CHAPITRE I : Ensembles, Applications, Relations

I.1) Notions de logique mathématique

1) **Définition :** On appelle proposition une expression pouvant être vraie ou fausse. On associe à toute proposition une valeur de vérité V ou F.

V : si la proposition est vraie
F : " " " " fausse

Exp : La proposition P : $1<2$ est vraie : V
" " Q : $4\leq 3$ " fausse : F

2) Opérations sur les propositions

a/ **La négation** de la proposition P notée non P ou $\bar{P}$ prend les valeurs données dans la table de vérité suivante :

P	non P
V	F
F	V

Exp : $\begin{cases} P : 1<2 & (V) \\ \bar{P} : 1\geq 2 & (F) \end{cases}$ $\begin{cases} P : 4\leq 3 & (F) \\ \bar{P} : 4>3 & (V) \end{cases}$

b/ **La conjonction :** P et Q

La proposition (P et Q), notée $P\wedge Q$, est vraie si chacune des propositions est vraie (c.à.d : P est vraie et Q est vraie)

Exp : P : 2 divise 4 est vraie donc $P\wedge Q$ est vraie
Q : 2 est premier est vraie

c/ **La disjonction :** P ou Q

La proposition (P ou Q) notée $P\vee Q$, est vraie si l'une au moins des propositions P, Q est vraie (c.à.d : si P est vraie ou Q est vraie)
Le ou est inclusif

Exp : $1<2$ ou $4\leq 3$ est (V)
$1>2$ ou $4\leq 3$ est (F)

$\boxed{Q\Rightarrow P \text{ est appelée la réciproque de } P\Rightarrow Q}$

d/ **L'implication :** $P\Rightarrow Q$

"P implique Q" ou "P entraine Q", notée $P\Rightarrow Q$, signifie que : si P est vraie alors Q est vraie.
L'implication $P\Rightarrow Q$ est fausse dans le seul cas où $\begin{cases} P \text{ est vraie} \\ \text{et} \\ Q \text{ est fausse} \end{cases}$

On vérifie que $(P\Rightarrow Q)$ et $(\bar{P} \text{ ou } Q)$ ont une même valeur de vérité quelque soient les valeurs de P et de Q.

P	Q	$\bar{P}$	$\bar{P}$ ou Q	$P\Rightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

$\boxed{\text{On peut donc remplacer } P\Rightarrow Q \text{ par } \bar{P} \text{ ou } Q}$

Exp : x divisible par 4 $\Rightarrow$ x divisible par 2 est (V)
20 divisible par 4 $\Rightarrow$ 20 divisible par 3 est fausse

On dit que : P est l'hypothèse et Q est la conclusion
" " " : la vérité de P est une condition suffisante pour celle de Q
" " " : " " " Q " " " nécessaire " " " P

e/ La contraposée : non Q $\Rightarrow$ non P ($\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$)

La contraposée de $P \Rightarrow Q$ est non Q $\Rightarrow$ non P

L'implication $P \Rightarrow Q$ et sa contraposée $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ désignent la même proposition ($\overline{P}$ ou Q)

En effet, on a : $P \Rightarrow Q$ représente ($\overline{P}$ ou Q)

$\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ " ($\overline{\overline{Q}}$ ou $\overline{P}$), $\overline{\overline{Q}} = Q$

Exp : La contraposée de : x divisible par 4 $\Rightarrow$ x divisible par 2
est : x non divisible par 2 $\Rightarrow$ x non divisible par 4

Remarque : Une application $f : E \rightarrow F$ est dite injective ssi :
$\forall x_1, x_2 \in E \ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$

On peut donc dire que $f : E \rightarrow F$ est injective ssi :
$\forall x_1, x_2 \in E \ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$

f/ L'équivalence : $P \Leftrightarrow Q$

On dit que P est équivalente à Q et on écrit $P \Leftrightarrow Q$ si :
($P \Rightarrow Q$) et ($Q \Rightarrow P$)
(P vraie $\Rightarrow$ Q vraie) et (Q vraie $\Rightarrow$ P vraie)

On dit que : Pour que P soit vraie il faut et il suffit que Q soit vraie
P est vraie si et seulement si (ssi) Q est vraie
La vérité de P est une condition nécessaire et suffisante pour la vérité de Q

Exp : Dans les triangles on a l'équivalence suivante :

Les 3 cotés sont égaux $\Leftrightarrow$ les 3 angles sont égaux

3) Les quantificateurs : $\exists$, $\forall$

Une proposition P qui dépend de l'élément x d'un ensemble G donné s'écrit P(x).

On écrit $\exists x, P(x)$ pour exprimer que la proposition P(x) est vraie pour au moins un x de G

On écrit $\forall x, P(x)$ si P(x) est vraie pour tous les éléments x de G

Le symbole $\exists$ est appelé quantificateur existentiel
" $\forall$ " " " universel

Exp : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$

<u>Règle</u> : Pour établir la négation d'une proposition, on remplacera $\forall$ par $\exists$, $\exists$ par $\forall$, et par ou, ou par et, les expressions par leurs négations,

<u>Ainsi</u> : $\overline{P \text{ ou } Q} \Leftrightarrow \overline{P} \text{ et } \overline{Q}$, $\overline{P \text{ et } Q} \Leftrightarrow \overline{P} \text{ ou } \overline{Q}$

$\overline{P \Rightarrow Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P} \text{ ou } Q} \Leftrightarrow \overline{\overline{P}} \text{ et } \overline{Q} \Leftrightarrow P \text{ et } \overline{Q}$

$\overline{\forall x, P(x)} \Leftrightarrow \exists x, \overline{P(x)}$, $\overline{\exists x, P(x)} \Leftrightarrow \forall x, \overline{P(x)}$

<u>Exp</u> : La négation de $A \subset B : \forall a\ (a \in A \Rightarrow a \in B)$
s'écrit $A \not\subset B : \exists a\ (a \in A \text{ et } a \notin B)$

Soit $f : G \to H$, f injective : $\forall x, x' \in G\ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$

sa négation est : f non injective : $\exists x, x' \in G\ (x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x'))$

f surjective : $\forall Y \in H, \exists X \in G : f(x) = Y$

sa négation est : f non surjective : $\exists Y \in H, \forall x \in G : f(x) \neq Y$

4) <u>Raisonnement par récurrence</u>

Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de l'entier naturel n, soit n_0 le plus petit entier tel que $P(n_0)$ est vérifiée.

Si l'hypothèse $P(n)$ vérifiée implique $P(n+1)$ vérifiée, alors $P(n)$ est vérifiée pour tout $n \geq n_0$

<u>Exp</u> : $1+2+3+\dots n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$

Si $n=1$, on a $1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{1 \times 2}{2} = 1$ (vraie)

Supposons que l'égalité est vraie pour "n" et montrons la pour "$n+1$".

$1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ (vraie)

5) <u>Raisonnement par l'absurde</u>

Pour démontrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que $(P \Rightarrow Q)$ est fausse (donc sa négation $(P \text{ et } \overline{Q})$ est vraie.

On suppose donc que $(P \text{ et } \overline{Q})$ est vraie, Si Par un raisonnement logique on aboutit à une contradiction alors $(P \text{ et } \overline{Q})$ est fausse donc sa négation $(P \Rightarrow Q)$ est vraie

<u>Exp</u> : $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$, sa négation est $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon)$ et $a \neq 0$

Supposons que $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon)$ et $a \neq 0$ est vraie $\Rightarrow |a| > \frac{|a|}{2} > 0$, donc

$\exists\ \varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0$ tel que $|a| > \varepsilon$, ce qui contredit l'hypothèse $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon)$

donc $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon)$ et $a \neq 0$ est fausse donc $(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$ est vraie

I.2) Ensembles

1/ Définition : Un *ensemble* est une collection d'objets. Chaque objet est un *élément* de l'ensemble. Un ensemble qui ne contient aucun élément est appelé *ensemble vide*, il est noté Φ ou $\{\ \}$.

Exps : l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
" " " relatifs $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
" " nombres rationnels $\mathbb{Q} = \{p/q$ où p, q dans $\mathbb{Z}$, $q \neq 0\}$
" " " réels $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{$les nombres irrationnels$\}$
" " " Complexes $\mathbb{C} = \{\alpha + i\beta$ où α, β dans $\mathbb{R}\}$

2/ Appartenance : Soit E un ensemble. On dit que l'élément x :
a/ *appartient* à E, et on écrit $x \in E$ si x est un élément de E
b/ *n'appartient pas* à E et on écrit $x \notin E$ si x n'est pas un élément de E

Exp : Soit $E = \{a, b, c\}$: $a \in E$, $b \in E$, $c \in E$, $d \notin E$, $f \notin E \ldots$

3/ Inclusion : Soient E et F deux ensembles. On dit que F est *inclus* dans E et on écrit $F \subset E$ si tout élément de F est dans E.

$$\boxed{F \subset E \iff \forall x\,(x \in F \Rightarrow x \in E)}$$

Remarque 1 : On dit aussi que F est un *sous-ensemble* de E
" " " " " " une *partie* de E

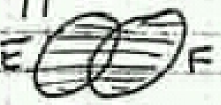
Remarque 2 : $\boxed{E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E}$

Exp : $E = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $F = \{\alpha, \beta\}$, on a $F \subset E$ mais $E \not\subset F$

4/ Réunion et Intersection

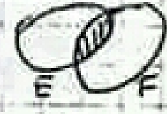
a/ La *réunion* de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E ou (inclusif) appartiennent à F.

$E \cup F = \{x \,/\, x \in E$ ou $x \in F\}$ *diagramme de Venn* →



b/ *L'intersection* de deux ensembles E et F est l'ensemble des éléments qui appartiennent à E et appartiennent à F.

$E \cap F = \{x \,/\, x \in E$ et $x \in F\}$



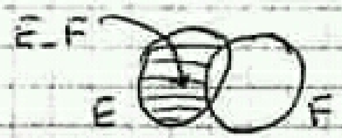
Exp : $E = \{a, b\}$, $F = \{a, c\}$
$E \cup F = \{a, b, c\}$, $E \cap F = \{a\}$

Rmq : Si $E \cap F = \Phi$, on dit que E et F sont *disjoints*

Propriétés :
i) $E \cap F = F \cap E$, $E \cup F = F \cup E$
ii) $E \cap \Phi = \Phi$, $E \cup \Phi = E$, $E \cup E = E$, $E \cap E = E$
iii) $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$ où $|\ |$ est le *cardinal* (nombre d'éléments)
iv) L'intersection "$\cap$" est *distributive* par rapport à la réunion "$\cup$" et inversement

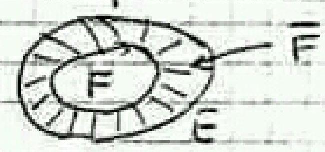
$$E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$$
$$(F \cup G) \cap E = (F \cap E) \cup (G \cap E)$$

5/ Différence de deux ensembles



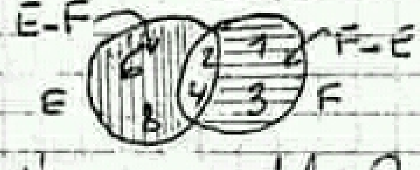
$E - F = \{x \,/\, x \in E \text{ et } x \notin F\}$

Rmq: Si $F \subset E$, alors $E - F$ est aussi appelé complémentaire de F dans E, il est noté C_E^F ou $\overline{F}$



Exp: $E = \{2, 4, 6, 8\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$

$E - F = \{6, 8\}$, $F - E = \{1, 3\}$



Propriétés :

Si E et F sont deux parties d'un ensemble Ω alors:

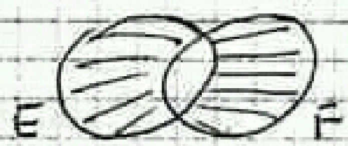
iii) $\left\{\begin{array}{l} \overline{E \cap F} = \overline{E} \cup \overline{F} \\ \overline{E \cup F} = \overline{E} \cap \overline{F} \end{array}\right\}$ Lois de Demorgan

ii) $E - F = E \cap \overline{F}$, $|E - F| = |E| - |E \cap F|$

i) $E \cap \overline{E} = \emptyset$, $E \cup \overline{E} = \Omega$, $\forall x \in \Omega \ (x \in \overline{E} \Leftrightarrow x \notin E)$

6/ Différence symétrique

$E \Delta F = (E - F) \cup (F - E)$



Exp: Pour E et F de l'exemple précédent on a:

$E - F = \{6, 8\}$, $F - E = \{1, 3\}$ donc $E \Delta F = \{6, 8, 1, 3\}$

Rmq: $E \Delta F = (E \cup F) - (E \cap F)$, $E \Delta F = F \Delta E$

$|E \Delta F| = |E| + |F| - 2|E \cap F|$

7/ L'ensemble des parties d'un ensemble

Etant donné un ensemble E, on désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties (sous-ensembles) de E

Exp: $E = \{a, b\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Proposition: $|E| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(E)| = 2^n$

8/ Produit cartésien:

On appelle produit cartésien de deux ensembles A et B l'ensemble, noté $A \times B$, des couples (a, b) où $a \in A$ et $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \,/\, a \in A \text{ et } b \in B\} \quad \text{(se lit } A \text{ croix } B)$$

Rmq: $A \times B \neq B \times A$, $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

Exp: $A = \{0\}$, $B = \{0, 1, 2\}$ donc $\left\{\begin{array}{l} A \times B = \{(0,0), (0,1), (0,2)\} \\ B \times A = \{(0,0), (1,0), (2,0)\} \end{array}\right.$

Généralisation

$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(a_1, a_2, a_3) / a_i \in A_i, i = \overline{1,3}\}$ ensemble des triplets

$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) / a_i \in A_i, i = \overline{1,4}\}$ " " quadruples

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) / a_i \in A_i, i = \overline{1,n}\}$ " " n-uples

$A \times A \times \dots \times A = A^n$

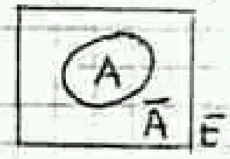
9/ Partition d'un ensemble

On appelle partition d'un ensemble E toute famille (E_i), $i \in I \subset \mathbb{N}$ de parties de E telles que :

$$\bigcup_{i \in I} E_i = E \quad \text{et} \quad E_i \cap E_j = \phi \quad \forall i \neq j$$

Exp : $E = \{0, 1, 2, 3\}$ $\begin{cases} \text{les parties } E_1 = \{0,2\}, E_2 = \{1\}, E_3 = \{3\} \text{ forment une partition de } E \\ \text{les parties } E_1 = \{0,1,2\}, E_2 = \{2,3\} \text{ ne forment pas " " "} \end{cases}$

Rmq : Pour toute partie A de E, A et $C_E A = \overline{A}$ forment une partition de E.



I.3/ Applications

1) Définition : On appelle application d'un ensemble E dans un ensemble F toute correspondance f qui à tout élément x de E associe un élément $y = f(x)$ de F.

on écrit : $f : E \longrightarrow F$, $x \longrightarrow f(x) = y$

E : ensemble de départ
F : " " d'arrivée
$f(x)$: l'image de x
x : l'antécédent de $f(x) = y$

Exp : $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$, $x \longrightarrow f(x) = x^2$ donc $f(-2) = 4$, $f(0) = 0$, $f(2) = 4$, ...
l'image de -2 est 4
4 a pour antécédents -2 et 2

2/ Restriction et Prolongement

Soient les 2 applications f et g telles que : $\begin{cases} f : E \longrightarrow F \\ g : G \longrightarrow H \end{cases}$

On dit que f est une restriction de g sur E ou que g est un prolongement de f sur G si :

$$E \subset G \quad \text{et} \quad \forall x \in E, \ f(x) = g(x)$$

Exp : $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f(x) = 1/x$

g est le prolongement de f sur $\mathbb{R}$

$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow g(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f est la restriction de g sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

3) Image directe - Image réciproque

a) Image directe

: Soit $f: E \to F$ une application et soit l'ensemble $A \subset E$. On appelle **image** ou **image directe** de A par f, le sous ensemble de F, noté $f(A)$, formé par les éléments $f(x)$, $x \in A$

donc $f(A) = \{ f(x) \,/\, x \in A \} \subset F$

Rmq: L'ensemble $f(E) = \{ f(x) \,/\, x \in E \}$ qui est l'image de E est aussi appelée **image de f**.

Exp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(x) = x^2$

On a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, $f(\mathbb{Z}) = \{ f(x) = x^2 \,/\, x \in \mathbb{Z} \} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$ (image de $\mathbb{Z}$)

on a aussi $f(\mathbb{R}) = \{ f(x) = x^2 \,/\, x \in \mathbb{R} \} = [0, +\infty[= \mathbb{R}^+$ (image de $\mathbb{R}$ ou image de f)

Proposition 1:

Si $f: E \to F$ et A et B deux parties de E, on a :

1°/ $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$	2°/ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$	3°/ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Dém: 1°/ $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$, on suppose que $A \subset B$ et on démontre que tout élément $y \in f(A)$ est un élément de $f(B)$.

$\forall y \in f(A)$, $\exists x \in A \,/\, y = f(x)$
comme $A \subset B$ alors $x \in B$ donc $f(x) = y \in f(B)$

2°/ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{2-a/ } f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \\ \text{2-b/ } f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) \end{cases}$

2-a/ $\left.\begin{array}{l} A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B) \text{ d'aprés 1°/} \\ B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B) \quad \text{"} \quad \text{"} \end{array}\right\} \Rightarrow f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

2-b/ Montrons que tout élément $y \in f(A \cup B)$ est un élément de $f(A) \cup f(B)$.

$\forall y \in f(A \cup B)$, $\exists x \in A \cup B \,/\, y = f(x)$

$x \in A \cup B \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{ou} \\ x \in B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \in f(A) \\ \text{ou} \\ f(x) \in f(B) \end{cases} \Rightarrow f(x) = y \in f(A) \cup f(B)$

3°/ $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

On a $\left.\begin{array}{l} A \cap B \subset A \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \text{ d'aprés 1°/} \\ A \cap B \subset B \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(B) \quad \text{"} \quad \text{"} \end{array}\right\} \Rightarrow f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Rmq: $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ n'est pas toujours vraie, comme dans le cas suivant :

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \,/\, f(x) = x^2$

$A = \{1\}$, $f(A) = \{1\}$ $\quad f(A) \cap f(B) = \{1\}$
$B = \{-1\}$, $f(B) = \{1\}$ $\quad A \cap B = \emptyset$, $f(A \cap B) = \emptyset$ $\Rightarrow f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$

b/ **Image réciproque** : Soit $f : E \to F$. On appelle image réciproque d'un élément $y \in F$ l'ensemble, noté $f^{-1}(y)$, des éléments $x \in E$ tels que $f(x) = y$. On écrit :

$$f^{-1}(y) = \{x \in E \ / \ f(x) = y\} \subset E$$

Par extension, l'image réciproque d'une partie B de F est l'ensemble noté :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ / \ f(x) \in B\} \subset E$$

Exp : Soit $f : [-1, 1] \to [0, 1]$, $f(x) = |x|$
$x \to |x|$

$$f^{-1}(1) = \{x \in [-1, 1] \ / \ f(x) = |x| = 1\} = \{-1, 1\}$$

$$f^{-1}([0, 1/2]) = \{x \in [-1, 1] \ / \ f(x) = |x| \in [0, 1/2]\} = [-1/2, 1/2]$$

Proposition 2 : Soient $f : E \to F$ et C et D deux parties de F, on a :

1°/ $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$	3°/ $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
2°/ $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$	4°/ $\overline{f^{-1}(D)} = f^{-1}(\overline{D})$

Dém : 1°/ $C \subset D \Rightarrow f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$. On suppose que $C \subset D$ et on démontre que tout élément $x \in f^{-1}(C)$ est un élément de $f^{-1}(D)$.

$\forall x \in f^{-1}(C)$, $f(x) \in C$, comme $C \subset D$ alors $f(x) \in D$ donc $x \in f^{-1}(D)$

4°/ $\overline{f^{-1}(D)} = f^{-1}(\overline{D})$

$$x \in \overline{f^{-1}(D)} \Longleftrightarrow x \notin f^{-1}(D) \Longleftrightarrow f(x) \notin D \Longleftrightarrow f(x) \in \overline{D} \Longleftrightarrow x \in f^{-1}(\overline{D})$$

4/ **Composition des Applications**

Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

L'application $g \circ f : E \to G$

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G, \quad E \xrightarrow{g \circ f} G$$

définie par : $\boxed{(g \circ f)(x) = g(f(x))}$ est appelée fonction composée de g par f

Exp : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = x+1$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to g(x) = x^2$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad \mathbb{R} \xrightarrow{g \circ f} \mathbb{R}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1$$

Rmq : si $f : E \to F$, $I_E : E \to E$ l'application identique sur E
$I_F : F \to F$ " " " F

$I_E(x) = x$, $I_F(y) = y$ alors $f \circ I_E = f$ et $I_F \circ f = f$

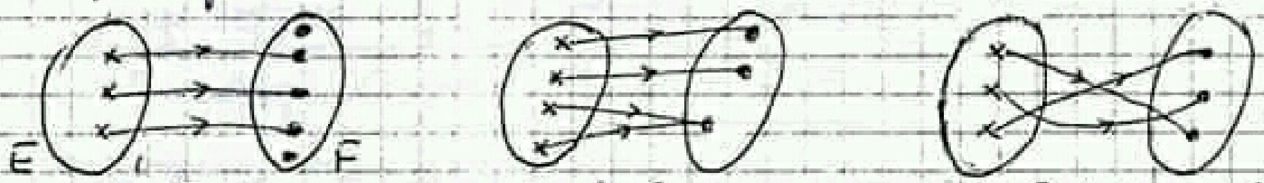
5/ Applications injectives, surjectives, bijectives

Soit $f : E \to F$

a/ f est dite **injective** ssi : $\begin{cases} \forall x, x' \in E \ (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')) \\ \text{ou} \\ \forall x, x' \in E \ (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x') \end{cases}$

b/ f est dite **surjective** ssi : $\forall y \in F, \exists x \in E \ / \ f(x) = y$

c/ f est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective ce qui revient à dire que tout élément de F est l'image par f d'un et d'un seul élément de E



injective non surjective — surjective non injective — injective et surjective donc bijective

Exps : 1°/ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ f(x) = x - 1$

f est injective car : $f(x) = f(x') \Rightarrow x - 1 = x' - 1 \Rightarrow x = x'$

f est surjective car : $\forall y \in \mathbb{R} : f(x) = x - 1 = y \Rightarrow x = y + 1$
donc $\exists x = y + 1 \ / \ f(x) = f(y+1) = y + 1 - 1 = y$

$\Rightarrow f$ bij

2°/ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ / \ g(x) = x^2$

g n'est pas injective car : $1 \neq -1$ mais $g(1) = g(-1) = 1$

" " " surjective car : Pour $y = -1$, $\nexists x \in \mathbb{R} \ / \ g(x) = x^2 = -1$

3°/ $I_E : E \to E \ / \ I_E(x) = x$ est bijective (I_E : l'application identique sur E)

Théorème : Soit $f : E \to F$ et soit l'équation $f(x) = y$ où $\begin{cases} y \text{ donné dans F et} \\ x \text{ l'inconnue dans E} \end{cases}$

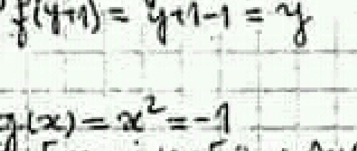
$\forall y \in F$, l'équation admet au plus une solution $\Leftrightarrow f$ inj
" " " " moins " " " $\Leftrightarrow$ " surj
" " " une solution unique $\Leftrightarrow$ " bij

Proposition 3 : Soient les applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors :

1°/ f, g inj $\Rightarrow g \circ f$ inj
2°/ " surj $\Rightarrow$ " surj
3°/ " bij $\Rightarrow$ " bij
4°/ $g \circ f$ inj $\Rightarrow f$ inj
5°/ $g \circ f$ surj $\Rightarrow g$ surj
6°/ $g \circ f$ bij $\Rightarrow g$ surj et f inj

6/ Application réciproque d'une bijection

Soit l'application bijective $f : E \to F$
$x \to f(x) = y$



L'application : $f^{-1} : F \to E$
$y \to f^{-1}(y) = x$
est appelée application réciproque de f

Propriétés : f^{-1} est unique et bijective

$\forall x \in E : (f^{-1} \circ f)(x) = x : f^{-1} \circ f = I_E$

$\forall y \in F : (f \circ f^{-1})(y) = y : f \circ f^{-1} = I_F$

Proposition 4: Soient les deux applications :

$$\begin{cases} f: E \to F \\ g: F \to E \end{cases} \text{ telles que : } \begin{cases} g \circ f = I_E \\ f \circ g = I_F \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} f \text{ et } g \text{ sont des bijections} \\ \text{réciproques l'une de} \\ \text{l'autre } (f^{-1} = g \text{ et } g^{-1} = f) \end{cases}$$

Dém

$$\begin{cases} g \circ f = I_E \text{ (bijection)} \Rightarrow g \text{ surj et } f \text{ inj} \\ f \circ g = I_F \text{ (bijection)} \Rightarrow f \text{ surj et } g \text{ inj} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ bij} \Rightarrow f^{-1}(\exists) = g \\ g \text{ bij} \Rightarrow g^{-1}(\exists) = f \end{cases}$$

Proposition 5: si $f: E \to F$ et $g: F \to G$ sont deux applications bijectives alors :

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \end{tikzcd}$$

Dém

On applique la proposition 4, on démontre que:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "f^{-1}\circ g^{-1}"'] & F \arrow[r, "f^{-1}"] & E \end{tikzcd}$$

a/ $(g \circ f) \circ (g \circ f)^{-1} = (g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = I_G$

b/ $(g \circ f)^{-1} \circ (g \circ f) = (f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = I_E$

En effet : a/ $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ \underbrace{f \circ f^{-1}}_{I_F} \circ g^{-1} = g \circ I_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = I_G$

même chose pour b/

Exp:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x) = 3x - 2 = y \longrightarrow g(y) = y + 2 = z$$

On vérifie que f et g sont bijectives donc f^{-1} et g^{-1} existent. donc $(g \circ f)$ est bijective

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3x - 2 = y \Rightarrow f^{-1}(y) = x = \dfrac{y+2}{3} \\ g(y) = y + 2 = z \Rightarrow g^{-1}(z) = y = z - 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z) \\ f^{-1}(g^{-1}(z)) = f^{-1}(z-2) = \dfrac{(z-2)+2}{3} \\ = z/3 \end{array}$$

Autre méthode:

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = (3x - 2) + 2 = 3x = z$

donc $(g \circ f)(x) = 3x = z \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(z) = x = z/3$

Rmq: Ne pas confondre l'application réciproque f^{-1} qui n'est définie que si f est bijective et l'image réciproque $f^{-1}(y)$ (où $f^{-1}(y) = \{x \in E \,/\, f(x) = y\}$) qui est définie pour toute application f

Exp: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to f(x) = x^2$; f n'est pas bijective donc l'application réciproque f^{-1} n'existe pas

Mais $f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f(x) = x^2 = 1\} = \{-1, 1\}$, $f^{-1}(0) = \{0\}$, $f^{-1}(-1) = \phi$, ...

I.4/ Relations

1) Définition : On appelle relation binaire dans un ensemble E une relation "$\mathcal{R}$" portant sur les couples $(x,y) \in E \times E$. Pour exprimer que x est en relation "$\mathcal{R}$" avec y, on écrit $x \mathcal{R} y$.

Exp : Dans $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$, on considère la relation $\mathcal{R}$ = "divise". donc $x \mathcal{R} y \iff x$ divise y, on a donc $2 \mathcal{R} 4$, $3 \mathcal{R} 9$, ...

Dans l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ (l'ensemble des parties de E), on considère la relation $\mathcal{R}$ = "inclus", donc $A \mathcal{R} B \iff A \subset B$.

2) Relation d'équivalence

a/ une relation binaire $\mathcal{R}$ dans un ensemble E est dite relation d'équivalence si elle est :

i/ Réflexive : $\forall x \in E : x \mathcal{R} x$
ii/ Symétrique : $\forall x, y \in E : x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
iii/ Transitive : $\forall x, y, z \in E : \begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow x \mathcal{R} z$

b/ La classe d'équivalence d'un élément $x \in E$ est l'ensemble des éléments $y \in E$ qui sont en relation "$\mathcal{R}$" avec x, on la note $\dot{x}$

$$\boxed{\dot{x} = \{y \in E \;/\; y \mathcal{R} x\}} \qquad \dot{x} \subset E$$

c/ L'ensemble des classes d'équivalence des éléments de E est appelé ensemble quotient de E par $\mathcal{R}$, il est noté $E/_{\mathcal{R}}$

$$\boxed{E/_{\mathcal{R}} = \{\dot{x} \;/\; x \in E\} \subset \mathcal{P}(E)}$$

Proposition

i/ $\forall x \in E$, $x \in \dot{x}$ et $E = \bigcup_{x \in E} \dot{x}$

ii/ $\forall x, y \in E \; [\dot{x} = \dot{y} \iff x \mathcal{R} y]$

iii/ $\forall x, y \in E \; [\dot{x} \neq \dot{y} \Rightarrow \dot{x} \cap \dot{y} = \Phi]$

Rmq : de i/ et iii/ on peut conclure que les différentes classes $\dot{x}$, $x \in E$ forment une partition de E

Exp : Soit $E = \mathbb{Z}$ et soit $\mathcal{R}$ la relation définie sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ par :

$x \mathcal{R} y \iff x - y \equiv 0 \bmod (8)$ ou $x \equiv y \bmod (8)$ qui se lit :
(x congru à y modulo 8) et qui signifie que $\begin{pmatrix} 8 \text{ divise } x-y \\ x-y \text{ est divisible par } 8 \\ \text{" multiple de } 8 \end{pmatrix}$
(c.à.d : $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - y = 8k$)

Montrons que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$.

i/ $\mathcal{R}$ réflexive : $\forall x \in \mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}x \Leftrightarrow x-x=0=8.0,\ 0\in\mathbb{Z}$

ii/ $\mathcal{R}$ symétrique : $\forall x, y \in \mathbb{Z}$: $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x-y=8k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow y-x=8(-k),\ (-k)\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$$

iii/ $\mathcal{R}$ transitive : $\left.\begin{matrix} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x\mathcal{R}z$ $\quad \left.\begin{matrix} x-y=8k,\ k\in\mathbb{Z} \\ y-z=8k',\ k'\in\mathbb{Z} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x-z=8(k+k') \\ (k+k')\in\mathbb{Z} \end{matrix}$

donc $x-z=8(k+k'),\ (k+k')\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x\mathcal{R}z$

La classe de x : $\dot{x}$

$$\dot{x} = \{y\in\mathbb{Z} \,/\, y\mathcal{R}x\} = \{y\in\mathbb{Z} \,/\, y-x=8k,\ k\in\mathbb{Z}\}$$

Rappelons que $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$$\dot{0} = \{x\in\mathbb{Z} \,/\, x\mathcal{R}0 \Leftrightarrow \underset{x=8k}{x-0=8k},\ k\in\mathbb{Z}\} = \{0, 8, 16, 24, \ldots\} \cup \{-8, -16, -24, \ldots\}$$

$$\dot{1} = \{x\in\mathbb{Z} \,/\, x\mathcal{R}1 \Leftrightarrow \underset{x=8k+1}{x-1=8k},\ k\in\mathbb{Z}\} = \{1, 9, 17, 25, \ldots\} \cup \{-7, -15, -23, \ldots\}$$

$\vdots$

$$\dot{7} = \{x\in\mathbb{Z} \,/\, x\mathcal{R}7 \Leftrightarrow \underset{x=8k+7}{x-7=8k},\ k\in\mathbb{Z}\} = \{7, 15, 23, 31, \ldots\} \cup \{-1, -9, -17, \ldots\}$$

$\dot{0} = \dot{8} = \dot{16} = \dot{24} = \cdots = -\dot{8} = -\dot{16} = -\dot{24} = \cdots$ $\dot{1} = \dot{9} = \dot{17} = \dot{25} = \cdots = -\dot{7} = -\dot{15} = -\dot{23} = \cdots$ $\dot{6} = \dot{14} = \dot{22} = \dot{30} = \cdots = -\dot{2} = -\dot{10} = -\dot{18} = \cdots$ $\dot{7} = \dot{15} = \dot{23} = \dot{31} = \cdots = -\dot{1} = -\dot{9} = -\dot{17} = \cdots$	On a 8 classes <u>différentes</u>

L'ensemble quotient est : $\mathbb{Z}/_{\mathcal{R}} = \{\dot{0}, \dot{1}, \dot{2}, \dot{3}, \dot{4}, \dot{5}, \dot{6}, \dot{7}\}$

<u>Rmq</u> : Ces classes sont 2 à 2 disjointes et leur réunion est égale à $\mathbb{Z}$.

3) <u>Relation d'ordre</u>

a/ Une relation binaire $\mathcal{R}$ dans E est dite <u>relation d'ordre</u> si elle est :

> i/ <u>Réflexive</u> : $\forall x\in E,\ x\mathcal{R}x$
>
> ii/ <u>Antisymétrique</u> : $\forall x, y \in E$: $\left\{\begin{matrix} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}x \end{matrix}\right. \Rightarrow x=y$
>
> iii/ <u>Transitive</u> : $\forall x, y, z \in E$: $\left\{\begin{matrix} x\mathcal{R}y \\ y\mathcal{R}z \end{matrix}\right. \Rightarrow x\mathcal{R}z$

On note souvent une relation d'ordre par $\leqslant$

Une relation d'ordre $\leqslant$ dans un ensemble E est dite <u>d'ordre total</u> si $\forall x, y \in E$, on a : $x\leqslant y$ ou $y\leqslant x$, sinon elle est dite <u>d'ordre partiel</u>.

b/ Majorants - Minorants

Soient E un ensemble ordonné par la relation d'ordre $\leq$ et A une partie de E.

$a \in E$ est un majorant de A si : $\forall x \in A,\ x \leq a$
on dit que A est majorée si elle possède au moins un majorant.

$a \in E$ est un minorant de A si : $\forall x \in A,\ a \leq x$
on dit que A est minorée si elle possède au moins un minorant.

On dit que A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée

c/ Plus grand élément — Plus petit élément
Maximum (max) — Minimum (min)

$a \in E$ est le plus grand élément de A ($a = \max A$) si : $\begin{cases} a \in A \\ \forall x \in A : x \leq a \end{cases}$

$a \in E$ est le plus petit élément de A ($a = \min A$) si : $\begin{cases} a \in A \\ \forall x \in A : a \leq x \end{cases}$

d/ Borne supérieure (sup)
Borne inférieure (inf)

Soit A une partie d'un ensemble E ordonné par la relation "$\leq$"

$a \in E$ est la borne supérieure de A si a est le plus petit des majorants de A.
Si la borne supérieure a existe, on écrit $a = \sup A$.

$a \in E$ est la borne inférieure de A si a est le plus grand des minorants de A.
Si la borne inférieure a existe, on écrit $a = \inf A$.

Rmq1 Soit A une partie de E
$\max A, \min A, \sup A, \inf A$ ne sont pas nécessairement définis, mais si l'un d'eux existe, il est unique.

Rmq2 :

$\sup A \nexists \Rightarrow \max A \nexists$ $\sup A = a : \begin{cases} \text{si } a \in A \text{ alors } \max A = a \\ \text{si } a \notin A \text{ alors } \max A \nexists \end{cases}$	$\inf A \nexists \Rightarrow \min A \nexists$ $\inf A = a : \begin{cases} a \in A \Rightarrow \min A = a \\ a \notin A \Rightarrow \min A \nexists \end{cases}$

Exps:
1/ La relation "$\leq$" (inférieur ou égal) sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre total.

i) Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$

ii) Antisymétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R} : \begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow x = y$

iii) Transitivité : $\forall x, y, z : \begin{cases} x \leq y \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow x \leq z$

La relation "$\leq$" est d'ordre total car : $\forall x, y \in \mathbb{R}$ on a : $x \leq y$ ou $y \leq x$

2/ La relation " x divise y " est une relation d'ordre partiel dans $\mathbb{N}^*$
(x divise $y \iff \exists k \in \mathbb{N}^* : y = kx$).

i/ Réflexivité : $\forall x \in \mathbb{N}^* : x = 1.x ,\ 1 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x$ divise x

ii/ Antisymétrie : $\begin{cases} x \text{ divise } y \iff y = kx ,\ k \in \mathbb{N}^* \\ y \text{ divise } x \iff x = k'y ,\ k' \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow y = kk'y \Rightarrow kk' = 1$
$\Rightarrow k = k' = 1 \Rightarrow x = y$

iii/ Transitivité $\begin{cases} x \text{ divise } y \iff y = kx ,\ k \in \mathbb{N}^* \\ y \text{ divise } z \iff z = k'y ,\ k' \in \mathbb{N}^* \end{cases} \Rightarrow z = k'kx ,\ k'k \in \mathbb{N}^*$
$\Rightarrow x$ divise z

L'ordre est partiel car :
$2, 3 \in \mathbb{N}^*$ on n'a ni 2 divise 3 ni 3 divise 2

3/ Dans $\mathcal{P}(E)$ l'inclusion " $\subset$ " est une relation d'ordre partiel

i/ $\forall A \in \mathcal{P}(E) : A \subset A$

ii/ $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases} \Rightarrow A = B$

iii/ $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) : \begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset C$

L'ordre est partiel car si $A, B \in \mathcal{P}(E)$ on n'a pas obligatoirement $A \subset B$ ou $B \subset A$

Exp : $E = \{0, 1\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\Phi, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$ on n'a ni $\{0\} \subset \{1\}$
ni $\{1\} \subset \{0\}$

4/ Dans $\mathbb{R}$ muni de la relation d'ordre " $\leq$ " usuelle
a/ déterminons $\inf A$, $\min A$, $\sup A$, $\max A$ où $A = [1, 2[$

- Tous les éléments de l'intervalle $]-\infty, 1]$ sont des minorants de $A = [1, 2[$. Le plus grand de ces minorants est égal à 1, donc $\inf A = 1$. Comme $1 \in A = [1, 2[$, alors $\min A = 1$

- Tous les éléments de l'intervalle $[2, +\infty[$ sont des majorants de $A = [1, 2[$. Le plus petit de ces majorants est égal à 2, donc $\sup A = 2$. Comme $2 \notin A = [1, 2[$, alors $\max A$ n'existe pas.

b/ Déterminons $\inf B$, $\min B$, $\sup B$, $\max B$ où :

$$B = \{ x \in \mathbb{Q} \ / \ -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10} \}$$

- Tous les éléments de l'intervalle $[\sqrt{10}, +\infty[$ sont des majorants de B
le plus petit des majorants est $\sqrt{10}$ donc $\sup B = \sqrt{10}$
Comme $\sqrt{10} \notin B$ (car $\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$) donc $\max B \nexists$.

- Tous les éléments de l'intervalle $]-\infty, -\sqrt{10}]$ sont des minorants de B
le plus grand des minorants est $-\sqrt{10}$ donc $\inf B = -\sqrt{10}$

Comme $-\sqrt{10} \notin B$ (car $-\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}$) donc $\min B \nexists$.