Algèbre : La logique mathématique

une proposition

vrai (1) — Fausse (2)

1/ une proposition "Assertion" peut être soit vraie soit Fausse (une seule valeur de vérité)

Exemple:

* $1 > 2$ (proposition Fausse).
* $3 > 1$ (proposition vraie).

2/ La négation d'une proposition :

* P une proposition, si P est Fausse, sa negation est vrai

On note: $\bar{P}$, $\neg P$, non P.

$\bar{\bar{P}} \equiv P$ / $\bar{\bar{P}} \vdash\!\dashv P$

3 - La conjonction ($\wedge$) et

$P \wedge Q \equiv P$ et Q

* pour que $P \wedge Q$ soit vraie, Il faut que P, Q sont vraie

4 - La disjonction ($\vee$) ou

$P \vee Q \equiv P$ ou Q.

pour Que $P \vee Q$ soit vraie, Il faut que l'une P, ou Q ou Toutes les deux soient vraies [elle est fausse dans un seul cas ou P et Q sont fausses].

p.s : (P∨Q est une disjonction inclusive)

* P et Q logiquement equivalante $P \equiv Q$

$P \vdash\!\dashv Q$

5- Disjonction exclusive

P W Q est vraie dans un seule cas ou P et Q ont des valeur de verité differentes

6- Impliquation $P \Longrightarrow Q$

Fausse dans un seul cas ou P est vrai et Q est fausse.

[Le ~~faux~~ vrai n'implique pas le ~~vrai~~ faux]

7- L'équivalance : $P \Longleftrightarrow Q$

Vraie l'orsque P et Q ont les mêmes valeur de verité

B- La table de verité :

* Vrai : 1 ; V
* Faux : 0 ; F

Exemple:

P	Q	PWQ	P et Q	PVQ ou	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
F	F	F	0 F	0 F	1 V	1 V
F	V	V	0 F	1 V	1 V	0 F
V	F	V	0 F	1 V	0 F	0 F
V	V	F	1 V	1 V	1 V	1 V

3. La distributivité :

* $P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

* $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

Démonstration de la distributivité :

pour Montrer que :

$$\boxed{P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}$$

- $P \vee (Q \wedge R) \iff (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

on fait la negation :

$\bar{P} \wedge (\bar{Q} \vee \bar{R}) \iff (\bar{P} \wedge \bar{Q}) \vee (\bar{P} \wedge \bar{R})$

$P \quad Q \quad R$

$$\boxed{P \wedge (Q \vee R) \iff (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}$$

* $P \Rightarrow Q \equiv \bar{P} \vee Q \equiv$

$\overline{P \wedge \bar{Q}} \equiv \bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$

* $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ est la Contraposé de $P \Rightarrow Q$

4. Les Quantificateurs

- Le Conlificateur universel $\forall$:

$\overline{P \Rightarrow Q} \equiv$

$P \wedge \bar{Q}$

$\overline{P \vee Q} \equiv (\bar{P} \wedge \bar{Q})$

$\overline{P \wedge Q} : \bar{P} \vee \bar{Q}$

" Les formules de Morgan ".

$\underbrace{P}_{\text{l'hypothese}} \Rightarrow \underbrace{Q}_{\text{Conclusion}}$

- l'hypothese - Conclusion

- pour mq P est V

Il suffit de mq Q est V

∀ : Quantificateur universel :
(tout les éléments)

$\forall x \in E, p(x)$

qui veut dire que chaque élément x de l'ensemble E verifie la propriété $p(x)$ {est verifiée}

∃ : Quantificateur existanciel
(il suffit un seul élément)

$\exists x \in E / p(x)$ "Il existe au moin"

qui veut dire qu'il existe un élément x de l'ensemble E qui verifie $p(x)$.

$\forall x \in E, \exists x_1 \in F$

x_1 deppend de x.

L'equivalance ⟺
"Double implication"

$P \Leftrightarrow Q \equiv$

$P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P$

$E \Leftrightarrow F$

La négation d'un proposition Comportant des quantificateur

$P : \forall x \in E, p(x)$

$\bar{P} : \exists x \in E / \neg p(x)$

$P_2 : \exists x \in E / p(x)$

$\bar{P}_2 : \forall x \in E, \overline{p(x)}$

$x<3$

$x \geq 3$

Remarques importantes

quand Il y a le même quantificateur :

$\overset{\exists}{\forall} x \in E, \overset{\exists}{\forall} y \in F, p(x,y)$

$\equiv \underset{\exists}{\forall} y \in F, \underset{\exists}{\forall} x \in E, p(x,y)$.

mais quand les deux Quantificateurs ne sont pas les même, là on peut pas appliquer.

$\boxed{\exists \longrightarrow \forall}$ possibilité que p est fausse.

Scanned with CamScanner

Remarque

$\forall x (p(x) \wedge q(x)) \iff$

$(\forall x\, p(x)) \wedge (\forall x \in q(x))$

$\exists x (p(x) \vee q(x)) \iff$

$(\exists x, p(x)) \vee (\exists x, Q(x))$

* Mais par Contre.

* $\forall x (p(x) \vee Q(x)) \Rightarrow$

$(\forall x, p(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$

* $\exists x (p(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow$

$(\exists x, p(x)) \vee (\exists x, Q(x))$

Types de raisonnements

1. Le raisonnement directe:

* Pour mq $p \Rightarrow Q$ vrai.

On suppose que p est Vrai et Montre que Q est vrai

exemple:

Si $a, b \in \mathbb{Q}$ alors $\Rightarrow$ $a+b \in \mathbb{Q}$.

$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{Q}$

On suppose que $a, b \in \mathbb{Q}$ et On mq $a+b \in \mathbb{Q}$

- $a \in \mathbb{Q} \Rightarrow \{a = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0\}$

On a : $b \in \mathbb{Q} \Rightarrow$

$\{b = \frac{p'}{q'},\ p' \in \mathbb{Z}, q' \in \mathbb{Z}^*\}$

Donc

$$a+b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'}$$

$$= \frac{pq' + p'q}{qq'}$$

$p'' = pq' + p'q$

$q'' = qq'$

On a $p \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{Z}^*$

donc $p.q' \in \mathbb{Z}$

et $p' \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$

donc $p'.q \in \mathbb{Z}$

du coup $p'' \in \mathbb{Z}$

et $qq' \in \mathbb{Z}$ donc $q'' \in \mathbb{Z}$

D'où alors $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q} \in \mathbb{Q}$

$a, b \in \mathbb{Q} \Rightarrow a+b \in \mathbb{Q}$.

2. Raisonnement par Methode du Cas par Cas

[on prend en considération tt les cas]

Mq:

exemple:

$\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1$

$x-1, x \geq 0$ $\quad -(x-1) < 0$

1er cas: Si $x \geq 1$

$x - 1 \leq x^2 - x + 1$.

$x^2 - x + 1 - (x-1) \geq 0$.

$x^2 - x + 1 - x + 1 \geq 0$.

$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 \geq 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
x^2-2x+2	+	

donc $x^2 - 2x + 2 > 0$

D'où $|x-1| \leq x^2 - x + 1$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$

$\forall x \in [1; +\infty[$.

Scanned with CamScanner

$2^{\text{ème}}$ Cas :

Si $x < 1$.

$-(x-1) \leq x^2 - x + 1$

$x^2 \geq 0$:

$x^2 \geq 0 \iff -x^2 - x + 1 + (x-1) \geq 0$

d'où

$-(x-1) \leq x^2 - x + 1$.

$\forall x \in]-\infty ; 1[$

alors, dans tout les cas,

$\forall x \in \mathbb{R}, |x-1| \leq x^2 - x + 1$.

Raisonnement par l'absurde :

P est vrai, pour la montrer, On suppose que $\bar{P}$ est fausse jusqu'à trouver une Contradiction donc P est vraie !

Exemple :

* $\forall x \in \mathbb{N}, \; x+1 \neq 0$

On suppose que $\bar{P}$ est Fausse

$\exists x \in \mathbb{N}, \; x+1 = 0$.

$x+1 = 0$ donc $x = -1$.

et on sait que $x \in \mathbb{N}$

Contradiction avec la diffinition de $\mathbb{N}$ donc P est vrai

4- Raisonnement par contraposé

$\underbrace{P \Longrightarrow Q} \Longleftrightarrow \underbrace{\bar{Q} \Longrightarrow \bar{P}}$

exemple :

Mq : $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\underbrace{n^2 \text{ pair}}_{p} \Longrightarrow \underbrace{n \text{ pair}}_{q}}$$

$\bar{p}$: n^2 est impaire

$\bar{q}$: n est impaire

n est impaire $\Longrightarrow$ n^2 est impaire

par contraposé :

On suppose que n est impaire et on mq n^2 est impaire

$$n = 2K + 1 \ , \ K \in \mathbb{N}$$

$$n^2 = (2K+1)^2$$

$$n^2 = 4K^2 + 4K + 1 .$$

$$n^2 = \underbrace{2(2K^2+2K)}_{\in \text{pair}} + 1$$

donc n^2 est impaire

Donc

n^2 pair $\Longrightarrow$ n pair .

5. Raisonnement par contre exemple :

Exemple :

$\forall \ x \in \mathbb{R}, \ x^2 - 1 \neq 0$.

Fausse

Contre exemple

Si $x = 1 \in \mathbb{R}$:

$1^2 = 1 \ , \ 1 - 1 = 0$

6- Raisonnement par recurence:

Sa forme:

$\forall\ n \in \mathbb{N}^* / p(n) \leftarrow$ expression

initialisation: [نشوفو esq p(n) يتحقق من N اصغر عدد في]

exemple:

Mq $(p_n) = 1+2+3+\dots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\forall\ n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$

الحد لي نبداو منو

Si c'était $n > 1$ on commence par 2 etc.

1) l'initialisation:

Pour $n = 1$.

$p(n_0)\ 1 = \dfrac{1(1+1)}{2} = 1$. vrai

donc $p(n_0)$ est vrai

2) L'hypothese: on suppose que $p(n)$ est vrai et on mq $p(n+1)$ est vrai.

$p(n+1) = (n+1)\dfrac{(n+1+1)}{2}$

$= \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

$p(n+1) = \underbrace{1+2+3+\dots+n}_{p(n)} + \underbrace{(n+1)}_{p(n+1)}$

$= \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) \overset{?}{=} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

l'égalité

$= \dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$

$= \dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$

Donc $p(n+1)$ est vrai

3- Conclusion.

- $p(1)$ est vrai.
- $p(n+1)$ " " .

donc, d'après le principe de raisonnement par recurence donc $p(n)$ est vrai, $\forall\ n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 1$.

2ème exemple :

$$\forall\ n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$$

l'initialisation

pour $n = 1$.

$$\sum_{K=1}^{1} K = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

Donc $p(n_0)$ est vrai

l'hypothèse ;

On suppose que $p(n)$ est vrai et on montre que $p(n+1)$ est vrai

$$P(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} K = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$p(n+1) = \sum_{k=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} K = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} K = \frac{(n+2)(n+1)}{2} = p(n+1)$$

Donc $p(n+1)$ est vrai

La Conclusion :

- $p(n_0)$ est vrai
- $p(n+1)$ est vrai,

D'après le principe du resonnement par recurence $p(n)$ est vrai,

$$\forall\ n \geq 1,\ \sum_{k=1}^{n} K = \frac{n(n+1)}{2}$$

Scanned with CamScanner

Ensembles et Application :

Soit A et B deux ens :

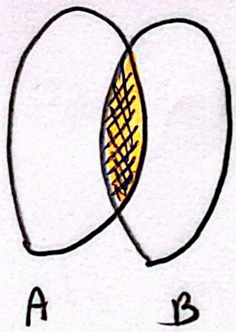
Définition :

* $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \, , x \in A \Rightarrow x \in B$.

* $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \wedge B \subset A)$.
  $(\forall x, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

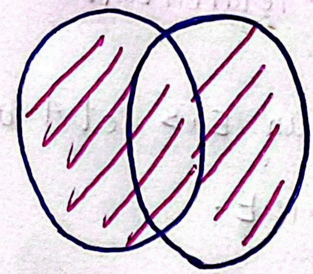
* Soit A, B deux ensemble de E :

1 - L'intersection .



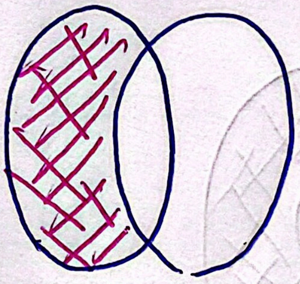
$A \cap B \; (x \,/\, x \in A$ et $x \in B)$.

2 - La réunion :



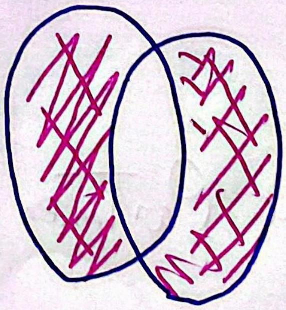
$A \cup B : (x \,/\, x \in A$ ou $x \in B)$.

3 - La difference



$A - B : (x \,/\, x \in A$ et $x \notin B)$

4 - La difference symetrique :



$A \Delta B = x \,/\, x \in (A - B) \cup x \in (B - A)$

$\Longleftrightarrow \quad x \notin A \cap B$.

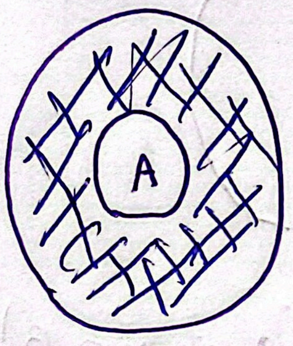
@ $A \Delta B = A \cup B - A \cap B$.

Le Complémentaire :

Soit E un Ens et A une partie de E.

C_E^A (le complémentaire de A ds E)

$C_E^A = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$



E

$C_E^A = E - A$.

$E = \bar{A}$

Le produit Cartesien :

$A \times B = \{(x,y) \,/\, x \in A ,\, y \in B\}$.

$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow$

$x = x'$ et $y = y'$.

- Propreité :

- $A = A \cap B \cup A - B$

Complementaire $\bar{E} = \emptyset$

- $\bar{\emptyset} = E$.

- $A \cup A^c = E$ / $A \cap A^c = \emptyset$

وش يخص A بش نولي E.

Lois de Morgan :

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

Scanned with CamScanner

Les Ensembles.

- si l'ens E contient un nombre fini d'element $\Rightarrow$ E ens Fini

$$\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\mathrm{card}\, E}.$$

$$\mathcal{P}(E) = \{A \,/\, A \subset E\}.$$

On pose $\mathrm{card}(E) = n$.

$$\mathrm{Card}\, \mathcal{P}(E) = 2^n \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\mathrm{Card}\, E \equiv |E|.$$

* ds un Ens $\{a,b\} \equiv \{b,a\}$

② Remarque :

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

$x \in \mathcal{P}(A \cap B) \Leftrightarrow x \subset A \cap B$

apartient — inclus

Car

[x ici $\mathcal{P}(A \cap B)$
$\downarrow$
ens
d'où
Ens $\subset$ Ens]

$\Leftrightarrow x \subset A \cap x \subset B.$

$\Leftrightarrow x \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

Ln Kerchha (+)

$x \notin A \cap B \Leftrightarrow$

$x \notin A$ ou $x \notin B$.

$A \subset B \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in B$

Exemple :

$P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$

Soit

$x \in P(A) \cup P(B)$

$\Rightarrow x \subset A \cup B$. [les étapes usuelles]

$\Rightarrow x \in P(A \cup B)$

a-t-on l'égalité :

$E = \{1, 2, 3, 4\}$.

$A = \{1, 2\}$ élément commun

$B = \{2, 3\}$

$A \cup B = \{1, 2, 3\}$

$P(A \cup B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$
$\{1, 2\} \{1, 3\} \{2, 3\}$
$\{1, 2, 3\}\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}$
$\{1, 2\}\}$

$P(B) = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}$
$\{2, 3\}\}$

$P(A) \cup P(B) =$

$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}$
$\{1, 2\} \{2, 3\}\}$.

$P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$.

mais

$P(A \cup B) \not\subset P(A) \cup P(B)$

d'où l'égalité est fausse

I Les Applications :

(F^E).

$f : E \longrightarrow F$

"ensemble de depart" — ensemble d'arrivée

$x \longmapsto y = f(x)$.

chaque x on lui associe un élément unique y

*

*

Ex

* Chaque x 3ando un seul y (unique).

* y est l'image de x par f. صورة

* x antécédent de y par f سابقة

D

f :

$\in$ (un element)

$\subset$ (un Ens)

Partition تجزئة

. $x \notin B \Rightarrow x \in C_E^B$

. $x \in B \Rightarrow x \in A \cup B$

rem :

$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

* $\frac{1}{x}$ est une fonction

Car $x = $ n'est pas défini en 0.

Mais

$\frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$

est une Application

* Car chaque x on fait associe y unique.

$f, g \in F^E$

$\Rightarrow f = g = f(x) = g(x)$

$\forall x \in E$.

B^2 c'est des couples

$B^2 = \{1, 2\} \{1, 2\}$

$\{(1,1), (1,2) \dots\}$

Image Directe d'un Ens par une application :

Définition :

$f : E \longrightarrow F$.

$A \subset E$.

1/ $f(A) \{ f(x) / x \in A \} \subset F$

2/ $y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A, y = f(x)$

- Exemple

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$x \longmapsto f(x) = |x-1|$

L'image de $f(\{2\}), f([-1,1])$.

$f(A) = \{ f(x) / x \in A \}$.

$f(\{2\}) = \{ f(x) / x \in \{2\} \}$.

$f(2) = |2-1| = 1$.

$f(\{2\}) = 1$.

$f([-1;1])$

$f([-1,1]) = \{ f(x) / x \in [-1;1] \}$

$x \in [-1;1] \Leftarrow S$

$-1 \leq x \leq 1$

$-2 \leq x-1 \leq 0$

$0 \leq |x-1| < 2$

$0 \leq f(x) \leq 2$

$f(x) \in [0;2]$

donc

$f([-1,1]) = [0,2]$.

L'image réciproque :

$f : E \longrightarrow F$

$B \subset F$.

* $f^{-1}(B) \{x \in E / f(x) \in B\}$.

* $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$

Exemple :

$f^{-1}\{+3\}$, $f^{-1}\{1\}$

$f^{-1}([1;2])$.

Déf :

$f^{-1}\{+3\} : \{x \in E / f(x) \in \{+3\}\}$.

$f(x) \in +3$.

$|x-1| = 3$

$\begin{cases} x-1=3 \\ -x+1=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$.

$f^{-1}(\{3\}) = \{-2, 4\}$.

2/ $f^{-1}\{[1,2]\}$.

$f^{-1}([1,2]) = \{x \in E, f(x) \in [1,2]\}$

$f(x) \in [1,2]$.

$1 \leq f(x) \leq 2$

$1 \leq |x-1| \leq 2$.

$1 \leq x-1 \leq 2$

ou $1 \leq -x+1 \leq 2$

$2 \leq x \leq 3$

ou $-1 \leq x \leq 0$.

$f^{-1}([1,2]) = [-1,0] \cup [2,3]$

★ Surjection / injection

bijection et composée

$f : E \longrightarrow F$

Car $f^{-1}(y) \geq 1$

f surjective $\Longleftrightarrow$ [y a au moins 1 antécédent ou plus]

(arrivée)

$\forall y \in F, \exists\, x \in E,\ y = f(x)$ ← Il faut que l'équation a des solution

$\forall y \in F, \exists\, x \in E,\ y = f(x)$.

rem : $\forall y$, donc il suffit de trouver un seul contre exemple pour que f ne soit pas surj.

f inj $\Longleftrightarrow$ [y a au plus un antécédent ou 0]

(Départ)

card $f^{-1}(y) \leq 1$.

$\forall y \in F, \exists\, x \in E$ (ou plus) (0-non).

$y = f(x)$.

$\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

f bijectif $\Longleftrightarrow$ [y admet un seul antécédent] (unique)

$\forall y \in F, \exists!$ (unique) (un seul) $x \in E,\ y = f(x)$.

card $f^{-1}(y) = 1$.

rem :

f bijectif $\Rightarrow$ f^{-1} existe

$f^{-1}\quad F \longrightarrow E$

$y \longmapsto x = f^{-1}(y)$

La partie entière n'est pas Inj - surj

$E(x) = 0,5$ (impossible)

Une Application : chaque élément de f admet une image

- Ker f

$\{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$

- Im(f)

$\{f(x) \mid x \in E\}$.

- Im(f) = F ✱ (surj).

Exemple :

$f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$

$x \longmapsto y = f(x) = \frac{2x-3}{x-1}$.

f inj

Def :

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} - \{1\},\ f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow$

$\frac{2x_1 - 3}{x_1 - 1} = \frac{2x_2 - 3}{x_2 - 1}$ (simplification)

$x_1 = x_2$ (d'ou f est inj) ... ①

f surj :

$\forall y \in \mathbb{R} - \{2\},\ \exists x \in \mathbb{R} - \{1\},$

$y = f(x)$.

$y = f(x) \Longleftrightarrow$

$y = \frac{2x-3}{x-1}$ (x en fonction de y)

$x = \frac{y-3}{y-2}$

donc f surj . ②

de ① et ②

$\Longrightarrow$ f bij donc elle admet une fct reciproque f^{-1}

$f^{-1} : \mathbb{R} - \{2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$

$y \rightarrow x = f^{-1}(y)$

$= \frac{y-3}{y-2}$.

La fonction reciproque.

Remarque import

$y = f(x)$ (y en fonction de x)

$f^{-1}(y) = x$ (x en fonction de y)

★ La Composé :

$f : E \longrightarrow F$.

$g : F \longrightarrow G$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

★ $g \circ f\,(x) = g(f(x))$.

Déf : ✱ $\forall x \in E$, $g \circ f\,(x) = g(f(x))$.

Exemple :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto x^2 - 5$.

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$x \longmapsto x + 1$

$g \circ f(x) = g(f(x)) =$

$g \circ f(x) = (x^2 - 5) + 1 = x^2 - 4$

Les Relation :

Soit E un Ens.

1. Reflexive :

- $\forall x \in E$, $x \mathcal{R} x$.

2. Symetrique :

$\forall x, y \in E$, $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

3. Transitive.

$\forall x, y, z \in E$,

$(x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} z) \Rightarrow$

$x \mathcal{R} z$.

4. Antisymetrique :

$\forall x, y \in E$, $(x \mathcal{R} y) \wedge (y \mathcal{R} x)$

$\Rightarrow x = y$.

- $y_1 \in F$:

$\exists\, x_1 \in E$, $y_1 = f(x_1)$

f surj.

- Il faut les écrire ces details.

Relation d'ordre

1) L'ordre est totale :

$\forall x, y \in E$, xRy ou yRx.

exemple :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y$.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, xRy ou yRx

si on trouve deux element qui ne sont pas en relation avec l'autre l'aurdre n'est pas totale.

- x divise y.
- $y = K \cdot x$.
  $K \in \mathbb{N}^*$

* Ordre totale : l'un des deux تحقق
partiel : aucun des 2.

$x = 1$; $y = 2$.

xRy : $-3 \neq -1$

On essaie la sym

$y = 1$ $x = 2$.

yRx : $3 \neq 1$.

donc l'ordre n'est pas totale.

2) L'ordre est partiel :

(négation de l'ordre est totale).

$\exists x, y \in \mathbb{R}$, xRy et yRx

$x = 0$. $y = 0$.

xRy et yRx car

$0 = 0$.

Il suffit de trouver un seul element.

La classe de (a) sur E

Soit $a \in E$.

$\{ x \in E \,/\, x \mathcal{R} a \}$.

rem :

* Pour parler de la classe il faut que $\mathcal{R}$ soit une relation d'équivalance

* Une classe n'est jamais vide, elle contient au moin a car $\mathcal{R}$ est reflexive.

* $b \in \bar{a} \Rightarrow \bar{a} = \bar{b}$

Relation d'équivalance
- reflexive - sym
- Transitive

Relation d'ordre
- reflexive - transitive
- anty sym

rem :

★ Dans un Exo on a trouver

$cl(0) = \{2k, k \in \mathbb{Z}\}$

$cl(1) = \{2k+1, k \in \mathbb{Z}\}$.

$cl(0) \cup cl(1) = \mathbb{Z}$

donc $cl(0)$ et $cl(1)$ forment une partition.

Relation d'ordre

Ordre

totale: $\forall x, y \in E$, $x \mathcal{R} y$ ou $y \mathcal{R} x$

partiel: $\exists x, y \in E$, x n'est pas en relation avec y et y n'est pas en relation avec x (négation).

*
- IR est sym
- IR est transitive
- 0 est un multiple de de n.
- sym (تخرج — en facteur)

Notes :

1)

$\underbrace{\forall \varepsilon>0, \exists n>0 / \forall x \in \mathbb{R}}_{\text{on fait la négation}}, \underbrace{|x-x_0| < n}_{p} \Rightarrow \underbrace{|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon}_{q}.$

$\exists \varepsilon>0, \forall n>0, \exists x \in \mathbb{R}, \underbrace{|x-x_0| < n}_{p} \wedge \underbrace{|f(x)-f(x_0)| \geq \varepsilon}_{\bar{q}}.$

2). $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} / m < n$. F

/* On est ds $\mathbb{N}^*$ /.

si on prend $n = 0$, il est impossible de trouver $m \in \mathbb{N}$ tq $m < 0$

d'où p est Fausse.

$\hookrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}\ m \geq n$. (Vrai).

- proposition est Fau
  (contre exemple).
- quand on peut pas savoir on prends (fait) la négation.

$\forall y, \exists x, \boxed{x = 2\sqrt{y}}$

Remarque :

inegalité , on fait les enterval de solution puis on fait l'intersection .

- $f(\emptyset) = \emptyset$.

- Il faut prendre en Consideration les intervales ds les image $x \in]a\infty ; 0]$

$x^2 < 0$

$\boxed{x^2 > 0}$

- $x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- $f(x_1) = f(x_2)$

$g(f(x_1)) = g(f(x_2))$

Car g est une application

Structure Algébrique:

- Loie de Composition interne:

- soustraction ds $\mathbb{Z}$ (quon on fait la soustraction on reste ds $\mathbb{Z}$).
- multiplication $\mathbb{R}^{+*}$

'o' - 'Δ', 'U', 'n', '-' sont des loie de composition interne

Déf:

$(\forall x, y \in E,\ x * y \in E)$.

2. Associativité / Commutativité

Soit $(E, *)$ une loie:

1. associative : (+, . ds $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

$\forall\ x\, y\, z \in E\quad (a * b) * z = a * (b * z)$.

2. Commutativité . (- $\mathbb{Z}$ n'est ni commu ni assoc).

$\forall\ x, y \in E\quad x * y = y * y$.

3. L'élément neutre:

" $\exists e \in E, \forall x \in E$,

$x * e = x$ et

$e * x = x$ "

neutre adroite

neutre a gauche:

- Si Il existe Il est unique.
- Si la loie est commutatif on cherche le neutre d'un seul coté.

Exemple: ds $\mathbb{R}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}$ l'element neutre $+$ est 0 et dans la $\cdot$ est 1

4. Le symetrique:

$\forall x \in E, \exists x' \in E$,

$x * x' = e$ et $x' * x = e$

Si $(E, *)$ est une loi interne associative on cherche le symet le neutre d'un seul coté.

6. Groupe :

- Loi de composition interne
- associative
- admet un element neutre $\in E$
- Le symétrique $\in E$

\+ Commutatif (groupe abélien).

7. Morphisme :

Soient G, G' 2 ens

$*$ LCI ds G

T " " G'

$$f : (G, *) \to (G', T)$$

$$\forall x, y \in G \quad , f(x * y) = f(x) T f(y) .$$

Exemple :

$$f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^*, .)$$

$$x \mapsto f(x) = e^x$$

$$\forall x, y \in G , \quad f(x+y) = f(x) . f(y)$$

$$e^{x+y} = e^x . e^y = f(x) . f(y)$$

donc f est un morphisme.

8. Sous Groupe :

$(G, *)$ un groupe d'élement neutre e_G

$H \subset G$

- $H \neq \emptyset$ $(e_G \in H)$ l'element neutre
- $\forall x, y \in H , \; x * y \in H$ (loi interne)
- $\forall x, y \in G , \; x * y' \in H$
- $\forall x \in H , \; x' \in H$

$H \subset \cancel{G}$

$H \in Sg$

9. Le noyeau (Ker)

$\mathrm{Ker} f = f^{-1}(\{e_{G'}\})$

$= \{x \in G \,/\, f(x) = e_{G'}\}$

element neutre de la deuxieme

Si la sollution de l'equation $f(x) = \cancel{G'} = e$ donc on dit que f injectif

- Image direct

$\mathrm{Im} f = f(G)$

ensemble de depart

$\{f(x), x \in G\}$

Anneaux :

$*$, T deux loies de compositions internes ds G

$(G, *, T)$ est un anneau.

- $*$ $(G, *)$ un groupe abélien d'element neutre e_1.
- $*$ T associative.
- $*$ T distributive parrapport a $*$.

$\forall\ x, y, z \in A$, $xT(y * z) = (xT y) * (xT z)$ a droite

$(y * z)T x = (yT x) * (zT x)$. a gauche

remarques:

$*$ Si A possede un element neutre par rapport a T, qu'on note e_2, ds ce cas on dit que $(G, *, T)$ un anneau unitaire (les conditions d'un anneau).

$*$ Si T est commutatif ds A.
$\Rightarrow (G, *, T)$ anneau commutatif.

Homomorphisme d'anneaux :

soit $(G, +_1, \cdot_1)$ et $(G', +_2, \cdot_2)$ deux anneau et
$e_1\ e_3$ — $e_2\ e_4$

$$f : G \longrightarrow G'$$

f un homomorphisme d'anneau =

1- $f(a +_1 b) = f(a) +_2 f(b)$

1ere loi du 1er anneau — premiere loie du deuxieme anneau

2- $f(a \cdot_1 b) = f(a) \cdot_2 f(b)$.

3- $f(e_3) = e_4$.

$f(e_3) = \{ f(x) \mid x = e_3 \}$.

le neutre de l'anneau : le neutre de la deuxiem loie.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ sont des anneaux commutatif.
$\mathbb{R} / \mathbb{C} / \mathbb{Q}$

$f^{-1}(e_2)$: $\mathrm{Ker} f = \{x \in A_1,\ f(x) = e_2\}$

si on trouve e_1

donc f inj

Les sous anneaux.

$(A, *, T)$ est un anneau et $H \subset A$.

H est un sous anneau $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} H \neq \emptyset \ \{e_1 \text{ et } e_2 \in H\}. \\ \forall\, x, y \in H,\ x * y' \in H. \\ \forall\, x, y \in H,\ x T y \in H. \end{cases}$$

$(H, *)$ sous groupe de $(A, *)$.

anneau intègre :

$(A, +, .)$ anneau commutatif.

A intègre $\Leftrightarrow$

$\forall\, x, y \in A,\ x . y = 0 \Rightarrow$

$x = 0$ ou $y = 0$

~~élément~~ neutre de ~~la loi~~ 1

Idéal d'un anneau :

$(A, +, .)$ un anneau Commutatif

$$\begin{cases} \text{et } I \subset A. \\ 1)\ (I, +) \text{ grp Abelien} \\ 2)\ \forall\, x \in A, \forall\, y \in I \text{ on a } \\ x . y \in I. \end{cases}$$

Proposition

$I \subset A$

* $\forall\, x, y \in I,\ x - y \in I.$

sym de y par rapport à la première loi

* $\forall\, x \in A, \forall\, y \in I,\ x . y \in I$

deuxième loi

anneau quotien

$A/I\ \{\bar{x},\ x \in A\}$.

Le groupe quotient :

Les Corps :

$(A, +, \cdot)$ un corps $\Leftrightarrow$

- $(A, \underset{e_1}{+}, \underset{e_2}{\cdot})$ anneau unitaire. Commutatif :
- $\forall x \in A - \{e_1\}\ \exists x^{-1} \in A - \{e_1\}$.
  (tout element admet un inverse par rapport à la loi.)
  tq $x \cdot x^{-1} = e_2$ et $x^{-1} \cdot x = e_2$
- $e_1 \neq e_2$.
- Commutatif $\Leftrightarrow$ A un corp Commutatif

Sous Corps :

$(L, +, \cdot)$ Corps.

- $K \neq \emptyset$.
- Soit $x, y \in K$
  $x + (-y) \in K$
  sym loi une.
- $x \cdot y \in K$.
  loie deux

Sous anneau.

- neutre $A \in B$.
- $\forall x \in B - \{e_1\}\ \exists x^{-1} \in B - \{e_1\}$
  tq $x \cdot x^{-1} = 1$

- si on ne peut pas developper facilement et simplifier
$(x * y) \circ z =$ وحدو
$x * (y * z) =$ وحدو
et on compare
si ils sont egaux donc la loi est associative.
Ker f : ensemble.

$(x * y)^{-1} = x^{-1} * y^{-1}$

x et y sont inversible parrapport a $*$

$x * (y + z) = (x * y) + (x * z)$

$(y + z) * x = (y * x) + (z * x)$

on commence par ici

Rem :

* $\ker f$, $\operatorname{Im} f$ des sous grp de G.
* f inj $\Rightarrow \ker f \Rightarrow \{e_G\}$
* f surj $\Rightarrow \operatorname{Im} f = G'$

l'ensemble d'arrivée.

On doit vérifier que x' et $e \subset E$.

f(depart) = arrivée

f surj

- f morphisme = f homomorphisme.
- morphisme + bij $\Rightarrow$ isomorphisme

Morphisme (difinitions).

isomorphisme (morphisme bijectif)

generalement on demontre que c'est bij avec $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$.

endomorphisme

- Morphisme.
- $G = G'$

automorphisme

- Morphisme
- $G = G'$
- bijectif

Remarque :

isomorphisme

$f^{-1} (G', \perp) \longrightarrow (G, *)$

est un isomorphisme de groupe.

- $(\mathbb{R}^2, +) \Rightarrow e = (0,0)$
- $(\mathbb{R}^2, \cdot) \Rightarrow e = (1,1)$

sous groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ $n\mathbb{Z} = \{k \cdot n / k \in \mathbb{Z}\}$ $n \in \mathbb{N}$

Idée Algèbre :

$E = \{a_1, a_2 \dots, a_n\}$.

$\text{Card } E = m$.

$\text{Card } p(E) = 2^m$

$\text{Card } p(E) = C_n^0 + C_n^1 \dots C_m^m$

$\text{Card } p(E) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k = 2^m$ ①

Binome de Newton :

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \underbrace{a^{n-k} b^k}$

on remarque que ds ① pas de a et b

On pose $a = b = 1$

$(1+1)^m = \sum_{k=0}^{m} C_n^k$

$2^m = \sum_{k=0}^{m} C_n^k$

CQFD

$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

égalité est Fausse :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto f(x) = x^2$.

m image

$A_1 = \{1, 2\}$. $A_2 = \{1, 2\}$.

يتقاطعو في واحد

$A_1 \cap A_2 = \{1\}$.

$f(A_1 \cap A_2) = \{1\}$.

$f(A_1) = \{1, 4\}$.

$f(A_2) = \{1, 4\}$.

$f(A_1) \cap f(A_2) = \{1, 4\}$

$f(A_1 \cap A_2) = \{1\}$

$\{1, 4\} \not\subset \{1\}$.

- $\cap / \cup$ sont commutatifs et associatifs.
- $A = A \cap B \cup (A - B)$.

$(A \cancel{\cup B})^c =$

$A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$

$\ni . \ x / x \subset E$.

demm la symétrie.

$m - n = 4K$

$-(n-m) = 4K$

$n - m = 4\underbrace{(-K)}_{K'}$

d'ou R est $\xrightarrow{S}$ sym

quand on travail avec des couples,

on trouve $y = 2x - 1$.

$\{(x, 2x-1) / x \in \mathbb{R}\}$

On a.

$x(y+2) + 2(y+2) = 0$

$(x+2)(y+2) = 0$

$(\mathbb{Z},+)$ $(\mathbb{R},+)$

$(\mathbb{Q},+)$ $(\mathbb{C},+)$

- sont des groupes Abéliens.

- on cherche le neutre d'un seul coté et on le teste de l'autre coté (condidat)

$\mathcal{C}(x) = x$

$Im\, \mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{\mathcal{C}(x) / x \in \mathbb{R}\}$

$(x^3)' = 3x^2$

+ جدول تغيرات

image de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$

Sous groupe.

$H \subset E$.

pour qu'il appartient, il faut qu'on l'ecrit sous la forme de $1-5^n$.

exemple.

Soit $x \in H$, $\exists n \in H$ tq $x = 1-5^n$

~~$\exists x \in H$ tq $x =$~~

$x' = \dfrac{1-5^n}{1-5^n} = \cancel{1}$

$x' = -(1-5^n)5^{-n}$

$x' = -5^{-n} + 5^{n-n}$

$x' = 1 - 5^n \in H$.

- n'est pas commulatif, on donne un Contre exemple.

- element inversible par rapport à la deuxieme loie