Ouaras Khelil Rafik Algebre 01

• Chapitre "0" : Logique et Raisonnement :

I. Les operations logiques peuvent être resumè dans la Table de vèritè suivants : (P et Q sont des propositions)

P	Q	$\overline{P}$	$\overline{Q}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$P \Longleftrightarrow Q$
1	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1

- (1) : Vraie.
- (0) : fausse.

II. Les Mèthode de dèmonstration mathèmatique :

⊙ Prouver une implication "$P \Rightarrow Q$" : Vraie :

$\Rightarrow$ Raisonnement direct :

On suppose que "P" est vraie et on montre que "Q" est vraie.

$\Rightarrow$ Raisonnement par Contraposèe : On montre que :

"$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$" est vraie ; et on suppose que "Q" est fausse et on montre que "P" est fausse.

$\Rightarrow$ Raisonnement par l'absurde : On suppose que "$P \Rightarrow Q$" est fausse ; et son nègation "$P \wedge \overline{Q}$" est vraie ; et on montre que l'on obtient une contradiction.

Exemple : . montre que : "$\forall n \in \mathbb{N}$; n^2 ~~impaire~~ paire $\Rightarrow n$ ~~impaire~~ paire". est Vraie :

On pose que : P : n^2 paire ; Q : n paire.

i.e : $P \Rightarrow Q$; On montre que "$P \Rightarrow Q$" est vraie donc : La Contraposèe est vraie : $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.

$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$: n impaire $\Rightarrow n^2$ impaire.

n impaire $\Rightarrow n = 2K+1 \mid K \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow n^2 = 4K^2 + 1 + 2K \mid K \in \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ donc : $4K^2$ et $2K$ est paire mais il y "$+1$" donc : n^2 est impaire

$\Rightarrow (2K+1) + 4K^2 \Rightarrow n + 4K^2$

(n impaire $\Rightarrow n^2$ impaire) Vraie.

donc : $\boxed{P \Rightarrow Q \text{ est vraie}}$

Exemple 02 : montre que : $\forall n \in \mathbb{N}; n+4 \neq 0$ ---- (P).

On suppose que : (P) est fausse ; La négation est vraie : ($\exists n \in \mathbb{N}; n+4=0$)

--- ($\overline{P}$) ; $\exists n \in \mathbb{N}; n = -4$; et $-4 \notin \mathbb{N}$ (Contradiction)

donc : (P) est vraie.

- Prouver une équivalence "$P \Leftrightarrow Q$" : est Vraie :

1. soit montrer les deux implications "$P \Rightarrow Q$" et "$Q \Rightarrow P$".
2. Soit procéder directement par équivalences : "$P \Leftrightarrow P_1 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow Q$".

- Raisonnement par réccurence : $P(n)$ est vraie :

1. $P(0)$ ou $P(1)$ est Vraie. (montrons).
2. On suppose que $P(n)$ est vraie ; et on montre que $P(n+1)$ est vraie.

- Raisonnement par Contre-exemple : Pour montrer qu'une proposition de type "$\forall x \in E ; P(x)$" est fausse ; il suffit de trouve un $x \in E$ tel que $P(x)$ est fausse.

Exemple : montre que : $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$ est fausse :

On pose : $a = 2$; $b = 1$; P : $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$.

$\sqrt{2^2+1^2} = 2+1 \Rightarrow \sqrt{5} \neq 3$ donc (P) est fausse.

Ouaras Khelil Rafik — Algèbre 01

Chapitre "0" : Logique et Raisonnement :

Remarque :

- Proposition : $P \Rightarrow Q$: $\overline{P} \vee Q$.
- Contraposée : $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$.
- Négation : $\overline{\overline{P} \vee Q}$: $P \wedge \overline{Q}$.
- Réciproque : $Q \Rightarrow P$.

- "$\vee$" : ou.
- "$\wedge$" : et.
- "$\Rightarrow$" : implication : "Si .... alors ....".
- "$\Leftrightarrow$" : équivalence : "..... SSi .....".
- "$\forall$" : Quel que soit : pour tout.
- "$\exists$" : existe une fois.
- "$\exists!$" : existe un seule fois.

Chapitre "1" : Les ensembles :

Définition :

- $x \in E$: x appartient à E.
- $x \notin E$: x n'appartient pas à E.
- $E = \emptyset$: l'ensemble "E" est vide.

Exemple : $\mathbb{R}$; $\mathbb{Z}$; $\mathbb{N}$; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{C}$; $\{x \in \mathbb{R} / |x-2| < 1\}$.

- $E - \{0\}$ est noté par E^*.

Remarque :

- $E = \{2, 3, 4, 5\}$ est défini en Extension ; et $F = \{n \in \mathbb{N} ; 2 \leq n < 6\}$ est défini en Compréhension. et on remarquons que $E = F$.
- $H = \{x \in \mathbb{R} ; x^2 - 1 = 0\}$; les éléments de "H" sont les éléments de $\mathbb{R}$ vérifiant la Relation $x^2 - 1 = 0$ donc les éléments de "H" sont -1 et 1 ; on note : $H = \{-1 ; 1\}$.
- $S = \{x \in \mathbb{N}, x < 0\}$; les éléments de "S" sont les éléments de $\mathbb{N}$ vérifiant la relation $x < 0$ donc : $H = \{\ \} = \emptyset$ est la notation de l'ensemble vide.
- Si "E" est un ensemble formé par un seuls élément ; alors "E" est dit "Singleton". exc : $E = \{x \in \mathbb{R}, x - 1 = 0\} = \{1\}$.

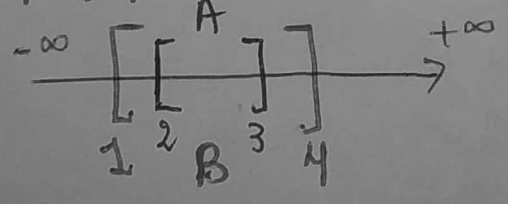
• Les Operations sur les ensembles :

①. L'inclusion : Soient "A" et "B" deux ensembles :

Chaque element de "A" est un élément de "B" : $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

On note $A \subset B$; on dit alors que "A" est un sous ensemble de "B" ou une partie de "B".

Exemple : $A = [2, 3]$; $B = [1 ; 4]$.



$A \subset B$.

. $\forall x \in [2 ; 3] \Rightarrow x \in [1 ; 4]$ alors $A \subset B$.

Ouaras Khelil Rafik

Algebre 01 :

Chapitre 01 : "Les ensembles" :

2). **L'égalité :** Soient "E" et "F" deux ensembles :

$F = E \Leftrightarrow E \subset F$ et $F \subset E$.

Propriétés :

✓ Pour un ensemble "E" on a l'équivalence :

$x \in E \Leftrightarrow \{x\} \in P(E)$.

✓ Soit A un sous-ensemble d'un ensemble "E" donc :

$A \in P(E) \Leftrightarrow A \subset E$

✓ Soient "E", "F", "G" trois ensembles alors :

$E \subset F$ et $F \subset G \Rightarrow E \subset G$. (C'est-à-dire que l'inclusion est transitive.

✓ $A \subset A = A$.

3). **l'ensemble des parties d'un ensemble :**

Exemple : Soit "E" un ensemble : $E = \{\underset{1}{0}, \underset{2}{1}, \underset{3}{2}\}$.

$|E| = 3$ ← le nombre d'éléments

$\text{card } E = |E| = 3$.

$P(E) = \{\underset{1}{\emptyset}; \underset{2}{\{0\}}; \underset{3}{\{1\}}; \underset{4}{\{2\}}; \underset{5}{\{0,2\}}; \underset{6}{\{0,1\}}; \underset{7}{\{1,2\}}; \underset{8}{E}\}$

$|P(E)| = 8 = \text{Card } P(E)$.

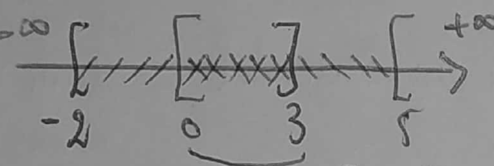
Remarque :

- $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$ et on a $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} = \{\{\}\}$.
- $\text{Card}\, \emptyset = 0$.

④. **Intersection des ensembles :** Soient A et B deux parties d'un ensemble "E" :

- $A \cap B = \{x \in E ;\ x \in A \text{ et } x \in B\}$.
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors A et B sont dit disjoints.

Exemple : $A = [-2, 3]$, $B = [0, 5[$.



$$A \cap B = [0, 3] = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}.$$
$$= \{x / x [-2,3] \text{ et } x \in [0, 5[\}.$$

⑤. **Réunion des ensembles :** Soient A et B deux parties d'un ensemble "E" :

- $A \cup B = \{x \in E ;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.

Exemple : $A = [-2, 3]$; $B = [0, 5[$:

- $A \cup B = \{x \in E ;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$

$A \cup B = \{x \in E ;\ x \in [-2, 3] \text{ ou } x \in [0, 5[\}$

$A \cup B = [-2, 5[$.

Propriétés :

①. $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$.

②. $(A \cap B) \subset A$ et $(A \cap B) \subset B$.

③. $A \cup B = A \Longleftrightarrow B \subset A$.

④. $(A \cup B) \supset A$ et $(A \cup B) \supset B$.

⑤. $A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subset B$.

⑥. $\left.\begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array}\right\}$ commutatives.

⑦. $\left.\begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array}\right\}$ associatives

⑧. $\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}\right\}$

Ouaras Khelil Rafik

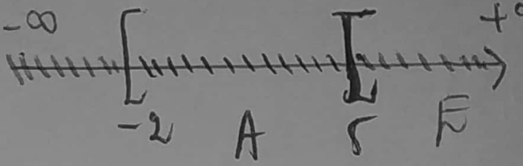
Algèbre 01 :

Chapitre 01 : "les ensembles" :

⑥. Complémentaire d'un ensemble : Soit "A" une partie d'un ensemble "E" :

$C_E^A = \{x \in E \text{ ; telque } x \notin A\}$; on le note : C_E^A ou $\bar{A}$.

Exemple : $E = \mathbb{R}$; $A = [-2 ; 5[$.



$C_E^A = \{x \in E \text{ et } x \notin A\} = \bar{A}$

$C_E^A = \{x / x \in \mathbb{R} \text{ et } x \notin [-2,5[\} = \bar{A}$

$C_E^A =]-\infty, -2[\cup [5, +\infty[$.

Propriétés : Soient E un ensemble ; A et B sous-ensembles de E :

- $C_E^{C_E^A} = A$; on le note : $\bar{\bar{A}} = A$.
- $A \subset B \Longleftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$: $A \subset B \Longleftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$.
- $C_E^{(A \cap B)} = C_E^A \cup C_E^B$: $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.
- $C_E^{(A \cup B)} = C_E^A \cap C_E^B$: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

⑦. Différence de deux ensembles : Soient A et B deux parties d'un ensemble "E" :

$A - B = A / B = \{x \in E \text{ ; } x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

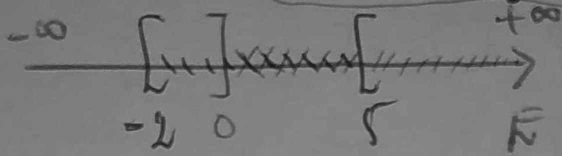
Remarque :
- $A - B \neq B - A$.
- $A - B = A \cap \bar{B}$.
- $A - B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subset B$.

Exemple : $E = \mathbb{R}$; $A = [-2;5[$; $B = \mathbb{N}^*$.

• $A - B = A/B = \{x \in E \, ; \, x \in A \text{ et } x \notin B\}$.

$A - B = \{x \in \mathbb{R} \, ; \, x \in [-2;5[\text{ et } x \notin \mathbb{N}^*\}$.

$A - B = A \cap \overline{B} = [-2,5[\cap \mathbb{N}^* = \boxed{[-2,5[/ \{1,2,3,4\}}$.



$A - B =]0,5[$.

• $B - A = B/A = \{x \in E \, ; \, x \in B \text{ et } x \notin A\}$.

$B - A = \{x \in \mathbb{R} \, ; \, x \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \notin [-2;5[\}$.

$B - A = B \cap \overline{A} = \mathbb{N}^* \cap [-2,5[= \boxed{\mathbb{N}^* / \{1,2,3,4\}}$.

8. Différence symétrique de deux ensembles :

• Soient A et B deux parties d'un ensemble "E" :

• $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Exemple :

$A \Delta B = [-2,5[/ \{1,2,3,4\} \cup \mathbb{N}^* / \{1,2,3,4\}$.

$\boxed{A \Delta B = [-2,5[\cup \mathbb{N}^* / \{1,2,3,4\}}$

Propriétés :

• $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$: associative.

• $A \Delta B = B \Delta A$: Commutative.

• $A \Delta \emptyset = A$. • $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$.

• $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

Ouaras Khelil Rafik : Algèbre 01

Chapitre 01 : "Les ensembles" :

9. Produit Cartésien : Soient "A" et "B" deux ensembles :

$A \times B = \{(x;y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$.

Exemple :

1. $A = \{1,2\}$ et $B = \{3,4\}$.

- $A \times B = \{(x;y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$.

$A \times B = \{(x;y) / x \in \{1,2\} \text{ et } y \in \{3,4\}\}$.

$A \times B = \{(1,3);(1,4);(2,3);(2,4)\}$.

2. $A = [0,1]$ et $B = \mathbb{R}$.

- $A \times B = \{(x;y) / x \in A \text{ et } y \in B\}$.

$A \times B = \{(x;y) / x \in [0,1] \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.

$A \times B = \{(x;y) / 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$.

Remarque :

- $A \times B \neq B \times A$.
- $|A \times B| = |A| \times |B|$.

Chapitre 02 : Les Relations binaires :

Définition : " $x \mathcal{R} y$ " ou bien " $\mathcal{R}(x,y)$ ".

I). Relation d'équivalence :

Soit E un ensemble non vide $E \neq \emptyset$ et $\mathcal{R}$ une relation définie sur E :

$$\left(\begin{array}{l}\mathcal{R} \text{ est une relation} \\ \text{d'équivalence dans } E\end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} ① .\ \mathcal{R} \text{ est reflixive dans } E. \\ \quad \text{et} \\ ② .\ \mathcal{R} \text{ est symétrique dans } E. \\ \quad \text{et} \\ ③ .\ \mathcal{R} \text{ est transitive dans } E. \end{cases}$$

- $\left(\mathcal{R} \text{ est Reflixive dans } E\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x \in E,\ x \mathcal{R} x\right)$.

- $\left(\mathcal{R} \text{ est Symetrique dans } E\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x,y \in E,\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x\right)$.

- $\left(\mathcal{R} \text{ est transitive dans } E\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x,y,z \in E,\ \left\{\begin{array}{c} x \mathcal{R} y \\ \text{et} \\ y \mathcal{R} z \end{array}\right\} \Rightarrow x \mathcal{R} z\right)$.

II). Relation d'ordre :

$$\left(\begin{array}{l}\mathcal{R} \text{ est une relation} \\ \text{d'ordre dans } E\end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} ① .\ \mathcal{R} \text{ est Reflixive dans } E. \\ \quad \text{et} \\ ② .\ \mathcal{R} \text{ est antisymetrique dans } E. \\ \quad \text{et} \\ ③ .\ \mathcal{R} \text{ est transitive dans } E. \end{cases}$$

Ouaras Khelil Rafik Algèbre 01 :

Chapitre 02 : Les Relations Binaires :

- $\left(\begin{array}{c}\mathcal{R} \text{ est antisymétrique} \\ \text{dans } E.\end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\forall x, y \in E, \left\{\begin{array}{c} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}x \end{array}\right\} \Rightarrow x = y\right).$

Exercice 01 :

$E = \mathbb{N}^*, \forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \text{ divi } y$

$\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{N}^* : y = Kx.$

* est-ce-que "$\mathcal{R}$" est relation d'équivalence dans E ?.

Correction :

- $\left(\begin{array}{c}\mathcal{R} \text{ est une Relation} \\ \text{d'équivalence dans } E\end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ①.\ \mathcal{R} \text{ reflixive dans } E. \\ \text{et} \\ ②.\ \mathcal{R} \text{ symétrique dans } E. \\ \text{et} \\ ③.\ \mathcal{R} \text{ transitive dans } E.\end{array}\right.$

- $(\mathcal{R} \text{ reflexive dans } \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow (\forall x \in E, x\mathcal{R}x) \ldots\ldots ①$

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{N}^*; x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x \text{ div } x)$

$\Leftrightarrow x = Kx / K \in \mathbb{N}^*.$

donc : $K = 1 \Rightarrow x = x$

① est vraie.

- $(\mathcal{R} \text{ symetrique dans } \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow (\forall x, y \in E, x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x) \ldots\ldots ②$

$\Leftrightarrow [\forall x, y \in \mathbb{N}^*; x\mathcal{R}y \Rightarrow y = Kx / K \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow x = \frac{1}{K} y$

$\Rightarrow x \notin \mathbb{N}^*$

donc: ② est fausse.

$\cdot \left(\mathcal{R} \text{ taransitive dans } \mathbb{N}^* \right) \iff \left(\forall x,y,z \in E;\ \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow x\mathcal{R}z \right)$ --- ③

$\iff \left(\forall x,y,z \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} x\mathcal{R}y \Rightarrow y = K_1 x / K \in \mathbb{N}^* \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \Rightarrow z = K_2 y / K \in \mathbb{N}^* \end{cases} \right)$

$\iff \left(\forall x,y,z \in \mathbb{N}^*,\ z = K_2(K_1 x) = Kx \right)$ $\boxed{K_1K_2 = K}$

$\iff \left(\forall x;y;z \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ \text{et} \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow z\mathcal{R}x \right).$

donc: ③ est vraie.

① et ② et ③ $\iff$ "$\mathcal{R}$" n'est pas une Relation d'équivalence, car ② est fausse.

Exercice 02: * est-ce-que "$\mathcal{R}$" est une relation d'ordre ?.

$\left(\mathcal{R} \text{ relation d'ordre dans } \mathbb{N}^* \right) \iff \begin{cases} ①.\ \mathcal{R} \text{ est reflexive dans } \mathbb{N}^*. \\ ②.\ \mathcal{R} \text{ est antisymetrique dans } \mathbb{N}^*. \\ ③.\ \mathcal{R} \text{ est transitive dans } \mathbb{N}^*. \end{cases}$

② $\left(\mathcal{R} \text{ est antisymetrique dans } \mathbb{N}^* \right) \iff \left(\forall x,y \in \mathbb{N}^*;\ \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{cases} \Rightarrow x = y \right)$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x\mathcal{R}y \iff y = K_1 x. \\ \cdot\ y\mathcal{R}x \iff x = K_2 y. \end{array}\right\}$ $K_1 = K_2 = 1.$ donc: $\left.\begin{array}{l} y = x \\ x = y \end{array}\right\}.$

donc: ② est vraie.

① et ② et ③ $\iff$ "$\mathcal{R}$" n'est pas une relation d'ordre.

Ouanas Khelil Rafik

Algèbre 01 :

Chapitre 02 : "Les Relations binaires" :

I). i. Classe d'équivalence :

notée : $\bar{a}$ (ou $\dot{a}$; ou $cl(a)$) : $\bar{a} = \{y \in E,\ a \mathcal{R} y\}$.

I). ii. Ensemble quotient :

notée : $E/\mathcal{R}$: $E/\mathcal{R} = \{\bar{a},\ a \in E\}$.

Exercice : Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$\forall x, y \in \mathbb{R}, (x \mathcal{R} y) \Leftrightarrow (x^2 - y^2 = x - y)$.

① . Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

② . Préciser la classe de a pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Correction : ① . Montrons que :

① . $\mathcal{R}$ est une reflexive dans $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R},\ x \mathcal{R} x \Rightarrow x^2 - x^2 = x - x$

$$\Rightarrow 0 = 0$$

donc : $\mathcal{R}$ est une reflexive dans $\mathbb{R}$.

② . $\mathcal{R}$ est une symétrique dans $\mathbb{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$.

$x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$: $(x^2 - y^2 = x - y) \Rightarrow (y^2 - x^2 = y - x)$

$$(x^2 - y^2 = x - y) \Rightarrow \left(-(x^2 - y^2) = -(x - y)\right)$$

$$(x^2 - y^2 = x - y) \Rightarrow (y^2 - x^2 = y - x).$$

donc : $\mathcal{R}$ est une symétrique dans $\mathbb{R}$.

③. $\mathcal{R}$ une transitive dans $\mathbb{R}$: $\left(\forall x,y,z\in\mathbb{R}\ \begin{cases} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{cases} \Rightarrow x\mathcal{R}z\right)$

$\forall$ <u>$x,y,z\in\mathbb{R}$</u> :

- $x\mathcal{R}y \Rightarrow (x^2-y^2=x-y) \Rightarrow (x-y)(x+y)=(x-y) \Rightarrow x+y=1$

$\Rightarrow y=1-x.$

- $y\mathcal{R}z \Rightarrow (y^2-z^2=y-z) \Rightarrow (1-x)^2-z^2=1-x-z$

$\Rightarrow x^2+1-2x-z^2=1-x-z$

$\Rightarrow x^2-z^2=x-z \Rightarrow x\mathcal{R}z.$

<u>donc</u> : $\mathcal{R}$ est transitive dans $\mathbb{R}$.

① et ② et ③ $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{R}$ est une Relation d'équivalence.

②. <u>La Classe de $a\in\mathbb{R}$</u> :

$\bar{a}=\{y\in\mathbb{R};\ a\mathcal{R}y\}=\{y\in\mathbb{R};\ a^2-y^2=a-y\}.$

$\bar{a}=\{y\in\mathbb{R};\ (a-y)(a+y)=(a-y)\}=\{y\in\mathbb{R};\ a+y=1\}=\{y\in\mathbb{R};\ y=1-$

$\bar{a}=\{1-a\}.$

II). i. <u>l'ordre totale - l'ordre partiel</u> :

On dit que $\mathcal{R}$ est l'ordre totale : $\forall x,y\in E$; "$x\mathcal{R}y$" ou "$y\mathcal{R}x$"

et on dit que $\mathcal{R}$ est l'ordre partiel s'il n'est pas totale :

$\exists x,y\in E$; "$x\not\mathcal{R}y$" et "$y\not\mathcal{R}x$".

<u>Exercice 03</u> : Soit $E=\{a,b,c\}$ on note par $P(E)$ l'ensemble des parties de E dans $P(E)$ on définit la relation binaire $\mathcal{R}$ par : $\forall A,B\in P(E)$; $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow A\subset B$

①. Montrer que est une relation d'ordre.

②. cet ordre est-il total ?.

Ouarous Khelil Rafik

Algèbre 01 :

Chapitre 02 : "Les Relations binaires" :

Correction : ① . Montrons que :

①. $\mathcal{R}$ est réflexive : $\forall A \in \mathcal{P}(E)$; $A \mathcal{R} A \Leftrightarrow A \subset A$. c'est vraie.

②. $\mathcal{R}$ est antisymétrique : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$; $\left\{\begin{array}{c} A \mathcal{R} B \\ \text{et} \\ B \mathcal{R} A \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$.

$\left.\begin{array}{l} \cdot A \mathcal{R} B \Rightarrow A \subset B. \\ \cdot B \mathcal{R} A \Rightarrow B \subset A. \end{array}\right\}$ donc : $A = B$. C'est vraie.

③. $\mathcal{R}$ est transitive : $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E)$; $\left\{\begin{array}{c} A \mathcal{R} B \\ B \mathcal{R} C \end{array}\right\} \Rightarrow A \mathcal{R} C$.

$\left.\begin{array}{l} \cdot A \mathcal{R} B \Rightarrow A \subset B \\ \cdot B \mathcal{R} C \Rightarrow B \subset C \end{array}\right\}$ donc : $A \subset C$ c'est vraie.

① et ② et ③ $\Leftrightarrow$ $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre.

②. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$; "$A \mathcal{R} B$" ou "$B \mathcal{R} A$"

$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset ; \{a\} ; \{b\} ; \{c\} ; (c;a) ; (c;b) ; (a;b) ; E\}$.

donc : $\exists A = \{a\}$ et $B = \{b\} \Rightarrow A \not\subset B$ et $B \not\subset A \Leftrightarrow$ "$A \not\mathcal{R} B$" et "$B \not\mathcal{R} A$"

et alors l'ordre de la relation est partiel ; n'est pas total.

Chapitre 03 : "Les Applications" :

I) **Composition des applications** : Soient E, F, G trois ensembles et :

- $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications :

$\underbrace{E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G}_{g \circ f}$ tel que : $\forall x \in E ; (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Remarque : $f \circ g \neq g \circ f$ (n'est pas Commutative).

Propriétés : Soient f, g, h sont trois applications lorsque la Composée sont définies alors :

① $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ (est associative).

② $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ $\{$mais $f + (g \circ h) \neq (f+g) \circ (f+h)\}$

II. Image direct d'une partie : Soit $f : E \to F$ et $A \subset E$.

L'image direct de A par f est l'ensemble :

- $f(A) = \{ f(x) / x \in A \}$.

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $A = \{1, 0, 2\}$.
$x \to x^2$

- $f(A) = \{1, 0, 4\}$.

III. Image réciproque d'une partie : Soit $f : E \to F$ et $B \subset F$.

L'image réciproque de B par f est l'ensemble :

- $f^{-1}(B) = \{ x \in E / f(x) \in B \}$.

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $B = \{0, 1, 2\}$.
$x \to x^2$

- $f^{-1}(B) = \{0 ; -1 ; 1 ; -\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$.

- $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
- $x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$
- $x^2 = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

Remarque : $f^{-1}(B) \subset E$ et $f(A) \subset F$

OUARAS Khelil Rafik Algebre 01 :

Chapitre 03 : "Les Applications".

IV). Injective ; Surjective ; Bijective :

a). Injective : L'application $f : E \to F$ est injective ssi :

• $\forall x, y \in E : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Exemple : $f : \mathbb{R}/\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}/\{2\}$.

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

montrer que f est injective :

$\forall x, y \in \mathbb{R}/\{1\} : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{x-1} = \dfrac{2y+1}{y-1}$.

$\Leftrightarrow (2x+1)(y-1) = (2y+1)(x-1)$.

$\Leftrightarrow \cancel{2xy} + y - 2x - \cancel{1} = \cancel{2yx} + x - 2y - \cancel{1}$

$\Leftrightarrow -2x - x = -2y - y \Leftrightarrow -3x = -3y$.

$\Leftrightarrow x = y$; donc : f est injective.

b). Surjective : L'application $f : E \to F$ est surjective ssi :

$\forall y \in F ; \exists x \in E : f(x) = y$.

Exemple : $f : \mathbb{R}/\{1\} \to \mathbb{R}/\{2\}$.

$$x \longrightarrow f(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

• montrer que f est surjective :

- $\forall y \in \mathbb{R}/\{2\}$; $\exists x \in \mathbb{R}/\{1\}$: $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x-1} = y$.

$\Leftrightarrow 2x+1 = yx - y \Leftrightarrow 2x - yx = -y-1$.

$\Leftrightarrow x(2-y) = -y-1 \Leftrightarrow x = \frac{-(y+1)}{-(y-2)}$.

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{y+1}{y-2}}$

- Si $x = 1 \Rightarrow 1 = \frac{y+1}{y-2} \Rightarrow \cancel{y} - 2 = \cancel{y} + 1 \Rightarrow -2 \neq 1$ alors $x \in \mathbb{R}/\{1\}$

donc : f est surjective.

c) - **Béjective** : L'application $f : E \to F$ est Béjective ssi :

f est injective et surjective ; ou bien : $\forall y \in F$; $\exists! x \in E$: $f(x) = y$.

Exemple : $f : \mathbb{R}/\{1\} \to \mathbb{R}/\{2\}$.

$x \to f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

- montrer que "f" est béjective :
- Comme f est injective et surjective alors elle est béjective.

V) - **Béjection réciproque** : L'application $f : E \to F$ une bijection.

La béjection réciproque de f notée $f^{-1} : F \to E$:

$\forall y \in F, \exists! x \in E : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Propriétés : Soit $f : E \to F$ une bijection alors :

1. f^{-1} est une bijection réciproque et $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. $\forall x \in E$: $f^{-1}(f(x)) = x$ c'est à dire $f^{-1} \circ f = id_E$.
3. $\forall y \in F$: $f^{-1}(f(y)) = y$ // // $f \circ f^{-1} = id_F$.
4. Si "f" et "g" sont bijective donc : $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

OUARAS Khelil Rafik

Algebre 01 :

Chapitre 03 : "Les Applications" :

- **Exemple :** Donnée la Bijection réciproque de "f" tel que :

$$f : \mathbb{R}/\{1\} \to \mathbb{R}/\{2\}$$
$$x \to f(x) = \frac{2x+1}{x-1}.$$

- $f^{-1} : \mathbb{R}/\{2\} \to \mathbb{R}/\{1\}.$
$$x \to f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

(في المثال السابق وجدنا "x" بدلالة y : y والآن نبدل "y" ب "x".)

Chapitre 04 : "Structures Algébriques" :