

Opérations sur les Ensembles

Ensemble :

Un ensemble peut être défini de deux façons, soit en explicitant tous ses éléments, on dit qu'il est défini **en extension**, par exemple l'ensemble $A = \{1,2,3,4\}$ est défini en extension ; soit on le définit par une phrase littéraire ou logique qui permet de faire comprendre quels sont les éléments de cet ensemble, et on dit que l'ensemble est défini **en compréhension**, par exemple, l'ensemble B défini par $B = \{x \in \mathbb{Z} : -100 \leq x < 100\}$ est défini en compréhension, l'ensemble $2\mathbb{N}$ défini par $2\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ est un entier pair}\}$ est un ensemble défini en compréhension. D'une façon générale un ensemble E défini en compréhension s'écrit $E = \{x \in U : P(x)\}$ où il faut indiquer où sont pris les éléments de l'ensemble, ici c'est l'ensemble U , et quelle est la caractéristique de ces éléments, ici c'est l'information $P(x)$

Ensemble, éléments d'un ensemble et appartenance :

Soit A un ensemble, disons par exemple $A = \{1,2,3,4\}$; les nombres $1,2,3,4$ sont **les éléments de l'ensemble A** ; on dit que les 1 **appartient** à A , et on écrit $1 \in A$,

On a aussi $2 \in A$; $3 \in A$; $4 \in A$.

Le nombre 5 n'appartient pas à l'ensemble A , on écrit dans ce cas $5 \notin A$

Cardinal d'un ensemble fini E : c'est le nombre des éléments de E et on le note $card(E)$

Dans l'exemple précédant : $card(A) = 4$

Ensemble vide :

Un ensemble est vide lorsqu'il ne contient aucun élément, on le note \emptyset .

On a $card(\emptyset) = 0$.

Inclusion et égalité

On dit qu'un ensemble F est inclus dans un ensemble E si tout élément de F appartient à l'ensemble E ; on écrit $F \subset E$ et on lit F est inclus dans E . on dit aussi que F est une partie de E .

Exemple : $E = \{1,2,3,4,5\}$, $F = \{1,2,3\}$, $G = \{4,5,6\}$

Ici F est inclus dans E , mais G n'est pas inclus dans E car $6 \in G$ mais $6 \notin E$; de même E n'est pas inclus dans F car $4 \in E$ mais $4 \notin F$

Symboliquement on a : $F \subset E$; $G \not\subset E$; $E \not\subset F$

Exemple d'inclusion : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$; $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Remarque :

L'ensemble vide \emptyset est inclus dans tous les ensembles, en effet, pour tout élément x , l'information $x \in \emptyset$ est fautive, et comme le faux implique le vrai et le faux alors l'implication $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ est vraie quel que soit l'ensemble A , donc $\emptyset \subset A$.

D'une manière générale, on a : $F \subset E \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x : x \in F \Rightarrow x \in E$

Et pour la non-inclusion : $F \not\subset E \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists x : x \in F \text{ et } x \notin E$

Remarque : Si les ensembles sont définis en compréhension, disons

$$E = \{x \in G : p(x)\} \text{ et } F = \{x \in G : q(x)\}$$

Alors dire que $F \subset E$ revient à dire que $q(x) \Rightarrow p(x)$

Exercice :

Montrer que l'implication suivante est vraie :

$$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$$

Egalité de deux ensembles :

On dit que deux ensembles A et B sont égaux si et seulement si A et B ont les mêmes éléments, autrement dit

$$A = B \stackrel{def}{\Leftrightarrow} [\forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B] \Leftrightarrow (A \subset B \text{ et } B \subset A)$$

Remarque : si $A = \{x \in E: p(x)\}$ et $B = \{x \in E: q(x)\}$ alors $A = B \stackrel{def}{\Leftrightarrow} [p(x) \Leftrightarrow q(x)]$.

Ensemble des parties d'un ensemble :

Exemple :

Soit $E = \{1,2,3\}$, on a par exemple $\{1\} \subset E$; $\{2,3\} \subset E$; $\emptyset \subset E$...

On peut construire l'ensemble de toutes les parties de E, qu'on note $\mathcal{P}(E)$, et qui est défini en extension par : $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Les éléments de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ sont des ensembles, ce sont les sous-ensembles de E.

On a : $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$, ..., $\{1,2,3\} \in \mathcal{P}(E)$

Exercice :

1. Décrire l'ensemble des parties des ensembles suivants et déterminer le cardinal de chacun d'eux :
 $\emptyset, A = \{a\}, B = \{a, b\}, C = \{a, b, c, d\}$
2. En déduire que si $\text{card}(E) = n$ alors $\text{card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$

Produit cartésien $E \times F$ de deux ensembles E et F :

$$E \times F = \{(a; b): a \in E \text{ et } b \in F\}$$

Exemple : si $E = \{1, x\}$, $F = \{2, x, y\}$ alors

$$E \times F = \{(1; 2), (1; x), (1; y), (x; 2), (x; x), (x; y)\}$$

Ici $\text{card}(E) = 2$ et $\text{card}(F) = 3$ et $\text{card}(E \times F) = 6$

D'une manière générale si $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(F) = p$ alors $\text{card}(E \times F) = n \times p$.

Exemple :

On note R^2 le produit cartésien $R \times R$.

Réunion de deux ensembles :

Soient A, B, et C trois ensembles définis par $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5,6\}$; $C = \{a, 2,5, c\}$

On peut considérer un ensemble contenant uniquement tous les éléments de A et tous les éléments de B, c'est l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$, on le note $A \cup B$, et on lit « A union B ». Symboliquement on écrit $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$

On a de la même façon : $A \cup C = \{1,2,3,4,5, a, c\}$ et $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6, a, c\}$

Exemple :

Si on pose $N^- = \{-n: n \in N\}$ alors $Z = N^- \cup N$

D'une façon générale on a, on définit la réunion de deux ensembles A et B par :

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Si $A = \{x \in E: p(x)\}$ et $B = \{x \in F: q(x)\}$ alors $A \cup B = \{x \in E \cup F: p(x) \vee q(x)\}$

Autrement dit : $x \in A \cup B \stackrel{def}{\Leftrightarrow} x \in A \text{ ou } x \in B$

Si on a plusieurs ensembles A_1, A_2, \dots, A_n :

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x: x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } \dots x \in A_n\}$$

$$x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in A_1 \text{ ou } x \in A_2 \text{ ou } \dots x \in A_n$$

Exercice :

Montrer que pour tout ensemble A et B on a : $A \subset A \cup B$

Intersection de deux ou plusieurs ensembles

Soient A, B, et C trois ensembles définis par $A = \{1,2,3,4\}$; $B = \{3,4,5,6\}$; $C = \{a, 2,5, c\}$

On peut mettre les éléments communs aux ensembles A et B dans un même ensemble, c'est-à-dire mettre les éléments qui sont dans A et dans B en même temps dans un même ensemble, ces éléments sont 3 et 4 et l'ensemble qui va les contenir s'appellera l'**intersection** des ensembles A et B, et il sera noté $A \cap B$ et on le lit « A inter B ». Dans notre exemple on a :

$$A \cap B = \{3,4\}$$

On a aussi :

$$A \cap C = \{2\}; B \cap C = \{5\}; A \cap B \cap C = \emptyset$$

Exemple : $A = \{x \in \mathbb{Z}: x \leq 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z}: x \geq -2\}$, $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

D'une façon générale on a :

$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ et } x \in B\}$$

Si $A = \{x \in E: p(x)\}$ et $B = \{x \in F: q(x)\}$ alors $A \cap B = \{x \in E \cap F: p(x) \wedge q(x)\}$

Autrement dit : $x \in A \cap B \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in A \text{ et } x \in B$

Si $A = \{x \in E: p(x)\}$ et $B = \{x \in F: q(x)\}$ alors $A \cap B = \{x \in E \cap F: p(x) \wedge q(x)\}$

Et si on a plusieurs ensembles A_1, A_2, \dots, A_n :

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{x: x \in A_1 \text{ et } x \in A_2 \text{ et } \dots \text{ et } x \in A_n\}$$

$$x \in A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x \in A_1 \text{ et } x \in A_2 \text{ et } \dots \text{ et } x \in A_n$$

Exercice :

Montrer que pour tout ensemble A et B on a : $A \cap B \subset A$

Remarque : Si les ensembles sont définis en compréhension, par exemple

$$A = \{x \in E: p(x)\}; B = \{x \in F: q(x)\} \quad A \cap B = \{x \in E \cap F: p(x) \text{ et } q(x)\}$$

Théorème :

Pour tout ensemble X, Y, Z on a :

1. $X \cap X = X; X \cup X = X$
2. $X \cap Y = Y \cap X; X \cup Y = Y \cup X$
3. $X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z; X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$
4. $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z); X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

Complémentaire d'une partie d'un ensemble par rapport à cet ensemble :

Soit $E = \{1,2,3,4,5\}$, $H = \{2,3,6,7\}$ et $A = \{2,3\}$

A est bien inclus dans E

Les éléments qui sont dans E et qui ne sont pas dans A s'appelle complémentaire de A dans E, et on le note \bar{A}^E , et on a $\bar{A}^E = \{1,4,5\}$.

On peut considérer de la même façon le complémentaire de A dans H vue que A est une partie de H , et on a $\bar{A}^H = \{6,7\}$.

Remarquons que $A \cup \bar{A}^E = E$ et que $A \cup \bar{A}^H = H$ et que $A \cap \bar{A}^E = \emptyset = A \cap \bar{A}^H$

d'une manière générale, on si A est une partie d'un ensemble E , on appelle complémentaire de A dans E l'ensemble de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A , on note cet ensemble \bar{A}^E .

Symboliquement on a : $\bar{A}^E = \{x \in E : x \notin A\}$

Autrement dit : $x \in \bar{A}^E \Leftrightarrow x \notin A$

Si A est un ensemble défini par une information $p(x)$ sur ses éléments, $A = \{x \in E : p(x)\}$, alors $\bar{A}^E = \{x \in E : \overline{p(x)}\}$ ou $\overline{p(x)}$ est la négation de $p(x)$.

Lois de Morgan :

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E , on a :

1. $\overline{A \cup B}^E = \bar{A}^E \cap \bar{B}^E$
2. $\overline{A \cap B}^E = \bar{A}^E \cup \bar{B}^E$

Preuve : on va utiliser une table de vérité pour prouver le 1.

| $x \in A$ | $x \in B$ | $x \in \bar{A}^E$ | $x \in \bar{B}^E$ | $x \in A \cup B$ | $x \in \overline{A \cup B}^E$ | $x \in \bar{A}^E \cap \bar{B}^E$ |
|-----------|-----------|-------------------|-------------------|------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

On voit que dans les deux dernières colonnes, les lignes de mêmes niveaux prennent les mêmes valeurs. Ce qui se traduit par $x \in \overline{A \cup B}^E \Leftrightarrow x \in \bar{A}^E \cap \bar{B}^E$, ce qui veut dire que $\overline{A \cup B}^E = \bar{A}^E \cap \bar{B}^E$.

Faire la même chose pour 2.

Exercice :

Vérifier les deux lois de Morgan dans le cas où $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$, et $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

Solution :

1. $\bar{A}^E = \{5,6,7,8\}$, $\bar{B}^E = \{1,2,7,8\}$, $\bar{A}^E \cap \bar{B}^E = \{7,8\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6\}$
 $\overline{A \cup B}^E = \{7,8\}$

On voit bien que $\overline{A \cup B}^E = \bar{A}^E \cap \bar{B}^E$

2. $A \cap B = \{3,4\}$, $\overline{A \cap B}^E = \{1,2,5,6,7,8\}$, $\bar{A}^E \cup \bar{B}^E = \{1,2,5,6,7,8\}$

Et on voit bien ici aussi que $\overline{A \cap B}^E = \bar{A}^E \cup \bar{B}^E$.

Théorème :

Montrer que pour tout ensembles A, B, C on a :

1. $A = A \cap A = A \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ et $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ et $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Démonstration

1. Si $x \in A$ est vraie alors la conjonction ($x \in A$ et $x \in A$) et la disjonction ($x \in A$ ou $x \in A$) sont aussi vraies

Les autres propriétés sont laissées en exercice.

Différence et différence symétrique de deux ensembles :

Exemple :

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad B = \{3,4,5,6\}$$

On peut construire l'ensemble des éléments qui sont dans A et qui ne sont pas dans B , on note cet ensemble $A - B$, et dans notre exemple $A - B = \{1,2\}$, de même $B - A = \{5,6\}$

On peut aussi construire l'ensemble qui va contenir les éléments qui sont dans B et qui ne sont pas dans A ainsi que les éléments qui sont dans A et qui ne sont pas dans B , autrement dit on construit l'ensemble qui va contenir $A - B$ et $B - A$, on va le noter $A \Delta B$, lire A delta B , et dans notre exemple $A \Delta B = \{1,2,5,6\}$.

D'une manière générale on a :

$$E - F = \{x: x \in E \text{ et } x \notin F\} \quad \text{et} \quad E \Delta F = (E - F) \cup (F - E)$$

Si $E = \{x: p(x)\}$ et $F = \{x: q(x)\}$ alors $E - F = \{x: p(x) \wedge \overline{q(x)}\}$.

Exercice :

Montrer en utilisant les définitions et les lois de Morgan, puis en utilisant une table de vérité que :

1. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
2. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

Théorème :

Pour tous sous-ensembles X, Y d'un ensemble E on a :

1. $X - X = \emptyset, \quad X - \emptyset = X$
2. $\overline{\overline{X}^E} = X$
3. $X \cap \overline{X}^E = \emptyset$
4. $X - Y = X \cap \overline{Y}$
5. $X \subset Y \Leftrightarrow \overline{Y}^E \subset \overline{X}^E$
6. $(X \cap Y = \emptyset) \Leftrightarrow (X \subset \overline{Y}^E) \Leftrightarrow (Y \subset \overline{X}^E)$
7. $(X \cup Y = E) \Leftrightarrow (\overline{Y}^E \subset X) \Leftrightarrow (\overline{X}^E \subset Y)$

Preuve :

1. $x \in X - X \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \notin X) \Leftrightarrow X - X = \emptyset$
2. $(x \in \overline{\overline{X}^E}) \Leftrightarrow (x \notin \overline{X}^E) \Leftrightarrow x \in X$
3. $x \in (X \cap \overline{X}^E) \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \notin X) \Leftrightarrow (X \cap \overline{X}^E = \emptyset)$
4. $x \in X - Y \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \notin Y) \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \in \overline{Y}) \Leftrightarrow x \in X \cap \overline{Y}$.
5. $(X \subset Y) \Leftrightarrow (\forall x: x \in X \Rightarrow x \in Y) \Leftrightarrow (\forall x: x \notin Y \Rightarrow x \notin X) \Leftrightarrow (\overline{Y}^E \subset \overline{X}^E)$.
6. $(x \in X) \xrightarrow[\text{hypothèse}]{\Leftrightarrow} (x \in X \text{ et } X \cap Y = \emptyset) \Rightarrow (x \notin Y) \Rightarrow (x \in \overline{Y}^E)$

$$(X \subset \overline{Y}^E) \xrightarrow{4.} (\overline{\overline{Y}^E} \subset \overline{X}^E) \xrightarrow{2.} (Y \subset \overline{X}^E)$$

Montrons que $(X \subset \overline{Y}^E) \Rightarrow (X \cap Y = \emptyset)$

$$(x \in X \text{ et } X \subset \overline{Y}^E) \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \in \overline{Y}^E) \Leftrightarrow (x \in X \text{ et } x \notin Y) \Rightarrow (X \cap Y = \emptyset)$$

$$(x \in Y \text{ et } X \subset \overline{Y}^E) \xrightarrow{4.} (x \in Y \text{ et } Y \subset \overline{X}^E) \Rightarrow (x \in \overline{X}^E) \Rightarrow (x \notin X) \Rightarrow (X \cap Y = \emptyset)$$

7. On a : $(\overline{Y}^E \subset X) \xrightarrow{4.} (\overline{X}^E \subset \overline{\overline{Y}^E}) \xrightarrow{2.} (\overline{X}^E \subset Y)$

Montrons que $X \cup Y = E$ sachant que $\overline{Y}^E \subset X$ ou $\overline{X}^E \subset Y$

$$(X \subset E \text{ et } Y \subset E) \Rightarrow X \cup Y \subset E$$

soit $x \in E$, on faisant raisonnement par disjonction des cas on a :

si $x \in X$ alors $x \in X \cup Y$

si $x \notin X$ alors $x \in \bar{X}^E$ or $\bar{X}^E \subset Y$ donc $x \in Y$ donc $x \in X \cup Y$

si $x \in Y$ alors $x \in X \cup Y$

si $x \notin Y$ alors $x \in \bar{Y}^E$ or $\bar{Y}^E \subset X$ donc $x \in X$ donc $x \in X \cup Y$

donc $E \subset X \cup Y$

Montrons que $\bar{Y}^E \subset X$ sachant que $X \cup Y = E$

Soit $x \in \bar{Y}^E$, $x \in \bar{Y}^E \Leftrightarrow x \notin Y$ et si on suppose par l'absurde que $x \notin X$ alors $x \notin X \cup Y$ or $X \cup Y = E$ donc $x \notin E$ ce qui est faux, donc nécessairement $x \in X$.