

ANALYSE I

Les suites numériques réelles :

* Suite arithmétique :

$$U_{n+1} = U_n + r$$

$$U_n = U_0 + nr$$

La somme de termes consécutifs $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$$S_n = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$$

* Suite géométrique :

$$U_{n+1} = q \times U_n$$

$$U_n = q^n \times U_0$$

La somme de termes consécutifs $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$$S_n = U_0 \left(\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \right)$$

Si $q = 1$ $S_n = U_0 (n+1)$

* Suite monotone :

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est Croissante $\uparrow$

Si S $U_n < U_{n+1}$

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante $\downarrow$

Si S $U_n > U_{n+1}$

* Suite bornée

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée $U_n \leq M$

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée $U_n \geq m$

U_n est bornée si $M \geq U_n \geq m$

U_n est Convergent si $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$) (finie)

U_n est divergent si $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \pm \infty$ (infinie)
 $\Rightarrow$ n'existe pas

* Toute suite croissante et majorée converge vers L

* Toute suite décroissante et minorée converge vers L

* Toute suite convergente est bornée
La réciproque est fausse.

* Toute Suite Croissant et non majorée tend vers $+\infty$

* Toute Suite décroissant et non minorée tend vers $-\infty$

* Suites adjacentes :

- Deux suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites adjacentes si $U_n \uparrow$ et $V_n \downarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$S_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = q(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = q \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

II - Limite et continuité de fonction numériques réelles

* Limite d'une fonction : ($\in L_{\text{lim}} \text{ ou } \mathbb{R}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

* Fonctions continues :

f est continue en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

f est continue sur l'intervalle $I \subset D_f$ si elle est continue en tout point x_0 de I

$\ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$

* Prolongement par continuité

on dit que f est prolongeable par continuité en x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

* Relation entre limite de suite et continuité

f est continue en l $\left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout suite } (U_n) \subset I \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(U_n) = f(l) \end{array} \right.$

* Fonctions continues sur un intervalle

Maximum et minimum :

$$\text{minorant } \alpha \leq f(x) \leq \beta \text{ Majorant}$$

Alors : f est bornée sur I si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{x^2}$ est non bornée sur $]0, 3[$

$$\frac{1}{9} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{0}$$

Pour $f(x) = x^2$ sur $I =]2, 5[$

$$M = f(5) = 25 \quad ; \quad m = f(2) = 4$$

Pour $f(x) = \sin(x)$ sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

$$M = f(\frac{\pi}{2}) = 1 \quad ; \quad m = f(0) = 0$$

* Théorème de la valeur intermédiaire

f continue sur $I = [a, b]$

$$f(a) \cdot f(b) < 0 \Rightarrow c \in]a, b[\text{ et } f(c) = 0$$

$f(x) = \cos(x) - x$ continue sur $I = [0, \frac{\pi}{2}]$

$$f(0) \cdot f(\frac{\pi}{2}) = 1 \times -\frac{\pi}{2} < 0$$

il existe au moins $c \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et $f(c) = 0$

* Théorème de la bijection :

$f(x)$ une fonction continue et monotone :

a) f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$

b) f^{-1} est aussi continue et strictement monotone de même sens que f

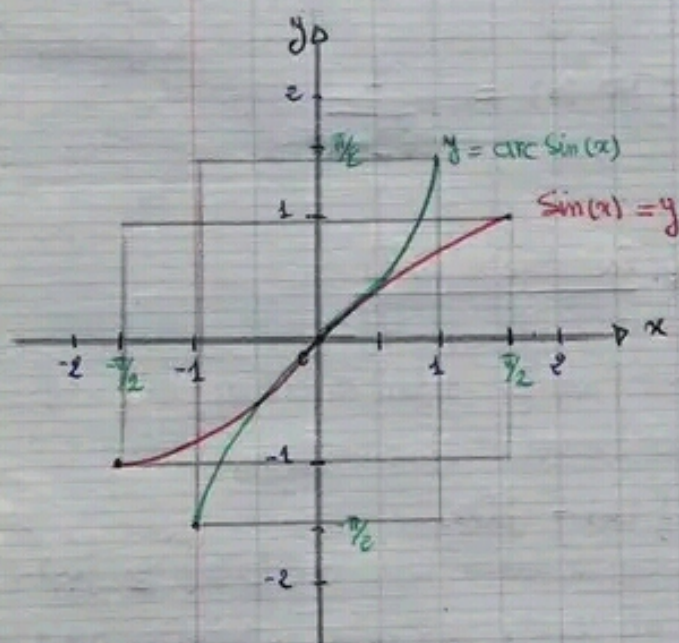
Fonctions Trigonométriques réciproques

* Fonction Arcsinus : ($\sin^{-1}$)

$$\sin \left[\overset{x}{-\frac{\pi}{2}}, \overset{y}{\frac{\pi}{2}} \right] \rightarrow [-1, 1] \quad y = \sin x$$

$$\text{Arc Sin} \left[\overset{x}{-1}, \overset{y}{1} \right] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad y = \text{Arc Sin}(x)$$

- Arc Sin est une fct impair $\Rightarrow \text{Arc Sin}(-x) = -\text{Arc Sin}(x)$
- Sin et Arc Sin $\Rightarrow$ est continue et strictement croissant
- l'équation $\sin(x) = a$, admet pour solution $\Rightarrow$
 $x = \text{Arc Sin}(a) + 2k\pi$ ou $x = \pi - \text{Arc Sin}(a) + 2k\pi$

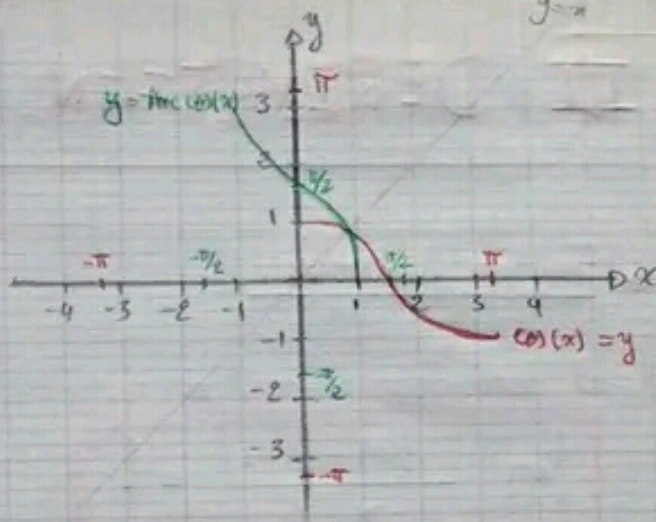


* Fonction Arccosinus : ($\cos^{-1}$)

$$\cos \left[\overset{x}{0}, \overset{y}{\pi} \right] \rightarrow [-1, 1] \quad y = \cos(x)$$

$$\text{Arccos} \left[\overset{x}{-1}, \overset{y}{1} \right] \rightarrow [0, \pi] \quad y = \text{Arccos}(x)$$

- Arccos est une fct pair $\Rightarrow \text{Arccos}(x) = \text{Arccos}(-x)$
- cos et Arccos $\Rightarrow$ continue et strictement décroissant
- l'équation $\cos(x) = a$, admet pour solutions :
 $x = \text{Arccos}(a) + 2k\pi$ ou $x = -\text{Arccos}(a) + 2k\pi$

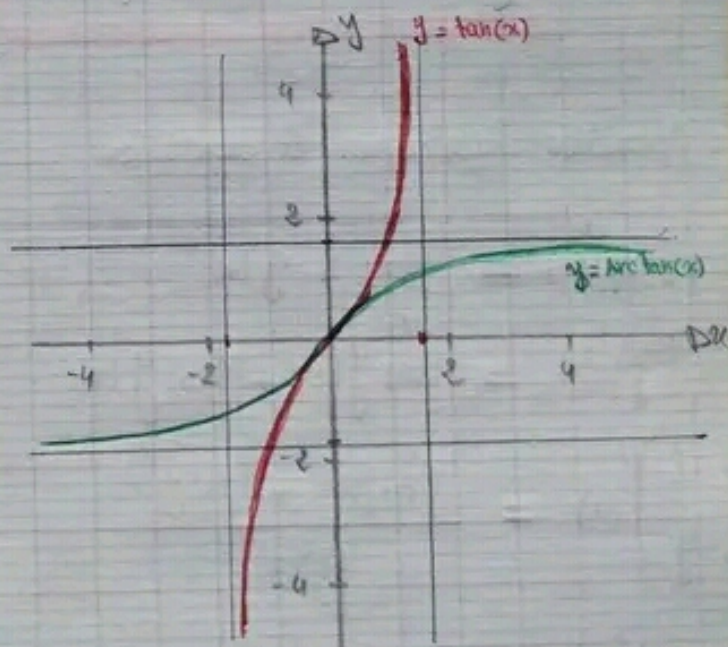


* Fonction arctangente : ($\tan^{-1}$)

$$\tan \left] \overset{x}{-\frac{\pi}{2}}, \overset{y}{\frac{\pi}{2}} \right[\quad y = \tan(x)$$

$$\text{Arc tan} \left] \overset{x}{-1}, \overset{y}{1} \right[\quad y = \text{Arc tan}(x)$$

- Arctan est une fct impair $\Rightarrow \text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}(x)$
- Tan et Arctan $\Rightarrow$ continue et strictement croissant
- l'équation $\tan(x) = a$, admet pour solutions
 $x = \text{Arc tan}(a) + k\pi$



III DERIVATION

* Fonction dérivable :

- f est dérivable en x_0 si :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{dérivée} \\ \text{première de } f \\ \text{en } x_0 \end{array} \right.$$

- f est dérivable sur I si :

$$\forall x_0 \in I \quad f'(x_0) \text{ existe}$$

* l'équation de T : (si f dérivable en x_0)

$$y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

* Opération algébriques et dérivation

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$$

EXEMPLE

$$\cos(x^2) = (x^2)' \times \cos'(x^2) = 2x \sin(x^2)$$

* Dérivée d'une fonction réciproque :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\text{Arc sin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Arc cos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{Arc tan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

* Théorème de Rolle :

- Soit f une fct définie et continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et tq

$$f(a) = f(b)$$

$\Rightarrow$ Alors il existe au moins $c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$

$\Rightarrow$ cela signifie qu'il existe au moins un point de la courbe de f où la tangente est horizontale.

* Théorème des accroissements finis (TAF)

f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$
il existe au moins $c \in]a, b[$

$$\text{tq} \quad f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

$$\text{ou} \quad f(a) - f(b) = (a-b)f'(c)$$

$\Rightarrow$ Cela signifie qu'il existe au moins un point de la courbe de f où la tangente est parallèle à la droite joignant les points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$

* Première application du TAF :

Soit f dérivable sur I de $\mathbb{R}$, alors :

- a) f est constante sur $I \Leftrightarrow \forall x \in I \quad f'(x) = 0$
- b) f est croissant sur $I \Leftrightarrow \quad \quad \quad f'(x) > 0$
- c) f est décroissant sur $I \Leftrightarrow \quad \quad \quad f'(x) < 0$

* Deuxième application du TAF (Règle de l'Hôpital)

Soit f et g deux fct dérivable au voisinage de x_0 .
 $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ou bien $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi \sin(\pi x)}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\pi^2 \cos(\pi x)}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

* Troisième application du TAF (Inégalités)

Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

$$\text{tg } \forall x \in [a, b] \quad |f'(x)| \leq M$$

$$\text{Alors le TAF entraîne } |f(b) - f(a)| \leq (b-a)M$$

* Etudes des fonctions hyperboliques :

* Fonction Sinus hyperbolique sh

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

• $\text{sh}'(x) = \text{ch}(x) > 0$, sh est strictement croissant dans $\mathbb{R}$

• $\text{sh}(-x) = -\text{sh}(x)$, sh est impair

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh}(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh}(x) = -\infty$$

* Fonction Cosinus hyperbolique ch

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

• $\text{ch}'(x) = \text{sh}(x)$, donc ch est décroissant sur $\mathbb{R}^-$ et croissant sur $\mathbb{R}^+$

• $\text{ch}(-x) = \text{ch}(x)$, ch est pair

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{ch}(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{ch}(x) = +\infty$$

* Relations entre $\text{ch}(x)$ et $\text{sh}(x)$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x) + \text{sh}(x) = e^x$$

$$|\text{sh } x| < \text{ch}(x)$$

$$\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$$

$$(\text{ch}(x) + \text{sh}(x))^n = e^{nx} = \text{ch}(nx) + \text{sh}(nx)$$

* Fonction tangente hyperbolique

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{th}(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\text{th}'(x) = \frac{1}{\text{ch}^2(x)} = 1 - \text{th}^2(x) > 0$$

th est croissant sur $\mathbb{R}$

• $\text{th}(-x) = -\text{th}(x)$, th est impair

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{th}(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{th}(x) = -1$$

IV FORMULE DE TAYLOR

f est de classe C^n sur I
 Si $\Rightarrow f^n$ existe et continue sur I

Fonctions Concaves - Convexes

$f(x) = x^2$ convexe sur $\mathbb{R}$
 $f(x) = ax + b$ convexe et concave sur $\mathbb{R}$

f convexe si $f'' > 0$
 f concave si $f'' < 0$

Formule de Taylor :

polynôme de Taylor en x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Reste de Lagrange

c'est la formule de Taylor-Lagrange de f d'ordre n en x_0

on pose $x = x_0 + h$

$\downarrow$

Formule de Mac-laurin : en ($x_0 = 0$)

$$f(h) = f(0) + \frac{h}{1!} f'(0) + \frac{h^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta h)$$

Inégalité :

Montrer que $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$

Mac-laurin de $f(x) = \cos x$ à l'ordre 3

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \cos(\theta x)$$

$$0 < \cos \theta x < 1$$

Extremum local

f définit sur un intervalle I et $x_0 \in I$

f admet un maximum local $f(x) \leq f(x_0)$

f admet un minimum local $f(x) \geq f(x_0)$
extremum

$\Rightarrow x_0$ est une valeur critique de f

$$\text{Si } f'(x_0) = 0$$

Nature d'un point critique :

f une fonction de classe C^n sur I

x_0 un point critique $f'(x_0) = 0$

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \dots = f^{(n)}(x_0) = 0$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0 \quad \text{Alors}$$

Si n (pair ≥ 2) f admet un extremum local en x_0

$$f''(x_0) > 0 \quad f \text{ admet un minimum en } x_0$$

$$f''(x_0) < 0 \quad f \text{ admet un maximum en } x_0$$

Si n (Impair ≥ 3) f admet un point d'inflexion

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{ou } f'(x_0) = 0 \quad \text{pt d'inflexion en } x_0$$

Formule de Taylor Young de f d'ordre $n+1$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta(x-x_0)) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \varepsilon(x)$$

V - DEVELOPPEMENTS LIMITES

Fonction équivalentes:

f et g sont équivalentes au voisinage de x_0 .

$$f \approx g \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Exemple.

$$\sin x \approx x, \quad \text{Arc Sin}(x) \approx x, \quad \text{Arctan}(x) \approx x$$

$$\ln(1+x) \approx x, \quad e^x - 1 \approx x, \quad 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2}$$

$$\sin \frac{1}{x} \approx \frac{1}{x}, \quad P(x) = \frac{1}{x} - x + x^3 \approx \frac{1}{x}$$

$$P(x) = \frac{1}{x} - x + x^3 \approx x^3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x^2)}{(\text{Arctg}(x))^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{(x^2)^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-e^x)(1-\cos x)}{x^3+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \times \frac{x^2}{2}}{x^2(1+x)} = \frac{x}{x(3x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} = 0$$

Développement limité au voisinage de 0

La formule de Taylor-Young $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!} \epsilon(x)$$

ou encore

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + o(x^n)$$

Méthode pratique de recherche d'un DL

Soit f et g deux fonctions ayant un DL_n

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = Q_n(x) + o(x^n)$$

$$(f+g)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + o(x^n)$$

$$(fg)(x) = P_n(x) \cdot Q_n(x) + o(x^n)$$

dans ce cas on conserve que les termes de degré inférieur ou égal à n

$\frac{f}{g}$ admet un DL_n dont la partie régulière est le quotient est le quotient de la division selon les puissances croissantes de $P_n(x)$ par $Q_n(x)$ jusqu'à n

Développement limité au voisinage de $x_0 \neq 0$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^n \epsilon(x)$$

Exemple $DL_{\pi}^3 \sin x$

$$DL_{\pi}^3 \sin x = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f^{(3)}(x_0) + (x-x_0)^3 \epsilon(x)$$

$$DL_{\pi}^3 \sin x = -(x-\pi) + \frac{(x-\pi)^3}{6} + (x-\pi)^3 \epsilon(x)$$

Développement limité au voisinage de $+\infty$

DL_{∞}^{-n} on pose $X = \frac{1}{x}$
 $\Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$ pour x ramener à un DL_0^n

$$DL_{\infty}^{-2} \left(\frac{(x^2-1)}{x^2+2x} \right) \text{ on } X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$$

$$DL_{\infty}^{-2} \left(\frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} \right) \Rightarrow DL_0^2 \left(\frac{1 - X^2}{1 + 2X} \right)$$

$$\text{on a } \frac{1}{1+X} = 1 - X + X^2 + o(X^2)$$

$$\frac{1}{1+2X} = 1 - 2X + 2X^2 + o(X^2)$$

$$DL_0^2 \left(\frac{1 - X^2}{1 + 2X} \right) = (1 - X^2)(1 - 2X + 2X^2) + o(X^2)$$

$$F(X) = 1 - 2X - X^2 + o(X^2)$$

$$f(x) = 1 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Asymptotes obliques :

- Soit f définie au voisinage de $\pm\infty$ on dit que f admet une asymptote oblique d'équation

$$y = ax + b$$

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^n} + \frac{1}{x^n} \varepsilon(x)$$

$\Rightarrow$ développement asymptotique de f au voisinage de l'infini.

$$\text{on pose } X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$$

EXEMPLE :

$$\text{on a } f(x) = x e^{\frac{1}{x}} + \frac{x^3}{x^2-1}$$

$$f(x) = x e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}}$$

$$\text{on pose } X = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{X}$$

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{e^X}{X} + \frac{1}{X - X^3} = \frac{1}{X} \left(e^X + \frac{1}{1 - X^2} \right)$$

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

$$\frac{1}{1 - X^2} = 1 + X^2 + o(X^2)$$

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X} \left(1 + X + \frac{X^2}{2} + 1 + X^2 + o(X^2) \right)$$

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X} \left(2 + X + \frac{3}{2} X^2 + o(X^2) \right)$$

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{2}{X} + 1 + \frac{3}{2} X + o(X)$$

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= ax + b + \frac{c}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

$$y = 2x + 1$$