Fomesoutra.com
ça soutra!

Chapitre 01 : Les nombres réels

I/ Les ensemble $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$:

1) L'ensemble des entiers Naturels $\mathbb{N}$:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

$\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} / \; n_1 + n_2 \in \mathbb{N}, \; n_1 . n_2 \in \mathbb{N}$

2) L'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$:

$\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2, 3 \ldots\}$

$\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \rightarrow k_1 - k_2 \in \mathbb{Z}, \; k_1 . k_2 \in \mathbb{Z}$

L'ordre dans $\mathbb{Z}$:

Définition : (ici nous allons définir la notion générale d'ordre sur un ensemble quelconque)

1. Soit E un ensemble, Une relation $\mathcal{R}$ Sur E est un sous ensemble de E^2, pour $(x, y) \in E^2$ on dit que x est en relation avec y et on note $x \mathcal{R} y$ pour dire: $(x, y) \in \mathcal{R}$

2. La relation $\mathcal{R}$ est dite "relation d'ordre" Si:

→ $\mathcal{R}$ est réflexive : $x \in E, \; x \mathcal{R} x$

→ $\mathcal{R}$ est antisymetrique : $x, y, \in E$, $(x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x) \Rightarrow x = y$

→ $\mathcal{R}$ est transitive : pour $\forall x, y, z \in E$ $(x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z) \Rightarrow (x \mathcal{R} z)$

Definition 2 : La relation $\mathcal{R}$ est dite "totale" Si pour tout $x, y \in E$ on a: $x \mathcal{R} y \; V \; y \mathcal{R} x$, on dit aussi que $(E, \mathcal{R})$ est un ensemble totalement ordonné.

Propriété : La relation $\leqslant$ Sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre totale: elle est définis comme Suit :

$\forall n, n' \in \mathbb{Z}$, $n \leqslant n'$ Si et Seulement Si il esciste $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n' = n + k$.

3) L'ensemble des nombre rationels $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \; ; \; p \in \mathbb{Z}, \; q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

. $\frac{p}{q}$ est irréductible donc p et q Sont premiers entre eux: PGCD(p, q) = 1

Proposition : Un nombre est rationnel Si et Seulement Si il admet une écriture décimale périodique ou finie.

II/ L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ et ces proprietés:

1) Les Addition et les multiplication :

Les propriétés usuelles de commutativité de l'addition et de la Soustraction s'appliquent dans $\mathbb{R}$, on dit que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps comautatifs

2) L'ordre Sur $\mathbb{R}$:

La relation d'ordre $\leqslant$ sur est une relation d'ordre totale. . . .

Elle est compatible avec + et x .

3) Propriété d'Archiméde :

$\mathbb{R}$ est Archimédien i.e

$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} / \; n > x$

« pour tout réel x il existe un entier naturel n strictement plus grand que x »

cette propriété permet de définir la partie entière de x.

Définition de la partie entière :

Pour chaque réel x il existe un unique entier relatif appelé la partie entière de x noté $E(x)$ ou $[x]$ tel que

$$E(x) \leqslant x < E(x)+1$$

4) La valeure Absolue :

La valeure Absolue du réel x est le réel positif noté $|x|$ définis par :

$$|x| = \max(x,-x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Proposition 1 : Pour tout reel $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

1) $|x| \geqslant 0$, $|-x| = |x|$

$$|x| > 0 \leftrightarrow x \neq 0$$

2) $\sqrt{x^2} = |x|$, $|x|^2 = x^2$

3) $|xy| = |x| \cdot |y|$

4) inégalité triangulaire : on a :

$|x|-|y| \leqslant |x+y| \leqslant |x|+|y|$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$

5) Seconde inégalité triangulaire

$$\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y| \text{ , } \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Proposition 2 : Soit $a \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0$, $|a| \leqslant \varepsilon \rightarrow a = 0$

remarques :

- $|x| < r \rightarrow -r < x < r$
- $|x-a| < r \rightarrow a-r < x < r+a$
- $\text{Max}(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}$
- $\text{Min}(a,b) = \dfrac{a+b-|a-b|}{2}$
- $|x| > a \rightarrow x \in]-\infty,-a[\cup]a,+\infty[$
- $|x| < a \rightarrow x \in]-a,a[$

III/ Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:

1) Définition : Un intervalle :

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un sous ensemble I de $\mathbb{R}$ vérifiant : [un Block sans trou]

$\forall a,b \in I$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $(a \leqslant x \leqslant b \rightarrow x \in I)$

remarque : Par convention $I = \varnothing$ est un intervalle, $I = \mathbb{R}$ est aussi un intervalle

2) Définition : Le voisinage.

Un sous ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est le voisinage d'un reel $a \in \mathbb{R}$ Si il existe un interval I tel que $a \in I$, $I \subset V$

3) Théoreme : Densité de $\mathbb{Q}$:

- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationels i.e :

$\forall a,b \in \mathbb{R}$; $a < b$, $\exists r \in \mathbb{Q}$; $a < r < b$

- $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ l'ensemble des irrationels est également dense dans $\mathbb{R}$

IV - Bornes Supérieures :

1) Définition : Majorants et Minorants

. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, x est majorant de A dans E si ; $\forall a \in A,\ x \geqslant a$

. x est minorant de A dans E si :

$\forall a \in A,\ x \leqslant a$

2) Définitions 2 : Max et Min

. x est le plus grand élément de A si

$\forall a \in A,\ x \geqslant a$ et $x \in A$ [$x = \max A$]

. x est le plus petit élément de A si

$\forall a \in A,\ x \leqslant a$ et $x \in A$ [$x = \min A$]

3) Définitions 3 : Majorée et Minorée :

. Un ensemble est majoré Si il admet au moins un majorant.

. Un ensemble est minoré Si il admet au moins un minorant.

4) Borne Supérieure :

a. Définition : Soit A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

1. α est une borne Supérieure de A Si : . α est Majorant de A

. α est le plus petit-majorant de A

2. α est la borne inférieure de A Si : . α est un minorant de A

. α est le plus grand minorant de A

Donc ;

. $\forall a \in A,\ \sup A \geqslant a$

$\forall a \in A,\ x \geqslant a \longrightarrow x \geqslant \sup A$

. $\forall a \in A,\ \inf A \leqslant a$

$\forall a \in A,\ x \leqslant a \longrightarrow x \leqslant \inf(A)$

b. Théorème : Tout ensemble inclu dans $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne Supérieure. [res. minorée]

c. Caractérisation de la borne Supérieure.

Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ la borne Supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que.

1 - Si $a \in A$ alors $\sup A \geqslant a$

2 - pour tout $y < \sup A$ il existe $a \in A$ tel que $y < a$ ou :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A ;\ M - \varepsilon < a$, . . .

V - Caractérisation d'une partie dense :

1) Définition Formelle :

A est dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tq $|x - a| \leqslant \varepsilon$

2) Caractérisation par les Suites :

A dense dans $\mathbb{R} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, Il existe une Suite d'éléments de A convergant vers x.

Complément:

1) Définition d'un Ségment:

On appelle Ségment $[a,b]$ $a\in\mathbb{R}$ $b\in\mathbb{R}$ l'ensemble défini par

- $\emptyset$ Si $a>b$
- $\{x\in\mathbb{R} \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ Si $a\leqslant b$

2) Paramétrage de Ségments:

$x\in[a,b]\Leftrightarrow\exists t\in[0,1], x=(1-t)a+bt$

3) Définition d'une partie convexe:

Soit X la partie d'une droite plan ou espace

On dit que X est une partie convexe lorsque:

$A\in X, B\in X\Rightarrow[A,B]\subset X$

on note Bien sur l'équivalence entre les assertions suivantes:

I est un intervalle $\Leftrightarrow$ I est une partie convexe de $\mathbb{R}$

Chapitre 02 : Suite et Serie de Nombres réels :

I) Définition d'une Suite :

Une Suite réelle est une application :

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow U_{(n)}$$

on note U_n au lieu de $U(n)$ et $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au lieu de U, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également un ensemble :

$$(U_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{U_0, U_1, U_2 \dots U_n\}$$

Si les n_0 premiers termes de la Suite ne sont pas définis on parle de la Suite $(U_n)_{n\geq n_0}$

II) Convergence d'une Suite :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une Suite on dis que la Suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel "l" Si et Seulement Si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |U_n - l| < \varepsilon$$

et qui équivaut à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, U_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$$

III) Divergence d'une Suite :

1) Définition Generale

Une Suite diverge Si elle ne converge pas

$$\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, |U_n - l| > \varepsilon$$

2) Divergence vers l'infini :

1. Lorsque : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, U_n \geq A$ on dira que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$

2. Lorsque $\forall B \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, U_n \leq B$ on dira que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$

3) Suite Borné (majoré et minoré)

1) Une Suite est majoré SSi :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq M$$

2) Une Suite est minorée SSi :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, M \leq U_n$$

3) Une Suite est bornée Si elle est a la fois majorée et minorée

IV) Propriété de la limte d'une Suite :

1) L'Unicité de la limite :

Si une Suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la limte est unique.

2) oppérations Sur les limites des Suites

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux Suites convergent respectivement vers l et l' deux réels :

1) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la Suite $(\lambda U_n + \mu V_n)$ converge vers $\lambda l + \mu l'$

2) Si $\lim_{n\to+\infty} U_n = l \in \mathbb{R}^* \leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{U_n} = \frac{1}{l}$

3) oppérations Sur les Suites divergentes :

1) $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{U_n} = 0$

2) $\forall n \in \mathbb{N}, U_n > 0$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{U_n} = +\infty$

3) $\lim_{n\to+\infty} U_n = l \in \mathbb{R}^*$, $\lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n V_n = +\infty$

on a bien sur les resultats analogue avec $-\infty$

4) Théoremes d'encadrement et de comparaison :

1. Compatibilité avec l'ordre,

Si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$ et que U_n est convergente alors $\lim_{n\to+\infty} U_n \geq 0$, notons que les inégalités passent au sens large par passage a la limite.

• Si U_n et V_n sont convergent et $\forall n \in \mathbb{N}; U_n < V_n$

alors. $\lim_{n\to+\infty} U_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} V_n$

• Si U_n est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$, alors

U_n est Strictement positive.

2) Comparaison et divergence:

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que:

$\forall n \in \mathbb{N}, \; U_n \leqslant V_n$

• Si $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} V_n = +\infty$

• Si $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

3) Théoreme des gendarmes

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites tq:

$\forall n \in \mathbb{N}; \; V_n \geqslant W_n \geqslant U_n$ on aura

$\lim_{n\to+\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to+\infty} V_n = l \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} W_n = l$

IV) Monotonie et Convergence des Suites:

1-Définition

Une Suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. décroissante) SSi:

$\forall n \in \mathbb{N}, \; U_{n+1} \geqslant U_n$ (resp $U_n \geqslant U_{n+1}$)

et elle est Strictement décroissante (resp. croissante) SSI: $\forall n \in \mathbb{N}, \; U_n > U_{n+1}$

2- Théoreme de Dedekind

Toute Suite de réels croissant est majorée converge. (resp. décroissant et minoré)

on peut en déduire que tout Suite croissante non majoré diverge vers $+\infty$ et toute Suite decroissante non minoré diverge vers $-\infty$

V) Suites Adjacentes:

1) Définition:

On dit que deux Suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Sont Adjacente SSi:

• La Suite U_n est croissante

• La Suite V_n est décroissante

• la Suite $U_n - V_n$ converge vers 0

on aura alors

$U_n \leqslant U_{n+1} \leqslant l \leqslant V_{n+1} \leqslant V_n, \; \forall n \in \mathbb{N}$

VI) Suitent de Cauchy:

On dit qu'une Suite est de Cauchy lorsque:

$\forall \varepsilon > 0, \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \; \forall p, q \in \mathbb{N}, \; (p \geqslant q > n_0 \Rightarrow |U_p - U_q| < \varepsilon)$

et elle n'est pas de cauchy lorsque

$\exists \varepsilon > 0, \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \exists p, q \in \mathbb{N}, \; |U_p - U_q| > \varepsilon$

Théoreme: Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une Suite réelle on a:

U_n converge $\Longleftrightarrow U_n$ est de cauchy

et cela implique que U_n est bornée

VII) Théoréme des Segment emboités:

Soit (a_n) et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux Suites réels telles que:

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \; a_n \leqslant b_n$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \; [a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$
3. $\lim_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$

Alors: $\exists l \in \mathbb{R}, \; \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{l\}$

A) Suite Extraite / Sous Suite :

1) Définition d'une Suite Extraite :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une Suite

et $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application Strictement Croissante, La Suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $V_n = U_{\sigma(n)}$ est appelé Suite extraite ou Sous Suite de la Suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Si la Sous-Suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel "l" on dit que le réel "l" est une valeur d'adherance de la Suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque : $\forall n\in\mathbb{N}, \sigma(n) \geq n$

2) Théoreme de la limite de $U_{\sigma(n)}$:

Soit une Suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergante vers $l\in\overline{\mathbb{R}}$

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $l \iff$ toute Suite extraite tend vers l.

3) Suites pair et Impair :

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \Leftrightarrow \begin{cases} U_{2p} \text{ converge vers } l \\ U_{2p+1} \text{ converge vers } l \end{cases}$

4) Divergence par dualité de valeur d'adhérence

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une Suite admettant deux Suites extraites qui convergent vers de limites différentes. Alors la Suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

5) Théoreme de Bolzano - Weierstrass :

De toute Suite Bornée de réels, on peut extraire une sous Suite convergente.

6) Theoreme d'adherance :

Si une suite bornée de réels admet une unique valeur d'adherance l, alors cette Suite converge vers l.

A) Suites Récurrente :

1) Définition :

On appelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ recurrente toute Suite réelle $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation $\begin{cases} U_{n+1} = f(U_n) \quad (n\in\mathbb{N}) \\ U_0 \in I \end{cases}$

f étant une fonction d'un intervale I de $\mathbb{R}$ donc $f : I \longrightarrow I$

2) Théorème de continuité

f continu en $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall U_n ; U_n \xrightarrow{+\infty} x_0 \\ f(U_n) \xrightarrow{+\infty} f(x_0) \end{cases}$

3) étude d'une Suite Récurrente :

a) Intervalle Stable :

Dans cet étape on démontre que la Suite est bien définie, pour cela on démontre que la Suite ne Sort pas de l'ensemble D, on démontre donc par récurrence une propriété de type :

$U_n \in D \Longrightarrow f(U_n) \in D$

b) Limite eventuelle :

Si la Suite Récurrente $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors l est le point fixe de la fonction $f(U_n) = U_{n+1}$

i.e : $f(l) = l$

(note personelle : Il ne faut pas oublier l'argument de continuité)

c) étude de la monotonie de la Suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

i) Démonstration directe :
On étudie le Signe de $[f(x) - x]$ Sur D (D est l'intervalle Stable)

ii) Cas ou f est Croissante :
on démontre par récurrance la proposition
$P(n) : U_n \geq U_{n+1}$ (ou l'inverse Selon Si $U_0 > U_1$ ou $U_1 > U_0$)
on se servant de la croissance de f dans l'hérédité.

iii) Cas ou f est décroissante
la Suite n'est pas monotone mais l'étude des deux Suites U_{2n} et U_{2n+1} nous permet de conclure concernant Sa convergence
on Sait que dans ce cas U_{2n} et U_{2n+1} Sont de monotonie inverse
On étudie la monotonie de chacune des Sous Suites par récurrance en se Servant du fait que
$U_{2n+2} = U_{2(n+1)} = f \circ f(U_{2n})$
$U_{2n+3} = U_{2(n+1)+1} = f \circ f(U_{2n+1})$
avec $f \circ f$ croissante,