Calcul propositionnel, Propositions quantifiées

Calcul propositionnel

Définition : une proposition est une information pouvant être jugée par vraie ou faux.
Exemples :
1. « Maintenant il fait nuit là où je suis » est une proposition car on peut savoir s'il fait nuit ou pas à l'endroit ou je suis.
2. « $1 + 1 = 2$ » est une proposition car l'information est vraie
3. « $2 + 3 = 4$ » est une proposition car l'information est fausse
4. « il est quel heure ? » n'est pas une proposition car ce n'est pas une information.
5. « prends soin de toi » n'est pas une proposition car ce n'est pas une information.
6. « $x + 3 = 0$ » n'est pas une proposition car on ne connait pas la valeur de x.
7. « Pour tout x réel, $x + 3 = 0$ » est une proposition car on peut dire que l'information est fausse, il existe des réels pour lesquels $x + 3 \neq 0$
8. « Pour tout entier n : $n + 1 > 0$ » est une proposition car on peut dire qu'elle est vraie, en effet pour tout entier n on a : $(n \in N)$alors $n \geq 0$ donc $n + 1 \geq 0 + 1$ donc $n + 1 \geq 1$ donc $n + 1 > 0$.

Remarque : généralement les propositions sont notées p, q, r …etc

Opération sur les propositions :
Négation d'une proposition :
Soit p une proposition ; la négation de la proposition p, est une autre proposition notée $\bar{p}$ et est définit par la phrase « il n'est pas vrai que p », elle est vraie si p est fausse , et fausse si p est vraie.
Exemple :
Si p : « $1 + 1 = 2$ » alors $\bar{p}$ est la proposition « $il\ n'est\ pas\ vrai\ que$ $1 + 1 = 2$ » , autrement dit $\bar{p}$: $1 + 1 \neq 2$.
Si r est la proposition « Pour tout entier n, $n + 1 > 0$ », alors sa négation $\bar{r}$ est la proposition « il n'est pas vrai que pour tout entier n, $n + 1 > 0$ », autrement dit $\bar{r}$ est la proposition « il existe un entier n : $n + 1 \leq 0$ »

Tableau de vérité de la négation d'une proposition :
Si une proposition est vraie on dit qu'elle vaut 1, et si elle est fausse, on dit qu'elle vaut 0.
Une proposition quelconque p peut avoir deux valeurs, 1 ou 0.
On a donc le tableau suivant :

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

Conjonction de deux propositions :
Soient p et q deux propositions. La conjonction de p et , notée $p \wedge q$, est la proposition « $p\ et\ q$ ». La conjonction $p \wedge q$ n'est vraie que si p et q sont vraies. Donc si l'une des deux propositions est fausse alors la conjonction $p \wedge q$ est fausse.
Tableau de vérité de la conjonction :

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Exercice :

Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $(1 + 1 = 2) \wedge (1 + 2 = 3)$
2. $(1 + 1 = 2) \wedge (1 + 2 = 4)$
3. $(2 = 0) \wedge (\text{les moutons ont des ailes})$
4. $(\text{ le srascov2 tue certains les hommes qu'il infecte}) \wedge (\text{le srascov2 mute})$
5. (Tout entier naturel s'ecrit sous forme d'une somme de deux carrés)∧(il existe des entier qui ne s'écrivent pas sous forme d'une somme de deux carrés)

Solution :

1. Les deux propositions sont vraies donc leur conjonction est vraie
2. La deuxième proposition est fausse donc la conjonction est fausse
3. « les moutons ont des ailes est une proposition fausse donc la conjonction est fausse
4. Les deux propositions sont vraies donc leur conjonction est vraie
5. 3 ne peut pas s'écrie sous forme d'une somme de deux carrés (3=1+2) donc la première proposition est fausse donc la conjonction est fausse

Exercice :

Montrer que $p \wedge \bar{p}$ est toujours fausse :

Solution :

L'une des deux propositions parmi p et $\bar{p}$ est fausse donc leur conjonction $p \wedge \bar{p}$ est fausse.

Exercice :

Dans une même table de vérité, déterminer les valeurs de la proposition $p \wedge (q \wedge r)$ et de la proposition $(p \wedge q) \wedge r$. Quelle remarque peut-on faire.

Solution :

Chaque proposition composant la proposition $p \wedge (q \wedge r)$ doit etre sur le haut d'une colonne, donc il faut une colonne pour p, une pour q, une pour r, une pour $(q \wedge r)$ et une pour $p \wedge (q \wedge r)$.

Pour le nombre de ligne dans la table de vérité, il faut voir qu'il y a trois proposition élémentaires composant la proposition $p \wedge (q \wedge r)$, et que chacune d'elle peut prendre deux valeurs de vérité, et pour chaque chois de l'une d'elle correspond deux choix pour l'autre, donc il y a huit possibilités et on a :

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{q \wedge r}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{p \wedge (q \wedge r)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \wedge r}$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

On remarque que chaque cas (chaque ligne est un cas) les deux propositions $p \wedge (q \wedge r)$ et $(p \wedge q) \wedge)$ prennent les mêmes valeurs de vérité. On dit qu'elles sont logiquement équivalentes. On dit aussi que **la conjonction est associative.**

Disjonction de deux propositions :
Soient p et q deux propositions. La disjonction de p et , notée $p \vee q$, est la proposition « p ou q ». La disjonction est tout le temps vraie sauf si toutes les propositions sont fausse

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exercice :
Montrer que la proposition $p \vee \bar{p}$ est toujours vraie
Solution
L'une des deux propositions parmi p et $\bar{p}$ est vraie donc leur disjonction $p \vee \bar{p}$ est toujours vraie
Exercice :
Dans une même table de vérité, déterminer les valeurs de la proposition $p \vee (q \vee r)$ et de la proposition $(p \vee q) \vee r$. Quelle remarque peut-on faire.
Solution :
Pour chaque proposition composant la proposition $p \vee (q \vee r)$, il faut une colonne, donc il faut une colonne pour p, une pour q, une pour r, une pour $q \vee r$ et une pour $p \vee (q \vee r)$; de même pour la proposition $(p \vee q) \vee r$. Et il faut huit lignes car il y a huit possibilités.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

On remarque que pour chaque possibilité (chaque ligne) les propositions $(p \vee q) \vee r$ et $p \vee (q \vee r)$ prennent les mêmes valeurs. On dit qu'elles sont équivalentes ; on dit aussi que la disjonction est associative.

L'implication logique :
L'implication logique p implique$q$, notée $p \Longrightarrow q$, est la proposition $\bar{p} \vee q$

p	q	$\bar{p} \vee q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Remarquons que l'implication $p \Longrightarrow q$ est toujours vraie sauf dans un seul cas, lorsque p est vraie et q est fausse, on dit que le vrai n'implique pas le faux, autrement dit :

$(vrai \Longrightarrow vrai\ )$est une proposition vraie
(faux $\Longrightarrow$ vrai) est une proposition vraie
(faux $\Longrightarrow$ faux)est une proposition vraie
(vrai $\Longrightarrow$ faux) est une proposition fausse

Dans l'implication $p \Longrightarrow q,\ p$ s'appelle **l'hypothèse**, et q s'appelle **la conclusion**

Quand l'hypothèse est fausse l'implication est toujours vraie, alors que **l'implication est fausse si l'hypothèse est vraie et la conclusion fausse.**

On dit aussi que q est une condition nécessaire pour p, et que p est condition suffisante pour q.

On dit aussi que : si p alors q.

Exercice :

Montrer que l'implication $p \Longrightarrow p$ est toujours vraie

Solution :

Si p est vraie alors l'implication est vraie car le vrai implique le vrai, et si p est fausse alors le faux implique le faux donc l'implication esr vraie, donc dans les deux cas possible elle est vraie.

a. **Contraposée de l'implication $\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$:**

La contraposée de l'implication $p \Longrightarrow q$ est l'implication $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$
1	1	0	0	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

b. **Equivalence de deux propositions :**

On dit que les deux propositions p et q sont équivalentes, et on note $p \Longleftrightarrow q$, losque on a la conjonction $(p \Longrightarrow q) \wedge\ (q \Longrightarrow p)$.

P	q	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$	$p \Longleftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Remarquons que deux propositions sont équivalentes lorsque qu'elles ont même valeur de vérité, c'est-à-dire qu'elles sont toutes les deux vrais ou toutes les deux fausses.

Exercice :

Déterminer si les implications suivantes sont vraies :

1. $(1 + 1 = 2) \Longrightarrow (3 = 4)$
2. $(1 + 1 = 3) \Longrightarrow (3 = 4)$
3. $(1 + 1 = 0) \Longrightarrow (2 + 3 = 5)$
4. $(1 + 1 = 2) \Longrightarrow (2 + 3 = 5)$

Solution :

1. Le première proposition est vraie et la seconde fausse, le vraie n'implique pas le faux donc l'implication est fausse

2. Le première proposition est fausse, donc sans voir l'autre proposition on peut dire que l'implication est vraie car le faux implique le vraie et le faux implique le faux
3. Meme chose
4. Les deux propositions sont vraie, le vraie implique le vraie, donc l'implication est vraie.

Théorème :

Pour toute proposition p on a : $\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$

Preuve :

on dresse la table de vérité de la proposition :

p	$\bar{p}$	$\bar{\bar{p}}$	$\bar{\bar{p}} \Leftrightarrow p$
1	0	1	1
0	1	0	1

Exercice :

Etablir la table de vérité de la proposition suivante : $(p \vee \bar{q}) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$

Solution :

p	q	$\bar{q}$	$p \vee \bar{q}$	$p \Longrightarrow q$	$(p \vee \bar{q}) \Longrightarrow (p \Longrightarrow q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Exercice :

Déterminer si les équivalences suivantes sont vraies :

1. $(2+2=4) \ \Leftrightarrow (1+1=2)$
2. $(1+1=2) \Leftrightarrow (1+3=2)$
3. $(1+2=5) \Leftrightarrow (\text{ les vachent ont des ailes})$
4. $(2<3) \Leftrightarrow (2>5)$

Solution :

1. Les deux propositions sont vraies donc l'équivalence logique est vraie
2. Le première est vraie et la secnode fausse donc il n'y a pas d'équivalence logique.
3. Les deux propositions sont fausses donc elles sont logiquement équivalentes
4. La première proposition est vraie, la seconde fausse, donc l'équivalence logique est fausse

Exercice :

Montrer l'équivalence des propositions suivantes sans utiliser de table de vérité :

1. $p \vee p \Leftrightarrow p$
2. $p \wedge p \Leftrightarrow p$
3. $p \Leftrightarrow (\bar{p} \Longrightarrow p)$
4. $(p \vee q) \ \Leftrightarrow (\bar{p} \Longrightarrow q)$

Solution :

1. Si p est vraie alors $p \vee p$ est vraie , et si p est fausse alors $p \vee p$ est fausse, donc elles sont équivalentes
2. Si p est vraie alors $p \wedge p$ est vraie, et si p est fausse $p \wedge p$ l'est aussi, donc elles sont équivalentes
3. Si p est vraie alors $\bar{p}$ est fausse, et comme le faux implique le vraie alors $\bar{p} \Longrightarrow p$ est vraie, ceci d'une part, d'autre part si p est fausse alors $\bar{p}$ est vraie et comme le vraie n'implique pas

le faux alors l'implication $\bar{p} \Longrightarrow p$ est fausse, donc p et $\bar{p} \Longrightarrow p$ ont meme valeur de vérité, donc elles sont équivalentes.

4. $(p \vee q) \Leftrightarrow (\bar{\bar{p}} \vee q) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\bar{p} \Longrightarrow q)$

Théorème 1 : Lois de Morgan

Pour toutes propositions p et q on a :

a. $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$
b. $\overline{p \vee q} \Leftrightarrow \bar{p} \wedge \bar{q}$

Démonstration :

a.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \wedge q$	$\overline{p \wedge q}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	$\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

On remarque que quelles que soient les valeurs de p et q, $\overline{p \wedge q} \Leftrightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$ est toujours vraie.

b. On fait la même chose.

Théorème de la contraposée :

Pour toutes propositions p et q on a : $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\bar{q} \Longrightarrow \bar{p})$

Preuve : on utilise la table de vérité.

p	q	$\bar{p}$	$\bar{q}$	$p \Longrightarrow q$	$\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

On voit que quelles que soient les valeurs des propositions p et q, $p \Longrightarrow q$ et $\bar{q} \Longrightarrow \bar{p}$ ont les mêmes valeurs de vérités, donc elles sont équivalentes.

Exercice :

Montrer que pour tout entier naturel n on a : n^2 est impair $\Longrightarrow n$ est impair

Solution :

On utilise le théorème de la contraposée, c'est-à-dire on va montrer que

n n'et pas impair$\Longrightarrow n^2$ n'est pas impair

Autrement dit on montre que (n est pair $\Longrightarrow n^2$ est pair). On a :

(n est pair) $\Longrightarrow (\exists k \in N: n = 2k) \Longrightarrow \{n^2 = 4k^2 = 2[2k^2]\} \Longrightarrow$ (n^2 est pair).

Exercices de travaux dirigés

Exercice1 :

Construire une table de vérité pour chacune des propositions suivantes :

1. $p \Longrightarrow \bar{q}$ 2. $\bar{p} \Leftrightarrow q$ 3. $(p \Longrightarrow q) \vee (\bar{p} \Longrightarrow q)$ 4. $(p \Leftrightarrow q) \vee (\bar{p} \Leftrightarrow q)$

5 . $p \Longrightarrow (\bar{q} \vee r)$ 6. $\bar{p} \Longrightarrow (q \Longrightarrow r$

Exercice 2 :
Montrer l'équivalence des propositions suivantes :

1. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ 2. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ 3. $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
4. $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$ 5. $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
6. $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Exercice 3 :
Sans utiliser de table de vérité, et on utilisant l'exercice 2, et la définition logique de l'implication, montrer que :

$$[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)]$$

Exercice 4 :
On utilisant les lois de Morgan, les définitions et sans utiliser de table de vérité montrer que :

1. $[\,\overline{p \wedge q} \vee r] \Leftrightarrow [(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r)]$
2. $\overline{p \Rightarrow q} \Leftrightarrow (p \wedge \bar{q})$
3. $(\bar{p} \wedge \bar{q}) \Leftrightarrow \overline{\bar{p} \Rightarrow q}$

Exercice 5 :
Expliquer sans utiliser de table de vérité pourquoi la proposition suivante est vraie lorsque $p,\ q,\ et\ r$ ont même valeur de vérité, et fausse sinon

$$(p \vee \bar{q}) \wedge (q \vee \bar{r}) \wedge (r \wedge \bar{p})$$

Exercice 6 :

1. Expliquer sans utiliser de table de vérité pourquoi la proposition suivante est vraie lorsqu'au moins l'une des propositions $p, q\ , r$ est vraie et au moins l'une d'elles est fausse, et qu'elle est fausse si les trois propositions $p, q\ , r$ ont même valeur de vérité :
$$(p \vee q \vee r) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r})$$
2. Vérifier les résultats en utilisant une table de vérité.

Propositions Quantifiées
On voudrait étudier les informations contenant des variables, par exemple l'information notée $P(x, y)$ dont le sens est « x est plus petit que y » et qu'on note $[P(x, y) : x < y]$
Dans cette information il y a deux variables, x et y ; si on attribue a chacune de ces variables une valeur , par exemple $P(1,2)$, alors on obtient une proposition , vue que $P(1,2)$ est l'information $1 < 2$, et que cette information est vraie. $P(3,2)$ est une proposition car $P(3,2)\colon 3 < 2$, et cette information est fausse.
Mais l'information $P(x, y) : x < y$, prise sans fixer de valeur aux variables n'est pas une proposition, car ne connaissant pas les valeurs de x et y, on ne sait pas si $x < y, x > y, ou\ x = y$.
Une autre façon de rendre proposition l'information $P(x, y) : x < y$, c'est de la **quantifier**. Une façon de le faire c'est de dire que : **il existe au moins un** entier naturel x et **il existe au moins un** entier naturel y tels que $x < y$, symboliquement on écrit :

$$\exists x \in N, \exists y \in N\colon P(x, y)$$

De cette façon, on obtient une proposition, car il est vraie qu'il existe deux entiers naturels x et y tels que $x < y$, on peut donner à x la valeur 1, et à y la valeur 2.
On peut aussi dire que **pour tout** réel x et **pour tout** réel y on a $x < y$, sympoliquement on écrit :

$$\forall x \in R, \forall y \in R\colon P(x, y)$$

De cette façon on obtient une proposition, car l'information est fausse.

On peut aussi se dire que pour tout réel x , il existe un réel y tel que $x < y$, ce qui se traduit symboliquement par :

$$\forall x \in R, \exists y \in R: P(x, y)$$

De cette façon aussi on obtient une proposition car pour tout x dans R, si $y = x + 1$ alors $x < y$.

Exemple :

Considérons l'information $R(x): x < 1$. Cette information n'est pas une proposition car il y a une variable x dont on ne connait pas de valeur. On peut la quantifier de deux façon , soit en introduisant le quantificateur existentiel « il existe au moins », noté ∃, ou bien le quantificateur universel « pour tout » ou « quel que soit », noté ∀, pour obtenir soit la proposition vraie $\exists x \in Z: x < 1$, ou bien pour obtenir la proposition fausse $\forall x \in Z: x < 1$

D'une façon générale pour rendre proposition une information contenant des variables, il suffit d'attribuer à chaque variable l'un des deux quantificateurs ∃ ou ∀ et de définir l'ensemble auquel appartient chaque variable.

Négation d'une proposition quantifiée :

Exemple :

Considérons la proposition quantifiée : $\forall x \epsilon R: P(x)$ ou $P(x)$ est l'information $x > 1$

Il est clair que cette proposition est fausse car il existe un réel x tel que $x \leq 1$, symboliquement $\exists x \in R: x \leq 1$, et cette proposition est vraie, il suffit de choisir $x = 0$

La propostion $\exists x \in R: x \leq 1$ est la négation de la proposition $\forall x \epsilon R: x > 1$, car dire qu'il n'est pas vraie que $\forall x \epsilon R: x > 1$, c'est dire que $\exists x \in R: x \leq 1$.

Remarquons aussi que la négation de $x > 1$ est l'information $x \leq 1$, qui se traduit symboliquement par $\overline{P(x)}: x \leq 1$

Symboliquement on a :

$$\overline{\forall x \epsilon R: P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in R: \overline{P(x)}$$

Exemple :

Considérons la proposition quantifiée définit par : $\forall x \in R, \exists n \in Z: P(x, n)$ ou $P(x, n)$ signifie $n > x$

Dire qu'il n'est pas vraie que $\forall x \in R, \exists n \in Z: P(x, n)$, veut dire qu'il existe un réel x plus grand ou égale à tout entier relatif n, autrement dit la négation de la proposition $\forall x \in R, \exists n \in Z: n > x$ est la proposition $\exists x \in R, \forall n \in Z: n \leq x$

Symboliquement on a :

$$\overline{\forall x \in R, \exists n \in Z: P(x, n)} \Leftrightarrow \exists x \in R, \forall n \in Z: \overline{P(x, n)}$$

D'une façon générale on a :

Pour trouver la négation d'une information quantifiée contenant des variables, on transforme le quantifiquateur existentiel ∃ en le quantificateur universel ∀, et inversement, sans toucher au ensembles d'appartenance des variables, puis on prend la négation de l'information contenant les variables , par exemple :

$$\overline{\forall a \in A, \exists b \in B, \forall c \in C: p(a, b, c)} \Leftrightarrow \exists a \in A, \forall b \in B, \exists c \in C: \overline{p(a, b, c)}$$

Exercice :

Ecrire la négation de la proposition suivante :

$$\forall x \in A, \exists b \in B: p(a, b) \Longrightarrow q(a, b)$$

Exercice :

Soit $f: R \to R$

On dit que f est continue en a lorsque :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R : \ |x - a| < \delta \Longrightarrow f|(x) - f(a)| < \varepsilon$Que veut dire que f n'est pas continue en a.

Exercice :

Soit $f : R \rightarrow R$

On dit que f admet une limite lorsque x tend vers a lorsque :

$$\exists l \in R, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in R : \ |x - a| < \delta \Longrightarrow f|(x) - l| < \varepsilon$$

Que veut dire que f n'admet pas de limite au voisinage de a