

I - Les Suites

1) La suite (U_n) est majorée si pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $M \in \mathbb{R}, (U_n) \leq M$

2) La suite (U_n) est minorée si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $m \in \mathbb{R}, m \leq U_n$

(U_n) majorée $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, U_n \leq M$

(U_n) minorée $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{R}, m \leq U_n$

3) La suite (U_n) est bornée si (U_n) majorée et minorée
 (U_n) bornée $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \exists m, M \in \mathbb{R}$
 $m \leq U_n \leq M$

4) Suite (U_n) est croissante si:
 $U_{n+1} - U_n \geq 0$

5) Suite (U_n) est décroissante si:
 $U_{n+1} - U_n \leq 0$

6) (U_n) est borné si $(|U_n|)$ est bornée

7) On dit que (U_n) est convergente et elle converge vers l . Si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un entier $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tq: $n > N_\epsilon$ Alors: $|U_n - l| < \epsilon$

(U_n) converge vers $l \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}$
 $\forall n > N_\epsilon: |U_n - l| < \epsilon$

8) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \pm\infty$ ou bien (U_n) n'admet pas de limite donc (U_n) est divergente

9) Si une suite a une limite l dans \mathbb{R} alors la limite l est unique

10) Si la limite (U_n) est convergente alors (U_n) est bornée

11) La suite (U_n) tend vers $+\infty$ ssi: $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_A \in \mathbb{N}, \forall n > N_A: U_n > A$

12) La limite (U_n) tend vers $-\infty$ ssi: $\forall B \in \mathbb{R}, \exists N_B \in \mathbb{N}, \forall n > N_B: U_n < B$

13) On a (U_n) et (V_n) deux suites si la suite (U_n) est bornée et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ Alors: la suite $((U_n) \cdot (V_n))$ converge vers 0

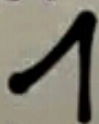
14) La Convergence:

- Toute suite croissante, majorée est conv
- Toute suite décroissante, minorée est ..
- Toute suite monotone, bornée est ..

15)

- Toute suite croissante, non majorée $\rightarrow +\infty$
- Toute suite décroissante, non minorée $\rightarrow -\infty$

16) Si la suite (U_n) est convergente alors toute sous suite extraite est convergente vers la même limite de (U_n) donc: vers l



17) Une suite divergente peut admettre des sous-suites extraites convergentes

18) Si : les sous-suites extraites sont convergentes mais pas vers la même limite donc : La suite est divergente

19) Soit (U_n) et (V_n) deux suites on dit que (U_n) et (V_n) suite adjacentes
SSI : 1 (U_n) est croissante (décroissante)
2 (V_n) est décroissante (croissante)
3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - V_n = 0$

20) Si (U_n) et (V_n) sont adjacentes alors elles convergent vers la même limite $\lim_n U_n = \lim_n V_n = l$

21) Suite arithmétique :

- Sa raison r : $U_{n+1} = U_n + r$
- Son terme général : $U_n = U_p + (n-p)r$
- Sa somme : $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$
 $S = \frac{\text{nbr des termes} \cdot (\text{1er terme} + \text{dernier terme})}{2}$
- nbr des termes : indice f - indice $i + 1$
 $S = \frac{n-0+1}{2} (U_0 + U_n) = \frac{n+1}{2} (U_0 + U_n)$
- La méthode pour montrer que (U_n) est une suite arithmétique il suffit de calculer : $U_{n+1} - U_n = r$ constant

22) Suite géométrique :

- Sa raison q : $V_{n+1} = qV_n$
- Son terme général : $V_n = V_p \cdot q^{n-p}$
- Sa somme $S = V_0 + V_1 + \dots + V_n$
 $S = \text{premier terme} \cdot \frac{1-q^{\text{nbr de termes}}}{1-q}$

$$S = V_0 \cdot \frac{1-q^{n-0+1}}{1-q} = V_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

La méthode pour montrer que (V_n) est une suite géométrique il suffit de calculer $\frac{V_{n+1}}{V_n} = q$ (q constant) que dépend pas de n

23) Suite de Cauchy
 (U_n) est une suite de Cauchy SSI :
 $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon, \forall p, \forall q \quad p > q > N_\epsilon$
 $|U_p - U_q| < \epsilon$

24) (U_n) n'est pas une suite de Cauchy la majorité comprend $p = 2n$ et $q = n$ et on trouve à la fin que $|U_p - U_q| > \epsilon$

25) Toute suite de Cauchy est une suite convergente.

26) Toute suite de Cauchy est une suite bornée.

27) De toute suite bornée on peut extraire des sous-suites convergentes (théorème de Bolzano-Weierstrass)

28) Si (U_n) est une suite récurrente dont U_{n+1} s'exprime en fonction de U_n
 $U_{n+1} = f(U_n)$, U_0 donné
 (U_n) est convergente donc
 $\lim_n U_n = \lim_n U_{n+1} = l$

29) Les suites récurrentes de 2^{ème} ordre
une suite récurrente de 2^{ème} ordre est une suite de la forme $U_{n+2} = f(U_{n+1}, U_n)$
 $U_{n+2} + aU_{n+1} + bU_n = 0$
 $a, b \in \mathbb{R}$

30) Equation du 2^{eme} ordre homogene
La solution d'une equation homogene

$$\text{est : } U_n = r^n$$

$$U_{n+1} = r^{n+1}, U_{n+2} = r^{n+2}$$

$$U_{n+2} + aU_{n+1} + bU_n = 0$$

$$r^{n+2} + ar^{n+1} + br^n = 0$$

$$r^n(r^2 + ar + b) = 0 \Rightarrow r^2 + ar + b = 0$$

$$\text{Si } \Delta = 0, r_1 = r_2 = r, U_n = \lambda r_1^n + \beta n r_2^{n-1}$$

$$\text{Si } \Delta > 0, r_1, r_2, U_n = \lambda r_1^n + \beta r_2^n$$

$$\text{Si } \Delta < 0, r_1 = \alpha + i\beta = \rho e^{i\theta}$$

$$r_2 = \alpha - i\beta = \rho e^{-i\theta}$$

$$U_n = \lambda \rho^n e^{in\theta} + \beta \rho^n e^{-in\theta}$$

31) Suite Complexe :

- est une suite qui s'ecrit sous
la forme :

$$U_n = a_n + i b_n$$

Avec : (a_n) et (b_n) sont des suites
reelles

- (U_n) converge si (a_n) et (b_n) sont
convergentes.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + i \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

II. Les fonctions et les limites :

1) les fonctions composees
 $g \circ f(x) = g(f(x))$

2) En general : $f \circ g \neq g \circ f$

3) fonction paire :

- f est paire ssi $\forall x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
- Le graphe d'une f paire est symetrique
par rapport a l'axe (Oy)

4) fonction impaire

- f est impaire ssi $\forall x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$
- Le graphe d'une f impaire est
symetrique par rapport a l'origine $O(0,0)$

5) fonction periodique :

f est periodique de periode T ($T \in \mathbb{R}$)
ssi : $\forall x \in D_f : (x+T) \in D_f$ et
 $f(x+T) = f(x)$

6) f est majorée $\Leftrightarrow \forall x \in D_f, \exists M \in \mathbb{R}$
 $f(x) \leq M$

7) f est minorée $\Leftrightarrow \forall x \in D_f, \exists m \in \mathbb{R}$
 $m \leq f(x)$

8) f est bornée si elle est minorée
et majorée

9) f est croissante ssi : $\forall x, y \in D_f$
 $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

10) f est decroissante ssi : $\forall x, y \in D_f$
 $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

11) f est monotone ssi f est croissante
ou decroissante

3

12) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in Df: |x - x_0| < \eta$
 $\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

13) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$
 $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in Df: |x - x_0| < \eta$
 $\Rightarrow f(x) > A$

14) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$
 $\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in Df:$
 $|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < A$

15) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \Leftrightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0, \exists n > 0, \forall x \in Df, x > n$
 $\Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

16) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = \lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = l$

17) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_2$
 et $l_1 \neq l_2$
 donc f n'admet pas une limite en x_0

18) Si f admet une limite donc:
 f est bornée

19) Si f est bornée et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$
 Alors: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - g(x) = 0$

20) **Relation entre suite et fonction**

Si f admet une limite l en x_0
 $(\lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = l)$ Alors pour toute
 suite (U_n) qui converge vers x_0
 On a: $\lim_{n \rightarrow \infty} f(U_n) = l$

21) f continue en $x_0 \Leftrightarrow$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

22) f continue en x_0 SS: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$
 Par définition (f continue en x_0)
 $\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall n > M, |x - x_0| < M \Rightarrow$
 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

23) f est continue sur $[a, b]$ SS:
 f est continue en tout $x_0 \in]a, b[$
 et continue à droite de a et à gauche
 de b , et on écrit: $f \in C([a, b], \mathbb{R})$
 avec $C([a, b], \mathbb{R})$ est l'ensemble
 des f continues sur $[a, b]$

24) les fonctions polynomiales et
 rationnelles sont définies et continues
 sur leurs domaines de f .

25) Continuité Uniforme:
 f définie sur I
 f est uniformément continue sur I SS:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists M, \forall x, y \in I: |x - y| < M$
 $\Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

26) f est lipschitzienne SS:
 $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| < K|x - y|$

27) Théorème des valeurs intermédiaires
 f est définie et continue sur $[a, b]$
 $+ f(a) \times f(b) < 0$
 Alors $\exists c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$

28) prolongement par continuité:
 f est définie et continue sur I sauf $x_0 \in I$
 Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ existe, f finie
 Alors f admet un P. par continuité + q .
 $f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l & \text{si } x = x_0 \end{cases}$