LES FONCTIONS

Définition :

Une fonction f est une relation entre deux ensembles A et B, **l'ensemble de départ** A et **l'ensemble d'arrivée B**, de façon que tout élément de l'ensemble de départ A n'aie de relation qu'avec **au plus** un élément de l'ensemble d'arrivé B. On note la fonction par

$$f: A \to B$$
$$x: \longmapsto y$$

y est appelé **l'image** de x, et x est appelé **l'antécédent** de y.
On note généralement l'image de x par $f(x)$; dans notre cas $y = f(x)$.

Exemple :
$A = \{1,2,3,4\}$ et $B = \{1,2,4,6,7,10\}$ et $f: A \to B$, $x: \longmapsto 2x$
Ici l'image d'un élément x de A c'est $2x$, c'est-à-dire $f(x) = 2x$.
On a $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 6$ mais $f(4)$ n'existe pas dans B ; ainsi tout élément de A a au plus une image dans B ; donc f est bien une fonction.
Donc l'image de 1 est 2 ; l'image de 2 est 4 ; l'image de 3 est 6 ; 4 n'a pas d'image. Autrement dit : $f(1) = 2$; $f(2) = 4$; $f(3) = 6$; $f(4)$ n'existe pas.
1 qui est dans B n'a pas d'antécédent ; l'antécédent du 2 qui est dans B est le 1 qui est dans A ; l'antécédent du 4 est 2 ; l'antécédent de 6 est 3 ; 7 et 10 n'ont pas d'antécédent.

Exemple :
$E = \{0, 1, -1, 2, 5\}$; $F = \{-1, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$; $f: E \to F, x \longmapsto y$ de façon que $x^2 + y^2 = 4$.
f n'est pas une fonction, voyons pourquoi :
on a $1^2 + \sqrt{3}^2 = 4$ donc $f(1) = 2$
on a aussi $1^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4$ donc $f(1) = -\sqrt{3}$
ainsi 1 possède deux images donc f n'est pas une fonction.

Ainsi quand on a une fonction $f: A \to B$, les images différentes ont des antécédents différents.
Autrement exprimé, pour tous x, x' dans A, si $f(x) \neq f(x')$ alors $x \neq x'$
Et si on prend la contraposée on dira que f est une fonction si pour tous x, x' dans A on a $x = x'$ alors $f(x) = f(x')$; et c'est cette caractérisation qui permet de montrer qu'une relation est une fonction.

Domaine de définition d'une fonction :
Le domaine de définition d'une fonction $f: A \to B$ est l'ensemble, noté D_f , de tous les éléments de l'ensemble de départ A possédant une image dans l'ensemble d'arrivée B par la fonction f. D_f est donc une partie ou tout l'ensemble de départ.
Exemple :

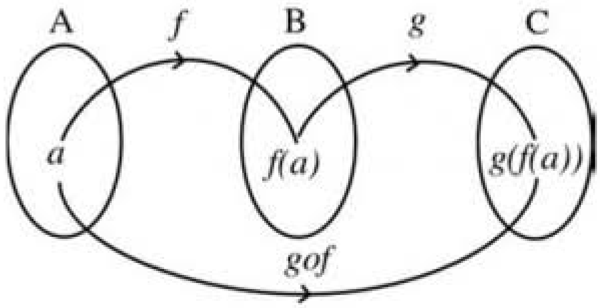
1. $f: R \to R, f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$
   $D_f = \{x \in R: x - 1 \neq 0$ et $x + 2 \neq 0\} = R - \{1, -2\}$
2. $f: R \to R, f(x) = \sqrt{x+1}$
   $D_f = \{x \in R: x + 1 \geq 0\} = [-1, +\infty[$
3. $f: R \to R, f(x) = x^2 - 3x + 2$. Ici $D_f = R$

Composition de deux fonctions :

Soient $f: A \to B$ et $b: B \to C$ deux fonctions, alors on peut définir une nouvelle fonction à partir de ces deux fonctions, qu'on note $g \circ f$, comme suit :

$$g \circ f: A \to C$$
$$x: \longmapsto g[f(x)]$$

Et on note $g[f(x)] = (g \circ f)(x)$



Exemple 1 :

$f: R \to R, f(x) = 2x + 1; \quad g: R \to R, g(x) = 3x - 2$

Pour ces applications on peut former $gof, fog, fof, gog, \ldots$

$gof: R \to R, fog: R \to R, fof: R \to R, \ldots$

$(gof)(x) = g[f(x)] = g(2x + 1) = 3(2x + 1) - 2 = 6x + 1$

$(fog)(x) = f[g(x)] = f(3x - 2) = 2(3x - 2) + 1 = 6x - 3$

$(fof)(x) = f[f(x)] = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$

Remarque :

Pour pouvoir former $(gof)(x)$ il faudrait pouvoir calculer f(x), et g[f(x)], il faudrait donc que $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.

Exemple :

$f: R \to R, f(x) = x - 1; \quad g(x) = \sqrt{x}$

On a $D_g = R_+$

Si on voudrait calculer $(gof)(0)$ par exemple on ne pourrait pas, car $f(0) = -1$ et $g[f(o)] = g(-1) = \sqrt{-1}$ ce qui n'est pas possible à calculer. Ici $-1 \notin R_+ = D_g$

Exemple :

$f: R \to R, f(x) = x - 1; \quad g(x) = \dfrac{1}{x}$

Ici $D_g = R^*$

Il est impossible de calculer $(gof)(1)$, en effet : $f(1) = 0 \; et \; (gof)(1) = g(0) = \frac{1}{0}$, ce qui n'a pas de sens. Ici $f(1) = 0 \notin D_g$.

Propriété :

1. Soient $f: E \to F; \quad g: F \to G; \quad h: G \to H$. On a : $ho(gof) = (hog)of$
2. Soit $I_E: E \to E, I_E(x) = x$; alors $foI_E = f$

Demonstration:

1. Pour tout x dans D_f et f(x) dans D_g et g[f(x)] dans D_h on a :

$$[ho(gof)](x) = h[gof(x)] = h\big[g[f(x)]\big] = [hog]\big(f(x)\big) = [(hog)of][(x)$$
Donc $ho(gof) = (hog)of$
On dit que la composition des fonctions est associative.

2. Pour tout x dans E on a : $(foI_E)(x) = f[I_E(x)] = f(x)$ donc $foI_E = f$

Application :
Une application est une fonction où tout élément de l'ensemble de départ admet **une et une seule image** ; autrement dit f est une application si et seulement si D_f est égale à tout l'ensemble de départ.

Exemple :
Les fonctions suivantes sont toutes des applications :
$f: R \to R, f(x) = ax + b$; $g: R^* \to R, g(x) = \frac{1}{x}$; $h: R \to R, h(x) = x^2$; $\varphi: R \to R, \varphi(x) = sinx$
Les fonctions suivantes ne sont pas des applications :
$f: R \to R, f(x) = \sqrt{x}$ car les nombres négatifs n'ont pas de racine.
$g: R \to R, g(x) = Ln(x)$ car les nombres négatifs ou nul n'ont pas de logarithme.
$h: R \to R, h(x) = \frac{x}{x-1}$ car 1 n'a pas d'image car 1 annule le dénominateur de $h(x)$.
$u: R \to R, u(x) = \frac{1}{x}$ car 0 n'a pas d'image car 0 annule le dénominateur de $u(x)$.

Exemple :
On appelle application identité dans un ensemble A, l'application notée $I_A: A \longrightarrow A, x \longmapsto x$, c'est-à-dire que pour tout x dans A , $I_A(x) = x$

Propriétés globales des applications :
Soit $f: A \longrightarrow B$ une application
L'injectivité :
On dit que f est **injective** si et seulement si tous les éléments différents de A ont des images différentes
$$\forall x, x' \in A: (x \neq x') \Longrightarrow \big(f(x) \neq f(x')\big)$$
et si on prend la contraposée on aura :
$$\forall x, x' \in A: (f(x) = f(x') \Longrightarrow (x = x')$$
et c'est ce dernier critère qui permet de prouver qu'une application est injective.
On dit qu'une application injective sépare les images.
On peut interpréter l'injectivité en termes d'équation, si on prend un y dans B tel que $y = f(x)$, alors dire que $(f(x) = f(x') \Longrightarrow (x = x')$ revient à dire que l'équation $y = f(x)$ admet au plus une solution (elle n'admet pas plus d'une solution et si elle en admet elle en admet qu'une seule).
La non-injectivité :
L'application f ne sera pas injective si et seulement si on peut trouver deux éléments différents de l'ensemble de départ A ayant la même image ; autrement dit (il s'agit de prendre la négation) :
$$\exists x, x' \in A: f(x) = f(x') \text{ et } (x \neq x')$$
Exemple :

1. $f: R \to R, f(x) = ax + b$ ou $a \neq 0$
   Montrons que f est injective :
   Soient x, x' dans R tels que f(x)=f(x'), on a :

$$\big(f(x) = f(x')\big) \Leftrightarrow (ax + b = ax' + b) \Leftrightarrow (ax = ax') \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} (\ x = x')$$

Donc la fonction est injective

2. $f: R \rightarrow R, f(x) = b$ (f est une fonction constante)
   Cette fonction n'est pas injective car l'image de tout élément est b, donc même si x est différent de x', leur image est la même.
3. $f: R \rightarrow R, f(x) = \frac{1}{x}$
   Cette fonction est injective, en effet :
   $$\big(f(x) = f(x')\big) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} = \frac{1}{x'}\right) \Leftrightarrow (x = x')$$
4. $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2$
   Cette application n'est pas injective car par exemple $f(1) = 1 = f(-1)$ et $1 \neq (-1)$.
   Ici l'équation f(x)=1 admet 2 solutions, 1 et -1.
5. $f: R \rightarrow R, f(x) = sinx$
   Cette application n'est pas injective car $\sin(0) = \sin\,(2\pi)$ et $0 \neq 2\pi$
6. $f: R \rightarrow R, f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
   Vu que $f(1) = f(-1)$ et $1 \neq (-1)$ alors cette fonction n'est pas injective.
7. $f: R \rightarrow R, f(x) = |x|$
   Cette application n'est pas injective car $f(1) = 1 = f(-1)$ et $1 \neq (-1)$.
8. Les fonctions paires ne sont pas injectives, car pour tout x on a $f(x) = f(-x)$ et $x \neq -x$.

Surjectivité :

f est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée B possède un antécédent dans l'ensemble de départ A :

$$\forall y \in B, \exists x \in A: y = f(x)$$

Autrement dit l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x possède une solution dans A quel que soit y dans B.
On peut dire aussi que tous les éléments de B sont des images d'éléments de A.

La non-surjectivité :

f ne va pas être surjective si et seulement si il existe un élément de B sans antécédent dans A :

$$\exists y \in B, \forall x \in A: y \neq f(x)$$

Autrement dit il existe un élément y de B pour lequel l'équation $y = f(x)$ n'admet pas de solution dans A.

Exemple :

1. $f: R \rightarrow R, f(x) = ax + b$ ou $a \neq 0$
   Montrons que f est surjective :
   soit y dans B quelconque, on a :
   $y = f(x) \Leftrightarrow y = ax + b \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{y-b}{a}$, l'équation admet une solution donc f est surjective.
2. $f: R \rightarrow R, f(x) = 2$ (est une fonction constante)
   f n'est pas surjective car si on prend y=0 alors l'équation y=f(x) n'aura pas de solution, en effet : $y = f(x)$ veut dire ici $0 = 2$ ce qui est faux.
3. $f: R \rightarrow R, f(x) = \frac{1}{x}$
   Cette fonction n'est pas surjective, en effet : si on considère $y = 0$ alors on aura $\frac{1}{x} = 0$, donc $1 = 0$
4. $f: R \rightarrow R, f(x) = x^2$

Cette application n'est pas surjective car si on considère n'importe quel nombre négatif dans l'ensemble d'arrivée R,$y = -4$ par exemple, alors on aura :
$y = f(x) \Leftrightarrow -4 = x^2$, or ceci est impossible, donc l'application , n'est pas surjective.

5. $f: R \to R, f(x) = sinx$
   Cette application n'est pas surjective car les nombres plus grand que 1 ou plus petit que -1 n'ont pas d'antécédents dans R car pour tout nombre réel on a : $-1 \leq sinx \leq 1$
6. $f: R \to R, f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
   Cette application n'est pas surjective, on eut le voir de plusieurs façons :
   Pour tout réel x on a $x^2 - 1 < x^2 + 1$ donc $\frac{x^2-1}{x^2+1} < 1$ c'est-à-dire $f(x) < 1$, donc les nombres qui sont plus grand que 1 n'ont pas d'antécédent (il n'y a pas que cela) ; autrement dit (seconde façon) :
   si on considère l'équation $y = f(x)$ alors elle n'aura pas de solution pour les y plus grands que 1 et plus petits ou égal à (-1), en effet :
   $$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \Leftrightarrow [(y-1)x^2 + 1 + y = 0]$$
   Nous avons ici une équation du second degré avec y comme paramètre :
   Si $y = 1$: l'équation devient $2 = 0$ donc elle n'a pas de solution, et donc f n'est pas surjective
   Si $y \neq 1$: $\Delta' = -(y-1)(y+1)$
   - Si $y \in [-1,1[$ alors $\Delta' \geq 0$ et l'équation admet au moins une solution et dans ce cas la fonction est surjective.
   - Si $y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ alors $\Delta' < 0$ et l'équation n'admet pas de solution et dans ce cas l'application n'est pas surjective.
7. $f: R \to R, f(x) = |x|$
   Cette application n'est pas surjective car la valeur absolue ne prend que des valeurs positives ou nulles, donc les nombres réels négatifs n'ont pas d'antécédent, par exemple si on considère -1 alors $\forall x \in R: |x| \neq -1$.

Bijectivité :
Une fonction bijective est une **application** qui est à la fois **injective et surjective**.
En terme d'équation, f est bijective si et seulement si pour tout y dans B, l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution.
Exemple :

1. $f: R \to R, f(x) = ax + b$ ou $a \neq 0$
   On a vu dans les exemples précédents que cette application est injective et surjective, donc c'est une bijection
2. $f: R - \{2\} \to R, f(x) = \frac{x+1}{x-2}$
   $D_f = R - \{2\}$, donc f est une application.
   Etudions la bijectivité de f par le moyen de la résolution de l'équation $y = f(x)$:
   Soit y dans R, $y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow (y-1)x = 2y + 1$
   Si $y = 1$ on aura $0 = 3$ donc l'équation n'a pas de solution dans ce cas
   Si $y \neq 1$ on aura $x = \frac{2y+1}{y-1}$ et donc l'équation admet une et une seule solution dans ce cas

Ainsi l'application n'est pas bijective à cause du 1 qu'il y a dans l'ensemble d'arrivée R ;et pour avoir une bijection avec la formule $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$, il faudrait enlever le 1 de l'ensemble d'arrivée.

Application inverse d'une application bijective :
Soit f une bijection de A dans B.
Pour tout élément y dans B ; on peut construire la relation de B dans A, et qui associe à tout élément y de B son ou ses antécédents dans A ; cette relation est une application car pour tout y dans B, l'équation $y = f(x)$ admet une et une seule solution ; elle est injective car sinon on aurait deux éléments y_1, y_2 différents dans B et ayant une même image x_0 dans A, donc cet x_0 aurait quant à lui deux images différentes et f ne serait donc pas une application ; elle est surjective car tout x dans A admet une image dans B, donc cette application est bijective aussi.
On note cette application f^{-1}, et on l'appelle l'application inverse de f.
Si donc on a $f(x) = y$ alors $x = f^{-1}(y)$, x étant la solution de l'équation $y = f(x)$. On a donc :

Théorème :
Si *f* est bijective de *A* dans *B*, alors *f* admet une application inverse f^{-1}de *B* dans *A* définit par $f(x) = y$ alors $x = f^{-1}(y)$; et f^{-1} est bijective aussi.

Exemple :

1. $f: R \to R, f(x) = ax + b$ ou $a \neq 0$
   On a vu dans les exemples précédents que cette application est injective et surjective, donc c'est une bijection, donc elle admet une application inverse f^{-1}, calculons la :
   Pour cela on résout l'équation $y = f(x)$ d'inconnue x, et on a :
   $$y = f(x) \Leftrightarrow (y = ax + b) \Leftrightarrow (x = \frac{y-b}{a})$$
   Donc $f^{-1}: R \longrightarrow R, f^{-1}(y) = x = \frac{y-b}{a}$
   Et comme x et y ne sont que des noms de variables, alors on peut interchanger x et y sans aucun problème de confusion et on aura : $f^{-1}: R \longrightarrow R, f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$
2. On a vu dans l'exemple 2 de la bijectivité que l'application
   $$f: R - \{2\} \to R - \{1\}, f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$
   est une bijection, et on a résout l'équation $y = f(x)$ et on a obtenu $x = \frac{2y+1}{y-1}$; donc l'application inverse existe et on a :
   $$f^{-1}: R - \{-1\} \longrightarrow R - \{2\}, f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

Egalité de deux fonctions :
On dit que deux fonctions f et g sont égales lorsqu'elles ont même ensemble de départ E, même ensemble d'arrivée F, et pour tout x dans E on a $f(x) = g(x)$

Théorème :
Si $f : A \longrightarrow B$ est une bijection alors : $f^{-1}of = I_A$ et $fof^{-1} = I_B$
Démonstration :

On a vu dans la définition de l'application réciproque que pour tout x, si $y = f(x)$ alors $x = f^{-1}(y)$, et si on remplace y par $f(x)$ dans l'égalité $x = f^{-1}(y)$ on obtient $x = f^{-1}[f(x)]$, or $x = I_A(x)$ et $f^{-1}[f(x)] = (f^{-1}of)(x)$, autrement dit pour tout x dans A on a $I_A(x) = (f^{-1}of)(x)$, ce qui par définition donne $f^{-1}of = I_A$.
L'autre égalité est laissée en exercice.

Image directe et image réciproque :
Image directe
Soit f une application de E dans F et soit A une partie de E. On sait que pour tout x dans A, $f(x)$ existe car f est une application ; on peut donc former l'ensemble de tous les $f(x)$ tel que x est dans A ; on note cet ensemble $f(A)$ et on a : $f(A) = \{f(x): x \in A\}$.
$f(A)$ est l'ensemble des images de tous les éléments de A.
On dit que $\boldsymbol{f(A)}$ **est l'image directe de l'ensemble *A* par** $\boldsymbol{f}$.
Par définition $f(A)$ est inclus dans F.
Un élément y dans B est dans $f(A)$ si et seulement si y est une image d'un élément de A, autrement dit $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A: y = f(x)$
Exemple :
$f: N \to N, f(n) = 2n + 1$
$A = \{0,1,2\}$
$f(A) = \{f(0), f(1), f(2)\} = \{1, 3, 5\}$

Exemple :
$f: R \to R, f(x) = x + 1$
$A = [0\,; 10[$
Calculons $f(A)$:
Pour tout x dans A on a :

$$x \in A \Leftrightarrow 0 \le x < 10 \overbrace{\underbrace{\Longrightarrow}_{stric.croissante}}^{f\ est} f(0) \le f(x) < f(10)$$
$$\Leftrightarrow 1 \le f(x) < 11$$

Donc $f(A) \subset [1; 11[$
Montrons maintenant que $[1; 11[\subset f(A)$:
Il s'agit de montrer que tout nombre dans $[1; 11[$ est image d'un nombre qui est dans $A = [0; 10[$
Soit $y \in [1; 11[$:
$[y \in [1; 11[$ et $y = f(x)] \Leftrightarrow [1 \le y < 11$ et $y = x + 1] \Leftrightarrow [x = y - 1$ et $0 \le x < 10]$
Donc $x \in A$ et $y = f(x)$ donc $y \in f(A)$

Exemple
$f: R \to R, f(x) = x^2$
$A = [-1\,; 2]$
Calculons $f(A)$:
<u>Si $x \in [-1; 0]$</u> :
$-1 \le x \le 0 \Longrightarrow 0 \le x^2 \le 1$ car la fonction carrée est strictement décroissante dans l'intervalle [-1 ;0], donc $0 \le f(x) \le 1$ donc $f(x) \in [0; 1]$
<u>Si $x \in [0; 1]$</u> :

$0 \leq x \leq 2 \Longrightarrow 0 \leq x^2 \leq 4$ car la fonction carrée est strictement croissante dans l'intervalle [-1 ;0], donc $0 \leq f(x) \leq 4$ donc $f(x) \in [0;4]$

Donc dans les deux cas on a $f(x) \in [0;1] \cup [0;4] = [0;4]$ et on a $f(A) \subset [0;4]$.

Montrons maintenant que $[0;4] \subset f(A)$:

Soit $\underline{x \in [0;4]}$: $(0 \leq x \leq 4) \Longrightarrow (\sqrt{0} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{4})$ et car la fonction racine carrée est strictement croissante et $f(\sqrt{x}) = x$, donc $\sqrt{x} \in [0;2] \subset A$ et $f(\sqrt{x}) = x$, or $f(\sqrt{x}) \in f(A)$ donc $\underline{x \in f(A)}$

Donc $[0;4] \subset f(A)$.

Remarque : $f(\emptyset) = \emptyset$

Théorème :

Pour tous sous-ensemble A et B d'un ensemble E et tout élément x de E on a :

1. $f(\{x\}) = \{f(x)\}$
2. $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
4. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Démonstration :

1. $y \in f(\{x\}) \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow f(\{x\}) = \{f(x)\}$
2. $y \in f(A) \Longrightarrow \exists x \in A: y = f(x)$ or $A \subset B$ donc $[\in B$ et $y = f(x)]$ donc $y \in f(B)$.
3. $A \cap B \subset A \overset{1.}{\Longrightarrow} f(A \cap B) \subset f(A)$ et de la meme façon on a $f(A \cap B) \subset f(B)$
   Donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
4. $A \subset A \cup B$ donc d'après 1 on a $f(A) \subset f(A \cup B)$ de meme $f(B) \subset f(A \cup B)$
   Donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
   Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$:
   Si $\underline{y \in f(A \cup B)}$ alors il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$; comme $x \in A$ ou $x \in B$ on a $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$; c'est-à-dire $\underline{y \in f(A) \cup f(B)}$.

<u>Exemple où $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$</u> :

Si on considère $f: R \to R, f(x) = x^2$, et $A = [-1;0], B = [0;1]$, on a :

$A \cap B = \{0\}; f(A \cap B) = f(\{0\}) = \{0\}$

$f(A) = [0;1] = f(B)$ donc $f(A) \cap f(B) = [0;1] \neq \{0\} = f(A \cap B)$.

Donc généralement $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

Image réciproque

Soit $f: E \to F$ une application, et B un sous-ensemble de F.

On peut construire l'ensemble des éléments de E dont l'image est dans B, c'est-à-dire l'ensemble des x qui sont dans E tels que $f(x) \in B$. On note cet ensemble $f^{-1}(B)$, et on l'appelle **l'image réciproque de B par f**. On a donc :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E: f(x) \in B\}$$
$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

$f^{-1}(B)$ est un sous-ensemble de l'ensemble de départ E.

Exemple :

$f: R \to R, f(x) = x^2$

$B = \{-1,0,2\}$; $C = \{-1\}$; $D = [1;+\infty[$

Calculons l'image réciproque de ces ensembles par l'application f.

1. Pour calculer $f^{-1}(B)$ il faut trouver tous les x dans R tels que $f(x) = -1$ ou $f(x) = 0$ ou $f(x) = 2$

- $(f(x) = -1) \Leftrightarrow (x^2 = -1)$ or ceci est impossible donc il n'y a aucun réel x pour lequel $f^{-1}(x) = -1$
- $(f(x) = 0) \Leftrightarrow (x^2 = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$
- $(f(x) = 2) \Leftrightarrow (x^2 = 2) \Leftrightarrow (x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2})$

Donc $f^{-1}(B) = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

2. $x \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow (f(x) \in C) \Leftrightarrow f(x) \in \{-1\} \Leftrightarrow (x^2 = -1)$

Or cette dernière équation n'a pas de solution donc il n'y a aucun réel x dans $f^{-1}(C)$, donc $f^{-1}(C) = \emptyset$

3. $x \in f^{-1}(D) \Leftrightarrow (f(x) \in [1; +\infty[) \Leftrightarrow (x^2 \geq 1) \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \geq 0$
$\Leftrightarrow x \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

   Donc $f^{-1}(D) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

Théorème :

1. $B \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$
2. $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
3. $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$

Démonstration :

1. $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$ or $B \subset B'$ donc $f(x) \in B'$ donc $x \in f^{-1}(B')$.
2. $x \in f^{-1}(B \cap B') \Leftrightarrow f(x) \in B \cap B' \Leftrightarrow (f(x) \in B$ et $f(x) \in B')$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$ et $x \in f^{-1}(B')$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$
3. $x \in f^{-1}(B \cup B') \Leftrightarrow f(x) \in B \cup B' \Leftrightarrow (f(x) \in B$ ou $f(x) \in B')$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$ ou $x \in f^{-1}(B')$
$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$