, parité :** Elles sont  $\pi$  périodiques et impaires.

**Dérivées :**  $(\tan(x))' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ ,  $(\cot(x))' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ .

Ce sont deux fonctions non bornées mais de classe  $C^\infty$  sur leur ensemble de définition.

### Représentation graphique



### Fonctions circulaires réciproques

**Fonction :**  $y = \text{Arc sin}(x)$

La restriction de la fonction  $y = \sin(x)$  à l'intervalle  $I = [-\pi/2, \pi/2]$  est continue et strictement croissante. C'est donc une bijection continue strictement croissante de  $[-\pi/2, \pi/2]$  dans  $[-1, 1]$ .

La fonction  $y = \sin(x)$  admet donc une fonction réciproque, appelée "Arc sin" définie sur  $[-1, 1]$  dans  $[-\pi/2, \pi/2]$ , autrement dit :

$$\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$$

$$x \rightarrow y = \text{Arcsin } x$$

On a donc

$$\begin{cases} y = \arcsin(x) \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sin(y) \\ -\pi/2 \leq y \leq \pi/2 \end{cases}$$

Elle est impaire et pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

En effet, soit

$$\begin{aligned} y &= f(x) = \arcsin(x) \quad \text{pour } -1 < x < 1 \\ \iff x &= \sin(y) = g(y) \quad \text{avec } -\pi/2 < y < \pi/2 \end{aligned}$$

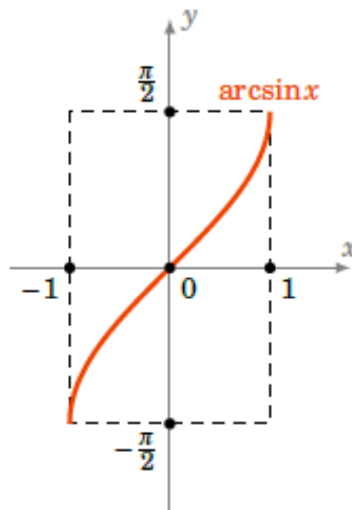
on a  $g'(y) = \cos(y) \neq 0$  pour  $-\pi/2 < y < \pi/2$ , donc

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos(y)} \quad (\text{dérivée d'une fonction réciproque})$$

et puisque pour  $y \in ]-\pi/2, \pi/2[$ , on a aussi  $\cos(y) > 0$  et donc

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pour } -1 < x < 1$$

**Représentation graphique de Arcsin(x)**



**Fonction  $y = \text{Arc cos}(x)$**

La restriction de la fonction  $y = \cos(x)$  sur l'intervalle  $I = [0, \pi]$  est continue et strictement décroissante. C'est donc une bijection continue strictement décroissante de  $[0, \pi]$  dans  $[-1, 1]$ .

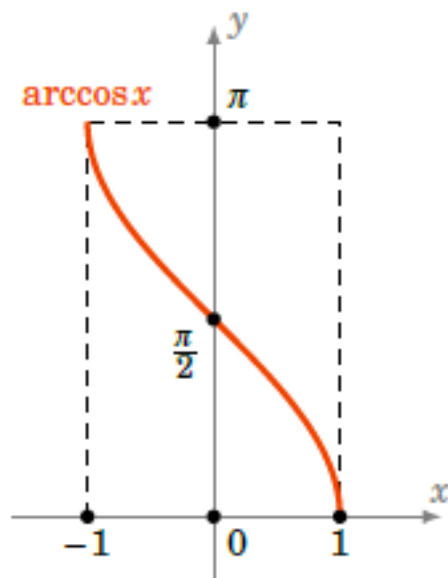
La fonction  $y = \cos(x)$  admet donc une fonction réciproque, notée  $\text{Arc cos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ , autrement dit :

$$\begin{cases} y = \arccos(x) \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \cos(y) \\ 0 \leq y \leq \pi \end{cases}$$

Fonction ni pair ni impaire et pour tout  $x \in ]-1, 1[$ , on a

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**Représentation graphique de  $\text{Arccos}(x)$**



**Fonction  $y = \text{Arctg}(x)$**

La fonction  $y = \text{tg}(x)$  est continue et strictement croissante de  $]-\pi/2, \pi/2[$  dans  $\mathbb{R}$ . Donc elle admet une fonction réciproque, continue et strictement croissante

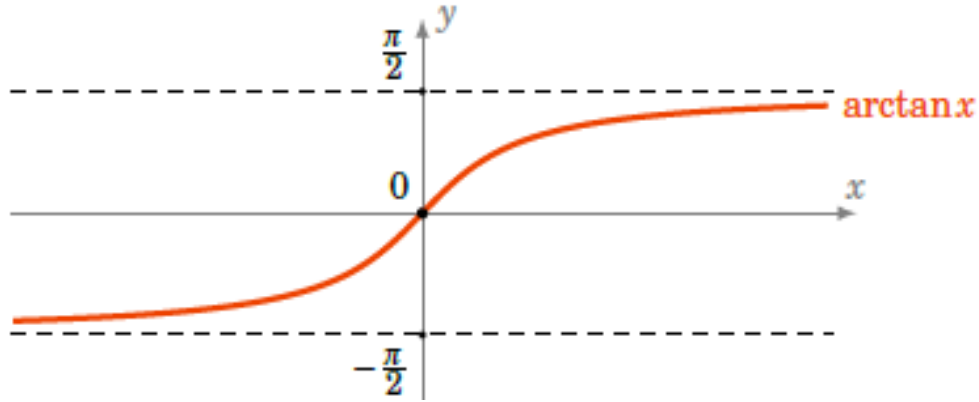
notée “  $Arctg$  ” définie de  $\mathbb{R}$  sur  $]-\pi/2, \pi/2[$ . On a donc

$$\begin{cases} y = Arctg(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = tg(y) \\ -\pi/2 < y < \pi/2 \end{cases}$$

Elle est impaire et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$Arctg'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Représentation graphique de  $Arctg(x)$**



**Fonction  $y = Arc\ cot\ g(x)$**

La fonction  $y = \cot g(x)$  est continue et strictement décroissante de  $]0, \pi[$  dans  $\mathbb{R}$ . Donc elle admet une fonction réciproque, continue et strictement décroissante notée “  $Arc\ cot\ g$  ” définie de  $\mathbb{R}$  sur  $]0, \pi[$ . On a donc

$$\begin{cases} y = Arc\ cot\ g(x) \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} x = tg(y) \\ 0 < y < \pi \end{cases}$$

Fonction ni pair ni impaire et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$Arc\ cot\ g'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

## 5.2 Fonctions hyperboliques et leurs inverses

### 5.2.1 Fonctions hyperboliques

**Définition 5.1** *On appelle :*

1) sinus hyperbolique la fonction  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2) cosinus hyperbolique l'application  $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

**Proposition 5.1** Les fonctions  $\cosh$  et  $\sinh$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . De plus

1)  $\sinh'(x) = \cosh(x)$  et  $\cosh'(x) = \sinh(x)$

2)  $\cosh(x)$  est paire,  $\sinh(x)$  est impaire

**Définition 5.2** On appelle :

1) tangente hyperbolique l'application  $\tanh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

2) cotangente hyperbolique l'application  $\coth : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

**Proposition 5.2** Les fonctions  $\tanh$  et  $\coth$  sont de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^*$

respectivement. De plus :

1)  $\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$  et  $\coth'(x) = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$

2)  $\tanh(x)$  et  $\coth(x)$  sont impaires

## 5.2.2 Fonctions hyperboliques réciproques

**Fonction argument sinus hyperbolique :** C'est la bijection réciproque de la fonction  $\sinh$ . Elle est impaire et on a

$$\text{Arg} \sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow y = \text{Arg} \sinh(x)$$

et pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a

$$\text{Arg sinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

**Fonction argument cosinus hyperbolique :** C'est la bijection réciproque de la restriction à  $[0, +\infty[$  de la fonction  $\cosh(x)$ .

$$\begin{aligned} \text{Arg cosh} : \quad & [1, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[ \\ x \rightarrow y = & \text{Arg cosh}(x) \end{aligned}$$

Et on a

$$\forall x \in ]1, +\infty[, \text{Arg cosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

**Fonction argument tangente hyperbolique :** C'est la bijection réciproque de la fonction  $\tanh$  définie par

$$\begin{aligned} \text{Arg tanh} : \quad & ]-1, +1[ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y = & \text{Arg tanh}(x) \end{aligned}$$

et pour tout  $x \in ]-1, +1[$ , on a

$$\text{Arg tanh}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

**Fonction argument cotangente hyperbolique :** C'est la bijection réciproque de la fonction  $\coth$  définie par

$$\begin{aligned} \text{Arg coth} : \quad & ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x \rightarrow y = & \text{Arg coth}(x) \end{aligned}$$

et pour tout  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  on a

$$\text{Arg coth}'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

# Bibliographie

- [1] Guy AULIAC, Jean AVIGNANT et Elie AZOULAY : Aide-mémoire de Mathématiques. EdiScience, 2006.
- [2] Dr. Philippe Chabloz : Cours d'Analyse I et II, avril 2013.
- [3] Wieslawa J. KACZOR et Maria T. NOWAK : PROBLÈMES D'ANALYSE I - Nombres réels, suites et séries. EDP Sciences, 2008.
- [4] Allab, Kada : fonction d'une variable réelle - Alger : O.P.U., 2002. - 510p
- [5] Avignon, Marie-Pascale : Analyse : 369 exercices corrigés, Paris : Ellipses, 1991. - 320p
- [6] Jean-Marie MONIER : Les méthodes et exercices de Mathématiques PCSI-PTSI. Dunod, 2008.
- [7] François MOULIN, Jean François RUAUD, AnneMIQUEL et Jean-Claude SIFRE : Mathématiques tout-en-un - 1ere année. Dunod, 2003.
- [8] Alain Soyeur - François Capaces - Emmanuel Vieillard-Baron : Cours de Mathématiques. Sup MPSI PCSI PTSI TSI. Les -mathematiques.net, 23 mars 2011, et le site [http ://www.les-mathematiques.net](http://www.les-mathematiques.net).